М. Я. ВЫГОДСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ДВЕНАДЦАТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

517 (083)
В 92
УДК 510 (083)

$$\text{В}\ \frac{20203-002}{053\ (02)\text{-}77}\ \text{Б3-77}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛИНИЯХ

РЯДЫ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

ТАБЛИЦЫ

ЧТО МОЖНО НАЙТИ В СПРАВОЧНИКЕ

Эта книга составляет продолжение Справочника по элементарной математике того же автора и включает весь материал, входящий в программу основного курса математики высших технических учебных заведений (механико-машиностроительных, строительных, авиационных, транспортных, электротехнических, энергетических и горнометаллургических).

Книга имеет двоякое назначение.

Во-первых, она дает фактическую справку: что такое векторное произведение, как найти поверхность тела вращения, как разложить функцию в тригонометрический ряд и т. п. Соответствующие определения, теоремы, правила и формулы, сопровождаемые примерами и практическими указаниями, находятся быстро; этой цели служат детальная рубрикация и подробный алфавитный указатель.

Во-вторых, книга предназначена для систематического чтения. Она не претендует на роль учебника, и потому доказательства проводятся здесь полностью лишь в исключительных случаях. Однако она может служить пособием для первого ознакомления с предметом. С этой целью здесь подробно разъясняются основные понятия, как-то: понятие скалярного произведения (§ 104), предела (§§ 203–206), дифференциала (§§ 228–235), бесконечного ряда (§§ 270, 366–370). С этой же целью все правила иллюстрируются большим числом примеров, которые составляют в этой книге органическую ее часть (см. §§ 50–62, 134, 149, 264–266, 369, 422, 498 и др.). Они уясняют, как надо применять правила, когда правило теряет силу, каких ошибок надо избегать (§§ 290, 339, 340, 379 и др.).

Теоремы и правила сопровождаются также различного рода пояснениями. Иногда имеется в виду наглядно выявить *содержание* теоремы, чтобы учащийся мог по-настоящему усвоить доказательство. Иногда пояснение сопровождает частный пример и содержит такое рассуждение, которое явится полным доказательством теоремы, если его применить к общему случаю (см. §§ 148, 149, 369, 374). Иногда пояснение ограничивается указанием тех параграфов, на которых основывается доказательство. Мелким шрифтом выделен тот материал, который можно опустить *при первом чтении*, что вовсе не всегда означает его маловажность.

Сознательное усвоение математических идей чрезвычайно облегчается при ознакомлении с обстоятельствами их зарождения и развития. Вот почему большое внимание уделено здесь историческим сведениям. Так, §§ 270, 366 в связи с §§ 271, 383, 399, 400, надеюсь, позволят уяснить теорию ряда Тейлора лучше, чем при обычном формальном изложении. Наряду с историческими сведениями даны биографические справки об ученых, имена которых связаны с излагаемым материалом.

Других методических особенностей книги нет смысла касаться: учащийся будет судить о них по степени доходчивости, преподавателю же достаточно указания на ряд характерных параграфов: 28, 60–62, 92, 184–190, 203–206, 228–234, 237, 258–260, 271, 343–347, 430–438, 459.

Настоящее издание печатается без существенных изменений по сравнению с предыдущим изданием. Исправлены лишь замеченные опечатки.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии

В школьной (*элементарной*) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности. Основную роль играют построения, вычисления же, хотя практическое значение их и велико, в теории играют подчиненную роль. Выбор того или иного построения обычно требует изобретательности. Это и составляет главную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия возникла из потребности создать единообразные средства для решения геометрических задач с тем, чтобы применить их к изучению важных для практики кривых линий различной формы.

Эта цель была достигнута созданием *координатного метода* (см. ниже §§ 2–4). В нем ведущую роль играют вычисления, построения же имеют вспомогательное значение. Вследствие этого решение задач методом аналитической геометрии требует гораздо меньшей изобретательности.

Создание координатного метода было подготовлено трудами древнегреческих математиков, в особенности Аполлония (3–2 в. до н. э.). Систематическое развитие координатный метод получил в первой половине 17 века в работах Ферма[1]) и Декарта[2]). Они, однако,

---

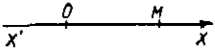
[1]) Пьер Ферма (1601–1655) — знаменитый французский математик, один из предшественников Ньютона и Лейбница в разработке дифференциального исчисления; внес большой вклад в теорию чисел. Большинство работ Ферма (в том числе по аналитической геометрии) не публиковалось при жизни автора.

[2]) Рене Декарт (1596–1650) — знаменитый французский философ и математик. Опубликование его «Геометрии» (одно из приложений к философскому трактату «Рассуждение о методе») в 1637 г. считается (условно) датой рождения аналитической геометрии.

рассматривали только плоские линии. К систематическому изучению пространственных линий и поверхностей координатный метод был применен впервые Л. Эйлером[1]).

§ 2. Координаты

Координатами точки называются такие величины, которые определяют положение этой точки (в пространстве, на плоской или на кривой поверхности, на прямой или кривой линии). Так, если, например, точка M должна лежать где-нибудь на прямой линии $X'X$ (черт. 1), то ее положение можно определить одним числом, например, следующим образом: выбрав на $X'X$ какую-либо начальную точку O, измерим отрезок OM, скажем, в сантиметрах. Мы получим число x, положительное или отрицательное, смотря по тому, куда направлен отрезок OM (вправо или влево, если прямая горизонтальна). Число x есть координата точки M.



Черт. 1

Значение координаты x зависит от выбора начальной точки O, от выбора положительного направления на прямой и от того, какой отрезок принят за единицу масштаба.

§ 3. Прямоугольная система координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Простейший способ таков.

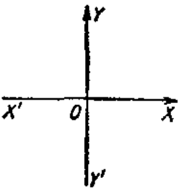
Проводятся две взаимно перпендикулярные прямые $X'X$, $Y'Y$ (черт. 2). Они называются *осями координат*. Одна из них $X'X$ (обычно ее проводят горизонтально) называется *осью абсцисс*, другая $Y'Y$ — *осью ординат*. Точка O их пересечения называется *началом координат*, или, короче, *началом*. Для измерения отрезков на осях координат выбирается некоторая единица масштаба, произвольная, но одна и та же для обеих осей.

На каждой оси выбирается положительное направление (обозначаемое стрелкой). На черт. 2 луч OX дает положительное направление на оси абсцисс, а луч OY — на оси ординат.

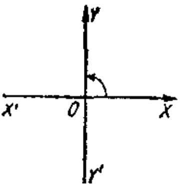
---

[1]) Леонард Эйлер (1707—1783) родился в Швейцарии. В 1727 г. прибыл в Россию; работал сначала в качестве адъюнкта (научного сотрудника) Петербургской академии наук, а затем (с 1733 г.) в качестве ее академика. Написал свыше 800 работ. Во всех физико-математических науках сделал важнейшие открытия. Много содействовал развитию русской науки.

Принято выбирать положительные направления так, чтобы (черт. 3) положительный луч OX после поворота на 90° против часовой стрелки совмещался с положительным лучом OY



Черт. 2.

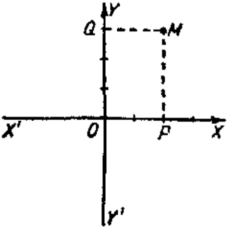


Черт. 3.

Оси координат $X'X$, $Y'Y$ (с установленными положительными направлениями и выбранным масштабом) образуют *прямоугольную систему координат.*

§ 4. Прямоугольные координаты

Положение точки M на плоскости в прямоугольной системе координат (§ 3) определяется следующим образом. Проводим $MP \| Y'Y$ до пересечения с осью $X'X$ в точке P (черт. 4) и $MQ \| X'X$ до пересечения с осью $Y'Y$ в точке Q. Числа x и y, измеряющие отрезки OP и OQ в избранном масштабе (а иногда и сами эти отрезки), называются *прямоугольными координатами* (короче, *координатами*) точки M. Эти числа берем положительными или отрицательными в зависимости от направления отрезков OP, OQ. Число x называется *абсциссой* точки M, число y — ее *ординатой*.



Черт. 4.

На черт. 4 точка M имеет абсциссу $x=2$ и ординату $y=3$ (при единице масштаба 0,4 *см*). Это записывается так: $M(2; 3)$. Вообще запись $M(a; b)$ означает, что точка M имеет абсциссу

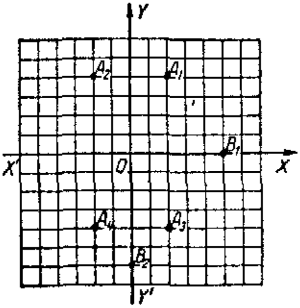
$$x = a$$

и ординату

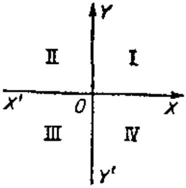
$$y = b.$$

Примеры. Отмеченные на черт. 5 точки регистрируются так: $A_1(+2;\ +4)$, $A_2(-2;\ +4)$, $A_3(+2;\ -4)$, $A_4(-2;\ -4)$, $B_1(+5;\ 0)$, $B_2(0;\ -6)$, $O(0;\ 0)$.

Замечание. Координаты данной точки M будут иными в иной прямоугольной системе координат.



Черт. 5.



Черт. 6.

§ 5. Координатные углы

Четыре угла, образованные осями координат, носят название *координатных углов*. Они нумеруются, как показано на черт. 6. Следующая таблица показывает, какие знаки имеют координаты точки в различных координатных углах:

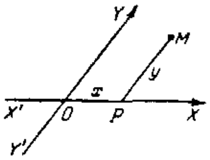
Координатные углы / Координаты	I	II	III	IV
Абсцисса	+	−	−	+
Ордината	+	+	−	−

На черт. 5 точка A_1 лежит в первом координатном углу, точка A_2 — во втором, точка A_4 — в третьем и точка A_3 — в четвертом.

Если точка лежит на оси абсцисс (например, точка B_1 на черт. 5), то ее ордината y равна нулю. Если точка лежит на оси ординат (например, точка B_2 на черт. 5), то ее абсцисса равна нулю.

§ 6. Косоугольная система координат

Кроме прямоугольной системы координат, употребляются и другие системы. Косоугольная система (она наиболее сходна с прямоугольной) строится так: проводятся (черт. 7) две неперпендикулярные прямые $X'X$ и $Y'Y$ (*оси координат*) и дальше поступают так же, как при построении прямоугольной системы (§ 3). Координаты $x = OP$ (абсцисса) и $y = PM$ (ордината) определяются так же, как объяснено в § 4.



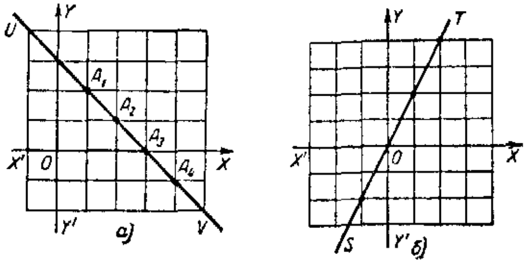
Черт. 7.

Прямоугольная и косоугольная системы объединяются под названием *декартовой системы координат.*

Наряду с декартовой применяются и другие системы координат (наиболее употребительна *полярная* система; см. § 73).

§ 7. Уравнение линии

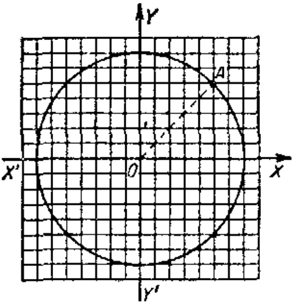
Рассмотрим уравнение $x+y = 3$, связывающее абсциссу x и ординату y. Ему удовлетворяет множество пар значений x, y, например, $x = 1$ и $y = 2$, $x = 2$ и $y = 1$, $x = 3$ и $y = 0$, $x = 4$ и $y = -1$ и т. д. Каждой паре координат (в данной системе координат) соответствует одна



Черт. 8.

точка (§ 4). На черт. 8, *а* изображены точки A_1 (1; 2), A_2 (2; 1), A_3 (3; 0), A_4 (4; -1). Они лежат на одной прямой UV. На той же прямой лежит всякая другая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $x+y = 3$. Обратно, у любой точки, лежащей на прямой UV, координаты x, y удовлетворяют уравнению $x+y = 3$.

Сообразно с этим говорят: *уравнение* $x+y=3$ *есть уравнение прямой линии* UV. Говорят также: *уравнение* $x+y=3$ *представляет прямую* UV. В аналогичном смысле надо понимать выражения: «уравнение прямой линии ST (черт. 8, *б*) есть $y=2x$», уравнение $x^2+y^2=49$ представляет окружность (черт. 9), радиус которой содержит 7 масштабных единиц, а центр совмещается с началом координат (см. § 38).

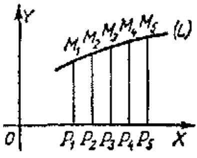


Черт. 9.

Вообще *уравнение, связывающее координаты x, y, называется уравнением линии L, если соблюдены два условия: 1) координаты x, y всякой точки M линии L удовлетворяют этому уравнению, 2) координаты x, y всякой точки, не лежащей на линии L, не удовлетворяют этому уравнению.*

Координаты точки M, взятой на линии L произвольным образом, называют *текущими координатами*, так как линия L может быть образована перемещением («течением») точки M.

Пусть M_1, M_2, M_3,... (черт. 10) — последовательные положения точки M на линии L. Построим ряд перпендикуляров M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ... к оси OX. Получим идущие друг за другом отрезки P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3,... На оси OX отсекаются при этом отрезки OP_1, OP_2, OP_3,... Они будут абсциссами. С этим связано происхождение терминов «абсцисса» и «ордината». Латинское слово «абсцисса» (abscissa) в переводе означает «отсеченная»; слово «ордината» есть сокращение термина «ординатим дукта» (ordinatim ducta), что означает «подряд проведенная».



Черт. 10.

Представляя каждую точку плоскости ее координатами, а каждую линию — уравнением, связывающим текущие координаты, мы сводим геометрическую задачу к «аналитической» (т. е. вычислительной). Отсюда название «*аналитическая геометрия*.»

§ 8. Взаимное расположение линии и точки

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка M на некоторой линии L, достаточно знать координаты точки M и уравнение линии L. Если координаты точки M удовлетворяют уравнению линии L, то M лежит на L; в противном случае не лежит.

Пример. Лежит ли точка $M(5;\ 5)$ на окружности $x^2+y^2=49$ (§ 7)?

Решение. Подставим значения $x=5$, $y=5$ в уравнение $x^2+y^2=49$. Так как уравнение не удовлетворяется, то точка M не лежит на рассматриваемой окружности.

§ 9. Взаимное расположение двух линий

Чтобы ответить на вопрос, есть ли у двух линий общие точки и если да, то сколько, достаточно знать уравнения этих линий. Если уравнения совместны, то общие точки есть, в противном случае их нет. Число общих точек равно числу решений системы уравнений.

Пример 1. Прямая линия $x+y=3$ (§ 7) и окружность $x^2+y^2=49$ имеют две общие точки, ибо система

$$x+y=3,\quad x^2+y^2=49$$

имеет два решения:

$$x_1=\frac{3+\sqrt{89}}{2}\approx 6{,}22,\quad y_1=\frac{3-\sqrt{89}}{2}=-3{,}22$$

и

$$x_2=\frac{3-\sqrt{89}}{2}\approx -3{,}22,\quad y_2=\frac{3+\sqrt{89}}{2}\approx 6{,}22.$$

Пример 2. Прямая линия $x+y=3$ и окружность $x^2+y^2=4$ не имеют общих точек, так как система

$$x+y=3,\quad x^2+y^2=4$$

не имеет решений (действительных).

§ 10. Расстояние между двумя точками

Расстояние d между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ выражается формулой

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример. Расстояние между точками $M(-2{,}3;\ 4{,}0)$ и $N(8{,}5;\ 0{,}7)$ составляет

$$d=\sqrt{(8{,}5+2{,}3)^2+(0{,}7-4)^2}=\sqrt{10{,}8^2+3{,}3^2}\approx 11{,}3$$

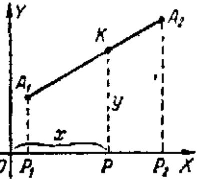
(масштабных единиц).

Замечание 1. Порядок точек M и N не играет роли; можно N считать первой, а M — второй.

Замечание 2. Расстояние d считается положительным; поэтому в формуле (1) корень берется с одним знаком (плюс).

§ 11. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ (черт. 11). Требуется найти координаты x, y точки K, делящей отрезок A_1A_2 в отношении



Черт. 11.

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2.$$

Решение дается формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \\ y &= \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если отношение $m_1 : m_2$ обозначить буквой λ, то формулы (1) примут несимметричный вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

Пример 1. Даны точка $B(6; -4)$ и точка O, совпадающая с началом координат. Найти точку K, делящую BO в отношении $2 : 3$.

Решение. В формулы (1) надо подставить:

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ x_1 = 6,\ y_1 = -4,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

Получаем:

$$x = \frac{18}{5} = 3{,}6, \quad y = -\frac{12}{5} = -2{,}4.$$

Это — координаты искомой точки K.

Замечание 1. Выражение «точка K делит отрезок A_1A_2 в отношении $m_1 : m_2$» означает, что отношение $m_1 : m_2$ равно отношению отрезков $A_1K : KA_2$, взятых *именно в этом* (а не в обратном) порядке. В примере 1 точка $K(3{,}6; -2{,}4)$ делит отрезок BO в отношении $2 : 3$, а отрезок OB — в отношении $3 : 2$.

Замечание 2. Пусть точка K делит отрезок A_1A_2 *внешним образом*, т. е. лежит на продолжении отрезка A_1A_2; тогда формулы (1) и (2) сохраняют силу, если величине $m_1 : m_2 = \lambda$ приписать отрицательный знак.

Пример 2. Даны точки $A_1(1; 2)$ и $A_2(3; 3)$. Найти на продолжении отрезка A_1A_2 точку, отстоящую от A_1 вдвое дальше, чем от A_2.

Решение. Имеем $\lambda = m_1 : m_2 = -2$ (так что можно положить $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ или $m_1 = 2$, $m_2 = -1$). По формулам (1) находим:

$$x = \frac{1\cdot 1+(-2)\cdot 3}{-2+1} = 5, \quad y = \frac{1\cdot 2+(-2)\cdot 3}{-2+1} = 4.$$

§ 11а. Деление отрезка пополам

Координаты середины отрезка A_1A_2 равны полусуммам соответственных координат его концов:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Эти формулы получаются из формул (1) и (2) § 11, если положить $m_1 = m_2 = 1$ или $\lambda = 1$.

§ 12. Определитель второго порядка [1]

Запись $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ обозначает то же, что $ad - bc$.

Примеры.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 7 = -11;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 6\cdot(-4) = 30.$$

Выражение $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ называется *определителем второго порядка.*

§ 13. Площадь треугольника

Пусть точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$ — вершины треугольника, тогда его площадь выражается формулой

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}; \tag{1}$$

в правой части стоит определитель второго порядка (§ 12). Площадь треугольника мы считаем положительной. Поэтому перед определителем берем знак плюс, если значение определителя положительно, и минус, если оно отрицательно.

---

[1] Подробнее об определителях см. §§ 182—185.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 3)$, $B(2; -5)$ и $C(-8; 4)$.

Решение. Принимая A за первую вершину, B за вторую, C за третью, находим:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+8 & 3-4 \\ 2+8 & -5-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -81+10 = -71.$$

В формуле (1) надо взять знак минус; получаем:

$$S = -\frac{1}{2}\cdot(-71) = 35{,}5.$$

Если же считать первой вершиной A, второй C и третьей B, то

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2 & 3+5 \\ -8-2 & 4+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -10 & 9 \end{vmatrix} = 71.$$

В формуле (1) теперь нужно взять знак плюс; получим снова $S = 35{,}5$.

Замечание. Если вершина A_3 совпадает с началом координат, то площадь треугольника представляется формулой

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(частный случай формулы (1) при $x_3 = y_3 = 0$).

§ 14. Прямая линия; уравнение, разрешенное относительно ординаты («с угловым коэффициентом»)

Всякую прямую, не параллельную оси ординат, можно представить уравнением вида

$$y = ax + b; \tag{1}$$

здесь a есть тангенс угла α (черт. 12), образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс[1])

---

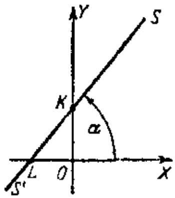
[1]) Начальным лучом угла α считается луч OX. На прямой SS' можно взять любой из лучей LS, LS'. Угол XLS считается положительным, если поворот, совмещающий луч LX с лучом LS, совершается в том же направлении, что поворот на 90° оси OX, совмещающий ее с осью OY (т. е. при обычном расположении — против часовой стрелки).

($a = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle XLS$), а число b по абсолютному значению равно длине отрезка OK, отсекаемого прямой на оси ординат; число b положительно или отрицательно в зависимости от направления отрезка OK. Если прямая проходит через начало, то $b = 0$.

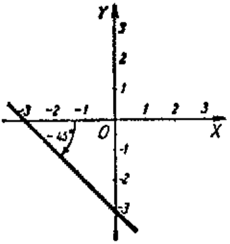
Величину a называют *угловым коэффициентом*, величину b — *начальной ординатой*.

Пример 1. Написать уравнение прямой (черт. 13), образующей с осью OX угол $\alpha = -45°$ и отсекающей начальную ординату $b = -3$.

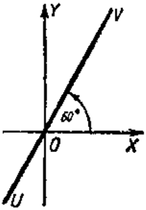
Решение. Угловой коэффициент $a = \operatorname{tg}(-45°) = -1$. Искомое уравнение есть $y = -x - 3$.



Черт. 12.



Черт. 13.



Черт. 14.

Пример 2. Какую линию представляет уравнение $3x = \sqrt{3}\,y$?

Решение. Разрешив уравнение относительно y, находим $y = \sqrt{3}\,x$. По угловому коэффициенту $a = \sqrt{3}$ найдем угол α: так как $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, то $\alpha = 60°$ (или $\alpha = 240°$). Начальная ордината $b = 0$; поэтому данное уравнение представляет прямую UV (черт. 14), проходящую через начало и образующую с осью OX угол $60°$ (или $240°$).

Замечание 1. В отличие от других видов уравнения прямой (см. ниже §§ 30, 33) уравнение (1) называется *разрешенным относительно ординаты* или *уравнением с угловым коэффициентом*[1]).

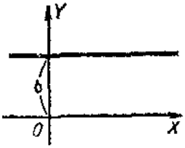
---

[1]) Первое название предпочтительно, так как уравнение вида $x = a'y + b'$ (разрешенное относительно абсциссы) тоже представляет прямую (не параллельную оси абсцисс); так как координаты x, y равноправны, то число a' можно было бы назвать угловым коэффициентом с тем же правом, что и число a.

З а м е ч а н и е 2. Прямую, параллельную оси ординат, нельзя представить уравнением, разрешенным относительно ординаты. Ср. § 15.

§ 15. Прямая, параллельная оси

Прямая, параллельная оси абсцисс (черт. 15), представляется уравнением[1])



Черт. 15.

$$y = b, \tag{1}$$

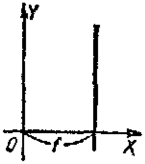
где величина b по абсолютному значению равна расстоянию от оси абсцисс до прямой. Если $b > 0$, то прямая лежит «над» осью абсцисс (см. черт. 15); если $b < 0$, — то «под» ней. Сама ось абсцисс представляется уравнением

$$y = 0. \tag{1a}$$

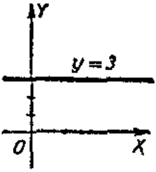
Прямая, параллельная оси ординат (черт. 16), представляется уравнением[2])

$$x = f. \tag{2}$$

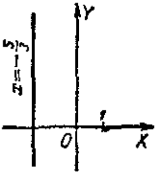
Абсолютное значение f дает расстояние от оси ординат до прямой. Если $f > 0$, прямая лежит «справа» от оси



Черт. 16.



Черт. 17.



Черт. 18.

ординат (см. черт. 16); если $f < 0$, — «слева» от нее. Сама ось ординат представляется уравнением

$$x = 0. \tag{2a}$$

П р и м е р 1. Написать уравнение прямой, отсекающей начальную ординату $b = 3$ и параллельной оси OX (черт. 17).

О т в е т. $y = 3$.

---

[1]) Уравнение (1) есть частный вид уравнения $y = ax + b$, разрешенного относительно ординаты (§ 14). Угловой коэффициент $a = 0$.

[2]) Уравнение (2) есть частный вид уравнения $x = a'y + b'$, разрешенного относительно абсциссы (см. § 14, сноска). Угловой коэффициент $a' = 0$.

Пример 2. Какую линию представляет уравнение $3x+5=0$?

Решение. Разрешая данное уравнение относительно x, получаем $x=-\frac{5}{3}$. Уравнение представляет прямую, параллельную оси OY и лежащую «слева» от нее на расстоянии $\frac{5}{3}$ (черт. 18). Величину $f=-\frac{5}{3}$ можно назвать «начальной абсциссой».

§ 16. Общее уравнение прямой

Уравнение

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

(где A, B, C могут иметь любые значения, лишь бы коэффициенты A, B не были нулями оба сразу [1])) представляет прямую линию (ср. §§ 14, 15). Всякую прямую можно представить уравнением этого вида. Поэтому его называют *общим уравнением прямой.*

Если $A=0$, т. е. уравнение (1) не содержит x, то оно представляет прямую, параллельную [2]) оси OX (§ 15).

Если $B=0$, т. е. уравнение (1) не содержит y, то оно представляет прямую, параллельную [2]) оси OY.

Когда B не равно нулю, уравнение (1) можно разрешить относительно ординаты y; тогда оно преобразуется к виду

$$y=ax+b\left(\text{где } a=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}\right). \tag{2}$$

Так, уравнение $2x-4y+5=0$ ($A=2$, $B=-4$, $C=5$) преобразуется к виду

$$y=0{,}5x+1{,}25$$

$\left(a=-\frac{2}{-4}=0{,}5,\ b=\frac{-5}{-4}=1{,}25\right)$, разрешенному относительно ординаты (начальная ордината $b=1{,}25$, угловой коэффициент $a=0{,}5$, так что $\alpha\approx 26°34'$; см. § 14).

---

[1]) При $A=B=0$ получается либо тождество $0=0$ (если $C=0$), либо бессмыслица вроде $5=0$ (при $C\neq 0$).

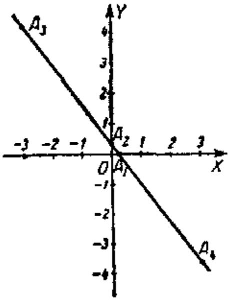
[2]) К прямым, параллельным оси OX, причисляется и сама эта ось. Точно так же к прямым, параллельным оси OY, причисляется сама ось OY.

Аналогично, при $A \neq 0$ уравнение (1) можно разрешить относительно x.

Если $C = 0$, т. е. уравнение (1) не содержит свободного члена, то оно представляет прямую, проходящую через начало (§ 8).

§ 17. Построение прямой по ее уравнению

Для построения прямой достаточно отметить две ее точки. Например, можно взять точки пересечения с осями (если прямая не параллельна ни одной оси и не проходит через начало; в случае, когда прямая параллельна одной из осей или проходит через начало, мы имеем только одну точку пересечения). Для большей точности лучше найти еще одну-две контрольные точки.



Черт. 19.

Пример. Построить прямую $4x + 3y = 1$. Положив $y = 0$, найдем (черт. 19) точку пересечения прямой с осью абсцисс: $A_1\left(\frac{1}{4}; 0\right)$. Положив $x = 0$, найдем точку пересечения с осью ординат: $A_2\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Эти точки слишком близки друг к другу. Поэтому дадим абсциссе еще два значения, например $x = -3$ и $x = +3$. Найдем точки $A_3\left(-3; \frac{13}{3}\right)$, $A_4\left(3; -\frac{11}{3}\right)$. Проводим прямую $A_4A_1A_2A_3$.

§ 18. Условие параллельности прямых

Условием параллельности двух прямых, заданных уравнениями

$$y = a_1x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x + b_2, \tag{2}$$

служит равенство угловых коэффициентов

$$a_1 = a_2, \tag{3}$$

т. е. прямые (1) и (2) параллельны, если угловые коэффициенты равны, и не параллельны, если угловые коэффициенты не равны[1]).

Пример 1. Прямые $y = 3x-5$ и $y = 3x+4$ параллельны, так как у них угловые коэффициенты равны ($a_1 = a_2 = 3$).

Пример 2. Прямые $y = 3x-5$ и $y = 6x-8$ не параллельны, так как у них угловые коэффициенты не равны ($a_1 = 3$, $a_2 = 6$).

Пример 3. Прямые $2y = 3x-5$ и $4y = 6x-8$ параллельны, так как у них угловые коэффициенты равны $\left(a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$.

Замечание 1. Если уравнение одной из двух прямых не содержит ординаты (т. е. прямая параллельна оси OY), то эта прямая параллельна другой прямой при условии, что уравнение последней также не содержит y. Например, прямые $2x+3 = 0$ и $x = 5$ параллельны, а прямые $x-3 = 0$ и $x-y = 0$ не параллельны.

Замечание 2. Если две прямые представлены уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1 = 0, \\ A_2x+B_2y+C_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то условие их параллельности есть

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \tag{5}$$

или в другом обозначении (§ 12)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4. Прямые

$$2x-7y+12 = 0$$

и

$$x-3{,}5y+10 = 0$$

[1]) Две совпадающие прямые здесь, как и всюду в дальнейшем, считаются параллельными.

параллельны, так как

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3{,}5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3{,}5) - 1\cdot(-7) = 0.$$

Пример 5. Прямые

$$2x - 7y + 12 = 0$$

и

$$3x + 2y - 6 = 0$$

не параллельны, так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0.$$

Замечание 3. Равенство (5) можно записать в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{6}$$

т. е. *условием параллельности прямых* (4) *является пропорциональность коэффициентов при текущих координатах*[1]). Ср. примеры 4 и 5. Если сверх того и свободные члены пропорциональны, т. е. если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{7}$$

то прямые (4) не только параллельны, но и совпадают. Так, уравнения

$$3x + 2y - 6 = 0$$

и

$$6x + 4y - 12 = 0$$

представляют одну и ту же прямую.

§ 19. Пересечение прямых

Для разыскания точки пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{1}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2}$$

---

[1]) Может оказаться, что одна из величин A_2, B_2 (но не обе вместе; см. § 16) равна нулю. Тогда пропорцию (6) нужно понимать в том смысле, что соответствующий числитель тоже равен нулю. Тот же смысл имеет пропорция (7) при $C_2 = 0$.

надо решить систему уравнений (1) и (2). Эта система, как правило, даст единственное решение, и мы получим искомую точку (§ 9). Исключение возможно лишь при равенстве отношений $\frac{A_1}{A_2}$ и $\frac{B_1}{B_2}$, т. е. в случае параллельности данных прямых (см. § 18, замечания 2 и 3).

Замечание. Если данные прямые параллельны и не совпадают, то система (1)–(2) не имеет решений, а если совпадают, то решений бесконечно много.

Пример 1. Найти точки пересечения прямых $y = 2x-3$ и $y = -3x+2$. Решая систему уравнений, находим $x = 1$, $y = -1$. Прямые пересекаются в точке $(1; -1)$.

Пример 2. Прямые

$$2x-7y+12 = 0, \quad x-3{,}5y+10 = 0$$

параллельны и не совпадают, так как отношения $2:1$ и $(-7):(-3{,}5)$ равны между собой, но не равны отношению $12:10$ (ср. пример 4 § 18). Данная система уравнений не имеет решения.

Пример 3. Прямые $3x+2y-6 = 0$, $6x+4y-12 = 0$ совпадают, так как отношения $3:6$, $2:4$ и $(-6):(-12)$ равны друг другу. Второе уравнение получается из первого умножением на 2. Данная система имеет бесчисленное множество решений.

§ 20. Условие перпендикулярности двух прямых

Условием перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями

$$y = a_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x+b_2, \tag{2}$$

служит соотношение

$$a_1a_2 = -1, \tag{3}$$

т. е. две прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1, и не перпендикулярны, если оно не равно -1.

Пример 1. Прямые $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$ перпендикулярны, так как $a_1a_2 = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

Пример 2. Прямые $y = 3x$ и $y = \frac{1}{3}x$ не перпендикулярны, так как $a_1a_2 = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$.

Замечание 1. Если уравнение одной из двух прямых не содержит ординаты (т. е. прямая параллельна оси OY), то эта прямая перпендикулярна к другой прямой при условии, что уравнение последней не содержит абсциссы (тогда вторая прямая параллельна оси абсцисс). В противном случае прямые не перпендикулярны. Например, прямые $x = 5$ и $3y+2 = 0$ перпендикулярны, а прямые $x = 5$ и $y = 2x$ не перпендикулярны.

Замечание 2. Если две прямые представлены уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1 = 0, \quad A_2x+B_2y+C_2 = 0, \tag{4}$$

то условие их перпендикулярности есть

$$A_1A_2+B_1B_2 = 0. \tag{5}$$

Пример 3. Прямые $2x+5y = 8$ и $5x-2y = 3$ перпендикулярны; действительно, здесь $A_1 = 2$, $A_2 = 5$, $B_1 = 5$, $B_2 = -2$, значит, $A_1A_2+B_1B_2 = 10-10 = 0$.

Пример 4. Прямые $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y = 0$ и $2x-3y = 0$ не перпендикулярны, так как здесь $A_1A_2+B_1B_2 = 2$.

§ 21. Угол между двумя прямыми

Пусть две неперпендикулярные прямые L_1, L_2 (взятые в данном порядке) представляются уравнениями

$$y = a_1x+b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x+b_2. \tag{2}$$

Тогда формула [1])

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2} \tag{3}$$

[1]) О применимости ее в случае, когда прямые L_1, L_2 перпендикулярны, см. ниже замечание 1.

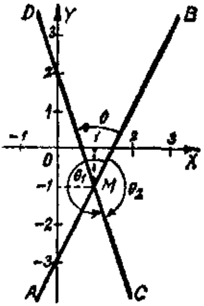
дает угол, на который надо повернуть первую прямую, чтобы она стала параллельной второй.

Пример 1. Найти угол между прямыми $y = 2x-3$ и $y = -3x+2$ (черт. 20).

Здесь $a_1 = 2$, $a_2 = -3$. По формуле (3) находим:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)} = 1,$$

отсюда $\theta = +45°$. Это значит, что прямая $y = 2x-3$ (AB на черт. 20), повернутая на угол $+45°$ около точки пересечения $M(1; -1)$ данных прямых (пример 1 § 19), совместится с прямой $y = -3x+2$ (CD на черт. 20). Можно взять также $\theta = 180°+45° = 225°$, $\theta = -180°+45° = -135°$ и т. д. (Эти углы обозначены θ_1, θ_2 на черт. 20.)

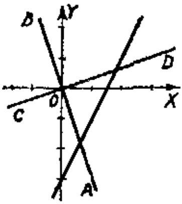


Черт. 20.

Пример 2. Найти угол между прямыми $y = -3x+2$ и $y = 2x-3$.

Прямые здесь—те же, что в примере 1, но теперь прямая CD (см. черт. 20)—первая, а прямая AB — вторая. Формула (3) дает $\operatorname{tg}\theta = -1$, т. е $\theta = -45°$ (или $\theta = 135°$, или $\theta = -225°$ и т. д.). На этот угол надо повернуть прямую CD до совмещения с AB.

Пример 3. Найти прямую, проходящую через начало координат и пересекающую прямую $y = 2x-3$ под углом 45°.



Черт. 21.

Решение. Искомая прямая представляется уравнением $y = ax$ (§ 14). Угловой коэффициент a можно найти из (3), взяв вместо a_1 угловой коэффициент данной прямой (т. е. положив $a_1 = 2$); вместо a_2 возьмем угловой коэффициент a искомой прямой, а вместо θ—угол $+45°$ или $-45°$. Получаем:

$$\frac{a-2}{1+2a} = \pm 1.$$

Задача имеет два решения: $y = -3x$ (прямая AB на черт. 21) и $y = \frac{1}{3}x$ (прямая CD).

Замечание 1. Если прямые (1) и (2) перпендикулярны ($\theta = \pm 90°$), то выражение $1+a_1a_2$, стоящее в знаменателе (3), обращается в нуль (§ 20) и частное $\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$ перестает существовать[1]). Одновременно перестает существовать («обращается в бесконечность») $\operatorname{tg}\theta$. Формула (3), понимаемая буквально, теряет смысл; но в этом случае ее нужно понимать условно. Именно, всякий раз, как в знаменателе (3) появляется нуль, угол θ надо считать равным $\pm 90°$ (как поворот на $+90°$, так и поворот на $-90°$ совмещает любую из перпендикулярных прямых с другой).

Пример 4. Найти угол между прямыми $y=2x-3$ и $y=-\frac{1}{2}x+7\left(a_1=2,\ a_2=-\frac{1}{2}\right)$. Если предварительно поставить вопрос: перпендикулярны ли эти прямые, то по признаку (3) § 20 получим утвердительный ответ, так что и без формулы (3) получаем $\theta=\pm 90°$. То же дает и формула (3). Мы получаем:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{2}-2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}=\frac{-2\frac{1}{2}}{0}.$$

В соответствии с замечанием 1 это равенство нужно понимать в том смысле, что $\theta=\pm 90°$.

Замечание 2. Если хотя бы одна из прямых L_1, L_2 (или обе) параллельна оси OY, то формула (3) вовсе неприменима, ибо тогда одну из прямых (или обе) нельзя представить (§ 15) уравнением вида (1). В этом случае угол θ определяется следующим образом:

а) когда прямая L_2 параллельна оси OY, а L_1 не параллельна, применяем формулу

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{a_1};$$

б) когда прямая L_1 параллельна оси OY, а L_2 не параллельна, применяем формулу

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{a_2};$$

в) когда обе прямые параллельны оси OY, они параллельны и между собой, так что $\operatorname{tg}\theta=0$.

Замечание 3. Угол между прямыми, заданными уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{4}$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{5}$$

---

[1]) Числитель a_2-a_1 не равен нулю, так как только у параллельных прямых угловые коэффициенты a_1, a_2 равны (§ 18).

можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (6)$$

При $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ формула (6), понимаемая условно (см. замечание 1), дает $\theta = \pm 90°$. Ср. § 20, формула (5).

§ 22. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой

Три точки $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$ лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда[1])

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Эта формула выражает также (§ 13), что площадь «треугольника» $A_2A_3A_1$ равна нулю.

Пример 1. Точки $A_1(-2;\ 5)$, $A_2(4;\ 3)$, $A_3(16;\ -1)$ лежат на одной прямой, так как

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & 3-5 \\ 16+2 & -1-5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -6 \end{vmatrix} = 6\cdot(-6) - (-2)\cdot 18 = 0.$$

Пример 2. Точки $A_1(-2;\ 6)$, $A_2(2;5)$, $A_3(5;\ 3)$ не лежат на одной прямой, так как

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2 & 5-6 \\ 5+2 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

§ 23. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Прямая, проходящая через две точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$, представляется уравнением[1])

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x-x_1 & y-y_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

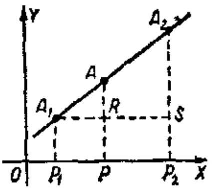
---

[1]) Левая часть равенства (1) записана в виде определителя (см. § 12).

Оно выражает, что данные точки A_1, A_2 и «текущая» точка $A(x; y)$ лежат на одной прямой (§ 22).

Уравнение (1) можно представить (см. ниже замечание) в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{2}$$



Черт. 22.

Это уравнение выражает пропорциональность катетов в прямоугольных треугольниках A_1RA и A_1SA_2, изображенных на черт. 22, где

$$x_1=OP_1,\ x_2=OP_2,\ x=OP,$$
$$x-x_1=A_1R,\ x_2-x_1=A_1S;$$
$$y_1=P_1A_1,\ y_2=P_2A_2,\ y=PA,$$
$$y-y_1=RA,\ y_2-y_1=SA_2$$

П р и м е р 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки (1; 5) и (3; 9).

Р е ш е н и е. Формула (1) дает:

$$\begin{vmatrix} 3-1 & 9-5 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix}=0,\ \text{т. е.}\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $2(y-5)-4(x-1)=0$ или $2x-y+3=0$.

Формула (2) дает $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{4}$. Отсюда снова находим $2x-y+3=0$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда $x_2=x_1$ (или $y_2=y_1$), один из знаменателей равенства (2) равен нулю; тогда уравнение (2) надо понимать в том смысле, что соответствующий числитель равен нулю. См. ниже пример 2 (а также сноску на стр. 32).

П р и м е р 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(4;\ -2)$ и $A_2(4;\ 5)$. Уравнение (1) дает:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ x-4 & y+2 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

т. е. $0(y+2)-7(x-4)=0$, т. е. $x-4=0$.

Уравнение (2) запишется в виде

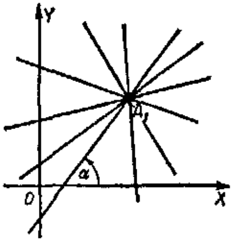
$$\frac{x-4}{0}=\frac{y+2}{7}; \tag{4}$$

здесь знаменатель левой части равен нулю. Понимая уравнение (4) в вышеуказанном смысле, полагаем числитель левой части равным нулю. Получаем прежний результат $x-4=0$.

§ 24. Пучок прямых

Через одну точку $A_1(x_1; y_1)$ (черт. 23) проходит множество прямых, именуемое *центральным пучком* (или просто *пучком*). Точка A_1 называется *центром пучка*. Каждую из прямых пучка (кроме той, которая параллельна оси ординат; см. замечание 1) можно представить уравнением

$$y-y_1 = k(x-x_1). \qquad (1)$$



Черт. 23

Здесь k — угловой коэффициент рассматриваемой прямой ($k = \operatorname{tg}\alpha$). Уравнение (1) называют *уравнением пучка*. Величина k (*параметр* пучка) характеризует направление прямой; она меняется от одной прямой пучка к другой.

Значение параметра k можно найти, если дано еще какое-либо условие, которое (вместе с условием принадлежности прямой данному пучку) определит положение прямой; см. пример 2.

Пример 1. Составить уравнение пучка с центром в точке $A_1(-4; -8)$.

Решение. Согласно (1) имеем:

$$y+8 = k(x+4).$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(1; 4)$ и перпендикулярной к прямой $3x-2y = 12$.

Решение. Искомая прямая принадлежит пучку с центром (1; 4). Уравнение этого пучка $y-4 = k(x-1)$. Чтобы найти значение параметра k, учтем, что искомая прямая перпендикулярна к прямой $3x-2y = 12$; угловой коэффициент последней есть $\frac{3}{2}$. Имеем (§ 20) $\frac{3}{2}k = -1$, т. е. $k = -\frac{2}{3}$. Искомая прямая представляется уравнением $y-4 = -\frac{2}{3}(x-1)$ или $y = -\frac{2}{3}x+4\frac{2}{3}$.

Замечание 1. Прямая, принадлежащая пучку с центром в $A_1(x_1; y_1)$ и параллельная оси OY, представляется уравнением $x-x_1 = 0$; это уравнение не получается из (1) ни при каком значении k. Все без исключения прямые пучка можно представить уравнением

$$l(y-y_1)=m(x-x_1), \tag{2}$$

где l и m — произвольные числа (не равные нулю одновременно). Когда $l \neq 0$, мы можем разделить уравнение (2) на l. Тогда, обозначив $\frac{m}{l}$ через k, получим (1). Если же положить $l=0$, то уравнение (2) принимает вид $x-x_1=0$.

Замечание 2. Уравнение пучка, в состав которого входят две пересекающиеся прямые L_1, L_2, заданные уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

имеет вид

$$m_1(A_1x+B_1y+C_1)+m_2(A_2x+B_2y+C_2)=0. \tag{3}$$

В нем m_1, m_2 — произвольные числа (не равные нулю одновременно). В частности, при $m_1=0$ получаем прямую L_2, при $m_2=0$ — прямую L_1. Вместо (3) можно написать уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{4}$$

в котором всевозможные значения даются только одной букве λ, но из (4) нельзя получить уравнение прямой L_2.

Уравнение (1) *есть частный вид уравнения* (4), *когда прямые* L_1 и L_2 даны уравнениями $y=y_1$, $x=x_1$ (тогда они параллельны осям координат).

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$, $3x-y-2=0$ и перпендикулярной к прямой $y=x$.

Решение. Искомая прямая (она заведомо не совпадает с прямой $3x-y-2=0$) *принадлежит пучку*

$$2x-3y-1+\lambda(3x-y-2)=0. \tag{5}$$

Угловой коэффициент прямой (5) есть $k=\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}$. Так как искомая прямая перпендикулярна к прямой $y=x$, то (§ 20) $k=-1$. Следовательно, $\frac{3\lambda+2}{\lambda+3}=-1$, т. е. $\lambda=-\frac{5}{4}$. Подставляя $\lambda=-\frac{5}{4}$ в (5), находим после упрощений:

$$7x+7y-6=0.$$

Замечание 3. Если прямые L_1, L_2 параллельны (но не совпадают), то уравнение (3) при всевозможных значениях m_1, m_2 представляет все прямые, параллельные двум данным. Множество прямых, параллельных между собой, именуется *параллельным пучком*. Таким образом, уравнение (3) представляет либо центральный, либо параллельный пучок.

§ 25. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой

1. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1; y_1)$ и параллельная прямой $y=ax+b$, представляется уравнением

$$y-y_1=a(x-x_1). \tag{1}$$

Ср. § 24.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 5)$ и параллельной прямой

$$5x-7y-4=0.$$

Решение. Данную прямую можно представить уравнением $y=\frac{5}{7}x-\frac{4}{7}$ $\left(\text{здесь } a=\frac{5}{7}\right)$. Уравнение искомой прямой есть $y-5=\frac{5}{7}[x-(-2)]$, т. е. $7(y-5)=5(x+2)$ или $5x-7y+45=0$.

2. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и параллельная прямой $Ax+By+C=0$, представляется уравнением

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{2}$$

Пример 2. Решив пример 1 ($A=5$, $B=-7$) по формуле (2), найдем $5(x+2)-7(y-5)=0$.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 5)$ и параллельной прямой $7x+10=0$.

Решение. Здесь $A=7$, $B=0$. Формула (2) дает $7(x+2)=0$, т. е. $x+2=0$. Формула (1) неприменима, так как данное уравнение нельзя разрешить относительно y (данная прямая параллельна оси ординат, ср. § 15).

§ 26. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой

1. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y=ax+b$, представляется уравнением

$$y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1). \tag{1}$$

Ср. § 24, пример 2.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2;\ -1)$ и перпендикулярной к прямой

$$4x-9y=3.$$

Решение. Данную прямую можно представить уравнением $y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}$ $\left(a=\frac{4}{9}\right)$. Уравнение искомой прямой есть $y+1=-\frac{9}{4}(x-2)$, т. е. $9x+4y-14=0$.

2. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ и перпендикулярная к прямой $Ax+By+C=0$, представляется уравнением

$$A(y-y_1)-B(x-x_1)=0. \tag{2}$$

Пример 2. Решая пример 1 ($A = 4$, $B = -9$) по формуле (2), найдем $4(y+1)+9(x-2) = 0$, т. е. $9x+4y-14 = 0$.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; -2)$ перпендикулярно к прямой

$$2y+1 = 0.$$

Решение. Здесь $A = 0$, $B = 2$. Формула (2) дает $-2(x+3) = 0$, т. е. $x+3 = 0$. Формула (1) неприменима, ибо $a = 0$ (ср. § 20, замечание 1).

§ 27. Взаимное расположение прямой и пары точек

Взаимное расположение точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и прямой

$$Ax+By+C = 0 \qquad (1)$$

можно определить по следующим признакам:

а) точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от прямой (1), когда числа $Ax_1+By_1+C_1$, $Ax_2+By_2+C_2$ имеют одинаковые знаки;

б) M_1 и M_2 лежат по разные стороны от прямой (1), когда эти числа имеют противоположные знаки;

в) одна из точек M_1, M_2 (или обе) лежит на прямой (1), если одно из этих чисел (или оба) равно нулю.

Пример 1. Точки $(2; -6)$, $(-4; -2)$ лежат по одну сторону от прямой

$$3x+5y-1 = 0,$$

так как числа $3\cdot 2+5\cdot(-6)-1 = -25$ и $3\cdot(-4)+5\cdot(-2)-1 = -23$ оба отрицательны.

Пример 2. Начало координат $(0; 0)$ и точка $(5; 5)$ лежат по разные стороны от прямой $x+y-8=0$, так как числа $0+0-8=-8$ и $5+5-8=+2$ имеют разные знаки.

§ 28. Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой

$$Ax+By+C = 0 \qquad (1)$$

равно абсолютному значению величины

$$\delta = \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (2)$$

т. е.[1])

$$d = |\delta| = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \qquad (3)$$

Пример. Найти расстояние от точки $(-1; +1)$ до прямой

$$3x-4y+5 = 0.$$

---

1) Формула (3) обычно выводится с помощью искусственного построения; ниже (см. замечание 2) указан чисто аналитический вывод.

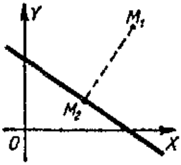
Решение.

$$\delta = \frac{3x_1 - 4y_1 + 5}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3\cdot(-1)-4\cdot 1+5}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{2}{5},$$

$$d = |\delta| = \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}.$$

Замечание 1. Пусть прямая (1) не проходит через начало O и, значит, $C \neq 0$ (§ 16). Если при этом знаки δ и C одинаковы, то точки M_1 и O лежат по одну сторону от прямой (1); если противоположны, — то по разные стороны (ср. § 27); если же $\delta = 0$ (что возможно лишь при $Ax_1 + By_1 + C = 0$), то M_1 лежит на данной прямой (§ 8).

Величина δ называется *ориентированным расстоянием* от точки M_1 до прямой (1). В рассмотренном примере ориентированное расстояние δ равно $-^2/_5$, а $C = 5$. Знаки δ и C противоположны; значит, точки $M_1(-1; +1)$ и O лежат по разные стороны от прямой $3x - 4y + 5 = 0$.



Черт. 24.

Замечание 2. Формула (3) выводится проще всего следующим образом.

Пусть $M_2(x_2; y_2)$ (черт. 24) — основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(x_1; y_1)$ на прямую (1). Тогда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (4)$$

Координаты x_2, y_2 найдем как решение системы

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0, \qquad (5)$$

где второе уравнение представляет прямую M_1M_2 (§ 26). Для облегчения выкладок преобразуем первое уравнение системы к виду

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + Ax_1 + By_1 + C = 0. \qquad (6)$$

Решая (5) и (6) относительно $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, находим:

$$x - x_1 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C), \qquad (7)$$

$$y - y_1 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C). \qquad (8)$$

Подставив (7) и (8) в (4), найдем:

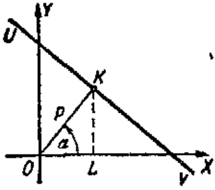
$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

§ 29. Полярные параметры прямой[1]

Положение прямой на плоскости можно задать двумя числами; такие числа называются *параметрами* прямой. Так, числа b (начальная ордината) и a (угловой коэффициент) являются (ср. § 14) параметрами прямой. Но параметры b и a пригодны не для всех прямых; прямую, параллельную OY, нельзя ими задать (§ 15). В противоположность этому полярными параметрами (см. ниже) можно задать положение всякой прямой.

[1] Этот параграф является вводным для §§ 30 и 31.

Полярным расстоянием прямой UV (черт. 25) называется длина p перпендикуляра OK, проведенного к прямой из начала O. Полярное расстояние положительно или равно нулю ($p \geqslant 0$).



Черт. 25.

Полярным углом прямой UV называется угол $\alpha = \angle XOK$ между лучами OX и OK (взятыми в данном порядке; ср. § 21). Если прямая UV не проходит через начало (как на черт. 25), то направление второго луча вполне определено (от O к K); если же UV проходит через O (тогда O и K совпадают), то луч, перпендикулярный к UV, проводится в любом из двух возможных направлений.

Полярное расстояние и полярный угол называются *полярными параметрами прямой.*

Если прямая UV представляется уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

то ее полярное расстояние определяется по формуле

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{1}$$

а полярный угол α — по формулам

$$\cos\alpha = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{2}$$

где верхние знаки берутся, когда $C > 0$, а нижние — когда $C < 0$; если же $C = 0$, то по произволу берутся либо только верхние, либо только нижние знаки [1]).

---

[1]) Формула (1) получается из (3) § 28 (при $x_1 = y_1 = 0$). Формулы (2) получаются так: из черт. 25

$$\cos\alpha = \frac{OL}{OK} = \frac{x}{p}, \quad \sin\alpha = \frac{LK}{OK} = \frac{y}{p}. \tag{3}$$

Согласно (7), (8) § 28 (при $x_1 = y_1 = 0$) имеем:

$$x = -\frac{AC}{A^2+B^2}, \quad y = -\frac{BC}{A^2+B^2}. \tag{4}$$

Из (1), (3) и (4) следует:

$$\cos\alpha = -\frac{C}{|C|}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{C}{|C|}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

Формулы (5) совпадают с (2), ибо $\frac{C}{|C|} = +1$ при $C > 0$ и $\frac{C}{|C|} = -1$ при $C < 0$.

Пример 1. Найти полярные параметры прямой

$$3x-4y+10=0.$$

Решение. Формула (1) дает $p=\frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$. Формулы (2), где нужно взять верхние знаки (ибо $C=+10$), дают

$$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3}{5};\quad \sin\alpha=-\frac{(-4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=+\frac{4}{5}.$$

Следовательно, $\alpha\approx 127°$ (или $\alpha\approx 487°$ и т. д.).

Пример 2. Найти полярные параметры прямой

$$3x-4y=0.$$

Формула (1) дает $p=0$; в формулах (2) можно взять либо только верхние знаки, либо только нижние. В первом случае $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и, значит, $\alpha\approx 127°$; во втором случае $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и, значит, $\alpha\approx -53°$.

§ 30. Нормальное уравнение прямой

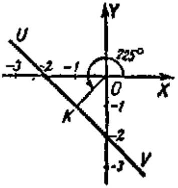
Прямая с полярным расстоянием p (§ 29) и полярным углом α представляется уравнением

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (1)$$

Оно называется *нормальным уравнением прямой.*

Пример. Пусть прямая UV отстоит от начала на расстояние

$$OK=\sqrt{2}$$



Черт. 26.

(черт. 26) и пусть луч OK составляет с лучом OX угол $\alpha=225°$. Тогда нормальное уравнение прямой UV есть

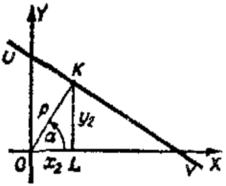
$$x\cos 225°+y\sin 225°-\sqrt{2}=0,$$

т. е.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\sqrt{2}=0.$$

Помножив на $-\sqrt{2}$, получим уравнение прямой UV в виде $x+y+2=0$, но это уравнение уже не является нормальным.

Вывод уравнения (1). Обозначим координаты точки K (черт. 27) через x_2, y_2. Тогда $x_2=OL=p\cos\alpha$, $y_2=LK=p\sin\alpha$. Прямая OK, проходящая через точки O (0; 0) и K (x_2; y_2), представляется (§ 23) уравнением $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix}=0$, т. е. $(\sin\alpha)x-(\cos\alpha)y=0$. Прямая UV проходит через K (x_2; y_2) и перпендикулярна к прямой OK. Значит (§ 26, п. 2), она представляется уравнением $\sin\alpha(y-y_2)-(-\cos\alpha)(x-x_2)=0$. Подставляя сюда $x_2=p\cos\alpha$ и $y_2=p\sin\alpha$, получаем $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.



Черт. 27.

§ 31. Приведение уравнения прямой к нормальному виду

Чтобы найти нормальное уравнение прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, достаточно разделить данное уравнение на $\mp\sqrt{A^2+B^2}$, причем верхний знак берется, когда $C>0$, и нижний — когда $C<0$; если же $C=0$, то можно взять любой знак. Получим уравнение

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Оно будет нормальным[1]).

Пример 1. Привести уравнение $3x-4y+10=0$ к нормальному виду.

Здесь $A=3$, $B=-4$ и $C=10>0$. Поэтому делим на $-\sqrt{3^2+4^2}=-5$. Получаем

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

Это — уравнение вида $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$. Именно $p=2$, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=+\frac{4}{5}$ (значит, $\alpha\approx 127°$).

Пример 2. Привести уравнение $3x-4y=0$ к нормальному виду.

---

[1]) Ибо коэффициенты при x, y соответственно равны $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ в силу (2) § 29, а свободный член равен $(-p)$ в силу (1) § 29.

Так как здесь $C=0$, то можно разделить либо на 5, либо на -5. В первом случае получаем

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=0$$

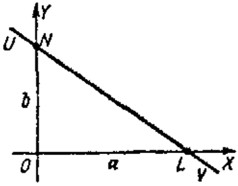
($p=0$, $\alpha\approx 307°$), во втором случае имеем

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$$

($p=0$, $\alpha\approx 127°$). Двум значениям α соответствуют два способа выбора положительного направления на луче OK (см. § 29).

§ 32. Отрезки на осях

Для разыскания отрезка $OL=a$ (черт. 28), отсекаемого прямой UV на оси абсцисс, достаточно в уравнении прямой положить $y=0$ и решить уравнение относительно x. Аналогично ищется отрезок $ON=b$ на оси ординат. Значения a и b могут быть как положительными, так и отрицательными. Если прямая параллельна одной из осей, то соответствующий отрезок не существует («обращается в бесконечность»). Если прямая проходит через начало, то каждый отрезок вырождается в точку ($a=b=0$).



Черт. 28.

Пример 1. Найти отрезки a, b, отсекаемые прямой $3x-2y+12=0$ на осях.

Решение. Полагаем $y=0$ и из уравнения $3x+12=0$ находим $x=-4$. Полагая $x=0$, из уравнения $-2y+12=0$ находим $y=6$. Итак, $a=-4$, $b=6$.

Пример 2. Найти отрезки a, b, отсекаемые на осях прямой

$$5y+15=0.$$

Решение. Эта прямая параллельна оси абсцисс (§ 15). Отрезок a не существует (положив $y=0$, получим противоречивое соотношение $15=0$). Отрезок b равен -3.

Пример 3. Найти отрезки a, b, отсекаемые на осях прямой

$$3y-2x=0.$$

Решение. По изложенному способу найдем $a=0$, $b=0$. Конец каждого из «отрезков» совпадает с его началом, т. е. отрезок вырождается в точку. Прямая проходит через начало (ср. § 14).

§ 33. Уравнение прямой в отрезках

Если прямая отсекает на осях отрезки a, b (не равные нулю), то ее можно представить уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1}$$

Обратно, уравнение (1) представляет прямую, отсекающую на осях (считая от начала O) отрезки a, b.

Уравнение (1) называется *уравнением прямой в отрезках.*

Пример. Найти уравнение прямой

$$3x-2y+12=0 \tag{2}$$

в отрезках.

Решение. Находим (§ 32, пример 1) $a=-4$, $b=6$. Уравнение в отрезках есть

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1. \tag{3}$$

Оно равносильно уравнению (2).

Замечание 1. Прямую, отсекающую на осях отрезки, равные нулю (т. е. проходящую через начало; см. пример 3 § 32), нельзя представить уравнением в отрезках.

Замечание 2. Прямую, параллельную оси OX (§ 32, пример 2), можно представить уравнением $\frac{y}{b}=1$, где b — отрезок на оси OY. Аналогично, прямую, параллельную оси OY, можно представить уравнением $\frac{x}{a}=1$. Считать ли эти уравнения «уравнениями в отрезках» или нет — дело соглашения (общепринятого соглашения в литературе нет) [1].

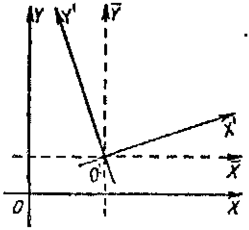
§ 34. Преобразование координат (постановка вопроса)

Одна и та же линия представляется различными уравнениями в разных системах координат. Часто требуется, зная уравнение некоторой линии в одной системе координат (*«старой»*), найти уравнение той же линии в другой системе (*«новой»*). Этой цели служат *формулы преобразования координат.* Они устанавливают связь между старыми и новыми координатами какой-либо точки M.

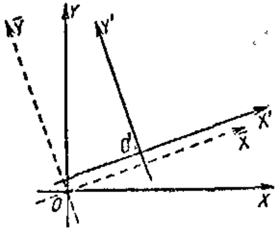
---

[1]) Существенно то, что уравнение $\frac{x}{a}=1$ или $\frac{y}{b}=1$ можно получить из уравнения $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, но не как частный его случай, а с помощью предельного перехода (при бесконечно большом b или a).

Любую новую систему прямоугольных координат $X'O'Y'$ можно получить из любой старой системы XOY (черт. 29) с помощью двух движений: 1) сначала совмещаем начало O с точкой O', сохраняя неизменными направления осей; получаем вспомогательную систему $\overline{X}O'\overline{Y}$ (обозначенную пунктиром); 2) затем поворачиваем вспомогательную систему около точки O' до совмещения с новой системой $X'O'Y'$.



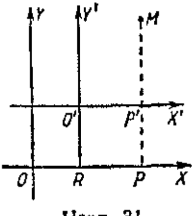
Черт. 29.



Черт. 30.

Эти же два движения можно выполнить и в обратном порядке (сначала поворот около O, дающий вспомогательную систему $\overline{X}O\overline{Y}$, затем перенос начала в точку O', дающий новую систему $X'O'Y'$; черт. 30).

В соответствии с этим достаточно знать формулы преобразования координат при переносе начала (§ 35) и при повороте осей (§ 36).



Черт. 31.

§ 35. Перенос начала координат

Обозначения (черт. 31):

старые координаты точки M: $x=OP$, $y=PM$;
новые координаты точки M: $x'=O'P'$, $y'=P'M$;
координаты нового начала O' в старой системе XOY:

$$x_0=OR, \qquad y_0=RO'.$$

Формулы переноса:

$$x = x'+x_0, \quad y=y'+y_0, \tag{1}$$

или

$$x' = x-x_0, \quad y' = y-y_0. \tag{2}$$

Словами: *старая координата равна новой, сложенной с координатой нового начала* (в старой системе)[1].

Пример 1. Начало координат перенесено в точку (2; −5). Найти новые координаты точки $M(-3; 4)$.

Решение. Имеем:

$$x_0=2, \quad y_0=-5; \quad x=-3, \quad y=4.$$

По формулам (2) находим:

$$x' = -3-2 = -5, \quad y' = 4+5 = 9.$$

Пример 2. Уравнение некоторой линии есть

$$x^2+y^2-4x+6y = 36.$$

Каково будет уравнение той же линии после переноса начала координат в точку O' (2; −3)?

Решение. Согласно формулам (1) имеем:

$$x = x'+2 \quad \text{и} \quad y = y'-3.$$

Подставим эти выражения в данное уравнение. Получим:

$$(x'+2)^2+(y'-3)^2-4(x'+2)+6(y'-3) = 36,$$

или после упрощений

$$x'^2+y'^2 = 49.$$

Это — новое уравнение нашей линии. Из него видно, что эта линия есть (§ 38) окружность радиуса $R=7$ с центром в точке O'.

§ 36. Поворот осей

Обозначения (черт. 32):

старые координаты точки $M: x=OP,\ y=PM$;

новые координаты точки $M: x'=OP',\ y'=P'M$;

угол поворота осей[2] $\alpha = \angle XOX' = \angle YOY'$.

Формулы поворота[3]:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

[1]) Для запоминания правила не читайте слов в скобках; они существенны, но легко восстанавливаются по смыслу.

[2]) О знаке угла α см. § 14, подстрочное примечание.

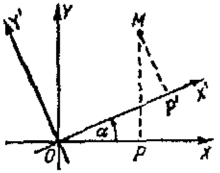
[3]) Для запоминания формул (1) заметьте, что в выражении для x имеем «полный беспорядок» (косинус стоит раньше синуса, между членами правой части — знак минус). Напротив, в выражении для y мы имеем «полный порядок» (сначала синус, потом косинус, а между членами — знак плюс).

Формулы (2) получаются из (1), если заменить α на $-\alpha$ и поменять обозначения x, y на x', y', и наоборот.

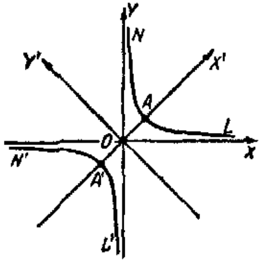
или

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Пример 1. Уравнение $2xy=49$ представляет линию, состоящую из двух ветвей LAN и $L'A'N'$ (черт. 33) (она



Черт. 32.



Черт. 33.

называется равнобочной гиперболой). Найти уравнение этой линии после поворота осей на угол 45°.

Решение. Формулы (1) при $\alpha=45°$ принимают вид

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставим эти выражения в данное уравнение. Получим:

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')(x'+y') = 49,$$

или после упрощений

$$x'^2 - y'^2 = 49.$$

Пример 2. До поворота осей на угол $-20°$ точка M имела абсциссу $x=6$ и ординату $y=0$. Найти координаты точки M после поворота осей.

Решение. Новые координаты x', y' точки M найдутся по формулам (2), где надо положить $x=6$, $y=0$, $\alpha=-20°$. Получим:

$$x' = 6\cos(-20°) \approx 5{,}64,$$

$$y' = -6\sin(-20°) \approx 2{,}05,$$

§ 37. Алгебраические линии и их порядок

Уравнение вида

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

где по крайней мере одна из величин A, B не равна нулю, есть *алгебраическое уравнение первой степени* (с двумя неизвестными x, y). Оно всегда представляет прямую линию.

Алгебраическим уравнением второй степени называется всякое уравнение вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (2)$$

где по крайней мере одна из величин A, B, C не равна нулю.

Уравнение, равносильное уравнению (2), также называют алгебраическим.

Пример 1. Уравнение $y=5x^2$, равносильное уравнению $5x^2-y=0$, — алгебраическое уравнение второй степени ($A=5$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=-1$, $F=0$).

Пример 2. Уравнение $xy=1$, равносильное уравнению $xy-1=0$, есть алгебраическое уравнение второй степени ($A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=-1$).

Пример 3. Уравнение $(x+y+2)^2-(x+y+1)^2=0$ есть уравнение первой степени, так как оно равносильно уравнению $2x+2y+3=0$.

Аналогично определяются алгебраические уравнения третьей, четвертой, пятой и т. д. степеней. Величины A, B, C, D и т. д. (в том числе свободный член) называются *коэффициентами* алгебраического уравнения.

Если некоторая линия L представляется в какой-либо одной декартовой системе координат алгебраическим уравнением n-й степени, то и во всякой другой декартовой системе она представится алгебраическим уравнением той же степени. При этом, однако, коэффициенты уравнения (все или некоторые) изменят свои значения; в частности, некоторые могут обратиться в нуль.

Линия L, представляемая (в декартовой системе) уравнением n-й степени, называется *алгебраической линией n-го порядка*.

Пример 4. Прямая линия представляется в прямоугольной системе координат алгебраическим уравнением первой степени вида $Ax+By+C=0$ (§ 16). Поэтому прямая есть алгебраическая линия первого порядка. Для одной и той же прямой коэффициенты A, B, C имеют различные значения в различных системах координат. Так, пусть в «старой» системе прямая представляется уравнением $2x+3y-5=0$ ($A=2$, $B=3$, $C=-5$). Если повернуть оси на угол 45°, то (§ 36) в «новой» системе та же прямая представится уравнением

$$2\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-5=0,$$

т. е.

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-5=0\ \left(A=\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad B=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad C=-5\right).$$

Пример 5. Если начало координат совпадает с центром окружности радиуса $R=3$, то окружность представляется уравнением (§ 38) $x^2+y^2-9=0$. Это — алгебраическое уравнение второй степени ($A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, $E=0$, $F=-9$). Значит, окружность есть линия второго порядка. Если начало координат перенести в точку $(-5;\ -2)$, то в новой системе та же окружность представится (§ 35) уравнением $(x'-5)^2+(y'-2)^2-9=0$, т. е. $x'^2+y'^2-10x'-4y'+20=0$. Это уравнение тоже второй степени; коэффициенты A, B и C остались прежними, но D, E и F изменились.

Пример 6. Линия, представляемая уравнением $y=\sin x$ (синусоида), — не алгебраическая.

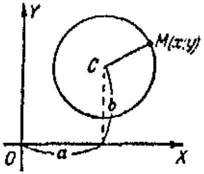
§ 38. Окружность

Окружность радиуса R с центром в начале координат представляется уравнением

$$x^2+y^2=R^2.$$

Оно выражает, что квадрат расстояния OA (см. черт. 9 на стр. 22) от начала координат до любой точки A, лежащей на окружности, равен R^2.

Окружность радиуса R с центром в точке $C(a;\ b)$ представляется уравнением



Черт. 34.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Оно выражает, что квадрат расстояния MC (черт. 34) между точками $M(x;\ y)$ и $C(a;\ b)$ (§ 10) равен R^2.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно помножить на любое число A; тогда оно примет вид

$$Ax^2+Ay^2-2Aax-2Aby+A(a^2+b^2-R^2)=0. \qquad (3)$$

Пример 1. Окружность радиуса $R=7$ с центром $C(4;\ -6)$ представляется уравнением

$$(x-4)^2+(y+6)^2=49 \text{ или } x^2+y^2-8x+12y+3=0$$

или (после умножения на 3)

$$3x^2+3y^2-24x+36y+9=0.$$

Замечание. Окружность есть линия второго порядка (§ 37), так как представляется уравнением второй степени. Однако уравнение второй степени представляет окружность далеко не всегда. Для этого необходимо:

1) чтобы в нем не было члена с произведением xy;

2) чтобы коэффициенты при x^2 и y^2 были равны (ср. уравнение (3)).

Но эти условия не вполне достаточны (см. § 39).

Пример 2. Уравнение второй степени $x^2+3xy+y^2=1$ не представляет окружность: в нем есть член $3xy$.

Пример 3. Уравнение второй степени $9x^2+4y^2=49$ не представляет окружность: коэффициенты при x^2 и при y^2 не равны.

Пример 4. Уравнение

$$5x^2-10x+5y^2+20y-20=0$$

удовлетворяет условиям 1) и 2). В § 39 показано, что оно представляет окружность.

§ 39. Разыскание центра и радиуса окружности

Уравнение

$$Ax^2+Bx+Ay^2+Cy+D=0 \qquad (1)$$

(оно удовлетворяет условиям 1 и 2 § 38) представляет окружность при условии, что коэффициенты A, B, C, D удовлетворяют неравенству

$$B^2+C^2-4AD>0. \qquad (2)$$

Тогда центр $(a;\ b)$ и радиус R окружности можно найти по формулам [1])

$$a=-\frac{B}{2A}, \quad b=-\frac{C}{2A}, \quad R^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}. \qquad (3)$$

---

[1]) Нет нужды их запоминать; ср. пример 1 (второй способ).

Замечание. Неравенство (2) выражает, что квадрат радиуса должен быть положительным числом; ср. последнюю формулу (3). Если неравенство (2) не выполняется, то уравнение (1) не представляет никакой линии (см. ниже пример 2).

Пример 1. Уравнение

$$5x^2-10x+5y^2+20y-20=0 \tag{4}$$

подходит под вид (1); здесь

$$A=5, \quad B=-10, \quad C=20, \quad D=-20.$$

Неравенство (2) выполняется. Значит, уравнение (4) представляет окружность. По формулам (3) находим:

$$a=1,\ b=-2,\ R^2=9,$$

т. е. центр есть $(1;\ -2)$, а радиус $R=3$.

Другой способ. Разделив уравнение (4) на коэффициент при членах второй степени, т. е. на 5, получим:

$$x^2-2x+y^2+4y-4=0.$$

Дополним суммы x^2-2x и y^2+4y до квадратов. Для этого прибавим к первой сумме 1, а ко второй 4. Для компенсации прибавим те же числа к правой части уравнения. Получим:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-4=1+4,$$

т. е.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

Пример 2. Уравнение

$$x^2-2x+y^2+2=0 \tag{5}$$

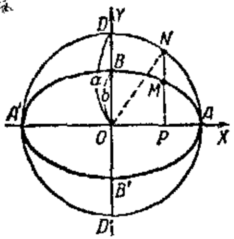
подходит под вид (1), но неравенство (2) не выполняется. Значит, уравнение (5) не представляет никакой линии.

К этому выводу можно придти и так (ср. пример 1):

Дополним сумму x^2-2x до квадрата, прибавив к ней 1. Для компенсации прибавим 1 также и к правой части. Получим $(x-1)^2+y^2+2=1$, т. е. $(x-1)^2+y^2=-1$. Но сумма квадратов (действительных) чисел не может равняться отрицательному числу. Поэтому нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению.

§ 40. Эллипс как сжатая окружность

Через центр O окружности радиуса a (черт. 35) проведем взаимно перпендикулярные диаметры $A'A$, $D'D$. На радиусах OD, OD' отложим от точки O равные отрезки OB, OB' длиной b (меньшей, чем a). Из каждой точки N окружности опустим перпендикуляр NP на диаметр $A'A$ и на этом перпендикуляре отложим от его основания P отрезок PM так, чтобы



Черт. 35.

$$PM : PN = b : a. \qquad (1)$$

Это построение преобразует каждую точку N в другую соответственную ей точку M, лежащую на том же перпендикуляре NP, причем PM получается из PN уменьшением в одном и том же отношении $k = \frac{b}{a}$. Такое преобразование называется *равномерным сжатием*. Прямая $A'A$ называется *осью сжатия*.

Линия $ABA'B'$, в которую преобразуется окружность после равномерного сжатия, называется *эллипсом*[1]).

Отрезок $A'A = 2a$ (а часто и прямая $A'A$, т. е. ось сжатия) называется *большой осью* эллипса.

Отрезок $B'B = 2b$ (а часто и прямая $B'B$) называется *малой осью* эллипса (по построению $2a > 2b$). Точка O называется *центром* эллипса. Точки A, A', B, B' называются *вершинами* эллипса.

Отношение $k = b : a$ называется *коэффициентом сжатия* эллипса. Величина $1 - k = \frac{a-b}{a}$ (т. е. отношение $BD : OD$) называется *сжатием* эллипса. Она обозначается буквой α.

Эллипс симметричен относительно большой и малой осей, а значит, и относительно центра.

Окружность можно рассматривать как эллипс с коэффициентом сжатия $k = 1$.

Каноническое уравнение эллипса. Если *оси эллипса принять за оси координат*, то эллипс

---

1) Другое определение эллипса см. в § 41.

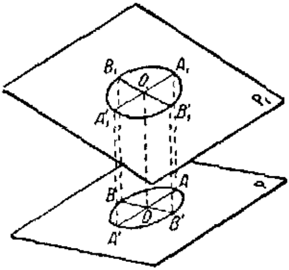
представляется уравнением[1])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Оно называется *каноническим*[2]) *уравнением эллипса.*

Пример 1. Окружность радиуса $a = 10$ *см* подвергнута равномерному сжатию с коэффициентом сжатия 3 : 5. После преобразования получится эллипс с большой осью $2a = 20$ *см* и малой осью $2b = 12$ *см* (полуоси $a = 10$ *см*, $b = 6$ *см*). Сжатие этого эллипса $\alpha = 1-k = \frac{10-6}{10} = 0,4$. Каноническое уравнение его есть

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$



Черт. 36.

Пример 2. При проектировании окружности на какую-нибудь плоскость P диаметр $A_1'A_1$ (черт. 36), параллельный этой плоскости, проектируется в натуральную величину, а все хорды, перпендикулярные к диаметру, сокращаются в отношении, равном $\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью окружности P_1 и плоскостью P. Поэтому проекция окружности есть эллипс с большой осью $2a = A'A$ и коэффициентом сжатия $k = \cos\varphi$.

---

[1]) Мы имеем:

$$OP^2+PN^2=ON^2=a^2. \qquad (3)$$

В силу (1) имеем:

$$PN=\frac{a}{b}PM. \qquad (4)$$

Подставляя в (3), находим:

$$OP^2+\frac{a^2}{b^2}PM^2=a^2, \qquad (5)$$

т. е.

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2. \qquad (6)$$

Разделив на a^2, получим равносильное уравнение (2). Итак, если $M(x, y)$ лежит на эллипсе $ABA'B'$, то x, y удовлетворяют уравнению (2). *Если же M не лежит на этом эллипсе, то равенство* (4), а значит, и уравнение (6) не удовлетворяются (ср. § 7).

[2]) От греческого слова «канон» — образец. Таким образом, название «каноническое» равнозначно названию «типовое».

Пример 3. Земной меридиан точнее принять не за окружность, а за эллипс. Земная ось есть малая ось этого эллипса. Длина ее (округленно) 12 712 *км*. Длина большой оси равна (округленно) 12 754 *км*. Найти коэффициент сжатия k и сжатие α этого эллипса.

Решение.

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{2a-2b}{2a} = \frac{12\,754-12\,712}{12\,754} \approx 0{,}003,$$

$$k = 1-\alpha \approx 0{,}997.$$

§ 41. Другое определение эллипса

Определение. *Эллипс* есть геометрическое место точек (M), сумма расстояний которых до двух данных точек F', F (черт. 37) имеет одно и то же значение $2a$:

$$F'M+FM = 2a. \tag{1}$$

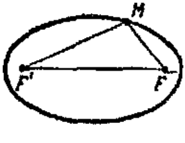
Точки F' и F называются *фокусами* [1]) эллипса, а расстояние $F'F$ — *фокусным расстоянием*; оно обозначается $2c$:

$$F'F = 2c. \tag{2}$$

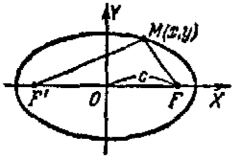
Так как $F'F < F'M+FM$, то $2c < 2a$, т. е.

$$c < a. \tag{3}$$

Определение настоящего параграфа равнозначно с определением § 40 [ср. уравнение (7) с уравнением (2) § 40].



Черт. 37.



Черт. 38.

Каноническое уравнение эллипса. Примем прямую $F'F$ (черт. 38) за ось абсцисс и середину O отрезка $F'F$ — за начало координат. Согласно определению эллипса и (1) § 10 имеем $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$. Согласно § 10

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{4}$$

[1]) Фокус — латинское слово; означает «очаг». Если в точке F (или F') поместить источник света, то после отражения от эллипса все лучи соберутся в точке F' (или F) и помещенное там воспламеняющееся вещество загорится. Это зрелище поражало зрителей; поэтому слово «фокус» получило тот смысл, в котором его употребляют ныне в обиходе.

Освободившись от радикалов[1]), получим равносильное уравнение

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \tag{5}$$

или

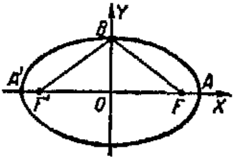
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \tag{6}$$

Вследствие (3) *величина* a^2-c^2 *положительна.* Поэтому (6) можно написать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

где

$$b^2 = a^2-c^2. \tag{8}$$



Черт. 39.

Уравнение (7) совпадает с (2) § 40. Значит, линия, названная в настоящем параграфе эллипсом, действительно тождественна с линией, названной эллипсом в § 40. При этом оказывается, что центр O эллипса (черт. 39) совпадает с серединой отрезка $F'F$, т. е. $OF = c$. Большая ось $2a = A'A$ эллипса, согласно равенству (1), оказывается равной неизменной сумме расстояний $F'M+FM$ (черт. 38). Малая полуось $b = OB$ (черт. 39) и отрезок $c = OF$ являются катетами прямоугольного треугольника BOF; гипотенуза BF этого треугольника равна a. Это видно из равенства (8), а также из того, что равные отрезки $F'B$ и FB составляют в сумме $2a$ (по определению эллипса). Таким образом, расстояние от фокуса до конца малой оси равно длине большой полуоси.

Отношение $\frac{F'F}{A'A}$ фокусного расстояния к большой оси, т. е. величина $\frac{c}{a}$, называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет обозначается греческой буквой ε («эпсилон»):

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{9}$$

Вследствие (3) эксцентриситет эллипса меньше единицы. Эксцентриситет ε и коэффициент сжатия k эллипса (§ 40) в силу (8) связаны соотношением

$$k^2 = 1-\varepsilon^2. \tag{10}$$

---

[1]) Один из радикалов переносим в правую часть и возводим уравнение в квадрат; в новом уравнении будет только один радикал. Уединив его, снова возведем в квадрат. После упрощений получим (5).

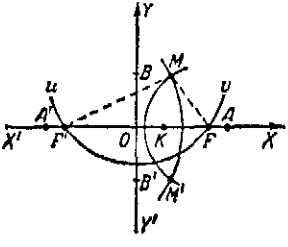
Пример. Пусть фокусное расстояние эллипса $2c = 8$ *см*, а сумма расстояний произвольной его точки до фокусов составляет 10 *см*. Тогда большая ось $2a = 10$ *см*, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}8$. Коэффициент сжатия $k = \sqrt{1-\varepsilon^2} = 0{,}6$. Малая ось $2b = 2ak = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 6$ *см*. Каноническое уравнение эллипса есть

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

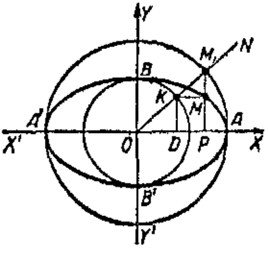
Замечание. Если окружность рассматривать как частный вид эллипса $b = a$, то $c = 0$, т. е. фокусы F' и F нужно считать совпавшими. Эксцентриситет окружности равен нулю.

§ 42. Построение эллипса по его осям

Первый способ. На перпендикулярных прямых $X'X$ и $Y'Y$ (черт. 40) откладываем отрезки $OA' = OA = a$ и $OB' = OB = b$ [половины данных осей $2a$, $2b$ $(a > b)$]. Точки A', A, B', B будут вершинами эллипса.



Черт. 40.



Черт. 41.

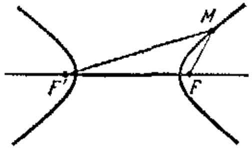
Из точки B радиусом a описываем дугу uv; она пересечет отрезок $A'A$ в точках F', F; это будут фокусы эллипса [согласно (8) § 41]. Разделим отрезок $A'A = 2a$ произвольно на две части: $A'K = r'$ и $KA = r$, так что $r' + r = 2a$. Из точки F описываем окружность радиуса r, а из F' — окружность радиуса r'. Эти окружности пересекутся в двух точках M и M', причем по построению $F'M + FM = 2a$ и $F'M' + FM' = 2a$. Согласно определению § 41 точки M и M' лежат на эллипсе. Меняя r, будем получать новые точки эллипса.

Второй способ. Проводим две концентрические окружности радиуса $OA = a$ и $OB = b$ (черт. 41). Через центр O проводим произвольный луч ON. Через точки K и

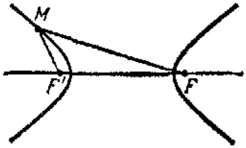
M_1, в которых ON встречает две окружности, проводим прямые, соответственно параллельные осям $X'X$, $Y'Y$. Эти прямые пересекутся в точке M. Ее ордината PM $(=KD)$ короче ординаты PM_1 точки M_1, лежащей на окружности радиуса a, причем $PM : PM_1 = b : a$. Значит (§ 40), точка M лежит на искомом эллипсе. Меняя направление луча ON, получим новые точки эллипса.

§ 43. Гипербола

Определение. *Гипербола* (черт. 42) есть геометрическое место точек (M), разность расстояний которых до



Черт. 42.



Черт. 43.

двух данных точек F', F имеет одно и то же абсолютное значение (ср. определение эллипса § 41):

$$|F'M - FM| = 2a. \tag{1}$$

Точки F' и F называются *фокусами*[1]) гиперболы, расстояние $F'F$ — *фокусным расстоянием*; оно обозначается через $2c$:

$$F'F = 2c. \tag{2}$$

Так как $F'F > |F'M - FM|$, то [ср. формулу (3) § 41]

$$c > a. \tag{3}$$

Если M ближе к фокусу F', чем к фокусу F, т. е. если $F'M < FM$ (черт. 43), то вместо (1) можно написать:

$$FM - F'M = 2a. \tag{1a}$$

Если же M ближе к F, чем к F', т. е. $F'M > FM$ (черт. 42), то мы имеем:

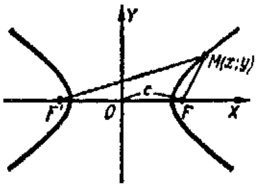
$$F'M - FM = 2a. \tag{1б}$$

---

[1]) Если в одном из фокусов поместить источник света, то после отражения от гиперболы лучи образуют расходящийся пучок с центром в другом фокусе. Ср. сноску на стр. 58.

Те точки, для которых $F'M - FM = 2a$, образуют одну ветвь гиперболы (при обычном расположении чертежа — «правую»); те точки, для которых $FM - F'M = 2a$, образуют другую ветвь («левую»).

Каноническое уравнение гиперболы. За ось OX принимаем (черт. 44) прямую $F'F$, за начало координат — середину O отрезка $F'F$. Согласно (2) имеем $F(c;\ 0)$, $F'(-c;\ 0)$. Правая ветвь согласно (1б) и § 10 представляется уравнением



Черт. 44.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (4а)$$

Для левой же ветви согласно (1а) и § 10 имеем уравнение

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \qquad (4б)$$

Освобождаясь от радикалов, получим в обоих случаях:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad (5)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad (6)$$

Это уравнение равносильно паре уравнений (4а), (4б) и представляет обе ветви гиперболы сразу [1]).

Уравнение (6) имеет тот же внешний вид, что уравнение эллипса [ср. (6) § 41], но это сходство обманчиво, так как теперь вследствие (3) величина a^2-c^2 отрицательна, так что $\sqrt{a^2-c^2}$ — мнимая величина. Поэтому обозначим через b величину $+\sqrt{c^2-a^2}$, так что [2])

$$b^2 = c^2-a^2. \qquad (7)$$

Тогда из (6) получаем *каноническое* [3]) *уравнение* гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

---

[1]) Две ветви гиперболы можно было бы считать не за одну линию, а за две. Но тогда ни одна из этих линий в отдельности не представлялась бы алгебраическим уравнением второй степени.

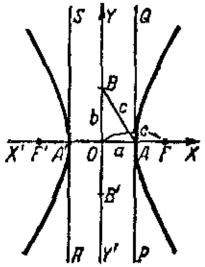
[2]) О геометрическом смысле величины b см. § 46.

[3]) См. сноску [2]) на стр. 57.

Пример. Если разность расстояний $F'M - FM$ по абсолютной величине равна $2a = 20$ *см*, а фокусное расстояние $2c = 25$ *см*, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{15}{2}$ (*см*). Каноническое уравнение гиперболы есть $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{\frac{225}{4}} = 1$.

§ 44. Форма гиперболы; вершины и оси

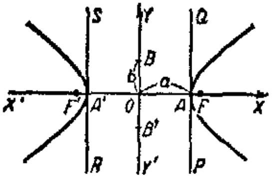
Гипербола симметрична относительно точки O — середины отрезка $F'F$ (черт. 45); она симметрична относительно прямой $F'F$ и относительно прямой $Y'Y$, проведенной через O перпендикулярно к $F'F$. Точка O называется *центром* гиперболы. Прямая $F'F$ пересекает гиперболу в двух точках $A(+a;\ 0)$ и $A'(-a;\ 0)$. Эти точки называются *вершинами* гиперболы. Отрезок $A'A = 2a$ (а часто и прямая $A'A$) называется *действительной* осью гиперболы.



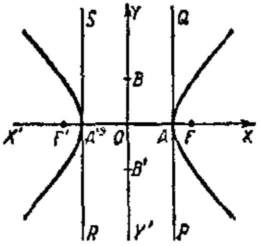
Черт. 45.

Прямая $Y'Y$ не пересекает гиперболу. Тем не менее принято откладывать на ней отрезки $B'O = OB = b$ и называть отрезок $B'B = 2b$ (а также и прямую $Y'Y$) *мнимой осью* гиперболы.

Так как $AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$, то из (7) § 43 следует, что $AB = c$, т. е. расстояние от вершины гиперболы до конца мнимой оси равно полуфокусному расстоянию.



Черт. 46.



Черт. 47.

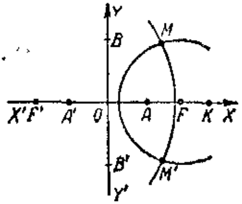
Мнимая ось $2b$ может быть больше (черт. 45), меньше (черт. 46) или равна (черт. 47) действительной оси $2a$. Если действительная и мнимая оси равны ($a = b$), то гипербола называется *равносторонней* (или *равнобочной*).

Отношение $\frac{F'F}{A'A} = \frac{c}{a}$ фокусного расстояния к действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается ε [ср. (9) § 41]. Вследствие (3) § 43 эксцентриситет гиперболы больше единицы. Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$.

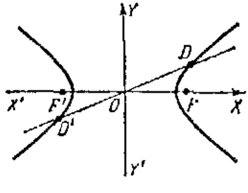
Гипербола лежит целиком вне полосы, ограниченной прямыми PQ и RS, параллельными $Y'Y$ и отстоящими от $Y'Y$ на расстояние $OA = A'O = a$ (черт. 45, 46, 47). Вправо и влево от этой полосы гипербола простирается неограниченно.

§ 45. Построение гиперболы по ее осям

На перпендикулярных прямых $X'X$ и $Y'Y$ (черт. 48) откладываем отрезки $OA = OA' = a$ и $OB = OB' = b$ (действительные и мнимые полуоси). Затем откладываем отрезки OF и OF', равные AB. Точки F' и F — фокусы (согласно (7) § 43). На продолжении отрезка $A'A$ за точку A берем произвольно точку K. Из точки F радиусом $r = AK$ описываем окружность. Из точки F' описываем окружность радиусом $r' = A'K = 2a + r$. Эти окружности пересекутся в двух точках M, M', причем по построению $F'M - FM = 2a$ и $F'M' - FM' = 2a$. Согласно определению (§ 43) точки M и M' лежат на гиперболе. Меняя r, получим новые точки «правой» ветви. Аналогично строятся точки «левой» ветви.



Черт. 48.



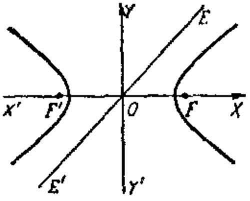
Черт. 49.

§ 46. Асимптоты гиперболы

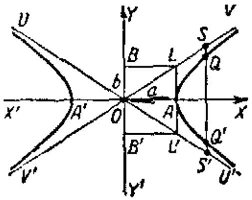
Прямая $y = kx$ (она проходит через центр гиперболы O) при $|k| < \frac{b}{a}$ пересекает гиперболу в двух точках D', D (черт. 49), симметричных относительно O. Если же

$|k| \geqslant \frac{b}{a}$, то прямая $y = kx$ ($E'E$ на черт. 50) не имеет общих точек с гиперболой.

Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ ($U'U$ и $V'V$ на черт. 51), для которых $|k| = \frac{b}{a}$, обладают следующим (только им



Черт. 50.



Черт. 51.

присущим) свойством: при неограниченном продолжении каждая из них неограниченно сближается с гиперболой.

Точнее: *если прямую $Q'Q$, параллельную оси ординат, неограниченно удалять от центра O* (вправо или влево), *то отрезки QS, $Q'S'$ между гиперболой и каждой из прямых $U'U$, $V'V$ неограниченно уменьшаются.*

Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*[1]).

Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны.

Геометрический смысл мнимой оси. Через вершину A гиперболы (черт. 51) проведем прямую $L'L$, перпендикулярную к действительной оси. Тогда отрезок $L'L$ этой прямой, заключенный между асимптотами гиперболы, равен мнимой оси гиперболы $B'B = 2b$.

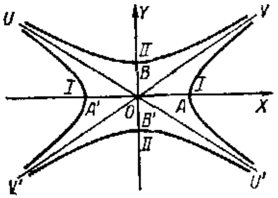
§ 47. Сопряженные гиперболы

Две гиперболы называются *сопряженными* (черт. 52), если они имеют общий центр O и общие оси, но действительная ось одной из них является мнимой осью другой.

---

[1]) «Асимптота» — греческое слово; означает «не попадающая»

На черт. 52 $A'A$ — действительная ось гиперболы I и мнимая ось гиперболы II, $B'B$ — действительная ось гиперболы II и мнимая ось гиперболы I.



Черт. 52.

Если

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

есть уравнение одной из сопряженных гипербол, то другая представляется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

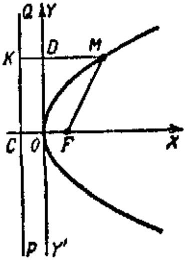
Сопряженные гиперболы имеют общие асимптоты ($U'U$ и $V'V$ на черт. 52).

§ 48. Парабола

Определение. *Парабола* (черт. 53) есть геометрическое место точек (M), равноудаленных от данной точки F и данной врямой PQ:

$$FM = KM. \tag{1}$$

Точка F называется *фокусом*[1]), а прямая PQ — *директрисой* параболы. Расстояние $FC = p$ от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы.



Черт. 53.

Примем за начало координат середину O отрезка FC, так что

$$CO = OF = \frac{p}{2}. \tag{2}$$

За ось абсцисс примем прямую CF; положительным направлением будем считать направление от O к F.

Тогда имеем: $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, $KM = KD + DM = \frac{p}{2} + x$ и (§ 10) $FM = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$. Вследствие (1) имеем:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x. \tag{3}$$

Освободившись от радикала, получим равносильное уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

---

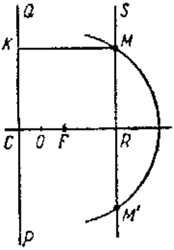
[1]) Параллельный пучок лучей, перпендикулярных к директрисе, после отражения от параболы обратится в центральный пучок с центром в фокусе. Ср. сноску на стр. 58.

Это — *каноническое*[1]) *уравнение* параболы.

Уравнение директрисы PQ (в той же системе координат) есть $x+\frac{p}{2}=0$.

Парабола симметрична относительно прямой FC (ось абсцисс при нашем выборе системы координат). Эта прямая называется *осью* параболы. Парабола проходит через середину O отрезка FC. Точка O называется *вершиной* параболы (ее мы приняли за начало координат).

Парабола лежит целиком по одну сторону от прямой $Y'Y$ (касательная в вершине) и простирается в эту сторону неограниченно.



Черт. 54.

§ 49. Построение параболы по данному параметру p

Проведем (черт. 54) прямую PQ (директрису параболы) и на данном расстоянии $p=CF$ от нее возьмем точку F (фокус). Середина O отрезка CF будет вершиной, а прямая CF — осью параболы. На луче OF возьмем произвольную точку R и через нее проведем прямую RS, перпендикулярную к оси. Из фокуса F, как из центра, опишем окружность радиусом, равным CR. Она пересечет RS в двух точках M, M'. Точки M и M' принадлежат искомой параболе, так как по построению $FM=CR=KM$ (см. определение, § 48). Меняя положение точки R, будем находить новые точки параболы.

§ 50. Парабола как график уравнения $y=ax^2+bx+c$

Уравнение

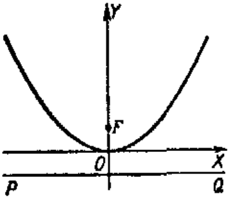
$$x^2=2py \tag{1}$$

представляет ту же параболу, что и уравнение $y^2=2px$ (ср. § 48), только теперь ось параболы совпадает с осью ординат; начало координат по-прежнему совпадает с вершиной параболы (черт. 55). Фокус находится в точке $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$. Директриса PQ представляется уравнением $y+\frac{p}{2}=0$.

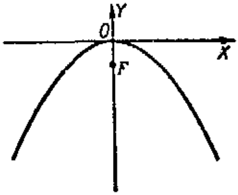
---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 57.

Если за положительное направление на оси ординат



Черт. 55.



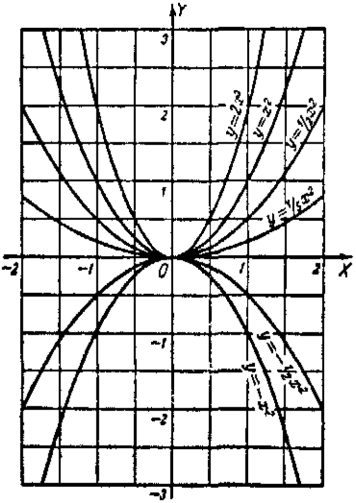
Черт. 56.

принять не направление OF, а направление FO (черт. 56), то уравнение параболы будет:

$$-x^2 = 2py \tag{2}$$

(см. черт. 56, где осям координат приданы обычные направления). Сообразно с этим графиками функций

$$y = ax^2 \tag{3}$$



Черт. 57.

служат параболы, обращенные вогнутостью вверх, когда $a > 0$, и вниз, когда $a < 0$. Чем меньше абсолютное значение a (на черт. 57 имеем $a = 2$, $a = \pm 1$, $a = \pm \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{5}$), тем ближе фокус от вершины, тем больше «раствор» параболы.

Всякое уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

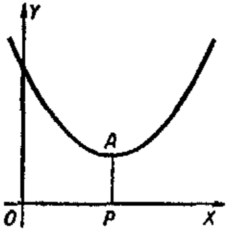
графически *изображается той же параболой, что и уравнение* $y = ax^2$ (для обеих парабол расстояние $\frac{p}{2}$ от вершины до фокуса равно $\frac{1}{|4a|}$). Обе обращены вогнутостью в одном и том же направлении. Но вершина параболы (4) лежит не в начале, а в точке A (черт. 58) с координатами

$$x_A = OP = -\frac{b}{2a}, \quad y_A = PA = \frac{4ac-b^2}{4a}. \tag{5}$$

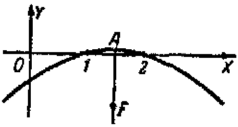
Пример. Уравнение

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \tag{4a}$$

$\left(a = -\frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4},\ c = -\frac{1}{2}\right)$ представляет (черт. 59) ту же



Черт. 58.



Черт. 59.

параболу, что и уравнение $y = -\frac{1}{4}x^2$. Вершина лежит в точке A с координатами

$$x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}, \quad y_A = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{1}{16}. \tag{5a}$$

Фокус находится снизу от вершины на расстоянии

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{|4a|} = 1.$$

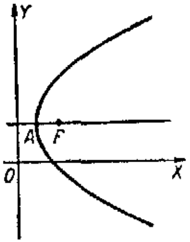
Следовательно, координаты фокуса суть

$$x_F = \frac{3}{2}, \quad y_F = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}.$$

Замечание 1. Нет нужды запоминать формулы (5). Для вычисления x_A, y_A можно применить следующий прием. Уравнение (4a) перепишем в виде

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x^2 - 3x). \tag{6}$$

Дополним выражение в скобках до полного квадрата, прибавив $\frac{9}{4}$. Для компенсации прибавим $-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=-\frac{9}{16}$ к левой части. Получим:



Черт. 60.

$$y-\frac{1}{16}=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2. \qquad (7)$$

Уравнение (7) примет вид

$$y'=-\frac{1}{4}x'^2, \qquad (8)$$

если выполнить преобразование переноса осей (§ 35):

$$y'=y-\frac{1}{16}, \quad x'=x-\frac{3}{2}. \qquad (9)$$

Вершина параболы (т. е. точка $x'=0$, $y'=0$) имеет координаты $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{16}$.

Замечание 2. Общие формулы (5) можно вывести из (4) тем же приемом, какой был применен в замечании 1 к уравнению (4а).

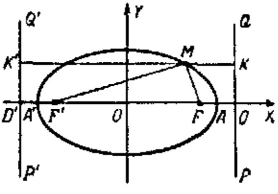
Замечание 3. Уравнение

$$x=ay^2+by+c$$

представляет параболу (черт. 60) с вершиной в точке $\left(\frac{4ac-b^2}{4a};\ -\frac{b}{2a}\right)$. Ось ее параллельна оси абсцисс; вогнутость обращена «вправо», если $a>0$, и «влево», если $a<0$.

§ 51. Директрисы эллипса и гиперболы

а) Директрисы эллипса. Пусть дан эллипс (черт. 61) с большой осью $A'A=2a$ и эксцентриситетом (§ 41) $\frac{OF}{OA}=\frac{c}{a}=\varepsilon$. Пусть $\varepsilon\neq 0$ (т. е. эллипс не является окружностью). Отложим от центра O эллипса на его большой оси отрезки $OD=OD'$, равные $\frac{a}{\varepsilon}$ (т. е. $OD:OA=OA:OF$). Прямые PQ, $P'Q'$, проходящие соответственно через D, D' и параллельные малой оси, называются *директрисами эллипса*.



Черт. 61.

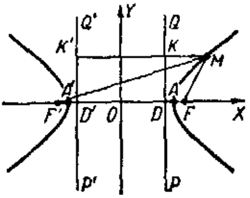
Каждой из директрис поставим в соответствие тот фокус эллипса, который лежит по ту же сторону от центра, т. е. директрисе PQ – фокус F, а директрисе $P'Q'$ – фокус

F'. Тогда *для любой точки M эллипса отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равно эксцентриситету* ε, т. е.

$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \tag{1}$$

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то всякая точка эллипса ближе к фокусу, чем к соответствующей директрисе.

Если большая ось эллипса остается неизменной, а эксцентриситет стремится к нулю (т. е. эллипс все меньше отличается от окружности), то директрисы неограниченно удаляются от центра.



Черт. 62.

У окружности директрис нет.

б) Директрисы гиперболы. Пусть $A'A$ (черт. 62) есть действительная ось гиперболы, а $\varepsilon = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$ — ее эксцентриситет (§ 44). Откладываем

$$OD = OD' = \frac{a}{\varepsilon}$$

(т. е. $OD : OA = OA : OF$). Прямые PQ, $P'Q'$, проходящие соответственно через D, D' и параллельные мнимой оси, называются *директрисами гиперболы*. *Для любой точки M гиперболы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы* [см. пункт а)] *равно эксцентриситету* ε, *т. е.*

$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \tag{2}$$

Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то всякая точка гиперболы ближе к директрисе, чем к соответствующему фокусу.

§ 52. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

Все эллипсы[1]), гиперболы и параболы обладают следующим свойством: для каждой из этих линий остается неизменным отношение (черт. 63)

$$FM : MK, \tag{1}$$

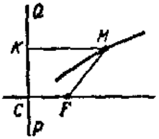
где FM — расстояние произвольной ее точки M до данной точки F (фокуса), а MK — расстояние точки M до данной прямой PQ (директрисы).

---

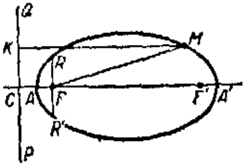
[1]) Кроме окружности.

Для эллипса (черт. 64) это отношение меньше единицы (оно равно эксцентриситету эллипса $\frac{c}{a}$; ср. §§ 41, 51). Для гиперболы (черт. 65) оно больше единицы (оно равно эксцентриситету гиперболы $\frac{c}{a}$; ср. §§ 43, 51); для параболы (черт. 66) оно равно 1 (§ 48).

Обратно, всякая линия, обладающая указанным свойством, есть либо эллипс (если $FM : MK < 1$), либо гипербола (если $FM : MK > 1$),



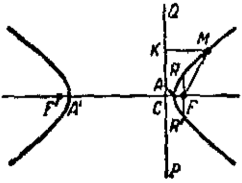
Черт. 63.



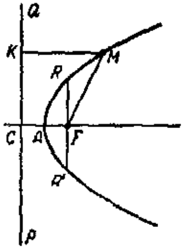
Черт. 64.

либо парабола (если $FM : MK = 1$). Поэтому упомянутое свойство можно принять за общее определение эллипса, гиперболы и параболы, а неизменное отношение $FM : MK = \varepsilon$ назвать *эксцентриситетом*. Эксцентриситет ε параболы равен единице, для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Заданием эксцентриситета ε и расстояния $FC = d$ от фокуса до директрисы полностью определяются величина и форма эллипса, гиперболы и параболы. Если при данном ε изменять d, то все получаемые кривые будут подобны друг другу.



Черт. 65.



Черт. 66.

Хорда RR' эллипса, гиперболы или параболы (черт. 64, 65, 66), проходящая через фокус F и перпендикулярная к оси FC, называется *фокальной хордой* и обозначается $2p$:

$$RR' = 2p. \tag{2}$$

Величина $p = FR = FR'$ (т. е. длина фокальной полухорды) называется *параметром* эллипса, гиперболы или параболы. Она связана с d соотношением

$$p = d\varepsilon, \tag{3}$$

так что для параболы ($\varepsilon = 1$)

$$p = d. \tag{3a}$$

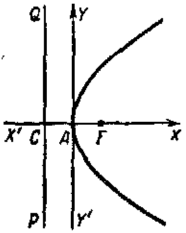
Вершины эллипса, гиперболы и параболы (A на черт. 64, 65, 66) делят отрезок FC в отношении $FA : AC = \varepsilon$. Вторая вершина эллипса и гиперболы (A' на черт. 64, 65) делит FC в том же отношении внешним образом (§ 11).

В соответствии с новым определением эллипс, гипербола и парабола представляются единым уравнением. Если за начало принять вершину A (черт. 67) и ось направить по лучу AF, то это уравнение будет:

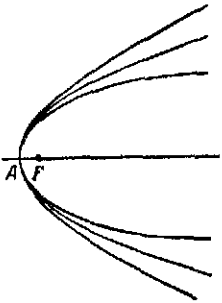
$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2; \tag{4}$$

здесь p — параметр, а ε — эксцентриситет.

Вблизи от вершины парабола и по форме мало отличается от эллипсов и гипербол, имеющих эксцентриситет, близкий к 1. На черт. 68



Черт. 67.



Черт. 68.

изображены эллипс с эксцентриситетом $\varepsilon = 0,9$, гипербола[1]) с эксцентриситетом $\varepsilon = 1,1$ и парабола ($\varepsilon = 1$), имеющие общий фокус F и общую вершину A.

Полуоси a, b и полуфокусное расстояние c эллипса и гиперболы выражаются через ε следующим образом:

Эллипс	$a = \dfrac{p}{1 - \varepsilon^2}$	$b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$	$c = a\varepsilon = p\dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$
Гипербола	$a = \dfrac{p}{\varepsilon^2 - 1}$	$b = \dfrac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$	$c = a\varepsilon = p\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$

Расстояние $\delta = AF$ от фокуса F до вершины A во всех трех случаях выражается формулой

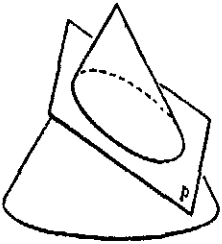
$$\delta = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{p}{1+\varepsilon}. \tag{5}$$

---

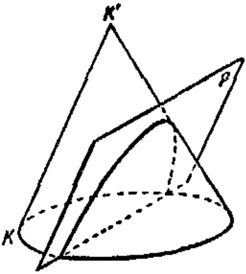
[1]) Вторая вершина эллипса и гиперболы (а вместе с тем и вся вторая ветвь гиперболы) тем дальше от первой вершины, чем ε ближе к 1.

§ 53. Конические сечения

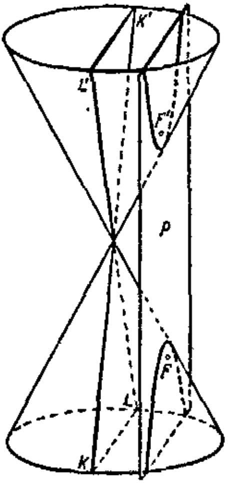
Эллипс, гиперболу и параболу называют *коническими сечениями*, так как их можно получить на поверхности круглого [1]) конуса в пересечении с плоскостью F, не проходящей через вершину конуса. При этом поверхность конуса мыслится неограниченно продолженной в обе стороны от вершины.



Черт. 69.



Черт. 70.



Черт. 71.

Если плоскость P не параллельна ни одной образующей конуса (черт. 69), то коническое сечение есть эллипс [2]).

Если плоскость P параллельна только одной из образующих конуса (KK' на черт. 70), то коническое сечение есть парабола.

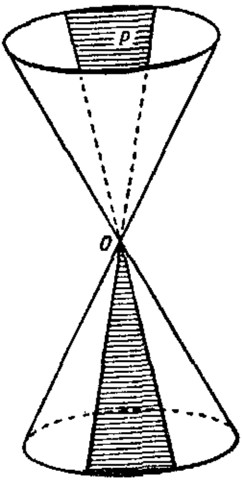
Если плоскость P параллельна двум образующим конуса (KK' и LL' на черт. 71), то коническое сечение есть гипербола.

Если плоскость P проходит через вершину конуса, то вместо эллипса мы получим точку, вместо гиперболы — пару пересекающихся прямых (черт. 72), а вместо параболы — прямую касания плоскости P с конусом (черт. 73). Эту прямую можно рассматривать как две слившиеся в одну.

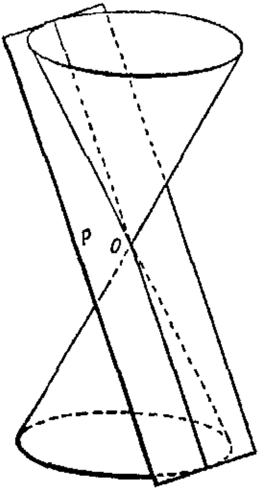
---

[1]) А также на поверхности некруглого кругового конуса.

[2]) В частности, эллипс может быть окружностью. На круглом конусе круговые сечения образуются только плоскостями, параллельными основанию; некруглый же конус имеет еще одно семейство круговых сечений.



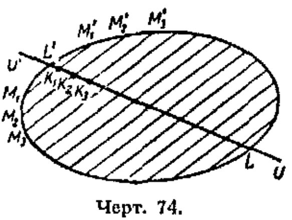
Черт. 72.



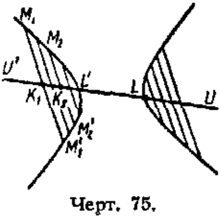
Черт. 73.

§ 54. Диаметры конического сечения

Середины параллельных хорд всякого конического сечения лежат на одной прямой; эта прямая называется *диаметром* конического сечения. Каждому направлению параллельных хорд соответствует свой диаметр (*«сопряженный»* с данным направлением). На черт. 74



Черт. 74.



Черт. 75.

изображен один из диаметров $U'U$ эллипса. На нем лежат середины K_1, K_2,... параллельных хорд M_1M_1', M_2M_2', ... Геометрическое место этих середин есть отрезок $L'L$ диаметра $U'U$.

На черт. 75 изображен диаметр $U'U$ гиперболы, соответствующий параллельным хордам M_1M_1', M_2M_2' и т. д. На нем лежат середины

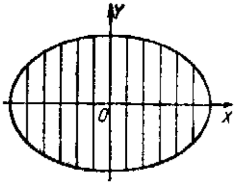
$K_1, K_2, \ldots$ этих хорд. Геометрическое место точек $K_1, K_2, \ldots$ есть пара лучей $L'U'$ и LU.

Замечание. В элементарной геометрии диаметром окружности называется отрезок (наибольшая хорда). В аналитической геометрии слово «диаметр» иногда тоже употребляется для обозначения отрезка LL' (черт. 74, 75). Но чаще этим словом называют всю прямую LL'.

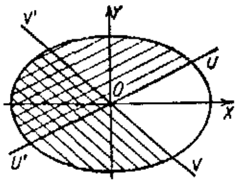
§ 55. Диаметры эллипса

Все диаметры эллипса проходят через его центр.

Диаметр, соответствующий хордам, параллельным малой оси, есть большая ось (черт. 76). Диаметр, соответствующий хордам, параллельным большой оси, есть малая ось.



Черт. 76.



Черт. 77.

Хордам с угловым коэффициентом k ($k \neq 0$) отвечает диаметр $y = k_1 x$, где k_1 определяется из соотношения

$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1, \tag{1}$$

т. е.

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{1a}$$

Пример 1. Диаметр $U'U$ эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(черт. 77), отвечающий хордам с угловым коэффициентом $k = -\frac{8}{9}$, представляется уравнением $y = k_1 x$; значение k_1 определяется из соотношения $-\frac{8}{9} k_1 = -\frac{4}{9}$, так что уравнение диаметра $U'U$ есть

$$y = \frac{1}{2} x.$$

Пример 2. Диаметр $V'V$ (черт. 77) того же эллипса, соответствующий хордам с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{2}$, представляется уравнением $y = -\frac{8}{9} x$.

Если диаметр $U'U$ эллипса делит пополам хорды, параллельные диаметру $V'V$, то диаметр $V'V$ всегда делит пополам хорды, параллельные диаметру $U'U$

Пример 3. Диаметр $y = -\frac{8}{9}x$ эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (ср. примеры 1 и 2) делит пополам хорды, параллельные диаметру $y=\frac{1}{2}x$. В свою очередь диаметр $y=\frac{1}{2}x$ делит пополам хорды, параллельные диаметру $y=-\frac{8}{9}x$.

Диаметры, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются *взаимно сопряженными*.

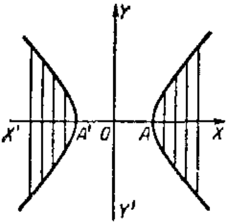
Два диаметра, сопряженных друг с другом и вместе с тем взаимно перпендикулярных, называются *главными диаметрами*. У окружности всякий диаметр — главный. У эллипса, отличного от окружности, есть лишь одна пара главных диаметров — большая и малая оси.

Угловые коэффициенты неглавных сопряженных направлений имеют согласно (1а) противоположные знаки, т. е. **два сопряженных диаметра эллипса принадлежат различным парам вертикальных углов, образуемых осями** (на черт. 77 диаметр $V'V$ лежит во II и IV четверти, а $U'U$ — в I и III четверти). При вращении диаметра $U'U$ сопряженный диаметр $V'V$ вращается в ту же сторону, что и $U'U$.

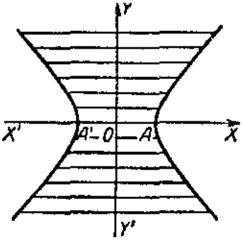
§ 56. Диаметры гиперболы

Все диаметры гиперболы проходят через ее центр.

Диаметр, соответствующий хордам, параллельным мнимой оси (черт. 78), есть действительная ось (геометрическое место середин хорд есть пара лучей $A'X'$ и AX); диаметр, соответствующий хордам, параллельным действительной оси (черт. 79), есть мнимая ось (середины хорд заполняют ось $Y'Y$ целиком).



Черт. 78.



Черт. 79.

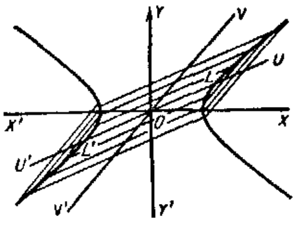
Для гиперболы, как и для эллипса, угловой коэффициент k параллельных хорд ($k \neq 0$) и угловой коэффициент k_1 соответствующего диаметра связаны соотношением

$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1. \tag{1}$$

Но соотношение (1а) § 55 заменяется соотношением

$$kk_1 = +\frac{b^2}{a^2}. \tag{1б}$$

Пример 1. Диаметр $U'U$ гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ (черт. 80), соответствующий хордам с угловым коэффициентом $k=\frac{10}{9}$, представляется уравнением $y=k_1x$; значение k_1 определяется из соотношения $kk_1=\frac{4}{9}$, так что уравнение диаметра $U'U$ есть $y=\frac{2}{5}x$.



Черт. 80.

Пример 2. Диаметр $V'V$ (черт. 80) той же гиперболы, соответствующий хордам с угловым коэффициентом $k=\frac{2}{5}$, представляется уравнением $y=\frac{10}{9}x$.

Если диаметр $U'U$ делит пополам хорды, параллельные диаметру $V'V$, то диаметр $V'V$ всегда делит пополам хорды, параллельные диаметру $U'U$. Такие два диаметра называются *взаимно сопряженными.*

У всякой гиперболы есть лишь одна пара главных (т. е. сопряженных и вместе с тем взаимно перпендикулярных) диаметров — действительная и мнимая оси.

Если угловой коэффициент параллельных хорд по абсолютному значению больше, чем угловой коэффициент асимптоты, т. е.

$$|k|>\frac{b}{a}$$

(см. пример 1, где $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$), то геометрическое место середин хорд есть пара лучей ($L'U'$ и LU). Если же

$$|k|<\frac{b}{a}$$

(см. пример 2), то середины хорд заполняют диаметр ($V'V$ на черт. 80) целиком. Из двух сопряженных диаметров один всегда принадлежит к первому типу, другой — ко второму.

Замечание 1. Угловой коэффициент параллельных хорд не может по абсолютному значению равняться $\frac{b}{a}$, ибо прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ (асимптоты) не пересекают гиперболы, а прямые, параллельные асимптоте, пересекают гиперболу лишь в одной точке.

Угловые коэффициенты неглавных сопряженных направлений имеют согласно (16) одинаковые знаки, т. е. два сопряженных диаметра гиперболы принадлежат одной и той же паре вертикальных углов, образованных осями.

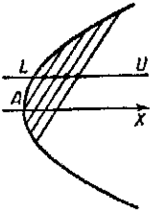
Напротив, по отношению к асимптотам два сопряженных диаметра принадлежат различным парам вертикальных углов.

Замечание 2. При вращении диаметра $U'U$ гиперболы сопряженный диаметр $V'V$ вращается в противоположную сторону. При этом, когда $U'U$ неограниченно приближается к одной из асимптот, $V'V$ неограниченно приближается *к той же* асимптоте. Поэтому об асимптоте говорят, что она является диаметром, *сопряженным самому себе.* Это выражение условно, ибо асимптота не является диаметром (ср. замечание 1). Кроме асимптот, всякая другая прямая, проходящая через центр гиперболы, является одним из ее диаметров.

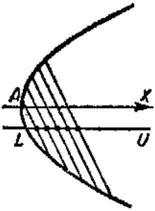
§ 57. Диаметры параболы

Все диаметры параболы параллельны ее оси; см. черт. 81 и 82 (геометрическое место середин параллельных хорд параболы есть луч LU).

Диаметр, соответствующий хордам, перпендикулярным к оси параболы, есть сама ось (черт. 83).



Черт. 81.



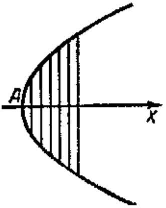
Черт. 82.

Диаметр параболы $y^2=2px$, соответствующий хордам с угловым коэффициентом k ($k \neq 0$), представляется уравнением

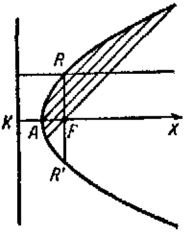
$$y=\frac{p}{k}$$

(чем больше наклон хорды к оси, тем диаметр дальше от оси [1])).

Пример. Диаметр параболы $y^2=2px$, соответствующий хордам, наклоненным к оси под углом $+45°$ ($k=1$), представляется уравнением $y=p$, т. е. его расстояние от оси AX (черт. 84) равно фокальной полухорде FR (§ 52). Значит, диаметр пересекает параболу в точке R, лежащей над фокусом F.



Черт. 83.



Черт. 84.

Все прямые, параллельные какому-либо диаметру параболы, пересекают параболу только в одной точке. Поэтому взаимно сопряженных диаметров у параболы нет.

---

[1]) Угловой коэффициент всякого диаметра параболы равен нулю, т. е. удовлетворяет уравнению $kk_1 = \varepsilon^2 - 1$, которое имеет место (§§ 55, 56) для эллипса и гиперболы (для параболы $\varepsilon = 1$).

§ 58. Линии второго порядка

Эллипс (в частности, окружность), гипербола и парабола являются линиями второго порядка, т. е. во всякой системе декартовых координат представляются уравнениями второй степени. Но не всякое уравнение второй степени представляет одну из упомянутых линий. Может, например, случиться, что уравнение второй степени представляет пару прямых.

Пример 1. Уравнение

$$4x^2-9y^2=0, \tag{1}$$

распадающееся на два уравнения $2x-3y=0$ и $2x+3y=0$, представляет пару прямых, пересекающихся в начале координат.

Пример 2. Уравнение

$$x^2-2xy+y^2-9=0, \tag{2}$$

распадающееся на уравнения $x-y+3=0$ и $x-y-3=0$, представляет пару параллельных прямых.

Пример 3. Уравнение

$$x^2-2xy+y^2=0, \tag{3}$$

т. е. $(x-y)^2=0$, представляет одну прямую $x-y=0$; но ввиду того, что в левую часть (3) двучлен $x-y$ входит множителем дважды, принято считать, что (3) представляет две слившиеся прямые.

Может случиться, что уравнение второй степени представляет только одну точку.

Пример 4. Уравнение

$$x^2+\frac{1}{4}y^2=0 \tag{4}$$

имеет только одно действительное решение, именно $x=0$, $y=0$. Оно представляет точку (0; 0). Впрочем, (4) распадается на два уравнения $x+\frac{1}{2}iy=0$, $x-\frac{1}{2}iy=0$ с мнимыми коэффициентами. Поэтому говорят, что (4) представляет «пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке».

Наконец, может оказаться, что уравнение второй степени не представляет никакого геометрического места.

Пример 5. Уравнение

$$\frac{x^2}{-9}+\frac{y^2}{-16}=1 \tag{5}$$

не представляет ни линии, ни даже точки, так как величина $\frac{x^2}{-9}+\frac{y^2}{-16}$ не может иметь положительного значения. Однако ввиду внешнего сходства уравнения (5) с уравнением эллипса говорят, что уравнение (5) представляет «мнимый эллипс».

Пример 6. Уравнение

$$x^2-2xy+y^2+9=0 \qquad (6)$$

тоже не представляет ни линии, ни даже точки. Но так как оно распадается на уравнения $x-y+3i=0$ и $x-y-3i=0$, то говорят (ср. пример 2), что (6) представляет «пару мнимых параллельных прямых».

Коническими сечениями и парами прямых исчерпываются все линии, которые могут представляться уравнением второй степени в декартовой системе координат. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Всякая линия второго порядка есть либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо пара прямых (пересекающихся, параллельных или совпавших).*

План доказательства. С помощью преобразования координат данное уравнение второй степени приводится к более простому виду, и тогда мы либо получаем одно из канонических уравнений

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \text{ (эллипс, действительный или мнимый)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \text{ (гипербола)}, \quad y^2=2px \text{ (парабола)},$$

либо обнаруживаем, что уравнение второй степени разлагается на два уравнения первой степени. Вместе с тем мы находим размеры линии второго порядка и расположение ее относительно первоначальной системы координат (например, для эллипса — длины осей, их уравнения, положение центра и т. п.).

В §§ 61—62 упомянутые преобразования проведены полностью.

§ 59. Запись общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени обычно пишут в виде

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Обозначения $2B$, $2D$, $2E$ (а не B, D, E) введены потому, что во многие формулы входят половины коэффициентов при xy, при x и при y. Пользуясь обозначениями $2B$, $2D$, $2E$, мы устраняем дробные выражения.

Пример 1. Для уравнения

$$x^2+xy-2y^2+2x+4y+4=0$$

имеем:

$$A=1,\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-2,\quad D=1,\quad E=2,\quad F=4.$$

Пример 2. Для уравнения $2xy+x+5=0$ имеем:

$$A=0,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=\frac{1}{2},\quad E=0,\quad F=5.$$

Замечание. Величины A, B, C, D, E, F могут иметь любые значения, лишь бы величины A, B, C не были равны нулю все вместе, ибо тогда (1) есть уравнение первой степени.

§ 60. Упрощение уравнения второй степени; общие замечания

Преобразование уравнения второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

к одному из простейших видов (см. § 58) мы выполним по следующему плану [1]).

а) Предварительное преобразование. С его помощью мы освободимся от члена, содержащего произведение координат (это достигается поворотом осей; см. § 61).

б) Завершающее преобразование. С его помощью мы затем освободимся от членов, содержащих первые степени координат (это достигается переносом начала; см. § 62).

§ 61. Предварительное преобразование уравнения второй степени

(Если $B=0$, то это преобразование становится ненужным.)

Поворачиваем оси координат на угол α, удовлетворяющий условию [2])

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}. \qquad (2)$$

---

[1]) Излагаемый здесь способ — не самый быстрый, но он не требует никаких вспомогательных теорем. Другой способ, ведущий к цели быстрее, объяснен в §§ 69, 70.

[2]) Если $A=C$ $\left(\text{величина } \frac{2B}{A-C} \text{ «обращается в бесконечность»}\right)$, то (§ 21, замечание) $2\alpha=\pm 90^\circ$, т. е. $\alpha=\pm 45^\circ$.

Формулы преобразования будут (§ 36):

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \tag{3}$$

Члены с $x'y'$ взаимно уничтожатся [1]), и новое уравнение будет иметь вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \tag{4}$$

Пример 1. Дано уравнение

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0. \tag{1a}$$

Здесь $A = 2$, $B = -2$, $C = 5$, $D = -\frac{1}{2}$, $E = \frac{5}{2}$, $F = -4$. Из условия (2) находим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}. \tag{2a}$$

Если угол 2α взять в первой четверти ($2\alpha \approx 53°8'$, $\alpha \approx 26°34'$), то получим:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Формулы (3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Подставляя в (1a), находим новое уравнение

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' + \frac{11}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0, \tag{4a}$$

где

$$A' = 1,\ B' = 0,\ C' = 6,\ D' = \frac{3}{2\sqrt{5}},\ E' = \frac{11}{2\sqrt{5}},\ F' = -4.$$

---

[1]) Коэффициент при $x'y'$ имеет вид

$$2B' = (C-A)\,2\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha.$$

В силу (2) этот коэффициент равен нулю.

Если взять угол 2α в третьей четверти ($2\alpha \approx 233°8'$, $\alpha \approx 116°34'$), то аналогично получим уравнение

$$6x'^2 + y'^2 + \frac{11}{\sqrt{5}} x' - \frac{3}{\sqrt{5}} y' - 4 = 0,$$

где

$$A' = 6,\ B' = 0,\ C' = 1,\ D' = \frac{11}{2\sqrt{5}},\ E' = -\frac{3}{2\sqrt{5}},\ F' = -4.$$

Пример 2. Дано уравнение

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0. \tag{1б}$$

Здесь

$$A = 1,\quad B = 1,\quad C = 1,\quad D = 1,\ E = \frac{1}{2},\quad F = 0.$$

Так как $A = C$, то (см. сноску [2]) на стр. 82) можно взять $\alpha = 45°$. Подставив в (1б) выражения

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y &= x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \end{aligned}\right\} \tag{3б}$$

находим:

$$2x'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' = 0. \tag{4б}$$

Здесь

$$A' = 2,\ B' = 0,\ C' = 0,\ D' = \frac{3}{2\sqrt{2}},\ E' = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ F' = 0.$$

Если взять $\alpha = -45°$, то получим:

$$2y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{3}{\sqrt{2}} y' = 0. \tag{4б'}$$

Здесь

$$A' = 0,\ B' = 0,\ C' = 2,\ D' = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ E' = \frac{3}{2\sqrt{2}},\ F' = 0.$$

Пример 3. Дано уравнение

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0. \tag{1в}$$

Так как $A = C$, то можно взять $\alpha = 45°$. Подставив в (1в) выражения (3б), найдем:

$$4y'^2 - 8\sqrt{2}\,y' - 17 = 0. \qquad (4в)$$

Взяв $\alpha = -45°$, получим:

$$4x'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 17 = 0. \qquad (4в')$$

§ 62. Завершающее преобразование уравнения второй степени

Здесь нужно различать два случая:

1) ни один из коэффициентов A', C' в уравнении

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \qquad (4)$$

не равен нулю (так было в примере 1);

2) один из коэффициентов A', C' равен нулю (так было в примерах 2 и 3)[1].

Случай 1. Уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \qquad (4)$$

преобразуем так. Сумму $A'x'^2 + 2D'x' = A'\left(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}x'\right)$ дополняем членом $\frac{D'^2}{A'}$; получаем $A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2$. Сумму $C'y'^2 + 2E'y'$ дополняем членом $\frac{E'^2}{C'}$; получаем $C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2$. К правой части (4) для компенсации прибавляем $\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}$. Получаем уравнение вида

$$A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 = K', \qquad (5)$$

где

$$K' = \frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} - F'.$$

Переносим начало в точку $\left(-\frac{D'}{A'};\ -\frac{E'}{C'}\right)$, т. е. преобразуем координаты (§ 35) по формулам

$$x' = \bar{x} - \frac{D'}{A'}, \quad y' = \bar{y} - \frac{E'}{C'}. \qquad (6)$$

[1]) Коэффициенты A' и C' не могут оба вместе равняться нулю (иначе уравнение (4) будет первой степени).

Получаем уравнение

$$A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2 = K' \quad (A' \neq 0, \quad C' \neq 0). \tag{7}$$

Если $K' \neq 0$, то разделим это уравнение на K'. Получим:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{K'}{A'}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{K'}{C'}} = 1. \tag{8}$$

а) Если обе величины $\frac{K'}{A'}$, $\frac{K'}{C'}$ положительны, то имеем эллипс.

б) Если обе величины $\frac{K'}{A'}$, $\frac{K'}{C'}$ отрицательны, то имеем мнимый эллипс (ср. пример 5 § 58).

в) Если одна из этих величин (все равно какая) положительна, а другая отрицательна, то имеем гиперболу.

Если же $K'=0$, то уравнение (7) имеет вид

$$A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2 = 0. \tag{7'}$$

Возможны два случая:

г) Если A' и C' имеют различные знаки, то $A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2$ разлагается на множители первой степени, как разность квадратов. В обоих множителях коэффициенты действительны, и мы имеем пару пересекающихся прямых (ср. пример 1 § 58).

д) Если A' и C' имеют одинаковые знаки, то $A'\bar{x}^2+C'\bar{y}^2$ тоже разлагается на множители первой степени, но оба множителя содержат члены с мнимыми коэффициентами, и мы имеем пару мнимых пересекающихся прямых, т. е. одну действительную точку (ср. § 58, пример 4).

Пример 1. Уравнение (1а) примера 1 § 61 после поворота осей преобразовалось к виду

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4 = 0. \tag{4a}$$

Это уравнение запишем в виде

$$\left(x'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y'+\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2+4, \tag{5a}$$

т. е.

$$\left(x'+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y'+\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{131}{24}.$$

Переходя к новой системе с началом координат в точке $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}};\ -\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)$ по формулам

$$x' = \bar{x} - \frac{3}{2\sqrt{5}}, \quad y' = \bar{y} - \frac{11}{12\sqrt{5}}, \tag{6a}$$

получаем:

$$\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 = \frac{131}{24} \tag{7a}$$

или

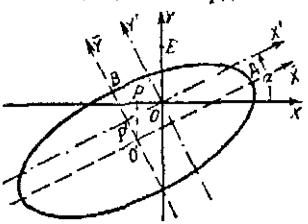
$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}} = 1. \tag{8a}$$

Исследуемое уравнение представляет эллипс с полуосями $a = \sqrt{\frac{131}{24}} \approx 2{,}3$, $b = \sqrt{\frac{131}{144}} \approx 1{,}0$. На черт. 85 (где OE — единица масштаба) $a = O'A$, $b = O'B$.

Центр эллипса находится в точке O' с координатами $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. С помощью формул (6a) найдем координаты центра в промежуточной системе $X'OY'$:

$$x' = -\frac{3}{2\sqrt{5}} \approx -0{,}7,$$

$$y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}} \approx -0{,}4.$$



Черт. 85.

На черт. 85

$$x' = OP', \quad y' = P'O'.$$

По формулам (3a) § 61 найдем координаты центра в первоначальной системе XOY:

$$x_{ц} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right) = -\frac{5}{12} \approx -0{,}4,$$

$$y_{ц} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{3} \approx -0{,}7.$$

На черт. 85 $x_{ц} = OP$, $y_{ц} = PO'$.

Найдем уравнения осей эллипса в первоначальной системе. В системе $\bar{X}O'\bar{Y}$ большая ось представляется уравнением $\overline{y}=0$, в системе $X'OY'$ та же ось в силу второго уравнения (6а) представляется уравнением $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$.

Решив систему (3а) относительно x', y', найдем:

$$x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y,$$
$$y' = \frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}x.$$

Нам нужно только второе из этих уравнений; положив в нем $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$, получим уравнение большой оси в системе XOY; именно

$$\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}x = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$$

или

$$12x-24y-11 = 0.$$

Тем же способом найдем уравнение малой оси

$$4x+2y+3 = 0.$$

Случай 2. Один из коэффициентов A', C' равен нулю. Уравнение (4) имеет вид

$$A'x'^2+2D'x'+2E'y'+F' = 0 \tag{9}$$

или

$$C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F' = 0. \tag{9'}$$

Рассмотрим уравнение вида (9) [для уравнения вида (9′) вычисления те же, только x' и y' меняются ролями].

а) Если $E'\neq 0$, то уравнение (9) можно разрешить относительно y'; получим:

$$y' = -\frac{A'}{2E'}x'^2-\frac{D'}{E'}x'-\frac{F'}{2E'}. \tag{10}$$

Имеем параболу. Координаты вершины определяются формулами (5) § 50 при

$$a = -\frac{A'}{2E'}, \quad b = -\frac{D'}{E'}, \quad c = -\frac{F'}{2E'}.$$

б) Если $E'=0$, то уравнение (9) примет вид

$$A'x'^2+2D'x'+F' = 0. \tag{11}$$

Разложив левую часть (11) на множители первой степени, получим [1]):

$$A'\left(x'-\frac{\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}\right)\left(x'+\frac{\sqrt{D'^2-A'F'}+D'}{A'}\right)=0. \quad (12)$$

Уравнение (12) [а значит, и (11)] при $D'^2-A'F'>0$ представляет пару параллельных прямых, при $D'^2-A'F'<0$ — пару мнимых параллельных прямых, при $D'^2-A'F'=0$ — две слившиеся прямые (§ 58, примеры 2, 6 и 3).

Пример 2. Уравнение (1б) примера 2 § 61 после поворота осей на угол 45° преобразовалось к виду

$$2x'^2+\frac{3}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0. \quad (4б)$$

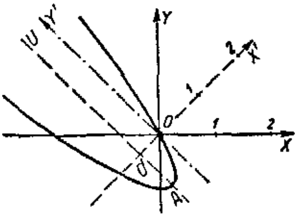
Разрешив относительно y', получим:

$$y'=2\sqrt{2}x'^2+3x'. \quad (10б)$$

Уравнение (10б) [а значит, и (1б)] представляет параболу (черт. 86); координаты x', y' ее вершины A находим по формулам (5) § 50:

$$x'_A=-\frac{3}{4\sqrt{2}}\approx -0{,}5,$$

$$y'_A=-\frac{9}{8\sqrt{2}}\approx -0{,}8.$$



Черт. 86.

Координаты вершины можно найти и без помощи формул (5) § 50 (см. § 50, замечание 1).

По формулам (3б) § 61 находим координаты вершины в первоначальной системе:

$$x_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}+\frac{9}{8\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{16}\approx 0{,}2,$$

$$y_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}-\frac{9}{8\sqrt{2}}\right)=-\frac{15}{16}\approx -0{,}9.$$ ●

---

[1]) Величины $\dfrac{\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}$ и $\dfrac{-\sqrt{D'^2-A'F'}-D'}{A'}$ суть корни уравнения (11).

Найдем уравнение оси AU параболы. В новой системе эта ось представляется уравнением

$$x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Разрешив уравнения (3б) относительно x', y', найдем:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).$$

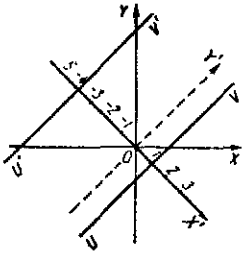
Подставив в первое из этих уравнений (второе нам не нужно) $x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$, получим:

$$-\frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

или

$$4x+4y+3 = 0.$$

Это — уравнение оси параболы в первоначальной системе.



Черт. 87.

Пример 3. Уравнение (1в) примера 3 § 61 после поворота осей на угол $-45°$ преобразовалось к виду

$$4x'^2+8\sqrt{2}x'-17 = 0. \quad (4в')$$

Разложив левую часть уравнения (4в') на множители, получим:

$$4\left(x'-\frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x'+\frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad (12в)$$

т. е. имеем пару параллельных прямых (UV и $U'V'$ на черт. 87):

$$x' = \frac{5-2\sqrt{2}}{2}, \quad x' = -\frac{5+2\sqrt{2}}{2}. \quad (13)$$

Найдем уравнения этих прямых в системе XOY. Так как система XOY получается из $X'OY'$ поворотом на $+45°$, то

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \quad (14)$$

Подставляя в первое из этих уравнений сначала одно, а потом другое значение (13), находим:

$$\frac{5-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),$$

$$-\frac{5+2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$$

или

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5+2\sqrt{2}=0,$$

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+5+2\sqrt{2}=0.$$

Это — уравнения прямых UV, $U'V'$ в первоначальной системе.

§ 63. О приемах, облегчающих упрощение уравнения второй степени

Способ упрощения уравнения второй степени, изложенный в §§ 61—62, имеет перед другими способами два преимущества: 1) он дает полную классификацию линий второго порядка (теорема § 58); 2) он единообразен и прост по идее. Однако этот способ требует довольно утомительных выкладок.

Во многих случаях выкладки можно облегчить.

1. Для линий второго порядка, распадающихся на пару прямых (§ 58, примеры 2, 3, 4, 6), можно легко найти уравнения обеих прямых, не прибегая к преобразованию координат. Этот способ излагается в § 65; предварительно (§ 64) дается признак распадения.

2. Нераспадающаяся линия второго порядка может быть или эллипсом, или гиперболой, или параболой. Эллипс и гипербола имеют центр, а парабола не имеет. Поэтому упрощение уравнений эллипса и гиперболы удобно начать с переноса начала в центр. Можно заранее узнать, к какому из этих трех типов принадлежит линия второго порядка. Соответствующий признак дан в § 67, в § 68 уточняется понятие центра и в § 69 объяснено, как найти координаты центра. В § 70 объяснен способ упрощения уравнений эллипса и гиперболы.

3. Что касается параболы, то для нее способ упрощения, изложенный в § 61, остается наилучшим. Впрочем, размеры параболы (т. е. величину параметра p) можно легко найти при помощи так называемых инвариантов. О них сказано в § 66.

§ 64. Признак распадения линий второго порядка

Если линия второго порядка

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

распадается на две (различные или совпадающие) прямые (они могут быть и мнимыми), то определитель третьего порядка (§ 118)

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad (2)$$

(«большой дискриминант» [1]) обращается в нуль. Обратно, если $\Delta=0$, то линия (1) распадается на две прямые.

Доказательство см. в § 65 (замечание 2).

Пример 1. В § 61 (пример 3) была рассмотрена линия второго порядка

$$2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0$$

$$(A=2,\ B=-2,\ C=2,\ D=4,\ E=-4,\ F=-17).$$

В § 62 (пример 3) было установлено, что эта линия распадается на две параллельные прямые:

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5+2\sqrt{2}=0 \qquad (3)$$

и

$$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+5+2\sqrt{2}=0. \qquad (4)$$

В соответствии с этим большой дискриминант Δ равен нулю. Действительно,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -17 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -17 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-50)+2\cdot 50+0=0.$$

Пример 2. Линия второго порядка

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$$

не распадается, так как большой дискриминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix}=-\frac{131}{4}$$

[1] Дискриминант — латинский термин, дословно «различитель». Дискриминант Δ называется *большим* в отличие от *малого*, о котором см. § 66.

не равен нулю. В §§ 61, 62 (пример 1) было показано, что эта линия — эллипс.

Правило для запоминания выражения (2). В первой строке выписываются подряд те буквы, за которыми следует x в уравнении (1), во второй — те, за которыми (непосредственно или после x) следует y, в третьей — три последние буквы.

§ 65. Разыскание прямых, составляющих распадающуюся линию второго порядка

Чтобы найти уравнения двух прямых, вместе составляющих распадающуюся линию второго порядка

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

(условие распадения см. § 64), достаточно разложить левую часть (1) на множители первой степени. Когда хотя бы один из коэффициентов A, C не равен нулю, лучше всего прямо решить уравнение (1) относительно той из букв x, y, которая входит туда во второй степени. Два решения (они могут и совпадать) представят две искомые прямые.

Пример 1. Линия второго порядка

$$2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0 \tag{2}$$

является распадающейся, так как большой дискриминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}$$

равен нулю. Уравнение (2) можно решать относительно любой из букв x, y (обе входят во второй степени). Представив (2) в виде

$$y^2-2(x+2)y+\left(x^2+4x-\frac{17}{2}\right)=0,$$

решаем его относительно y; получаем:

$$y=x+2\pm\sqrt{(x+2)^2-\left(x^2+4x-\frac{17}{2}\right)},$$

т. е.

$$y=x+2\pm\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Одна из прямых представляется уравнением $y = x+2+\frac{5}{\sqrt{2}}$, другая — уравнением $y = x+2-\frac{5}{\sqrt{2}}$. Эти прямые параллельны (ср. пример 3 §§ 61—62).

Пример 2. Линия второго порядка

$$2x^2+7xy-15y^2-10x+54y-48 = 0 \qquad (3)$$

распадается, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & -5 \\ \frac{7}{2} & -15 & 27 \\ -5 & 27 & -48 \end{vmatrix} = 0.$$

Представив (3) в виде

$$15y^2-(7x+54)\,y-(2x^2-10x-48) = 0,$$

находим:

$$y = \frac{7x+54 \pm \sqrt{(7x+54)^2+4\cdot 15\,(2x^2-10x-48)}}{30}.$$

Подкоренное выражение равно $169x^2+156x+36 = (13x+6)^2$. Следовательно, $y = \frac{7x+54 \pm (13x+6)}{30}$. Одна из прямых представляется уравнением $y = \frac{2x+6}{3}$, другая — уравнением $y = \frac{-x+8}{5}$. Эти прямые пересекаются в точке $\left(-\frac{6}{13}, \frac{22}{13}\right)$.

Пример 3. Линия

$$10xy-14x+15y-21 = 0 \qquad (4)$$

распадается, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & \frac{15}{2} \\ -7 & \frac{15}{2} & -21 \end{vmatrix} = 0.$$

В уравнение (4) как x, так и y входят только в первой степени. Поэтому разлагаем левую часть (4) на множители, группируя члены. Получаем:

$$10xy-14x+15y-21 = 2x\,(5y-7)+3\,(5y-7) = (2x+3)(5y-7).$$

Линия (4) распадается на прямые: $2x+3 = 0$ и $5y-7 = 0$.

Замечание 1. В случае $A = C = 0$ можно тоже решать данное уравнение относительно x или y; так, в примере 3 получим $(10x+15)\,y = 14x+21$, но дальше делить обе части на $10x+15$ можно лишь в том случае, когда $10x+15$ не равно нулю. Тогда получаем $y = \frac{14x+21}{10x+15} = \frac{7(2x+3)}{5(2x+3)} = \frac{7}{5}$, и уравнение одной из прямых есть $y = \frac{7}{5}$, т. е. $5y-7=0$. В случае, когда $10x+15=0$, т. е. $x = -\frac{3}{2}$, уравнение $(10x+15)\,y = 14x+21$ удовлетворяется при любом значении y; таким образом, получаем другую прямую $x = -\frac{3}{2}$, т. е. $2x+3=0$.

Замечание 2. Вычисления, проделанные в примерах 1 и 2, можно выполнить для любого уравнения вида (1), если только $C \neq 0$. Проделав эти выкладки в общем виде, получим под радикалом квадратный трехчлен

$$(B^2-AC)\,x^2+2\,(BE-CD)\,x+E^2-CF. \tag{5}$$

Он будет полным квадратом в том и только в том случае, если

$$(BE-CD)^2-(B^2-AC)\,(E^2-CF)=0. \tag{6}$$

После простых преобразований увидим, что левая часть равенства (6) равна $C\Delta$, где Δ — большой дискриминант. Так как, по предположению, $C \neq 0$, то признак распадения есть $\Delta = 0$. В случае, когда $C = 0$, но $A \neq 0$, мы приходим к тому же выводу, поменяв ролями x и y. Так доказывается признак § 64 для общего случая. В исключительном же случае, когда $A = C = 0$ (и, стало быть, $B \neq 0$), левая часть уравнения (1) принимает вид

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F.$$

Представим этот многочлен в виде $2x\,(By+D)+(2Ey+F)$. Это выражение разлагается на множители первой степени только в том случае, когда у двучленов $By+D$ и $2Ey+F$ соответственные коэффициенты равны или пропорциональны (см. пример 3), т. е. когда $2DE-BF=0$. Но в рассматриваемом случае большой дискриминант Δ имеет вид $\begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$, а отсюда следует, что $2DE-BF = \frac{\Delta}{B}$. Так доказывается признак § 64 в исключительном случае.

§ 66. Инварианты уравнения второй степени

При переходе от одной системы прямоугольных координат к другой мы заменяем уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

линии второго порядка другим уравнением

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+F'=0, \tag{2}$$

которое получается из (1) с помощью формул преобразования координат (см. примеры §§ 61 и 62). При этом значения A', B', C', D', E', F' (все или некоторые) отличаются от значений одноименных величин A, B, C, D, E, F.

Однако три нижеприведенных выражения, составленных из величин A', B', C', D', E', F', всегда остаются *равными одноименным выражениям, составленным из величин* A, B, C, D, E, F. Эти три выражения называются *инвариантами*[1]) уравнения второй степени.

а) Первый инвариант $A+C$.

б) Второй инвариант $\delta=\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}$ (малый дискриминант).

в) Третий инвариант

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix} \text{ (большой дискриминант).}$$

Пример 1. Уравнение

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0$$

$\left(A=2,\ B=-2,\ C=5,\ D=-\frac{1}{2},\ E=\frac{5}{2},\ F=-4\right)$ мы преобразовали в § 61 (пример 1) к виду

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4=0$$

$$\left(A'=1,\ B'=0,\ C'=6,\ D'=\frac{3}{2\sqrt{5}},\ E'=\frac{11}{2\sqrt{5}},\ F'=-4\right)$$

соответственно повороту осей на угол $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 26°34'$.

а) Выражение $A+C$ в старой системе равнялось $2+5=7$, в новой системе одноименное выражение $A'+C'$ равняется $1+6=7$, так что

$$A+C=A'+C'.$$

1) Инвариант — латинский термин, в переводе — «неизменный».

б) Малый дискриминант в старой системе был равен

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-2)\cdot(-2) = 6,$$

в новой системе имеем:

$$\delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

так что

$$\delta = \delta'.$$

в) Большой дискриминант в старой системе был равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

в новой системе

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 & 6 & \frac{11}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{11}{2\sqrt{5}} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

так что

$$\Delta = \Delta'.$$

Пример 2. Уравнение

$$x'^2+6y'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}x'+\frac{11}{\sqrt{5}}y'-4 = 0$$

мы затем преобразовали в § 62 (см. пример 1) к виду $\bar{x}^2+6\bar{y}^2-\frac{131}{24} = 0$ соответственно переносу начала в точку $x' = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$. Большой дискриминант теперь будет:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{24} \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

т. е.

$$\bar{\Delta} = \Delta' = \Delta.$$

Два других инварианта, очевидно, тоже сохранили прежние значения.

Для доказательства неизменности каждой из величин а), б), в) достаточно составить выражения величин A', B', C', ... через A, B, C, ... (эти выражения будут содержать также угол поворота α и координаты нового начала). Подставив их, например, в выражение $A' + C'$, мы после упрощений найдем $A+C$ и т. д. Однако эти выкладки очень громоздки[1]).

Замечание. Если обе части уравнения (1) помножить (или разделить) на какое-нибудь число k, то новое уравнение представляет ту же линию второго порядка. Однако теперь величины а), б), в) изменяются: первая помножится на k, вторая на k^2, третья на k^3. Вот почему величины а), б), в) называются инвариантами *уравнения* второй степени, а не инвариантами *линии* второго порядка.

§ 67. Три типа линий второго порядка

Малый дискриминант δ (§ 66) для эллипса положителен (см. пример 1 § 66), для гиперболы отрицателен, для параболы равен нулю.

Доказательство. Эллипс представляется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. У этого уравнения малый дискриминант $\delta = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2} > 0$. При преобразовании координат δ сохраняет свою величину, а при умножении обеих частей уравнения на какое-либо число k дискриминант умножается на k^2 (§ 66, замечание). Следовательно, дискриминант эллипса *положителен в любой системе координат*. В случае гиперболы и в случае параболы доказательство аналогично.

Сообразно с этим различают три типа линий второго порядка (и уравнений второй степени):

а) *Эллиптический тип*, характеризующийся условием

$$\delta = AC - B^2 > 0.$$

К нему относятся, кроме действительного эллипса, также мнимый эллипс (§ 58, пример 5) и пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (§ 58, пример 4).

---

[1]) Существуют искусственные приемы, облегчающие доказательство.

б) *Гиперболический тип*, характеризующийся условием

$$\delta = AC - B^2 < 0.$$

К нему относится, кроме гиперболы, пара действительных пересекающихся прямых (§ 58, пример 1).

в) *Параболический тип*, характеризующийся условием

$$\delta = AC - B^2 = 0.$$

К нему относится, кроме параболы, пара параллельных (действительных или мнимых) прямых (они могут совпадать).

Пример 1. Уравнение

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0 \tag{1}$$

принадлежит к параболическому типу, ибо

$$\delta = AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0.$$

Так как большой дискриминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

не равен нулю, то уравнение (1) представляет нераспадающуюся линию, т. е. параболу (ср. §§ 61 – 62, пример 2).

Пример 2. Уравнение

$$8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0 \tag{2}$$

принадлежит к гиперболическому типу, ибо

$$\delta = AC - B^2 = 8 \cdot 1 - 12^2 = -136 < 0;$$

так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix} = 0,$$

то уравнение (2) представляет пару пересекающихся прямых. Их уравнения можно найти по способу § 65.

Пример 3. Уравнение

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$$

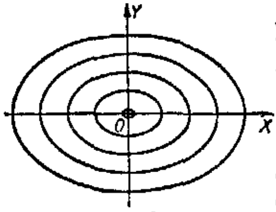
принадлежит к эллиптическому типу, ибо

$$\delta = AC - B^2 = 5\cdot 2 - 2^2 = 6 > 0.$$

Так как

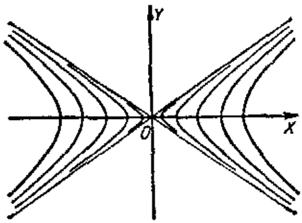
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то линия не распадается и, значит, является эллипсом.

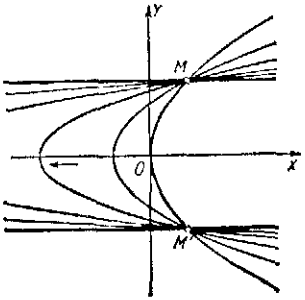


Черт. 88.

Замечание. Однотипные линии геометрически связаны так: пара пересекающихся мнимых прямых (т. е. одна действительная точка) есть предельный случай эллипса, «стягивающегося в точку» (черт. 88); пара пересекающихся действительных прямых — предельный случай гиперболы, приближающейся к своим асимптотам (черт. 89); пара параллельных прямых — предельный случай параболы, у которой ось и одна пара точек M, M', симметричных относительно оси



Черт. 89.



Черт. 90.

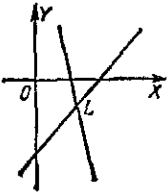
(черт. 90), неподвижны, а вершина удаляется в бесконечность.

§ 68. Центральные и нецентральные линии второго порядка

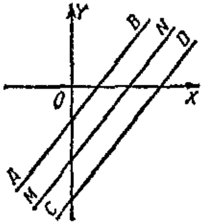
Определение. Точки A и B (черт. 91) называются *симметричными* относительно точки C, если C делит пополам отрезок AB. Точка C называется *центром симметрии* (короче, *центром*) фигуры, если у фигуры наряду с каждой ее точкой M имеется также точка N, симметричная с M относительно C.

Черт. 91.

Точка, названная нами (§ 40) центром эллипса, а также точка, названная (§ 44) центром гиперболы, очевидно, подходят под определение настоящего параграфа. Центром линии второго порядка, распадающейся на две пересекающиеся



Черт. 92.



Черт. 93.

прямые (§ 58), является, согласно определению настоящего параграфа, точка пересечения этих прямых (L на черт. 92).

Каждая из рассмотренных выше линий второго порядка обладает единственным центром. Если же линия второго порядка состоит из двух параллельных прямых (AB и CD на черт. 93), то под определение центра подходит любая точка прямой MN, равноотстоящей от AB и CD.

Парабола вовсе не имеет центра.

Линии второго порядка, имеющие единственный центр (эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых), называются *центральными*; линии второго порядка, имеющие множество центров или вовсе их не имеющие (парабола, пара параллельных прямых), называются *нецентральными*.

Замечание. Мнимые эллипсы и пары мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (см. § 58), причисляются к центральным линиям. По отношению к мнимому эллипсу это причисление условно, фигура же, состоящая из одной действительной точки, подходит под определение центральной «линии» (эта точка сама является центром). Пары мнимых параллельных прямых (§ 58) причисляются к нецентральным линиям.

Таким образом, линии второго порядка, принадлежащие к эллиптическому и гиперболическому типам (для них $AC-B^2 \neq 0$; см. § 67), — центральные; линии параболического типа ($AC-B^2=0$) — нецентральные.

§ 69. Разыскание центра центральной линии второго порядка

Чтобы найти координаты x_0, y_0 центра центральной линии

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{1}$$

надо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта система совместна и имеет единственное решение (§ 187)

$$x_0=-\frac{\begin{vmatrix} D & B\\ E & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}},\quad y_0=-\frac{\begin{vmatrix} A & D\\ B & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}, \tag{3}$$

так как $\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix} \neq 0$ (это — условие центральности; § 68).

Пример 1. Центр линии (пример 2 § 67)

$$8x^2+24xy+y^2-56x+18y-55=0 \tag{4}$$

найдем, решив систему

$$\begin{aligned} 8x_0+12y_0-28&=0,\\ 12x_0+y_0+9&=0.\end{aligned}$$

Получим:

$$x_0=-\frac{\begin{vmatrix} -28 & 12\\ 9 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12\\ 12 & 1\end{vmatrix}}=-1,\quad y_0=-\frac{\begin{vmatrix} 8 & -28\\ 12 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12\\ 12 & 1\end{vmatrix}}=3.$$

Так как (4) есть распадающаяся линия гиперболического типа, то точка $(-1; 3)$ есть точка пересечения прямых, составляющих линию (4).

Пример 2. Центр линии (пример 1 § 61)

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0 \tag{5}$$

найдем, решив систему

$$2x_0-2y_0-\frac{1}{2}=0,$$

$$-2x_0+5y_0+\frac{5}{2}=0.$$

Получим:

$$x_0=-\frac{5}{12},\quad y_0=-\frac{2}{3}.$$

Линия (5) есть эллипс (так как $\delta>0$ и $\Delta\neq 0$).

Вывод уравнений (2). Если перенести начало в искомый центр $C(x_0; y_0)$, то уравнение (1) с помощью формул переноса

$$x=x_0+x',\quad y=y_0+y' \tag{6}$$

преобразуется к виду

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Ax_0+By_0+D)x'+\\+2(Bx_0+Cy_0+E)y'+F'=0, \tag{7}$$

где для краткости положено

$$F'=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F.$$

Если x_0, y_0 будут удовлетворять уравнениям (2), то (7) примет вид

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F'=0. \tag{8}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$A(-x')^2+2B(-x')(-y')+C(-y')^2+F'=0.$$

Поэтому наряду с каждой точкой $M(x'; y')$, принадлежащей линии (8), эта линия содержит и точку $N(-x'; -y')$, симметричную с M относительно нового начала C. Следовательно (§ 68), C есть центр линии (8).

§ 70. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка

Преобразование уравнения центральной линии к простейшему виду можно выполнить быстрее, чем по общему способу § 60, если сначала совершить перенос начала в центр (вследствие чего исчезнут члены первой степени;

см. § 69), а затем поворот осей (вследствие чего исчезнет член, содержащий xy). Угол α этого поворота заранее известен (§ 61); он определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \tag{1}$$

Замечание. Этот способ применим ко всякой центральной линии второго порядка, но для распадающейся линии лучше применить способ § 65.

Пример. Дано уравнение (пример 1 §§ 61–62)

$$2x^2-4xy+5y^2-x+5y-4=0. \tag{2}$$

Переносим начало в центр $x_0=-\frac{5}{12}$, $y_0=-\frac{2}{3}$ (§ 69, пример 2).

С помощью формул переноса

$$x=x_0+x', \quad y=y_0+y' \tag{3}$$

получаем [ср. (8) § 69]:

$$2x'^2-4x'y'+5y'^2-\frac{131}{24}=0. \tag{4}$$

Из (1) находим $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{4}{3}$, и если взять угол α в первой четверти (ср. § 61), получаем формулы поворота

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}, \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставляя в (4), находим:

$$\bar{x}^2+6\bar{y}^2=\frac{131}{24} \tag{6}$$

или

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}}=1. \tag{7}$$

Данная линия есть эллипс с полуосями $a=\sqrt{\frac{131}{24}}\approx 2{,}3$ и $b=\sqrt{\frac{131}{144}}\approx 1{,}0$. В первоначальной системе его центр имеет координаты $x_0 = -\frac{5}{12}$, $y_0 = -\frac{2}{3}$, большая ось (она является осью абсцисс в системе $\bar{x}$, $\bar{y}$) представляется уравнением $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_0)$ или $y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{12}\right)$, т. е. $12x - 24y - 11 = 0$ (ср. § 62, пример 1).

Замечание. Размеры эллипса можно найти и не выполняя преобразования координат. Мы знаем заранее, что в результате преобразования должно получиться уравнение вида $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{F} = 0$. Величины $\bar{A}$, $\bar{C}$ и $\bar{F}$ можно найти с помощью инвариантов (§ 66). В первоначальном уравнении они равны

$$A + C = 2 + 5 = 7, \quad \delta = AC - B^2 = 2\cdot 5 - (-2)^2 = 6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = -\frac{131}{4}.$$

Те же значения они должны иметь в упрощенном уравнении. Следовательно,

$$\bar{A} + \bar{C} = 7, \quad \bar{A}\bar{C} = 6,$$

$$\begin{vmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F} \end{vmatrix} = \bar{A}\bar{C}\bar{F} = -\frac{131}{4},$$

откуда

$$\bar{A} = 1, \quad \bar{C} = 6, \quad \bar{F} = -\frac{131}{24}$$

и мы снова получаем уравнение (6).

§ 71. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{k}{x}$

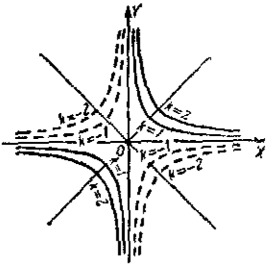
Уравнение

$$y = \frac{k}{x} \tag{1}$$

($k \neq 0$) представляет равностороннюю гиперболу (§ 44); ее асимптоты совпадают с осями координат. Полуоси ее

$$a = b = \sqrt{2|k|}. \tag{2}$$

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены одна в первой, другая в третьей четверти; если же $k < 0$, — то во второй и четвертой (черт. 94). В первом случае действительная ось гиперболы составляет с осью абсцисс угол 45°, во втором — угол $-45°$.



Черт. 94.

Все это выводится по способу § 61, если уравнение (1) записать в виде

$$xy = k. \tag{3}$$

Замечание. В случае, когда $k=0$, уравнение (3) представляет пару прямых $y=0$ (ось абсцисс) и $x=0$ (ось ординат). Когда $|k|$ неограниченно уменьшается, гиперболы (3) все теснее примыкают к этим прямым (так что пару перпендикулярных прямых можно рассматривать как вырожденную равностороннюю гиперболу).

Уравнение (1) при $k=0$ представляет только одну прямую $y=0$ (ось абсцисс) и притом не всю целиком, а без начала координат, ибо при $k=0$ и $x=0$ выражение $y=\frac{k}{x}$ становится неопределенным. Если же этой неопределенной величине давать всевозможные значения, то мы и получим «пропавшую» ось ординат.

§ 72. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{mx+n}{px+q}$

Рассмотрим уравнение

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \tag{1}$$

при $p \neq 0$ $\left(\text{при } p = 0 \text{ имеем прямую } y = \frac{m}{q}x+\frac{n}{q}\right)$.

Если определитель

$$D = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np$$

не равен нулю, то уравнение (1) представляет ту же равностороннюю гиперболу, что и уравнение (1) § 71:

$$y = \frac{k}{x},$$

где $k = -\frac{D}{p^2}$, с той лишь разницей, что центр смещается из начала координат в точку $C\left(-\frac{q}{p};\ \frac{m}{p}\right)$ (черт. 95, 96). Значит (§ 71), полуоси равны $a = b = \sqrt{\frac{2|D|}{p^2}}$.

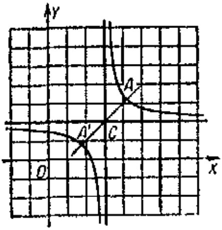
В случае, когда $D < 0$ (тогда $k > 0$), действительная ось составляет с осью абсцисс угол $+45°$ (черт. 95), если же $D > 0$, — то угол $-45°$ (черт. 96).

Пример 1. Уравнение

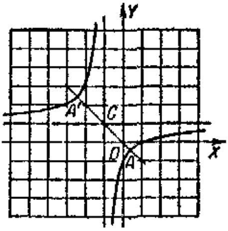
$$y = \frac{4x-9}{2x-6}$$

$$\left(\text{здесь } m=4,\ n=-9,\ p=2,\ q=-6,\ D=\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6\right)$$

представляет равностороннюю гиперболу (черт. 95) с



Черт. 95.



Черт. 96.

центром $C(3;2)$ и с полуосями $a=b=\sqrt{\frac{2\cdot 6}{2^2}}=\sqrt{3}\approx 1{,}73$. Ось $A'A$ образует с OX угол 45°, так как $D < 0$. Координаты вершины A будут:

$$x_A = x_0 + a\cos 45° = 3 + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4{,}2,$$

$$y_A = y_0 + a\sin 45° = 2 + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}2.$$

Так же найдем:

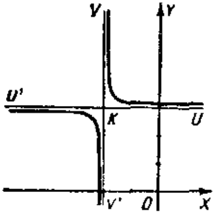
$$x_{A'} = 3 - \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}8, \quad y_{A'} = 2 - \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}8.$$

Пример 2. Уравнение

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

(здесь $m=1$, $n=-1$, $p=1$, $q=1$, $D=2$) представляет равностороннюю гиперболу (черт. 96) с центром $C(-1; 1)$ и с полуосями $a=b=\sqrt{\frac{2\cdot 2}{1^2}}=2$. Ось $A'A$ составляет с OX угол $-45°$, так как $D>0$.

Замечание 1. Если определитель $D=\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$ равен нулю, то величины m, n и p, q пропорциональны $\left(\frac{m}{p}=\frac{n}{q}\right)$, так что $mx+n$ делится на $px+q$; частное равно $\frac{m}{p}$. Уравнение (1) представляет в этом случае прямую $y=\frac{m}{p}$, лишенную точки $x=-\frac{q}{p}$ $\left(\text{при } x=-\frac{q}{p}\right.$ выражение (1) неопределенно; см. § 71, замечание).



Черт. 97.

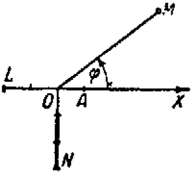
Например, уравнение $y=\frac{3x+6}{x+2}$ $\left(m=3,\ n=6,\ p=1,\ q=2,\ D=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0\right)$ представляет прямую $y=3$, лишенную точки $x=-2$. Если неопределенной величине y давать всевозможные значения, то, кроме прямой $y=3$, получим еще прямую $x=-2$.

Замечание 2. «Выпадение» точки $x=-2$ из прямой $y=3$ можно наглядно представить себе следующим образом. Рассмотрим уравнение $y=\frac{3x+6\beta}{x+2}$; здесь $D=\begin{vmatrix} 3 & 6\beta \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=6(1-\beta)$, так что при $\beta\neq 1$ мы имеем гиперболу с асимптотами $x=-2$ и $y=3$. Но когда величина β близка к 1, эта гипербола (черт. 97, где $\beta=1{,}1$) очень тесно примыкает к своим асимптотам $U'U$ и $V'V$, пересекающимся в точке $K(-2; 3)$. Можно было бы ожидать, что при $\beta=1$ мы получим пару прямых $U'U$ $(y=3)$ и $V'V$ $(x=-2)$. Однако прямая $V'V$ выпадает, так как она параллельна оси OY и, значит (§ 14, замечание 2), ее нельзя представить уравнением, разрешенным относительно ординаты. Вместе с прямой $V'V$ выпадает и лежащая на ней точка K.

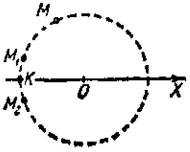
§ 73. Полярные координаты

Возьмем на плоскости (черт. 98) произвольную точку O (*полюс*) и проведем луч OX (*полярная ось*). Примем какой-либо отрезок OA за единицу длины и какой-либо угол (обычно берется радиан) за единицу измерения углов. Тогда положение любой точки M на плоскости можно задать двумя числами: 1) положительным числом ρ, выражающим длину отрезка OM (*полярный радиус*), 2) числом φ, выражающим величину угла XOM (*полярный угол*). Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M.

Пример 1. Полярные координаты $\rho=3$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ определяют точку N (черт. 98), полярные координаты $\rho=3$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ — ту же точку N, полярные координаты $\rho=1$, $\varphi=0$ (а также $\rho=1$, $\varphi=2\pi$ или $\rho=1$, $\varphi=-2\pi$ и т. д.) — точку A.



Черт. 98.



Черт. 99.

Каждой паре значений ρ, φ отвечает только одна точка, но одной и той же точке M отвечает бесчисленное множество значений полярного угла, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π (ср. пример 1). Если же точка M совпадает с полюсом, то значение полярного угла остается совершенно произвольным.

Можно условиться выделять только одно из значений полярного угла, например брать φ в пределах

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi. \qquad (1)$$

Такое значение полярного угла называется *главным*.

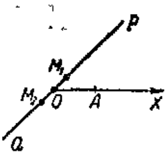
Пример 2. Точке N (черт. 98) соответствуют полярные координаты $\rho=3$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; главное значение полярного угла есть $-\frac{\pi}{2}$.

Точке L отвечают полярные координаты $\rho=2$, $\varphi=\pi+2k\pi$; главное значение φ согласно условию (1) есть π (а не $-\pi$).

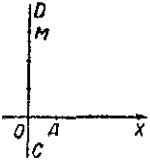
При введении главных значений каждой точке (кроме полюса) отвечает одна пара полярных координат. Для полюса же $\rho=0$, а φ остается произвольным.

Замечание 1. Когда точка M, описывая окружность с центром в полюсе O (черт. 99), пересекает в точке K продолжение полярной оси, главное значение полярного угла изменяется скачком (в точке M_1 оно близко к π, в точке M_2 — к $-\pi$). Поэтому во многих случаях нецелесообразно ограничиваться только главными значениями φ.

Замечание 2. Когда точка M, описывая прямую PQ (черт. 100), проходит через полюс O, значение φ изменяется скачком. Например, если $\angle XOP=\frac{\pi}{4}$, то для точки M_1 (на луче OP) $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, а для точки M_2 (на луче OQ) $\varphi=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$ (k и n — целые числа). Во избежание этого можно приписать *всем точкам* прямой PQ одно и то же



Черт. 100.



Черт. 101.

значение φ, например $\varphi=\angle XOP$, а полярные радиусы считать положительными на луче OP и отрицательными на луче OQ. Например, полярные координаты

$$\varphi=\frac{\pi}{4}, \quad \varrho=\frac{1}{2}$$

определят точку M_1, а полярные координаты

$$\varphi=\frac{\pi}{4}, \quad \varrho=-\frac{1}{2}$$

— точку M_2.

Те же точки можно задать координатами

$$\varphi=-\frac{3}{4}\pi, \quad \varrho=\frac{1}{2}$$

(точка M_2) и

$$\varphi=-\frac{3}{4}\pi, \quad \varrho=-\frac{1}{2}$$

(точка M_1). При этом мы приписываем всем точкам прямой PQ значение $\varphi=\angle XOQ$, так что ϱ положительно на луче OQ и отрицательно на OP.

Пример 3. Построить точку M с полярными координатами

$$\varrho=-3, \quad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

Полярному углу $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ отвечает луч OC (черт. 101). На его продолжении OD откладываем $OM=3\,OA$. Получаем искомую точку M. Той же точке соответствуют полярные координаты $\varrho=3$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

§ 74. Связь между полярными координатами и прямоугольными

Пусть полюс O (черт. 102) полярной системы совпадает с началом прямоугольной системы и полярная ось OX совпадает с положительно направленной осью абсцисс.

Пусть M — произвольная точка плоскости, x и y — ее прямоугольные координаты, а ρ, φ — полярные. Тогда

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Обратно [1]),

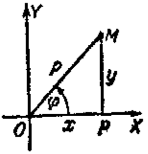
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Но одной формулы (4) [а также только одной из формул (3)] недостаточно для определения угла φ (см. пример 1).



Черт. 102.

Пример 1. Прямоугольные координаты точки равны $x=2$, $y=-2$. Найти ее полярные координаты (при указанном выше взаимном расположении обеих систем).

Решение. По формуле (2)

$$\rho = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

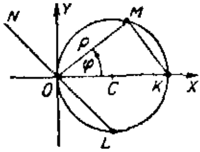
по формуле (4) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{2} = -1$. Значит, либо $\varphi = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$, либо $\varphi = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$. Так как точка лежит в четвертой четверти, то лишь первое значение правильно. Главное значение φ есть $-\frac{\pi}{4}$.

Если воспользоваться формулой $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то получим $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, либо $\varphi = \frac{\pi}{4}+2k\pi$, либо $\varphi = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Только второе значение правильно.

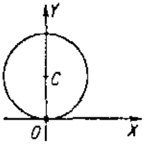
---

[1]) В формулах (2) и (3) предполагается, что полярный радиус ρ всегда положителен. Если рассматривать и отрицательные значения ρ (§ 73, замечание 2), то вместо (2) и (3) нужно написать $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ (знаки либо все верхние, либо все нижние). Формулы (1) и (4) остаются неизменными.

Пример 2. В прямоугольной системе XOY окружность, изображенная на черт. 103, представляется уравнением (§ 38) $(x-R)^2+y^2=R^2$. Формулы (1) и (2) позволяют найти ее уравнение в полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось). Получаем $\rho^2-2R\rho\cos\varphi=0$. Это уравнение распадается на два: 1) $\rho=0$, 2) $\rho-2R\cos\varphi=0$. Первое представляет (при любом значении φ) полюс O. Второе дает все точки окружности, в том числе полюс $\left(\text{при } \varphi=\frac{\pi}{2}\right.$ и $\left.\varphi=-\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому первое уравнение можно отбросить; получаем:



Черт. 103.



Черт. 104.

$$\rho=2R\cos\varphi. \qquad (5)$$

Это уравнение получается непосредственно из треугольника OMK с прямым углом при вершине M ($OK=2R$, $OM=\rho$, $\angle KOM=\varphi$).

Замечание. Если не вводить отрицательных значений ρ, то в уравнении (5) угол φ можно брать в четвертой и первой четвертях, а во второй и третьей — нельзя. Так, при $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ уравнение (5) дает $\rho=-R\sqrt{2}$. Действительно, луч ON (черт. 103), кроме полюса, не имеет точек, общих с окружностью. Если же ввести отрицательные значения ρ (§ 73, замечание 2), то координаты $\rho=-R\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ дают точку L на продолжении прямой ON.

Пример 3. Определить, какую линию представляет уравнение

$$\rho=2a\sin\varphi. \qquad (6)$$

Решение. Переходя к прямоугольной системе, находим:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2a\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

т. е.

$$x^2+y^2-2ay=0$$

или

$$x^2+(y-a)^2=a^2.$$

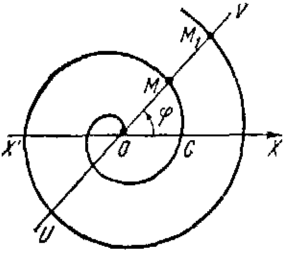
Уравнение (6) представляет окружность радиуса a (черт. 104), проходящую через полюс O и касающуюся полярной оси OX.

§ 75. Архимедова спираль[1])

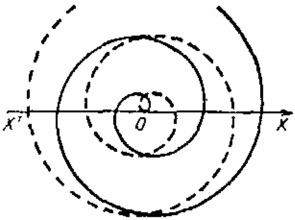
1. Определение. Пусть прямая UV (черт. 105), исходя из начального положения $X'X$, равномерно вращается около неподвижной точки O, а точка M, исходя из начального положения O, равномерно движется вдоль UV. Линия, описываемая точкой M, называется *архимедовой спиралью* — в честь великого древнегреческого ученого Архимеда (3 в. до н. э.), впервые изучившего эту линию.

Замечание. Входящие в определение кинематические понятия можно устранить, заменив их условием, чтобы расстояние $\rho = OM$ было пропорционально углу поворота φ прямой UV.

Повороту прямой UV из любого ее положения на данный угол соответствует одно и то же приращение



Черт. 105.



Черт. 106.

расстояния ρ. В частности, полному обороту соответствует одно и то же смещение $MM_1 = a$. Отрезок a называется *шагом* архимедовой спирали.

Данному шагу a соответствуют две архимедовы спирали, различающиеся друг от друга направлением вращения прямой UV. При вращении против часовой стрелки получается *правая* спираль (черт. 106, жирная линия); при вращении по часовой стрелке — *левая* (черт. 106, пунктирная линия).

Правую и левую спирали с одним и тем же шагом можно совместить, но для этого надо у одной из них лицевую сторону сделать оборотной.

Как видно из черт. 106, правую и левую спирали одного и того же шага можно рассматривать как две ветви линии,

[1]) Более подробные сведения об архимедовой спирали см. на стр. 777.

описываемой точкой M, когда последняя пробегает всю прямую UV, проходя точку O попутно.

2. Полярное уравнение (O — полюс; направление полярной оси OX совпадает с направлением движения точки M, когда она проходит через точку O; a — шаг спирали):

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}. \tag{1}$$

Положительным значениям φ соответствует правая ветвь; отрицательным значениям — левая.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\rho = k\varphi,$$

где k (*параметр* архимедовой спирали) есть смещение $\frac{a}{2\pi}$ точки M по прямой UV при повороте последней на угол в один радиан.

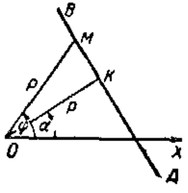
§ 76. Полярное уравнение прямой

Прямая AB (черт. 107), не проходящая через полюс, представляется в полярных координатах уравнением

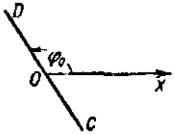
$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}, \tag{1}$$

где $p = OK$ и $\alpha = \angle XOK$ — полярные параметры прямой AB (§ 29).

Уравнение (1) получается из треугольника OKM (где $OM = \rho$ и $\angle KOM = \varphi - \alpha$).



Черт. 107.



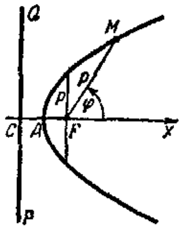
Черт. 108.

Прямую CD (черт. 108), проходящую через полюс, нельзя представить уравнением вида (1) [для такой прямой $p = 0$ и $\varphi - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, так что $\cos(\varphi - \alpha) = 0$]. Ее луч OD представляется уравнением $\varphi = \varphi_0$ (где $\varphi_0 = \angle XOD$), а луч OC — уравнением $\varphi = \varphi_1$ (где $\varphi_1 = \angle XOC$). Каждое из этих уравнений может представить всю прямую, если ввести отрицательные значения ρ (§ 73, замечание 2).

§ 77. Полярное уравнение конического сечения

Поместим полюс в фокусе F (черт. 109) конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), а полярную ось совместим с осью FX конического сечения, направив ее в сторону, противоположную той, где лежит соответствующая директриса PQ. Тогда коническое сечение представится уравнением

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \qquad (1)$$



Черт. 109.

где p — параметр, а ε — эксцентриситет конического сечения (§ 52).

Замечание. Если рассматривать только положительные значения ρ, то в случае гиперболы ($\varepsilon > 1$) уравнение (1) представляет лишь одну ветвь — ту, внутри которой лежит фокус. При этом для φ должно выполняться неравенство $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$. Если же рассматривать и отрицательные значения ρ, то φ может иметь любое значение, и при $1 - \varepsilon \cos \varphi < 0$ получаем вторую ветвь.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 78. Понятие о векторах и скалярах

Векторной величиной, или *вектором* (в широком смысле), называется всякая величина, обладающая направлением. *Скалярной величиной*, или *скаляром*, называется величина, не обладающая направлением.

Пример 1. Сила, действующая на материальную точку, есть вектор, так как она обладает направлением. Скорость материальной точки — тоже вектор.

Пример 2. Температура тела есть скаляр, так как с этой величиной не связано никакое направление. Масса тела и плотность его — тоже скаляры.

Если отвлечься от направления векторной величины, то ее, как и скалярную величину, можно измерить, выбрав соответствующую единицу измерения. Но число, полученное после измерения, характеризует скалярную величину полностью, а векторную — частично.

Черт. 110.

Векторную величину можно полностью охарактеризовать направленным отрезком, предварительно задав линейный масштаб.

Пример 3. Направленный отрезок AB на черт. 110 при масштабе MN, изображающем единицу силы (1 *кГ*), характеризует силу в 3,5 *кГ*, направление которой совпадает с направлением отрезка AB (указанным стрелкой).

§ 79. Вектор в геометрии

В геометрии *вектором* (в узком смысле) называется всякий направленный отрезок.

Вектор, началом которого служит точка A, а концом — точка B, обозначается $\overrightarrow{AB}$ (черт. 110).

Вектор обозначается также одной буквой, как показано на черт. 111. Эту букву печатают жирным шрифтом (**a**), а в письме ставят над буквой черту ($\bar{a}$).

Длина вектора называется также его *модулем*. Модуль есть скалярная величина.

Черт. 111.

Модуль вектора обозначается двумя вертикальными чертами — слева и справа: $|\overrightarrow{AB}|$, или $|\mathbf{a}|$, или $|\bar{a}|$.

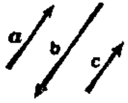
При двубуквенном обозначении вектора его модуль иногда обозначается теми же буквами, но без стрелки (AB — модуль вектора $\overrightarrow{AB}$), при однобуквенном обозначении — той же буквой, напечатанной светлым шрифтом (b — модуль вектора $\mathbf{b}$).

§ 80. Векторная алгебра

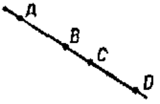
Над векторами производят действия, называемые сложением, вычитанием и умножением векторов (см. ниже). Эти действия имеют много общих свойств с алгебраическими действиями сложения, вычитания и умножения. Поэтому учение о действиях над векторами называется *векторной алгеброй*.

§ 81. Коллинеарные векторы

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Векторы **a**, **b**, **c** на черт. 112 коллинеарны. Векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CB}$ на черт. 113 коллинеарны.



Черт. 112.



Черт. 113.

Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (*равнонаправленные векторы*) или противоположные. Так, векторы **a** и **c** (черт. 112) равнонаправлены, векторы **a** и **b** (а также **b** и **c**) противоположно направлены. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ на черт. 113 равнонаправлены, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ противоположно направлены.

§ 82. Нуль-вектор

Если начало A и конец B отрезка AB совпадают, то отрезок AB обращается в точку и теряет направление. Но для общности правил векторной алгебры пару совпадающих точек надо тоже причислить к векторам. Этот особый вектор называется *нуль-вектором* и считается коллинеарным с любым вектором.

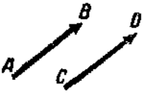
Нуль-вектор обозначается так же, как число нуль (знаком 0).

§ 83. Равенство векторов

Определение. Два (ненулевых) вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль. Все нулевые векторы считаются равными. Во всех остальных случаях векторы не равны.

Пример 1. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (черт. 114) равны.

Пример 2. Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ (черт. 115) не равны (хотя у них длины и одинаковы), ибо их направления различны. Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{KL}$ тоже не равны, а векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{KL}$ равны.



Черт. 114.

Черт. 115.

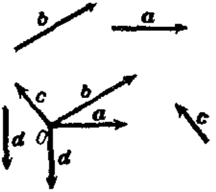
Предостережение. Нельзя смешивать понятие «равенство векторов» с понятием «равенство отрезков». Говоря: «отрезки ON и KL равны», мы утверждаем, что один из них можно совместить с другим. Но для этого может понадобиться поворот совмещаемого отрезка (как в расположении черт. 115). В таком случае согласно определению *векторы* $\overrightarrow{ON}$ *и* $\overrightarrow{KL}$ *не равны*. Два вектора будут равны лишь в том случае, когда их *можно совместить без поворота*.

Обозначения. Запись $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ выражает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны. Запись $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ выражает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не равны. Запись $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ выражает, что модули (длины) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны; при этом сами векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ могут равняться, а могут и не равняться друг другу.

Пример 3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (черт. 114), $\overrightarrow{ON}\neq\overrightarrow{KL}$ (черт. 115), $|\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{KL}|$ (черт. 115), $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KL}$ (черт. 115).

§ 84. Приведение векторов к общему началу

Всякие векторы (в любом числе) можно «привести к общему началу», т. е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало в некоторой точке O. Такое приведение показано на черт. 116.



Черт. 116

§ 85. Противоположные векторы

Определение. Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, обозначается $-\boldsymbol{a}$.

Черт. 117.

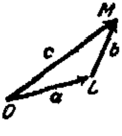
Пример 1. Векторы $\overrightarrow{LM}$ и $\overrightarrow{NK}$ на черт. 117 — противоположные.

Пример 2. Если вектор $\overrightarrow{LM}$ (черт. 117) обозначить буквой $\boldsymbol{a}$, то $\overrightarrow{NK} = -\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{ML} = -\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{KN} = \boldsymbol{a}$.

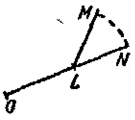
Из определения следует: $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$, $|-\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$.

§ 86. Сложение векторов

Определение. *Суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$, получаемый следующим построением: из произвольного начала O (черт. 118) строим вектор $\overrightarrow{OL}$, равный $\boldsymbol{a}$ (§ 83); из точки L, как из начала, строим вектор $\overrightarrow{LM}$, равный $\boldsymbol{b}$. Вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OM}$ есть сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ («правило треугольника»).



Черт. 118.



Черт. 119.

Запись: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

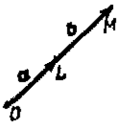
Предостережение. Нельзя смешивать понятие «сумма отрезков» с понятием «сумма векторов». Сумма отрезков OL и LM получается следующим построением: продолжив прямую OL (черт. 119), откладываем отрезок LN, равный отрезку LM. Отрезок ON есть сумма отрезков OL и LM. Сумма *векторов* $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{LM}$ строится иначе (см. определение).

При сложении векторов имеют место неравенства

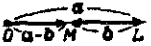
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \qquad (1)$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \geqslant \big|\,|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\,\big|, \qquad (2)$$

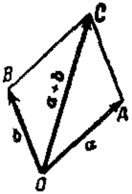
выражающие, что сторона OM треугольника OML (черт. 118) меньше суммы и больше разности двух других сторон. В формуле (1) знак равенства имеет место только



Черт. 120.



Черт. 121.



Черт. 122.

для равнонаправленных векторов (черт. 120), в формуле (2) – только для противоположно направленных векторов (черт. 121).

Сумма противоположных векторов. Из определения следует, что *сумма противоположных векторов равна нуль-вектору*:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = 0.$$

Свойство переместительности. *От перестановки слагаемых сумма векторов не меняется*:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

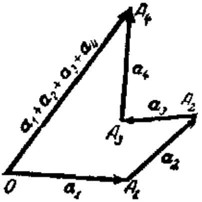
Правило параллелограмма. Если слагаемые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *не коллинеарны*, то сумму $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ можно найти следующим построением: из любого начала O (черт. 122) строим векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$; на отрезках OA, OB строим параллелограмм $OACB$. Вектор диагонали $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ есть сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (так как $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$).

К коллинеарным векторам (черт. 120 и 121) это построение *неприменимо*.

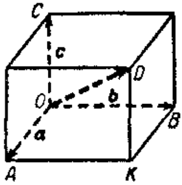
Замечание. Определение сложения векторов установлено в соответствии с физическими законами сложения векторных величин (например, сил, приложенных к материальной точке).

§ 87. Сумма нескольких векторов

Определение. *Суммой* векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется вектор, получающийся после ряда последовательных сложений: к вектору $\boldsymbol{a}_1$ прибавляется вектор $\boldsymbol{a}_2$, к полученному вектору прибавляется вектор $\boldsymbol{a}_3$ и т. д.



Черт. 123.



Черт. 124.

Из определения вытекает такое построение (*правило многоугольника* или *правило цепи*).

Из произвольного начала O (черт. 123) строим вектор $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, из точки A_1, как из начала, строим вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_2$, из точки A_2 строим вектор $\overrightarrow{A_2A_3} = \boldsymbol{a}_3$ и т. д. Вектор $\overrightarrow{OA_n}$ (на черт. 123 $n = 4$) есть сумма векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Сумма векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ обозначается $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+$ $+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$.

Свойство сочетательности. *Слагаемые векторы можно группировать как угодно.* Так, если найти сначала сумму векторов $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ (она равна вектору $\overrightarrow{A_1A_4}$, не изображенному на черт. 123) и к ней прибавить вектор $\boldsymbol{a}_1$ ($= \overrightarrow{OA_1}$), то получим тот же вектор $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ ($= \overrightarrow{OA_4}$):

$$\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4.$$

Правило параллелепипеда. Если три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ после приведения к общему началу (§ 84) не лежат в одной плоскости, то сумму $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ можно найти таким построением. Из любого начала O (черт. 124) строим векторы $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. На отрезках OA, OB, OC, как на ребрах, строим параллелепипед. Вектор диагонали $\overrightarrow{OD}$ есть сумма векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (так как $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}$).

К векторам, которые (после приведения к общему началу) лежат в одной плоскости, это построение *неприменимо*.

§ 88. Вычитание векторов

Определение. Вычесть вектор $\boldsymbol{a}_1$ (вычитаемое) из вектора $\boldsymbol{a}_2$ (уменьшаемое) значит найти новый вектор $\boldsymbol{x}$ (разность), который в сумме с вектором $\boldsymbol{a}_1$ дает вектор $\boldsymbol{a}_2$.

Короче: вычитание векторов есть действие, обратное сложению.

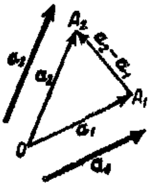
Обозначение: $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$.

Из определения вытекает такое построение: из произвольного начала O (черт. 125, 126) строим векторы $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a}_2$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (проведенный из конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого) есть разность $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$:

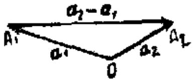
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}.$$

Действительно, сумма $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$ равна $\overrightarrow{OA_2}$.

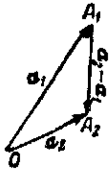
Замечание. Модуль разности (длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$) может быть меньше модуля «уменьшаемого», но может быть и больше и равен ему. Эти три случая показаны на черт. 125, 126, 127.



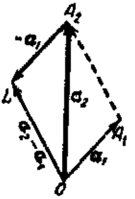
Черт. 125.



Черт. 126.



Черт. 127.



Черт. 128.

Другое построение. Чтобы построить разность $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$ векторов $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_1$, можно взять сумму векторов $\boldsymbol{a}_2$ и $-\boldsymbol{a}_1$, т. е.

$$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 + (-\boldsymbol{a}_1).$$

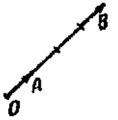
Пример. Пусть требуется найти разность $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$ (черт. 128). Согласно первому построению $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$. Построим теперь вектор $\overrightarrow{A_2L} = -\boldsymbol{a}_1$ и сложим векторы $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{A_2L} = -\boldsymbol{a}_1$. Получим (§ 86, определение) вектор $\overrightarrow{OL}$. Из чертежа видно, что $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

§ 89. Умножение и деление вектора на число

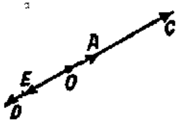
Определение 1. Умножить вектор $\boldsymbol{a}$ (множимое) на число x (множитель) значит построить новый вектор (произведение), модуль которого получается умножением модуля вектора $\boldsymbol{a}$ на абсолютное значение числа x, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$ или противоположно ему, смотря по тому, положительно число x или отрицательно. Если же $x = 0$, то произведение есть нуль-вектор.

Обозначение: $\boldsymbol{a}x$ или $x\boldsymbol{a}$.

Примеры. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot 4$ или $\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OA}$ (черт. 129), $\overrightarrow{OC} = 3\frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = -1{,}5\overrightarrow{OA}$ (черт. 130).



Черт. 129.



Черт. 130.

Определение 2. Разделить вектор $\boldsymbol{a}$ на число x значит найти такой вектор, который, будучи умножен на число x, даст в произведении вектор $\boldsymbol{a}$.

Обозначение: $\boldsymbol{a} : x$ или $\frac{\boldsymbol{a}}{x}$.

Вместо деления $\frac{\boldsymbol{a}}{x}$ можно выполнить умножение $\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{x}$.

Умножение вектора на число подчиняется тем же законам, что и умножение чисел:

1. $(x+y)\,\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{a}$ (свойство распределительности по отношению к числовому множителю),
2. $x\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ (свойство распределительности по отношению к векторному множителю),
3. $x\,(y\boldsymbol{a}) = (xy)\,\boldsymbol{a}$ (свойство сочетательности).

В силу этих свойств можно составлять векторные выражения, имеющие тот же внешний вид, что и многочлены первой степени в алгебре; эти выражения можно преобразовывать так же, как преобразуются соответствующие алгебраические выражения (приводить подобные члены, раскрывать скобки, выносить за скобки, переносить члены из одной части равенства в другую с обратным знаком и т. д.).

Примеры. $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{a}$ (в силу свойства 1),

$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ (в силу свойства 2),

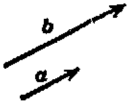
$5\cdot 12\boldsymbol{c}=60\boldsymbol{c}$ (в силу свойства 3);

$$4(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=4[2\boldsymbol{a}+(-3\boldsymbol{b})]=4[2\boldsymbol{a}+(-3)\boldsymbol{b}]=$$
$$=4\cdot 2\boldsymbol{a}+4(-3)\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{a}+(-12)\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b},$$

$$2(3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})=6\boldsymbol{a}-8\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}=$$
$$=-11\boldsymbol{b}+11\boldsymbol{c}=11(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}).$$

§ 90. Взаимная связь коллинеарных векторов (деление вектора на вектор)

Если вектор $\boldsymbol{a}$ — не нулевой, то всякий вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный с ним, можно представить в виде $x\boldsymbol{a}$, где x — число, получаемое так: оно имеет абсолютное



Черт. 131.

Черт. 132.

значение $|\boldsymbol{b}|:|\boldsymbol{a}|$ (отношение модулей); оно положительно, если вектор $\boldsymbol{b}$ равнонаправлен с вектором $\boldsymbol{a}$, отрицательно, если $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ противоположно направлены, и равно нулю, если $\boldsymbol{b}$ — нуль-вектор.

Примеры. Для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на черт. 131 имеем $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$ ($x=2$), на черт. 132 имеем $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$.

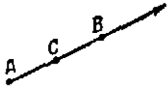
Замечание. Разыскание числа x называют *делением вектора* $\boldsymbol{b}$ *на вектор* $\boldsymbol{a}$. *Неколлинеарные векторы делить друг на друга нельзя.*

§ 91. Проекция точки на ось

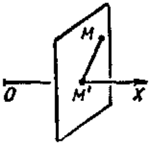
Осью называется всякая прямая, на которой выделено одно из двух ее направлений (все равно какое). Это направление называется *положительным* (на чертеже оно обозначается стрелкой); противоположное направление называется *отрицательным*.

Каждую ось можно задать любым вектором, лежащим на ней и имеющим то же направление. Так, ось черт. 133 можно задать вектором $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{AC}$ (но не вектором $\overrightarrow{BA}$).

Пусть дана ось OX (черт. 134) и некоторая точка M (вне оси или на ней). Проведем через M плоскость, перпендикулярную к оси; она пересечет ось в некоторой точке M'. Точка M' называется *проекцией точки M на ось OX* (если точка M лежит на оси, то она сама является своей проекцией).



Черт. 133.



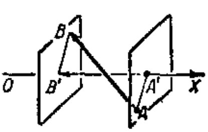
Черт. 134.

Замечание. Иными словами, проекция точки M на ось OX есть основание перпендикуляра, проведенного из точки M к оси OX. Данное выше определение подчеркивает, что построение выполняется в пространстве.

§ 92. Проекция вектора на ось

Выражение «проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX» употребляется в двух разных смыслах: геометрическом и алгебраическом (арифметическом).

1. *Проекцией* (*геометрической*) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (черт. 135), начало которого A' есть проекция начала A на ось OX, а конец B' — проекция конца B на ту же ось.



Черт. 135.

Обозначение: $\text{Пр}_{ox}\overrightarrow{AB}$ или, короче, Пр $\overrightarrow{AB}$.

Если ось $\overrightarrow{OX}$ задана вектором **c**, то вектор $\overrightarrow{A'B'}$ называется также *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на направление вектора* **c** и обозначается $\text{Пр}_c\ \overrightarrow{AB}$.

Геометрическая проекция вектора на ось OX называется также *компонентой вектора по оси OX*.

2. *Проекцией* (*алгебраической*) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX (или на направление вектора **c**) называется *длина* вектора

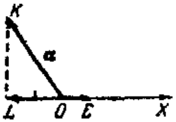
$\overrightarrow{A'B'}$, взятая со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, имеет ли вектор $\overrightarrow{A'B'}$ то же направление, что ось OX (вектор e), или противоположное.

Обозначение:

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} \text{ или } \text{пр}_e\overrightarrow{AB}.$$

Замечание. Геометрическая проекция (компонента) вектора есть *вектор*, а алгебраическая проекция вектора есть *число*.

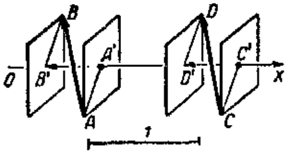
Пример 1. Геометрическая проекция вектора $\overrightarrow{OK} = a$ (черт. 136) на ось OX есть вектор $\overrightarrow{OL}$. Его направление противоположно направлению оси, а длина (при единице масштаба OE) равна 2. Значит, алгебраическая проекция вектора $\overrightarrow{OK}$ на ось OX есть отрицательное число -2:



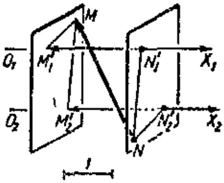
Черт. 136.

$$\text{Пр}\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}, \quad \text{пр}\,\overrightarrow{OK} = -2.$$

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (черт. 137) равны, то их алгебраические проекции по одной и той же оси тоже равны $\left(\text{пр}\,\overrightarrow{AB} = \text{пр}\,\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\right)$. То же для геометрических проекций.



Черт. 137.



Черт. 138.

Алгебраические проекции одного и того же вектора на две *равнонаправленные* оси (O_1X_1 и O_2X_2 на черт. 138) равны[1]) ($\text{пр}_{O_1X_1}\overrightarrow{NM} = \text{пр}_{O_2X_2}\overrightarrow{NM} = -2$). То же для геометрических проекций.

[1]) Если оси параллельны, но противоположно направлены, то алгебраические проекции не равны; они отличаются знаком.

3. Связь между компонентой (геометрической проекцией) и алгебраической проекцией вектора. Пусть $\mathbf{c}_1$ есть вектор, равнонаправленный с осью OX и имеющий длину 1. Тогда геометрическая проекция (компонента) какого-либо вектора $\mathbf{a}$ по оси OX равна произведению вектора $\mathbf{c}_1$ на алгебраическую проекцию вектора $\mathbf{a}$ по той же оси:

$$\text{Пр}\,\mathbf{a} = \text{пр}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_1.$$

Пример 2. При обозначениях черт. 136 имеем $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{OE}$. Геометрическая проекция вектора $\overrightarrow{OK} = \mathbf{a}$ на ось OX есть вектор $\overrightarrow{OL}$, алгебраическая проекция того же вектора есть число -2 (см. пример 1). Имеем $\overrightarrow{OL} = -2\overrightarrow{OE}$.

§ 93. Основные теоремы о проекциях вектора

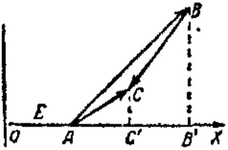
Теорема 1. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Теорема справедлива при обоих смыслах термина «проекция вектора» и при любом числе слагаемых; так, при трех слагаемых

$$\text{Пр}\,(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3) = \text{Пр}\,\mathbf{a}_1+\text{Пр}\,\mathbf{a}_2+\text{Пр}\,\mathbf{a}_3 \quad (1)$$

и

$$\text{пр}\,(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3) = \text{пр}\,\mathbf{a}_1+\text{пр}\,\mathbf{a}_2+\text{пр}\,\mathbf{a}_3. \quad (2)$$



Черт. 139.

Формула (1) вытекает из определения сложения векторов, формула (2) – из правила сложения положительных и отрицательных чисел.

Пример 1. Вектор $\overrightarrow{AC}$ (черт. 139) есть сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Геометрическая проекция вектора $\overrightarrow{AC}$ на ось OX есть вектор $\overrightarrow{AC'}$, а геометрические проекции векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ суть $\overrightarrow{AB'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$. При этом

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'},$$

так что

$$\text{Пр}\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \text{Пр}\,\overrightarrow{AB}+\text{Пр}\,\overrightarrow{BC}.$$

Пример 2. Пусть OE (черт. 139) есть единица масштаба; тогда алгебраическая проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось

OX равна 4 (длина AB', взятая со знаком плюс), т. е. пр $\overrightarrow{AB} = 4$. Далее пр $\overrightarrow{BC} = -2$ (длина $B'C'$, взятая со знаком минус) и пр $\overrightarrow{AC} = +2$ (длина AC', взятая со знаком плюс). Имеем

$$\text{пр}\,\overrightarrow{AB} + \text{пр}\,\overrightarrow{BC} = 4 - 2 = 2;$$

с другой стороны,

$$\text{пр}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{пр}\,\overrightarrow{AC} = 2,$$

так что

$$\text{пр}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{пр}\,\overrightarrow{AB} + \text{пр}\,\overrightarrow{BC}.$$

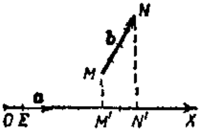
Теорема 2. Алгебраическая проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и вектором:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{b}\,| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \qquad (3)$$

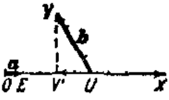
Пример 3. Вектор $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{MN}$ (черт. 140) образует с осью OX (она задана вектором $\boldsymbol{a}$) угол в 60°. Если OE есть единица масштаба, то $|\,\boldsymbol{b}\,| = 4$, так что

$$\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = 4 \cdot \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Действительно, длина вектора $\overrightarrow{M'N'}$ (геометрической проекции вектора $\boldsymbol{b}$) равна 2, а направление совпадает с направлением оси OX (ср. § 92, п. 2).



Черт. 140.



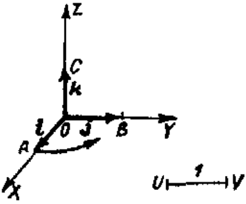
Черт. 141.

Пример 4. Вектор $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{UV}$ на черт. 141 образует с осью OX (с вектором $\boldsymbol{a}$) угол $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 120°$. Длина $|\,\boldsymbol{b}\,|$ вектора $\boldsymbol{b}$ равна 4. Поэтому $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = 4 \cdot \cos 120° = -2$.

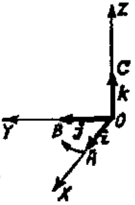
Действительно, длина вектора $\overrightarrow{UV'}$ равна 2, а направление противоположно направлению оси.

§ 94. Прямоугольная система координат в пространстве

Основные векторы. Три взаимно перпендикулярные оси OX, OY, OZ (черт. 142), проходящие через некоторую точку O, образуют *прямоугольную систему координат*. Точка O называется *началом координат*, прямые OX, OY, OZ — *осями координат* (OX — ось *абсцисс*, OY — ось *ординат*, OZ — ось *аппликат*[1])), а плоскости XOY, YOZ, ZOX — *координатными плоскостями*. Какой-либо отрезок UV принимается за единицу масштаба для всех трех осей.



Черт. 142.



Черт. 143.

Отложив на осях OX, OY, OZ в положительном направлении отрезки OA, OB, OC, равные единице масштаба, получим три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Они называются *основными векторами* и обозначаются соответственно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Черт. 144.

Черт. 145.

Положительные направления на осях принято выбирать так, чтобы поворот на 90°, совмещающий положительный луч OX с лучом OY (черт. 142), казался происходящим против часовой стрелки, если наблюдать его со стороны луча OZ. Такая система координат называется *правой*. Иногда пользуются и *левой системой координат*. В ней упомянутый поворот совершается по часовой стрелке (черт. 143).

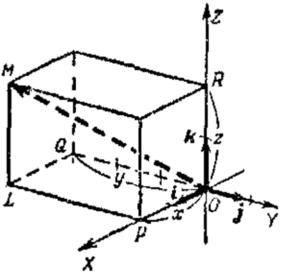
Замечание 1. Трехгранные углы, образованные лучами OX, OY, OZ в правой и левой системе, нельзя совместить так, чтобы совпали *соответственные* оси.

Замечание 2. Названия «правая» и «левая» происходят от того, что большой, указательный и средний пальцы правой руки, если их расположить наподобие осей OX, OY, OZ (черт. 144), образуют правую систему. На левой же руке (черт. 145) получаем левую систему.

[1]) О происхождении термина «аппликата» см. § 95.

§ 95. Координаты точки

Положение любой точки M в пространстве можно определить тремя координатами следующим образом. Через M проводим плоскости MP, MQ, MR (черт. 146), соответственно параллельные плоскостям YOZ, ZOX, XOY. В пересечении с осями получаем точки P, Q, R. Числа x (абсцисса), y (ордината), z (*апликата*)[1]), измеряющие отрезки OP, OQ, OR в избранном масштабе, называются (*прямоугольными*) *координатами* точки M. Они берутся положительными или отрицательными, смотря по тому, имеют ли векторы $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ соответственно те же направления, что и основные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, или противоположные.



Черт. 146.

Пример. Координаты точки M на черт. 146 суть: абсцисса

$$x = 2,$$

ордината

$$y = -3,$$

апликата

$$z = 2.$$

Запись:

$$M\,(2;\ -3;\ 2).$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала O к некоторой точке M, называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается буквой $\boldsymbol{r}$; чтобы отличать друг от друга радиусы-векторы разных точек, при букве $\boldsymbol{r}$ ставят значки: так, радиус-вектор точки M обозначается $\boldsymbol{r}_M$. Радиусы-векторы точек A_1, A_2, ..., A_n обозначаются

$$\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}_n.$$

---

[1]) Латинское слово «апликата» (applicata) в переводе означает «приложенная» (точку M можно построить так: сначала взять на плоскости XOY точку L с координатами $x = OP$, $y = PL$, а затем «приложить» отрезок $LM = z$, перпендикулярный к плоскости XOY).

§ 96. Координаты вектора

Определение. *Прямоугольными координатами вектора* $\boldsymbol{m}$ называются алгебраические проекции (§ 92) вектора $\boldsymbol{m}$ на оси координат. Координаты вектора обозначаются большими буквами X, Y, Z (координаты точки — малыми).

Запись:

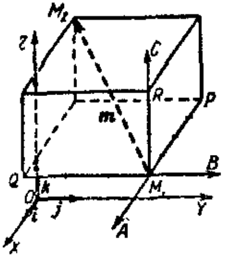
$$\boldsymbol{m}\{X, Y, Z\} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{m} = \{X, Y, Z\}.$$

Вместо того чтобы проектировать вектор $\boldsymbol{m}$ на оси OX, OY, OZ, можно проектировать его на оси M_1A, M_1B, M_1C (черт. 147), проведенные через начало M_1 вектора $\boldsymbol{m}$ и равнонаправленные с осями координат (§ 92, п. 2).

Пример 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ (черт. 147) относительно системы координат $OXYZ$.

Через точку M_1 проводим оси M_1A, M_1B, M_1C, соответственно равнонаправленные с осями OX OY, OZ.

Через точку M_2 проводим плоскости M_2P, M_2Q, M_2R, параллельные координатным плоскостям. Плоскости M_2P, M_2Q, M_2R пересекут оси M_1A, M_1B, M_1C соответственно в точках P, Q, R. Абсцисса X вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1P}$, взятая со знаком минус (§ 92, п. 2); ордината Y вектора $\boldsymbol{m}$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1Q}$, взятая со знаком минус; аппликата Z — длина вектора $\overrightarrow{M_1R}$, взятая со знаком плюс. При масштабе черт. 147 $X = -4$, $Y = -3$, $Z = 2$.



Черт. 147

Запись:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\{-4;\ -3;\ 2\}$$

или

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-4;\ -3;\ 2\}.$$

Если два вектора $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ равны, то их координаты соответственно равны

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2$$

(ср. § 92, п. 2).

Координаты вектора не меняются при параллельном перенесении системы координат. Напротив, координаты точки при параллельном перенесении системы координат меняются (см. ниже § 166, п. 1).

Если начальная точка O вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадает с началом координат, то координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ соответственно равны координатам конечной его точки M (§ 95).

Пример 2. У вектора $\overrightarrow{OM}$ на черт. 146 абсцисса $X=2$, ордината $Y=-3$, аппликата $Z=2$. Те же координаты имеет точка M.

Запись: $\overrightarrow{OM}\ \{2;\ -3;\ 2\}$ или $\overrightarrow{OM} = \{2;\ -3;\ 2\}$.

§ 97. Выражения вектора через компоненты и через координаты

1. Каждый вектор равен сумме его компонент (геометрических проекций) по трем осям координат:

$$\boldsymbol{m} = \text{Пр}_{OX}\boldsymbol{m} + \text{Пр}_{OY}\boldsymbol{m} + \text{Пр}_{OZ}\boldsymbol{m}. \qquad (1)$$

Пример 1. При обозначениях черт. 147 имеем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R}.$$

2. Каждый вектор $\boldsymbol{m}$ равен сумме произведений трех основных векторов на соответствующие координаты вектора $\boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{m} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Пример 2. При обозначениях черт. 147 имеем:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

§ 98. Действия над векторами, заданными своими координатами

1. *При сложении векторов их координаты складываются*, т. е. если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, то $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$.

2. Аналогичное правило для вычитания векторов: если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$, то $X = X_2 - X_1$, $Y = Y_2 - Y_1$, $Z = Z_2 - Z_1$.

3. *При умножении вектора на число все координаты множатся на то же число*, т. е. если $\boldsymbol{m}_2 = \lambda\boldsymbol{m}_1$, то $X_2 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda Y_1$, $Z_2 = \lambda Z_1$.

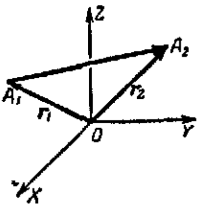
4. Аналогичное правило для деления вектора на число: если $m_2 = \frac{m_1}{\lambda}$, то $X_2 = \frac{X_1}{\lambda}$, $Y_2 = \frac{Y_1}{\lambda}$, $Z_2 = \frac{Z_1}{\lambda}$.

§ 99. Выражение вектора через радиусы-векторы его начала и конца

Следует заметить важную формулу

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ (черт. 148) есть радиус-вектор (§ 95) начала A_1 вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, а $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ — радиус-вектор его конца A_2.



Черт. 148.

Из (1) в силу § 98, п. 2 вытекают формулы

$$\left.\begin{aligned} X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \\ Z = z_2 - z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь X, Y, Z — координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, x_1, y_1, z_1 — координаты точки A_1 (они соответственно равны координатам радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}$) и x_2, y_2, z_2 — координаты точки A_2 (они соответственно равны координатам радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OA_2}$).

Словами: *чтобы найти абсциссу вектора, надо из абсциссы конца вычесть абсциссу начала вектора.*

Аналогичные правила для ординаты и аппликаты.

Пример. Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если $A_1(1;\ -2;\ 5)$ и $A_2(-2;\ 4;\ 0)$.

Решение. $X = -2-1 = -3$, $Y = 4-(-2) = 6$, $Z = 0-5 = -5$, так что $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-3,\ 6,\ -5\}$.

§ 100. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Длина вектора $\boldsymbol{a}\{X,\ Y,\ Z\}$ выражается через его координаты формулой

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (1)$$

Пример 1. Длина вектора $\boldsymbol{a}\{-4,\ -3,\ 2\}$ равна (ср. черт. 147)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4.$$

Расстояние d между точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ представляется формулой

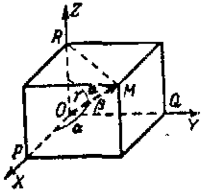
$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (2)$$

Она получается из (1) в силу формул (2) § 99 (ср. § 10).

Пример 2. Расстояние между точками $A_1(8;\ -3;\ 8)$, $A_2(6;\ -1;\ 9)$ есть $d = \sqrt{(6-8)^2+(-1+3)^2+(9-8)^2} = 3$.

§ 101. Угол между осью координат и вектором

Углы α, β, γ (черт. 149), образуемые положительными направлениями OX, OY, OZ с вектором $\boldsymbol{a}\{X,\ Y,\ Z\}$, можно найти по формулам [1])



Черт. 149.

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{X}{|\boldsymbol{a}|}\right), \qquad (1)$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Y}{|\boldsymbol{a}|}\right), \qquad (2)$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Z}{|\boldsymbol{a}|}\right). \qquad (3)$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет длину, равную единице масштаба, т. е. если $|\boldsymbol{a}| = 1$, то

$$\cos\alpha = X, \quad \cos\beta = Y, \quad \cos\gamma = Z.$$

Из (1), (2), (3) следует:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Пример. Найти углы, образуемые осями координат с вектором $\{2,\ -2,\ -1\}$.

Решение. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$, откуда $\alpha \approx 48°11'$, $\beta \approx 131°49'$, $\gamma \approx 109°28'$

---

[1]) Из прямоугольного треугольника OMR имеем:

$$\cos\gamma = \frac{OR}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{Z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Аналогично получаются формулы (1) и (2).

§ 102. Признак коллинеарности (параллельности) векторов

Если векторы $\boldsymbol{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ коллинеарны, то их соответственные координаты пропорциональны

$$X_2 : X_1 = Y_2 : Y_1 = Z_2 : Z_1 \tag{1}$$

и обратно.

Если коэффициент пропорциональности $\lambda = \frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$ положителен, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ равнонаправлены; если отрицателен — противоположно направлены. Абсолютное значение λ выражает отношение длин $|\boldsymbol{a}_2| : |\boldsymbol{a}_1|$.

З а м е ч а н и е. Если одна из координат вектора $\boldsymbol{a}_1$ равна нулю, то пропорцию (1) надо понимать в том смысле, что соответствующая координата вектора $\boldsymbol{a}_2$ тоже равна нулю.

П р и м е р 1. Векторы $\{-2, 1, 3\}$ и $\{4, -2, -6\}$ коллинеарны и противоположно направлены ($\lambda = -2$). Второй вектор вдвое длиннее первого.

П р и м е р 2. Векторы $\{4, 0, 10\}$ и $\{6, 0, 15\}$ коллинеарны и равнонаправлены $\left(\lambda = \frac{3}{2}\right)$. Второй вектор в полтора раза длиннее первого.

П р и м е р 3. Векторы $\{2, 0, 4\}$ и $\{4, 0, 2\}$ не коллинеарны.

§ 103. Деление отрезка в данном отношении

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $A_1A : AA_2 = m_1 : m_2$, определяется формулой

$$\boldsymbol{r} = \frac{m_2\boldsymbol{r}_1 + m_1\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы точек A_1 и A_2.

Координаты точки A находятся по формулам

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

(ср. § 11).

В частности, координаты середины отрезка A_1A_2 суть

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3}$$

Замечание. Точка A может быть взята и на продолжении отрезка A_1A_2 в ту или другую сторону, тогда одно из чисел m_1, m_2 нужно взять со знаком минус.

Пример. Найти координаты точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $A_1A : AA_2 = 2:3$, если $A_1(2; 4; -1)$, $A_2(-3; -1; 6)$.

По формулам (2) находим:

$$x = \frac{3\cdot 2+2\cdot(-3)}{2+3} = 0, \quad y = \frac{3\cdot 4+2\cdot(-1)}{2+3} = 2,$$

$$z = \frac{3\cdot(-1)+2\cdot 6}{2+3} = \frac{9}{5}$$

§ 104. Скалярное произведение двух векторов

Определение. *Скалярным произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на вектор* $\boldsymbol{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

Обозначение: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{ab}$.

Согласно определению

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1}$$

В силу теоремы 2 § 93

$$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

так что вместо (1) можно написать:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

Словами: *скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, помноженному на алгебраическую проекцию другого вектора на направление первого.*

Если угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый, то $\boldsymbol{ab} > 0$; если тупой, то $\boldsymbol{ab} < 0$; если прямой, то $\boldsymbol{ab} = 0$.

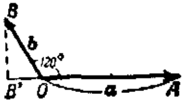
Вытекает из формулы (1).

Пример. *Длины векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *соответственно равны* 2 *м* и 1 *м*, а угол между ними 120°. Найти скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$.

По формуле (1) $\boldsymbol{ab} = 2\cdot 1\cdot\cos 120° = -1$ ($м^2$).

Вычислим ту же величину по формуле (2). Алгебраическая проекция вектора $\boldsymbol{b}$ (черт. 150) на направление вектора $\boldsymbol{a}$ равна $|\overrightarrow{OB}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ (длине вектора $\overrightarrow{OB'}$, взятой со знаком минус). Имеем:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a\boldsymbol{b} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1\ (м^2).$$



Черт. 150.

З а м е ч а н и е 1. В термине «скалярное произведение» первое слово указывает на то, что результат действия есть скаляр, а не вектор (в противоположность *векторному произведению*; см. ниже § 111). Второе слово подчеркивает, что для рассматриваемого действия имеют силу основные свойства обычного умножения (§ 105).

З а м е ч а н и е 2. Скалярное умножение нельзя распространить на случай трех сомножителей.

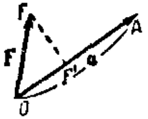
Действительно, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ есть ч и с л о; если это число помножить на вектор $\boldsymbol{c}$ (§ 89), то в произведении получим в е к т о р

$$(\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c},$$

коллинеарный с вектором $\boldsymbol{c}$.

§ 104а. Физический смысл скалярного произведения

Если вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ (черт. 151) изображает смещение *материальной точки, а вектор* $\boldsymbol{F} = \overrightarrow{OF}$ — *силу, действующую на эту точку, то скалярное произведение* $\boldsymbol{aF}$ *численно равно работе силы* $\boldsymbol{F}$.



Черт. 151.

Действительно, работу совершает только компонента $\overrightarrow{OF'}$. Значит, работа по абсолютному значению равна произведению длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OF'}$. При этом она считается положительной, если векторы $\overrightarrow{OF'}$ и $\boldsymbol{a}$ равнонаправлены, и отрицательной в противном случае. Стало быть, работа равна модулю вектора $\boldsymbol{a}$, помноженному на алгебраическую *проекцию вектора* $\boldsymbol{F}$ *по направлению вектора* $\boldsymbol{a}$, *т. е. работа равна скалярному произведению* $\boldsymbol{aF}$.

П р и м е р. Вектор силы $\boldsymbol{F}$ имеет модуль, равный 5 *кг*. Длина вектора смещения $\boldsymbol{a}$ равна 4 *м*. Пусть сила $\boldsymbol{F}$ действует под углом $\alpha = 45^\circ$ к смещению $\boldsymbol{a}$. Тогда работа силы $\boldsymbol{F}$ есть

$$\boldsymbol{Fa} = |\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\alpha = 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1\ (кГм).$$

§ 105. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ обращается в нуль, если один из сомножителей есть нуль-вектор или если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Вытекает из (1) § 104.

Пример. $3\boldsymbol{i}\cdot 2\boldsymbol{j}=0$, так как основные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, а значит, и векторы $3\boldsymbol{i}$, $2\boldsymbol{j}$ перпендикулярны.

Замечание. В обычной алгебре из равенства $ab=0$ следует, что либо $a=0$, либо $b=0$. Для скалярного произведения это свойство не имеет силы.

2. $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$ (свойство переместительности).

Вытекает из (1) § 104.

3. $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}$ (свойство распределительности).

Это свойство имеет место для любого числа слагаемых; например, при трех слагаемых

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}.$$

Вытекает из (2) § 104 и из (3) § 93.

4. $(m\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=m\,(\boldsymbol{ab})$ (свойство сочетательности относительно скалярного множителя) [1].

Примеры.

$$(2\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{ab},\quad (-3\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{ab},\quad \boldsymbol{p}\,(-6\boldsymbol{q})=-6\boldsymbol{pq}.$$

Свойство 4 выводится из (1) § 104 (удобно рассмотреть отдельно случаи $m>0$ и $m<0$).

4а. $(m\boldsymbol{a})\,(n\boldsymbol{b})=(mn)\,\boldsymbol{ab}$.

Примеры.

$$(2\boldsymbol{a})\,(-3\boldsymbol{b})=-6\boldsymbol{ab},\quad (-5\boldsymbol{p})\left(-\frac{2}{3}\,\boldsymbol{q}\right)=\frac{10}{3}\boldsymbol{pq}.$$

Свойство 4а вытекает из предыдущего свойства.

Свойства 2, 3, 4а позволяют применять к скалярным произведениям те же преобразования, какие выполняются в алгебре над произведениями многочленов.

---

[1]) Относительно векторного множителя свойство сочетательности не имеет места: выражение $(\boldsymbol{cb})\,\boldsymbol{a}$ есть вектор, коллинеарный с $\boldsymbol{a}$ (§ 104, замечание 2), а $\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ba})$ есть вектор, коллинеарный с $\boldsymbol{c}$, так что

$$(\boldsymbol{cb})\,\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ba}).$$

Пример 1.

$$2\boldsymbol{ab}+3\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{a}(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$$

(в силу свойств 3 и 4).

Пример 2.

$$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+5\boldsymbol{d})=2\boldsymbol{ac}+10\boldsymbol{ad}-3\boldsymbol{bc}-15\boldsymbol{bd}$$

(*в силу свойств 3 и 4а*).

Пример 3. Вычислить выражение $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — основные векторы.

Решение. Так как векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ взаимно перпендикулярны, то $\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{jk}=0$; кроме того,

$$\boldsymbol{kk}=|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|\cos(\widehat{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}})=|\boldsymbol{k}|^2\cos 0=1$$

(модуль основного вектора равен единице). Поэтому

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=\boldsymbol{ij}-\boldsymbol{ik}+\boldsymbol{kj}-\boldsymbol{kk}=-1.$$

5. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то $\boldsymbol{ab}=\pm|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; (знак $+$, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ имеют одно и то же направление, знак $-$, если противоположное).

5а. В частности, $\boldsymbol{aa}=|\boldsymbol{a}|^2$.

Скалярное *произведение* $\boldsymbol{aa}$ *обозначается* $\boldsymbol{a}^2$ (*скалярный квадрат* вектора $\boldsymbol{a}$), так что

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2 \qquad (1)$$

(*скалярный квадрат вектора есть квадрат его модуля*).

Замечание 1. Скалярного куба (и тем более высших степеней) в векторной алгебре нет (ср. § 104, замечание 2).

Замечание 2. $\boldsymbol{a}^2$ есть положительное число (квадрат длины вектора); из него можно извлечь корень любой степени, в частности, квадратный корень $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ (длина вектора $\boldsymbol{a}$). Однако нельзя вместо $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ писать $\boldsymbol{a}$, так как $\boldsymbol{a}$ — вектор, а $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ — число. Правильный результат будет:

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=|\boldsymbol{a}|. \qquad (2)$$

106. Скалярные произведения основных векторов

Из определения § 104 вытекает, что

$$\boldsymbol{ii}=\boldsymbol{i}^2=1, \quad \boldsymbol{jj}=\boldsymbol{j}^2=1, \quad \boldsymbol{kk}=\boldsymbol{k}^2=1,$$
$$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{ji}=0, \quad \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{kj}=0, \quad \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{ik}=0$$

ср. § 105, пример 3).

Эти соотношения можно представить в виде «таблицы скалярного умножения»:

Множитель \ Множимое	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

§ 107. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Если $\boldsymbol{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то [1])

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{1}$$

В частности, если $\boldsymbol{m} = \{X, Y, Z\}$, то

$$\boldsymbol{m}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{2}$$

откуда

$$\sqrt{\boldsymbol{m}^2} = |\boldsymbol{m}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2a}$$

(ср. § 105, замечание 2 и § 100).

Пример 1. Найти длины векторов $\boldsymbol{a}_1\{3, 2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, -3, 0\}$ и скалярное произведение этих векторов.

Решение. Искомые длины суть

$$\sqrt{\boldsymbol{a}_1^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\sqrt{\boldsymbol{a}_2^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}.$$

Скалярное произведение

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 3\cdot 2 + 2(-3) + 1\cdot 0 = 0.$$

Значит (§ 105, п. 1), векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ перпендикулярны.

---

[1]) Имеем $\boldsymbol{a}_1 = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2 = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$. Перемножаем, учитывая свойства 3, 4 § 105 и таблицу § 106.

Пример 2. Найти угол между векторами

$$\boldsymbol{a}_1\{-2,\ 1,\ 2\} \text{ и } \boldsymbol{a}_2\{-2,\ -2,\ 1\}.$$

Решение. Длины векторов суть

$$|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3,$$
$$|\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2} = 3.$$

Скалярное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = (-2)(-2)+1(-2)+ +2\cdot 1 = 4$. Так как $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$, то

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9},$$

т. е.

$$(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) \approx 63°37$$

§ 108. Условие перпендикулярности векторов

Если векторы $\boldsymbol{a}_1\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ взаимно перпендикулярны, то

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 = 0.$$

Обратно, если $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ перпендикулярны или один из них (например, $\boldsymbol{a}_1$) есть нуль-вектор[1] (тогда $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$).

Выводится из п. 1 § 105 и (1) § 107.

§ 109. Угол между векторами

Угол φ между векторами $\boldsymbol{a}_1\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ можно найти по формуле (ср. пример 2 § 107)

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \qquad (1)$$

Выводится из (1) и (2а) § 107.

Пример 1. Найти угол между векторами $\{1,\ 1,\ 1\}$ и $\{2,\ 0,\ 3\}$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} \approx 0{,}8006,$$

откуда $\varphi \approx 36°50'$.

---

[1] Нуль-вектор можно считать перпендикулярным к любому вектору; ср. § 82.

Пример 2. Вершины треугольника ABC суть

$$A(1;\ 2;\ -3);\ B(0;\ 1;\ 2);\ C(2;\ 1;\ 1).$$

Найти длины сторон AB и AC и угол A.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = \{(0-1),\ (1-2),\ (2+3)\} = \{-1,\ -1,\ 5\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{(2-1),\ (1-2),\ (1+3)\} = \{1,\ -1,\ 4\},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2} = 3\sqrt{3},$$

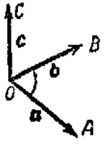
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{9\sqrt{6}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}.$$

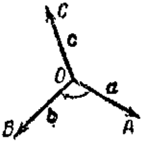
Замечание. Формулы (1)—(3) § 101 являются частными случаями формулы (1) настоящего параграфа.

§ 110. Правая и левая системы трех векторов

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — три (ненулевые) вектора, не параллельные одной плоскости и взятые в указанном порядке (т. е. $\boldsymbol{a}$ — первый вектор, $\boldsymbol{b}$ — второй и $\boldsymbol{c}$ — третий.) Приведя их к общему началу O (черт. 152), получим три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, не лежащие в одной плоскости.



Черт. 152.



Черт. 153.

Система трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется *правой* (черт. 152), если поворот вектора $\overrightarrow{OA}$, совмещающий его по кратчайшему пути с вектором $\overrightarrow{OB}$, совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого помещается в точке C.

Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке (черт. 153), то система трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется *левой*[1]).

Пример 1. Основные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в правой системе координат (§ 94) образуют правую систему. Система же $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$ (векторы те же, но порядок их другой) — левая.

Если имеем две системы трех векторов и каждая из них правая или каждая левая, то говорят, что эти системы

[1]) О происхождении названий «правая» и «левая» см. § 94, замечание 2.

имеют *одинаковую ориентацию*; если же одна система правая, а другая левая, то говорят, что системы имеют *противоположную ориентацию*.

При однократной перестановке двух векторов система меняет ориентацию (ср. пример 1).

Система сохраняет ориентацию при *круговой перестановке* векторов, показанной на черт. 154 (второй вектор становится первым, третий — вторым, а первый — третьим, т. е. вместо системы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ получаем систему $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$).

Пример 2. Из правой системы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ круговой перестановкой получаем правую систему $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, из последней — правую систему $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

Пример 3. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют правую систему, то следующие три системы — правые:

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},$$

остальные же три системы

$$\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},$$

составленные из тех же векторов, — левые.

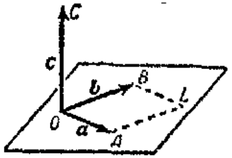
Черт. 154.

Правую систему трех векторов нельзя совместить ни с какой левой.

При зеркальном изображении правая система становится левой и наоборот.

§ 111. Векторное произведение двух векторов

Определение. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ (множимое) на не коллинеарный с ним вектор $\boldsymbol{b}$ (множитель) называется третий вектор $\boldsymbol{c}$ (произведение), который строится следующим образом:



Черт. 155.

1) его модуль численно равен площади параллелограмма ($AOBL$ на черт. 155), построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. он равен $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

2) его направление перпендикулярно к плоскости упомянутого параллелограмма;

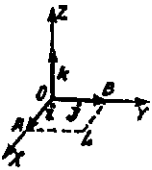
3) при этом направление вектора $\boldsymbol{c}$ выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ составляли правую систему (§ 110).

Обозначение: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$.

Дополнение к определению. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то фигуре $AOBL$, считая ее (условно) параллелограммом, естественно приписать нулевую площадь. Поэтому векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нуль-вектору.

Поскольку нуль-вектору можно приписать любое направление, это соглашение не противоречит пунктам 2 и 3 определения.

Замечание 1. В термине «векторное произведение» первое слово указывает на то, что результат действия есть вектор (в противоположность скалярному произведению; ср. § 104, замечание 1).



Черт. 156.

Пример 1. Найти векторное произведение $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ – основные векторы правой системы координат (черт. 156).

Решение. 1) Так как длины основных векторов равны единице масштаба, то площадь параллелограмма (квадрата) $AOBL$ численно равна единице. Значит, модуль векторного произведения равен единице.

2) Так как перпендикуляр к плоскости $AOBL$ есть ось OZ, то искомое векторное произведение есть вектор, коллинеарный с вектором $\boldsymbol{k}$; а так как оба они имеют модуль 1, то искомое векторное произведение равно либо $\boldsymbol{k}$, либо $-\boldsymbol{k}$.

3) Из этих двух возможных векторов надо выбрать первый, так как векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют правую систему (а векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $-\boldsymbol{k}$ – левую).

Итак,

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.$$

Пример 2. Найти векторное произведение $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$.

Решение. Как в примере 1, заключаем, что вектор $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$ равен либо $\boldsymbol{k}$, либо $-\boldsymbol{k}$. Но теперь надо выбрать $-\boldsymbol{k}$, ибо векторы $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{k}$ образуют правую систему (а векторы $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$ – левую).

Итак,

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}.$$

Пример 3. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют длины, соответственно равные 80 *см* и 50 *см*, и образуют угол в 30°. Приняв за единицу длины метр, найти длину векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна $80 \cdot 50 \sin 30° = 2000$ (*см*²), т. е. 0,2 *м*². Длина искомого векторного произведения равна 0,2 *м*.

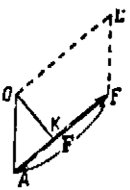
Пример 4. Найти длину векторного произведения тех же векторов, приняв за единицу длины сантиметр.

Решение. Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна 2000 *см*², то длина векторного произведения равна 2000 *см*, т. е. 20 *м*.

Из сравнения примеров 3 и 4 видно, что длина вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ зависит не только от длин сомножителей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, но *также и от выбора единицы длины*.

Физический смысл векторного произведения. Из многочисленных физических величин, изображаемых векторным произведением, рассмотрим только момент силы.

Пусть A есть точка приложения силы $\boldsymbol{F}$. *Моментом силы* $\boldsymbol{F}$ относительно точки O называется векторное произведение $\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}$. Так как модуль этого векторного произведения численно равен площади параллелограмма $AFLO$ (черт. 157), то модуль момента равняется произведению основания AF на высоту OK, т. е. силе, помноженной на расстояние от точки O до прямой, вдоль которой действует сила.



Черт. 157.

В механике доказывается, что для равновесия твердого тела необходимо, чтобы равнялась нулю не только сумма векторов $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots$, представляющих силы, приложенные к телу, но также и сумма моментов сил. В том случае, когда все силы параллельны одной плоскости, сложение векторов, представляющих моменты, можно заменить сложением и вычитанием их модулей. Но при произвольных направлениях сил такая замена невозможна. В соответствии с этим векторное произведение определяется именно как вектор, а не как число.

§ 112. Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ обращается в нуль лишь тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (в частности, если один из них или оба — нуль-векторы).

Вытекает из первого пункта определения § 111.

1a. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

Равенство $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ исключает необходимость вводить понятие «векторного квадрата» (ср. § 105, п. 5а).

2. При перестановке сомножителей векторное произведение умножается на -1 («меняет знак на обратный»):

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

(ср. примеры 1 и 2 § 111).

Таким образом, *векторное произведение не обладает свойством переместительности* (ср. § 105, п. 2).

3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{l}+\mathbf{b} \times \mathbf{l}$ (свойство распределительности).

Это свойство имеет место для любого числа слагаемых; например, при трех слагаемых имеем:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{l}+\mathbf{b} \times \mathbf{l}+\mathbf{c} \times \mathbf{l}.$$

4. $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (свойство сочетательности относительно скалярного множителя).

4а. $(m\mathbf{a}) \times (n\mathbf{b}) = mn(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

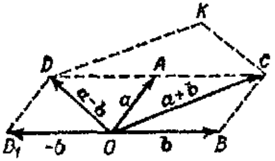
Примеры: 1) $-3\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

2) $0{,}3\mathbf{a} \times 4\mathbf{b} = 1{,}2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

3) $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}+5\mathbf{d}) =$

$$= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})+10(\mathbf{a} \times \mathbf{d})-3(\mathbf{b} \times \mathbf{c})-15(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) =$$
$$= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})+10(\mathbf{a} \times \mathbf{d})+3(\mathbf{c} \times \mathbf{b})+15(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) =$$
$$= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})-10(\mathbf{d} \times \mathbf{a})+3(\mathbf{c} \times \mathbf{b})+15(\mathbf{d} \times \mathbf{b}).$$

4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a}-\mathbf{a} \times \mathbf{b}+\mathbf{b} \times \mathbf{a}-\mathbf{b} \times \mathbf{b}$. Первое и четвертое слагаемые равны нулю (п. 1). Кроме



Черт. 158.

того, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (п. 2). Значит,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

Стало быть, площадь $OCKD$ (черт. 158) вдвое больше площади $OACB$.

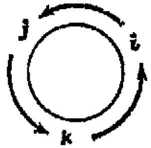
§ 113. Векторные произведения основных векторов

Из определения § 111 вытекает, что

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \end{array}$$

Чтобы не ошибаться в знаках, полезно держать в уме следующую схему (черт. 159). Пользоваться ею надо так:

Если направление кратчайшего пути от первого вектора (множимого) ко второму (множителю) совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору; если не совпадает, то третий вектор берется со знаком минус.



Черт. 159.

Пример 1. Найти $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$. На схеме направление кратчайшего пути от $\boldsymbol{k}$ к $\boldsymbol{i}$ совпадает с направлением стрелки. Поэтому $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

Пример 2. Найти $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}$. Теперь направление кратчайшего пути противоположно направлению стрелки. Поэтому $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$.

Пример 3. Упростить выражение $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})\times$ $\times(4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})$. Раскрывая скобки и пользуясь таблицей или схемой, находим:

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})\times(4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}) &= 8(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})-\\ &-12(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+24(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})-12(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+18(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})-\\ &-36(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+24(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})-36(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+72(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})=\\ &=-12\boldsymbol{k}-24\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}-36\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j}+36\boldsymbol{i}=0.\end{aligned}$$

Так как векторное произведение обращается в нуль только в случае коллинеарности сомножителей (§ 112, п. 1), то векторы $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ и $4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ коллинеарны. Это показывает и признак § 102.

§ 114. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если $\boldsymbol{a}_1=\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то[1])

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right\}. \qquad (1)$$

Выражения, окаймленные вертикальными чертами, — определители второго порядка (§ 12).

---

[1]) Находим векторное произведение $(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+$ $+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})$, пользуясь таблицей § 113 и свойствами 2, 3, 4 § 112 (ср. пример 3 § 113).

Практическое правило. Чтобы получить координаты вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, составим таблицу

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix}. \tag{2}$$

Закрыв в ней первый столбец, находим первую координату

$$\begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{matrix}.$$

Закрыв второй столбец и *взяв оставшийся определитель с обратным знаком* $\left(-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\right.$ или, что то же, $\left.\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\right)$, находим вторую координату.

Закрыв третий столбец (оставшийся определитель берется снова со своим знаком), находим третью координату.

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1\{3, -4, -8\}$ и $\mathbf{a}_2\{-5, 2, -1\}$.

Решение. Составляем таблицу

$$\begin{matrix} 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & -1 \end{matrix}$$

Закрыв первый столбец, получаем первую координату

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-1) - 2\cdot(-8) = 20.$$

Закрыв второй столбец, находим определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Переставляя в нем столбцы (при этом знак меняется на обратный), получаем вторую координату $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 43.$

Закрыв третий столбец, получаем третью координату $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -14.$

Итак, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \{20, 43, -14\}$.

Замечание. Чтобы не ошибиться в знаке при вычислении второй координаты, можно вместо таблицы (2) пользоваться таблицей

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & X_2 & Y_2 \end{matrix}, \tag{3}$$

получаемой из (2) приписыванием первых двух столбцов. Закрыв в (3) первый столбец, берем подряд следующие два. Затем, закрыв еще и второй столбец, берем подряд следующие два. Наконец, закрыв и третий столбец, берем последние два. Ни в одном из трех полученных определителей не надо переставлять столбцы.

Пример 2. Найти площадь S треугольника, заданного вершинами $A_1(3;\ 4;\ -1)$, $A_2(2;\ 0;\ 4)$, $A_3(-3;\ 5;\ 4)$.

Решение. Искомая площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Находим (§ 99) $\overrightarrow{A_1A_2} = \{(2-3),\ (0-4),\ (4+1)\} = \{-1,\ -4,\ 5\}$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-6,\ 1,\ 5\}$. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$, а последнее равно $\{-25,\ -25,\ -25\}$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-25)^2+(-25)^2+(-25)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1875} \approx 21{,}7.$$

§ 115. Компланарные векторы

Три вектора (или большее число) называются *компланарными*, если они, будучи приведены к общему началу, лежат в одной плоскости.

Если хотя бы один из трех векторов — нулевой, то три вектора тоже считаются компланарными.

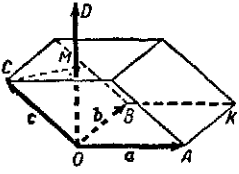
Признак компланарности см. в §§ 116, 120.

§ 116. Смешанное произведение

Смешанным (или *векторно-скалярным*) произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (взятых в указанном порядке) называется скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на векторное произведение $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, т. е. число $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, или, что то же, $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

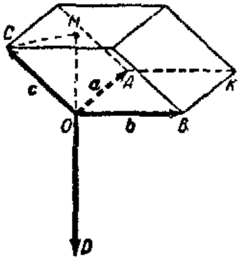
Обозначение: $\boldsymbol{abc}$.

Признак компланарности. Если система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая, то $\boldsymbol{abc} > 0$; если левая, то $\boldsymbol{abc} < 0$. Если же векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны (§ 115), то $\boldsymbol{abc} = 0$. Иными словами, *обращение в нуль смешанного произведения $\boldsymbol{abc}$ есть признак компланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.*



Черт. 160.

Геометрическое истолкование смешанного произведения. Смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, взятому со знаком плюс, если система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — *правая, и со знаком минус,* если эта система левая.



Черт. 161.

Пояснение. Построим (черт. 160, 161) вектор

$$\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \qquad (1)$$

Тогда площадь основания $OAKB$ равна

$$S = |\overrightarrow{OD}|. \qquad (2)$$

Высота H (длина вектора $\overrightarrow{OM}$), взятая со знаком плюс или минус, есть (§ 92, п. 2) алгебраическая проекция вектора $\boldsymbol{c}$ по направлению $\overrightarrow{OD}$, т. е.

$$H = \pm \text{пр}_{\overrightarrow{OD}}\, \boldsymbol{c}. \qquad (3)$$

Знак плюс берется, когда $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OD}$ равнонаправлены (черт. 160), а это будет в случае правой системы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Знак минус отвечает левой системе (черт. 161). Из (2) и (3) получаем:

$$V = SH = \pm |\overrightarrow{OD}|\, \text{пр}_{\overrightarrow{OD}}\, \boldsymbol{c},$$

но $|\overrightarrow{OD}|\, \text{пр}_{\overrightarrow{OD}}\, \boldsymbol{c}$ есть скалярное произведение $\overrightarrow{OD} \cdot \boldsymbol{c}$ (§ 104), т. е. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$. Значит,

$$V = \pm (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}.$$

§ 117. Свойства смешанного произведения

1. При круговой перестановке (§ 110) сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей — меняет знак на обратный:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -(\boldsymbol{bac}) = -(\boldsymbol{cba}) = -(\boldsymbol{acb}).$$

Вытекает из геометрического истолкования (§ 116) и из § 110.

2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{c}\mathbf{d} = \mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{d}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{d}$ (свойство распределительности).

Распространяется на любое число слагаемых.

Вытекает из определения смешанного произведения и § 112, п. 3.

3. $(m\mathbf{a})\,\mathbf{b}\mathbf{c} = m\,(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c})$ (свойство сочетательности относительно скалярного множителя).

Вытекает из определения смешанного произведения и § 112, п. 4.

Эти свойства позволяют применять к смешанным произведениям преобразования, отличающиеся от обычных алгебраических лишь тем, что *менять порядок сомножителей можно только с учетом знака произведения* (п. 1).

4. Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{b} = 0.$$

Пример 1.

$$\mathbf{a}\mathbf{b}\,(3\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}+2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{b}-5\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} = -5\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})\ (\mathbf{c}+\mathbf{a}) &= \\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}+\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{c}+\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{a}+\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{c}+\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Все члены, кроме двух крайних, равны нулю. Кроме того, $\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$ (свойство 1). Поэтому

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}.$$

§ 118. Определитель третьего порядка[1])

Во многих случаях, в частности при вычислении смешанного произведения, удобно пользоваться записью вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Она представляет сокращенное обозначение выражения

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

[1]) Подробнее об определителях см. §§ 182—185.

Выражение (1) называется *определителем третьего порядка.*

Определители второго порядка, входящие в (2), составлены следующим образом. Вычеркнем из таблицы (1) ту строку и тот столбец, где стоит a_1, как показано на схеме:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Остающийся определитель входит в (2) множителем при вычеркнутой букве a_1. Аналогично получаются два других определителя формулы (2):

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Надо помнить: *средний член в формуле* (2) *снабжен знаком минус*!

П р и м е р 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\cdot 6 + 1\cdot(-15) - 3\cdot(-9) = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Так как $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$, то определитель третьего порядка можно представить еще так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь все определители второго порядка снабжены знаком плюс.

Замечание 2. Вычисление по формуле (3) можно механизировать следующим образом. Припишем к таблице (1) два первых ее столбца; получим таблицу

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix} \tag{4}$$

Берем из первой строки букву a_1 и спускаемся от нее по диагонали направо, как показано стрелкой на таблице (5):

$$\begin{array}{c|cc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \tag{5}$$

Определитель второго порядка, на который указывает стрелка, множится на a_1. Получаем $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Затем закрываем первый столбец, берем из первой строки букву b_1 (первую из оставшихся) и поступаем аналогично, как показано на таблице (6):

$$\begin{array}{c|cc|c} b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \tag{6}$$

Получаем: $b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$.

Наконец, закрываем второй столбец и получаем: $c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

Пример 2. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Составляем таблицу (4)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 5 \end{matrix}$$

и находим:

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -14 + 20 - 33 = -27.$$

§ 119. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ даны их координатами

$$\boldsymbol{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то смешанное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Вытекает из формул (1) § 107 и (1) § 114.

Пример 1. Смешанное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1\{-2, -1, -3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1, 4, 6\}$, $\boldsymbol{a}_3\{1, 5, 9\}$ равно

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(ср. § 118, пример 1). Значит (§ 116), векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

Пример 2. Векторы $\{1, 2, 3\}$, $\{-1, 3, 4\}$, $\{2, 5, 2\}$ образуют левую систему, ибо их смешанное произведение (§ 118, пример 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

отрицательно (см. § 116).

§ 120. Признак компланарности в координатной форме

Условие (необходимое и достаточное) компланарности векторов $\boldsymbol{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\boldsymbol{a}_3\{X_3, Y_3, Z_3\}$ есть (см. § 119, пример 1)

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вытекает из § 116.

§ 121. Объем параллелепипеда

Объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\boldsymbol{a}_1\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\quad \boldsymbol{a}_2\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},\quad \boldsymbol{a}_3\{X_3,\ Y_3,\ Z_3\},$$

равен

$$V = \pm\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

где знак плюс берется, когда определитель третьего порядка положителен, и минус — если определитель отрицателен (ср. § 13).

Вытекает из §§ 116, 119.

Пример 1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\{1, 2, 3\}$, $\{-1, 3, 4\}$, $\{2, 5, 2\}$.

Решение. Имеем:

$$V = \pm\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \pm(-27).$$

Так как определитель отрицателен, берем перед ним знак минус. Находим $V = 27$.

Пример 2. Найти объем V треугольной пирамиды $ABCD$ с вершинами $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;\ -1)$, $D(4;\ 1;\ 3)$.

Решение. Находим (§ 99):

$$\overrightarrow{AB} = \{(5-2), (5+1), (4-1)\} = \{3, 6, 3\}.$$

Таким же образом $\overrightarrow{AC} = \{1, 3, -2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2, 2, 2\}$. Искомый объем равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на ребрах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Поэтому

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем $V = 3$.

§ 122. Двойное векторное произведение

Двойным векторным произведением называется выражение вида

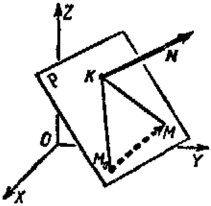
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Двойное векторное произведение есть вектор, компланарный с векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$; оно выражается через векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ следующим образом:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\mathbf{b}). \qquad (1)$$

§ 123. Уравнение плоскости

А. Плоскость (черт. 162), проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и перпендикулярная к вектору $\mathbf{N}\{A,\ B,\ C\}$, представляется уравнением первой степени[1])



Черт. 162.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+ \\ +C(z-z_0) = 0, \qquad (1)$$

или

$$Ax+By+Cz+D = 0, \qquad (2)$$

где через D обозначена величина

$$-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

Вектор $\mathbf{N}\{A,\ B,\ C\}$ называется *нормальным вектором* плоскости P.

Замечание 1. Выражение «плоскость P представляется уравнением (1)» означает, что: 1) координаты x, y, z всякой точки M плоскости P удовлетворяют уравнению (1); 2) координаты x, y, z всякой точки, не лежащей на плоскости P, не удовлетворяют этому уравнению (ср. § 8).

Б. Всякое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+$ $+D = 0$ (A, B и C не равны нулю все сразу) представляет плоскость.

Уравнения (1) и (2) в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0, \qquad (1a)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{r}+D = 0 \qquad (2a)$$

($\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы точек M_0 и M; $D = -\mathbf{N}\mathbf{r}_0$).

---

[1]) Уравнение (1) есть условие перпендикулярности векторов $\mathbf{N} = \{A,\ B,\ C\}$ и $\overline{M_0M} = \{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$. См. §§ 108 и 99.

Пример. Плоскость, проходящая через точку (2; 1; −1) и перпендикулярная к вектору $\{-2, 4, 3\}$, представляется уравнением

$$-2(x-2)+4(y-1)+3(z+1)=0,$$

или

$$-2x+4y+3z+3=0.$$

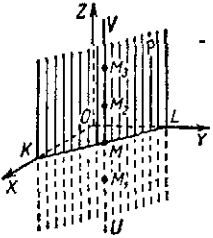
Замечание 2. Одну и ту же плоскость можно представить множеством уравнений, у которых все коэффициенты и свободный член соответственно пропорциональны (см. ниже § 125, замечание).

§ 124. Особые случаи положения плоскости относительно системы координат

1. Уравнение $Ax+By+Cz=0$ (свободный член $D=0$) представляет плоскость, проходящую через начало.

2. Уравнение $Ax+By+D=0$ (коэффициент $C=0$) представляет плоскость, параллельную оси OZ, уравнение $Ax+Cz+D=0$ — плоскость, параллельную оси OY, уравнение $By+Cz+D=0$ — плоскость, параллельную оси OX.

Полезно запомнить: *если в уравнении нет буквы z, то плоскость параллельна оси OZ* и т. п.



Черт. 163.

Пример. Уравнение

$$x+y-1=0$$

представляет плоскость P (черт. 163), параллельную оси OZ.

Замечание. В аналитической геометрии на плоскости уравнение $x+y-1=0$ изображает *прямую* (KL на черт. 163). Разъясним, почему в пространстве то же уравнение представляет *плоскость*.

Возьмем на прямой KL какую-либо точку M. Так как M лежит на плоскости XOY, то для нее $z=0$. Пусть в системе XOY точка M имеет координаты $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ (они удовлетворяют уравнению $x+y-1=0$). Тогда в пространственной системе $OXYZ$ координаты точки M будут $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=0$. Эти координаты удовлетворяют уравнению $x+y-1=0$ (для большей ясности запишем его в виде $1x+1y+0\cdot z-1=0$).

Рассмотрим теперь точки, для которых $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, но $z\neq 0$, например, точки $M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

и т. п. (см. черт. 163). Координаты их тоже удовлетворяют уравнению $x+y+0\cdot z-1=0$. Эти точки заполняют «вертикальную» прямую UV, проходящую через M. Такие же вертикальные прямые можно построить для всех точек прямой KL. В совокупности они заполнят плоскость P.

О том, как представить в пространственной системе координат *прямую* KL, сказано ниже (§ 140, пример 4).

3. Уравнение $Ax+D=0$ ($B=0$, $C=0$) представляет плоскость, параллельную как оси OY, так и оси OZ (см. п. 2), т. е. параллельную координатной плоскости YOZ.

Аналогично уравнение $By+D=0$ представляет плоскость, параллельную плоскости XOZ, а уравнение $Cz+D=0$ — плоскость, параллельную XOY (ср. § 15).

4. Уравнения $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ представляют соответственно плоскости YOZ, XOZ, XOY.

§ 125. Условие параллельности плоскостей

Если плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

параллельны, то нормальные векторы $N_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $N_2\{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны (и обратно). Поэтому (§ 102) условие параллельности (необходимое и достаточное) есть

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}.$$

Пример 1. Плоскости

$$2x-3y-4z+11=0 \quad \text{и} \quad -4x+6y+8z+36=0$$

параллельны, так как $\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}=\frac{8}{-4}$.

Пример 2. Плоскости $2x-3z-12=0$ ($A_1=2$, $B_1=0$, $C_1=-3$) и $4x+4y-6z+7=0$ ($A_2=4$, $B_2=4$, $C_2=-6$) не параллельны, так как $B_1=0$, а $B_2\neq 0$ (§ 102, замечание).

Замечание. Если не только коэффициенты при координатах, но и сверх того и свободные члены пропорциональны, т. е. если

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1},$$

то плоскости совпадают. Так, уравнения

$$3x+7y-5z+4=0 \quad \text{и} \quad 6x+14y-10z+8=0$$

представляют одну и ту же плоскость. Ср. § 18, замечание 3.

§ 126. Условие перпендикулярности плоскостей

Если плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы $N_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $N_2\{A_2, B_2, C_2\}$ (и обратно). Поэтому (§ 108) условие перпендикулярности (необходимое и достаточное) есть

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Пример 1. *Плоскости*

$$3x-2y-2z+7=0 \quad \text{и} \quad 2x+2y+z+4=0$$

перпендикулярны, так как $3\cdot 2+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 1=0$.

Пример 2. Плоскости

$$3x-2y=0 \quad (A_1=3, \quad B_1=-2, \quad C_1=0)$$

и

$$z=4 \quad (A_2=0, \quad B_2=0, \quad C_2=1)$$

перпендикулярны.

§ 127. Угол между двумя плоскостями

Две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{2}$$

образуют четыре двугранных угла, равных попарно. Один из них равен углу между нормальными векторами $N_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $N_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Обозначая любой из двугранных углов через φ, имеем:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3}$$

Выбирая верхний знак, получаем $\cos(\widehat{N_1, N_2})$, выбирая нижний, — получаем $\cos[180^\circ-(\widehat{N_1, N_2})]$.

Пример. Угол между плоскостями

$$x-y+\sqrt{2}z+2=0 \quad \text{и} \quad x+y+\sqrt{2}z-3=0$$

определится из равенства

$$\cos\varphi = \pm\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}\ \sqrt{1+1+(\sqrt{2})^2}} = \pm\frac{1}{2}$$

Получаем $\varphi=60^\circ$ или $\varphi=120^\circ$

Если вектор $\boldsymbol{N}_1$ образует с осями OX, OY, OZ углы α_1 β_1, γ_1, а вектор $\boldsymbol{N}_2$ — углы α_2, β_2, γ_2, то

$$\cos\varphi = \pm(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2) \qquad (4)$$

Вытекает из (3) и формул (1)—(3) § 101

§ 128. Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости

Плоскость, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и параллельная плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, представляется уравнением

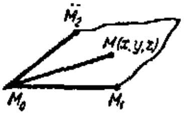
$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

Вытекает из §§ 123 и 125.

Пример. Плоскость, проходящая через точку $(2;\ -1;\ 6)$ и параллельная плоскости $x+y-2z+5=0$, представляется уравнением $(x-2)+(y+1)-2(z-6)=0$, т. е. $x+y-2z+11=0$.

§ 129. Плоскость, проходящая через три точки

Если точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ не лежат на одной прямой, то проходящая через них плоскость (черт. 164) представляется уравнением



Черт. 164.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Оно выражает компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ (см. §§ 120 и 99).

Пример. Точки $M_0(1; 2; 3)$, $M_1(2; 1; 2)$, $M_2(3; 3; 1)$ не лежат на одной прямой, так как векторы $\overrightarrow{M_0M_1}\{1, -1, -1\}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}\{2, 1, -2\}$ не коллинеарны. Плоскость $M_0M_1M_2$ представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$x+z-4=0.$$

Замечание. Если точки M_0, M_1, M_2 лежат на одной прямой, то уравнение (1) становится тождеством.

§ 130. Отрезки на осях

Если плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ не параллельна оси OX (т. е. если $A \neq 0$; § 124), то она отсекает на этой оси отрезок $a=-\frac{D}{A}$. Аналогично, отрезки на осях OY, OZ будут $b=-\frac{D}{B}$ (если $B \neq 0$) и $c=-\frac{D}{C}$ (если $C \neq 0$) (ср. § 32).

Пример. Плоскость $3x+5y-4z-3=0$ отсекает на осях отрезки $a=\frac{3}{3}=1$, $b=\frac{3}{5}$, $c=-\frac{3}{4}$.

§ 131. Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость отсекает на осях отрезки a, b, c (не равные нулю), то ее можно представить уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1}$$

которое называется «уравнением плоскости в отрезках».

Уравнение (1) можно получить как уравнение плоскости, проходящей через три точки $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ и $(0; 0; c)$ (см. § 129).

Пример. Написать уравнение плоскости

$$3x-6y+2z-12=0$$

в отрезках.

Находим (§ 130) $a=4$, $b=-2$, $c=6$. Уравнение в отрезках есть

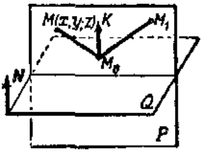
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1.$$

Замечание 1. Плоскость, проходящую через начало координат, нельзя представить уравнением в отрезках (ср. § 33, замечание 1).

Замечание 2. Плоскость, параллельную оси OX, но не параллельную двум другим осям, можно представить уравнением $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где b и c — отрезки на осях OY и OZ. Плоскость, параллельную оси абсцисс и оси ординат, можно представить уравнением $\frac{z}{c}=1$. Аналогично представляются плоскости, параллельные другим осям, одной или двум (ср. § 33, замечание 2).

§ 132. Плоскость, проходящая через две точки перпендикулярно к данной плоскости

Плоскость P (черт. 165), проходящая через две точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно к плоскости Q, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, представляется уравнением



Черт. 165.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Оно выражает (§ 120) компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\mathbf{N}\{A, B, C\}=\overrightarrow{M_0K}$.

Пример. Плоскость, проходящая через две точки $M_0(1; 2; 3)$ и $M_1(2; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $3x+4y+z-6=0$, представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 1-3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $x-y+z-2=0$.

Замечание. В случае, когда прямая M_0M_1 перпендикулярна к плоскости Q, плоскость P неопределенна. В соответствии с этим уравнение (1) обращается в тождество.

§ 133. Плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно к двум плоскостям

Плоскость P, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярная к двум (непараллельным) плоскостям Q_1, Q_2:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

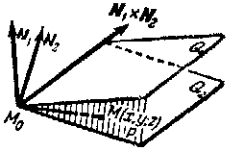
Оно выражает (черт. 166) компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ [1]).

Пример. Плоскость, проходящая через точку (1; 3; 2) и перпендикулярная к плоскостям $x+2y+z-4=0$ и $2x+y+3z+5=0$, представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$5x-y-3z+4=0.$$



Черт. 166.

Замечание. В случае параллельности плоскостей Q_1, Q_2 плоскость P неопределенна; в соответствии с этим уравнение (1) обращается в тождество.

§ 134. Точка пересечения трех плоскостей

Три плоскости могут не иметь ни одной общей точки (если по крайней мере две из них параллельны, а также если прямые их пересечения параллельны), могут иметь бесчисленное множество общих точек (если все они про-

[1]) Векторное произведение $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2$ (черт. 166) служит нормальным вектором плоскости P. Значит [§ 123, (1а)], уравнение плоскости P есть $(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$, что снова дает уравнение (1).

ходят через одну прямую) или иметь только одну общую точку В первом случае система уравнений

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

не имеет решений, во втором имеет бесчисленное множество решений, в третьем — только одно решение. Для исследования удобнее всего применить определители (§ 183, 190), но можно обойтись и средствами элементарной алгебры.

Пример 1. Плоскости

$$7x-3y+z-6=0, \tag{1}$$
$$14x-6y+2z-5=0, \tag{2}$$
$$x+y-5z=0 \tag{3}$$

не имеют общих точек, так как плоскости (1) и (2) параллельны (§ 125). Система уравнений несовместна [уравнения (1) и (2) противоречат друг другу].

Пример 2. Исследовать, есть ли общие точки у трех плоскостей

$$x+y+z=1, \tag{4}$$
$$x-2y-3z=5, \tag{5}$$
$$2x-y-2z=8. \tag{6}$$

Ищем решение системы (4)–(6). Исключив z из (4) и (5), получаем $4x+y=8$; исключив z из (4) и (6), получаем $4x+y=10$. Эти два уравнения несовместны. Значит, три плоскости не имеют общих точек. Так как среди них нет параллельных плоскостей, то три прямые, по которым плоскости попарно пересекаются, параллельны.

Пример 3. Исследовать, есть ли общие точки у плоскостей

$$x+y+z=1, \qquad x-2y-3z=5, \qquad 2x-y-2z=6.$$

Поступая, как в примере 2, получим оба раза $4x+y=8$, т. е. фактически не два, а одно уравнение. Оно имеет бесчисленное множество решений. Значит, три плоскости имеют бесчисленное множество общих точек, т. е. проходят через одну прямую.

Пример 4. Плоскости

$$x-y+2=0, \quad x+2y-1=0, \quad x+y-z+2=0$$

имеют одну общую точку $(-1; 1; 2)$, ибо система уравнений имеет единственное решение $x=-1$, $y=1$, $z=2$.

§ 135. Взаимное расположение плоскости и пары точек

Взаимное расположение точек $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

можно определить по следующим признакам (ср. § 27):

а) Точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от плоскости (1), когда числа $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ и $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ имеют одинаковые знаки.

б) M_1 и M_2 лежат по разные стороны от плоскости (1), когда эти числа имеют противоположные знаки.

в) Одна из точек M_1, M_2 (или обе) лежит на плоскости, если одно из этих чисел (или оба) равно нулю.

Пример 1. Точки (2; 3; 3) и (1; 2; −1) лежат по одну сторону от плоскости $6x+3y+2z-6=0$, ибо числа $6\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 3-6=21$ и $6\cdot 1+3\cdot 2+2(-1)-6=4$ оба положительны.

Пример 2. Начало координат (0; 0; 0) и точка (2; 1; 1) лежат по разные стороны от плоскости $5x+3y-2z-5=0$, так как числа $5\cdot 0+3\cdot 0-2\cdot 0-5=-5$ и $5\cdot 2+3\cdot 1-2\cdot 1-5=6$ имеют противоположные знаки.

§ 136. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние d от точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

равно (ср. § 28) абсолютному значению величины

$$\delta=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{2}$$

т. е.

$$d=|\delta|=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3}$$

Пример. Найти расстояние от точки (3; 9; 1) до плоскости $x-2y+2z-3=0$.

Решение.

$$\delta=\frac{x_1-2y_1+2z_1-3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1\cdot 3-2\cdot 9+2\cdot 1-3}{3}=-5\frac{1}{3},$$

$$d=|\delta|=5\frac{1}{3}.$$

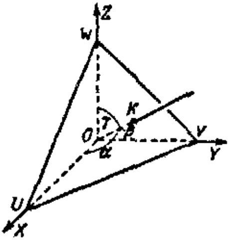
Замечание 1. По знаку величины δ можно судить о взаимном расположении точки M_1 и начала O относительно плоскости (1) (ср. § 28, замечание 1).

Замечание 2. Формулу (3) можно вывести аналитически, рассуждая, как в замечании 2 § 28. Уравнения прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к плоскости (1), удобно взять в параметрической форме (см. §§ 153, 156).

§ 137. Полярные параметры плоскости[1])

Полярным расстоянием плоскости UVW (черт. 167) называется длина p перпендикуляра OK, проведенного к плоскости из начала O. Полярное расстояние положительно или равно нулю.

Если плоскость UVW не проходит через начало, то на перпендикуляре OK за положительное направление принимается направление вектора $\overrightarrow{OK}$. Если же UVW проходит через начало, то положительное направление на перпендикуляре выбирается по произволу.



Черт. 167.

Полярными углами плоскости UVW называются углы

$$\alpha = \angle XOK, \quad \beta = \angle YOK, \quad \gamma = \angle ZOK$$

между положительным направлением прямой OK и осями координат (эти углы считаются положительными и не превосходящими 180°). Углы α, β, γ связаны (§ 101) соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Полярное расстояние p и полярные углы α, β, γ называются *полярными параметрами* плоскости UVW.

Если плоскость UVW дана уравнением $Ax+By+$ $+Cz+D=0$, то ее полярные параметры определяются формулами

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta &= \mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где верхние знаки берутся, когда $D>0$, и нижние, когда $D<0$. Если же $D=0$, то по произволу берутся только верхние или только нижние знаки.

---

[1]) Ср. § 29.

Пример 1. Найти полярные параметры плоскости $x-2y+2z-3=0$ $(A=1,\ B=-2,\ C=2,\ D=-3)$.

Решение. Формула (1) дает

$$p=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3}{3}=1.$$

Формулы (2), где нужно взять нижние знаки (ибо $D=-3<0$), дают:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\alpha\approx 70^\circ 32',\quad \beta\approx 131^\circ 49',\quad \gamma\approx 48^\circ 11'.$$

Пример 2. Найти полярные параметры плоскости

$$x-2y+2z=0.$$

Формула (1) дает $p=0$ (плоскость проходит через начало); в формулах (2) можно взять либо только верхние знаки, либо только нижние. В первом случае

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\quad \cos\beta=+\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3},$$

следовательно,

$$\alpha\approx 109^\circ 28',\quad \beta\approx 48^\circ 11',\quad \gamma\approx 131^\circ 49',$$

во втором случае

$$\alpha\approx 70^\circ 32',\quad \beta\approx 131^\circ 49',\quad \gamma\approx 48^\circ 11'.$$

§ 138. Нормальное уравнение плоскости

Плоскость с полярным расстоянием p (§ 137) и полярными углами α, β, γ $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$ § 101) представляется уравнением

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{1}$$

Оно называется *нормальным уравнением* плоскости.

Пример 1. Составить нормальное уравнение плоскости, у которой полярное расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а все полярные углы — тупые и равны между собой.

Решение. При $\alpha = \beta = \gamma$ условие $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ даст $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, а так как углы α, β, γ — тупые, то надо взять знак минус. Искомое уравнение есть $-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

Замечание. Та же плоскость представляется уравнением

$$x + y + z + 1 = 0$$

(обе части предыдущего уравнения помножены на $-\sqrt{3}$), но это уравнение — не нормальное, ибо коэффициенты при координатах не являются косинусами полярных углов (сумма их квадратов не равна 1) и к тому же свободный член положителен.

Пример 2. Уравнение $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 = 0$ — не нормальное, так как хотя $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$, но свободный член положителен.

Пример 3. Уравнение $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$ — нормальное; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$, $p = 5$ ($\alpha \approx 109°28'$, $\beta \approx 48°11'$, $\gamma \approx 131°49'$).

Вывод уравнения (1). Рассматриваемая плоскость (UVW на черт. 167) *проходит через точку K ($p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$) перпендикулярно* к вектору $\overrightarrow{OK}$. Вместо $\overrightarrow{OK}$ можно взять вектор $\mathbf{a}$ того же направления с длиной, равной единице масштаба. Координаты вектора $\mathbf{a}$ *суть* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (§ 101). *Применив уравнение* (1) § 101, получаем нормальное уравнение (1).

§ 139. Приведение уравнения плоскости к нормальному виду

Чтобы найти нормальное уравнение плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, достаточно разделить обе части данного уравнения на $\mp\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, причем верхний знак берется, когда $D > 0$, и нижний, *когда $D < 0$; если же $D = 0$, то можно взять любой знак.*

Получаем уравнение

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z-\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Оно нормально, ибо коэффициенты при x, y, z в силу (2) § 137 соответственно равны $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а свободный член в силу (1) § 137 равен $-p$.

Пример 1. Привести к нормальному виду уравнение

$$x-2y+2z-6=0. \tag{1}$$

Делим обе части уравнения на $+\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ (перед радикалом — плюс, так как свободный член -6 отрицателен). Получаем:

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0.$$

Следовательно, $p=2$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$ ($\alpha\approx70°32'$, $\beta\approx131°49'$, $\gamma\approx48°11'$).

Пример 2. Привести к нормальному виду уравнение

$$x-2y+2z+6=0. \tag{2}$$

Свободный член положителен. Поэтому делим на $-\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=-3$. Получаем:

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-2=0.$$

Следовательно, $p=2$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$ ($\alpha\approx109°28'$, $\beta\approx48°11'$, $\gamma\approx131°49'$).

Пример 3. Привести к нормальному виду уравнение

$$x-2y+2z=0.$$

Так как $D=0$ (*плоскость проходит через начало*), то можно разделить либо на $+3$, либо на -3. Получаем либо $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0$, либо $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0$. В обоих случаях $p=0$. Величины α, β, γ в первом случае — те же, что в примере 1, во втором — те же, что в примере 2.

Замечание. Если в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ свободный член отрицателен и $A^2+B^2+C^2=1$, то это уравнение нормальное (§ 138, пример 3) и преобразовывать его не надо.

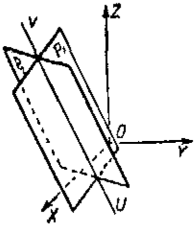
§ 140. Уравнения прямой в пространстве

Всякая прямая линия UV (черт. 168) представляется системой двух уравнений:

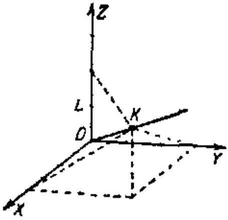
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{2}$$

представляющих (если их рассматривать *по отдельности*) какие-либо две (*различные*) плоскости P_1 и P_2, проходящие через UV. Уравнения (1) и (2) (взятые *в совокупности*) называются *уравнениями прямой* UV.



Черт. 168.



Черт. 169.

З а м е ч а н и е. Выражение «прямая UV представляется системой (1)—(2)» означает, что 1) координаты x, y, z всякой точки M прямой UV удовлетворяют обоим уравнениям (1) и (2); 2) координаты всякой точки, не лежащей на UV, не удовлетворяют сразу обоим уравнениям (1), (2), хотя могут удовлетворять одному из них.

П р и м е р 1. Написать уравнения прямой OK (черт. 169), проходящей через начало O и точку K (4; 3; 2).

Р е ш е н и е. Прямая OK есть пересечение плоскостей KOZ и KOX. Взяв на оси OZ какую-либо точку, например L (0; 0; 1), составляем уравнение плоскости KOZ (как проходящей через три точки O, K, L; § 129). Получаем:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad 3x - 4y = 0. \tag{3}$$

Таким же образом найдем уравнение

$$2y-3z=0 \tag{4}$$

плоскости KOX. Прямая OK представляется системой уравнений (3) – (4).

Действительно, всякая точка M прямой OK лежит и в плоскости KOZ и в плоскости KOX; значит, ее координаты удовлетворяют сразу обоим уравнениям (3) и (4). С другой стороны, точка N, не лежащая на OK, не может принадлежать сразу обеим плоскостям KOZ и KOX; значит, ее координаты не могут удовлетворять сразу обоим уравнениям (3) – (4).

Пример 2. Прямую OK примера 1 можно представить также системой уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y=0, & (3)\\ 2x-4z=0. & (5)\end{cases}$$

Первое из них представляет плоскость KOZ, второе — плоскость KOY.

Ту же прямую OK можно представить системой

$$2y-3z=0,\ 2x-4z=0.$$

Пример 3. Определить, лежат ли точки $M_1(2;\ 2;\ 3)$, $M_2(-4;\ -3;\ -3)$, $M_3(-8;\ -6;\ -4)$ на прямой OK, рассмотренной в примере 1.

Координаты точки M_1 не удовлетворяют ни уравнению (3), ни уравнению (4); точка M_1 не лежит на прямой UV. Координаты точки M_2 удовлетворяют (3), но не удовлетворяют (4); точка M_2 лежит в плоскости KOZ, но не лежит в плоскости KOX; значит, M_2 не лежит на OK. Точка M_3 лежит на OK, ибо удовлетворяются оба уравнения (3) и (4).

Пример 4. Уравнение $z=0$ представляет плоскость XOY. Уравнение $x+y-1=0$ представляет плоскость P, параллельную оси OZ (§ 124, пример). Прямая, по которой пересекаются плоскости XOY и P (KL на черт. 163), представляется системой

$$x+y-1=0,\ z=0.$$

§ 141. Условие, при котором два уравнения первой степени представляют прямую

Система

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2)\end{cases}$$

представляет прямую линию, если коэффициенты A_1, B_1, C_1

не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 [в этом случае плоскости (1) и (2) не параллельны (§ 125)].

Если коэффициенты A_1, B_1, C_1 пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, но свободные члены не подчинены той же пропорции

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 \neq D_2 : D_1,$$

то система несовместна и не представляет никакого геометрического образа [плоскости (1) и (2) параллельны и не совпадают].

Если все четыре величины A_1, B_1, C_1, D_1 пропорциональны величинам A_2, B_2, C_2, D_2:

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 = D_2 : D_1,$$

то одно из уравнений (1), (2) есть следствие другого и система представляет плоскость [плоскости (1) и (2) совпадают].

Пример 1. Система

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+36z-8=0$$

представляет прямую линию (во втором уравнении коэффициенты A и B вдвое больше, чем в первом, а коэффициент C — втрое).

Пример 2. Система

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+24z-8=0$$

представляет плоскость (все четыре величины A, B, C, D пропорциональны).

Пример 3. Система

$$2x-7y+12z-4=0, \quad 4x-14y+24z-12=0$$

не представляет никакого геометрического образа (величины A, B, C пропорциональны, а D не подчинена той же пропорции; система несовместна).

§ 142. Пересечение прямой с плоскостью

Прямая L

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2)\end{cases}$$

и плоскость P

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

могут не иметь ни одной общей точки (если $L \parallel P$), могут иметь бесчисленное множество общих точек (если L лежит на P) или иметь только одну общую точку. Вопрос сводится[1] к разысканию общих точек трех плоскостей (1), (2), (3) (см. § 134).

Пример 1. Прямая

$$x+y+z-1=0, \quad x-2y-3z-5=0$$

не имеет общих точек с плоскостью

$$2x-y-2z-8=0$$

(они параллельны) (см. пример 2 § 134).

Пример 2. Прямая

$$x-2y-3z-5=0, \quad 2x-y-2z=6$$

лежит в плоскости $x+y+z=1$ (см. пример 3 § 134).

Пример 3. Прямая $x+y-z+2=0$, $x-y+2=0$ пересекается с плоскостью $x+2y-1=0$ в точке $(-1;\ 1;\ 2)$ (см. пример 4 § 134).

Пример 4. Определить координаты какой-либо точки на прямой L:

$$\begin{cases} 2x-3y-z+3=0, \\ 5x-y+z-8=0. \end{cases}$$

Дадим координате x какое-либо значение, например $x=3$. Получим систему $-3y-z+9=0$, $-y+z+7=0$. Решив ее, найдем: $y=4$, $z=-3$. Точка $(3;\ 4;\ -3)$ лежит на прямой L (в пересечении ее с плоскостью $x=3$, параллельной YOZ). Таким же образом, взяв $x=0$, найдем точку $\left(0;\ -\frac{5}{4};\ \frac{27}{4}\right)$ в пересечении L с плоскостью YOZ и т. д. Можно также давать различные значения координате y или z.

Пример 5. Определить координаты какой-либо точки на прямой L:

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-4=0, \\ 8x-6y+4z-3=0. \end{cases}$$

В противоположность предыдущему примеру координате x здесь нельзя дать произвольного значения. Так, при

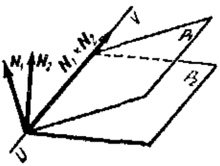
[1] Выкладки облегчаются, когда уравнения прямой взяты в параметрической форме (§ 152 и замечание в § 153).

$x=0$ получаем несовместную систему $-3y+2z-4=0$, $-6y+4z-3=0$. Прямая L параллельна плоскости ZOY. Координате y (или z) можно давать произвольные значения; например, положив $z=0$, получим точку $\left(\frac{5}{2};\ \frac{17}{6};\ 0\right)$. Для x будет получаться всегда одно и то же значение $x=\frac{5}{2}$, так что прямая L лежит в плоскости $x=\frac{5}{2}$, параллельной ZOY.

§ 143. Направляющий вектор

А. Всякий (ненулевой) вектор $\boldsymbol{a}\{l, m, n\}$, лежащий на прямой UV (или параллельный ей), называется *направляющим вектором* этой прямой. Координаты l, m, n направляющего вектора называются *направляющими коэффициентами* прямой.

Замечание. Помножив направляющие коэффициенты l, m, n на одно и то же число k (не равное нулю), получим числа lk, mk, nk, которые тоже будут направляющими коэффициентами (это координаты вектора $\boldsymbol{a}k$, коллинеарного с $\boldsymbol{a}$).



Черт. 170.

Б. За направляющий вектор прямой UV

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2)\end{cases}$$

можно принять векторное произведение $\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$, где $\boldsymbol{N}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{N}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ — нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2 (черт. 170), представляемых уравнениями (1) и (2). Действительно, прямая UV перпендикулярна к нормальным векторам $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$.

Пример. Найти направляющие коэффициенты прямой

$$2x-2y-z+8=0,\quad x+2y-2z+1=0.$$

Решение. Имеем $\boldsymbol{N}_1=\{2, -2, -1\}$, $\boldsymbol{N}_2=\{1, 2, -2\}$. Примем $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$ за направляющий вектор данной прямой. Находим:

$$\boldsymbol{a}=\left\{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{6, 3, 6\}.$$

Направляющие коэффициенты будут $l=6$, $m=3$, $n=6$.

Замечание. Помножив эти числа на $\frac{1}{3}$, найдем направляющие коэффициенты $l'=2$, $m'=1$, $n'=2$. За направляющие коэффициенты можно также принять числа -2; -1; -2 и т. д.

§ 144. Углы между прямой и осями координат

Углы α, β, γ, образуемые прямой L (в одном из двух ее направлений) с осями координат, находятся из соотношений

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

где l, m, n — направляющие коэффициенты прямой L.

Вытекает из § 101.

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* прямой L.

Пример. Найти углы, образуемые прямой

$$2x-2y-z+8=0, \qquad x+2y-2z+1=0$$

с осями координат.

Решение. За направляющие коэффициенты данной прямой (§ 143, пример) можно принять $l=2$, $m=1$, $n=2$. Значит, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$; отсюда $\alpha \approx 48°11'$, $\beta \approx 70°32'$, $\gamma \approx 48°11'$.

§ 145. Угол между двумя прямыми

Угол φ между прямыми L и L' (точнее, один из углов между ними) находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}, \tag{1}$$

где l, m, n и l', m', n' — направляющие коэффициенты прямых L и L', или по формуле

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \tag{2}$$

Вытекает из § 109.

Пример. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0. \end{cases}$$

Решение. Направляющие коэффициенты первой прямой (§ 143, пример) равны $l=2$, $m=1$, $n=2$. Если за направляющий вектор второй прямой принять векторное произведение $\{4, 1, 3\}\times\{2, 2, -3\}$, то направляющие коэффициенты ее равны -9, 18, 6. Помножив их (чтобы иметь дело с меньшими числами) на $\frac{1}{3}$ (§ 143, замечание), получим $l=-3$, $m=6$, $n=2$. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-3)+1\cdot 6+2\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}} = \frac{4}{21},$$

отсюда $\varphi \approx 79°01'$.

§ 146. Угол между прямой и плоскостью

Угол ψ между прямой L (с направляющими коэффициентами l, m, n) и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$\sin\psi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Вытекает из § 145 (если φ есть угол между прямой L и нормальным вектором $\{A, B, C\}$, то $\varphi = 90°\pm\psi$).

Пример. Найти угол между прямой

$$3x-2y=24, \qquad 3x-z=-4$$

и плоскостью $6x+15y-10z+31=0$. Имеем $l=2$, $m=3$, $n=6$ (§ 143). Находим:

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 2+15\cdot 3+(-10)\cdot 6|}{\sqrt{6^2+15^2+(-10)^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{3}{133},$$

откуда $\varphi \approx 1°18'$.

§ 147. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Условие параллельности прямой с направляющими коэффициентами l, m, n и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ есть

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (1)$$

Оно выражает перпендикулярность прямой и нормального вектора $\{A, B, C\}$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости (обозначения те же) есть

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}. \qquad (2)$$

Оно выражает параллельность прямой и нормального вектора.

§ 148. Пучок плоскостей [1]

Множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую UV, называется *пучком плоскостей*. Прямая UV называется *осью* пучка.

Если известны уравнения двух различных плоскостей P_1 и P_2

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad (2)$$

принадлежащих пучку (т. е. уравнения оси пучка; см. § 140), то каждую плоскость пучка можно представить уравнением вида

$$m_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$
$$+m_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (3)$$

Обратно, уравнение (3) при любых значениях m_1, m_2 (не равных нулю одновременно) представляет плоскость, принадлежащую пучку с осью UV [2]. В частности, при $m_1=0$ получаем плоскость P_2, а при $m_2=0$ — плоскость P_1. Уравнение (3) называется *уравнением пучка плоскостей* [3].

Когда $m_1 \neq 0$, мы можем разделить уравнение (3) на m_1. Обозначив $m_2 : m_1$ через λ, получим уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (4)$$

---

[1] Ср. § 24.

[2] См. ниже пояснение к примеру 1.

[3] Если плоскости (1) и (2) параллельны (но не совпадают), то уравнение (3) при всевозможных значениях m_1, m_2 представляет все плоскости, параллельные двум данным (*параллельный пучок плоскостей*).

Здесь всевозможные значения даются только одной букве λ; но из (4) нельзя получить уравнения плоскости P_2.

Пример 1. Пусть даны уравнения

$$5x-3y=0, \tag{5}$$
$$3z-4x=0 \tag{6}$$

двух плоскостей пучка, т. е. уравнения оси пучка. Уравнение пучка есть

$$m_1(5x-3y)+m_2(3z-4x)=0. \tag{7}$$

Например, взяв $m_1=2$, $m_2=-3$, будем иметь:

$$2(5x-3y)+(-3)(3z-4x)=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) или

$$22x-6y-9z=0 \tag{8a}$$

представляет одну из плоскостей пучка.

Пояснение. Возьмем на прямой UV какую угодно точку $M(x;\,y;\,z)$. Ее координаты x, y, z удовлетворяют уравнениям (5) и (6), а следовательно, и уравнению (8). Значит, плоскость (8) проходит через всякую точку M прямой UV, т. е. принадлежит пучку.

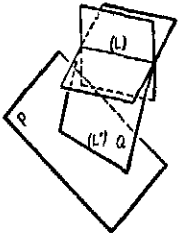
Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую UV примера 1 и через точку $(1;\,0;\,0)$.

Решение. Искомая плоскость представляется уравнением вида (7). Последнее должно удовлетворяться при $x=1$, $y=0$, $z=0$. Подставляя эти значения в (7), находим $5m_1-4m_2=0$, т. е. $m_1:m_2=4:5$. Получаем уравнение

$$4(5x-3y)+5(3z-4x)=0,$$

т. е.

$$5z-4y=0.$$



Черт. 171.

Пример 3. Найти уравнения проекции прямой L:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+4z+5&=0,\\ x-6y+3z-7&=0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

на плоскость P

$$2x+2y+z+15=0. \tag{10}$$

Решение. Искомая проекция L' (черт. 171) есть прямая, по которой плоскость P пересекается с плоскостью Q (проведенной через L перпендикулярно к P). Плоскость Q принадлежит пучку с осью L и представляется уравнением вида

$$(2x+3y+4z+5)+\lambda(x-6y+3z-7)=0, \tag{11}$$

Чтобы найти λ, представим (11) в виде

$$(2+\lambda)x+(3-6\lambda)y+(4+3\lambda)z+5-7\lambda=0 \qquad (11a)$$

и запишем условие перпендикулярности плоскостей (10) и (11a):

$$2(2+\lambda)+2(3-6\lambda)+1\cdot(4+3\lambda)=0.$$

Отсюда $\lambda=2$. Подставляя в (11a), получим уравнение плоскости Q. Искомая проекция представляется уравнениями

$$\begin{cases} 4x-9y+10z-9=0, \\ 2x+2y+z+15=0. \end{cases}$$

§ 149. Проекции прямой на координатные плоскости

Пусть прямая представляется уравнениями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & (2) \end{cases}$$

где C_1 и C_2 не равны нулю одновременно (случай $C_1=C_2=0$ рассмотрен ниже в примере 3). Чтобы найти проекцию прямой на плоскость XOY, достаточно исключить z из уравнений (1)—(2). Полученное уравнение (вместе с уравнением $z=0$) будет представлять искомую проекцию [1]. Аналогично находятся проекции на плоскости YOZ и ZOX.

Пример 1. Найти проекцию прямой L

$$\begin{cases} 2x+4y-3z-12=0, & (3) \\ x-2y+4z-10=0 & (4) \end{cases}$$

на плоскость XOY.

Решение. Чтобы исключить z, помножим первое из данных уравнений на 4, а второе — на 3 и сложим. Получим:

$$4(2x+4y-3z-12)+3(x-2y+4z-10)=0, \qquad (5)$$

т. е.

$$11x+10y-78=0. \qquad (6)$$

Это уравнение вместе с уравнением

$$z=0 \qquad (7)$$

представляет проекцию L' прямой L на плоскость XOY.

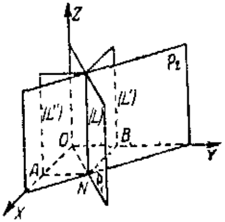
[1]) См. ниже пояснение к примеру 1.

Пояснение. Плоскость (5) проходит через прямую L (§ 148). С другой стороны, как видно из (6) (где не содержится z), эта плоскость (§ 124, п. 2) перпендикулярна к плоскости XOY. Значит, прямая, по которой плоскость (6) пересекается с плоскостью (7), есть проекция прямой L на плоскость (7) (ср. § 148, пример 3).

Пример 2. Проекция прямой L

$$\begin{cases} 3x-5y+4z-12=0, & (8) \\ 2x-5y-4=0 & (9) \end{cases}$$

на плоскость $z=0$ представляется (в плоской системе координат XOY) уравнением (9). Исключать координату z не требуется, так как в уравнении (9) она уже не содержится. Плоскость (9) перпендикулярна к плоскости XOY; она проектирует прямую L на XOY.



Черт. 172.

Пример 3. Найти проекции прямой L

$$\begin{cases} 2x-3y=0, & (10) \\ x+y-4=0 & (11) \end{cases}$$

на координатные плоскости.

Решение. В обоих уравнениях z отсутствует, так что обе плоскости P_1 и P_2 (черт. 172) перпендикулярны к плоскости XOY. Прямая L перпендикулярна к XOY и проектируется на плоскость XOY в точку N с координатой $z_N=0$. Из системы (10) – (11) находим $x_N=\frac{12}{5}$, $y_N=\frac{8}{5}$.

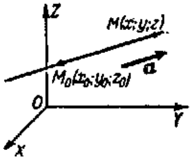
Уравнение проекции L' на плоскость YOZ можно найти по общему способу, исключая x из (10 и (11). Получим $y=\frac{8}{5}$, т. е. то же равенство, которое выше найдено для y_N (из чертежа видно, что прямая L' отстоит от OZ на расстояние OB, равное $y_N=AN$). Уравнение проекции L'' на плоскость XOZ есть $x=\frac{12}{5}$.

§ 150. Симметричные уравнения прямой

Прямая L, проходящая через точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющая направляющий вектор $\boldsymbol{a}\{l,\ m,\ n\}$ (§ 143), представляется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad (1)$$

выражающими коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}\{l,\ m,\ n\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$ (черт. 173). Они называются *симметричными* (или *каноническими*) уравнениями прямой.



Черт. 173.

Замечание 1. Так как за точку M_0 можно взять любую из точек прямой L, а направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ можно заменить направляющим вектором $k\boldsymbol{a}$ (§ 143), то каждой из величин x_0, y_0, z_0, l, m, n по отдельности можно дать произвольное значение.

Пример 1. Написать симметричные уравнения прямой, проходящей через точки $A(5;\ -3;\ 2)$ и $B(3;\ 1;\ -2)$. В качестве M_0 можно взять точку A, за вектор $\boldsymbol{a}$ можно принять $\overrightarrow{AB} = \{-2,\ 4,\ -4\}$. Симметричные уравнения будут:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{-4}. \tag{2}$$

Если же в качестве M_0 взять B, а за $\boldsymbol{a}$ принять вектор $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \{1,\ -2,\ 2\}$, то симметричные уравнения будут:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}. \tag{3}$$

Замечание 2. Из трех уравнений

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+3}{4},\quad \frac{x-5}{-2} = \frac{z-2}{-4},\quad \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{-4}, \tag{4}$$

содержащихся в (2), *только два* (какие угодно) независимы, а третье является их следствием; например, вычтя из первого уравнения второе, найдем третье. Каждое из уравнений (4) представляет плоскость, проходящую через прямую AB перпендикулярно к одной из координатных плоскостей; вместе с тем оно представляет проекцию прямой AB на соответствующую координатную плоскость (§ 149).

Пример 2. Симметричные уравнения прямой, проходящей через точки $M_0(5;\ 0;\ 1)$, $M_1(5;\ 6;\ 5)$, будут:

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-1}{4}. \tag{5}$$

Выражение $\frac{x-5}{0}$ условно; оно означает (§ 102, замечание), что $x-5=0$, так что вместо (5) надо написать систему

$$x=5,\quad \frac{y}{6} = \frac{z-1}{4}. \tag{6}$$

Прямая M_0M_1 перпендикулярна к оси OX (так как $l=0$).

Пример 3. Симметричные уравнения прямой, проходящей через точки $A(2;\ 4;\ 3)$ и $B(2;\ 4;\ 5)$, будут:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

Эта запись означает, что $x=2$ и $y=4$.

Величина z принимает различные (любые) значения для различных точек прямой AB. Прямая AB параллельна оси OZ (так как $l=m=0$).

§ 151. Приведение уравнений прямой к симметричному виду

Для того чтобы привести уравнения прямой

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (1)$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (2)$$

к симметричному виду (§ 150), надо определить координаты x_0, y_0, z_0 какой-либо точки, лежащей на прямой (примеры 4 и 5 § 142) и направляющие коэффициенты l, m, n (§ 143).

Пример 1. Привести уравнения прямой

$$2x-3y-z+3=0, \quad 5x-y+z-8=0$$

к симметричному виду.

Решение. Как в § 142 (пример 4), найдем на данной прямой точку $M_0(3;\ 4;\ -3)$, $x_0=3$, $y_0=4$, $z_0=-3$. Вычислив направляющие коэффициенты

$$l=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-4;\quad m=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-7,\quad n=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=13,$$

получаем симметричные уравнения

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{13}.$$

Пример 2. Привести к симметричному виду уравнения

$$x+2y-3z-2=0, \quad -3x+4y-6z+21=0.$$

Зададим координате y или z какое-либо значение (координате x произвольное значение задать нельзя; ср. § 142, пример 5); например, положим $y=0$. Получим точку

$M_0(5;\ 0;\ 1)$. Направляющие коэффициенты будут $l=0$, $m=15$, $n=10$ или $\left(\text{помножая на } \frac{1}{5}\right)$ $l=0$, $m=3$, $n=2$. Получаем симметричные уравнения

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$$

(ср. § 150, пример 2).

Пример 3. То же для прямой

$$x+y-6=0, \quad x-y+2=0. \tag{3}$$

Значения x_0 и y_0 вполне определяются уравнениями (3): $x_0=2$, $y_0=4$. Координате z_0 можно дать любое значение, например $z_0=3$. Далее находим направляющие коэффициенты $l=0$, $m=0$, $n=2$. Получаем симметричные уравнения (ср. § 150, пример 3):

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

§ 152. Параметрические уравнения прямой

Каждое из отношений $\frac{x-x_0}{l}$, $\frac{y-y_0}{m}$, $\frac{z-z_0}{n}$ (§ 150) равно частному (§ 90) от деления вектора

$$\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\quad y-y_0,\quad z-z_0\}$$

на (коллинеарный) вектор $\boldsymbol{a}\{l,\ m,\ n\}$. Обозначим это частное через t. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+lt,\\ y &= y_0+mt,\\ z &= z_0+nt. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*; когда величина t (*параметр*) принимает различные значения, точка $M(x;\ y;\ z)$ движется по прямой. При $t=0$ она совпадает с M_0; положительным и отрицательным значениям t отвечают точки, расположенные на прямой по разные стороны от M_0.

В векторной форме три уравнения (1) заменяются одним:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t. \tag{2}$$

§ 153. Пересечение плоскости с прямой, заданной параметрически

Общая точка (если таковая существует) плоскости P

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

и прямой L

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt \tag{2}$$

находится по формулам (2), если туда подставить значение t, определяемое из уравнения [1])

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

Последнее получается, если выражения (2) подставить в (1).

Пример 1. Найти точку пересечения плоскости

$$2x+3y+3z-8=0$$

с прямой

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}.$$

Решение. Параметрические уравнения прямой будут:

$$x=-5+3t, \quad y=3-t, \quad z=-3+2t. \tag{4}$$

Подставив в уравнение $2x+3y+3z-8=0$, получим $9t-18=0$, откуда $t=2$. Подставляя это значение в (4), получаем $x=1$, $y=1$, $z=1$. Искомая точка есть $(1; 1; 1)$.

Пример 2. Найти точку пересечения плоскости $3x+y-4z-7=0$ с прямой примера 1.

Решение. Таким же образом получаем $0\cdot t-7=0$; это уравнение не имеет решения. Точки пересечения нет (прямая параллельна плоскости).

Пример 3. Найти точку пересечения плоскости $3x+y-4z=0$ с прямой примера 1.

Решение. Таким же образом получаем $0\cdot t+0=0$; это уравнение имеет бесчисленное множество решений (прямая лежит в плоскости).

Замечание. Воспользовавшись параметрическими уравнениями (4), мы ввели четвертое неизвестное t и получили четыре уравнения (вместо данных трех). Это усложнение окупается большей легкостью решения системы.

---

[1]) Уравнение (3) в исключительных случаях может не иметь решения (*см. ниже пример 2*) *или иметь бесчисленное множество решений* (см, ниже пример 3).

§ 154. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Прямая, проходящая через точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, представляется уравнениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (1)$$

Примеры см. в § 150.

§ 155. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и перпендикулярная к прямой

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

имеет нормальный вектор $\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$ и, значит, представляется уравнением

$$l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0.$$

Пример. Плоскость, проходящая через точку $(-1;\ -5;\ 8)$ и перпендикулярная к прямой $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}$, представляется уравнением $2(y+5)+5(z-8)=0$, т. е.

$$2y+5z-30=0.$$

§ 156. Уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной плоскости

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и перпендикулярная к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, имеет направляющий вектор $\{A,\ B,\ C\}$ и, значит, представляется симметричными (§ 150) уравнениями

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \qquad (1)$$

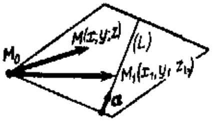
Пример. Прямая, проходящая через начало координат и перпендикулярная к плоскости $3x+5z-5=0$, представляется симметричными уравнениями $\frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{5}$ или параметрическими (§ 152) уравнениями $x=3t$, $y=0$, $z=5t$.

§ 157. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и данную прямую

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и через прямую L

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{1}$$

не проходящую через M_0, представляется уравнением



Черт. 174.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

или в векторной форме

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}=0. \tag{2a}$$

Уравнение (2) или (2а) выражает компланарность векторов (черт. 174) $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, и $\boldsymbol{a}\{l, m, n\}$.

Пример. Плоскость, проходящая через точку $M_0(5;\ 2;\ 3)$ и прямую

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{3},$$

представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$x-2y-1=0.$$

Замечание. Если прямая (1) проходит через точку M_0, то уравнение (2) становится тождеством и задача имеет бесчисленное множество решений (получаем пучок плоскостей с осью L; § 148).

§ 158. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум данным прямым

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и параллельная данным (непараллельным между собой) прямым L_1 и L_2 (или векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$), представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 — направляющие коэффициенты данных прямых (или координаты данных векторов). В векторной форме

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0. \qquad (1a)$$

Уравнение (1) или (1a) выражает компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ (M — произвольная точка искомой плоскости).

Замечание. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, т. е. $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны, то уравнение (1) становится тождеством, и задача имеет бесчисленное множество решений (получаем пучок плоскостей с осью, проходящей через точку M_0 параллельно данным прямым).

§ 159. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой

Пусть L_1 и L_2 — непараллельные прямые. Тогда плоскость, проходящая через прямую L_1 и параллельная прямой L_2 представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты какой-либо точки M_1 прямой L_1. Здесь имеем частный случай § 158 (роль точки M_0 играет M_1). Замечание к § 158 тоже остается в силе.

§ 160. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к данной плоскости

Плоскость P, проходящая через данную прямую L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

и перпендикулярная к данной плоскости Q

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

(не перпендикулярной к L_1), представляется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

В векторной форме

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{N}=0. \tag{3a}$$

Пояснение. Плоскость P проходит через прямую L_1 и параллельна нормали $\boldsymbol{N}\{A, B, C\}$ плоскости Q (ср. § 159).

Замечание. Если плоскость (2) перпендикулярна к прямой (1), то уравнение (3) становится тождеством и задача имеет бесчисленное множество решений (см. § 158, замечание).

Проекция прямой на любую плоскость. Плоскость (3) проектирует прямую L_1 на плоскость Q. Стало быть, прямая L', являющаяся проекцией прямой L_1 на плоскость Q, представляется системой уравнений (2)–(3) (ср. § 149).

§ 161. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую

Перпендикуляр, опущенный из точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на прямую L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

не проходящую через M_0), представляется уравнениями

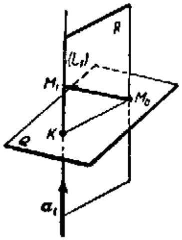
$$\left\{\begin{aligned} & l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0, && (2)\\ & \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0. && (3) \end{aligned}\right.$$

или в векторной форме уравнениями

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0, & (2а) \\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}_1 = 0. & (3а) \end{cases}$$

Взятое отдельно, уравнение (2) представляет плоскость Q (черт. 175), проведенную через M_0 перпендикулярно к L_1 (§ 155), а уравнение (3) — плоскость R, проведенную через точку M_0 и прямую L_1 (§ 157).

З а м е ч а н и е. Если прямая L_1 проходит через точку M_0, то уравнение (3) обращается (§ 120) в тождество (через точку, взятую на прямой L_1, можно провести бесчисленное множество перпендикуляров к L_1).



Черт. 175.

П р и м е р. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (1; 0; 1) на прямую

$$x = 3z+2, \quad y = 2z. \qquad (1а)$$

Найти также основание перпендикуляра.

Р е ш е н и е. Уравнения (1а) можно записать в симметричном виде (§ 151) так:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}. \qquad (1б)$$

Искомый перпендикуляр представляется уравнениями

$$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-0)+1(z-1) = 0, & (2б) \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2-1 & 0 & 0-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 & (3б) \end{cases}$$

или после упрощений

$$3x+2y+z-4 = 0, \qquad (2в)$$
$$x-2y+z-2 = 0. \qquad (3в)$$

Координаты основания K перпендикуляра найдем, решив систему трех уравнений (1б), (2в). Уравнение (3в) должно удовлетворяться само собой. Получаем $K\left(\frac{11}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

З а м е ч а н и е. Система трех уравнений (1б), (3в) имеет бесчисленное множество решений (ибо плоскость R проходит через прямую L_1, а не пересекает ее).

§ 162. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую

Даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая L_1, представленная уравнением (1) § 161. Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L_1, т. е. длину перпендикуляра M_0K (черт. 175), опущенного из точки M_0 на прямую L_1.

Можно сначала найти основание K перпендикуляра (§ 161, пример), затем длину отрезка M_0K. Проще применить формулу (при обозначениях § 161)

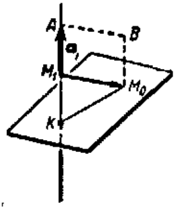
$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}, \tag{1}$$

т. е. в векторной форме

$$d = \frac{\sqrt{[(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1]^2}}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2}}. \tag{1a}$$

Числитель выражения (1a) есть (§ 111) площадь параллелограмма M_1M_0BA (черт. 176, где $M_1A = \mathbf{a}_1$), а знаменатель — длина основания M_1A. Следовательно, дробь равна высоте M_0K параллелограмма.

Пример. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(1; 0; 1)$ на прямую $x = 3z+2$, $y = 2z$.



Черт. 176.

Решение. В примере § 161 мы нашли

$$K\left(\frac{11}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{1}{7}\right).$$

Значит,

$$d = |M_0K| = \sqrt{\left(\frac{11}{7}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}-1\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Применим теперь формулу (1). Согласно (1б) § 161 имеем $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $l_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, так что

$$\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Получаем:

$$d = \frac{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

§ 163. Условие, при котором две прямые пересекаются или лежат в одной плоскости

Если прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \tag{1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \tag{2}$$

лежат в одной плоскости, то

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

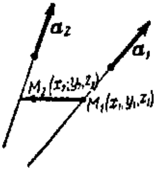
или в векторной форме

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0. \tag{3a}$$

Обратно, если выполняется условие (3), то прямые лежат в одной плоскости.

Пояснение. Если прямые (1) и (2) лежат в одной плоскости, то в последней лежит прямая M_1M_2 (черт. 177), т. е. векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ компланарны (и обратно). Это и выражает уравнение (3) (см. § 120).

Замечание. Если $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ [при этом (3) обязательно удовлетворяется], то прямые параллельны. В противном случае прямые, удовлетворяющие условию (3), пересекаются.



Черт. 177.

Пример. Определить, пересекаются ли прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \tag{1}$$

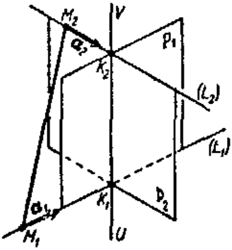
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}, \tag{2}$$

и если да, то в какой точке.

Решение. Прямые (1) и (2) лежат в одной плоскости, так как определитель (3), равный $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, обращается в нуль. Эти прямые не параллельны (направляющие коэффициенты не пропорциональны). Чтобы найти точку пересечения, надо решить систему четырех уравнений (1), (2) с тремя неизвестными. Как правило, подобная система не имеет решений, но в данном случае [вследствие выполнения условия (3)] решение есть. Решив систему каких-либо трех уравнений, получим $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Четвертое уравнение удовлетворяется. Точка пересечения есть (1; 2; 3).

§ 164. Уравнения общего перпендикуляра к двум данным прямым

Прямая UV, пересекающая две непараллельные прямые (L_1 и L_2 на черт. 178)



Черт. 178.

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

и перпендикулярная к ним, представляется (в векторной форме) уравнениями

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a} = 0, \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\,\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a} = 0, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$.

Взятое в отдельности, уравнение (1) *представляет плоскость* P_1, проведенную через прямую L_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ (§ 159). Аналогично (2) представляет плоскость P_2, проведенную через L_2 параллельно $\boldsymbol{a}$.

Точка K_1, где UV пересекает L_1, найдется в пересечении L_1 с плоскостью P_2. Аналогично найдется точка K_2, после чего можно найти длину общего перпендикуляра K_1K_2.

З а м е ч а н и е. В случае параллельности L_1 и L_2 (тогда $\boldsymbol{a} = 0$ и уравнения (1), (2) становятся тождествами) имеется бесчисленное множество прямых UV. Чтобы получить уравнение одной из них, берем на L_1 (черт. 179) произвольную точку K_1 и составляем уравнение прямой, проходящей через K_1 по направлению вектора $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$.

Пример 1. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$x = 2+2t, \qquad y = 1+4t, \quad z = -1-t, \tag{3}$$

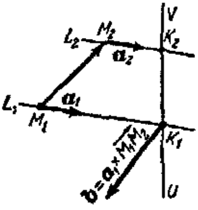
$$x = -31+3t', \quad y = 6+2t', \quad z = 3+6t'. \tag{4}$$

Решение. Имеем $\boldsymbol{a}_1 = \{2, 4, -1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{3, 2, 6\}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \{26, -15, -8\}$.

Искомый перпендикуляр представляется уравнениями

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+31 & y-6 & z-3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0,$$



Черт. 179.

или после упрощений

$$\begin{cases} 47x+10y+134z+30 = 0, & (5) \\ 74x+180y-97z+1505 = 0. & (6) \end{cases}$$

Точку K_1 пересечения общего перпендикуляра с прямой (3) найдем из системы (3)–(6). Получим $K_1(-2;\ -7;\ 1)$. Аналогично получим $K_2(-28;\ 8;\ 9)$. Длина d общего перпендикуляра равна

$$d = \sqrt{(-2+28)^2+(-7-8)^2+(1-9)^2} = \sqrt{965}.$$

Пример 2. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$x = 2+2t, \ y = 3+2t, \quad z = t, \tag{7}$$

$$x = 5+2t', \ y = 4+2t', \ z = 1+t'. \tag{8}$$

Прямые параллельны: $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \{3, 1, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \{1, 1, -4\}$. Направляющий вектор общего перпендикуляра $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b} = \{-9, 9, 0\}$ или, помножая на $\frac{1}{9}$, $\{-1, 1, 0\}$. За начальную точку примем произвольную точку $K_1(2+2t;\ 3+2t;\ t)$ прямой (7). Получим уравнение общего перпендикуляра

$$\frac{x-(2+2t)}{-1} = \frac{y-(3+2t)}{1}, \ z = t, \tag{9}$$

где t — произвольное число. Чтобы найти точку K_2 пересечения общего перпендикуляра (9) с прямой (8), надо подставить выражения (8) в уравнение (9). Получим:

$$\frac{3+2(t'-t)}{-1}=\frac{1+2(t'-t)}{1}=\frac{1+(t'-t)}{0}.$$

Любое из содержащихся здесь уравнений дает $t'=t-1$; подставляя в (8), находим $K_2(3+2t;\ 2+2t;\ t)$, так что

$$d=|K_1K_2|=$$
$$=\sqrt{[(3+2t)-(2+2t)]^2+[(2+2t)-(3+2t)]^2+[t-t]^2}=\sqrt{2}.$$

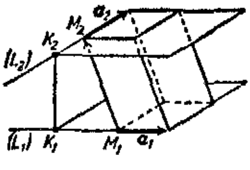
§ 165. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Кратчайшее расстояние между прямыми L_1 и L_2 есть длина d их общего перпендикуляра. Ее можно найти, составив уравнения общего перпендикуляра (§ 164, примеры 1 и 2). Но проще найти d непосредственно.

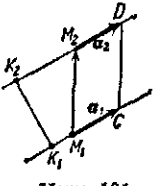
1) Если прямые L_1 и L_2 не параллельны (черт. 180), то

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|}=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{\sqrt{(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)^2}} \qquad (1)$$

($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы точек M_1, M_2; $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ — направляющие векторы прямых L_1, L_2).



Черт. 180.



Черт. 181.

Числитель дроби (1) есть (§ 121) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. Знаменатель — площадь его основания (§ 111). Следовательно, вся дробь есть высота $K_1K_2=d$.

Для пересекающихся прямых (векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ компланарны) формула (1) дает $d=0$. Для параллельных прямых (векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны) она непригодна $\left(\text{дает } \frac{0}{0}\right)$.

2) Если прямые L_1, L_2 параллельны (черт. 181), то

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a}_1|}{|\boldsymbol{a}_1|}=\frac{\sqrt{[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{a}_1]^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a}_1^2}} \qquad (2)$$

(вместо $\boldsymbol{a}_1$ можно взять $\boldsymbol{a}_2$).

Числитель дроби (2) есть площадь параллелограмма M_1M_2DC, знаменатель — длина основания M_1C. Вся дробь есть высота $K_1K_2=d$.

Пример 1. Найти кратчайшее расстояние между прямыми примера 1 § 164 [$\boldsymbol{r}_1=\{2, 1, -1\}$, $\boldsymbol{r}_2=\{-31, 6, 3\}$, $\boldsymbol{a}_1=\{2, 4, -1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{3, 2, 6\}$].

Решение. Данные прямые не параллельны. Имеем:

$$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\left\{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\}=$$
$$=\{26, -15, -8\},$$
$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2=-33\cdot 26+5\cdot(-15)+4\cdot(-8)=-965.$$

Формула (1) дает:

$$d=\frac{965}{\sqrt{26^2+(-15)^2+(-8)^2}}=\frac{965}{\sqrt{965}}=\sqrt{965}.$$

Пример 2. Найти кратчайшее расстояние между прямыми примера 2 § 164 [$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=$ $=\{3, 1, 1\}$].

Решение. Прямые параллельны; формула (2) дает:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\sqrt{2}.$$

Замечание. Кратчайшему расстоянию между прямыми (если они не перпендикулярны и не параллельны) можно приписать знак (см. § 165а).

§ 165а. Правые и левые пары прямых

Определение. Пара скрещивающихся неперпендикулярных прямых L_1, L_2 (черт. 180) называется *правой*, если для наблюдателя, помещающегося на продолжении какой-либо секущей K_1K_2 за прямую L_2, кратчайший поворот прямой L_1 в положение, параллельное L_2, совершается против часовой стрелки. В противном случае пара L_1, L_2 называется *левой*.

Замечание 1. Правая пара остается правой, а левая — левой вне зависимости не только от выбора точек K_1, K_2 на прямых L_1, L_2, но также и от обозначения этих прямых (первую можно назвать L_2, а вторую L_1). Действительно, хотя при этом вращение будет происходить в обратном направлении, но наблюдатель поместится теперь на продолжении секущей за прямую L_1, так что для него направление вращения остается прежним.

Замечание 2. Для прямых L_1, L_2, лежащих в одной плоскости, а также для перпендикулярных прямых понятия правой и левой пары теряют смысл.

Пример. Если при ввинчивании или вывинчивании штопора его ручка поворачивается на угол 60°, то начальное и конечное положения оси ручки образуют правую пару прямых (если за прямую L_1 принять ось ручки в ее верхнем положении, то наблюдатель, о котором говорится в определении, должен смотреть снизу; в противном случае — сверху). При повороте ручки штопора на угол 120° начальное и конечное положения ее оси образуют левую пару.

Признак правизны и левизны. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ — какие-либо (ненулевые) векторы, коллинеарные с прямыми L_1, L_2. Если смешанное произведение $\overrightarrow{K_1K_2}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ имеет тот же знак, что и скалярное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$, то пара L_1, L_2 — правая; если знаки противоположны, то — левая.

Когда $\overrightarrow{K_1K_2}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$, прямые L_1, L_2 лежат в одной плоскости; когда $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$, прямые L_1, L_2 перпендикулярны. В обоих этих случаях пара L_1, L_2 не является ни правой, ни левой (см. замечание 2).

Знак кратчайшего расстояния между двумя прямыми. Кратчайшему расстоянию между скрещивающимися неперпендикулярными прямыми можно приписать знак, считая это расстояние положительным, если пара — правая, и отрицательным, если она — левая.

Обозначая буквой δ кратчайшее расстояние между прямыми с учетом его знака, имеем вместо (1) § 165 следующую формулу:

$$\delta = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|} \cdot \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}. \tag{1}$$

Она пригодна также для пересекающихся (но не перпендикулярных) прямых и дает в этом случае $\delta = 0$. Для перпендикулярных прямых формула (1) непригодна, так как первый сомножитель $\frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}$ становится неопределенным, принимая вид $\frac{0}{0}$ (если прямые не перпендикулярны, то первый сомножитель равен либо $+1$, либо -1). Для параллельных прямых формула (1) также непригодна, так как второй сомножитель становится неопределенным. См. замечание 2.

§ 166. Преобразование координат

1. Перенос начала координат. При замене системы координат $OXYZ$ новой системой $O'X'Y'Z'$ с равнонаправленными осями старые координаты $(x; y; z)$ *точки* выражаются через новые $(x'; y'; z')$ формулами

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z', \tag{1}$$

где a, b, c — координаты нового начала O' в старой системе (ср. § 35).

Координаты всякого *вектора* при этой замене остаются неизменными.

2. Поворот осей. При замене системы $OXYZ$ новой системой $O'X'Y'Z'$ с тем же началом старые координаты точки выражаются через новые формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{i}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{i}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{i}}),\\ y &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{j}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{j}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{j}}),\\ z &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{k}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{k}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}',\mathbf{k}}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{i}})$ есть угол между векторами $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{i}$, т. е. между новой и старой осью абсцисс, $(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{i}})$ — угол между новой осью ординат и старой осью абсцисс и т. д.)[1].

Координаты всякого вектора при этой замене преобразуются по тем же формулам.

Замечание. Из девяти величин $\cos(\widehat{\mathbf{i}',\mathbf{i}})$, $\cos(\widehat{\mathbf{j}',\mathbf{j}})$ и т. д. любые три можно задать произвольно, остальные шесть удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{k}'}) &= 1,\\ \cos^2(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{k}'}) &= 1,\\ \cos^2(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'}) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{k}'}) &= 0,\\ \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'}) &= 0,\\ \cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{j},\mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'}) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Соотношения (3) вытекают из (4) § 101, соотношения (4) — из (2) § 145.

---

[1]) Каждый из коэффициентов при новых координатах есть косинус угла между соответствующей новой осью и той старой осью, которой отвечает координата, записанная в левой части.

§ 167. Уравнение поверхности

Уравнение, связывающее координаты x, y, z, называется *уравнением поверхности* S, если соблюдены следующие два условия: 1) координаты x, y, z всякой точки поверхности S удовлетворяют этому уравнению, 2) координаты x, y, z всякой точки, не лежащей на поверхности S, не удовлетворяют этому уравнению (ср. § 7).

Замечание. Если изменить систему координат, изменится и уравнение поверхности (*новое уравнение получится из старого с помощью формул преобразования координат, § 166*).

Пример 1. Уравнение $x+y+z-1=0$ есть уравнение плоской поверхности. Ту же поверхность при надлежащем выборе прямоугольной системы координат можно представить любым другим уравнением первой степени.

Пример 2. Поверхность шара (сфера) радиуса R с центром в начале координат представляется уравнением

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \tag{1}$$

ибо 1) если точка $M(x, y, z)$ лежит на этой поверхности, то расстояние $OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ равно радиусу R, стало быть, уравнение (1) удовлетворяется; 2) если M не лежит на поверхности, то $OM \neq R$, и уравнение (1) не удовлетворяется.

Пример 3. Сфера радиуса R с центром в точке $C(a; b; c)$ представляется уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{2}$$

Уравнение, связывающее координаты x, y, z, может представлять не поверхность, а другие геометрические образы, или не представлять никакого геометрического образа (ср. § 58).

Пример 4. Уравнение $x^2+y^2+z^2+1=0$ не представляет никакого геометрического образа, ибо оно не имеет (действительных) решений.

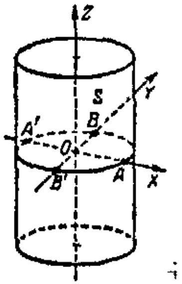
Пример 5. Уравнение $x^2+y^2+z^2=0$, имеющее единственное действительное решение $x=0$, $y=0$, $z=0$, представляет одну точку.

Пример 6. Уравнение $(x-y)^2+(z-y)^2=0$ удовлетворяется лишь тогда, когда одновременно $x-y=0$ и $z-y=0$; оно представляет прямую линию $x=y=z$.

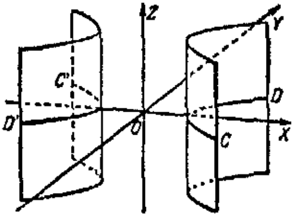
§ 168. Цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из осей координат

Поверхность, порождаемая движением прямой линии (образующей), параллельной неподвижной прямой, называется *цилиндрической*. Всякая линия, которую образующая пересекает в любом своем положении, называется *направляющей*.

Всякое уравнение, не содержащее координаты z и представляющее на плоскости XOY некоторую линию L, представляет в пространстве цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси OZ, а направляющей служит линия L.



Черт. 182.



Черт. 183.

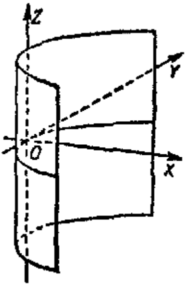
Пример 1. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

представляет на плоскости XOY эллипс $ABA'B'$ (черт. 182) с полуосями $a=OA$, $b=OB$. В пространстве оно представляет цилиндрическую поверхность S, у которой образующие параллельны оси OZ, а направляющей служит эллипс $ABA'B'$ (*эллиптический цилиндр*).

Пример 2. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ представляет цилиндрическую поверхность (черт. 183), у которой образующие параллельны оси OZ, а направляющей служит гипербола $CDC'D'$ (*гиперболический цилиндр*).

Пример 3. Уравнение $y^2=2px$ представляет *параболический цилиндр* (черт. 184).

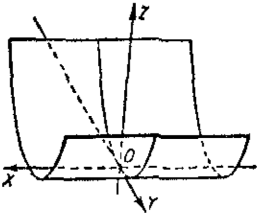


Черт. 184.

Уравнение, не содержащее координаты x (или y), представляет цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси OX (или OY).

Пример 4. Уравнение $y^2=2pz$ представляет параболический цилиндр, расположенный, как показано на черт. 185.

Замечание. Если направляющая — прямая линия, то цилиндрическая поверхность — плоская. В соответствии с этим уравнение $Ax+By+D=0$ представляет в пространстве плоскость, параллельную оси OZ (ср. § 124, замечание).



Черт. 185.

§ 169. Уравнения линии

Линию можно рассматривать как пересечение двух поверхностей и соответственно с этим представлять системой двух уравнений.

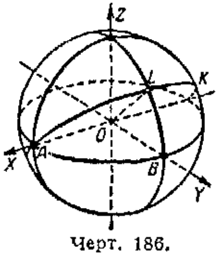
Два (взятых вместе) уравнения, связывающие координаты x, y, z, называются *уравнениями линии* L, если соблюдены следующие два условия: 1) координаты всякой точки M линии L удовлетворяют обоим уравнениям; 2) координаты всякой точки, не лежащей на линии L, не удовлетворяют обоим уравнениям сразу (хотя могут удовлетворить одному из них; ср. § 140).

Пример 1. Два уравнения $y-z=0$, $x-z=0$ представляют прямую линию как пересечение двух плоскостей (ср. пример 1 § 140).

Пример 2. Два уравнения

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad y=z$$

представляют в отдельности: первое — сферу радиуса a (черт. 186) с центром в точке O, второе — плоскость LOX (прямая OL делит пополам угол YOZ). Взятые вместе, эти уравнения представляют окружность большого круга ALK.



Черт. 186.

Замечание 1. Одна и та же линия может представляться различными (равносильными друг другу) системами уравнений, ибо ее можно получить как пересечение различных пар поверхностей.

Замечание 2. Система двух уравнений может представлять не только линию, но и другие геометрические образы; она может также не представлять никакого геометрического образа.

Пример 3. Система уравнений $x^2+y^2+z^2=25$, $z=5$ представляет точку (0; 0; 5), в которой плоскость $z=5$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=25$.

Пример 4. Система уравнений $x^2+y^2+z^2=0$, $x+y+z=1$ не представляет никакого геометрического образа, ибо первому уравнению удовлетворяют только значения $x=0$, $y=0$, а они не удовлетворяют второму уравнению.

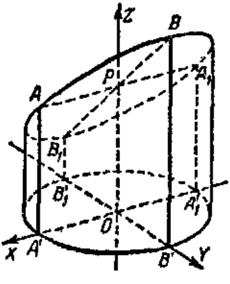
§ 170. Проекция линии на координатную плоскость

1. Пусть линия L представляется двумя уравнениями, из которых одно содержит z, а другое не содержит [1]. Тогда второе представляет «вертикальную» цилиндрическую поверхность, а на плоскости XOY — направляющую L_1 этой поверхности (§ 168); проекция линии L на плоскость XOY лежит на линии L_1 (покрывая ее всю или частично).

Пример 1. Уравнения

$$z=y+\frac{3}{2}, \quad x^2+y^2=1$$

представляют (черт. 187) линию ABA_1B_1 (эллипс), по которой пересекаются плоскость $z=y+\frac{3}{2}$ (плоскость P на



Черт. 187.

черт. 187) и круглая цилиндрическая поверхность $x^2+y^2=1$. На плоскости XOY уравнение $x^2+y^2=1$ представляет окружность $A'B'A'_1B'_1$. Проекция линии ABA_1B_1 совпадает с линией $A'B'A'_1B'_1$.

---

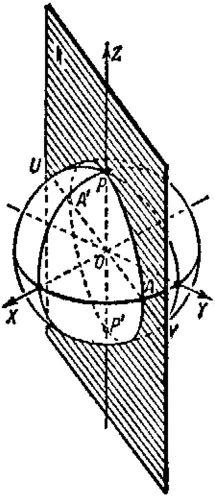
[1]) Если оба уравнения не содержат z, то линия L — вертикальная прямая (или несколько таких прямых); она проектируется на XOY точкой (ср. § 149, пример 3).

Пример 2. Уравнения

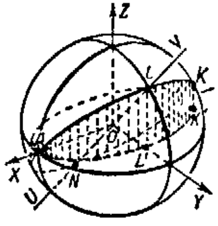
$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad y=mx$$

представляют (черт. 188) большой круг («меридиан») $APA'P'$ сферы O как пересечение этой сферы с плоскостью $y=mx$ (плоскость R на черт. 188). Уравнение $y=mx$ представляет на плоскости XOY прямую UV. Проекция меридиана $APA'P'$ на плоскость XOY лежит на прямой UV, но покрывает лишь ее часть, именно отрезок AA'.

2. Пусть оба уравнения, представляющие линию L, содержат z; тогда для разыскания проекции линии L на плоскость XOY надо исключить z из данных уравнений [1]). Уравнение, полученное в результате исключения, представляет на плоскости XOY линию L', на которой лежит искомая проекция (покрывая ее всю или частично). Аналогично находятся проекции линии на плоскости XOZ и YOZ.



Черт. 188.



Черт. 189.

Вытекает из п. 1.

Пример 3. Рассмотрим окружность (ALK на черт. 189), представляемую (ср. § 169, пример 2) уравнениями

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \tag{1}$$

$$y=z. \tag{2}$$

---

[1]) Исключить z из двух уравнений — значит найти третье уравнение, не содержащее z и удовлетворяющееся при всех тех значениях x, y, которые удовлетворяют системе двух данных уравнений.

Для разыскания ее проекции на плоскость XOY исключим z из (1) и (2). Получим уравнение

$$x^2+2y^2=a^2. \tag{3}$$

Оно представляет на плоскости XOY эллипс $AL'K'$ с полуосями $OA=a$, $OL'=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Проекция окружности ALK покрывает эллипс $AL'K'$ целиком.

Для разыскания проекции окружности ALK на плоскость XOZ надо из (1) и (2) исключить y. Получим уравнение

$$x^2+2z^2=a^2, \tag{4}$$

представляющее на плоскости XOZ эллипс тех же размеров, что $AL'K'$. Проекция окружности покрывает этот эллипс целиком.

Для разыскания проекции окружности ALK на плоскость YOZ нет нужды выполнять исключение x, ибо одно из данных уравнений ($y=z$) и без того не содержит x. Уравнение $y=z$ представляет на плоскости YOZ всю прямую UV, но искомая проекция покрывает лишь ее отрезок (NL).

§ 171. Алгебраические поверхности и их порядок

Алгебраическим уравнением второй степени (с тремя неизвестными x, y, z) называется всякое уравнение вида

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+$$
$$+Kz+L=0,$$

где по крайней мере одна из шести величин A, B, C, D, E, F не равна нулю. Аналогично определяется алгебраическое уравнение любой степени (ср. § 37).

Если некоторая поверхность S представляется в какой-либо прямоугольной системе координат уравнением n-й степени, то и во всякой другой прямоугольной системе она представится уравнением той же степени (ср. § 37).

Поверхность, представляемая уравнением n-й степени, называется *алгебраической поверхностью* n-го порядка. Всякая поверхность первого порядка есть плоскость. Поверхности второго порядка рассмотрены в нижеследующих параграфах.

§ 172. Сфера

Уравнение второй степени

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (1)$$

представляет (§ 167, пример 2) сферу радиуса R с центром в начале координат. Если начало не совпадает с центром сферы, то последняя представится тоже уравнением второй степени, именно

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \qquad (2)$$

где a, b, c — координаты центра сферы (ср. § 38).

Уравнение второй степени

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+ \\ +Hy+Kz+L=0 \qquad (3)$$

представляет сферу только при условиях

$$A=B=C, \qquad (4)$$

$$D=0,\ E=0,\ F=0, \qquad (5)$$

$$G^2+H^2+K^2-4AL>0 \qquad (6)$$

(ср. § 39). При этих условиях имеем:

$$a=-\frac{G}{2A},\ b=-\frac{H}{2A},\ c=-\frac{K}{2A},\ R^2=\frac{G^2+H^2+K^2-4AL}{4A^2}. \qquad (7)$$

Пример. Уравнение

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$$

$$(A=B=C=1,\ D=E=F=0,\ G=-2,\ H=-4, \\ K=0,\ L=-4)$$

представляет сферу. Дополнив выражения x^2-2x и y^2-4y до полных квадратов и прибавив для компенсации числа 1^2, 2^2 к правой части, получим уравнение

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9,$$

т. е. $a=1,\ b=2,\ c=0,\ R=3$.

То же найдем по формулам (7).

§ 173. Эллипсоид

Поверхность, представляемая уравнением [1])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

[1]) Здесь и в дальнейшем буквами a, b, c обозначены длины некоторых отрезков, так что числа a, b, c положительны.

называется *эллипсоидом* [1]) (черт. 190). Линия пересечения $ABA'B'$ эллипсоида (1) с плоскостью XOY представляется (§ 169) системой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad z=0.$$

Она равносильна системе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=0,$$

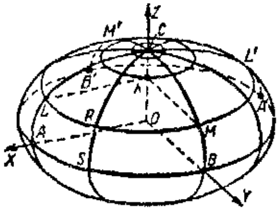
так что $ABA'B'$ есть эллипс с полуосями $OA=a$, $OB=b$.

Сечения эллипсоида (1) плоскостями YOZ, XOZ суть эллипсы $M'CMB$ с полуосями [2]) $OB=b$, $OC=c$ и $L'CLA$ с полуосями $OA=a$, $OC=c$.

Сечение эллипсоида плоскостью $z=h$ ($LML'M'$ на черт. 190) представляется системой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \qquad (2)$$

$$z=h. \qquad (3)$$



Черт. 190.

Однако если $|h|>c$, то уравнение (2) не представляет никакого геометрического места («мнимый эллиптический цилиндр»; ср. § 58, пример 5). В этом случае плоскость не пересекает эллипсоида. При $|h|=c$ уравнение (2) представляет ось OZ ($x=0$, $y=0$; ср. § 58, пример 4). Значит, плоскость $z=c$ имеет с эллипсоидом одну общую точку $C\,(0;\,0;\,c)$ (точка касания); таким же образом плоскость $z=-c$ касается эллипсоида в точке $C'\,(0;\,0;\,-c)$ (на чертеже не показана).

[1]) Греческое слово «эллипсоид» означает «эллипсовидный». Оно мало подходит для называния поверхности, но очень укоренилось. Древнегреческие геометры именовали эллипсоиды вращения (других они не рассматривали) *сфероидами* (т. е. «сферовидными»). Это наименование употребляется и ныне.

[2]) Прежде (§ 41) буквой c обозначалась половина фокусного расстояния [$c=\sqrt{a^2-b^2}$, так что $c<a$]. Здесь c имеет иной смысл и может иметь любое значение.

Если же $|h| < c$, то искомое сечение есть эллипс с полуосями

$$KL = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad KM = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \tag{4}$$

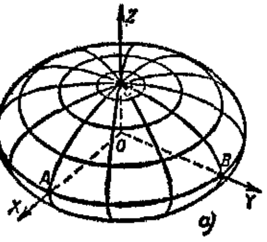
пропорциональными a и b.

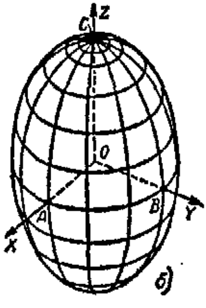
По мере удаления от плоскости XOY размеры сечений уменьшаются (причем все они подобны).

Та же картина для сечений, параллельных плоскостям YOZ, ZOX.

Точка O есть центр симметрии эллипсоида (1). Плоскости XOY, YOZ, XOZ — плоскости симметрии, оси OX, OY, OZ — оси симметрии [1].

Трехосный эллипсоид. Если все три величины a, b, c различны (т. е. ни один из эллипсов $A'CA$, $B'CB$, ABA' не обращается в окружность), то эллипсоид (1) называется *трехосным*. Эллипсы $A'CA$, $B'CB$, $A'BA$ называются *главными*; их вершины [$A(a;\ 0;\ 0)$, $A'(-a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $B'(0;\ -b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$, $C'(0;\ 0;\ -c)$] называются *вершинами* трехосного эллипсоида. Отрезки AA', BB', CC' (оси главных эллипсов), а также их длины называются *осями эллипсоида*. Если $a > b > c$, то $2a$ — *большая* ось, $2b$ — *средняя* и $2c$ — *малая*.





Черт. 191.

Эллипсоид вращения. Если какие-либо две из величин a, b, c, например a и b, равны между собой, то соответствующий главный эллипс $A'BA$ и все параллельные ему сечения обращаются в окружности. Любое сечение CRS, проходящее через ось OZ, можно получить поворо-

[1]) О центре симметрии и плоскости симметрии см. «Справочник по элементарной математике», IV, В, § 16.

том эллипса CLA около оси OZ, т. е. эллипсоид есть поверхность вращения (эллипсы CLA, CRS, CMB и т. д. — *меридианы*, окружность $A'BA$ — *экватор*). Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

Если $a>c$, то эллипсоид вращения называется *сжатым* (черт. 191, *а*), если $a<c$, то *вытянутым* (черт. 191, *б*). У эллипсоида вращения положение двух его осей неопределенно.

Если $a=b=c$, эллипсоид обращается в сферу, и положение всех трех осей становится неопределенным.

Замечание 1. Эллипсоид вращения можно определить как поверхность, получаемую равномерным сжатием сферы к ее экватору (ср. § 40). Сжатый эллипсоид вращения получается, когда коэффициент сжатия $k<1$, вытянутый — когда $k>1$.

Трехосный эллипсоид можно определить как поверхность, получаемую равномерным сжатием эллипсоида вращения к его меридиану.

Замечание 2. Эллипсоид представляется уравнением (1), если оси координат совпадают с осями эллипсоида. В других случаях эллипсоид представляется иными уравнениями.

Пример 1. Определить, какую поверхность представляет уравнение

$$16x^2+3y^2+16z^2-48=0.$$

Решение. Данное уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{3}=1.$$

Оно представляет вытянутый эллипсоид вращения с полуосями $a=c=\sqrt{3}$, $b=4$. Осью вращения служит Oy.

Пример 2. Определить, какую поверхность представляет уравнение $x^2-6x+4y^2+9z^2+36z-99=0$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду

$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=144.$$

Перенесем начало координат в точку (3; 0; −2); тогда (§ 166) получим уравнение $x'^2+4y'^2+9z'^2=144$ или

$$\frac{x'^2}{144}+\frac{y'^2}{36}+\frac{z'^2}{16}=1.$$

Данное уравнение представляет трехосный эллипсоид с полуосями $a=12$, $b=6$, $c=4$; центр его лежит в точке (3; 0; −2), оси параллельны осям координат.

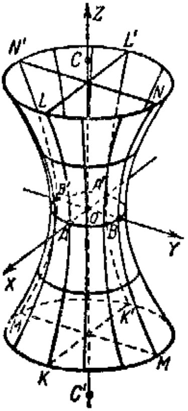
§ 174. Однополостный гиперболоид

Поверхность, представляемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

называется *однополостным гиперболоидом* (черт. 192).

Наименование «гиперболоид» [1]) происходит от того, что среди сечений этой поверхности есть гиперболы. Таковы, в частности, сечения плоскостями $x=0$ ($MNN'M'$ на черт. 192) и $y=0$ ($KLL'K'$). Эти сечения представляются (в своих плоскостях) уравнениями



Черт. 192.

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Название «однополостный» подчеркивает, что поверхность (1) в противоположность поверхности *двуполостного гиперболоида* (см. § 175) не разорвана на две «полости», а представляет сплошную бесконечную трубку, вытянутую вдоль оси OZ.

Плоскость

$$z=h \tag{4}$$

при любом значении h (ср. § 173) дает в сечении с поверхностью (1) эллипс [2])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \tag{5}$$

с полуосями $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Все эллипсы (5) подобны, вершины их лежат на гиперболах (2) и (3); размеры эллипсов увеличиваются по мере удаления сечения от плоскости XOY. Сечение плоскостью XOY есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5'}$$

(*горловой* эллипс $ABA'B'$).

---

[1]) То есть «гиперболовидный». См. сноску [1]) на стр. 205.

[2]) Здесь предполагается, что $a\neq b$. В случае $a=b$ эллипсы (5) обращаются в окружности; см. ниже уравнение (6).

Гиперболы (2) и (3), а также эллипс (5′) называются *главными сечениями*, их вершины $A(a;0;0)$, $A'(-a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $B'(0;-b;0)$ — *вершинами* однополостного гиперболоида. Отрезки $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ (действительные оси главных гипербол), а часто и прямые AA', BB' называются *поперечными осями*. Отрезок $CC' = 2OC = 2c$, откладываемый на оси OZ (мнимая ось каждой из главных гипербол), называется *продольной осью* однополостного гиперболоида.

Точка O есть центр симметрии однополостного гиперболоида (1), плоскости XOY, YOZ, ZOX — плоскости симметрии, оси OX, OY, OZ — оси симметрии.

Однополостный гиперболоид вращения. Если $a = b$, то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6}$$

Горловой эллипс $ABA'B'$ обращается в *горловую окружность* радиуса a. Все сечения, параллельные XOY, — тоже окружности. Сечения $KLL'K'$ и $MNN'M'$ (и вообще все сечения через продольную ось) становятся равными гиперболами, и поверхность (6) можно образовать вращением гиперболы $KLL'K'$ около продольной оси. Поверхность (6) называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Положение двух ее (поперечных) осей становится неопределенным, третья (продольная) ось совпадает с мнимой осью вращающейся гиперболы. В отличие от гиперболоида вращения ($a = b$) однополостный гиперболоид (1) при $a \neq b$ называется *трехосным*.

Замечание. Однополостный гиперболоид вращения можно определить как поверхность, порожденную вращением гиперболы около ее мнимой оси, трехосный однополостный гиперболоид — как поверхность, получаемую равномерным сжатием однополостного гиперболоида вращения к плоскости какого-либо меридиана.

Пример. Определить вид поверхности

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0.$$

Решение. Данное уравнение приводится к виду

$$-\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Оно представляет однополостный гиперболоид вращения с центром в точке $(0;0;0)$, осью вращения служит OX (так как отрицательный коэффициент стоит при x^2). Радиус горлового круга $r = 2$, продольная полуось равна 4.

§ 175. Двуполостный гиперболоид

Поверхность, представляемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{1}$$

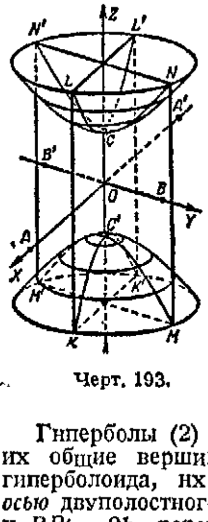
называется *двуполостным гиперболоидом* (черт. 193).

Сечения плоскостями XOZ и YOZ представляются уравнениями

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Это – гиперболы ($KK'L'L$ и $MM'N'N$ на черт. 193). Для каждой из них ось OZ является действительной осью (ср. § 174).



Черт. 193.

Плоскости $z=h$ не встречаются с гиперболоидом (1) при $|h|<c$ (ср. § 174). При $h=\pm c$ они касаются гиперболоида в точках $C(0;\ 0;\ c)$ и $C'(0;\ 0;\ -c)$. При $|h|>c$ в сечении получаются эллипсы[1])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \tag{4}$$

подобные друг другу ($KMK'M'$, $LNL'N'$ и др.). Размеры их увеличиваются по мере удаления от плоскости XOY.

Таким образом, поверхность (1) состоит из двух разобщенных полостей, откуда и название двуполостный гиперболоид.

Гиперболы (2) и (3) называются *главными сечениями*, их общие вершины C и C' – *вершинами* двуполостного гиперболоида, их действительная ось CC' – *продольной осью* двуполостного. гиперболоида, мнимые оси $AA'=2a$ и $BB'=2b$ – *поперечными осями симметрии*.

Двуполостный гиперболоид имеет центр O, оси симметрии OX, OY, OZ и плоскости симметрии XOY, YOZ,

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 208.

ZOX. Две полости гиперболоида симметричны друг другу относительно плоскости XOY.

Двуполостный гиперболоид вращения. Уравнение (1) при $a = b$ принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

и представляет поверхность, порождаемую вращением гиперболы около ее действительной оси. Она называется *двуполостным гиперболоидом вращения.* Двуполостный гиперболоид с неравными поперечными полуосями a и b называется *трехосным.*

Пример 1. Определить вид поверхности

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0.$$

Решение. Данное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1.$$

Имеем двуполостный гиперболоид (трехосный). Продольная ось равна $\sqrt{10}$ и совпадает с осью OX, одна поперечная ось равна $\sqrt{6}$ и направлена по оси OY, другая равна $\sqrt{15}$ и направлена по оси OZ.

Пример 2. Уравнение

$$x^2 - y^2 - z^2 = -1$$

представляет *однополостный* (а не двуполостный) гиперболоид (хотя в правой части стоит -1, а не $+1$, но в левой части два отрицательных слагаемых). Представив данное уравнение в виде $y^2 + z^2 - x^2 = 1$, видим, что гиперболоид порожден вращением равносторонней гиперболы около ее мнимой оси (совпадающей с осью OX).

§ 176. Конус второго порядка

Конической поверхностью называется всякая поверхность, порождаемая движением прямой линии (*образующей*), проходящей через неподвижную точку (*вершина* конической поверхности). Всякая (не проходящая через вершину) линия, которая пересекает образующую в любом положении последней, называется *направляющей.*

Поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (1)$$

которая, как показано ниже, является конической, называется *конусом второго порядка* (черт. 194).

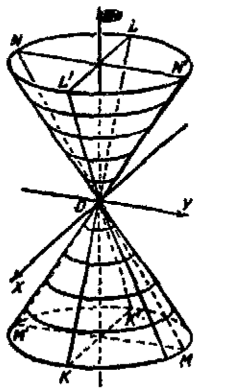
Сечение ее плоскостью XOZ $(y=0)$ представляется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

т. е.

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0. \tag{2}$$

Это – пара прямых (KL и $K'L'$), проходящих через начало (§ 58). В сечении плоскостью YOZ получаем пару прямых (MN и $M'N'$):



Черт. 194.

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=0. \tag{3}$$

Сечение всякой другой плоскостью $y=kx$, проходящей через ось OZ, представляется (§ 169) системой

$$y=kx,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{4}$$

Это – тоже пара прямых:

$$y=kx,\quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}+\frac{z}{c}=0 \tag{5}$$

и

$$y=kx,\quad x\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}-\frac{z}{c}=0, \tag{6}$$

проходящих через начало. Значит, поверхность (1) – коническая; точка O – ее вершина.

Сечение конуса (1) всякой плоскостью $z=h$ (при $h\neq 0$) есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}; \tag{7}$$

он обращается в точку $O(0;\ 0;\ 0)$ при $h=0$. Все эллипсы (7) подобны, вершины их лежат на сечениях (2) и (3).

При $a=b$ эллипсы (7) обращаются в окружности и конус второго порядка – в круглый конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{8}$$

Конус второго порядка можно определить как поверхность, полученную равномерным сжатием круглого конуса к плоскости осевого сечения.

Сечения конуса (1) плоскостями, параллельными плоскости XOZ (или плоскости YOZ), суть гиперболы.

Замечание. Сечения всякого конуса второго порядка плоскостями, не проходящими через вершину, являются окружностями[1]), эллипсами, гиперболами и параболами. Каждая из этих линий может быть принята за направляющую. Ввиду этого целесообразно называть конус второго порядка «эллиптическим».

Пример 1. Уравнение $x^2+y^2=z^2$ представляет круглый конус; сечение плоскостью XOZ есть пара прямых $x=\pm z$. Образующие составляют с осью угол 45°.

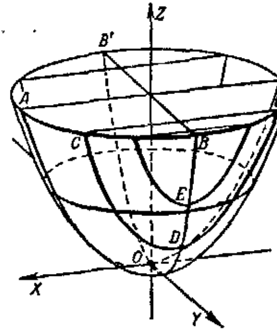
Пример 2. Уравнение $-x^2+9y^2+3z^2=0$ представляет (некруглый) конус второго порядка. Сечение всякой плоскостью $z=h$ $(h\neq 0)$ есть гипербола $x^2-9y^2=3h^2$; при $h=0$ она обращается в пару образующих. Та же картина для сечений $y=l$. Сечения $x=d$ $(d\neq 0)$ — эллипсы.

§ 177. Эллиптический параболоид

Поверхность, представляемая уравнением

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \qquad (1)$$

$(p>0,\ q>0)$, называется *эллиптическим параболоидом* (черт. 195).



Черт. 195.

Сечения плоскостями XOZ и YOZ (главные сечения) — параболы (AOA', BOB')

$$x^2=2pz, \qquad (2)$$

$$y^2=2qz; \qquad (3)$$

обе обращены вогнутостью в одну сторону («вверх»).

Плоскость $z=0$ касается параболоида в точке O, плоскости $z=h$ при $h>0$ пересекают параболоид по подобным между собой эллипсам

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=h \qquad (4)$$

[1]) У круглого конуса — одна система параллельных круговых сечений, у некруглого — две.

с полуосями $\sqrt{2ph}$, $\sqrt{2qh}$. При $h < 0$ эти плоскости не встречают параболоида.

Эллиптический параболоид не имеет центра симметрии; он симметричен относительно плоскостей XOZ и YOZ и относительно оси OZ. Прямая OZ называется *осью* эллиптического параболоида, точка O — его *вершиной*, величины p и q — *параметрами*.

При $p = q$ параболы (2) и (3) становятся равными, эллипсы (4) обращаются в окружности и параболоид (1) становится поверхностью, порождаемой вращением параболы около ее оси (*параболоид вращения*)[1].

Эллиптический параболоид можно определить как поверхность, получаемую равномерным сжатием параболоида вращения к одному из его меридианов.

Пример. Поверхность $z = x^2 + y^2$ есть параболоид вращения, образованный вращением параболы $z = x^2$ около ее оси (ось OZ). Поверхность $x = y^2 + z^2$ есть тот же параболоид, иначе расположенный (ось вращения совпадает с OX).

Замечание. В сечении эллиптического параболоида плоскостью $y = f$ получаем линию $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{f^2}{2q}$ (CDC'); это — парабола, равная (§ 50) параболе AOA' $\left(z = \frac{x^2}{2p}\right)$; ось ее тоже направлена «вверх», а вершиной является точка $D\left(0;\ f;\ \frac{f^2}{2q}\right)$. Координаты точки D удовлетворяют уравнениям $x = 0$, $y^2 = 2qz$, т. е. D лежит на параболе BOB'. Значит, эллиптический параболоид есть поверхность, порождаемая параллельным перенесением параболы (AOA'), при котором ее вершина движется по другой параболе (BOB'). При этом плоскости подвижной и неподвижной парабол перпендикулярны, а оси равнонаправлены.

§ 178. Гиперболический параболоид

Поверхность, представляемая уравнением

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \qquad (1)$$

($p > 0$, $q > 0$), называется *гиперболическим параболоидом* (черт. 196).

---

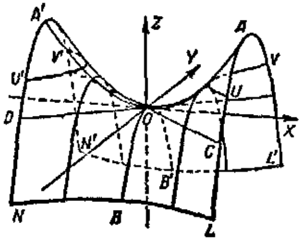
[1] Форму параболоида вращения имеют зеркала рефлекторов (они обращают пучок лучей, исходящих из фокуса, в параллельный пучок).

Сечения плоскостями XOZ и YOZ (*главные сечения*) суть параболы (AOA', BOB')

$$x^2 = 2pz, \tag{2}$$

$$y^2 = -2qz. \tag{3}$$

В противоположность главным сечениям эллиптического параболоида (§ 177) параболы (2) и (3) обращены вогнутостью в противоположные стороны (парабола AOA' — «вверх», парабола BOB' — «вниз»). Поверхность (1) имеет седлообразный вид.



Черт. 196.

Сечение гиперболического параболоида (1) плоскостью XOY ($z = 0$) представляется уравнением

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0. \tag{4}$$

Это — пара прямых[1]) OD, OC (§ 58, пример 1).

Плоскости $z = h$, параллельные XOY, пересекают гиперболический параболоид по гиперболам

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h, \quad z = h. \tag{5}$$

При $h > 0$ действительная ось у этих гипербол (например, у гиперболы $UVV'U'$) параллельна оси OX; при $h < 0$ (гипербола $LNN'L'$) действительная ось параллельна OY. Все гиперболы (5), лежащие по одну сторону от плоскости XOY, подобны друг другу; они попарно сопряжены (§ 47) с гиперболами (5), лежащими по другую сторону от XOY.

Гиперболический параболоид не имеет центра; он симметричен относительно плоскостей XOZ и YOZ и относительно оси OZ. Прямая OZ называется *осью* гиперболического параболоида, точка O — его *вершиной*, величины p и q — *параметрами*.

Замечание 1. Ни при каких значениях p и q гиперболический параболоид (в отличие от вышерассмотренных

---

[1]) На гиперболическом параболоиде имеется бесчисленное множество прямых линий; см. § 180.

поверхностей второго порядка) не является поверхностью вращения.

Замечание 2. Гиперболический параболоид, как и эллиптический, можно образовать параллельным перенесением одного главного сечения (например, BOB') вдоль другого (AOA'). Но теперь подвижная и неподвижная параболы обращены вогнутостями в противоположные стороны.

Пример. Поверхность $z = x^2 - y^2$ есть гиперболический параболоид; оба главных сечения суть параболы, равные между собой, но обращенные в противоположные стороны. Поверхность можно образовать параллельным смещением одной из этих парабол вдоль другой. Сечение плоскостью $z = h$ $(h \neq 0)$ — равносторонняя гипербола с полуосями $a = \sqrt{|h|}$, $b = \sqrt{|h|}$. При $h = 0$ она обращается в пару перпендикулярных прямых ($x + y = 0$, $x - y = 0$). Если эти прямые принять за координатные оси OX', OY', то рассматриваемый гиперболический параболоид представится (§ 36) уравнением $z = 2x'y'$.

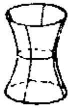
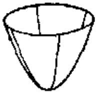
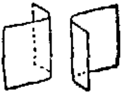
Вообще уравнение $z = \frac{xy}{a}$ представляет тот же гиперболический параболоид, что и уравнение $z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a}$, только в первом случае оси OX, OY совпадают с прямолинейными образующими (§ 180), проходящими через вершину.

§ 179. Перечень поверхностей второго порядка

Всякое уравнение второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

можно с помощью формул преобразования координат (§ 166) преобразовать в одно из нижеперечисленных 17 уравнений, называемых *каноническими*. При этом уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (№ 14) представляет не поверхность, а прямую линию ($x = 0$, $y = 0$). Однако говорят, что оно представляет *пару мнимых плоскостей* (пересекающихся по действительной прямой) (ср. § 58, пример 4). Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (№ 13) представляет только одну точку (0; 0; 0). Однако (по сходству с уравнением № 4)

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности	Параграф
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	173
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		Однополостный гиперболоид	174
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		Двуполостный гиперболоид	175
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		Конус второго порядка	176
5	$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$		Эллиптический *параболоид*	177
6	$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$		Гиперболический параболоид	178
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Эллиптический цилиндр	168
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Гиперболический *цилиндр*	168

Продолжение

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности	Параграф
9	$y^2 = 2px$		Параболический цилиндр	168
10	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара пересекающихся плоскостей	
11	$\frac{x^2}{a^2} = 1$		Пара параллельных плоскостей	
12	$x^2 = 0$		Пара совпадающих плоскостей	
13	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$		Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)	
14	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	
15	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$		Мнимый эллипсоид	
16	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		Мнимый эллиптический цилиндр	
17	$\frac{x^2}{a^2} = -1$		Пара мнимых параллельных плоскостей	

говорят, что уравнение № 13 представляет *мнимый конус второго порядка* (с действительной вершиной).

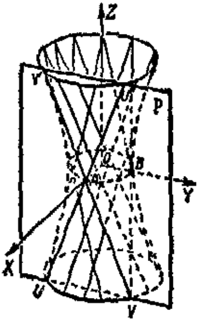
Уравнения № 15, 16, 17 не представляют никакого геометрического образа. Однако говорят, что они представляют соответственно *мнимый эллипсоид* (ср. № 1), *мнимый эллиптический цилиндр* (ср. № 7) и *пару мнимых параллельных плоскостей* (ср. № 11).

Пользуясь этой условной терминологией, можно сказать, что всякая поверхность второго порядка является одной из 17 перечисленных на стр. 217—218 поверхностей.

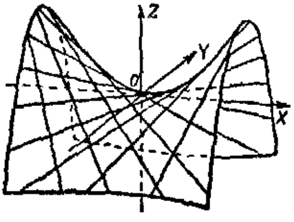
§ 180. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

Поверхность называется *линейчатой*, если ее можно образовать движением прямой линии (*образующей*). Из поверхностей второго порядка линейчатыми являются цилиндры и конус второго порядка и, сверх того, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Как на однополостном гиперболоиде (черт. 197), так и на



Черт. 197.



Черт. 198.

гиперболическом параболоиде (черт. 198) через каждую точку проходят две прямолинейные образующие. Так, на черт. 197 через точку A проходят образующие UU' и VV', через точку V — образующие VA и VB.

У эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида прямолинейных образующих (действительных) нет.

Пример. Сечение *однополостного гиперболоида*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

плоскостью $x = a$ (плоскость P на черт. 197) представляется уравнением $\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, т. е.

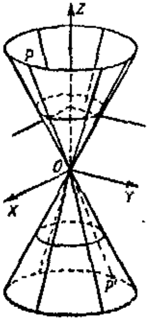
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (2)$$

Это — пара прямых (UU' и VV'). Они проходят через вершину $A(a; 0; 0)$ горлового эллипса. Точно так же через вершину $B(0; b; 0)$ проходит пара прямолинейных образующих

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad y = b. \qquad (3)$$

Однополостный гиперболоид вращения ($a = b$) можно образовать[1]) вращением прямой UU' (или VV') около оси OZ.

Замечание. Линейчатость однополостного гиперболоида использована инженером В. Г. Шуховым для строительной конструкции, называемой «башней Шухова». Она строится из железных полос, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида. Полосы склепываются в местах пересечения двух систем образующих. При малой затрате материала конструкция В. Г. Шухова обладает большой прочностью.



Черт. 199.

§ 181. Поверхности вращения

Пусть L есть линия, лежащая в плоскости XOZ. Тогда уравнение поверхности, порождаемой вращением линии L около оси OZ, получается из уравнения линии L заменой x на $\sqrt{x^2+y^2}$.

Пример 1. Пусть прямая $z = 2x$, лежащая в плоскости $y = 0$ (прямая PP' на черт. 199), вращается около OZ. Тогда уравнение конической поверхности, порождаемой вращением прямой PP', имеет вид $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, т. е. $x^2+y^2-\frac{z^2}{4} = 0$ (ср. § 176).

Аналогичные правила имеют место, когда линия L лежит в другой координатной плоскости и осью вращения является другая ось координат.

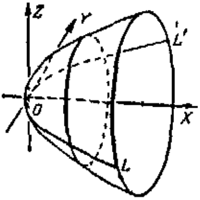
Пример 2. Найти уравнение поверхности, порождаемой вращением параболы $y^2 = 2px$ (LOL' на черт. 200) около оси OX.

---

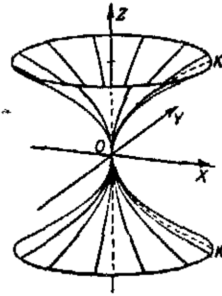
[1]) Если проколоть булавкой две спички, не лежащие в одной плоскости, и, взяв одну из спичек за ее конец, быстро вращать около нее всю модель, то другая спичка явственно начертит однополостный гиперболоид.

Р е ш е н и е. Заменяя y на $\sqrt{y^2+z^2}$, т. е. y^2 на y^2+z^2, получаем $y^2+z^2=2px$ (параболоид вращения с осью OX).

П р и м е р 3. Найти уравнение поверхности, порождаемой вращением параболы $z^2=2px$ (KOK' на черт. 201) около оси Z.



Черт. 200.



Черт. 201.

Р е ш е н и е. Заменяя x на $\sqrt{x^2+y^2}$, получаем уравнение $z^2=2p\sqrt{x^2+y^2}$ или $z^4=4p^2(x^2+y^2)$ (поверхность четвертого порядка).

§ 182. Определители второго и третьего порядка

Определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется (§ 12) выражение

$$a_1b_2-a_2b_1.$$

Определителем третьего порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

называется (§ 118) выражение

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+b_1c_2a_3-b_1c_3a_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2, \tag{2}$$

или, что то же,

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Буквы a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 называются *элементами определителя.*

Миноры. Определители $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, входящие в формулу (3), называются *минорами* [1]) элементов a_1, b_1, c_1.

Вообще *минором* какого-либо элемента называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Примеры. Минор элемента b_2 определителя (1) есть

определитель $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, схема: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Минор элемента b_3 есть $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, минор элемента c_3 есть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Замечание. В определителе второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ минором элемента a_1 является элемент b_2; его можно считать «определителем первого порядка». Элемент b_2 получится из определителя второго порядка вычеркиванием верхней строки и левого столбца. Аналогично минором элемента a_2 является элемент b_1 и т. д.

Алгебраическое дополнение. В формуле (3) элементы a_1, b_1, c_1 множатся на $+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Эти выражения называются *алгебраическими дополнениями* элементов a_1, b_1, c_1.

Вообще *алгебраическим дополнением* элемента называется его минор, взятый со своим или с противоположным знаком согласно следующему правилу:

Если сумма номеров столбца и строки, на пересечении которых стоит элемент, есть число четное, то минор берется со своим знаком, если нечетное, — то с противоположным.

---

[1]) От латинского слова minor — меньший.

Алгебраические дополнения элементов a_1, b_1, c_1, a_2 и т. д. будем обозначать соответственно A_1, B_1, C_1, A_2 и т. д.

Пример 1. Элемент b_1 определителя (1) стоит на пересечении первой строки и второго столбца. Так как $1+2=3$ есть нечетное число, то $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Пример 2. Найти алгебраическое дополнение элемента c_2.

Решение. Вычеркивая вторую строку и третий столбец, находим минор $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ элемента c_2. Номер строки этого элемента есть 2, номер столбца — 3. Сумма $2+3$ — нечетное число. Поэтому $C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

Пример 3. В определителе (1) алгебраическое дополнение B_2 элемента b_2 есть $+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ($2+2$ — четное число).

Теорема 1. Определитель (1) равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \tag{4}$$
$$\Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \tag{5}$$
$$\Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \tag{6}$$

Формула (4) тождественна с (3), формулы (5) и (6) проверяются непосредственным вычислением.

Теорема 2. Определитель (1) равен сумме произведений элементов какого-либо столбца на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \tag{7}$$
$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \tag{8}$$
$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \tag{9}$$

Эти две теоремы облегчают вычисление определителя, когда среди элементов есть нули.

Пример 4. Для вычисления определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

удобно применить (5) или (9).

Формула (5) даст:

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3\cdot 31 + 8\cdot 12 = 3.$$

Формула (9) дает:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 3.$$

Пример 5. Для вычисления определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

лучше всего применить (6):

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot -8 = 24.$$

§ 183. Определители высших порядков

Определителем четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

называется выражение

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1, \qquad (2)$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — алгебраические дополнения (§ 182) элементов a_1, b_1, c_1, d_1, т. е.

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \\ C_1 &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad B_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -16,$$

$$D_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -72$$

(так как $c_1 = 0$, то C_1 вычислять не надо),

$$\Delta = 6 \cdot 8 + 3(-16) + 3(-72) = -216.$$

Для определителя четвертого порядка остаются в силе теоремы 1 и 2 § 182. Их объединяет следующая теорема.

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1, \\ \Delta &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + d_2D_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4, \\ \Delta &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + b_4B_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Первая из формул (4) совпадает с формулой (2), принятой за определение. Остальные можно проверить непосредственным вычислением, хотя оно и громоздко. Есть и более короткие выводы.

Пример 2. Вычислим определитель примера 1, разлагая его по элементам второго столбца. Имеем:

$$\Delta = 3B_1 + 4B_2 + 4B_3 + 7B_4,$$

где

$$B_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -16, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -60,$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -66, \quad B_4 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 48,$$

так что $\Delta = 3 \cdot (-16) + 4 \cdot (-60) + 4 \cdot (-66) + 7 \cdot 48 = -216$.

Пример 3. Вычислим тот же определитель, разлагая его по элементам третьей строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_3 + 4B_3 + 4C_3 + 2D_3 =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -216.$$

Определителем пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

называется выражение

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1 + e_1 E_1, \qquad (6)$$

где A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — алгебраические дополнения элементов a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; эти алгебраические дополнения сами являются определителями четвертого порядка.

Аналогично определяется определитель шестого порядка через определитель пятого порядка и т. д.

Теорема настоящего параграфа остается в силе для определителя любого порядка.

§ 184. Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится, если каждую строку заменить столбцом с тем же номером.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке каких-либо двух строк или каких-либо двух столбцов абсолютное значение определителя остается прежним, а знак меняется на обратный.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(переставлены вторая и третья строки; ср. § 117, п. 1).

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

(переставлены первый и третий столбцы).

3. Определитель, у которого элементы одной строки (или столбца) соответственно пропорциональны элементам другой строки (столбца), равен нулю. В частности, определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ (второй и третий столбцы одинаковы).

Пример 6.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 3a & 3a' & 3a'' \end{vmatrix} = 0$$ (элементы третьей строки пропорциональны элементам первой строки; ср. § 117, пп. 1, 3, 4).

4. Общий множитель всех элементов одной строки (или одного столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример 7.

$$\begin{vmatrix} ma & ma' & ma'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$ (ср. § 117, п. 3).

5. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: в одном вместо каждой суммы стоит только первое слагаемое, в другом — только второе (остальные элементы в обоих определителях те же, что в данном).

Пример 8.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(ср. § 117, п. 2).

6. Если ко всем элементам какого-либо столбца прибавить слагаемые, пропорциональные соответствующим элементам другого столбца, то новый определитель равен старому. То же для строк.

Вытекает из пп. 5 и 3.

Пример 9. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ равен 12. Прибавим к элементам первой строки элементы второй. Получим $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Этот определитель тоже равен 12, но вычисляется проще (в разложении по элементам первой строки два слагаемых равны нулю).

Пример 10. Для вычисления определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

прибавим к элементам первого столбца элементы второго, помноженные на -2. Получим $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. Этот определитель легко вычисляется разложением по элементам первого столбца [§ 182, формула (7)]. Получаем:

$$7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -77.$$

Пример 11. Для вычисления определителя

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

вычтем из элементов второго столбца элементы третьего. Получим:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из элементов третьего столбца элементы четвертого, умноженные на 2. Получим:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая по элементам третьей строки, получаем (как в примере 1 183):

$$-2\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -216.$$

§ 185. Практический прием вычисления определителей

Нижеописанный прием особенно удобен, когда элементы определителя – целые числа.

Намечаем строку [1]), по элементам которой будем вести разложение. Желательно, чтобы там был нуль. Прием имеет целью создать в избранной строке новые нули. Для этого применяется свойство 6 § 184.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по элементам второй строки (в ней есть нуль). Создадим там (на месте элемента 6) еще один нуль. Для этого вычтем из элементов второго столбца утроенные элементы третьего. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -80.$$

Будем теперь вести разложение по элементам первого столбца, где уже есть один нуль. Создадим в этом столбце (на месте элемента 7) еще один нуль. Для этого вычтем

---

[1]) Или столбец.

из элементов третьей строки элементы первой, помноженные на $\frac{7}{2}$. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -\frac{29}{2} & -\frac{23}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 29 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 29 & 23 \end{vmatrix} = -80.$$

Замечание. Можно было предвидеть, что первый способ удобнее: во второй строке элемент 6 есть кратное элемента 2, тогда как в первом столбце элемент 7 не кратен элементу 2. Желательно, чтобы в избираемой строке (или столбце) по возможности все элементы были кратны одному. Если один из элементов равен 1 или -1, то следует избрать ту строку или тот столбец, где стоит этот элемент.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Избираем третий столбец (там есть и нуль и единица). Чтобы создать нуль на месте элемента 4, вычтем учетверенные элементы третьей строки (там находится элемент 1 избранного столбца) из элементов первой строки. Первая строка примет вид

$$-9\ 6\ 0\ -15.$$

Чтобы создать в третьем столбце нуль на месте элемента -2, прибавим удвоенные элементы третьей строки к элементам четвертой. Последняя примет вид

$$7\ -3\ 0\ 7.$$

Теперь, разлагая по элементам третьего столбца, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 6 & 0 & -15 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -9 & 6 & -15 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка все элементы второго столбца кратны элементу -3. Поэтому прибавляем элементы третьей строки (где стоит элемент -3) к элементам второй, а затем, предварительно удвоив их, — к элементам первой строки. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 13 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}\cdot(-3) = 222,$$

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Здесь нет нулей, но во второй строке легко создать сразу два нуля: к элементам ее надо прибавить элементы первой строки. Получим.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь во второй строке можно создать еще один нуль, вычтя из элементов третьего столбца элементы второго, помноженные на $\frac{4}{5}$. Но удобнее предварительно создать во второй строке единицу. Для этого достаточно вычесть из элементов второго столбца элементы третьего. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 2 & 11 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -38 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -35 & 2 \\ 2 & 11 & -49 & 3 \end{vmatrix}$$

(мы вычли из элементов третьего столбца учетверенные элементы второго). Теперь имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix} = -303.$$

§ 186. Применение определителей к исследованию и решению системы уравнений

Определители впервые были введены для решения системы уравнений первой степени. В 1750 г. швейцарский математик Г. Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные через определители, составленные из коэффициентов системы. Примерно через сто лет теория определителей, выйдя далеко за пределы алгебры, стала применяться во всех математических науках.

В нижеследующих параграфах даны основные сведения об исследовании и решении систем уравнений первой степени; для большей наглядности всюду указывается связь с геометрическими фактами.

§ 187. Два уравнения с двумя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений

$$a_1x + b_1y = h_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = h_2 \tag{2}$$

(каждое из них представляет прямую на плоскости XOY; ср. § 19).

Введем обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (\textit{определитель системы}), \tag{3}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Определитель Δ_x получается из Δ заменой элементов первого столбца свободными членами системы; аналогично получается Δ_y.

Возможны три случая.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю: $\Delta \neq 0$.

Тогда система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{5}$$

[прямые (1) и (2) пересекаются, формулы (5) дают координаты точки пересечения].

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$ (т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны). Пусть при этом один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю (т. е. свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных).

В этом случае система не имеет решений [прямые (1) и (2) параллельны, но не совпадают].

Случай 3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ (т. е. и коэффициенты и свободные члены пропорциональны).

Тогда одно из уравнений (1), (2) есть следствие другого; система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений [прямые (1) и (2) совпадают].

П р и м е р 1.

$$2x+3y = 8, \qquad 7x-5y = -3.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62.$$

Система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

П р и м е р 2.

$$2x+3y = 8, \quad 4x+6y = 10.$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$. При этом $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Коэффициенты пропорциональны, а свободные члены не подчинены той же пропорции. Система не имеет решений.

П р и м е р 3.

$$2x+3y = 8, \qquad 4x+6y = 16.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Одно из уравнений есть следствие другого (например, второе получается из первого умножением на 2). Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \quad \left(\text{или} \quad x = -\frac{3}{2}y + 4\right).$$

§ 188. Два уравнения с тремя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = h_2 \tag{2}$$

(каждое представляет плоскость в пространстве; ср. § 141).

Возможны три случая.

С л у ч а й 1. Из трех определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

хотя бы один не равен нулю, т. е. коэффициенты при неизвестных не пропорциональны. Тогда система имеет бесчисленное множество решений, причем *одному* из неизвестных можно дать любое значение. Например, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то неизвестному z можно дать любое значение; неизвестные x, y определятся единственным образом (§ 187, п. 1) из системы

$$a_1x+b_1y = h_1-c_1z,$$
$$a_2x+b_2y = h_2-c_2z$$

[плоскости (1) и (2) не параллельны, система представляет прямую, величины (3) — направляющие коэффициенты (§ 143)].

Случай 2. Все определители (3) равны нулю, но один из *определителей*

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & h_1 \\ b_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & h_1 \\ c_2 & h_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

не равен нулю, т. е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны, но свободные члены не подчинены той же пропорции. В этом случае система не имеет решений [плоскости (1) и (2) параллельны, но не совпадают].

Случай 3. Все определители (3) и (4) равны нулю, т. е. и коэффициенты и свободные члены пропорциональны. Тогда система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, причем любые значения можно дать *двум* неизвестным. Например, если $c_1 \neq 0$, то любые значения можно дать неизвестным x, y [плоскости (1) и (2) совпадают].

Пример 1. Решить систему

$$x-2y-z = 15, \qquad 2x-4y+2z = 2.$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Среди этих определителей есть не равные нулю. Значит, система имеет бесчисленное множество решений. Любое значение можно дать одному неизвестному x или одному неизвестному y, так как $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$. *Неизвестному z любого значения дать нельзя* (ср. § 142, пример 5).

Решим систему относительно y и z. Имеем:

$$-2y - z = 15 - x, \quad -4y + 2z = 2 - 2x.$$

Отсюда

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 15-x & -1 \\ 2-2x & 2 \end{vmatrix}}{-8} = -4 + \frac{1}{2}x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 15-x \\ -4 & 2-2x \end{vmatrix}}{-8} = -7.$$

(Система представляет прямую, перпендикулярную к оси OZ.)

Пример 2. Система

$$7x - 4y + z = 5, \quad 21x - 12y + 3z = 12$$

не имеет решений, так как все определители (3) равны нулю (коэффициенты при неизвестных пропорциональны), а определитель $\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 21 & 12 \end{vmatrix}$ не равен нулю (свободные члены не пропорциональны коэффициентам).

(Плоскости параллельны, но не совпадают.)

Пример 3. Решить систему

$$7x - 4y + z = 5, \quad 21x - 12y + 3z = 15.$$

Здесь и коэффициенты и свободные члены пропорциональны. Система сводится к одному уравнению. Любой паре неизвестных (скажем, x и y) можно дать произвольные значения (тогда $z = 5 - 7x + 4y$).

(Плоскости совпадают.)

§ 189. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными

Система уравнений первой степени называется *однородной*, если в каждом уравнении свободный член равен нулю.

Рассмотрим однородную систему

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0. \tag{2}$$

Это — частный случай системы § 188. Особенность состоит в том, что *случай 2 не может иметь места* [определители (4) § 188 всегда равны нулю]. Система (1) — (2) всегда имеет бесчисленное множество решений.

[Плоскости (1) и (2) проходят через начало координат и, значит, либо пересекаются, либо совпадают.]

Случай 1. Коэффициенты не пропорциональны, т. е. хотя бы один из трех определителей (3) § 188 не равен нулю. Тогда решение можно записать в симметричном виде

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \tag{3}$$

(параметр t — произвольное число; ср. § 152). [Параметрические уравнения (3) представляют прямую пересечения плоскостей (1) и (2).]

Случай 2. Коэффициенты пропорциональны, т. е. все определители $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ равны нулю.

Система сводится к одному уравнению (плоскости совпадают).

Пример 1. Решить систему

$$2x - 5y + 8z = 0, \quad x + 4y - 3z = 0.$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -17, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Согласно (3) имеем:

$$x = -17t, \ y = 14t, \ z = 13t.$$

В этом примере произвольное значение можно дать одному (любому) неизвестному. Например, положив $z = 39$, найдем $t = 3$; значит, $x = -51$, $y = 42$.

Пример 2. Решить систему

$$x - 2y - z = 0, \quad 2x - 4y + 2z = 0.$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит,

$$x = -8t, \quad y = -4t, \quad z = 0.$$

Произвольное значение можно дать одному из неизвестных x или y, *но не неизвестному* z. Последнее может равняться только нулю (прямая лежит в плоскости XOY).

Пример 3. Система

$$7x - 4y + z = 0, \quad 21x - 12y + 3z = 0$$

сводится к одному уравнению. Произвольные значения можно дать *любой паре* неизвестных.

§ 190. Три уравнения с тремя неизвестными

Рассмотрим систему

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \tag{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\textit{определитель системы}), \tag{4}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Определитель Δ_x получается из Δ заменой элементов первого столбца свободными членами. Аналогично получаются Δ_y и Δ_z.

Если бы оказалось, что в определителе Δ соответственные элементы каких-либо двух строк, скажем первой и второй, пропорциональны, то уравнения (1) и (2) либо были бы несовместны (§ 188, п. 2), либо сводились к одному уравнению (§ 188, п. 3). В первом случае данная система не имеет решений, во втором — вместо данной системы получаем систему двух уравнений (1) и (3) (она в свою очередь может свестись к одному уравнению). Так как все это уже рассмотрено в § 188, то можно ограничиться предположением, что в определителе Δ *нет ни одной пары строк с пропорциональными элементами* [среди трех плоскостей (1), (2), (3) нет ни одной пары параллельных].

В этом предположении возможны три случая.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю:

$$\Delta \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{6}$$

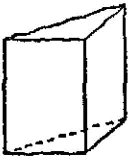
(Три плоскости пересекаются в одной точке.)

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$; при этом один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z не равен нулю, тогда и два других определителя не равны нулю[1]):

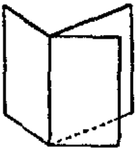
$$\Delta_x \neq 0, \quad \Delta_y \neq 0, \quad \Delta_z \neq 0.$$

В этом случае система не имеет решений.

[Равенство $\Delta = 0$ означает, что нормальные векторы плоскостей (1), (2), (3) компланарны, значит, все три плоскости параллельны одной прямой. В рассматриваемом случае три плоскости образуют призматическую поверхность (черт. 202).]



Черт. 202.



Черт. 203.

Случай 3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. В этом случае одно из трех уравнений (любое) является следствием двух других. Система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений (§ 188, случай 1; случаи 2 и 3 не могут представиться в силу сделанного выше предположения).

(Три плоскости, как и в предыдущем случае, параллельны одной прямой, но теперь они образуют пучок; черт. 203.)

[1]) Если в двух строках определителя Δ соответственные элементы пропорциональны (этот случай мы исключили из рассмотрения), то может оказаться, что из трех определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z только один или только два равны нулю.

Пример 1. Решить систему

$$3x+4y+2z=5,\ \ 5x-6y-4z=-3,\ \ -4x+5y+3z=1.$$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&2\\5&-6&-4\\-4&5&3\end{vmatrix}=12,\qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}5&4&2\\-3&-6&-4\\1&5&3\end{vmatrix}=12,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3&5&2\\5&-3&-4\\-4&1&3\end{vmatrix}=-24,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}3&4&5\\5&-6&-3\\-4&5&1\end{vmatrix}=60.$$

Система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=5.$$

Пример 2. Решить систему

$$x+y+z=5,\ \ x-y+z=1,\ \ x+z=2.$$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0.$$

При этом

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5&1&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{vmatrix}=-2$$

(определители Δ_y и Δ_z нет нужды вычислять[1]). Система не имеет решений. Это видно и непосредственно: сложив почленно первые два уравнения, получим $2x+2z=6$, т. е. $x+z=3$, что противоречит третьему уравнению.

Пример 3. Решить систему

$$x+y+z=5,\ \ x-y+z=1,\ \ x+z=3.$$

Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0.$$

[1]) Строки определителя Δ попарно не пропорциональны; см. предыдущую сноску.

При этом

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определители Δ_y и Δ_z заведомо равны нулю[1]).

Данная система сводится к системе двух уравнений (любая пара из трех данных, третье является следствием) и имеет бесчисленное множество решений. Произвольное значение можно дать одному неизвестному x или одному неизвестному z (но не y; см. § 188, п. 1).

Возьмем первое и третье уравнения и решим их относительно x и z. Имеем:

$$x+y = 5-z, \quad x = 3-z.$$

Отсюда

$$x = 3-z, \quad y = 2.$$

Замечание. Если система трех уравнений с тремя неизвестными однородна ($h_1 = h_2 = h_3 = 0$), то второй случай невозможен. В первом случае единственное решение будет $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (плоскости пересекаются в начале координат). В третьем случае, взяв любые два уравнения системы, скажем (1) и (2), находим все решения данной системы по формулам (3) § 189 (три плоскости образуют пучок, ось которого проходит через начало координат).

Пример 4. Решить систему

$$x+y+z = 0, \quad 3x-y+2z = 0, \quad x-3y = 0.$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Одно из уравнений есть следствие двух других. Произвольное значение можно дать одному из неизвестных (любому). Взяв первое и третье уравнения, находим по формулам (3) § 189:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} t = 3t, \quad y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} t = t, \quad z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} t = -4t.$$

§ 190а. Система n уравнений с n неизвестными

Исчерпывающий перечень возможных случаев слишком сложен. Поэтому ограничимся следующими сведениями.

Пусть дана система n уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1u = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2u = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + f_nu = h_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

---

[1]) Строки определителя Δ попарно не пропорциональны; см. сноску на стр. 238.

1. Если определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & f_n \end{vmatrix} \quad \textit{(определитель системы)} \qquad (2)$$

не равен нулю, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; \dots, \quad u = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \qquad (3)$$

где Δ_x — определитель, полученный из Δ заменой элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответствующими свободными членами $h_1, h_2, \dots, h_n$; аналогично получаются определители $\Delta_y, \Delta_z, \dots, \Delta_u$.

2. Если $\Delta = 0$, а среди определителей $\Delta_x, \Delta_y, \dots, \Delta_u$ есть не равные нулю, то система не имеет решений.

3. Пусть теперь $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \dots = \Delta_u = 0$, причем один из миноров $(n-1)$-го порядка определителя Δ (например, минор, получаемый вычеркиванием второй строки и третьего столбца) не равен нулю. Тогда система сводится к $n-1$ уравнениям; одно из уравнений (второе — соответственно номеру строки) есть следствие остальных. Одному из неизвестных (неизвестному z — соответственно номеру столбца) можно дать произвольное значение. Остальные $n-1$ неизвестные определяются единственным образом из системы $n-1$ уравнений.

Замечание. В случае, когда все определители $(n-1)$-го порядка, являющиеся минорами определителя Δ, равны нулю, система может не иметь решений, а может сводиться к $n-2$ уравнениям или меньшему их числу.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 2z + 4u &= 3, \\ -3x - 2y + 6z - 4u &= 11, \\ 5x + 5y - 3z + 2u &= 6, \\ 2x + 6y - 5z + 3u &= 0. \end{aligned}$$

Определитель системы Δ (см. § 185, пример 3) равен -303. Пользуясь приемами, объясненными в § 185, найдем:

$$\Delta_x = -303, \quad \Delta_y = -606, \quad \Delta_z = -303, \quad \Delta_u = 909.$$

Согласно формулам (3) имеем:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1, \quad u = -3.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{aligned} x - y + 2z - u &= 1, \\ x + y + z + u &= 4, \\ 2x + 3y \phantom{{}+ z} - 5u &= 0, \\ 5x + 2y + 5z - 6u &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Между тем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 144 \neq 0.$$

Поэтому система не имеет решений (если первое уравнение почленно помножить на 2 и полученное уравнение почленно сложить со вторым и третьим, то получим $5x+2y+5z-6u=6$, что противоречит четвертому уравнению).

Пример 3. Решить систему

$$\begin{aligned} x - y + 2z - u &= 1, \\ x + y + z + u &= 4, \\ 2x + 3y - 5u &= 0, \\ 5x + 2y + 5z - 6u &= 6. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta_u = 0.$$

Вычеркнув четвертую строку и четвертый столбец, получим минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Система сводится к трем уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - u &= 1, \\ x + y + z + u &= 4, \\ 2x + 3y - 5u &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Четвертое уравнение есть их следствие (ср. пример 2). Неизвестному u можно дать любое значение. Из (4) находим:

$$x = \frac{-24u+21}{-3}, \quad y = \frac{11u-14}{-3}, \quad z = \frac{16u-19}{-3}.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 191. Вводные замечания

Математическим анализом называют систему дисциплин, объединенных следующими характерными чертами.

Предметом их изучения являются количественные соотношения действительного мира (в отличие от геометрических дисциплин, занимающихся пространственными его свойствами). Эти соотношения выражаются с помощью *числовых* величин, как и в арифметике. Но в арифметике (и в алгебре) рассматриваются преимущественно постоянные величины (они характеризуют *состояния*), в анализе же — переменные величины (характеризующие *процессы*; § 195). В основу изучения зависимости между переменными величинами кладутся понятия *функции* (§ 196) и *предела* (§§ 203—206).

В этой книге рассматриваются следующие разделы анализа: дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория рядов и теория дифференциальных уравнений. О предмете каждого раздела сказано в своем месте.

Зачатки методов математического анализа были у древнегреческих математиков (Архимед). Систематическое развитие эти методы получили в 17-м веке. На рубеже 17 и 18-го вв. Ньютон[1]) и Лейбниц[2]) в общем и целом завершили создание дифференциального и интегрального исчисления, а также положили основу учения о рядах и о

---

[1]) Исаак Ньютон (1642—1727) — великий английский математик и физик. Открыл закон всемирного тяготения, сформулировал основные законы механики и применил их к изучению движения земных и небесных тел, исследовал экспериментально и теоретически законы оптики.

[2]) Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — знаменитый немецкий философ и математик.

дифференциальных уравнениях. В 18-м веке Эйлер разработал последние два раздела и заложил основу других дисциплин математического анализа.

К концу 18-го в. накопился огромный фактический материал, но он был недостаточно разработан в логическом отношении. Этот недостаток был устранен усилиями крупнейших ученых 19-го в., таких, как Коши во Франции, Н. И. Лобачевский в России, Абель в Норвегии, Риман в Германии и др.

§ 192. Рациональные числа

Первые представления о числе возникли из счета предметов. Результатом счета являются числа 1, 2, 3 и т. д. Они теперь называются *натуральными*. Впоследствии возникло понятие о *дробях*; источник его есть измерение непрерывных величин (длины, веса и др.). *Отрицательные числа* и вместе с ними число *нуль* вошли в математику[1]) в связи с развитием алгебры.

Целые числа (т. е. натуральные числа 1, 2, 3 и т. д., отрицательные числа -1, -2, -3, и т. д. и нуль) и дроби называются *рациональными* числами (в противоположность *иррациональным*; § 193). Всякое рациональное число можно записать в виде $\frac{p}{q}$ (где p и q — целые числа).

§ 193. Действительные (вещественные) числа

Измерение осуществляется н а п р а к т и к е с помощью какого-либо инструмента. Результат измерения выражается некоторым рациональным числом (например, толщина металлического волоска, измеренная микрометром, выразится в миллиметрах, скажем, числом 0,023). Всякий инструмент обладает ограниченной точностью. Поэтому для практической деятельности запас рациональных чисел не только достаточен, но даже избыточен. Однако в математической т е о р и и, где измерения предполагаются абсолютно точными, одними только рациональными числами обойтись нельзя. Так, никаким рациональным числом нельзя точно выразить длину диагонали квадрата, если его сторону принять за единицу измерения; рациональным

---

[1]) В Китае около 2000 лет назад и в Индии около 1500 лет назад. В Европе отрицательные числа завоевали право гражданства лишь в 17-м в. См. М. Я. Выгодский, Справочник по элементарной математике, изд. 8-е, 1955, III, 2 (стр. 127—128).

числом нельзя точно выразить синус угла 60°, косинус угла 22°, тангенс угла 17°, отношение окружности к диаметру и т. д. Вообще отношение несоизмеримых отрезков нельзя точно выразить рациональным числом.

Чтобы точно выразить отношение несоизмеримых отрезков, надо ввести новые числа — *иррациональные*[1]). Иррациональное число выражает *длину отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба.* Рациональные и иррациональные числа, взятые в совокупности, называются *действительными* или *вещественными* (в противоположность *мнимым* числам; см. замечание 2). С помощью действительных чисел можно точно выразить длину любого отрезка.

Иррациональное число не может точно равняться рациональному. Но для всякого иррационального числа можно найти рациональные (в частности, десятичные) числа, приближенно равные ему (с избытком и с недостатком), при этом погрешность можно сделать сколь угодно малой.

Пример. Для числа lg 3 (оно иррационально) можно найти приближенные значения 0,4771 (недостаточное) и 0,4772 (избыточное); они разнятся на 0,0001, так что погрешность каждого из них по абсолютной величине не превосходит 0,0001. Если требуется, чтобы погрешность не превышала 0,00001, то можно найти значения 0,47712 (недостаточное) и 0,47713 (избыточное). О способах вычисления логарифмов см. § 272, а также § 242.

Замечание 1. Рациональные числа тоже приходится выражать приближенно. Так, вместо дроби $\frac{1}{3}$ часто берут ее недостаточные значения 0,33, 0,333 и т. д. (смотря по требуемой степени точности) или избыточные значения 0,34, 0,334 и т. д.

Замечание 2. *Мнимое* число имеет вид bi, где b — действительное число, а i — «мнимая единица», определяемая равенством $i^2 = -1$ (этому равенству не

---

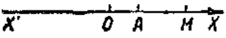
[1]) Отношение соизмеримых отрезков можно выразить отношением целых чисел, несоизмеримых — нельзя. В древнегреческой математике первоначально рассматривались отношения лишь целых чисел. Поэтому, когда были открыты несоизмеримые величины, их стали называть иррациональными, т. е. «не имеющими отношения» (латинский термин «иррациональный» есть перевод греческого слова «алогос»). Позднее (в 4 в. до н. э.) греческие математики (Евдокс и вслед за ним Евклид) стали рассматривать и отношения несоизмеримых величин. Когда для выражения этих отношений были введены новые числа, их тоже стали называть иррациональными.

удовлетворяет ни одно действительное число). Выражение вида $a+bi$ называется *комплексным* числом. Комплексные числа введены в алгебру в середине 16-го в. в связи с решением кубического уравнения[1]). С конца 17-го в. они применяются и в анализе.

В этой книге всюду, где не оговорено противного, все числа предполагаются действительными.

§ 194. Числовая ось

На прямой $X'X$ (черт. 204) выберем начало O, единицу масштаба OA и положительное направление (скажем, от X' к X). Тогда каждому действительному числу x соответствует определенная точка M, абсцисса которой равна x.



Черт. 204.

В анализе (для наглядности) числа изображаются указанным образом точками. Прямая $X'X$, на которой берутся эти точки, называется *числовой осью*.

§ 195. Переменные и постоянные величины

Переменная величина — это такая величина, которая в условиях данного вопроса может принимать *различные* значения. В противоположность переменной постоянная величина — это такая, которая в условиях данного вопроса сохраняет *одно и то же* значение. Одна и та же величина в одном вопросе может быть постоянной, в другом — переменной.

Пример 1. Температура T кипения воды в большинстве физических вопросов есть величина постоянная. Но там, где надо считаться с изменением атмосферного давления, T есть величина переменная.

Пример 2. В уравнении параболы $y^2 = 2px$ координаты x, y — переменные величины. Параметр p есть величина постоянная, если мы рассматриваем только одну параболу. Если же рассматривается множество парабол с общей осью OX и общей вершиной O, то параметр p является переменной величиной.

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z, u, v, w), а постоянные — первыми: a, b, c, ...

---

1) «Справочник по элементарной математике», III, 2 (стр. 125—128).

§ 196. Функция

Определение 1. Величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому из тех значений, которые может принимать x, соответствует одно или несколько определенных значений y. При этом переменная величина x называется *аргументом.*

Говорят также: величина y *зависит* от величины x; сообразно с этим аргумент называют *независимой* переменной, а функцию — *зависимой.*

Пример 1. Пусть T — температура кипения воды, а p — атмосферное давление. Наблюдением установлено, что каждому значению, которое может принимать p, соответствует всегда одно и то же значение T. Стало быть, T есть функция аргумента p.

Зависимость T от p позволяет, наблюдая температуру кипения воды, без барометра определить давление по таблице (приводится в сокращенном виде):

Таблица 1

T °C	70	75	80	85	90	95	100
p *мм*	234	289	355	434	526	634	760

В свою очередь p есть функция аргумента T; зависимость p от T позволяет, наблюдая давление, без термометра определить температуру кипения воды по той же таблице 1. Но удобнее пользоваться таблицей такого типа:

Таблица 2

p *мм*	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T °C	75,8	79,6	33,0	85,9	83,7	91,2	93,5	95,7	97,7

Здесь аргумент p растет через равные промежутки (как аргумент T в таблице 1).

Замечание 1. Таблицу 1 можно пополнить другими значениями аргумента T, скажем 65°, 73°, 104°. Но есть значения, которых температура кипения не может принимать; так, она не может быть меньше «абсолютного нуля» (−273°). Невозможному значению $T = -300°$, конечно, не соответствует никакое значение p. Вот почему в определении 1 сказано: «каждому из значений, которые *может* принимать x...» (а не «каждому значению x...»).

Пример 2. Тело брошено кверху; s — высота его над землей, t — время, протекшее с момента бросания.

Величина s есть функция аргумента t, ибо в каждый момент полета тело имеет определенную высоту. В свою очередь t есть функция аргумента s, ибо каждой высоте, на которой тело может находиться, соответствуют два определенных значения t (одно при поднятии, другое при спуске).

Определение 2. Если каждому значению аргумента отвечает одно значение функции, то функция называется *однозначной*; если два или больше, — то *многозначной* (*двузначной*, *трехзначной* и т. д.).

Во втором примере s — однозначная функция аргумента t, а величина t — двузначная функция аргумента s.

Если особо не оговорено, что функция многозначна, подразумевается, что она однозначна.

Пример 3. Сумма (s) углов многоугольника — функция числа (n) сторон. Аргумент n может принимать только целые значения, не меньше чем 3. Зависимость s от n выражается формулой

$$s = \pi(n-2)$$

(за единицу измерения углов принят радиан). В свою очередь n — функция аргумента s; зависимость n от s выражается формулой

$$n = \frac{s}{\pi}+2.$$

Аргумент s может принимать только значения, кратные π (π, 2π, 3π и т. д.).

Пример 4. Сторона x квадрата — функция его площади S $(x=\sqrt{S})$. Аргумент может принимать любые положительные значения.

Замечание 2. Аргумент — всегда переменная величина. Функция, как правило, — тоже переменная величина. Но не исключена возможность ее постоянства. Так, расстояние движущейся точки от неподвижной есть функция времени пребывания в пути и, как правило, меняется. Но при движении точки по окружности расстояние от центра постоянно.

В случае, когда функция является постоянной величиной, аргумент и функцию нельзя менять ролями (в нашем примере продолжительность движения по окружности не является функцией расстояния от центра).

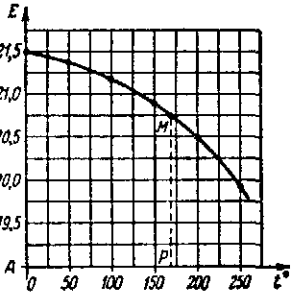
§ 197. Способы задания функции

Функция считается данной (известной), если для каждого значения аргумента (из числа возможных) можно узнать соответствующее значение функции. Наиболее употребительны три способа задания функции: а) табличный, б) графический, в) аналитический.

а) *Табличный способ* общеизвестен (таблицы логарифмов, квадратных корней и т. д.; см. также пример 1 § 196). Он сразу дает числовое значение функции. В этом — его преимущество перед другими способами.

Недостатки: 1) таблица трудно обозрима в целом; 2) она часто не содержит всех нужных значений аргумента.

б) *Графический способ* состоит в проведении линии (графика), у которой абсциссы изображают значения аргумента, а ординаты — соответствующие значения функции. Для удобства изображения масштабы на осях часто берутся разными.



Черт. 205.

Пример 1. На черт. 205 графически изображена зависимость модуля упругости E кованого железа (в $т/см^2$) от температуры t железа. Масштабы абсцисс (t) и ординат (E) обозначены числовыми пометками. Начало координат и ось абсцисс не начерчены для экономии места. По графику можно прочесть, например, что при $t = 170°$ модуль упругости $E \approx 20{,}75$ $т/см^2$.

Преимущества графического способа — легкость обозрения в целом и непрерывность изменения аргумента; недостатки: ограниченная степень точности и утомительность прочитывания значений функции с максимально возможной точностью.

в) *Аналитический способ* состоит в задании функции одной или несколькими формулами.

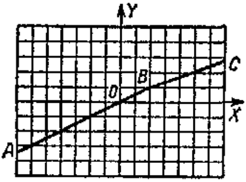
Пример 2. Функциональная зависимость между радиусом r окружности и ее длиной s выражается формулой

$$s = 2\pi r. \tag{1}$$

Пример 3. Функциональная зависимость между объемом V ($м^3$) и давлением p ($т/м^2$) 1 *кг* воздуха при температуре 0° выражается формулой

$$pV = 8{,}000. \tag{2}$$

Если зависимость между x и y выражена уравнением, разрешенным относительно y, то величина y называется *явной* функцией аргумента x, в противном случае — *неявной*. В примере 2 величина s — явная функция аргумента r, а r — неявная функция аргумента s. В примере 3 величина p — неявная функция аргумента V и величина V — неявная функция аргумента p. Если уравнение (2) написать в виде



Черт. 206.

$$p = \frac{3{,}000}{V}, \tag{3}$$

то p станет явной функцией аргумента V.

Пример 4. Функцию, заданную графически (черт. 206) ломаной линией ABC, можно представить двумя формулами. Именно, при $x < 2$ (т. е. для участка BA) берем формулу

$$y = \frac{1}{2}x,$$

а при $x > 2$ (т. е. для участка BC) — формулу

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x.$$

При $x = 2$ обе формулы дают $y = 1$ (точка B).

Пример 5. Расстояние (по шоссе) между пунктами A и B составляет 90 *км*. Автомашина прошла первую половину пути от A до B со скоростью 0,6 *км/мин*, вторую — со скоростью 0,9 *км/мин*. Пусть s (*км*) — расстояние машины от пункта A. Время t (мин.) пребывания в пути есть функция аргумента s. Ее можно задать двумя формулами:

$$t = \frac{s}{0,6} \qquad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant 45,$$

$$t = 75 + \frac{s}{0,9} \qquad \text{при } 45 \leqslant s \leqslant 90.$$

§ 198. Область определения функции

1. Совокупность всех значений, которые может принимать (в условиях вопроса) аргумент x функции $f(x)$, называется *областью определения* этой функции.

Замечание. Значению x, не входящему в упомянутую совокупность, не соответствует никакое значение функции.

Пример 1. В условиях примера 5 § 197 область определения функции $t = f(s)$ есть множество всех чисел от 0 до 90 (включая границы 0 и 90):

$$0 \leqslant s \leqslant 90.$$

Действительно, каждому расстоянию от 0 до 90 *км* соответствует определенное время t пребывания машины в пути, а расстояниям $s < 0$ и $s > 90$ не соответствует никакое значение t.

Пример 2. Сумма членов арифметической прогрессии

$$s = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

есть функция числа членов n; она выражается формулой

$$s = n^2.$$

Сама по себе эта формула имеет смысл для любого n. Но в данном вопросе n может принимать лишь значения 1, 2, 3, 4,... Область определения есть множество всех натуральных чисел (значениям $n = \frac{1}{2}$, $n = -5$, $n = \sqrt{3}$ и т. п. не соответствуют никакие значения функции).

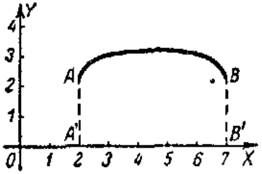
2. Часто функция задается формулой без указания области определения; тогда подразумевается, что область определения есть множество всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Пример 3. Функция s дана формулой $s = n^2$ (без указания области определения). Подразумевается, что область определения есть множество всех действительных чисел (ср. пример 2).

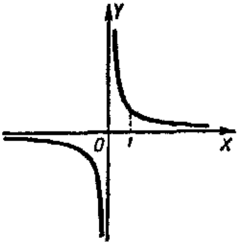
Пример 4. Функция y дана формулой

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x},$$

которая имеет смысл только при $2 \leq x \leq 7$. Область определения есть множество всех чисел от 2 до 7 (включая границы). График (черт. 207) располагается лишь над отрезком $A'B'$.

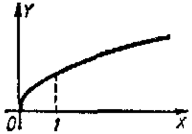


Черт. 207.



Черт. 208.

Пример 5. Функция y задана формулой $y = \frac{1}{x}$. Область определения — множество всех чисел, кроме нуля. При значении $x=0$ у графика (черт. 208) нет точки.



Черт. 209.

Пример 6. Область определения функции $y = \sqrt{x}$ есть совокупность положительных чисел и нуля (черт. 209).

3. Когда область определения функции есть совокупность натуральных чисел, функция называется *целочисленной*; о значениях целочисленной функции говорят, что они образуют *последовательность* или являются *членами последовательности*.

Пример 7. Функция $t_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ — целочисленная. Значения $t_1 = 1$, $t_2 = 1 \cdot 2 = 2$, $t_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \ldots$ образуют последовательность.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ обозначается $n!$ (читается «эн факториал»), так что данную функцию можно представить формулой

$$t_n = n!$$

Пример 8. Функция $u = \frac{1}{2^n}$, где n принимает значения 1, 2, 3, ..., — целочисленная. Значения $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$, ... (члены геометрической прогрессии) образуют последовательность.

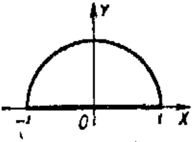
Пример 9. Функция $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ (сумма n членов геометрической прогрессии) — целочисленная. Значения $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{7}{8}$, ... образуют последовательность.

§ 199. Промежуток

Областью определения функций, рассматриваемых в анализе, часто является один или несколько «промежутков».

Промежутком (или *интервалом*) (a, b) называется совокупность чисел x, заключенных между числами a и b; в записи (a, b) первая буква обычно обозначает меньшее число, а вторая — большее, так что

$$a < x < b.$$



Черт. 210.

Числа a и b называются *концами* промежутка. Часто к совокупности точек промежутка присоединяются *концы* a и b или один из концов. Промежуток, к которому присоединены оба конца, называют *замкнутым промежутком* (или *отрезком*).

Промежутком (a, ∞) называется совокупность всех чисел, бо́льших a; промежутком $(-\infty, a)$ — совокупность всех чисел, меньших a; промежутком $(-\infty, \infty)$ — совокупность всех действительных чисел.

Пример 1. В условиях примера 5 § 197 область определения функции t есть замкнутый промежуток (0, 90), т. е. аргумент s может принимать все значения, удовлетворяющие неравенству

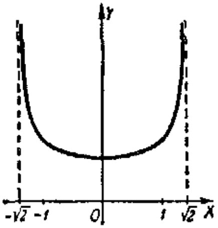
$$0 \leqslant s \leqslant 90.$$

Пример 2. Область определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$ есть замкнутый промежуток $(-1, 1)$. График (полуокружность) располагается над этим промежутком (черт. 210).

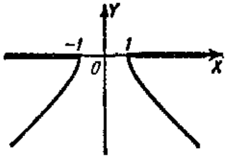
Пример 3. Область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

есть промежуток $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (незамкнутый). На концах промежутка функция не определена («обращается в бесконечность»). График (черт. 211) располагается над *внутренними* точками промежутка. Над концами промежутка и вне его у графика нет точек.



Черт. 211.



Черт. 212.

Пример 4. Область определения функции

$$y = -\sqrt{x^2-1}$$

есть пара промежутков $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ с присоединенными концами -1 и 1. График (нижняя половина гиперболы $x^2-y^2=1$, черт. 212) располагается под этими промежутками.

§ 200. Классификация функций

а) Функции подразделяются на *однозначные* и *многозначные* (§ 196, определение 2).

б) Функции, представленные формулами, подразделяются на *явные* и *неявные* (§ 197).

в) Функции подразделяются на *элементарные* и *неэлементарные*[1]).

Перечень так называемых *основных элементарных* функций дан в § 201; каждая из них представляет некоторое «действие» над аргументом (возведение в квадрат, извлечение кубического корня, логарифмирование, отыскание синуса и т. д.). Путем повторного выполнения этих действий, а также четырех действий арифметики (в огра-

---

[1]) Последнее подразделение носит скорее исторический, чем математический характер.

ниченном числе) получаются новые функции; они также причисляются к элементарным.

Пример 1. Функции $y=\frac{3+x^2}{1+\lg x}$, $y=\lg\sin\sqrt[3]{1-3\sin x}$, $y=\lg\lg(3+2\sqrt[3]{\sin x})$ — элементарные.

Функции, которые нельзя выразить указанным способом, считаются неэлементарными.

Пример 2. Функция $s=1+2+3+\ldots+n$ — элементарная, ибо ее можно выразить формулой $s=\frac{(1+n)n}{2}$, содержащей ограниченное число элементарных действий.

Пример 3. Функция $s=1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ — неэлементарная, ибо ее нельзя выразить *ограниченным* числом элементарных действий (чем больше n, тем больше умножений надо выполнить, а преобразовать выражение $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ к элементарному виду невозможно).

Замечание. Мы сознательно воздерживаемся здесь от подразделения функций на алгебраические и трансцендентные, так как точное определение алгебраической функции можно дать лишь на основе более тонких понятий (непрерывности или дифференцируемости). Сверх того, различать алгебраические и трансцендентные функции в рамках данной книги излишне.

§ 201. Основные элементарные функции

1) *Степенная* функция $y=x^n$ (n — постоянное действительное число).

При $n=0$ степенная функция есть постоянная величина ($y=1$) (ср. § 196, замечание 2).

2) *Показательная* функция $y=a^x$, где a — положительное число [1]) (*основание степени*).

3) *Логарифмическая* функция $y=\log_a x$, где a — положительное число, не равное единице [2]) (*основание логарифмов*).

4) *Тригонометрические* функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$.

5) *Круговые* (*обратные тригонометрические*) функции

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\operatorname{arcctg} x,\quad y=\operatorname{arcsec} x,\quad y=\operatorname{arccsc} x.$$

Определения и графики элементарных функций см. «Справочник по элементарной математике», раздел VI (стр. 382—394).

---

[1]) Некоторые авторы исключают случай $a=1$ (в этом случае y есть постоянная величина).

[2]) При основании $a=1$ ни одно число, кроме единицы, не имеет логарифма.

§ 202. Обозначение функции

Знак $f(x)$ (читается «эф от икс») есть сокращенная запись словесного выражения «функция от x».

Если рассматриваются две или несколько функций от x, которые могут быть различны между собой, то наряду с записью $f(x)$ используются другие, например, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$.

Запись

$$y = f(x) \tag{1}$$

выражает, что величина y равна какой-то функции от x, т. е. что y есть функция аргумента x.

Знак $f(x)$ может употребляться для обозначения как неизвестной, так и известной функций.

Примеры. 1) Запись $f(x) = \lg x$ выражает, что функция $f(x)$ — логарифмическая.

2) Запись $\varphi(x) = x^n$ выражает, что функция $\varphi(x)$ — степенная.

3) Запись $F(x) = \varphi(x) + f(x)$ означает, что функция $F(x)$ есть сумма функций $\varphi(x)$ и $f(x)$. Если $f(x) = \lg x$ и $\varphi(x) = x^n$, то $F(x) = \lg x + x^n$.

4) Запись $f_1(x) = f_2(x)$ означает, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны (либо тождественно, либо лишь при некоторых значениях x).

5) Запись $u = \varphi(v)$ означает, что величина u есть некоторая функция аргумента v.

Буква f (или F, φ и т. д.), употребляемая в этих записях, называется *характеристикой* функции.

Если надо выразить, что y находится в той же самой зависимости от x, в какой u находится от v, то при записи этих зависимостей пользуются одной и той же характеристикой, т. е. пишут:

$$u = \varphi(v) \text{ и } y = \varphi(x) \tag{2}$$

или

$$u = F(v) \text{ и } y = F(x) \tag{3}$$

и т. д.

Так, если зависимость u от v выражается формулой $u = \pi v^2$, то зависимость y от x в силу (2) выразится формулой $y = \pi x^2$. Если же $u = \frac{\lg v}{1+v}$, то $y = \frac{\lg x}{1+x}$ и т. д.

Примеры. 6) Если $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, то $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

7) Если $F(\alpha) = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$, то $F(\beta) = 1 - \operatorname{tg}^2\beta$, $F(\gamma) = 1 - \operatorname{tg}^2\gamma$ и т. д.

8) Если $f(x) = 4$ (т. е. при всех значениях аргумента функция имеет одно и то же значение; ср. § 196, замечание 2), то $f(y) = 4$, $f(z) = 4$ и т. д.

Записи $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a)$ и т. д. выражают, что берутся значения функции $f(x)$ при $x = 1$, при $x = \sqrt{3}$, при $x = a$ и т. д. или значения функции $f(y)$ при $y = 1$, $y = \sqrt{3}$, $y = a$ и т. д.

Примеры. 9) Если $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, то

$$f(1) = \sqrt{2}, \quad f(\sqrt{3}) = 2, \quad f(a) = \sqrt{a^2+1}.$$

10) Если $\varphi(\alpha) = \frac{1}{1+\sin^2\alpha}$, то $\varphi(0) = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\varphi(\pi) = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$.

§ 203. Предел последовательности

Число b называется *пределом последовательности* (§ 198, п. 3) $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, если по мере возрастания номера n член y_n неограниченно приближается к b.

Точный смысл выражения «неограниченно приближается» объяснен ниже (вслед за примером 1).

Запись[1]):

$$\lim y_n = b$$

или подробнее

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Значок $n \to \infty$ подчеркивает, что номер n неограниченно возрастает («стремится к бесконечности»).

Пример 1. Рассмотрим последовательность

$$y_1 = 0{,}3, \quad y_2 = 0{,}33, \quad y_3 = 0{,}333, \ \ldots \qquad (1)$$

Член y_n неограниченно приближается к $\frac{1}{3}$ (десятичные дроби 0,3, 0,33, ... дают все более точные выражения дроби $\frac{1}{3}$). Стало быть, $\frac{1}{3}$ есть предел последовательности (1)

$$\lim y_n = \frac{1}{3}.$$

[1]) Обозначение lim — сокращение латинского слова limes («лимес» — предел) и равнозначного французского limite (лимит).

Замечание. Разность $y_n - \frac{1}{3}$ последовательно равна

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, \quad y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, \quad y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}, \qquad (2)$$

т. е.

$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\cdot 10^n}. \qquad (3)$$

Неограниченность приближения y_n к $\frac{1}{3}$ выражается в том, что абсолютная величина разности (3), начиная с некоторого номера N, остается меньше *любого* (заранее данного) положительного числа ε. Так, если задать $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 2$, т. е., начиная со второго номера, абсолютная величина $\left| y_n - \frac{1}{3} \right|$ остается меньшей 0,01. Если задать $\varepsilon = 0{,}005 \left(= \frac{1}{200}\right)$, то по-прежнему $N = 2$. Если $\varepsilon = 0{,}001$, то $N = 3$; если $\varepsilon = 0{,}00001$, то $N = 5$ и т. д.

Теперь будет понятна следующая точная формулировка определения, приведенного в начале параграфа.

Определение. Число b называется *пределом последовательности* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, если абсолютная величина разности $y_n - b$, начиная с некоторого номера N, остается меньшей любого заранее данного положительного числа ε:

$$|y_n - b| < \varepsilon \text{ при } n > N$$

(номер N зависит от величины ε).

Пример 2. В последовательности $y_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (т. е. $y_1 = 1$, $y_2 = 2\frac{1}{2}$, $y_3 = 1\frac{2}{3}$, $y_4 = 2\frac{1}{4}$, ...) член y_n по мере возрастания номера n стремится к 2. Стало быть, 2 есть предел последовательности.

В самом деле, имеем $|y_n - 2| = \frac{1}{n}$; а величина $\frac{1}{n}$, начиная с некоторого номера, остается меньшей любого заранее данного положительного числа ε (если $\varepsilon = 2$, то начиная с первого номера; если $\varepsilon = 0{,}02$, то с 51-го и т. д.).

Пример 2 показывает, что члены последовательности могут быть то больше, то меньше предела. Они могут и равняться пределу (см. пример 3).

Пример 3. Последовательность

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = \frac{1}{2}, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = \frac{1}{3}, \quad \ldots,$$

заданная формулой $y_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$, имеет предел $b = 0$.

Действительно, величина $|y_n - 0| = \left| \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \right|$, начиная с некоторого номера, остается меньше любого заранее данного положительного числа ε (если $\varepsilon = \frac{1}{3}$, то начиная с седьмого номера; если $\varepsilon = 0{,}01$, то с 201-го и т. д.).

Пример 4. Последовательность $y_n = (-1)^n$ не имеет предела: члены $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, $y_4 = 1$ и т. д. не стремятся ни к какому числу.

§ 204. Предел функции

Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ (читается: «при x, стремящемся к a»), если, по мере того как x приближается к a — будь то справа или слева, — значение $f(x)$ неограниченно приближается[1]) («стремится») к b.

Запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Замечание 1. Предполагается, что функция $f(x)$ определена внутри некоторого промежутка, содержащего точку $x = a$ (во всех точках справа и слева от a); в самой же точке $x = a$ функция $f(x)$ либо определена, либо нет (последний случай не менее важен, чем первый).

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ (она определена во всех точках, кроме $x = \frac{1}{2}$). Возьмем $x = 6$. Тогда $f(x) = \frac{4 \cdot 6^2 - 1}{2 \cdot 6 - 1} = 13$. По мере приближения x к 6 (справа или слева) числитель $4x^2 - 1$ стремится к 143, а знаменатель — к 11. Вся дробь стремится к $\frac{143}{11} = 13$. Число 13 (равное значению функции при $x = 6$) есть вместе с тем предел функции при $x \to 6$:

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 13.$$

Пример 2. Рассмотрим ту же функцию $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$, но возьмем $x = \frac{1}{2}$. Функция $f(x)$ здесь не определена

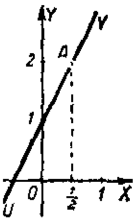
[1]) Математический смысл выражения «неограниченно приближается» разъясняется в § 205. Однако настоящее определение (с учетом замечания 1) вполне достаточно для понимания дальнейшего материала.

(формула дает неопределенное выражение $\frac{0}{0}$). Но предел функции при $x \to \frac{1}{2}$ существует. Он равен 2.

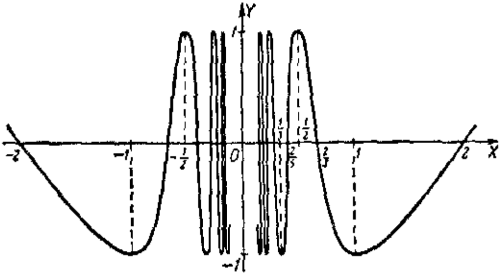
Действительно, выражение $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ неопределенно *только при x, равном $\frac{1}{2}$*, но *при приближении* к $\frac{1}{2}$ оно вполне определено и всегда равно $2x+1$. А последнее выражение стремится к числу 2. Значит,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2.$$

Замечание 2. График функции $y = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ есть прямая UV (черт. 213), лишенная точки $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. График функции $y = 2x+1$ есть та же прямая UV, взятая целиком.



Черт. 213.



Черт. 214.

Пример 3. Функция $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$ (она определена во всех точках, кроме $x = 0$) не имеет предела при $x \to 0$. Это видно на графике (черт. 214): когда абсцисса стремится к нулю, ордината ни к чему не стремится (точка графика совершает бесчисленные колебания с постоянным размахом).

§ 205. Определение предела функции

Неограниченность приближения переменной величины к постоянной сказывается (ср. § 203) в том, что их разность с некоторого момента будет оставаться по абсолютному значению меньшей любого заранее данного положительного числа. В соответствии с этим определению § 204 можно дать следующую точную формулировку.

Определение. Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если абсолютное значение разности $f(x) - b$ остается меньшим любого заранее данного положительного числа ε всякий раз, как абсолютное значение разности $x - a$ при x, не равном a, меньше некоторого положительного числа [1]) δ (зависящего от ε).

Короче (но менее точно): число b есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если величина $|f(x) - b|$ сколь угодно мала при достаточной малости величины $|x - a|$.

Пример. Число 2 есть предел функции $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ при $x \to \frac{1}{2}$ (ср. § 204, пример 2).

Действительно, потребуем, чтобы величина

$$\left| \frac{4x^2-1}{2x-1} - 2 \right|$$

$\left(\text{при } x \neq \frac{1}{2}\right)$ была меньше ε. Получим неравенство

$$|2x-1| < \varepsilon.$$

Оно равносильно неравенству

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, абсолютное значение разности $\frac{4x^2-1}{2x-1} - 2$ остается меньшим любого заранее данного положительного числа ε всякий раз, как абсолютное значение разности $x - \frac{1}{2}$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. В данном примере $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

§ 206. Предел постоянной величины

Определение. Пределом постоянной величины b называется сама величина b.

Это определение вводится для того, чтобы основные теоремы о пределах (§ 213) были верны во всех случаях без исключения. Оно согласуется с определениями § 203 и 205 (величина $|b - b| = 0$ меньше любого положительного числа ε).

§ 207. Бесконечно малая величина

Бесконечно малой величиной называется величина, предел которой равен нулю.

Пример 1. Функция $x^2 - 4$ есть бесконечно малая величина при $x \to 2$ и при $x \to -2$. При $x \to 1$ та же функция не является бесконечно малой.

---

[1]) δ — греческая буква «дельта» (малая).

Пример 2. Функция $1-\cos\alpha$ есть бесконечно малая величина при $\alpha\to 0$, ибо $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1-\cos\alpha)=0$.

Говорят также: «величина $1-\cos\alpha$ бесконечно мала при бесконечно малом α».

Пример 3. Величина $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ при $x\to\frac{1}{2}$ не является бесконечно малой, ибо ее предел равен 2 (§ 204, пример 2).

Пример 4. Целочисленная функция $y=\frac{1}{n!}$ (§ 198, пример 7) есть бесконечно малая величина, ибо предел последовательности $\frac{1}{1}, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$ равен нулю.

Замечание 1. Утверждения «число b есть предел величины y» и «разность $y-b$ есть бесконечно малая величина» равнозначны.

Пример 5. Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2$. Тот же факт выражается фразой «величина $\frac{4x^2-1}{2x-1}-2$ бесконечно мала».

Замечание 2. Из постоянных величин лишь нуль является бесконечно малой величиной (ср. § 206).

§ 208. Бесконечно большая величина

Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

Точный смысл выражения «неограниченно возрастает» разъясняется в конце параграфа.

Пример 1. Целочисленная функция $y=n!$ есть бесконечно большая величина, ибо члены последовательности $1, 1\cdot 2, 1\cdot 2\cdot 3, \ldots$ неограниченно возрастают.

Пример 2. Функция $\frac{1}{x}$ есть бесконечно большая величина при бесконечно малом x, ибо по мере приближения x к нулю абсолютное значение величины $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастает.

Пример 3. Функция $\operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая величина при $x\to\frac{\pi}{2}$.

Никакая постоянная величина не является бесконечно большой.

Замечание. Выражение «абсолютное значение величины y неограниченно возрастает» означает, что $|y|$ с некоторого момента остается большим любого заранее данного положительного числа. В соответствии с этим понятие бесконечно большой величины точно определяется следующим образом:

Определение 1. Целочисленная функция y есть бесконечно большая величина, если абсолютное значение y_n, начиная с некоторого номера N, остается бо́льшим любого заранее данного положительного числа M (ср. § 203).

Определение 2. Функция $f(x)$ есть бесконечно большая величина при $x \to a$, если абсолютное значение $f(x)$ остается бо́льшим любого заранее данного положительного числа M, всякий раз как абсолютное значение разности $x-a$ меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от M) (ср. § 205).

§ 209. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами

Если y — бесконечно большая величина, то $\frac{1}{y}$ — бесконечно малая; если y — бесконечно малая величина, то $\frac{1}{y}$ — бесконечно большая.

Пример 1. Величина $\frac{3}{x-2}$ — бесконечно большая при $x \to 2$. Обратная дробь $\frac{x-2}{3}$ $\left(= 1 : \frac{3}{x-2}\right)$ при $x \to 2$ бесконечно мала.

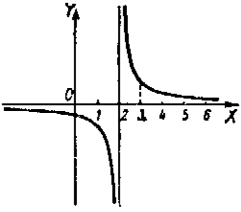
Пример 2. Величина $\operatorname{tg} x$ бесконечно мала при $x \to 0$, величина $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ бесконечно велика при $x \to 0$.

§ 210. Ограниченные величины

Величина называется *ограниченной*, если абсолютное ее значение не превосходит некоторого (постоянного) положительного числа M.

Пример 1. Функция $\sin x$ есть ограниченная величина на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \leqslant 1$.

Пример 2. Функция $\frac{1}{x-2}$ ограничена в промежутке (3, 5), но не ограничена в промежутке (2, 5), ибо аргумент x, оставаясь в промежутке (2, 5), может стремиться к 2, а тогда функция бесконечно велика (черт. 215).



Черт. 215.

Всякая постоянная величина является ограниченной. Всякая бесконечно большая величина не ограничена.

Замечание. Неограниченная величина может не быть бесконечно большой. Так, целочисленная функция $n+(-1)^n n$ не является бесконечно большой величиной, ибо при нечетных n она всегда равна нулю; но она и не ограничена, ибо при четных n, начиная с некоторого номера, остается больше любого положительного числа M.

§ 211. Расширение понятия предела

Если переменная величина s бесконечно велика, то (условно) говорят, что s «стремится к бесконечности» или «имеет бесконечный предел».

Запись:

$$s \to \infty \quad \text{или} \quad \lim s = \infty. \qquad (1)$$

Если бесконечно большая величина s с некоторого момента[1]) остается положительной, то говорят, что она «стремится к плюс бесконечности» и пишут:

$$s \to +\infty \quad \text{или} \quad \lim s = +\infty. \qquad (2)$$

Если бесконечно большая величина с некоторого момента остается отрицательной, то говорят, что она «стремится к минус бесконечности» и пишут:

$$s \to -\infty \quad \text{или} \quad \lim s = -\infty. \qquad (3)$$

Вместо записи (1) для большей выразительности иногда пишут:

$$s \to \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim s = \pm\infty. \qquad (4)$$

Пример 1. Функция $\operatorname{ctg} x$ при $x \to 0$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{ctg} x = \infty.$$

Чтобы подчеркнуть, что функция $\operatorname{ctg} x$ при $x \to 0$ может принимать как положительные значения (при $x > 0$), так и отрицательные (при $x < 0$), пишут:

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{ctg} x = \pm\infty.$$

Пример 2. Запись $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ означает, что когда абсолютное значение x неограниченно возрастает, функция $\frac{1}{x}$ стремится к нулю.

---

[1]) Выражение «с некоторого момента» уточняется таким же образом, как в § 208 (определения 1 и 2).

Пример 3. Можно написать:

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

или

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = \infty.$$

Вторая запись оставляет открытым вопрос о знаке функции 2^x. Но нельзя в левых частях вместо $x \to +\infty$ написать $x \to \infty$. Последняя запись включала бы и тот случай, когда $x \to -\infty$, а тогда функция 2^x стремится не к бесконечности, а к нулю, т. е.

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

Замечание. Бесконечно большая величина не имеет предела в ранее установленном смысле (§§ 203–205), ибо никак нельзя сказать, например, что «разность между $f(x)$ и ∞ остается меньшей заранее данного положительного числа». Таким образом, введение бесконечного предела *расширяет* понятие предела. В отличие от бесконечного предела предел, определенный ранее, называется *конечным*.

§ 212. Основные свойства бесконечно малых величин

Здесь предполагается, что рассматриваемые величины являются функциями *одного и того же* аргумента.

Теорема I. Сумма двух, трех и вообще любого *неизменного* числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Замечание 1. Если число слагаемых не остается неизменным, а меняется вместе с изменением аргумента, то теорема I может потерять силу. Так, если имеем n слагаемых, по отдельности равных $\frac{1}{n}$, то при $n \to \infty$ каждое слагаемое бесконечно мало, но сумма $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n$ равна 1.

Замечание 2. Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая (частный случай теоремы I).

Теорема II. Произведение ограниченной величины (§ 210) на величину бесконечно малую есть бесконечно малая величина.

В частности, произведение постоянной величины на величину бесконечно малую, а также произведение двух бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Теорема III. Частное от деления бесконечно малой величины на переменную величину, стремящуюся к пределу, *не равному нулю*, есть бесконечно малая величина.

Замечание 3. Если предел делителя равен нулю, т. е. если и делимое и делитель бесконечно малы, то частное может и не быть бесконечно малым. Так, величины x^2 и x^3 бесконечно малы при $x \to 0$. Частное $x^3 : x^2 = x$ тоже бесконечно мало, а частное $x^2 : x^3 = \frac{1}{x}$ бесконечно велико. Величины $6x^2+x^3$ и $2x^2$ бесконечно малы при $x \to 0$, а предел частного $(6x^2+x^3) : 2x^2$ равен 3.

§ 213. Основные теоремы о пределах

Здесь предполагается, что все данные величины (слагаемые, сомножители, делимое и делитель) зависят *от одного и того же* аргумента x и обладают *конечными* пределами (при $x \to a$ или при $x \to \infty$).

Теорема I. Предел суммы двух, трех и вообще любого *неизменного* числа слагаемых равен сумме пределов отдельных слагаемых (ср. § 212, замечание 1).

Короче: *предел суммы равен сумме пределов*

$$\lim (u_1+u_2+\ldots+u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k. \quad (1)$$

Здесь при всех знаках lim подразумевается значок $x \to a$ (или $x \to \infty$).

Теорема Ia (частный случай теоремы I):

$$\lim (u_1-u_2) = \lim u_1 - \lim u_2. \quad (2)$$

Теорема II. Предел произведения двух, трех и вообще любого *неизменного* числа сомножителей равен произведению их пределов:

$$\lim (u_1u_2\ldots u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \ldots \lim u_k. \quad (3)$$

Теорема IIa. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim cu = c \lim u. \quad (4)$$

Теорема III. Предел частного равен частному пределов, если предел делителя не равен нулю:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \quad (\lim v \neq 0). \quad (5)$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x+4}{x-2}=\lim_{x\to 5}(x+4):\lim_{x\to 5}(x-2)=9:3=3.$$

Если предел делителя равен нулю, а *предел делимого не равен нулю*, то частное имеет бесконечный предел.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-2}=\infty;$$

здесь

$$\lim_{x\to 2}(x-2)=0, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to 2}(x+4)=6\neq 0.$$

Замечание 1. Если и делимое и делитель стремятся к нулю, то частное может иметь как бесконечный, так и конечный предел (§ 212, замечание 3). Оно может и не иметь предела.

Так, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{\pi}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, но частное $x^2\cos\frac{\pi}{x}:x^2=\cos\frac{\pi}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$ (§ 204, пример 3).

Замечание. 2. В случае, когда $\lim v=0$, но $\lim u\neq 0$, теорема III останется верной, если ее истолковать в более широком смысле. Именно надо понимать запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{c}{0}$ (c — число, не равное нулю) в том смысле, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+4}{x-2}$.

Предел делителя равен нулю, а предел делимого равен 6. Понимая запись $\frac{6}{0}$ в указанном смысле, получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-2}=\frac{6}{0}=\infty$$

(ср. пример 2).

Замечание 3. В случае, когда $\lim v=0$ и $\lim u=0$, теорема III *неприменима*, так как выражение $\frac{0}{0}$ неопределенно. Но *неверного* результата теорема III не может дать и в этом случае. Пусть, например, надо найти

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}.$$

Применив (формально) теорему III, получаем $\frac{0}{0}$. Это неопределенное выражение служит сигналом, закрывающим прямой путь и заставляющим искать обходный (см. § 204, пример 2).

«Сокращать» на нуль и писать 1 вместо $\frac{0}{0}$, конечно, нельзя.

§ 214. Число e

Целочисленная функция $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ возрастает, но остается ограниченной[1]). А всякая возрастающая, но ограниченная величина имеет предел (конечный). Предел, к которому стремится $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при $n \to \infty$ обозначается e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (1)$$

Число e (оно иррационально) с точностью до шестой значащей цифры равно

$$e = 2{,}71828.$$

Число e во многих случаях выгодно брать за основание логарифмов (ср. § 242).

Функция $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом число e не только при целочисленных значениях n, но и тогда, когда n стремится к бесконечности, пробегая числовую прямую непрерывно. Более того, аргумент n может принимать как положительные, так и отрицательные значения, лишь бы n неограниченно росло по абсолютному значению. Чтобы

---

[1]) Может показаться, что неограниченное возрастание показателя степени должно повлечь неограниченное возрастание функции $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Но рост показателя компенсируется тем, что основание $1+\frac{1}{n}$ стремится к 1. Полезно проверить это на опыте; с помощью таблицы пятизначных логарифмов найдем, например, что

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}48,\ \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59,\ \left(1+\frac{1}{50}\right)^{50} = 2{,}69,\ \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}71.$$

Доказать ограниченность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ можно с помощью формулы бинома. Первый ее член есть 1, второй — тоже 1, третий, равный $\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, при всяком n меньше чем $\frac{1}{2}$, четвертый всегда меньше $\frac{1}{2^2}$, пятый — меньше $\frac{1}{2^3}$ и т. д. Поэтому всякое значение u_n меньше чем

$$1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right),$$

т. е. меньше чем 3.

оттенить это обстоятельство, заменим букву n буквой x и напишем:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2}$$

(см. § 211) или короче:

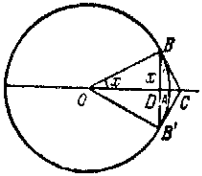
$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

§ 215. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Если x есть радианная мера угла, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1}$$

Пояснение. Примем радиус OA (черт. 216) за единицу длины. Тогда $x = \overset{\frown}{AB}$, $\sin x = BD$. Имеем: $x : \sin x = \overset{\frown}{AB} : BD = \overset{\frown}{B'AB} : B'B$. Дуга $\overset{\frown}{B'AB}$ больше хорды $B'B$. Поэтому $x : \sin x > 1$. С другой стороны, дуга $\overset{\frown}{B'AB}$ меньше, чем $BC + B'C = 2BC$, т. е. $\overset{\frown}{AB} < BC$. Стало быть, $x : \sin x < BC : BD = \sec x$ (из треугольника DBC).



Черт. 216.

Значит, отношение $\frac{x}{\sin x}$ заключено между единицей и $\sec x$. Но при $x \to 0$ величина $\sec x$ сама стремится к единице, а значит, $\frac{x}{\sin x}$ и подавно.

§ 216. Эквивалентные бесконечно малые величины

Определение. Две бесконечно малые величины называются *эквивалентными*[1]), если предел их отношения равен единице.

Пример 1. Величины x и $\sin x$, бесконечно малые при $x \to 0$, эквивалентны, ибо (§ 215) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Величины $2x$ и $\sin 2x$ эквивалентны. Величины x^2 и $\sin^2 x$ тоже эквивалентны.

---

[1]) Латинский термин «эквивалентный» означает «равноценный».

Пример 2. Бесконечно малые величины $\alpha^2+3\alpha^3$ и $\alpha^2-4\alpha^3$ $(\alpha\to 0)$ эквивалентны, ибо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^2+3\alpha^3}{\alpha^2-4\alpha^3}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1+3\alpha}{1-4\alpha}=1.$$

Эквивалентность бесконечно малых величин обозначается тем же знаком $\approx$, что и приближенное равенство. Таким образом,

$$\sin x\approx x,\quad \sin 2x\approx 2x,\quad \sin^2 x\approx x^2,\quad \alpha^2+3\alpha^3\approx\alpha^2-4\alpha^3.$$

Замечание. Эквивалентные величины и в самом деле приближенно равны (равенство тем точнее, чем ближе к нулю эквивалентные величины). Так, при $\alpha=0{,}01$ величина $\alpha^2+3\alpha^3$ равна 0,000103, а $\alpha^2-4\alpha^3=$ $=0{,}000096$. Разность составляет 0,000007, т. е. около 7% одной из эквивалентных величин. Чем они ближе к нулю, тем меньше этот процент.

Теорема. Предел частного (отношения) двух бесконечно малых величин не изменится, если одну из них (или обе) заменить эквивалентной величиной.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Заменяя $\sin 2x$ эквивалентной величиной $2x$, получаем.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Пример 5. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

Решение. Имеем:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

а так как

$$\sin^2\frac{x}{2}\approx\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=0.$$

§ 217. Сравнение бесконечно малых величин

Определение 1. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало [т. е. если $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, а значит (§ 209), $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$], то β называется величиной *высшего порядка малости* относительно α; при этом α называется величиной *низшего порядка малости* относительно β.

Определение 2. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, *не равному нулю*, то α и β называются бесконечно малыми *одного и того же* порядка малости [1]).

Замечание. Эквивалентные бесконечно малые величины всегда имеют один и тот же порядок [2]).

Пример 1. При $x \to 0$ величина x^5 имеет высший порядок малости относительно x^3, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = 0$. Наоборот, x^3 имеет низший порядок относительно x^5, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^5} = \infty$.

Пример 2. При $x \to 0$ величины $\sin x$ и $2x$ имеют один и тот же порядок малости, ибо (§ 215)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. При $x \to 0$ величина $1 - \cos x$ имеет высший порядок малости относительно $\sin x$, ибо (§ 216, пример 5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0.$$

---

1) Вместо отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ можно взять и обратное $\frac{\alpha}{\beta}$, ибо оно тоже будет иметь конечный предел, не равный нулю $\left(\text{если } \lim \frac{\beta}{\alpha} = m, \text{ то } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{m}\right)$.

2) Обратное предложение не верно. Так, величины $2x$ и $3x$ при $x \to 0$ имеют одинаковый порядок $\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}\right)$, но не эквивалентны.

При $\alpha \to 0$ каждая из величин $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \ldots$ имеет низший порядок относительно любой следующей за ней. Поэтому в основу дальнейшей классификации бесконечно малых величин кладется следующее определение.

Определение 3. Бесконечно малая величина β имеет m-й порядок малости относительно бесконечно малой α, если β имеет тот же порядок малости, что α^m, т. е. (см. определение 2) если отношение $\frac{\beta}{\alpha^m}$ имеет конечный предел, не равный нулю.

Пример 4. При $x \to 0$ бесконечно малая $\frac{1}{4}x^3$ имеет третий порядок относительно x, ибо $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{4}x^3 : x^3\right) = \frac{1}{4}$, бесконечно малая $\frac{1}{7}x^2$ — второй порядок, бесконечно малая $\sqrt{x}$ — порядок $\frac{1}{2}$.

Пример 5. Бесконечно малая $1-\cos\alpha$ $(\alpha \to 0)$ имеет второй порядок относительно α, ибо (см. замечание к определению 2)

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Пример 6. Бесконечно малая $\frac{1}{4}\alpha^3 + 1000\alpha^4$ $(\alpha \to 0)$ имеет третий порядок малости, т. е. тот же, что и слагаемое $\frac{1}{4}\alpha^3$, порядок которого ниже порядка другого слагаемого. Так будет с каждой суммой двух или нескольких слагаемых.

Пример 7. Бесконечно малая величина $x^3\sin^2 x$ $(x \to 0)$ имеет 5-й порядок малости относительно x (число 5 есть сумма порядков сомножителей; так будет с каждым произведением двух или нескольких сомножителей).

Теорема 1. Разность $\alpha-\beta$ двух эквивалентных бесконечно малых α и β имеет высший порядок как относительно α, так и относительно β.

Пример 8. При $x \to 0$ имеем $x \approx \sin x$. Поэтому $x - \sin x$ имеет высший порядок относительно x (а также относительно $\sin x$).

Теорема 2 (обратная). Если разность бесконечно малых величин α и β имеет высший порядок относительно одной из них (тогда она имеет высший порядок и относительно другой) то $\alpha \approx \beta$.

Пример 9. Бесконечно малые $\alpha^2+3\alpha^3$ и α^2 $(\alpha \to 0)$ разнятся на $3\alpha^3$; это — величина высшего порядка относительно α^2. Поэтому

$$\alpha^2+3\alpha^3 \approx \alpha^2.$$

§ 217а. Приращение переменной величины

Определение. Если переменная z принимает сначала значение $z=z_1$, а затем $z=z_2$, то разность z_2-z_1 называется *приращением* величины z. Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Слово «приращение» обозначается Δ [1]), запись Δz (читается «дельта зет») обозначает «приращение величины z», так что

$$\Delta z = z_2 - z_1.$$

Приращение постоянной величины равно нулю.

Пример. Начальное значение аргумента $x=3$, приращение аргумента $\Delta x = -2$. Найти соответствующее приращение Δy функции $y=x^2$.

Решение. Так как $x_1=3$ и $x_2-x_1=-2$, то $x_2=1$. Функция $y=x^2$ принимает сначала значение $y_1=3^2=9$, а затем $y_2=1^2=1$.

Приращение функции есть $\Delta y = y_2-y_1 = 1-9 = -8$.

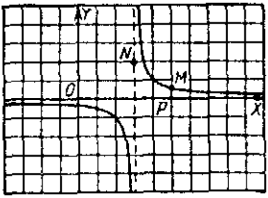
§ 218. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если соблюдаются следующие два условия:

1. При $x=a$ функция $f(x)$ имеет определенное значение b.

2. При $x \to a$ функция имеет предел, тоже равный b.

При нарушении хотя бы одного из этих условий функция называется *разрывной* в точке $x=a$.



Черт. 217.

Пример 1. Функция $f(x)=\frac{1}{x-3}$ непрерывна в точке $x=5$ (M на черт. 217), ибо 1) при $x=5$ она имеет определенное значение $f(5)=\frac{1}{2}$; 2) при $x\to 5$ она имеет предел, тоже равный $\frac{1}{2}$. Функция разрывна в точке $x=3$; здесь не выполнено первое условие (функция не имеет определенного значения). Второе условие тоже не выполнено.

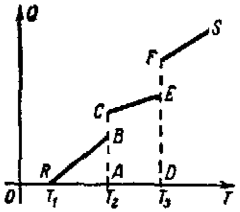
[1]) Δ — греческая буква «дельта» (прописная).

Пример 2. Зададим функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-3} \text{ при } x \neq 3,$$

$$\varphi(x) = 2 \qquad \text{при } x = 3.$$

Эта функция (ее график получается из графика примера 1 присоединением точки N; см. черт. 217) тоже разрывна в точке $x=3$. Первое условие теперь выполнено, но второе — нет: при $x \to 3$ функция $\varphi(x)$ имеет бесконечный предел.



Черт. 218.

Пример 3. Количество Q тепла, сообщаемого телу, есть функция температуры T тела. На черт. 218 показан график этой функции. Линия RB соответствует твердому состоянию (T_1 — начальная температура, T_2 — температура плавления), линия CE — жидкому (T_3 — температура газообразования), линия FS — газообразному. Функция Q разрывна при $T=T_2$ и $T=T_3$; в этих точках она не имеет определенного значения. Так, температуре плавления T_2 соответствуют всевозможные значения количества тепла от $Q=AB$ до $Q=AC$.

§ 219. Свойства функций, непрерывных в точке

Свойство 1. Сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке $x=a$, непрерывны в этой точке. Частное $\frac{u}{v}$ двух функций, непрерывных в точке $x=a$, непрерывно, если делитель v не обращается в нуль при $x=a$.

Свойство 2[1]. Если функция $f(x)$ непрерывна при некотором значении x, то приращение функции бесконечно мало при бесконечно малом приращении аргумента.

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x-3}$ непрерывна в точке $x=5$, причем $f(5) = \frac{1}{2}$ (§ 218, пример 1). При $x = 5+\Delta x$

---

[1]) Свойство 2 можно принять за определение непрерывности функции в точке (равносильное определению § 218).

функция получает значение

$$f(5+\Delta x)=\frac{1}{2+\Delta x}.$$

Приращение функции равно

$$f(5+\Delta x)-f(5)=-\frac{\Delta x}{2(2+\Delta x)}.$$

Оно бесконечно мало при бесконечно малом Δx.

§ 219а. Односторонний предел; скачок функции

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу b_1 по мере стремления x к a со стороны меньших значений, то число b_1 называют *левосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке $x=a$ и пишут:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b_1. \qquad (1)$$

Если $f(x)$ стремится к b_2 по мере стремления x к a со стороны бо́льших значений, то b_2 называют *правосторонним пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$ и пишут:

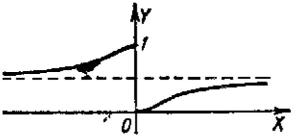
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b_2. \qquad (2)$$

Величина $|b_2-b_1|$ называется *скачком* или *разрывом*.

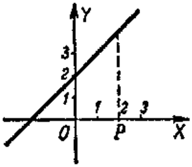
Левосторонний и правосторонний пределы объединяются наименованием «односторонний предел».

Пример 1. Функция Q, изображенная на черт. 218, имеет в точке T_2 левосторонний предел AB и правосторонний предел AC. Скачок изображается отрезком $BC=AC-AB$.

Пример 2. Функция $f(x)=\frac{1}{1+2^{1/x}}$ (черт. 219) в точке $x=0$ имеет правосторонний предел $b_2=0$ и левосторонний предел $b_1=1$. Скачок равен единице.



Черт. 219.



Черт. 220.

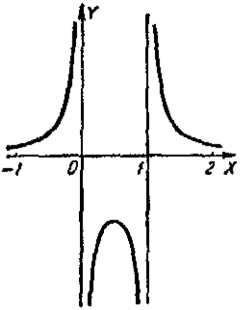
Два односторонних предела функции $f(x)$ в точке $x=a$ могут быть равными. Если при этом функция определена в самой точке $x=a$, то она непрерывна в этой точке.

Пример 3. У функции $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ оба односторонних предела в точке $x=2$ равны 4. Но в самой точке $x=2$ функция не определена и потому разрывна. График (черт. 220) есть прямая $y=x+2$, лишенная точки $M(2; 4)$. Если же добавочно условиться, что $f(2)=4$, то функция $f(x)$ станет непрерывной. График пополнится точкой M.

Если с помощью добавочного условия, определяющего функцию $f(x)$ в точке a, можно разрывную функцию превратить в непрерывную, то разрыв называется *устранимым*. В примере 3 разрыв устраним, в примерах 1—2 неустраним.

§ 220. Непрерывность функции на замкнутом промежутке

Определение. Функция называется *непрерывной на замкнутом промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка, включая оба конца.



Черт. 221.

Аналогично определяется непрерывность функции в незамкнутых промежутках.

Пример. Рассмотрим функцию $\frac{1}{4x(x-1)}$ (черт. 221). Она непрерывна на замкнутом промежутке $\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$, но разрывна на замкнутом промежутке $(0, 1)$, ибо оба конца $x=0$ и $x=1$ — точки разрыва. Она разрывна и на замкнутом промежутке $(1, 2)$, ибо один конец $x=1$ — точка разрыва. Она разрывна также на замкнутом промежутке $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, ибо внутри промежутка лежит точка разрыва ($x=1$).

§ 221. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке (a, b). Тогда она обладает следующими свойствами.

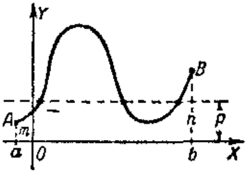
1. Среди значений, которые функция принимает в точках данного промежутка, имеется самое большое и самое малое.

Замечание 1. Среди значений, которые принимает функция $f(x)$ в точках *незамкнутого* промежутка (a, b), может не быть самого большого или самого малого.

Так, в *незамкнутом* промежутке (1, 3) функция $2x$ не обладает ни наименьшим значением, ни наибольшим (она могла бы принять эти значения на концах $x=1$ и $x=3$, но из незамкнутого промежутка концы исключены).

2. Если m есть значение функции $f(x)$ при $x=a$ и n — значение $f(x)$ при $x=b$, то функция $f(x)$ принимает внутри промежутка (a, b) по крайней мере по одному разу всякое значение p, заключенное между m и n.

Геометрически: всякая прямая, проведенная параллельно оси абсцисс выше точки A, но ниже точки B



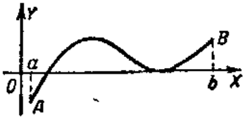
Черт. 222.

(черт. 222), встретит по крайней мере один раз график AB (на черт. 222 — три раза).

Замечание 2. Разрывная функция может не обладать свойством 2 (см. черт. 218 и 219).

2а. В частности, если на одном конце промежутка функция имеет положительное, а на другом — отрицательное значение, то внутри промежутка она по крайней мере один раз обращается в нуль.

Геометрически: если одна из точек A, B (черт. 223) лежит выше оси OX, а другая ниже, то



Черт. 223.

график AB по крайней мере один раз встречает OX (на черт. 223 — два раза).

3. Если переменные x и x' изменяются так, что разность $x-x'$ бесконечно мала, то разность $f(x)-f(x')$ тоже бесконечно мала.

Замечание 3. Если x' есть постоянная величина c, то разность $f(x)-f(c)$ является бесконечно малой по свойству 2 § 219. В силу свойства 3 настоящего параграфа при бесконечной малости $x-x'$ разность $f(x)-f(x')$ бесконечно мала не только тогда, когда x' постоянна, но и тогда, когда x' переменна.

Замечание 4. При непрерывности функции в *незамкнутом* промежутке свойство 3 может не иметь места. Так, функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в промежутке (0, 1), лишенном конца $x=0$. Пусть x и x' изменяются так, что $x'=2x$ и $x \to 0$. Тогда разность $x-x'$ бесконечно мала, но разность $f(x)-f(x')=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}$ бесконечно велика.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 222. Вводные замечания

Источником дифференциального исчисления были два вопроса:

1) о разыскании касательной к произвольной линии (§ 225),

2) о разыскании скорости при произвольном законе движения (§ 223).

Оба они привели к одной и той же вычислительной задаче, которая и легла в основу дифференциального исчисления. Эта задача состоит в том, чтобы по данной функции $f(t)$ отыскать другую функцию $f'(t)$, получившую позднее название *производной* и представляющую скорость изменения функции $f(t)$ относительно изменения аргумента (точное определение производной см. § 224).

В таком общем виде задача была поставлена Ньютоном и в сходной форме Лейбницем в 70-х и 80-х годах 17-го в. Но еще в предыдущие полвека Ферма, Паскаль и другие ученые фактически дали правила для разыскания производных для многих функций.

Ньютон и Лейбниц завершили это развитие; они ввели общие понятия производной [1]) и дифференциала [2]), а также обозначения, очень облегчавшие вычисления; они развили аппарат дифференциального исчисления до максимальных пределов и применили дифференциальное исчисление к решению многих задач геометрии и механики. Недостаток логической строгости был восполнен только в 19-м в. (см. § 191).

---

[1]) По Ньютону «флюксия». Термин «производная» введен (Арбогастом) в конце 18-го в.

[2]) Термин «дифференциал» (от лат. differentia) введен Лейбницем.

§ 223. Скорость [1])

Чтобы определить скорость поезда, мы отмечаем, на каком километре пути он находился в момент $t=t_1$, а затем в момент $t=t_2$. Пусть это будут расстояния $s=s_1$ и $s=s_2$. Приращение (§ 217а) пути $\Delta s = s_2 - s_1$ мы делим на приращение времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Частное

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

даст *среднюю скорость* поезда за промежуток (t_1, t_2). При неравномерном движении средняя скорость недостаточно характеризует быстроту движения в момент $t=t_1$. Но чем меньше Δt, тем точнее характеризуется эта быстрота. Поэтому *скоростью в момент* $t=t_1$ называют предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *при* $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Пример. Свободное падение тела. Имеем:

$$s = \frac{1}{2} g t^2. \tag{3}$$

Так как $t_2 = t_1 + \Delta t$, то

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Значит,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2}{\Delta t}. \tag{4}$$

Вычислив предел, найдем:

$$v = g t_1. \tag{5}$$

Обозначение t_1 мы ввели, чтобы оттенить *постоянство t при вычислении предела*. Так как t_1 есть произвольное значение времени, значок 1 лучше отбросить; тогда из формулы

$$v = gt \tag{5a}$$

видно, что скорость v, как и путь s, есть функция времени. Вид функции v всецело зависит от вида функции s, так что функция s как бы «производит» функцию v. Отсюда название «производная функция».

---

[1]) Этот параграф служит введением к § 224.

§ 224. Определение производной функции [1]

Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x, определенная в промежутке (a, b), и пусть x — какая-либо точка этого промежутка. Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное). Функция $y=f(x)$ *получит приращение* Δy, равное

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \tag{1}$$

При бесконечно малом Δx приращение Δy тоже бесконечно мало (§ 219).

Предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{2}$$

сам является функцией от аргумента x (ср. § 223). Эта функция называется *производной* от функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$ или y'.

Короче: *производной функцией называется предел* [2], *к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента.*

Замечание. *В процессе разыскания предела* (2) величина x рассматривается как постоянная.

Пример 1. Найти значение производной от функции $y=x^2$ при $x=7$.

Решение. При $x=7$ имеем $y=7^2=49$. Дадим аргументу x приращение Δx. Аргумент станет равным $7+\Delta x$, а функция получит значение $(7+\Delta x)^2$.

Приращение Δy функции равно

$$\Delta y = (7+\Delta x)^2 - 7^2 = 14\Delta x + \Delta x^2.$$

Отношение этого приращения к приращению Δx есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 14 + \Delta x.$$

Находим предел, к которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14+\Delta x) = 14.$$

---

[1] Рекомендуется сначала прочесть § 223.

[2] О случаях, когда этот предел не существует, см. § 231.

Искомое значение производной равно 14.

Пример 2. Найти производную от функции $y=x^2$ (при произвольном значении x). Даем аргументу приращение Δx. Аргумент получает значение $x+\Delta x$. Приращение Δy функции есть $(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно $\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$. Производная функция есть предел этого отношения при $\Delta x\to 0$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Искомая производная $y'=2x$. При $x=7$ получаем $y'=14$ (ср. пример 1).

Пример 3. Найти производную от функции $y=\sin x$ (аргумент выражается в радианной мере).

Решение. Даем аргументу приращение Δx. Приращение функции есть

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно

$$\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Предел этого отношения при $\Delta x\to 0$ (§§ 213, 215) равен

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x.$$

Стало быть, $y'=\cos x$.

§ 225. Касательная

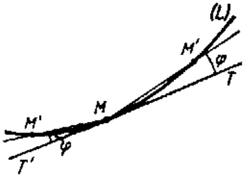
Касательной к линии L в точке M (черт. 224) называется прямая $T'MT$, с которой стремится совпасть секущая[1]) MM', когда точка M', оставаясь на L, стремится к M — будь то справа или слева.

Замечание. Из черт. 225 видно, что касательная может, кроме точки касания, иметь с кривой другие общие точки.

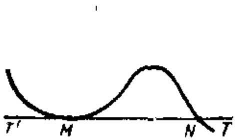
---

1) Выражение «стремится совпасть» означает, что острый угол между неподвижной прямой $T'MT$ и вращающейся прямой MM' стремится к нулю.

Если линия L есть график функции $y = f(x)$, то угловой коэффициент касательной равен значению производной функции в соответствующей точке[1]).



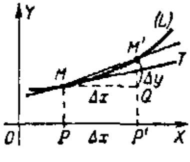
Черт. 224.



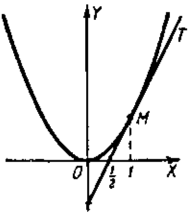
Черт. 225.

Это видно из черт. 226. Угловой коэффициент k секущей равен $k = \frac{QM'}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если M' стремится к M, то k имеет пределом угловой коэффициент m касательной. Значит, $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. (§ 224) $m = f'(x)$.

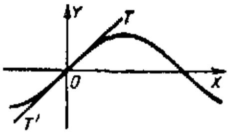
Пример 1. Найти угловой коэффициент и уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке M (1; 1) (черт. 227).



Черт. 226.



Черт. 227.



Черт. 228.

Решение. Имеем $y' = 2x$ (§ 224, пример 2). При $x = 1$ получаем $y' = 2$. Искомый угловой коэффициент касательной $m = 2$. Уравнение касательной будет $y - 1 = m(x - 1)$, т. е. $y = 2x - 1$.

Пример 2. Найти уравнение касательной к линии $y = \sin x$ (синусоида, черт. 228) в точке O (0, 0).

---

[1]) Если график не имеет касательной, функция $f(x)$ не имеет производной и наоборот.

Решение. Имеем $y' = \cos x$ (§ 224, пример 3). При $x = 0$ получаем $y' = 1$. Уравнение касательной есть $y = x$.

Отметим, что синусоида располагается по обе стороны от касательной $T'OT$.

Пример 3. Угловой коэффициент прямой линии $y = ax + b$ (он равен a) есть производная от функции $y = ax + b$ (касательная к прямой линии есть она сама).

§ 226. Производные некоторых простейших функций

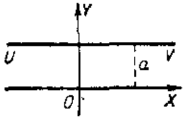
1. *Производная постоянной величины* равна нулю

$$(a)' = 0. \tag{1}$$

Физический смысл (§ 223): скорость неподвижной точки равна нулю.

Геометрический смысл: угловой коэффициент прямой $y = a$ (UV на черт. 229) равен нулю (ср. § 225, пример 3).

Замечание. При некоторых значениях x функция может иметь нулевую производную и не будучи постоянной. Так, производная $(\sin x)' = \cos x$ (§ 224, пример 3) равна нулю при $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$ и т. д.



Черт. 229.

Но если производная $f'(x)$ равна нулю *тождественно*, то функция $f(x)$ обязательно постоянна (§ 265, теорема 1).

2. *Производная независимой переменной* равна единице:

$$(x)' = 1. \tag{2}$$

Геометрический смысл: угловой коэффициент прямой $y = x$ равен единице.

Физический смысл: если путь, пройденный телом, численно равен времени пребывания в движении, то скорость численно равна единице.

3. *Производная линейной функции* $y = ax + b$ есть постоянная величина a:

$$(ax + b)' = a. \tag{3}$$

4. *Производная степенной функции* равна произведению показателя степени на степенную функцию, у которой показатель на единицу меньше:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{4}$$

Примеры.

1) $(x^2)' = 2x$.

2) $(x^3)' = 3x^2$.

3) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

§ 227. Свойства производной

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$[af(x)]' = af'(x).$$

Примеры.

1) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3\cdot 2x = 6x$.

2) $\left(\frac{5}{x^2}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 5\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{10}{x^3}$.

3) $(\sqrt{2x})' = \sqrt{2}(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2. Производная от алгебраической суммы нескольких функций (взятых в неизменном числе) равна алгебраической сумме их производных

$$[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]' = f_1'(x)+f_2'(x)-f_3'(x).$$

Примеры.

4) $(0{,}3x^2-2x+0{,}8)' = (0{,}3x^2)' - (2x)' + (0{,}8)' = 0{,}6x-2$ (производная последнего слагаемого равна нулю; § 226, п. 1).

5) $\left(\frac{3}{x^2} - 6\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{3}{x^2}\right)' - 6(\sqrt{x})' = -\frac{6}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

§ 228. Дифференциал

Определение. Пусть приращение (§ 217а) функции $y = f(x)$ разбито на сумму двух членов:

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

где A не зависит от Δx (т. е. постоянно при данном значении аргумента x) и α имеет высший порядок (§ 217) относительно Δx (при $\Delta x \to 0$).

Тогда первый («главный») член, пропорциональный Δx, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$ (читается: «дэ игрек», «дэ эф от икс»).

Пример 1. Возьмем функцию $y = x^3$. Тогда[1])

$$\Delta y = 3x^2 \Delta x + (3x \Delta x^2 + \Delta x^3). \tag{2}$$

Здесь коэффициент $A = 3x^2$ не зависит от Δx, так что первый член пропорционален Δx, другой же член $\alpha = 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$ имеет высший (второй) порядок относительно Δx. Стало быть, член $3x^2 \Delta x$ есть дифференциал функции x^3:

$$dy = 3x^2 \Delta x \text{ или } d(x^3) = 3x^2 \Delta x. \tag{3}$$

Теорема 1. Коэффициент A равен производной $f'(x)$; иными словами, *дифференциал функции равен произведению производной на приращение аргумента*:

$$dy = y' \Delta x \tag{4}$$

или

$$df(x) = f'(x) \Delta x. \tag{4a}$$

Пример 2. В примере 1 мы нашли, что $d(x^3) = 3x^2 \Delta x$. Коэффициент $3x^2$ есть производная функции x^3.

Пример 3. Если $y = \frac{1}{x}$, то $y' = -\frac{1}{x^2}$ (§ 226, п. 4). Поэтому $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

Проверим это. Имеем $\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$. Если разбить это выражение на два члена, из которых первый есть $-\frac{\Delta x}{x^2}$, то второй будет $\frac{\Delta x^2}{x^2(x+\Delta x)}$. Второй член имеет высший (второй) порядок относительно Δx[2]).

Теорема 2. Если производная не равна нулю, то дифференциал функции и ее приращение эквивалентны (при $\Delta x \to 0$); если производная равна нулю (тогда и дифференциал равен нулю), то не эквивалевтны.

Пример 4. Если $y = x^2$, то $\Delta y = 2x \Delta x + \Delta x^2$, а $dy = 2x \Delta x$. При $x = 3$ величины $\Delta y = 6\Delta x + \Delta x^2$ и $dy = 6\Delta x$ эквивалентны, при $x = 0$ величины $\Delta y = \Delta x^2$ и $dy = 0$ не эквивалентны.

---

[1]) Запись Δx^2 обозначает то же, что $(\Delta x)^2$ (скобки опускаются) Если же нужно обозначить приращение функции x^2, то пишут $\Delta(x^2)$.

[2]) Предполагается, что $x \neq 0$ (при $x = 0$ сама функция $\frac{1}{x}$ не определена).

Эквивалентность дифференциала и приращения часто используется в приближенных вычислениях (как правило, вычислить дифференциал легче, чем производную).

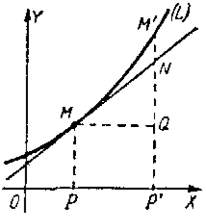
Пример 5. Имеем металлический куб с ребром $x = 10{,}00$ *см*. При нагревании ребро удлинилось на $\Delta x = 0{,}01$ *см*. Насколько увеличился объем V куба?

Решение. Имеем $V = x^3$, так что $dV = 3x^2\Delta x = 3\cdot 10^2\cdot 0{,}01 = 3$ (*см*^{3}). Увеличение объема ΔV эквивалентно дифференциалу dV, так что $\Delta V \approx 3$ *см*^{3}. Полное вычисление дало бы $\Delta V = 10{,}01^3 - 10^3 = 3{,}003001$. Но в этом результате все цифры, кроме первой, ненадежны; значит, все равно надо округлить до 3 *см*^{3}.

Другие примеры применения дифференциала в приближенных вычислениях см. § 243 (пример 4) и § 248.

§ 229. Механическое истолкование дифференциала

Пусть $s = f(t)$ — расстояние прямолинейно движущейся точки от начального положения (t — время пребывания в пути). Приращение Δs — это путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt, а дифференциал $ds = f'(t)\,\Delta t$ (§ 228, теорема 1) — это путь, который точка прошла бы за то же время Δt, если бы она сохранила скорость $f'(t)$, достигнутую к моменту t. При бесконечно малом Δt воображаемый путь ds отличается от истинного Δs на бесконечно малую высшего порядка относительно Δt. Если скорость в момент t не равна нулю, то ds дает приближенную величину малого смещения точки (ср. § 228, теорема 2).



Черт. 230.

§ 230. Геометрическое истолкование дифференциала

Пусть линия L (черт. 230) есть график функции $y = f(x)$. Тогда

$$\Delta x = MQ, \quad \Delta y = QM'.$$

Касательная MN разбивает отрезок Δy на две части, QN и NM'. Первая пропорциональна Δx и равна $QN = MQ\cdot \operatorname{tg}\angle QMN = \Delta x\, f'(x)$ (см. § 225), т. е. QN есть дифференциал dy.

Вторая NM' дает разность $\Delta y - dy$; она имеет высший порядок относительно Δx. В данном случае, когда $f'(x) \neq 0$ (касательная не параллельна OX), отрезки QM' и QN

эквивалентны (§ 228, теорема 2); иными словами, NM' имеет высший порядок также относительно $\Delta y = QM'$. Это видно на чертеже (с приближением M' к M отрезок NM' составляет все меньший процент отрезка QM').

Итак, *дифференциал функции графически изображается приращением ординаты касательной.*

§ 231. Дифференцируемые функции

Непрерывная функция, имеющая (в данной точке) дифференциал, называется *дифференцируемой* (в рассматриваемой точке).

Разрывная функция не может иметь в точке разрыва ни производной, ни дифференциала (график не имеет касательной; см. черт. 214 на стр. 260 и черт. 219 на стр. 275).

Функция, непрерывная в данной точке, может не иметь дифференциала в этой точке. Ниже рассмотрены три характерных случая.

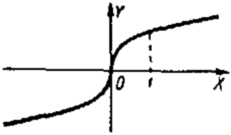
Случай 1. Функция $y=f(x)$ имеет в рассматриваемой точке *бесконечную производную*, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

(т. е. Δy имеет низший порядок относительно Δx). График имеет вертикальную касательную.



Черт. 231.

Запись (условная):

$$f'(x) = \infty.$$

Пример 1. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (черт. 231) не дифференцируема в точке $x=0$. Величина

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x}$$

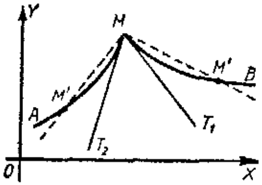
имеет при $\Delta x \to 0$ бесконечный предел $+\infty$.

Касательная в точке $x=0$ совпадает с осью OY.

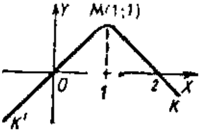
Замечание 1. Функция, имеющая (в данной точке) *конечную* производную, дифференцируема. Обратно, дифференцируемая функция имеет конечную производную.

Случай 2. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (т. е. функция $y=f(x)$ не имеет производной), но имеет правосторонний предел (при $\Delta x \to +0$, § 219а) и левосторонний (при $\Delta x \to -0$). Первый называется *правосторонней производной* и обозначается $f'(x+0)$, второй — *левосторонней* и обозначается $f'(x-0)$.

В рассматриваемой точке (M на черт. 232) у графика нет касательной, но есть *правосторонняя касательная* MT_1 и *левосторонняя касательная* MT_2, т. е. секущая MM' стремится к совпадению с MT_1, когда M' стремится к M справа, и с MT_2, когда M' стремится к M слева.



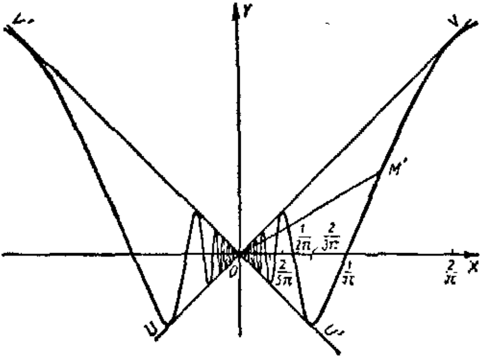
Черт. 232.



Черт. 233.

П р и м е р 2. Функция $f(x)=1-|1-x|$ (черт. 233) не дифференцируемая в точке $x=1$. Линия $K'MK$ не имеет касательной в точке $M(1;1)$. Правосторонняя производная $f'(1+0)=-1$, левосторонняя производная $f'(1-0)=1$.

С л у ч а й 3. У функции $y=f(x)$ нет правосторонней или левосторонней производной (или нет ни той, ни другой). График не имеет соответствующей односторонней касательной.



Черт. 234.

П р и м е р 3. Функция, заданная формулой $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (черт. 234), при дополнительном $f(0)=0$ $\left(\text{выражение } \sin\frac{1}{x} \text{ не имеет смысла при } x=0\right)$ непрерывна в точке $x=0$.

Однако, когда M' стремится к O справа (или слева), секущая OM' колеблется между прямыми $UV(y=x)$ и $U'V'(y=-x)$ и не стремится ни к какой прямой. График не имеет в точке O ни правосторонней, ни левосторонней касательной, а функция $f(x)$—ни правосторонней, ни левосторонней производной.

Замечание 2. Можно придумать даже такие непрерывные функции, которые ни в одной точке не имеют производной [1]). Значит, существование производной не вытекает логически из непрерывности функций. Это было впервые указано великим русским математиком Н. И. Лобачевским [2]).

§ 232. Дифференциалы некоторых простейших функций

1. Дифференциал постоянной величины равен нулю:

$$da = 0. \tag{1}$$

2. Дифференциал независимой переменной равен ее приращению:

$$dx = \Delta x. \tag{2}$$

3. Вообще дифференциал линейной функции равен ее приращению:

$$d(ax+b) = \Delta(ax+b) = a\,\Delta x. \tag{3}$$

Для остальных функций дифференциал и приращение *не равны*. (Но они разнятся на величину высшего порядка малости относительно Δx; § 228).

4. Дифференциал степенной функции x^n равен $nx^{n-1}\,\Delta x$ [ср. (4) § 233]:

$$dx^n = nx^{n-1}\,\Delta x. \tag{4}$$

---

[1]) Линию, графически изображающую такую функцию, мы не можем ни построить, ни даже вообразить; ведь представление о линии мы получаем, отвлекаясь от свойств реальных предметов, и оно оказывается неразрывно связанным с понятием о направлении. Уже в примере 3 «линия» $y=x\sin\frac{1}{x}$ лишена направления в точке $x=0$. Но здесь нашему воображению помогает то, что в любой близости от точки O график имеет определенное направление.

[2]) Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) обессмертил свое имя созданием неевклидовой геометрии. В области алгебры и анализа ему принадлежат выдающиеся работы. Мировоззрение Н. И. Лобачевского носит ярко выраженный материалистический характер. Велики заслуги Н. И. Лобачевского как передового общественного деятеля, педагога и организатора народного просвещения. Вся жизнь великого ученого связана с Казанским университетом, где он воспитывался сам и где потом был профессором и ректором.

§ 233. Свойства дифференциала

1. Постоянный множитель можно вынести за знак дифференциала:

$$d[af(x)] = a\,df(x). \tag{1}$$

2. Дифференциал алгебраической суммы нескольких функций (взятых в неизменном числе) равен алгебраической сумме их дифференциалов:

$$d[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)] = df_1(x)+df_2(x)-df_3(x). \tag{2}$$

3. Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента:

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{3}$$

Вытекает из § 228 (теорема 1) и § 232, п. 2.

В частности (ср. § 232, п. 4),

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx. \tag{4}$$

§ 234. Инвариантность выражения $f'(x)\,dx$

Выражение $f'(x)\Delta x$ представляет (§ 228, теорема 1) дифференциал $df(x)$, когда x рассматривается как аргумент. Если же сама величина x рассматривается как функция некоторого аргумента t, то выражение $f'(x)\Delta x$, как правило, *не представляет дифференциала* (см. ниже пример 1); исключение составляет лишь случай линейной зависимости $x = at+b$.

Напротив, формула (3) § 233

$$df(x) = f'(x)\,dx \tag{1}$$

верна как в том случае, когда x есть аргумент (тогда $dx = \Delta x$), так и в случае, когда x есть функция от t (см. ниже пример 2).

Это свойство выражения $f'(x)\,dx$ называется его *инвариантностью* (неизменностью).

Пример 1. Выражение $2x\,\Delta x$ представляет дифференциал функции $y = x^2$, когда x есть аргумент.

Положим теперь

$$x = t^2 \tag{2}$$

и будем считать t аргументом. Тогда

$$y = x^2 = t^4. \tag{3}$$

Из (2) находим:

$$\Delta x = 2t\,\Delta t + \Delta t^2. \tag{4}$$

Значит,

$$2x\,\Delta x = 2t^2\,(2t\,\Delta t + \Delta t^2). \tag{5}$$

Это выражение не пропорционально Δt и потому теперь $2x\,\Delta x$ не является дифференциалом. Дифференциал функции y находим из (3):

$$dy = 4t^3\,\Delta t. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), видим, что $2x\,\Delta x$ и dy разнятся на величину $2t^2\,\Delta t^2$, имеющую второй порядок относительно Δt.

Пример 2. Выражение $2x\,dx$ представляет дифференциал функции $y = x^2$ *при любом аргументе* t. Пусть, например, $x = t^2$. Тогда

$$dx = 2t\,\Delta t.$$

Значит,

$$2x\,dx = 2t^2\cdot 2t\,\Delta t = 4t^3\,\Delta t.$$

Сравнив с (6), видим, что

$$dy = 2x\,dx.$$

§ 235. Выражение производной через дифференциалы

Производная от функции y по аргументу x равна отношению дифференциала переменной y к дифференциалу переменной x:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

Значок x при символе y' подчеркивает, что *при отыскании производной* аргументом является x. Дифференциалы же dy и dx *можно брать по любому аргументу* (см. § 234).

Удобнейшим обозначением производной часто являются выражение $\frac{dy}{dx}$ и ему подобные, как-то:

$\frac{df(x)}{dx}$ (производная от функции $f(x)$ по x),

$\frac{d\varphi(t)}{dt}$ (производная от функции $\varphi(t)$ по t),

$$\frac{d(3x^2+2x+1)}{dx} = 6x+2 \text{ и т. д.}$$

Употребляются также условные записи

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{d}{dx}(3x^2+2x+1) \text{ и т. д.},$$

особенно удобные, когда берется производная от сложного выражения.

§ 236. Функция от функции (сложная функция)

Величина y называется *функцией от функции* (или *сложной* функцией), если она рассматривается как функция от некоторой (вспомогательной) переменной u, которая в свою очередь зависит от аргумента x:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x). \tag{1}$$

Тем самым y оказывается функцией от x, что можно записать так:

$$y = f[\varphi(x)]. \tag{2}$$

Если $f(u)$ и $\varphi(x)$ — непрерывные функции, то функция $f[\varphi(x)]$ также непрерывна.

Пример. Если $y = u^3$ и $u = 1+x^2$, то y есть сложная функция от x, что можно записать так:

$$y = (1+x^2)^3.$$

§ 237. Дифференциал сложной функции

Разыскание дифференциала сложной функции не требует особых правил (вследствие инвариантности выражения $f'(x)\,dx$; § 234).

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = (1+x^2)^3$.

Решение. Рассматривая y как сложную функцию ($y = u^3$, $u = 1+x^2$), имеем:

$$dy = 3u^2\,du, \quad du = 2x\,dx.$$

Отсюда

$$dy = 3(1+x^2)^2 \cdot 2x\,dx = (6x+12x^3+6x^5)\,dx.$$

Тот же результат получим непосредственно:

$$dy = d(1+3x^2+3x^4+x^6) = (6x+12x^3+6x^5)\,dx.$$

Замечание. На практике не вводят особого обозначения для вспомогательной переменной u. В примере 1 действуют так:

$$d(1+x^2)^3 = 3(1+x^2)^2 \cdot d(1+x^2) = 3(1+x^2)^2\,2x\,dx.$$

Пример 2. Найти $d\sqrt{a^2-x^2}$.

Решение.

$$d\sqrt{a^2-x^2} = d\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\,(a^2-x^2) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

§ 238. Производная сложной функции

Производная функции от функции равна производной функции по вспомогательной переменной, помноженной на производную этой переменной по аргументу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{1}$$

Пример 1. Найти производную от функции

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

(по аргументу x).

Полагая

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \qquad u = a^2-x^2,$$

имеем:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad \frac{du}{dx} = -2x.$$

По формуле (1) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Замечание. При пользовании обозначением $(\sqrt{a^2-x^2})'$ начинающие часто допускают ошибку. Зная, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, они пишут результат в виде $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$, забывая помножить на $(a^2-x^2)' = -2x$. Ошибка связана с несовершенством обозначения (не видно, по какому переменному берется производная). Поэтому на первых порах лучше вести запись так:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,\frac{d}{dx}(a^2-x^2) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x).$$

При достаточном навыке промежуточное преобразование выполняется в уме.

Наилучшую гарантию от ошибки дает предварительное вычисление дифференциала $d\sqrt{a^2-x^2}$. Получив (§ 237, пример 2) $\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, берем коэффициент при dx (т. е. делим на dx) и находим для производной выражение $\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \sin^2 2x$.

Решение. Здесь имеем цепочку трех зависимостей:

$$y = u^2, \quad u = \sin v, \quad v = 2x.$$

Аналогично с (1) имеем: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$. Учитывая, что $\frac{du}{dv} = \frac{d\sin v}{dv} = \cos v$ (§ 224, пример 3), находим:

$$\frac{dy}{dx} = 2u\cdot\cos v\cdot 2 = 4\sin 2x\cdot\cos 2x = 2\sin 4x.$$

Во избежание ошибки лучше действовать так:

$$d\sin^2 2x = 2\sin 2x\cdot d\sin 2x = 2\sin 2x\cos 2x\cdot d(2x) = 4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot dx.$$

Деля на dx, получаем:

$$\frac{d\sin^2 2x}{dx} = 4\sin 2x\cos 2x.$$

§ 239. Дифференцирование произведения

Правило. Дифференциал произведения двух функций равен сумме произведений каждой из функций на дифференциал другой:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du. \tag{1}$$

Для трех сомножителей имеем:

$$d(uvw) = vw\cdot du + uw\cdot dv + uv\cdot dw \tag{2}$$

и аналогично для большего числа сомножителей.

Производная произведения вычисляется по тому же правилу (слово «дифференциал» оба раза заменяется словом «производная»):

$$(uv)' = uv' + vu' \tag{1a}$$
$$(uvw)' = vwu' + uwv' + uvw'. \tag{2a}$$

Пример 1. Найти дифференциал и производную от функции $(2x^2+3x)(x^3-2)$.

Решение.

$$d[(2x^2+3x)(x^3-2)] = (2x^2+3x)\,d(x^3-2) + (x^3-2)\,d(2x^2+3x) = (2x^2+3x)\,3x^2\,dx + (x^3-2)(4x+3)\,dx = (10x^4+12x^3-8x-6)\,dx.$$

Коэффициент $10x^4+12x^3-8x-6$ есть производная. По формуле (1а) мы нашли бы:

$$[(2x^2+3x)(x^3-2)]' = (2x^2+3x)(x^3-2)'+(x^3-2)(2x^2+3x)'$$

и т. д.

Пример 2.

$$d\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = x\,d\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= x\cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\frac{1}{x}\,dx = \frac{-x\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx+\sin\frac{1}{x}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}. \tag{3}$$

Замечание. Предполагается, что $x\neq 0$. При $x=0$ функция $x\sin\frac{1}{x}$ не определена. Но даже, если ее доопределить (§ 231, пример 3), она при $x=0$ не дифференцируема (при $x\to 0$ производная (3) не стремится ни к какому пределу; см. черт. 234).

§ 240. Дифференцирование частного (дроби)

Правило. Дифференциал дроби равен произведению знаменателя на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, все деленное на квадрат знаменателя:

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du-u\,dv}{v^2}. \tag{1}$$

То же правило для производной дроби (слово «дифференциал» все три раза заменяется словом «производная»)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{1a}$$

Пример 1. Найти y', если $y=\frac{2x+1}{x^2+1}$.

Имеем:

$$y' = \frac{(x^2+1)(2x+1)'-(2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)2-(2x+1)2x}{(x^2+1)^2},$$

т. е.

$$y' = \frac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 2. Найти $d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Сначала рассматриваем данное выражение как сложную функцию $\left(y=\sqrt{u};\ u=\frac{1+x}{1-x}\right)$:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,d\,\frac{1+x}{1-x}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{(1-x)\,dx+(1+x)\,dx}{(1-x)^2}.$$

После упрощений получим:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 241. Обратная функция

Если из соотношения $y=f(x)$ вытекает соотношение $x=\varphi(y)$, то функция $\varphi(y)$ называется *обратной* [относительно функции $f(x)$].

Пример 1. Для функции $y=x^2$ обратной является (двузначная) функция $x=\pm\sqrt{y}$.

Пример 2. Для функции $y=\sin x$ обратной является (бесконечно многозначная) функция $x=\operatorname{Arcsin} y$ (определенная для всех значений y, меньших единицы по абсолютному значению).

Замечание. Обратная функция, как правило, многозначна[1]. От многозначности можно освободиться, если сузить область изменения аргумента для исходной функции. Так, в примере 1 можно устранить отрицательные значения аргумента x, и тогда обратная функция $x=+\sqrt{y}$ будет однозначной.

Если сохранить прежние обозначения переменных, то график функции $y=f(x)$ служит одновременно графиком обратной функции $x=\varphi(y)$.

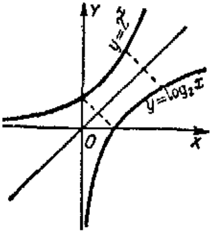
Но обычно обозначения переменных меняют ролями и аргумент обратной функции обозначают буквой x, как и аргумент прямой функции.

Пример 3. Для функции $y=x^2$ обратной (однозначной) функцией является $y=\sqrt{x}$, для функции $y=2^x$ обратной функцией является $y=\log_2 x$.

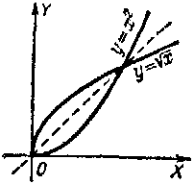
---

[1]) Исключение составляют только те случаи, когда по мере увеличения аргумента значение прямой функции либо непрестанно увеличивается, либо непрестанно уменьшается (такие функции называются *монотонными*).

При этих обозначениях графики исходной и обратной функций симметричны относительно прямой $y=x$ (черт. 235).



Черт. 235.



Черт. 236.

Производная обратной функции. Производная обратной функции равна единице, деленной на производную исходной функции [1]):

$$\frac{dx}{dy}=1:\frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $y=x^2$ при положительных значениях x. Обратная функция (черт. 236) есть $x=\sqrt{y}$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=2x, \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

§ 242. Натуральные логарифмы

Формула дифференцирования логарифмической функции (§ 243) имеет простейший вид, когда основанием служит число

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\approx 2{,}71828$$

(§ 214). Тогда логарифм называется *натуральным* и обозначается ln [2]).

---

[1]) Если производная $\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль, то формулу (1) надо *понимать в том смысле, что обратная функция имеет в рассматриваемой* точке бесконечную производную, т. е. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\infty$ (см. § 231, случай 1; ср. § 213, замечание 2).

[2]) Начальные буквы латинских слов logarithmus (логарифм) naturalis (натуральный). Число e иррационально; более того, оно трансцендентно, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Трансцендентны также натуральные логарифмы всех целых чисел, а также и десятичные логарифмы всех целых чисел (кроме 1, 10, 100, 1000 и т. д.). Трансцендентность числа e доказана в 1871 г. французским математиком Эрмитом, трансцендентность логарифмов — советским математиком А. О. Гельфондом в 1934 г.

Чтобы перевести натуральный логарифм в логарифм по любому основанию a, надо помножить его на «модуль перехода», равный $\log_a e$:

$$\log_a x = \log_a e \ln x. \tag{1}$$

Обратно, для перевода логарифма по основанию a в натуральный, надо помножить его на $\ln a$ (т. е. на $\log_e a$) [1]:

$$\ln x = \ln a \log_a x. \tag{2}$$

Мнемоническое правило. Записав формулу (1) в полном виде, получим $\log_a x = \log_a e \log_e x$. Если отбросить знаки $\log$, а из остающихся букв составить «дроби» $\frac{x}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{x}{e}$, то первая есть произведение двух последних. Аналогично для формулы (2).

Модуль перехода *от натуральных к десятичным* логарифмам обозначается M:

$$M = \lg e = 0{,}43429 \tag{3}$$

(легко запоминаются первые четыре знака $M = 0{,}4343$). Формулы (1), (2) принимают вид [2])

$$\lg x = M \ln x, \tag{4}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \tag{5}$$

где

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026. \tag{6}$$

Для умножения на M и $\frac{1}{M}$ можно пользоваться специальными таблицами (стр. 838).

Пример 1. Найти $\ln 100$.

По формуле (5) находим $\ln x \approx 2{,}3026 \cdot 2 \approx 4{,}605$.

Пример 2. Вычислить e^3 с помощью таблиц десятичных логарифмов.

Имеем: $\lg (e^3) = 3 \lg e = 3M = 1{,}3029$, отсюда $e^3 \approx 20{,}09$.

Можно воспользоваться таблицей натуральных логарифмов (стр. 834—837). Имеем: $\ln (e^3) = 3$; для разыскания четырех знаков числа e^3 надо выполнить интерполяцию.

Пример 3. Десятичный логарифм некоторого числа равен 0,5041; найти его натуральный логарифм.

---

[1]) Величины $\log_a e$ и $\log_e a$ взаимно обратны ($\log_a e \cdot \log_e a = 1$).

[2]) Чтобы не спутать, когда надо множить на M, а когда на $\frac{1}{M}$, полезно учесть, что десятичный логарифм всякого числа *меньше* натурального (например, $\ln 10 \approx 2{,}3$, а $\lg 10 = 1$).

Имеем:

$$\ln x = \frac{1}{M}\lg x \approx 2{,}303\cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161.$$

Это произведение можно найти с помощью таблицы на стр. 838; именно

$$\begin{array}{l} \frac{1}{M}\cdot 0{,}50 \quad\;\; \approx 1{,}1513 \\ \frac{1}{M}\cdot 0{,}0041 \approx 0{,}0094 \\ \hline \frac{1}{M}\cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161 \end{array}$$

§ 243. Дифференцирование логарифмической функции

Дифференциал и производная натурального логарифма (§ 242) выражаются формулами

$$d\ln x = \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Если основание логарифма — произвольное число, то [1])

$$d\log_a x = \log_a e\frac{dx}{x}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \log_a e\cdot\frac{1}{x}. \tag{4}$$

В частности, для десятичных логарифмов

$$d\lg x = \frac{M\,dx}{x}, \tag{3а}$$

$$\frac{d}{dx}\lg x = M\cdot\frac{1}{x}. \tag{4а}$$

Здесь $M \approx 0{,}4343$ — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным (§ 242).

Пример 1.

$$\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b) = \frac{a}{ax+b}.$$

Пример 2.

$$d\ln\frac{1+x}{1-x} = d\ln(1+x) - d\ln(1-x) = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x} = \frac{2\,dx}{1-x^2}.$$

---

[1]) Формулу (3) можно получить из (1) с учетом формулы (1) § 242.

Пример 3. Найти значение производной от $\lg x$ при $x=100$.

Формула (4a) дает $(\lg x)' = \frac{M}{x} \approx \frac{0,4343}{100} \approx 0,0043$.

Пример 4. Найти без таблиц $\lg 101$.

Приращение $\Delta \lg x$ приближенно равно дифференциалу $d \lg x = \frac{M\,\Delta x}{x}$. При $x=100$ и $\Delta x = 1$ получаем: $\Delta \lg x \approx \approx \frac{0,4343 \cdot 1}{100} \approx 0,0043$. Следовательно,

$$\lg 101 = \lg 100 + \Delta \lg 100 \approx 2 + 0,0043 = 2,0043,$$

что совпадает с табличным значением.

§ 244. Логарифмическое дифференцирование

При дифференцировании выражений, имеющих вид, удобный для логарифмирования, можно предварительно выполнить логарифмирование.

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = xe^{-x^2}$.

1) Логарифмируя по основанию e, находим:

$$\ln y = \ln x - x^2. \tag{1}$$

2) Теперь дифференцируем обе части равенства (1):

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - 2x\,dx.$$

3) Подставляя вместо y выражение xe^{-x^2}, находим:

$$dy = xe^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x\right)dx = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y=x^x$. Последовательно получаем:

1) $\ln y = x \ln x$,

2) $\frac{y'}{y} = x(\ln x)' + \ln x = 1 + \ln x$,

3) $y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$.

Пример 3. Продифференцировать функцию

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(ср. § 240, пример 2).

1) $\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$,

2) $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$,

3) $y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 4. Продифференцировать функцию

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}.$$

1) $\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$,

2) $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}$,

3) $y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right) =$
$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4 (x+3)^5}$.

Изложенный способ называется *логарифмическим дифференцированием*, а производная от логарифма функции $y=f(x)$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

— *логарифмической производной* от функции $f(x)$.

§ 245. Дифференцирование показательной функции

Дифференциал и производная показательной функции e^x $\left[\text{где } e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}71828\right]$ выражаются формулами[1])

$$de^x = e^x\,dx, \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{1}$$

(производная функции e^x равна самой функции). При произвольном основании a имеем:

$$da^x = a^x \ln a\,dx, \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a. \tag{2}$$

В частности,

$$d\,10^x = 10^x \frac{1}{M}\,dx, \quad \frac{d}{dx}10^x = 10^x\frac{1}{M}. \tag{2a}$$

Здесь $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026$.

---

1) Формулы (1) и (2) можно получить логарифмическим дифференцированием (§ 244) или рассматривая показательную функцию как обратную для логарифмической (§ 241).

Пример 1. $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$.

Пример 2.

$$d(xe^{-x^2}) = x\,de^{-x^2} + e^{-x^2}dx = \\ = xe^{-x^2}d(-x^2) + e^{-x^2}dx = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

Пример 3.

$$d\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \frac{(e^t+e^{-t})\,d(e^t-e^{-t})-(e^t-e^{-t})\,d(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2} = \\ = \frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}dt = \frac{4dt}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

Пример 4. $d\,7^{t^2} = 7^{t^2}\ln 7\,d(t^2) = 2t\,7^{t^2}\ln 7\,dt$.

§ 246. Дифференцирование тригонометрических функций [1]

Дифференциалы	Производные
I. $d\sin x = \cos x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
II. $d\cos x = -\sin x\,dx$,	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
III. $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$,	$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$,
IV. $d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$;	$\frac{d}{dx}\mathrm{ctg}\,x = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Эти формулы надо знать на память. Следующие две нет надобности запоминать:

V. $d\,\mathrm{sc}\,x = \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{sc}\,x\,dx$, $\quad\frac{d}{dx}\mathrm{sc}\,x = \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{sc}\,x$,

VI. $d\csc x = -\mathrm{ctg}\,x\cdot\csc x\,dx$; $\quad\frac{d}{dx}\csc x = -\mathrm{ctg}\,x\cdot\csc x$.

Пример 1. $d\sin 2x = \cos 2x\,d(2x) = 2\cos 2x\,dx$.

Пример 2.

$$\frac{d}{dx}\ln\sqrt{\sin 2x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\sin 2x = \frac{1}{2\sin 2x}\cdot\frac{d}{dx}\sin 2x = \mathrm{ctg}\,2x.$$

Пример 3.

$$\frac{d}{d\varphi}\ln\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{ctg}\,\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

---

[1] Вывод формулы I см. § 224, пример 3; формула II выводится аналогично. Формулы III и IV — с помощью соотношений

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad \mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Пример 4. $\frac{d}{dx}x^{\sin x} = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

Получается логарифмическим дифференцированием (§ 244). Полагая $y = x^{\sin x}$, находим $\ln y = \sin x \ln x$, откуда $\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$.

§ 247. Дифференцирование обратных тригонометрических функций [1])

Дифференциалы Производные

I. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

II. $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

III. $d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, $\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$,

IV. $d \operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$; $\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$.

Эти формулы надо знать на память. Следующие две нет надобности запоминать:

V. $d \operatorname{arcsc} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arcsc} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

VI. $d \operatorname{arccsc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Пример 1. $$d \arcsin\frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \qquad (1)$$

Пример 2. $$d \operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a\,dx}{a^2+x^2}. \qquad (2)$$

Пример 3.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{3x+5}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2}\right):\left[1+\left(\frac{3x+5}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9x^2+30x+29} = \frac{6}{9x^2+30x+29}.$$

---

[1]) Формулы I—VI выводятся из соответствующих формул § 246 см. § 241).

Пример 4.

$$d\arccos\frac{3}{4x-1}=d\left(\frac{3}{4x-1}\right):-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4x-1}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3\cdot 4\cdot dx}{(4x-1)^2}:-\frac{\sqrt{(4x-1)^2-9}}{|4x-1|}=\frac{6\,dx}{|4x-1|\sqrt{4x^2-2x-2}}.$$

Замечание. Функция $\arccos\frac{3}{4x-1}$ определена только при $\left|\frac{3}{4x-1}\right|\leqslant 1$, т. е. либо при $x\geqslant 1$, либо при $x\leqslant -\frac{1}{2}$. В промежутке $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ она не определена. Если формально подставить какое-либо неподходящее значение (например, $x=0$) в выражение дифференциала, то последнее окажется мнимым.

§ 247а. Некоторые поучительные примеры

Нижеприводимые примеры служат для уяснения более тонких вопросов, возникающих при дифференцировании обратных тригонометрических функций.

Пример 1. $d\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{1+x^2}$.

Полученное выражение совпадает с дифференциалом функции $\operatorname{arcctg} x$. Однако только для положительных x имеет место равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg} x. \tag{1}$$

Для отрицательных x имеем [1]):

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arcctg} x=-\pi. \tag{2}$$

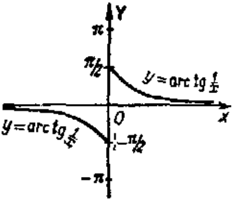
---

[1]) Формулу (2) легко проверить для точки $x=-1$, для которой имеем:

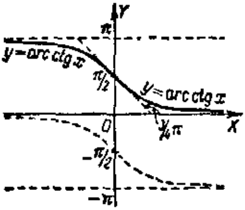
$$\operatorname{arcctg} x=\frac{3\pi}{4},\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, разность $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arcctg} x$ при отрицательных значениях x постоянна, ибо ее производная $\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)$ при всех $x<0$ равна нулю (см. § 226, п. 1). Значит, формула (2) справедлива для *всех отрицательных* значений x; положив $x=+1$ и рассуждая так же, убедимся, что для *всех положительных* значений x справедлива формула (1). При $x=0$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не определена и, значит, не имеет производной. Вот почему нельзя утверждать, что функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arcctg} x$ постоянна *на всей числовой прямой* (ср. § 265, теорема 1).

При $x=0$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ (черт. 237) разрывна (ее предел слева равен $-\frac{\pi}{2}$, а справа $+\frac{\pi}{2}$; ср. § 218) и, значит, недифференцируема, тогда как функция $\operatorname{arcctg} x$ (черт. 238) непрерывна и производная ее при $x=0$ равна -1. Правая ветвь графика $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ совпадает с пра-



Черт. 237.



Черт. 238.

вой половиной графика $y=\operatorname{arcctg} x$, а левая ветвь—с левой половиной пунктирной линии черт. 238 (последняя дает неглавное значение многозначной функции $y=\operatorname{Arcctg} x$).

Пример 2.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Полученное выражение совпадает с производной от функции $\operatorname{arctg} x$.

При $x<1$ эта функция связана с данной соотношением [1])

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4} \tag{3}$$

черт. 239), а при $x>1$ — соотношением

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{4}. \tag{4}$$

При $x=1$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ имеет разрыв $AB=\pi$ и не обладает производной.

Пример 3.

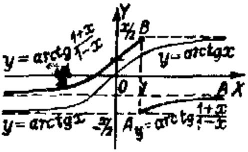
$$\frac{d}{dx}\arcsin(\sin x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\sin x=\frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

---

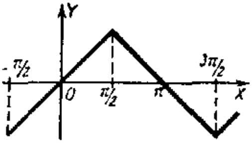
[1]) Доказательство — такое же, как в предыдущем подстрочном примечании.

Эта производная равна $+1$, когда $\cos x > 0$, и -1, когда $\cos x < 0$. При $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, когда $\cos x = 0$, производная не существует.

Замечание. В промежутке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем: $\arcsin(\sin x) = x$, в промежутке $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ имеем: $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, в промежутке $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$ имеем: $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$ и т. д.



Черт. 239.



Черт. 240.

(черт. 240). Поэтому внутри первого промежутка производная равна 1, внутри второго -1 и т. д. В точках $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ производная имеет разрыв; в каждой из этих точек существуют односторонние производные (ср. § 231, пример 2).

§ 248. Дифференциал в приближенных вычислениях

Часто бывает, что функцию $f(x)$ и ее производную $f'(x)$ легко вычислить при $x = a$, а для значений x, близких к a, непосредственное вычисление функции затруднительно. Тогда пользуются приближенной формулой

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h. \qquad (1)$$

Она выражает, что приращение $f(a+h) - f(a)$ функции $f(x)$ при малых значениях h приближенно равно [1]) дифференциалу $f'(a)\,h$ (ср. § 228, теорема 2).

Ниже (§ 265) указан способ оценки погрешности [2]) формулы (1), но часто оценка связана с громоздкими подсчетами. При грубых вычислениях часто довольствуются формулой (1).

---

[1]) Если $f'(a) = 0$, то формула (1) выражает, что приращение функции мало по сравнению с h; тогда для достаточно малых значений h практически можно считать, что $f(a+h) = f(a)$.

[2]) См. также § 271, замечание.

Пример 1. Извлечь квадратный корень из 3654.

Решение. Надо найти значение функции $f(x)=\sqrt{x}$ при $x=3654$. Легко вычисляются значения $f(x)$ и $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x=3600$. Формула (1) при $a=3600$, $h=54$ дает: $\sqrt{3654}\approx 60+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot 54\approx 60{,}45$. Здесь все знаки верны.

Пример 2. Найти $10^{2,1}$.

Решение. Полагаем $f(x)=10^x$, так что (§ 245) $f'(x)=\frac{1}{M}10^x\left(\frac{1}{M}\approx 2{,}3026\right)$. Формула (1) при $a=2$, $h=0{,}1$ дает:

$$10^{2,1}\approx 100+\frac{1}{M}\cdot 100\cdot 0{,}1\approx 123{,}0.$$

Этот результат грубоват (с точностью до четвертой значащей цифры $10^{2,1}=125{,}9$).

Если таким же образом вычислить $10^{2,01}$ (теперь $h=0{,}01$), получим 102,3. Здесь все знаки верны.

Пример 3. Найти без таблиц tg 46°.

Решение. Полагаем $f(x)=\operatorname{tg}x$, $a=45^\circ$, $h=1^\circ=0{,}0175$ радиана; тогда имеем: $f'(a)=\frac{1}{\cos^2 45^\circ}=2$. Значит, $\operatorname{tg}46^\circ\approx 1+2\cdot 0{,}0175=1{,}0350$.

Неверен только последний знак; из таблиц имеем $\operatorname{tg}46^\circ=1{,}0355$.

Полезно заметить следующие приближенные формулы¹) (α — малая величина):

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha,\qquad \frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\approx 1-2\alpha,\qquad \frac{1}{(1-\alpha)^2}\approx 1+2\alpha; \tag{3}$$

$$\sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha,\qquad \sqrt{1-\alpha}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\approx 1-\frac{1}{2}\alpha,\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha; \tag{5}$$

---

¹) Формулы (2)—(6) являются частными случаями формулы

$$(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha;$$

последняя получается из (1), если положить $f(x)=x^n$, $a=1$, $h=\alpha$.

$$\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1+\frac{1}{3}\alpha, \qquad \sqrt[3]{1-\alpha} \approx 1-\frac{1}{3}\alpha; \tag{6}$$

$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha, \qquad \ln(1-\alpha) \approx -\alpha; \tag{7}$$

$$e^{\alpha} \approx 1+\alpha, \qquad 10^{\alpha} \approx 1+\frac{1}{M}\alpha; \tag{8}$$

$$\sin\alpha \approx \alpha, \qquad \cos\alpha \approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2, \ \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha. \tag{9}$$

§ 249. Применение дифференциала к оценке погрешности формул

Данные, получаемые измерением, содержат ошибку, проистекающую из неточности измерительных инструментов. Положительное число, заведомо превышающее эту ошибку по абсолютному значению (или в худшем случае равное этой ошибке), называется *предельной абсолютной погрешностью*, или, короче, *предельной погрешностью*. Отношение предельной погрешности к абсолютному значению измеряемой величины называется *предельной относительной погрешностью*.

Пример 1. Длина карандаша измерена линейкой с миллиметровыми делениями. Измерение показало 17,9 *см*. Ошибка неизвестна, но она заведомо меньше чем 0,1 *см*. Поэтому можно принять 0,1 *см* за предельную погрешность. Относительная предельная погрешность равна $\frac{0,1}{17,9}$. Округляя в сторону увеличения, находим 0,6%.

Разыскание предельной погрешности. Пусть функция y вычисляется по точной формуле $y=f(x)$, но значение x получается измерением и потому содержит ошибку. Тогда предельная абсолютная погрешность $|\Delta y|$ функции находится по формуле

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)|\,|\Delta x|, \tag{1}$$

где $|\Delta x|$ есть предельная погрешность аргумента. Величина $|\Delta y|$ округляется в сторону увеличения (ввиду неточности самой формулы).

Пример 2. Сторона квадрата, найденная измерением, оказалась равной 46 *м*. Предельная погрешность равна 0,1 *м*. Найти предельную погрешность для площади квадрата.

Решение. Имеем: $y=x^2$ (x — сторона квадрата, y — площадь). Отсюда $|\Delta y| \approx 2|x|\,|\Delta x|$. В нашем примере $x=46$ и $|\Delta x|=0,1$. Значит, $|\Delta y| \approx 2\cdot 46\cdot 0,1 = 9,2$.

Предельная абсолютная погрешность равна (округленно) 10 *м*². Предельная относительная погрешность равна $\frac{10}{46^2} \approx 0{,}5\%$.

Предельную относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ можно найти также с помощью логарифмического дифференцирования (§ 244) по формуле

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx |d \ln y|. \qquad (2)$$

В частности, при $y = x^n$ $\left(\text{тогда } d \ln y = \frac{n\,dx}{x}\right)$ имеем:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx n\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \qquad (3)$$

т. е. *предельная относительная погрешность степени x^n равна n-кратной предельной относительной погрешности аргумента.*

Пример 3. При условиях примера 2 предельная относительная погрешность площади равна $2 \cdot \frac{0{,}1}{46} \approx 0{,}5\%$.

Пример 4. Измерение ребра x куба дало $x = 12{,}4$ *см*. Предельная погрешность 0,05 *см*. Какова предельная относительная погрешность для объема куба?

Решение. Предельная относительная погрешность для x равна $\frac{0{,}05}{12{,}4} \approx 0{,}004$; для x^3 она равна $3 \cdot 0{,}004 = 0{,}012$.

Правило 1. Предельная относительная погрешность произведения двух или нескольких сомножителей равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Правило 2. Предельная относительная погрешность дроби равна сумме предельных относительных погрешностей числителя и знаменателя.

Эти правила вытекают из §§ 239, 240 [1]).

---

[1]) Формула $d \ln \frac{u}{v} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$ дает предельную относительную погрешность $\left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$, а не $\left|\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right|$, ибо величины $\frac{du}{u}$ и $\frac{dv}{v}$ могут иметь разные знаки.

Пример 5. Для разыскания удельного веса тела найден его вес $p = 20$ *г* и вес вытесненной им воды $v = 40$ *г*. Предельная абсолютная погрешность для p равна 0,5 *г*, для v она равна 1 *г*. Определить предельную относительную погрешность для удельного веса.

Решение. Удельный вес y равен $\frac{p}{v}$. Имеем:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right| = \frac{0{,}5}{20} + \frac{1}{40} = 0{,}05.$$

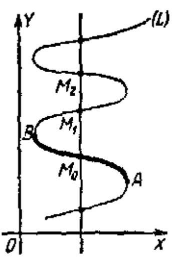
Пример 6. Высота h и радиус основания r цилиндра измерены с точностью до 1% каждая. Найти предельную относительную погрешность 1) для боковой поверхности S, 2) для объема V цилиндра.

Решение. Имеем: $S = 2\pi rh$. Множитель 2π — точное число; погрешность его равна нулю. Относительная погрешность для S есть $\left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 2\%$, а для $V = \pi r^2 h$ она равна $2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 3\%$.

§ 250. Дифференцирование неявных функций

Пусть уравнение, связывающее x и y и удовлетворяющееся значениями $x = x_0$ и $y = y_0$, определяет y как неявную функцию от x. Для разыскания производной $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = x_0$, $y = y_0$ нет нужды искать явное выражение функции. Достаточно приравнять дифференциалы обеих частей уравнения и из полученного равенства найти отношение $dy : dx$.

Замечание. Уравнение, связывающее x и y, может определять y как многозначную функцию $F(x)$ от x. Но задание пары значений $x = x_0$ и $y = y_0$ выделяет из многих значений функции одно.



Черт. 241.

Геометрически: прямая, параллельная OY (черт. 241), может пересекать линию L в нескольких точках M_0, M_1, M_2, ..., но задание точки M_0 выделяет проходящую через нее дугу AM_0B, которая представляет однозначную функцию.

Пример 1. Найти производную от неявной функции, заданной уравнением $x^2+y^2=25$, в точке $x=4$, $y=-3$.

Первый способ. Решив уравнение, получим: $y=-\sqrt{25-x^2}$ (выбираем знак минус, ибо при $x=4$ должны иметь $y=-3$). Теперь находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}=\frac{4}{3}.$$

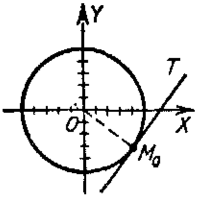
Второй способ. Приравнивая дифференциалы правой и левой части, находим:

$$2x\,dx+2y\,dy=0,$$

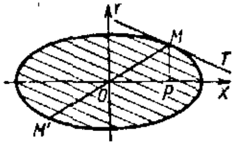
откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=\frac{4}{3}. \tag{1}$$

Мы нашли угловой коэффициент касательной M_0T к окружности $x^2+y^2=25$ (черт. 242) в точке $M_0(4;\ -3)$.



Черт. 242.



Черт. 243.

Угловой коэффициент радиуса OM_0 есть $-\frac{3}{4}$. Произведение угловых коэффициентов равно -1, т. е. $OM_0 \perp M_0T$.

Пример 2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением[1])

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Дифференцируя, находим:

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0,$$

[1]) Уравнение (2) определяет y как двузначную функцию от x, но коль скоро будут известны значения обеих переменных, из двух значений функции выделяется одно (ср. пример 1).

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}. \tag{3}$$

Уравнение (2) представляет эллипс. В силу (3) угловой коэффициент касательной MT (черт. 243) есть $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Угловой коэффициент диаметра MM' есть $\frac{y}{x}$. Произведение угловых коэффициентов равно $-\frac{b^2}{a^2}$. Значит (§ 55), направления MT и MM' — сопряженные, т. е. диаметр MM' делит пополам хорды, параллельные MT.

Тем же свойством обладают диаметры гиперболы и параболы.

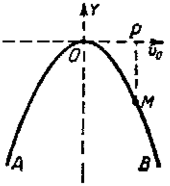
§ 251. Параметрическое задание линии

Всякую переменную величину t, определяющую положение точки на некоторой линии, называют *параметром* [1]). В механике в качестве параметра рассматривается чаще всего время.

Координаты точки, лежащей на линии L, являются функциями параметра:

$$x = f(t), \tag{1}$$

$$y = \varphi(t). \tag{2}$$



Черт. 244.

Уравнения (1) – (2) называются *параметрическими уравнениями* линии L (ср. § 152).

Если желательно найти уравнение, связывающее координаты x, y линии L, надо исключить t из уравнений (1) – (2) (см. примеры 1 и 2).

Может, однако, случиться, что уравнение, полученное после исключения t, представляет такую линию, которую линия L покрывает только частично (см. пример 3).

Пример 1. Пусть O (черт. 244) есть наивысшее положение материальной точки, брошенной под углом к горизонту, а t — время, отсчитываемое от момента наивысшего подъема. Положение точки M на траектории AOB определяется величиной t, так что t есть параметр. Параметри-

---

1) Термин «параметр» употребляется еще и в другом смысле, обозначая величину, которая для данной линии неизменна, но меняется при переходе от одной из линий рассматриваемого типа к другой. Так, величина p в уравнении параболы $y^2 = 2px$ постоянна для данной параболы, но меняется при переходе к другой.

ческие уравнения траектории, отнесенной к системе XOY, будут:

$$x = OP = v_0 t, \tag{3}$$

$$y = PM = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{4}$$

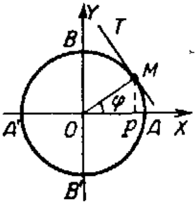
Они выражают, что по горизонтальному направлению точка M движется равномерно со скоростью v_0, а по вертикальному — равномерно-ускоренно (g — ускорение земного тяготения).

Исключив t, найдем уравнение

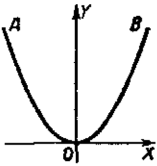
$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2, \tag{5}$$

показывающее, что движение происходит по параболе.

Пример 2. Положение точки M на окружности $ABA'B'$ радиуса R (черт. 245) определяется величиной угла



Черт. 245.



Черт. 246.

$\varphi = \angle AOM$, так что φ есть параметр. Расположив оси, как на черт. 245, имеем параметрические уравнения окружности

$$x = R\cos\varphi, \tag{6}$$

$$y = R\sin\varphi. \tag{7}$$

Чтобы исключить φ, возведем (6) и (7) в квадрат и сложим; получим:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8}$$

Пример 3. Рассмотрим линию, представляемую параметрическими уравнениями

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = \frac{1}{2} t. \tag{9}$$

Исключая t, получаем уравнение $y = \frac{1}{2} x^2$, представляющее параболу AOB (черт. 246). Линия (9) есть половина этой параболы (OB), отвечающая положительным значениям x.

§ 252. Параметрическое задание функции

Пусть даны две функции аргумента t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t). \tag{1}$$

Тогда одна из них, например y, есть функция другой[1]. Задание этой функции с помощью равенств (1) называется *параметрическим*, вспомогательная величина t называется *параметром*.

Чтобы получить явное выражение y в функции x, надо решить уравнение $x = f(t)$ относительно t (это не всегда удается) и подставить найденное выражение в уравнение $y = \varphi(t)$.

Часто, наоборот, удобнее переходить от непараметрического задания к параметрическому. Пользуясь произволом выбора одной из функций $f(t)$, $\varphi(t)$, стараются обеспечить однозначность и, по возможности, простоту обеих функций.

Производная $\frac{dy}{dx}$ выражается через параметр t формулой

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(t)}{df(t)} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}. \tag{2}$$

При параметрическом представлении обе переменные x, y ставятся в равноправное положение (ср. § 251).

Пример 1. Даны две функции:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t. \tag{3}$$

Они параметрически задают y как двузначную функцию x (и наоборот). Из первого уравнения находим: $\cos t = \frac{x}{R}$, так что $\sin t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$. Подставляя во второе уравнение, получаем:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}. \tag{4}$$

Это — уравнение окружности (ср. § 251, пример 2). Параметр t есть угол XOM (см. черт. 245). Производная $\frac{dy}{dx}$, выраженная через параметр t, равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(R\sin t)}{d(R\cos t)} = -\operatorname{ctg} t. \tag{5}$$

Это — угловой коэффициент касательной MT.

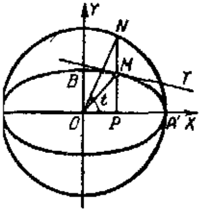
---

[1] Как правило, она многозначна даже при однозначности $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Пример 2. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6}$$

представляющее эллипс, задает двузначную функцию $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Для параметрического ее задания можно по произволу выразить одну из переменных, например x, в функции t. Положив $\frac{x}{a}=\cos t$, найдем $\frac{y}{b}=\pm\sin t$. Знак можно выбрать по произволу. Возьмем плюс. Получаем параметрическое задание



Черт. 247.

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t. \tag{7}$$

Геометрический смысл параметра t усматривается из черт. 247, где ANA' — окружность радиуса a и N — точка, взятая на одной вертикали с точкой M эллипса по ту же сторону[1]) от оси AA'. Имеем $t=\angle AON$. Производная $\frac{dy}{dx}$ выражается через t формулой

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(b\sin t)}{d(a\cos t)}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Это — угловой коэффициент касательной MT.

Замечание. Обычное задание функции $y=f(x)$ можно рассматривать как частный случай параметрического, именно можно записать его в виде

$$x=t,\quad y=f(t).$$

§ 253. Циклоида

Циклоидой называется линия, описываемая точкой M окружности, когда последняя катится без скольжения по прямой линии (*направляющей*). Катящаяся окружность называется *производящей*.

На черт. 248 направляющей является прямая OX; производящая окружность дана в двух положениях: в «на-

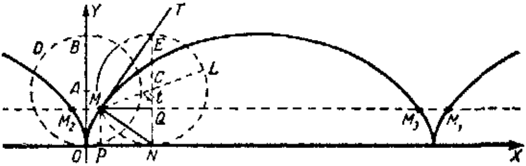
1) Если взять $\frac{y}{b}=-\sin t$, то N надо взять по другую сторону.

чальном» (ODB), когда точка M попадает на направляющую OX, и в «промежуточном» (NME).

Замечание. Выражение «катится без скольжения» означает, что точка касания N отстоит от ее начального положения O на расстояние, равное дуге NM:

$$ON = \smile{NM}. \tag{1}$$

Параметрические уравнения циклоиды. Если оси координат расположить, как на черт. 248, и взять



Черт. 248.

в качестве параметра угол $t = \angle MCN$, то получим следующие параметрические уравнения[1]) циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \tag{2}$$

$$y = a(1 - \cos t), \tag{3}$$

где a — радиус производящей окружности.

Если решить (3) относительно t и подставить в (2) получим x как бесконечно многозначную функцию от y:

$$x = 2ak\pi \pm \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)}\right), \tag{4}$$

где k — любое целое число [2]).

Ордината y есть однозначная, но не элементарная функция от x (см. черт. 248).

---

[1]) Значение угла t может быть положительным и отрицательным и иметь любую абсолютную величину; при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ уравнения (2)—(3) легко прочитываются из черт. 248:

$$x = OP = ON - PN = \smile{NM} - MQ = at - a \sin t,$$

$$y = PM = NC - QC = a - a \cos t.$$

[2]) На черт. 248 точкам M, M_1 и т. д. соответствует знак плюс перед скобкой, точкам M_2, M_3 и т. д. — знак минус.

Угловой коэффициент k касательной равен

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)}, \tag{5}$$

а угловой коэффициент k' прямой NM равен

$$k' = \frac{y-y_N}{x-x_N} = \frac{a(1-\cos t)}{-a \sin t}. \tag{6}$$

Следовательно, $kk' = -1$, т. е. $MT \perp MN$. Значит, для построения касательной к циклоиде достаточно соединить M с наивысшей точкой производящей окружности (угол NME — прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр).

§ 254. Уравнение касательной к плоской линии

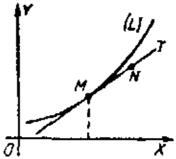
Пусть MT (черт. 249) — касательная к линии L в точке $M(x; y)$. Обозначим текущие координаты точки N, лежащей на касательной, через X, Y.

При любом задании линии L (явном, неявном или параметрическом) уравнение касательной можно записать в следующей симметричной форме:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}. \tag{1}$$

Если линия L задана уравнением $y = f(x)$, то из (1) получаем[1]):

$$Y - y = f'(x)(X - x). \tag{2}$$



Черт. 249.

Если линия L задана параметрически, то получаем:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}, \tag{3}$$

где x', y' — производные по параметру.

При неявном задании линии L приравниваем дифференциалы обеих частей уравнения (ср. § 250) и в полученном равенстве заменяем dx, dy пропорциональными величинами $X-x$, $Y-y$.

---

[1]) Предполагается, что производная $f'(x)$ в точке M конечна. Если же $f'(x) = \infty$ (§ 231, случай 1), то вместо (2) имеем уравнение

$$X - x = 0$$

(касательная параллельна оси ординат).

Пример 1. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 3x + 2$ в точке (0; 2).

Имеем: $y' = 2x - 3 = -3$. Согласно (2) искомое уравнение есть $Y - 2 = -3X$.

Пример 2. Найти уравнение касательной к эллипсу

$$x = 5\sqrt{2}\cos t, \quad y = 3\sqrt{2}\sin t \tag{4}$$

в точке $M(-5; 3)$ (ср. § 252, пример 2).

Решение. Данной точке соответствует значение $t = \frac{3\pi}{4}$. Из (4) находим:

$$x' = -5\sqrt{2}\sin t = -5, \quad y' = 3\sqrt{2}\cos t = -3.$$

Согласно (3) уравнение касательной есть

$$\frac{X+5}{-5} = \frac{Y-3}{-3},$$

т. е.

$$3X - 5Y + 30 = 0.$$

Пример 3. Найти уравнение касательной к равносторонней гиперболе $xy = m^2$ в точке $\left(\frac{m}{2};\ 2m\right)$.

Решение. Приравнивая дифференциалы обеих частей уравнения, получаем:

$$x\,dy + y\,dx = 0.$$

Заменяя dx, dy величинами $X - x$, $Y - y$, находим:

$$x(Y - y) + y(X - x) = 0. \tag{5}$$

Так как $xy = m^2$, то (5) можно переписать в виде

$$xY + yX = 2m^2. \tag{6}$$

Подставляя $x = \frac{m}{2}$, $y = 2m$ в (5) или в (6), находим:

$$Y + 4X = 4m.$$

§ 254а. Касательные к кривым второго порядка

	Уравнение линии	Уравнение касательной
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1,$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$
Парабола	$y^2 = 2px,$	$yY = p(X + x).$

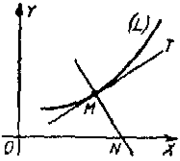
§ 255. Уравнение нормали

Нормалью в точке M линии L (черт. 250) называется перпендикуляр MN к касательной MT.

Соответственно уравнению (1) § 254 уравнение нормали имеет вид

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0. \qquad (1)$$

Соответственно уравнениям (2) и (3) § 254 получаем уравнение нормали в следующих формах:



Черт. 250.

$$Y-y=-\frac{1}{f'(x)}(X-x), \qquad (2)$$

$$(X-x)\,x'+(Y-y)\,y'=0. \qquad (3)$$

При неявном задании линии L приравниваем дифференциалы обеих частей уравнения и исключаем dx и dy с помощью (1).

Пример 1. Найти уравнение нормали к параболе $y=\frac{1}{2}x^2$ в точке $(-2;\ 2)$.

Имеем: $y'=x=-2$; согласно (2) искомое уравнение есть

$$Y-2=\frac{1}{2}(X+2).$$

Пример 2. Уравнение нормали к циклоиде

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \qquad (4)$$

(§ 253) согласно (3) имеет вид

$$(X-x)(1-\cos t)+(Y-y)\sin t=0 \qquad (5)$$

или, используя (4),

$$X(1-\cos t)+Y\sin t-at(1-\cos t)=0. \qquad (6)$$

Это уравнение удовлетворяется при $X=at$, $Y=0$; значит, нормаль проходит (см. черт. 248) через точку опоры $N\,(at;\ 0)$ производящей окружности.

Пример 3. Найти уравнение нормали к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Дифференцируя, находим:

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0. \qquad (7)$$

Исключая дифференциалы из (7) и (1), находим:

$$\frac{(X-x)\,y}{b^2}=\frac{(Y-y)\,x}{a^2}.$$

§ 256. Производные высших порядков

Пусть $f'(x)$ есть производная от функции $f(x)$, тогда производная от функции $f'(x)$ называется *второй производной* от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Вторая производная называется также производной *второго порядка*. В отличие от нее функцию $f'(x)$ называют *производной первого порядка*, или *первой производной*.

Производная от второй производной называется *третьей производной* функции $f(x)$ (или *производной третьего порядка*); она обозначается $f'''(x)$.

Таким же образом определяются производные четвертого порядка $f^{\mathrm{IV}}(x)$, пятого порядка $f^{\mathrm{V}}(x)$ и т. д. (цифровые обозначения вместо штрихов употребляются для краткости, римские цифры – для отличия от показателей степени)

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Если функция обозначается одной буквой, например y, то ее последовательные производные обозначаются:

$$y', y'', y''', y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}, \ldots, y^{(n)}.$$

Пример 1. Найти последовательные производные от функции $f(x) = x^4$.

Решение. $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = (4x^3)' = 12x^2$;

$$f'''(x) = 24x, \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = 24, \quad f^{\mathrm{V}}(x) = 0.$$

Дальнейшие производные тоже равны нулю.

Пример 2. Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x+\pi),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), \ \ldots, \quad y^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Значения производных при данном значении аргумента $x = a$ обозначаются $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ и т. д. В примере 1 имеем: $f'(2) = 32$, $f''(2) = 48$ и т. д.

Пример 3. Если $f(x) = \ln(1+x)$, то

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Значит, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2!$,

$$f^{\mathrm{IV}}(0) = -3!, \ \ldots, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

§ 257. Механический смысл второй производной

Пусть точка движется прямолинейно и, пройдя путь s за время t, приобретает скорость v. Пусть эта скорость меняется и за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ получает приращение Δv. Тогда отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ дает изменение скорости, приходящееся (в среднем) на единицу времени, и называется *средним ускорением*. Это отношение характеризует быстроту изменения скорости в момент t тем точнее, чем меньше Δt. Поэтому *ускорением* (в момент t) называют предел отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т. е. производную $\frac{dv}{dt}$. Но сама скорость v есть производная $\frac{ds}{dt}$. Поэтому ускорение есть вторая производная пути по времени.

Пример. Движение незатухающего колебания мембраны представляется уравнением

$$s = a\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{1}$$

(T — период колебания, a — амплитуда колебания, s — отклонение точки мембраны от положения покоя).

Скорость движения равна

$$v = s' = \frac{2\pi a}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}. \tag{2}$$

Ускорение равно

$$v' = s'' = \frac{-4\pi^2 a}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T}. \tag{3}$$

Сравнивая (1) и (3), видим, что

$$s'' = -\frac{4\pi^2}{T^2}s, \tag{4}$$

т. е. упругая сила колебания (она пропорциональна ускорению по второму закону Ньютона) пропорциональна отклонению и имеет противоположное направление.

§ 258. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим ряд равноотстоящих значений аргумента

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ x+3\Delta x,\ \ldots$$

и соответствующие значения функции

$$y = f(x),\ y_1 = f(x+\Delta x),\ y_2 = f(x+2\Delta x),$$
$$y_3 = f(x+3\Delta x),\ \ldots$$

Введем обозначения

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$
$$\Delta y_1 = f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x),$$
$$\Delta y_2 = f(x+3\Delta x) - f(x+2\Delta x)$$

и т. д. Величины Δy, Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$ называются *первыми разностями* функции $f(x)$. *Вторыми разностями* называются величины $\Delta y_1 - \Delta y$, $\Delta y_2 - \Delta y_1$ и т. д. Они обозначаются $\Delta^2 y$ (читается: «дельта два игрэк»), $\Delta^2 y_1$ и т. д.:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1.$$

Аналогично определяются третьи разности $\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$ и т. д.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^3$ и $x = 2$. Первые разности будут:

$$\Delta y = (2+\Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3,$$
$$\Delta y_1 = (2+2\Delta x)^3 - (2+\Delta x)^3 = 12\Delta x + 18\Delta x^2 + 7\Delta x^3,$$
$$\Delta y_2 = (2+3\Delta x)^3 - (2+2\Delta x)^3 = 12\Delta x + 30\Delta x^2 + 19\Delta x^3.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вторые разности:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = 12\Delta x^2 + 6\Delta x^3,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12\Delta x^2 + 12\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Третьи разности:

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = 6\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При бесконечно малом Δx первая разность имеет, как правило, первый порядок относительно Δx, вторая разность — второй порядок, третья — третий и т. д.

Главный член первой разности ($12\Delta x$ в примере 1) мы назвали (§ 228) дифференциалом функции. Теперь будем называть его *первым дифференциалом*. *Вторым дифференциалом* мы назовем главный член второй разности, пропорциональный Δx^2 ($12\Delta x^2$ в примере 1), *третьим дифференциалом* — главный член третьей разности, пропорциональный Δx^3 ($6\Delta x^3$ в примере 1), и т. д. Сформулируем это точно.

Определение. Пусть вторая разность $\Delta^2 y$ функции $y = f(x)$ разбита на сумму двух членов:

$$\Delta^2 y = B\Delta x^2 + \beta,$$

где B не зависит от Δx и член β имеет высший порядок малости относительно Δx^2. Тогда член $B\,\Delta x^2$ называется *вторым дифференциалом* функции y и обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

Теорема 1. Коэффициент B при Δx^2 в выражении второго дифференциала равен второй производной $f''(x)$. Коэффициент C при Δx^3 в выражении третьего дифференциала $C\,\Delta x^3$ равен третьей производной $f'''(x)$ и т. д.

Пример 2. Если $f(x)=x^3$, то $f''(x)=6x$. В соответствии с этим $d^2(x^3)=6x\,\Delta x^2$. При $x=2$ имеем: $d^2(x^3)=12\,\Delta x^2$ (ср. пример 1). Далее $f'''(x)=6$ (при любом значении x); в соответствии с этим $d^3(x^3)=6\,\Delta x^3$.

Теорему 1 можно иначе сформулировать так:

Теорема 1а. Дифференциал n-го порядка равен произведению n-й производной на n-ю степень приращения независимого переменного:

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,\Delta x^n. \tag{1}$$

Так как для независимого переменного имеем:

$$\Delta x=dx,$$

то

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n\ ^{1)}. \tag{2}$$

Пример 3. $d(x^4)=4x^3\,dx$, $d^2(x^4)=12x^2\,dx^2$; $d^3(x^4)=24x\,dx^3$, $d^4(x^4)=24\,dx^4$, $d^5(x^4)=0$, $d^6(x^4)=d^7(x^4)=\ldots=0$ (ср. § 256, пример 1).

Пример 4. $d^n(\sin x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n$ (ср. § 256, пример 2).

Теорема 2. Если считать дифференциал dx аргумента x величиной, не зависящей от x, то второй дифференциал функции $f(x)$ равен дифференциалу от первого ее дифференциала:

$$d\,(df(x))=d^2f(x). \tag{3}$$

При том же условии третий дифференциал есть дифференциал второго и т. д.

---

[1]) Если x не является независимым переменным, то формула (1), как правило, не верна ни при каком значении n, даже при $n=1$ (ср. § 234). Но для дифференциалов высшего порядка ($n=2, 3, \ldots$), как правило, не верна в этом случае и формула (2), которая при $n=1$ всегда справедлива. Иными словами, выражения $f''(x)\,dx^2, f'''(x)\,dx^3, \ldots$ *не инвариантны*.

Так, если $f(x)=x^3$, то выражение $6x\,dx^2$ представляет $d^2(x^3)$, когда x есть независимое переменное. Если же положить $x=t^2$ и принять за независимое переменное не x, а t, то $f(x)=t^6$, и мы получим: $6x\,dx^2=24t^4\,dt^2$, тогда как $d^2f(x)=30t^4\,dt^2$.

Пример 5. Пусть $f(x)=x^4$. Имеем. $df(x)=4x^3\,dx$. Если считать dx не зависящим от x, то при дифференцировании его нужно рассматривать как постоянную. Значит, $d(4x^3\,dx) = d(4x^3)\,dx = 12x^2\,dx^2$. А это — второй дифференциал от функции x^4 (пример 3). Далее $d[d^2(x^3)] = d(12x^2\,dx^2) = d(12x^2)\,dx^2 = 24x\,dx^3$, а это — третий дифференциал от x^4 и т. д.

Второй дифференциал от линейной функции независимого переменного равен нулю:

$$d^2(ax+b) = 0.$$

В частности, второй дифференциал независимого переменного равен нулю: $d^2x=0$.

Третий дифференциал от квадратичной функции равен нулю:

$$d^3(ax^2+bx+c) = 0.$$

Вообще, $(n+1)$-й дифференциал от многочлена n-й степени равен нулю.

§ 259. Выражение высших производных через дифференциалы

Выражение второй производной через дифференциалы[1]) имеет вид

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}. \qquad (1)$$

Оно пригодно при любом выборе аргумента.

Если за аргумент принять x (тогда $d^2x = 0$), то

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (2)$$

Это выражение вытекает также из (2) § 258 (при $n=2$). Из той же формулы вытекают выражения

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4}, \ \ldots, \ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \qquad (3)$$

при условии, что x *есть независимое переменное*. Общие их выражения сложны[2]).

---

[1]) Имеем: $y'' = \frac{dy'}{dx}$; сюда подставляем $y' = \frac{dy}{dx}$; при дифференцировании применяем теорему 2 § 258.

[2]) Имеем: $y''' = \frac{dy''}{dx}$; сюда подставляем выражение (1). Результат удобнее всего представить в виде

$$y''' = \left[dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3\,d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}\right] : dx^5. \qquad (4)$$

Дальнейшие выражения еще сложнее.

Замечание. Производная n-го порядка часто *обозначается* $\frac{d^n y}{dx^n}$ безотносительно к тому, какая величина принята за аргумент. Но в это выражение *нельзя подставлять* выражения переменных y и x через какой-либо параметр.

§ 260. Высшие производные от функций, заданных параметрически

Пусть y есть функция от x, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = f(t). \tag{1}$$

Производные первого и второго порядков находятся по формулам [1])

$$y' = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{2}$$

$$y'' = \frac{\varphi'(t) f''(t) - f'(t) \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \tag{3}$$

Выражения последующих производных сложны [2]), когда функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ даны, вычисление проще выполнять шаг за шагом, как в нижеследующем примере.

Пример. Пусть

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Тогда (ср. § 252, пример 2)

$$y' = d(b \sin t) : d(a \cos t) = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t.$$

Далее

$$y'' = d\left(-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\right) : d(a \cos t) = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t},$$

$$y''' = d\left(-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}\right) : d(a \cos t) = -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t}$$

и т. д.

§ 261. Высшие производные неявных функций

Чтобы найти последовательные производные от функции y аргумента x, заданной неявно каким-либо уравнением, надо последовательно дифференцировать это урав-

---

[1]) Формула (3) выводится, как формула (1) § 259, и может быть получена из последней заменой дифференциалов соответствующими производными по параметру.

[2]) См. вторую сноску § 259.

нение, т. е. приравнивать дифференциалы (или производные) правой и левой частей. Получим ряд равенств; из первого равенства найдем выражение y' через x и y, второе (с учетом найденного выражения y') даст выражение y'' через x и y, третье (с учетом найденных выражений y', y'') даст y''' и т. д. В частных случаях возможны упрощения.

Пример. Найти производные до третьего порядка от функции $y = f(x)$, заданной уравнением

$$x^2+y^2 = 25, \tag{1}$$

и определить значения этих производных в точке (3; 4).

Решение. Приравнивая дифференциалы, получаем:

$$x\,dx+y\,dy = 0, \tag{2}$$

откуда

$$x+yy' = 0. \tag{2a}$$

Приравнивая дифференциалы обеих частей (2a), находим

$$dx+y'dy+yy''\,dx = 0, \tag{3}$$

откуда

$$1+y'^2+yy'' = 0. \tag{3a}$$

Дифференцируем еще раз

$$2y'\,dy'+y''\,dy+yy'''\,dx = 0, \tag{4}$$

откуда

$$3y'y''+yy''' = 0. \tag{4a}$$

Из (2a) находим:

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{5}$$

Из (3a) находим: $y'' = -\frac{1+y'^2}{y}$; учитывая (5), получаем

$$y'' = -\frac{x^2+y^2}{y^3}. \tag{6}$$

Из (4a), учитывая (5) и (6), находим:

$$y''' = \frac{-3x(x^2+y^2)}{y^5}. \tag{7}$$

Подставляя $x = 3$, $y = 4$ в (5), (6) и (7), находим:

$$y' = -\frac{3}{4}, \quad y'' = -\frac{25}{64}, \quad y''' = -\frac{225}{1024}.$$

Замечание 1. В данном случае можно упростить вычисление. В силу уравнения $x^2+y^2=25$ формула (6) принимает вид $y''=-\frac{25}{y^3}$. Отсюда $y'''=-\frac{d}{dx}\left(\frac{25}{y^3}\right)=\frac{75}{y^4}y'=-\frac{75x}{y^5}$.

Замечание 2. Нет необходимости выводить (3а) из (3), (4а) из (4) и т. д. Можно сразу брать производные. Но предварительное вычисление дифференциалов страхует от некоторых ошибок, свойственных начинающим (для производной от y'^2 пишут $2y'$ вместо $2y'y''$ и т. п., ср. § 238, замечание).

§ 262. Правило Лейбница

Чтобы составить выражение производной n-го порядка от произведения uv (по любому аргументу), надо разложить $(u+v)^n$ по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить все степени производными соответствующего порядка, причем нулевые степени ($u^0=v^0=1$), подразумеваемые в крайних членах разложения, заменить самими функциями.

По этому правилу получаем:

$$(uv)' = u'v+uv', \tag{1}$$

$$(uv)'' = u''v+2u'v'+uv'', \tag{2}$$

$$(uv)''' = u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''', \tag{3}$$

. . . .

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \tag{4}$$

Это правило, подмеченное Лейбницем, доказывается методом полной математической индукции.

Пример 1. Найти десятую производную от функции $e^x x^2$.

Решение. По формуле (4) (при $u=e^x$, $v=x^2$, $n=10$) имеем:

$$(e^x x^2)^{\mathrm{X}} = (e^x)^{\mathrm{X}}x^2+10(e^x)^{\mathrm{IX}}(x^2)'+45(e^x)^{\mathrm{VIII}}(x^2)''+\ldots$$

Следующие слагаемые нет нужды выписывать, так как производные от x^2 третьего и высших порядков равны нулю. Учитывая, что все производные от e^x равны e^x, получаем

$$(e^x x^2)^{\mathrm{X}} = e^x(x^2+20x+90).$$

Пример 2. Найти значения всех производных от $f(x)=\operatorname{arctg} x$ при $x=0$.

Решение. Имеем.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{5}$$

так что

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \tag{6}$$

Непосредственное вычисление высших производных очень громоздко. Но если представить (5) в виде

$$f'(x)(1+x^2) = 1$$

и применить правило Лейбница ($u = f'(x)$, $v = 1+x^2$), то получим:

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2) + nf^{(n)}(x)\,2x + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

При $x = 0$ имеем:

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)\,f^{(n-1)}(0) = 0. \tag{7}$$

Так как $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, то значения всех производных четного порядка равны нулю:

$$f''(0) = f^{\mathrm{IV}}(0) = f^{\mathrm{VI}}(0) = \ldots = 0. \tag{8}$$

Так как $f'(0) = 1$, то из (7) находим последовательно:

$$\begin{aligned}
f'''(0) &= -1\cdot 2f'(0) = -(2!),\\
f^{\mathrm{V}}(0) &= -3\cdot 4f'''(0) = +(4!),\\
f^{\mathrm{VII}}(0) &= -5\cdot 6f^{\mathrm{V}}(0) = -(6!),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(2k+1)}(0) &= -(2k-1)\,2kf^{(2k-1)}(0) = (-1)^k\,(2k!).
\end{aligned}$$

§ 263. Теорема Ролля [1])

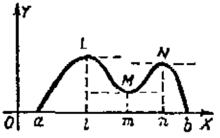
Теорема. Пусть функция $f(x)$, дифференцируемая в замкнутом промежутке (a, b), обращается в нуль на концах промежутка. Тогда производная $f'(x)$ по меньшей мере один раз обращается в нуль внутри промежутка.

---

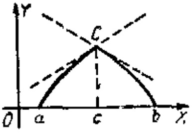
[1]) М. Ролль (1652—1719), современник Ньютона и Лейбница, считал дифференциальное исчисление логически противоречивым и, естественно, не мог высказать «теоремы Ролля». Роллю принадлежит одна алгебраическая теорема, из которой вытекает такое следствие: если a и b — корни уравнения $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$, то между a и b лежит корень уравнения $nx^{n-1} + (n-1)p_1x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + p_{n-1} = 0$. Это предложение есть частный случай «теоремы Ролля» (левая часть второго уравнения есть производная левой части первого уравнения). Отсюда название (исторически неточное) «теорема Ролля».

На черт. 251 между точками $x=a$ и $x=b$, где график функции $f(x)$ пересекает ось OX, есть три точки L, M, N, где касательная параллельна оси OX (т. е. $f'(x)=0$).

На черт. 252 между $x=a$ и $x=b$ нет ни одной точки с «горизонтальной» касательной. Причина в том, что в точке C у графика нет касательной, т. е. функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x=c$ [здесь есть две односторонние производные (§ 231)].



Черт. 251.



Черт. 252.

Замечание 1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет при $x=a$ и $x=b$ одинаковые значения, хотя бы и не равные нулю, то производная $f'(x)$ равным образом обращается в нуль внутри промежутка (a, b).

Замечание 2. Теорема Ролля остается в силе и в том случае, когда $f(x)$ дифференцируема лишь во внутренних точках промежутка (a, b), на концах же функция $f(x)$ может быть и не дифференцируемой, а только непрерывной.

Обычно теорема Ролля высказывается при этих наиболее общих условиях, что усложняет ее формулировку и затрудняет усвоение *основного* ее содержания. В дальнейшем (§ 264, 266, 283) мы формулируем условия ряда теорем также не в самых общих предположениях, последние приводятся во вторую очередь в виде замечаний.

§ 264. Теорема Лагранжа[1]) о среднем значении

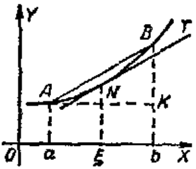
Формулировка теоремы. Если функция $f(x)$ дифференцируема в замкнутом промежутке (a, b), то отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно значению производной $f'(x)$ в некоторой точке $x=\xi$ [2]), лежащей внутри промежутка (a, b):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \qquad (1)$$

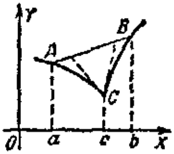
[1]) Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — великий французский ученый, создатель аналитической механики, один из творцов вариационного исчисления.

[2]) Греческая буква ξ (кси) — стандартное обозначение для «среднего значения» аргумента (т. е. значения, содержащегося внутри данного промежутка).

Геометрическое истолкование. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{KB}{AK}$ (черт. 253) есть угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ — угловой коэффициент касательной NT. Теорема Лагранжа утверждает, что между A и B на дуге $\overset{\frown}{AB}$ найдется по меньшей мере одна точка N, где касательная параллельна хорде AB при условии, что *в каждой точке* дуги $\overset{\frown}{AB}$ существует касательная.



Черт. 253.



Черт. 254.

Из черт. 254 видно, что при несоблюдении этого условия теорема может быть неверной. В точке C нет касательной (существуют лишь односторонние касательные — правая и левая). Функция $f(x)$, изображаемая графиком ACB, недифференцируема при $x=c$, и теорема Лагранжа оказывается неверной: ни при каком промежуточном значении ξ производная $f'(x)$ не равна отношению $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Механическое истолкование. Пусть $f(t)$ — расстояние точки в момент t от начального положения. Тогда $f(b)-f(a)$ есть путь, пройденный с момента $t=a$ по момент $t=b$, отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — средняя скорость за этот промежуток времени. Теорема Лагранжа утверждает, что в какой-то промежуточный момент скорость точки равна средней скорости движения при условии, что в каждый момент точка обладает определенной скоростью.

Теорема может оказаться неверной при невыполнении этого условия. Так, если точка движется первый час со скоростью 20 *м/час*, а второй — со скоростью 30 *м/час*, то средняя скорость движения равна 25 *м/час*; такой скорости точка не имела ни разу в течение двух часов. Причина нарушения теоремы — в том, что в конце первого часа точка не обладала определенной скоростью [1]).

---

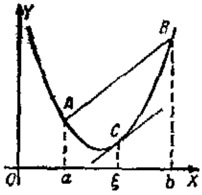
[1]) На самом деле переход от скорости 20 *м/час* к скорости 30 *м/час* обычно происходит не мгновенно, а постепенно в течение незаметного промежутка времени, и тогда есть такой момент, когда скорость равна 25 *м/час*.

Другая формулировка теоремы Лагранжа. Уравнение

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(при выполнении условия теоремы) имеет по меньшей мере один корень $x=\xi$ внутри промежутка (a, b).

Положение этого корня (или корней) зависит от вида функции $f(x)$. Если она — квадратичная (график — парабола; черт. 255), получаем уравнение первой степени; его корень лежит в точности на середине (a, b), т. е.



Черт. 255.

$$\xi=\frac{b+a}{2}.$$

Для остальных функций это свойство осуществляется приближительно; именно, если a имеет постоянное значение, а b стремится к a, то один из корней, как правило [1]), стремится к середине отрезка (a, b), т. е. $\lim\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}$ при $b\to a$.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^2$. Тогда $f'(\xi)=2\xi$. Формула (1) принимает вид

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2\xi,$$

откуда

$$\xi=\frac{a+b}{2},$$

т. е. ξ лежит в точности на середине промежутка (a, b).

Пример 2. Пусть $f(x)=x^3$, тогда $f'(x)=3x^2$. Возьмем $a=10$, $b=12$. Имеем:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=364.$$

Согласно теореме Лагранжа уравнение $3x^2=364$ должно иметь корень, лежащий между 10 и 12. Действительно, его положительный корень $x=\sqrt{121\frac{1}{3}}\approx 11{,}015$ лежит на отрезке (10, 12) и притом близко к середине.

Замечание. Теорема Лагранжа остается в силе и в том случае, когда функция $f(x)$ дифференцируема лишь во внутренних точках промежутка (a, b) (на концах же не дифференцируема, а только непрерывна).

---

[1]) Исключение составляют лишь случаи, когда вторая производная $f''(a)$ равна нулю или не существует.

§ 265. Формула конечных приращений

Формулу (1) § 264 можно переписать в виде

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1}$$

или при иных обозначениях

$$f(a+h)-f(a)=f'(\xi)h. \tag{2}$$

Это — *формула конечных приращений*; ее пишут также в виде

$$f(a+h)=f(a)+f'(\xi)h. \tag{3}$$

Применение к приближенным вычислениям. В § 248 мы применили для вычисления $f(a+h)$ приближенную формулу

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h. \tag{4}$$

Точная формула (3) (хотя значение ξ неизвестно) позволяет оценить погрешность формулы (4). Если же в формуле (3) положить $\xi=\frac{a+b}{2}$, то хотя она и перестает быть точной, но дает, как правило (ср. § 264), гораздо лучшее приближение, чем (4).

Пример. Найти без таблиц lg 101.

Полагая $f(x)=\lg x$, имеем $f'(x)=\frac{M}{x}$ $(M=0{,}43429)$. При $a=100$ и $h=1$ формула (4) дает:

$$\lg 101\approx\lg 100+M\cdot\frac{1}{100}\cdot 1=2{,}0043429. \tag{5}$$

Для оценки погрешности применим точную формулу (3); получим:

$$\lg 101=\lg 100+M\cdot\frac{1}{\xi}\cdot 1. \tag{6}$$

Здесь ξ лежит между 100 и 101, так что $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{101}$. Погрешность формулы (5) составляет $M\left|\frac{1}{100}-\frac{1}{\xi}\right|$, а эта величина заведомо меньше, чем $M\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$, т. е. меньше, чем 0,00004. Такова предельная погрешность формулы (5) (истинная погрешность вдвое меньше).

Если же в формуле (6) положить $\xi=\frac{1}{2}(100+101)=$ $=100{,}5$, то получим:

$$\lg 101\approx\lg 100+M\cdot 0{,}00995025\cdot 1=2{,}0043213. \tag{7}$$

Здесь неверна лишь последняя цифра; истинное ее значение на единицу больше.

Следствия из формулы (1). Из определения производной непосредственно следует, что производная постоянной величины равна нулю. Из формулы (1) вытекает следующая обратная теорема.

Теорема 1. Если производная $f'(x)$ в промежутке (m, n) всюду равна нулю, то в этом промежутке функция $f(x)$ есть постоянная величина [т. е. для любых значений (a, b) *в этом промежутке*[1]) значения функции $f(x)$ одинаковы].

Пояснение. Функция $f(x)$ по условию дифференцируема в промежутке (m, n) и тем более в промежутке (a, b). Значит, к ней можно (§ 264) применить формулу (1). В последней по условию надо положить $f'(\xi) = 0$. Получим $f(b) = f(a)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. Если производные двух функций $f(x)$, $\varphi(x)$ в промежутке (m, n) всюду равны, то *в этом промежутке* значения обеих функций разнятся на постоянную величину.

§ 266. Обобщенная теорема о среднем значении (Коши)

Теорема Коши[2]). Пусть производные $f'(t)$ и $\varphi'(t)$ двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, дифференцируемых в замкнутом промежутке (a, b), не обращаются одновременно в нуль нигде внутри этого промежутка. Пусть при этом одна из функций $f(t)$, $\varphi(t)$ имеет неравные значения на концах интервала [например, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$]. Тогда приращения $f(b) - f(a)$ и $\varphi(b) - \varphi(a)$ данных функций относятся как их производные в некоторой точке $t = \tau$[3]), лежащей внутри промежутка (a, b):

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}. \tag{1}$$

Формула Лагранжа (формула (1) § 264) есть частный случай формулы (1) при $\varphi(t) = t$.

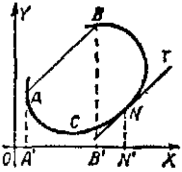
---

[1]) Функция $f(x)$ по условию определена *во всем* промежутке (m, n), иначе она не всюду имела бы производную. Если, вопреки условию, функция $f(x)$ будет определена во всех точках промежутка (m, n), кроме, скажем, двух точек $x = k$ и $x = l$ $(k < l)$, то может оказаться, что функция является постоянной лишь в каждом из (незамкнутых) промежутков (m, k), (k, l) и (l, n) *по отдельности*, но при переходе от одного из них к другому меняет свое значение (см. примеры 1 и 2 § 247а).

[2]) Огюстен (по другому чтению Августин) Коши (1789—1857) — знаменитый французский математик и физик. Коши поставил задачу построить математический анализ на строгом логическом основании и в основном разрешил эту задачу.

[3]) τ — греческая буква («тау»), соответствующая русской букве «т» и латинской t.

Геометрическое истолкование — такое же, как теоремы Лагранжа. Только линия ACB (черт. 256) представляется параметрическими уравнениями



Черт. 256.

$$x=\varphi(t), \qquad y=f(t).$$

Имеем:

$$OA'=\varphi(a), \quad OB'=\varphi(b);$$
$$AA'=f(a), \quad BB'=f(b).$$

Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ — угловой коэффициент хорды AB, отношение $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент касательной NT.

На черт. 256 касательная NT параллельна хорде AB, точка N лежит на дуге AB (но ее проекция N' на ось OX не лежит на отрезке $A'B'$; то же для проекции на ось OY).

Замечание 1. Если, вопреки условию теоремы, мы имели бы $f(a)=f(b)$ и $\varphi(a)=\varphi(b)$, то левая часть (1) была бы неопределенна.

Замечание 2. В условии теоремы Коши требуется, чтобы $f'(t)$ и $\varphi'(t)$ не обращались одновременно в нуль *внутри* промежутка (a, b), но на одном из концов (или на обоих) они могут одновременно обращаться в нуль (и даже не существовать — лишь бы $f(x)$ и $\varphi(x)$ были непрерывны в обоих концах).

Пример 1. Рассмотрим функции

$$f(t)=t^3 \quad \text{и} \quad \varphi(t)=t^2$$

в промежутке $(0, 2)$. На конце $t=0$ производные

$$f'(t)=3t^2 \quad \text{и} \quad \varphi'(t)=2t$$

обращаются в нуль, но внутри промежутка обе отличны от нуля. Каждая из функций $f(t)$, $\varphi(t)$ имеет неравные значения на концах $t=0$ и $t=2$. Условия теоремы Коши выполнены. Значит, отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)}=\frac{2^3}{2^2}=2$$

должно равняться отношению

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

в некоторой точке $t=\xi$, лежащей между $a=0$ и $b=2$. Действительно, уравнение

$$\frac{3}{2}t=2$$

имеет корень $t=\frac{4}{3}$, лежащий внутри промежутка $(0, 2)$.

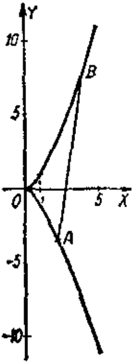
Пример 2. Рассмотрим те же функции $f(t)=t^3$ и $\varphi(t)=t^2$ в промежутке $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. При $a=-1\frac{1}{2}$, $b=2$ имеем:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}=\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}=\frac{13}{2}.$$

Уравнение

$$\frac{3}{2}t=\frac{13}{2}$$

имеет единственный корень $t=4\frac{1}{3}$, но он лежит вне промежутка $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. Теорема Коши оказалась неприменимой по той причине, что точка $t=0$, где обе производные $f'(t)$, $\varphi'(t)$ равны нулю, лежит теперь внутри промежутка (a, b). Геометрическая картина такова: параметрические уравнения $x=t^2$, $y=t^3$ представляют полукубическую параболу AOB (черт. 257); значениям $a=-1^1/_2$, $b=2$ соответствуют точки $A(2^1/_4; -3^3/_8)$ и $B(4; 8)$. На дуге AOB линии $x=t^2$, $y=t^3$ (полукубическая парабола) нет точек, где касательная была бы параллельна хорде AB (такая точка есть за пределами дуги AB выше точки B).



Черт. 257.

Механическое истолкование. Пусть t — время, а

$$s_P = f(t)$$

и

$$s_Q = \varphi(t)$$

— расстояния двух прямолинейно движущихся тел P и Q *от их начальных положений. Тогда* $f'(t)$ *и* $\varphi'(t)$ суть скорости v_P и v_Q тел P и Q. По условию теоремы Коши v_P и v_Q не равны нулю одновременно. Теорема утверждает, что пути, пройденные телами в промежуток времени (a, b), относятся, как скорости в какой-то промежуточный момент[1]) (один и тот же для обоих тел).

§ 267. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Если какая-либо функция не определена в точке $x=a$, но обладает пределом при $x \to a$, то разыскание этого предела называется *раскрытием неопределенности*. В частности, раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$ называют разыскание предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где функции $f(x)$, $\varphi(x)$ бесконечно малы при $x \to a$.

---

[1]) Поясним это наглядно. Пусть за промежуток времени (a, b) тело P прошло вдвое больший путь, чем Q ($s_P = 2s_Q$). Если оба движения равномерны, то в *любой* промежуточный момент имеем: $v_P = 2v_Q$. Пусть теперь одно из движений (или оба) неравномерно. Невозможно, чтобы всегда было $v_P > 2v_Q$ (ибо тогда путь тела P превосходил бы путь тела Q более чем вдвое). Невозможно также, чтобы всегда было $v_P < 2v_Q$. *Поэтому, если сначала* v_P *превосходит* $2v_Q$, *то потом* v_P меньше, чем $2v_Q$ (и наоборот). Значит, в какой-то промежуточный момент должно быть $v_P = 2v_Q$. В этот момент имеем: $v_P : v_Q = s_P : s_Q$, ибо по условию случай, когда $v_P = v_Q = 0$, исключается (в этом случае отношение $v_P : v_Q$ было бы неопределенным).

Правило Лопиталя[1]). Для разыскания предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двух функций, бесконечно малых при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), можно рассматривать отношение их производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Если оно стремится к пределу (конечному или бесконечному), то к тому же пределу стремится и отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ [2]).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$.

Функции $f(x) = x^2 - 1$ и $\varphi(x) = x^3 - 1$ бесконечно малы при $x \to 1$. Рассмотрим отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2x}{3x^2}$. Оно стремится при $x \to 1$ к пределу $\frac{2}{3}$. Согласно правилу Лопиталя к тому же пределу стремится $\frac{x^2-1}{x^3-1}$. Действительно,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Если не только функции $f(x)$, $\varphi(x)$, но и их производные $f'(x)$, $\varphi'(x)$ бесконечно малы при $x \to a$, то для разыскания предела $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ можно повторно применить правило Лопиталя.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Числитель и знаменатель бесконечно малы. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}.$$

---

[1]) Лопиталь (1661—1704) — автор первого печатного руководства по дифференциальному исчислению (1696 г.), где и сформулировано правило (в менее точной форме, чем здесь приведенное). При составлении этого руководства Лопиталь пользовался рукописью своего учителя Ивана Бернулли. В рукописи содержалось и упомянутое правило. Поэтому название «правило Лопиталя» исторически неточно.

[2]) В формулировку правила обычно включается требование, чтобы производная $\varphi'(x)$ не равнялась нулю в некоторой окрестности точки $x = a$. Это требование излишне, так как в правиле уже сказано, что отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет предел при $x \to a$, а в силу определения предела (§ 205) это возможно лишь тогда, когда $\varphi'(x) \neq 0$ вблизи $x = a$.

Здесь числитель и знаменатель снова бесконечно малы. Применяем правило Лопиталя повторно:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Последовательно применяя правило Лопиталя, мы дважды получим отношение бесконечно малых величин

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x},\quad \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}.$$

В третий раз получим отношение

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}.$$

При $x\to 0$ оно имеет предел 2. Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2.$$

Замечание 1. Теоретически не исключена возможность, что все производные обеих функций $f(x)$, $\varphi(x)$ будут бесконечно малы На практике такие случаи не встречаются.

Применение правила Лопиталя бывает полезно комбинировать с преобразованиями, облегчающими разыскание предела.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Следуя правилу Лопиталя, ищем предел отношения

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3\sin^2 x\cos x}\text{ при } x\to 0.$$

Здесь $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ бесконечно малы, но искать $\lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нецелесообразно Лучше преобразовать $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ к виду $\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x\cos^3 x}$ и, заметив, что $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^3 x)=1$, искать $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3\sin^2 x}$. По правилу Лопиталя этот предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{6\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Можно с самого начала заменить $\sin^3 x$ эквивалентной бесконечно малой x^3. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cdot\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}.$$

Повторное применение правила Лопиталя дает:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{6x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Замечание 2. Может случиться, что отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$ (или $x\to\infty$) не стремится ни к какому пределу. В таких случаях отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может тоже не иметь предела, но может и иметь. Так, если $f(x)=x+\sin x$ и $\varphi(x)=x$, то отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=1+\cos x$ при $x\to\infty$ не имеет предела. Однако отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x}$$

при $x\to\infty$ стремится к единице.

§ 268. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Правило Лопиталя (§ 267) имеет силу также и для отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двух функций, бесконечно больших при $x\to a$ (или при $x\to\infty$).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Функции $f(x)=\ln x$ и $\varphi(x)=x^2$ бесконечно велики при $x\to\infty$. Отношение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x}$ при $x\to\infty$ стремится к пределу 0. К тому же пределу стремится $\frac{\ln x}{x^2}$.

Замечание. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют бесконечные пределы при $x\to a$, то пределы $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ (если они существуют) тоже бесконечны, и правило Лопиталя приносит пользу лишь тогда, когда выражение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ удается преобразовать к более удобному виду легче, чем выражение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Функции $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{tg} x$, а также их производные $\frac{3}{\cos^2 3x}$ и $\frac{1}{\cos^2 x}$ бесконечно велики при $x\to\frac{\pi}{2}$. Представив отношение производных в виде $3\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$, ищем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$ (теперь числитель и знаменатель бесконечно малы). Применив правило § 267, получим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Но исходное выражение еще проще преобразуется к удобному виду. Именно $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x}$, так что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3\sin^2 x} = \frac{1}{3}.$$

§ 269. Неопределенные выражения других видов

I. Неопределенность вида $0\cdot\infty$, т. е. произведение $f(x)\,\varphi(x)$, где $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to\infty$. Это выражение можно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x)\,\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)}$$

и затем применить правило Лопиталя.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Преобразуем $x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = x : \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и находим:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0}\left[1 : \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = 2.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \ln x$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 0} x^4\ln x = \lim_{x\to 0}\left[\ln x : \frac{1}{x^4}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} : \frac{-4}{x^5}\right] = 0.$$

II. Неопределенность вида $\infty - \infty$, т. е. разность двух функций, каждая из которых имеет предел $+\infty$ (или каждая имеет предел $-\infty$). Это выражение также приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Приводим дроби к общему знаменателю; искомая величина есть $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x(e^x+1)}$, т. е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как $\lim\limits_{x \to 0}(e^x+1) = 2$, то

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{2}.$$

III. Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞, т. е. функции вида $f(x)^{\varphi(x)}$, где $\lim f(x) = 0$ и $\lim \varphi(x) = 0$ или $\lim f(x) = \infty$, $\lim \varphi(x) = 0$ или $\lim f(x) = 1$, $\lim \varphi(x) = \infty$.

Здесь сначала ищем предел логарифма данной функции. Во всех трех случаях получаем неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} x^x$ (неопределенность 0^0).

Полагая $y = x^x$, имеем $\ln y = x \ln x$. Далее,

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \left(\ln x : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} : -\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x \to 0} y = 1.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (неопределенность ∞^0).

Полагаем $y = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$; имеем: $\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+2x)$. Далее,

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1+2x} = 0.$$

Значит, $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (неопределенность 1^∞).

Имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin x \cos x} : -\frac{2}{\sin^2 2x}\right) = -1.$$

Значит,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}.$$

§ 270. Исторические сведения о формуле Тейлора [1]

1. Бесконечные ряды у Ньютона. Для отыскания производной от данной функции и главным образом для решения обратной задачи Ньютон заменял данную функцию *бесконечным степенным рядом*, т. е. выражением

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

с неограниченно растущим числом членов. Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ брались так, чтобы выражение (1) по мере роста числа членов давало все более точные значения функции. Так, функцию $\frac{1}{1+x}$ Ньютон заменял выражением $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ и писал [2]:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{2}$$

---

[1]) *Настоящий параграф служит введением к § 271 и 272; последний можно читать и независимо.*

[2]) Разложение (2) получается, если к частному $1 : (1+x)$ применить правило деления многочленов, расположенных по возрастающим степеням. До Ньютона формула (2) была применена *Николаем Меркатором* (в 1665 г.) в связи с вычислением логарифмов $\left[\text{производная от } \ln(1+x) \text{ равна } \frac{1}{1+x}\right]$. У Меркатора разложение в бесконечный ряд ограничилось этим единичным случаем. У Ньютона оно стало общим методом.

Если $|x| < 1$, то члены $1, -x, x^2, \ldots$ образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, и сумма ее равна $\frac{1}{1+x}$. Если же $|x| \geq 1$, то сумма $1-x+$ $+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n$ при $n \to \infty$ не стремится к $\frac{1}{1+x}$. Учитывая это обстоятельство, Ньютон всегда ограничивался достаточно малыми значениями x.

Для разложения функций в бесконечные ряды Ньютон пользуется разнообразными приемами. Так, формулу

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots, \qquad (3)$$

установленную ранее Паскалем[1]) для целых положительных m, Ньютон применяет к дробным и отрицательным значениям m. Тогда число членов неограниченно возрастает. При $m=-1$ получается формула (2), при $m=-2$ получается[2]):

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots \qquad (4)$$

Чтобы найти производную от $\frac{1}{1+x}$, Ньютон дифференцирует почленно[3]) выражение (2). Сопоставление с (4) показывает, что

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]' = -\frac{1}{(1+x)^2}. \qquad (5)$$

2. Ряд Тейлора. В 1715 г. Тейлор[4]) сложным и *крайне нестрогим способом нашел общий вид выражения* (1) для данной функции $f(x)$. В нынешних обозначениях результат имеет вид

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots \qquad (6)$$

---

1) Блез Паскаль (1623—1662) — знаменитый французский *философ, математик и физик*.

2) Сознавая, что его выводы не строги, Ньютон проверял их на примерах. Так, выполняя почленное умножение $(1-x+x^2-x^3+\ldots)\times$ $\times(1-x+x^2-x^3+\ldots)$, он находил $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$ и этим проверял формулу (4).

3) Ньютон не знал, что теорема о производной суммы может оказаться неверной для неограниченно растущего числа слагаемых. Впрочем, для рядов вида (1) эта теорема (при достаточно малых значениях x) справедлива, так что ошибок не получалось.

4) Брук Тейлор (1685—1731) — английский математик, ученик Ньютона.

Так, если $f(x)=\frac{1}{1+x}$, то $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Значит, $f(0)=1$ и $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n$, так что формула (6) дает разложение (2). Если $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, получим разложение (4).

3. Вывод Маклорена. Через 30 лет Маклорен[1]) дал следующий простой вывод формулы Тейлора. Он рассматривает равенство

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots \tag{7}$$

и, желая определить коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$, последовательным дифференцированием находит:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots,\\ f''(x) &= 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots,\\ f'''(x) &= 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Подставляя в (7) и (8) $x=0$, он последовательно получает[2]):

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},\quad a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ и т. д.} \tag{9}$$

4. Ряд Тейлора в общем виде. Таким же образом выводится формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots, \tag{10}$$

дающая разложение функции по степеням $(x-a)$. Эта формула тоже была известна Тейлору; по существу она не дает ничего нового в сравнении с (6).

---

[1]) Колин Маклорен (1698—1746) — английский математик; степенной ряд (6) ныне называют (без достаточного основания) рядом Маклорена.

[2]) Если доказать законность почленного дифференцирования ряда (7), то вывод Маклорена безукоризненно доказывает такую теорему: если $f(x)$ разлагается в ряд (7), то коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ выражаются формулами (9). Однако есть функции, которые не разлагаются в ряд (7) [хотя их производные $f'(0), f''(0), \ldots$ существуют]. Пример такой функции дан в последнем подстрочном примечании настоящего параграфа.

Так, для функции $f(x)=\ln x$ при $a=1$ формула (10) дает:

$$\ln x=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots \tag{11}$$

Если же взять функцию $f(x)=\ln(1+x)$, то по формуле (6) найдем:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \tag{12}$$

Положив $1+x=z$, получим формулу

$$\ln z=\frac{z-1}{1}-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\dots, \tag{13}$$

которая отличается от (11) только обозначениями.

5. Остаток ряда Тейлора. Функции, которые были известны в 18-м веке, допускают разложение в ряд Тейлора (10) (при любых значениях a, кроме тех, при которых функция или одна из ее производных обращается в бесконечность). Основываясь на своем ограниченном опыте, математики 18-го века не сомневались в том, что всякая непрерывная функция разлагается в ряд Тейлора. Однако ощущалась потребность в точной оценке погрешности, которую дает формула (10), если ее оборвать на члене $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

В 1799 г. Лагранж вывел для «остатка ряда Тейлора», т. е. для разности R_n

$$R_n=f(x)-\left[f(a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right], \tag{14}$$

следующее выражение:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}. \tag{15}$$

Здесь ξ — некоторое число, лежащее между a и x.

Доказательство Лагранжа предполагало разложимость функции $f(x)$ в ряд Тейлора [1]). Четверть века спустя Коши доказал формулу (15), не опираясь на это предположение; он также дал другое выражение остатка. По выражению остатка стало возможным судить и о разложимости функции в ряд Тейлора: если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора, в противном случае не разлагается.

[1]) Лагранж даже доказывал, что такое разложение возможно для всякой непрерывной функции, но доказательство было неудовлетворительно.

Коши дал первый пример функции[1]), которая хотя и обладает в точке $x=a$ всеми производными, но не разлагается в ряд (10) по степеням $x-a$ (практического значения такие функции не имеют).

§ 271. Формула Тейлора[2])

Теорема. Если функция $f(x)$ обладает в замкнутом промежутке (a, b) производными до $(n+1)$-го порядка включительно[3]), то

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \qquad (1)$$

где ξ — некоторое число, лежащее между a и b.

Формулу (1) называют *формулой Тейлора*.

Последнее слагаемое $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$, называемое *остаточным членом в форме Лагранжа*[4]), дает точное выражение разности R_n между $f(b)$ и выражением

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

(«многочлен Тейлора»):

$$R_n=f(b)-\left[f(a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right]=$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \qquad (2)$$

---

[1]) Эта функция задается формулой $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ при добавочном условии $f(0)=0$ (при $x=0$ формула теряет смысл). Функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ производные любого порядка. Все они равны нулю в этой точке, так что правая часть формулы (10) тождественно равна нулю. Однако $f(x)$ нигде, кроме точки $x=0$, не обращается в нуль.

[2]) Рекомендуется предварительно прочесть § 270.

[3]) На концах промежутка $(n+1)$-я производная может не существовать, лишь бы n-я производная была непрерывна не только внутри, но и на концах промежутка.

[4]) В отличие от других форм остаточного члена.

Формула Тейлора устанавливает, что уравнение (1), в котором за неизвестное принимается ξ, имеет по меньшей мере одно решение[1]), лежащее между a и b (ср. § 264).

Когда a рассматривается как постоянная, а b как переменная величина, вместо b пишут x:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3)$$

При $a = 0$ получаем так называемую[2]) «формулу Маклорена»

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (4)$$

Пример. Применим формулу (4) при $n = 2$ к функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Имеем:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Значит,

$$f(0) = 1, \quad \frac{f'(0)}{1!} = -1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = +1, \quad \frac{f'''(\xi)}{3!} = -\frac{1}{(1+\xi)^4}.$$

Формула (4) принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{(1+\xi)^4}. \qquad (5)$$

Здесь ξ лежит между нулем и x. Важно отметить, что формула верна только при $x > -1$. В этом случае условие теоремы выполнено: функция $\frac{1}{1+x}$ в замкнутом промежутке $(0, x)$ обладает всеми производными.

Решая (5) относительно ξ, находим:

$$\xi_1 = \sqrt[4]{1+x} - 1, \quad \xi_2 = -\sqrt[4]{1+x} - 1. \qquad (6)$$

Легко проверить, что при $x > -1$ первый корень ξ_1 действительно лежит между нулем и x.

---

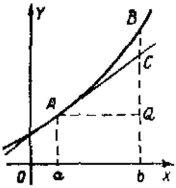
[1]) При неизменных значениях a и b величина ξ, как правило, меняется с изменением n.

[2]) Ср. § 270, п. 3.

Если же $x \leqslant -1$, то условие теоремы не выполняется, ибо функция $\frac{1}{1+x}$ не имеет производных в точке -1, а эта точка либо оказывается внутри промежутка $(0, x)$ (если $x < -1$), либо совпадает с его концом (если $x = -1$).

Формула (5) становится неверной: при $x = -1$ левая часть теряет смысл, при $x < -1$ уравнение (5) имеет мнимые корни.

Замечание. При $n = 0$ формула Тейлора (2) [в которой вместо $f^{(0)}(a)$ надо написать $f(a)$] дает формулу конечных приращений (§ 265)



Черт. 258.

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{7}$$

При $n = 1$ получаем:

$$f(b)-f(a)-f'(a)(b-a) = \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2, \tag{8}$$

или при других обозначениях:

$$[f(x+\Delta x)-f(x)]-f'(x)\,\Delta x = \frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2. \tag{8a}$$

Эта формула дает выражение разности между приращением функции и ее дифференциалом (отрезок CB на черт. 258).

Если вторая производная $f''(x)$ непрерывна при рассматриваемом значении x, то разность между приращением функции и ее дифференциалом имеет второй порядок относительно Δx [когда $f''(x) \neq 0$] или более высокий [когда $f''(x) = 0$]. Ср. § 230.

§ 272. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции

Формула Тейлора часто позволяет вычислять значения функции с любой точностью.

Пусть известны значения

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \quad f'''(a), \quad \ldots$$

функции $f(x)$ и ее последовательных производных в «начальной» точке $x = a$. Требуется же найти значение функции $f(x)$ при ином значении x.

Во многих случаях для этого достаточно вычислить значение многочлена Тейлора

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{1}$$

взяв здесь два, три или больше членов в зависимости от требуемой степени точности. Конечно, мы допускаем при этом некоторую ошибку R_n; она равна

$$R_n = f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]. \quad (2)$$

Но часто оказывается, что ошибка R_n неограниченно уменьшается (по абсолютному значению) с увеличением числа членов (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$). Тогда многочлен Тейлора может дать искомое значение $f(x)$ с любой степенью точности.

Число членов, обеспечивающее требуемую степень точности, существенно зависит от того, как велико расстояние $|x-a|$ от начальной точки a до точки x. Чем больше $|x-a|$, тем больше членов приходится брать (см. пример 1). Нередко случается и так, что стремление R_n к нулю не только замедляется с ростом расстояния $|x-a|$, но при дальнейшем росте и вовсе прекращается (см. пример 2). Тогда многочлен (1) пригоден для вычисления $f(x)$ лишь на ограниченном расстоянии от начальной точки.

Значит, надо уметь ответить на следующие вопросы: пригоден ли многочлен (1) для вычисления $f(x)$ на данном расстоянии $|x-a|$ от начальной точки a и если да, то сколько членов надо взять для достижения требуемой точности? Важно также знать, для всякого ли расстояния $|x-a|$ ошибка R_n стремится к нулю с ростом числа членов, а если не для всякого, то где его граница.

Для решения этих вопросов применяются различные приемы. Один из них[1]) основывается на теореме § 271, позволяющей представить ошибку R_n в следующем виде[2]):

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (3)$$

Число ξ здесь неизвестно; мы знаем лишь то, что ξ лежит между a и x. Но и этого бывает достаточно, чтобы оценить ошибку R_n и ответить на поставленные выше вопросы.

---

[1]) Этот прием не является наилучшим; иной раз он и вовсе не достигает цели. Другие приемы указаны ниже (§ 401).

[2]) Предполагается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы § 271; во множестве практически важных случаев так и бывает.

Пример 1. Пусть $f(x)=e^x$. Все производные этой функции равны e^x. Нам известно значение e^x в точке $x=0$ (именно $e^0=1$). Эту точку мы и примем за начальную. Условия теоремы § 271 соблюдены при всех значениях x. В многочлене Тейлора (1) надо положить:

$$a=0,\ f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=1, \tag{4}$$

и он принимает такой вид:

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n. \tag{5}$$

Заменив значение e^x значением многочлена (5), мы допустим некоторую ошибку R_n; она равна

$$R_n=e^x-\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right]. \tag{6}$$

Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, то ошибку R_n согласно формуле (3) можно представить в таком виде:

$$R_n=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{7}$$

Чсло ξ лежит где-то между иулем и x (оно зависит и от x и от n). Значит, e^ξ лежит между $e^0=1$ и e^x. Этого достаточно, чтобы оценить ошибку.

Пусть, например, надо вычислить значение e^x при $x=\frac{1}{2}$, т. е. извлечь квадратный корень из числа e. Так как число e заключено между 2 и 3, то $e^{1/2}$ меньше чем 2, а e^ξ и подавно. Из (7) следует, что $|R_n|<\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, т. е.

$$|R_n|<\frac{1}{(n+1)!\,2^n}. \tag{8}$$

С ростом n величина $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ (предельная погрешность) стремится к нулю, а ошибка R_n и подавно. Значит, многочлен (5), который теперь принимает значение

$$1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{2}{2!\,2^2}+\frac{1}{3!\,2^3}+\ldots+\frac{1}{n!\,2^n}, \tag{9}$$

пригоден для вычисления $\sqrt{e}$ с любой точностью.

Определим теперь, сколько членов должна иметь сумма (9), чтобы обеспечить точность, скажем, до четвертого десятичного знака (т. е. до $\pm 0{,}5\cdot 10^{-4}$). Для этого вычисляем предельную погрешность $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ при $n=1, 2, 3$ и т. д.[1]):

$$\frac{1}{2!\,2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3!\,2^2} = \frac{1}{2!\,2} : 6 = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{3!\,2^2} : 8 = \frac{1}{192},$$

$$\frac{1}{5!\,2^4} = \frac{1}{4!\,2^3} : 10 = \frac{1}{1920},$$

$$\frac{1}{6!\,2^5} = \frac{1}{5!\,2^4} : 12 = \frac{1}{23\,040}.$$

Здесь можно остановиться, так как $\frac{1}{23\,040} < 0{,}5\cdot10^{-4}$.

Итак, для обеспечения точности $0{,}5\cdot10^{-4}$ достаточно, чтобы сумма (9) имела шесть членов. Находим[2]):

$$1 = 1{,}00000,$$

$$\frac{1}{1!\,2} = 0{,}50000,$$

$$\frac{1}{2!\,2^2} = \frac{1}{1!\,2} : 4 = 0{,}12500,$$

$$\frac{1}{3!\,2^3} = \frac{1}{2!\,2^2} : 6 = 0{,}02083,$$

$$\frac{1}{4!\,2^4} = \frac{1}{3!\,2^3} : 8 = 0{,}00260,$$

$$\frac{1}{5!\,2^5} = \frac{1}{4!\,2^4} : 10 = 0{,}00026$$

$$1{,}64869$$

В итоге получаем:

$$\sqrt{e} = 1{,}6487.$$

Таким же образом найдем, что для обеспечения точности до $\pm 0{,}5\cdot10^{-8}$ сумма (9) должна иметь 10 членов, ибо

$$|R_9| < \frac{1}{10!\,2^9} \approx 0{,}55\cdot10^{-9} < 0{,}5\cdot10^{-8}.$$

---

1) Начиная со второй строки нижеследующей выкладки, мы прибегаем к последовательному делению на четные числа 6, 8, 10, ..., основываясь на тождестве

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n} = \frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{n!\,2^{n-1}}.$$

2) Каждый член вычисляем до пятого десятичного знака во избежание накопления погрешностей.

Вычисление дает:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \ldots + \frac{1}{9!\,2^9} = 1{,}64872127.$$

Взяв 15 членов, можно вычислить $e^{1/2}$ с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-16}$ и т. д. Точность результата быстро возрастает с ростом числа членов.

Точность возрастает медленнее, если вычислять e^x при бо́льших значениях $|x|$, например при $x=1$ или при $x=-1$.

Положим $x=1$. Тогда многочлен (5), принимающий вид

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \tag{10}$$

даст приближенное значение числа e. Ошибка R_n согласно (7) равна

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}. \tag{11}$$

Число e^{ξ} теперь заключено между e^0 и e^1, т. е. между 1 и e, а так как $e < 3$, то

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{12}$$

Ошибка по-прежнему стремится к нулю с ростом n. Но теперь для обеспечения точности до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ надо взять девять членов (вместо шести), ибо предельная погрешность $\frac{3}{(n+1)!}$ лишь при $n=8$ становится меньше $0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Вычисление дает:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2{,}7183.$$

Если надо обеспечить точность до $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, придется взять 13 членов (вместо 10); вычисление даст:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{12!} = 2{,}71828183.$$

Взяв 15 членов, можно вычислить e лишь с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ (а не до $0{,}5 \cdot 10^{-16}$, как при вычислении $\sqrt{e}$).

Положим теперь $x=-1$. Тогда многочлен (5), принимающий вид

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

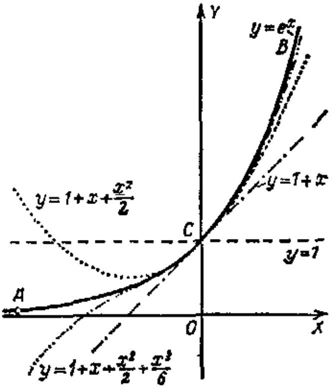
дает приближенное значение числа e^{-1} $\left(\text{т. е. } \frac{1}{e}\right)$. Ошибка R_n согласно (7) равна

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}.$$

Число ξ заключено между минус единицей и нулем; значит, $e^{\xi} < e^0$, т. е. $e^{\xi} < 1$. Следовательно,

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

Предельная погрешность здесь втрое меньше, чем в предыдущем случае. Благодаря этому число членов, обеспечивающее требуемую точность, может снизиться, но не более чем на единицу. Так, точность до $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ обеспечивается теперь не 15 членами, а 14, что для вычислительной практики не имеет существенного значения.



Черт. 259.

Если вместо $x = \pm 1$ мы будем брать значения x, еще бо́льшие по абсолютной величине, то ошибка приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad (13)$$

будет стремиться к нулю еще медленнее. Однако, используя формулу (7) и рассуждая, как выше, мы убедимся, что ошибка R_n будет стремиться к нулю при **всяком** значении x.

На черт. 259 изображены график ACB функции $y = e^x$ и графики ее многочленов Тейлора

$$y = 1, \ y = 1 + x, \ y = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \ y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Пример 2. Пусть

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Как в примере 1, примем точку $x = 0$ за начальную. Условия теоремы § 271 соблюдаются лишь при $x > -1$ [при $x \leqslant -1$ функция $\ln(1+x)$ теряет смысл]. Последовательные производные выражаются следующим образом:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

так что (§ 256, пример 3) будем иметь:

$$f(0) = 0,\quad \frac{f'(0)}{1!} = 1,\quad \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2},$$
$$\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Многочлен Тейлора (1) даст приближенное равенство

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \tag{14}$$

Так как $f^{(n+1)}[\ln(1+x)] = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, то погрешность R_n равенства (14) согласно формуле (3) можно представить в виде

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}, \tag{15}$$

где ξ лежит где-то между нулем и x.

Вычислим, например, значение $\ln(1+x)$ при $x = -0{,}1$. Получаем приближенное равенство

$$\ln 0{,}9 \approx -0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3 - \ldots - \frac{1}{n}\cdot 0{,}1^n. \tag{16}$$

Его погрешность равна

$$R_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Так как ξ лежит между нулем и $-0{,}1$, то $1+\xi > 0{,}9$. Значит, $|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{0{,}9}\right)^{n+1}$, т. е.

$$|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}. \tag{17}$$

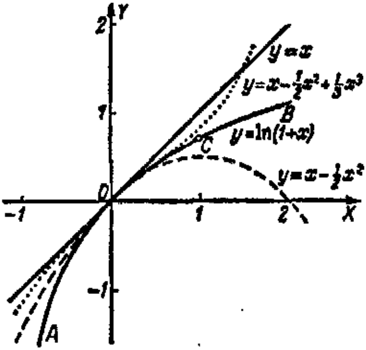
Предельная погрешность, очевидно, стремится к нулю с ростом n, т. е. формула (16) способна дать $\ln 0{,}9$ с любой точностью. Так, для обеспечения точности до $0{,}5\cdot 10^{-4}$ надо взять $n=4$, и мы получим:

$$\ln 0{,}9 \approx -\left[0{,}1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}01+\frac{1}{3}\cdot 0{,}001+\frac{1}{4}\cdot 0{,}0001\right] \approx -0{,}1054.$$

Таким же образом убедимся, что формула (14) пригодна всякий раз, как $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ [1]). Но при увеличении $|x|$ стремление ошибки R_n к нулю замедляется. Слабее всего это стремление при $x=1$. Тогда формула (14) дает:

$$\ln 2 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Чтобы обеспечить, например, точность до $0{,}5\cdot 10^{-4}$, надо взять 19 999 членов.



Черт. 260.

Когда же x хотя бы немного превосходит единицу ошибка вовсе не стремится к нулю; напротив $|R_n|$ неограниченно возрастает с ростом n.

На черт. 260 изображены графики функции $y=\ln(1+x)$ (линия ACB) и трех первых многочленов Тейлора.

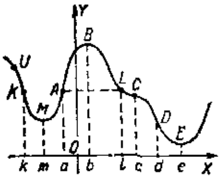
---

[1]) Она пригодна и для всех x, лежащих между -1 и $-\frac{1}{2}$, но выражение (15) не позволяет в этом убедиться.

§ 273. Возрастание и убывание функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* $x=a$, если в достаточной близости от этой точки значениям x, бо́льшим a, соответствуют значения $f(x)$, бо́льшие $f(a)$, а меньшим — меньшие.

Функция $f(x)$ называется *убывающей в точке* $x=a$, если в достаточной близости от этой точки значениям x, бо́льшим a, соответствуют значения $f(x)$, меньшие $f(a)$, а меньшим — бо́льшие.



Черт. 261.

Пример 1. Функция, изображенная на черт. 261, возрастает в точке $x=a$, ибо вправо от A точки графика лежат выше, чем A, а влево — ниже. При этом рассматриваются лишь те точки графика, ординаты которых достаточно близки к ординате aA; в данном примере — это те точки, которые не выходят за пределы дуги KL. За пределами последней указанное соотношение нарушается; так, точка C лежит правее точки A, но ниже ее, точка U — левее, но выше.

Та же функция убывает в точке $x=d$, ибо в достаточной близости от D точки графика справа лежат ниже, чем D, а слева — выше.

Рассматриваемая функция убывает также в точке $x=c$.

В точках $x=b$, $x=e$, $x=m$ функция не является ни возрастающей, ни убывающей (в точке $x=b$ она имеет максимум, а в точках $x=e$ и $x=m$ — минимум; § 275).

Определение 2. Функция называется *возрастающей в промежутке* (a, b), если она возрастает в каждой точке внутри промежутка (на концах она может не возрастать).

Аналогично определяется функция, *убывающая в промежутке* (a, b).

Пример 2. Функция, изображенная на черт. 261, убывает в промежутке (l, d), ибо она убывает в каждой точке внутри промежутка (и на его концах). В промежутке (b, e) данная функция также убывает, ибо она убывает в каждой точке внутри промежутка (на концах b и e функция не убывает). В промежутке (m, b) функция возрастает, в промежутке (a, d) она не является ни возрастающей, ни убывающей. Если же этот промежуток разбить на два: (a, b) и (b, d), то в первом функция возрастает, во втором — убывает.

Если функция возрастает в промежутке (a, b), то в этом промежутке большему значению аргумента соответствует всегда большее значение функции; обратно, если в промежутке (a, b) большему значению аргумента соответствует всегда большее значение функции, то функция возрастает в промежутке (a, b)[1]).

Если функция убывает в промежутке (a, b), то большему значению аргумента соответствует всегда меньшее значение функции, и обратно.

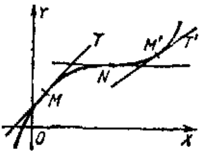
Геометрически: в тех промежутках, где функция возрастает, ее график (при движении направо) подымается, в промежутках, где функция убывает, график опускается (ср. пример 2).

Определение 3. Как возрастающая, так и убывающая (в данном промежутке) функция называется *монотонной* (в рассматриваемом промежутке).

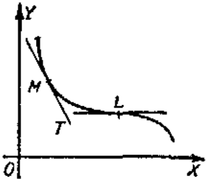
§ 274. Признаки возрастания и убывания функции в точке

Достаточный признак. Если производная $f'(x)$ положительная в точке $x=a$, то функция $f(x)$ в этой точке возрастает, если отрицательная, то убывает.

Геометрически: если угловой коэффициент касательной MT (черт. 262) положителен, то вблизи от M



Черт. 262.



Черт. 263.

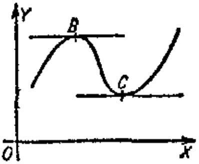
график лежит выше точки M справа и ниже — слева; если угловой коэффициент отрицателен (черт. 263), то вблизи от M график лежит ниже M справа и выше — слева.

---

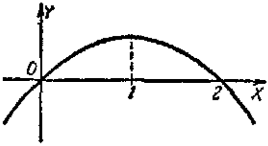
[1]) Это свойство часто принимается за определение функции, возрастающей в промежутке. Аналогично определяют функцию, убывающую в промежутке.

Замечание. *Если $f'(a)=0$, то при $x=a$ функция может быть возрастающей (точка N на черт. 262); она может быть и убывающей (точка L на черт. 263). Но, как правило, функция не будет при $x=a$ ни убывающей, ни возрастающей (точки B и C на черт. 264). Способы различения этих случаев указаны в §§ 278 и 279.*

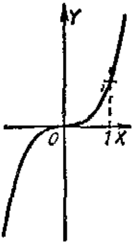
Пример. 1. Функция $y = x-\frac{1}{2}x^2$ (черт. 265) возрастает в точке $x = 0$, ибо



Черт. 264.



Черт. 265.



Черт. 266.

$y'=1-x=1>0$. Та же функция убывает в точке $x=2$, где $y' = -1 < 0$. В точке $x=1$, где $y'=0$, функция не убывает и не возрастает.

Необходимый признак. *Если функция $f(x)$ не убывает в точке $x = a$, то ее производная*[1] *в этой точке положительная (как в точке M на черт. 262) или равна нулю (как в точке N на черт. 262):*

$$f'(a) \geqslant 0.$$

Аналогично для убывающей функции; ее производная отрицательна или равна нулю в точке $x=a$:

$$f'(a) \leqslant 0.$$

Пример 2. Функция $y=x^3$ (черт. 266) возрастает во всякой точке. Ее производная $y'=3x^2$ положительна всюду, кроме точки $x=0$, где $y'=0$.

§ 274a. Признаки возрастания и убывания функции в промежутке

Достаточный признак. Если производная функция $f'(x)$ в промежутке (a, b) всюду положительна, то функция $f(x)$ в этом промежутке возрастает; если $f'(x)$ всюду отрицательна, то $f(x)$ убывает (ср. § 274).

---

[1]) Предполагается, что $f(x)$ дифференцируема в этой точке.

Замечание. Признак остается в силе и тогда, когда производная принимает в промежутке (a, b) и нулевые значения, лишь бы $f(x)$ не обращалась тождественно в нуль во всем промежутке (a, b) или в каком-либо промежутке (a', b'), составляющем часть (a, b) (на таком промежутке функция $f(x)$ была бы постоянной величиной).

Пример. Функция $y = x - \frac{1}{2}x^2$ (черт. 265) возрастает в промежутке $(0, 1)$, ибо производная $y' = 1 - x$ принимает нулевое значение только в точке $x = 1$, в остальных же точках промежутка $(0, 1)$ положительна. Та же функция убывает в промежутке $(1, 2)$, ибо здесь производная y' всюду отрицательна, кроме точки $x = 1$, где $y' = 0$.

Необходимый признак. Если функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b), то производная[1] $f'(x)$ в этом промежутке положительна или равна нулю:

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

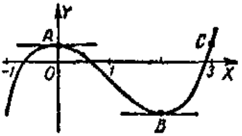
Аналогично для убывающей функции

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

§ 275. Максимум и минимум

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *максимум в точке* $x = a$, если в достаточной близости от этой точки всем значениям x (как бо́льшим, так и меньшим a) соответствуют значения $f(x)$, меньшие, чем $f(a)$.

Функция $f(x)$ имеет *минимум в точке* $x = a$, если в достаточной близости от этой точки всем значениям x соответствуют значения $f(x)$, бо́льшие, чем $f(a)$.



Черт. 267.

Короче: *функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке $x = a$, если значение $f(a)$ больше (меньше) всех соседних значений.*

Максимум и минимум объединяются наименованием *экстремум*[2]).

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ (черт. 267) имеет максимум в точке $x = 0$ $\left[\text{точка } A\left(0; \frac{1}{3}\right)\right.$ выше всех соседних] и минимум в точке $x = 2$ [точка $B(2; -1)$ ниже всех соседних].

---

[1]) Предполагается, что функция дифференцируема в промежутке (a, b).

[2]) Латинское слово «экстремум» означает «крайнее».

З а м е ч а н и е. В обыденной речи выражения «максимум» и «наибольшая величина» равнозначны. В анализе термин «максимум» имеет более узкий смысл. Именно максимум функции может и не быть ее наибольшим значением. Так, функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ (см. черт. 267), рассматриваемая, скажем, в промежутке $(-1;\ 4)$, имеет в точке $x = 0$ максимум, ибо в б л и з и от этой точки [а именно в промежутке $(-1;\ 3)$] всем значениям x соответствуют значения $f(x)$, меньшие, чем $f(0)$, т. е. чем $\frac{1}{3}$ (в указанном промежутке график расположен ниже точки A). Тем не менее максимум $f(0)$ не является наибольшим значением функции в промежутке $(-1;\ 4)$, ибо при $x > 3$ имеем:

$$f(x) > \frac{1}{3}$$

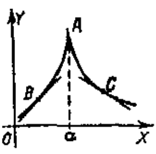
(справа от C график расположен выше точки A). Однако разыскание наибольшего значения функции в данном промежутке тесно связано с разысканием ее максимумов (см. § 280).

Аналогичное замечание для минимума.

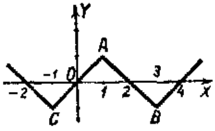
§ 276. Необходимое условие максимума и минимума

Т е о р е м а. Если функция $f(x)$ имеет экстремум (т. е. максимум или минимум) в точке $x = a$, то в этой точке производная либо равна нулю, либо бесконечна, либо не существует.

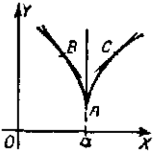
Г е о м е т р и ч е с к и: если график имеет в точке A максимальную ординату, то в этой точке касательная либо



Черт. 268.



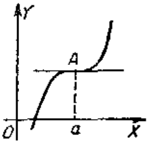
Черт. 269.



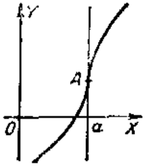
Черт. 270.

горизонтальна (черт. 267), либо вертикальна (черт. 268), либо не существует (черт. 269). То же для минимальной ординаты (точка B на черт. 267, точка A на черт. 270, точки B и C на черт. 269).

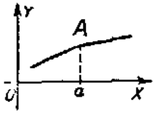
З а м е ч а н и е. Условие экстремума, высказанное в теореме, необходимо, но *не достаточно*, т. е. производная в точке $x = a$ может обращаться в нуль (черт. 271), в



Черт. 271.



Черт. 272.

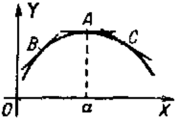


Черт. 273.

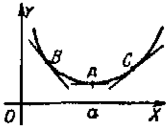
бесконечность (черт. 272) или не существовать (черт. 273) без того, чтобы функция имела экстремум в этой точке.

§ 277. Первое достаточное условие максимума и минимума

Т е о р е м а. Если в достаточной близости от точки $x = a$ производная $f'(x)$ положительна слева от a и отрицательна справа от a (черт. 274), то в самой точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет максимум при условии, что функция $f(x)$ здесь непрерывна[1]).



Черт. 274.



Черт. 275.

Если, наоборот, слева от a производная $f'(x)$ отрицательна, а справа положительна (черт. 275), то $f(x)$ имеет в точке a минимум при условии, что она здесь непрерывна[2]).

Теорема выражает тот факт, что $f(x)$ при переходе от возрастания к убыванию имеет максимум, а при переходе от убывания к возрастанию — минимум.

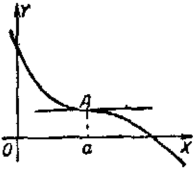
---

[1]) Однако $f(x)$ может и не быть дифференцируемой при $x = a$ (см. черт. 268).

[2]) Однако $f(x)$ может и не быть дифференцируемой при $x = a$ (см. черт. 270).

Замечание. Согласно теореме признаком экстремума функции $f(x)$ является *перемена знака* производной $f'(x)$ при прохождении аргумента через рассматриваемое значение $x = a$.

Если же при прохождении через $x = a$ производная *сохраняет* знак, то $f(x)$ *возрастает* в точке $x = a$, когда производная положительна как справа, так и слева от $x = a$ (черт. 271, 272, 273), и *убывает*, когда производная отрицательна (черт. 276). [Снова предполагается, что $f(x)$ непрерывна при $x = a$.]



Черт. 276.

§ 278. Правило разыскания максимумов и минимумов

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке (a, b). Чтобы *найти все ее максимумы и минимумы* в этом промежутке, надо:

1) *Решить уравнение* $f'(x) = 0$ (корни этого уравнения называются *критическими* значениями аргумента; среди них надо будет искать значения x, дающие экстремум функции $f(x)$; см. § 276).

2) *Для каждого критического значения $x = a$ исследовать, меняет ли знак производная $f'(x)$ при переходе аргумента через это значение.* Если $f'(x)$ переходит *от положительных значений к отрицательным* (при переходе от $x < a$ к $x > a$), то имеем *максимум* (§ 277), если *от отрицательных значений к положительным*, то *минимум*.

Если же $f'(x)$ сохраняет знак, то нет ни максимума ни минимума: при $f'(x) > 0$ функция $f(x)$ в точке a возрастает, при $f'(x) < 0$ убывает (§ 277, замечание).

Знак производной		Вид графика близ точки a	
при $x < a$	при $x > a$		
+	−		максимум
−	+		минимум
+	+		возрастание
−	−		убывание

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), но в отдельных его точках не дифференцируема, то эти точки надо причислить к критическим и произвести аналогичное исследование.

Замечание 2. Максимумы и минимумы непрерывной функции следуют друг за другом, чередуясь.

Пример 1. Найти все максимумы и минимумы функции $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

Решение. Данная функция всюду дифференцируема (т. е. всюду имеет конечную производную) $f'(x) = 1 - x$.

1) Решаем уравнение $1 - x = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 1$.

2) Производная $f'(x) = 1 - x$ меняет знак при переходе аргумента через значение $x = 1$. Именно, при $x < 1$ производная положительна, при $x > 1$ — отрицательна. Значит, критическое значение $x = 1$ даст максимум. Других экстремумов у функции нет (см. черт. 265 на стр. 358).

Пример 2. Найти все максимумы и минимумы функции

$$f(x) = (x-1)^2 (x+1)^3. \tag{1}$$

Решение. Данная функция всюду дифференцируема. Имеем:

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 = \\ = (x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

1) Решаем уравнение $f'(x) = 0$. Его корни (расположенные в порядке возрастания) будут:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = 1. \tag{2}$$

2) Представив производную в виде

$$f'(x) = 5(x+1)^2\left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1), \tag{3}$$

исследуем каждое из критических значений.

а) При $x < -1$ все три двучлена формулы (3) отрицательны, так что слева от $x = -1$ имеем:

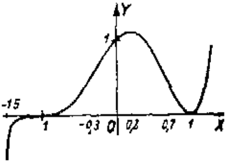
$$f'(x) = 5(-)^2(-)(-) = +. \tag{4}$$

Пусть аргумент перешел через значение $x_1 = -1$, но не дошел до следующего критического значения $x_2 = \frac{1}{5}$. Тогда двучлен $x+1$ стал положителен, а два других двучлена формулы (3) остаются отрицательными, и мы имеем:

$$f'(x) = 5(+)^2(-)(-) = +. \tag{5}$$

Сравнив (4) и (5), видим, что при переходе через критическое значение $x_1 = -1$ производная не меняет знака, оставаясь положительной. Значит, в точке $x = -1$ экстремума нет; здесь функция $f(x)$ возрастает (черт. 277).

б) Исследуем ближайшее большее критическое значение $x_2 = \frac{1}{5}$. В достаточной близости слева (т. е. между $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{1}{5}$) производная в силу (5) положительна. В достаточной близости справа (между $x_1 = \frac{1}{5}$ и $x_2 = +1$) второй сомножитель положителен, и мы имеем:



Черт. 277.

$$f'(x) = 5(+)^2\,(+)\,(-) = -. \qquad (6)$$

Сравнив (5) и (6), видим, что знак производной при переходе через $x_2 = \frac{1}{5}$ меняется с плюса на минус [функция $f(x)$ от возрастания переходит к убыванию]. Значит, в точке $x = \frac{1}{5}$ функция имеет максимальное значение; оно равно

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right)^3 \approx 1,1.$$

в) Исследуем последнее критическое значение $x_3 = 1$. В достаточной близости слева производная в силу (6) отрицательна. Справа от $x = 1$ имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{5}(+)^2\,(+)\,(+) = +. \qquad (7)$$

При переходе через $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс [функция $f(x)$ переходит от убывания к возрастанию]. Значит, при $x = 1$ функция имеет минимальное значение; оно равно

$$f(1) = (1-1)^2\,(1+1)^3 = 0.$$

П р и м е р 3. Найти все экстремумы функции

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. Данная функция дифференцируема при всех положительных и отрицательных значениях x, и мы имеем:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5}{3} \frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

В точке же $x = 0$ функция $f(x)$ не дифференцируема (ее производная бесконечна). Поэтому (см. замечание 1) имеем два критических значения: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{5}$. При $x < 0$ имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \frac{(-)}{\sqrt[3]{-}} = +.$$

При $0 < x < \frac{2}{5}$ имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \frac{(-)}{\sqrt[3]{+}} = -.$$

При $x > \frac{2}{5}$ имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \frac{(+)}{\sqrt[3]{+}} = +.$$

Значит, в точке $x = 0$ функция $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ имеет максимальное значение

$$f(0) = 0,$$

а в точке $x = \frac{2}{5}$ — минимальное значение

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \approx -0{,}33.$$

§ 279. Второе достаточное условие максимума и минимума

Когда знак производной вблизи критических точек (§ 278) распознается с трудом, можно пользоваться следующим достаточным условием экстремума.

Теорема 1. Пусть в точке $x = a$ первая производная $f'(x)$ обращается в нуль; если при этом вторая производная $f''(a)$ отрицательна, то функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум, если положительна, то — минимум. О случае $f''(a) = 0$ см. теорему 2.

Второе условие следующим образом связано с первым. Будем рассматривать $f''(x)$ как производную от $f'(x)$. Соотношение $f''(a) < 0$ означает (§ 274), что $f'(x)$ убывает в точке $x = a$. А так как $f'(a) = 0$, то $f'(x)$ положительна при $x < a$ и отрицательна при $x > a$. Значит (§ 277), $f(x)$ имеет максимум при $x = a$. Аналогично для случая $f''(a) > 0$.

Пример 1. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1.$$

Решение. Решив уравнение

$$f'(x) = 2x^3 - 2x = 0,$$

получаем критические значения

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

Подставив их в выражение второй производной

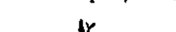
$$f''(x) = 6x^2 - 2 = 2(3x^2 - 1),$$

находим, что

$$f''(-1) > 0,\ f''(0) < 0,\ f''(1) > 0.$$

Значит, при $x = -1$ и $x = 1$ имеем минимум, при $x = 0$ — максимум (черт. 278).

Может случиться, что вместе с первой производной обращается в нуль и вторая; может обратиться в нуль и ряд последующих производных. Тогда можно воспользоваться следующим обобщением теоремы 1.



Черт. 278.

Теорема 2. Если в точке $x = a$, где первая производная равна нулю, ближайшая не равная нулю производная имеет четный порядок $2k$, то функция $f(x)$ имеет при $x = a$ максимум, когда $f^{(2k)}(a) < 0$, и минимум, когда $f^{(2k)}(a) > 0$.

Если же ближайшая не равная нулю производная имеет нечетный порядок $2k+1$, то функция $f(x)$ в точке a не имеет экстремума; она возрастает, когда $f^{(2k+1)}(a) > 0$, и убывает, когда $f^{(2k+1)}(a) < 0$.

Замечание. Теоретически не исключено, что у функции $f(x)$ (не являющейся постоянной величиной) *все производные* в точке $x = a$ будут равняться нулю [1]). Однако практического значения этот случай не имеет.

Пример 2. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \sin 3x - 3\sin x.$$

---

[1]) Такова, например, функция, рассмотренная в последнем подстрочном примечании к § 270 (стр. 346).

Решение. Имеем:

$$f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x.$$

Решая уравнение

$$3\cos 3x - 3\cos x = 0,$$

найдем:

$$x = k\frac{\pi}{2},$$

где k — любое целое число.

Так как данная функция имеет период 2π, то достаточно исследовать четыре корня:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \pi, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Берем вторую производную

$$f''(x) = -9\sin 3x + 3\sin x.$$

Подставляя критические значения x_1, x_2, x_3, x_4, находим:

$$f''(0) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12,$$

$$f''(\pi) = 0, \quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -12.$$

В точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ближайшая не равная нулю производная имеет второй (четный) порядок, причем $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Значит, при $x = \frac{\pi}{2}$ имеем минимум. Аналогично заключаем, что при $x = \frac{3\pi}{2}$ имеем максимум $\left[\text{ибо } f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0\right]$.

Экстремальные значения будут:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 3\frac{\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4 \text{ (минимум)},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{9\pi}{2} - 3\sin\frac{3\pi}{2} = 1 - (-3) = 4 \text{ (максимум)}.$$

Чтобы исследовать критические значения $x_1 = 0$ и $x_3 = \pi$, найдем третью производную

$$f'''(x) = -27\cos 3x + 3\cos x.$$

Имеем:

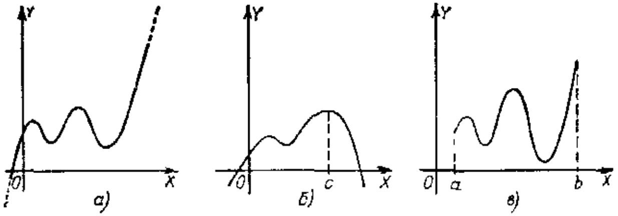
$$f'''(0) = -24, \quad f'''(\pi) = +24.$$

В точке $x = 0$ ближайшая не равная нулю производная имеет третий (нечетный) порядок, причем $f'''(0) < 0$. Значит, при $x = 0$ экстремума нет. Здесь функция $f(x)$ убывает. Аналогично заключаем, что и при $x = \pi$ экстремума нет; но здесь функция $f(x)$ возрастает [ибо $f'''(\pi) > 0$].

§ 280. Разыскание наибольших и наименьших значений функции

1. Пусть по условию вопроса аргумент непрерывной функции $f(x)$ изменяется в бесконечном промежутке, например в промежутке $(a, +\infty)$. Тогда может случиться, что среди значений функции $f(x)$ нет наибольшего; см. черт. 279, *а*), где $f(x)$ неограниченно возрастает при $x \to +\infty$. Если же функция $f(x)$ обладает наибольшим значением, то последнее непременно является одним из экстремумов функции; см. черт. 279, *б*), где наибольшее значение функции есть $f(c)$.

Пусть теперь по условию вопроса аргумент x изменяется в з а м к н у т о м промежутке (a, b). Тогда $f(x)$ непременно принимает наибольшее значение (§ 221). Однако последнее



Черт. 279.

может не принадлежать к экстремумам, а достигаться на одном из концов промежутка (в точке $x = b$[1]) на черт. 279, *в*)).

Аналогично для наименьшего значения.

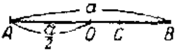
2. Пусть требуется разыскать наибольшее (или наименьшее) значение геометрической или физической величины, подчиненной определенным условиям (см. ниже примеры). Тогда надо представить эту величину, как функцию какого-либо аргумента. Из условия задачи определяем промежуток изменения аргумента. Затем находим все критические значения аргумента, лежащие в этом промежутке, и вычисляем соответствующие значения функции, а также значения функции на концах промежутка. Из найденных значений выбираем наибольшее (наименьшее).

З а м е ч а н и е 1. Часто аргумент можно выбирать по-разному; удачный выбор может упростить решение. Учет особенностей задачи тоже может упростить решение.

---

[1]) Если исключить из рассмотрения конец $x = b$, то на оставшемся н е з а м к н у т о м промежутке функция $f(x)$ наибольшего значения не будет иметь.

Так, если внутри данного промежутка имеется лишь одно критическое значение аргумента и оно, на основании того или иного признака (см. §§ 277, 279) должно давать максимум (минимум), то и без сравнения с граничными значениями функции мы вправе заключить, что этот максимум (минимум) является искомым наибольшим (наименьшим) значением.



Черт. 280.

Пример 1. Отрезок $AB=a$ делится на две части точкой C; на отрезках AC и CB (черт. 280), как сторонах, строится прямоугольник $ACBD$. Определить наибольшее значение его площади S.

Решение. Примем за аргумент x длину AC; тогда

$$CB = a-x \quad \text{и} \quad S = x(a-x).$$

Аргумент x непрерывной функции S изменяется в промежутке $(0, a)$.

Из уравнения

$$\frac{dS}{dx} = a-2x = 0$$

находим (единственное) критическое значение $x=\frac{a}{2}$. Оно принадлежит данному промежутку $(0, a)$. Вычисляем значение $S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$ и граничные значения $f(0)=0$, $f(a)=0$. Сопоставляя эти три значения, заключаем, что искомым наибольшим значением является $\frac{a^2}{4}$.

В этом сопоставлении не будет необходимости, если заметить, что в единственной критической точке $x=\frac{a}{2}$ вторая производная функции $S(x)$ отрицательна, т. е. (§ 279) функция $S(x)$ имеет здесь максимум.

Переменный прямоугольник $ACBD$ всегда имеет один и тот же периметр ($2a$). Значит, *из всех прямоугольников данного периметра квадрат имеет наибольшую площадь.*

Замечание 2. Удобнее всего принять за аргумент расстояние z точки C от середины O отрезка AB (см. черт. 280). Тогда

$$AC = AO+OC = \frac{a}{2}+z, \qquad CB = OB-OC = \frac{a}{2}-z$$

и

$$S = \left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2.$$

Теперь нет нужды искать экстремум, ибо $\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2$, очевидно, не превосходит $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Пример 2. *При условиях примера 1 найти наименьшее значение площади S.*

Решение. Примем за аргумент $x = AC$. Сравниваем единственный экстремум $\left(\frac{a^2}{4}\right)$ функции $S = x(a-x)$ с ее значением ($S=0$) на концах промежутка $x = 0$ и $x = a$. Находим, что нуль есть наименьшее значение S [*в замкнутом промежутке* $(0, a)$].

Однако при $x = 0$ и $x = a$ мы не имеем прямоугольника в собственном смысле (он превращается в отрезок AB). Если рассматривать только «настоящие» прямоугольники, то концы промежутка $(0, a)$ надо исключить из рассмотрения, и тогда S не имеет наименьшего значения [в незамкнутом промежутке $(0, a)$].

Пример 3. Найти наименьшую и наибольшую величины полупериметра p прямоугольника с данной площадью S

Решение. Обозначим стороны прямоугольника через x, y. По условию

$$xy = S \tag{1}$$

(x и y — положительные величины). Требуется найти наименьшее и наибольшее значения величины

$$p = x+y. \tag{2}$$

Примем за аргумент x; тогда

$$p = x+\frac{S}{x}. \tag{3}$$

Аргумент x изменяется в бесконечном промежутке $(0, +\infty)$ (в него не входит конец $x=0$). В этом промежутке функция $p(x)$ непрерывна и имеет производную

$$\frac{dp}{dx} = 1-\frac{S}{x^2}. \tag{4}$$

Из уравнения

$$1-\frac{S}{x^2} = 0 \tag{5}$$

находим единственное (в данном промежутке) критическое значение

$$x = \sqrt{S}.$$

Из (4) видно, что при $0 < x < \sqrt{S}$ производная $\frac{dp}{dx}$ отрицательна, а при $x > \sqrt{S}$ — положительна. Значит (§ 277), имеем минимум. Будучи единственным, он является (см.

замечание 1) наименьшим значением полупериметра [1]):

$$p_{\text{наим}} = \sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} = 2\sqrt{S}, \tag{6}$$

т. е. *из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший полупериметр имеет квадрат* ($x = \sqrt{S}$, $y = \sqrt{S}$).

Наибольшего значения величина p не имеет [данный промежуток $(0, +\infty)$ — незамкнутый].

Пример 4. Найти наименьшее количество жести, из которого можно изготовить цилиндрическую консервную банку вместимостью $V = 2$ *л* (запас на швы не учитывать).

Решение. Пусть поверхность банки S, радиус основания r, высота h. Требуется найти наименьшее значение величины

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{7}$$

при условии, что

$$\pi r^2 h = V. \tag{8}$$

За аргумент удобно принять r. Из (7) и (8) находим:

$$S = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right), \tag{9}$$

где аргумент изменяется в промежутке $(0, \infty)$. По смыслу задачи ясно, что величина S достигает наименьшего значения где-то внутри этого промежутка. Поэтому достаточно рассмотреть значения функции в критических точках.

Решаем уравнение

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right) = 0. \tag{10}$$

Единственный его корень

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \tag{11}$$

соответствует наименьшему значению S. Из (8) и (11) находим: $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$, т. е. *высота банки должна*

---

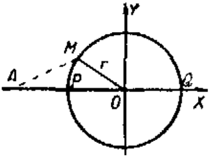
[1]) Задачу можно решить и без разыскания экстремума. Равенства (2) и (1) дают: $p^2 = (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = (x-y)^2 + 4S$. Так как $4S$ — постоянная величина, а наименьшее значение $(x-y)^2$ есть нуль (при $x = y$), то наименьшее значение p^2 есть $4S$; значит, наименьшее значение p есть $2\sqrt{S}$.

Этот способ проще (в том смысле, что не требует высшей математики) и короче. Но он основывается на догадке, и в этом смысле труднее изложенного общего способа.

равняться диаметру основания. Наименьшее количество жести, потребное для изготовления банки, равно

$$S_{\text{наим}} = 2\pi(rh+r^2) = 6\pi r^2 = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \approx 879 \text{ см}^2.$$

Пример 5 (парадокс Декарта). В 1638 г Декарт получил (через М. Мерсенна) письмо Ферма, где последний сообщил без доказательства открытое им правило разыскания экстремума. В переводе на современный язык правило Ферма сводится к разысканию значения x, обращающего в нуль производную $f'(x)$ исследуемой функции $f(x)$



Черт. 281.

В ответном письме Декарт привел нижеследующий пример, доказывающий, как он полагал, ложность правила Ферма.

Пусть дана окружность

$$x^2+y^2 = r^2 \tag{12}$$

(черт 281) и точка $A(-a, 0)$, отличная от центра (т. е. $a \neq 0$). Требуется найти на окружности (12) точку, ближайшую к A. Квадрат расстояния произвольной точки $M(x, y)$ от точки A выражается так:

Черт. 282.

$$AM^2 = (x+a)^2+y^2. \tag{13}$$

Если же M лежит на окружности (12), то

$$y^2 = r^2-x^2,$$

так что

$$AM^2 = (x+a)^2+r^2-x^2.$$

Чтобы найти значение x, дающее минимум величине AM^2, Декарт следует правилу Ферма и получает нелепое равенство $2a=0$.

Между тем геометрически ясно, что искомая точка существует и совпадает с точкой $P(-r; 0)$ Из этого Декарт заключает, что признак минимума неверен. На самом деле точка P $(x=-r)$ не обнаруживается по другой причине: соответствующее ей наименьшее значение AM^2 *не является минимумом* Действительно, x изменяется только в промежутке $(-r, +r)$. Рассматриваемая функция принимает наименьшее значение на конце промежутка

Пример 6 Группа соревнующихся пловцов направляется с лодки A (черт. 282) в расположенный на берегу пункт B. Условия соревнования разрешают часть пути сделать по суше Лодка стоит против пристани O на расстоянии $OA=a=360$ *м*, пункт назначения B отстоит от пристани на расстоянии $OB=b=420$ *м* Какой наилучший результат может показать участник соревнования, если он будет покрывать 90 *м* в минуту вплавь и 150 *м* в минуту бегом?

Решение. Пусть пловец выходит на берег в точке M, находящейся на расстоянии $OM=x$ от пристани. Достаточно рассмотреть изменение x в промежутке $(0, b)$ [1]).

---

[1]) Подплывать к берегу за пределами участка OB пловцу нет смысла: до точки B' плыть дольше, чем до B, к тому же придется пробежать путь $B'B$.

Время t (в минутах), затрачиваемое на путь AMB, равно

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150}. \tag{14}$$

Здесь $a=360$, $b=420$. Требуется найти наименьшее значение функции t в промежутке $(0, b)$.

Имеем:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150}. \tag{15}$$

Решив уравнение

$$\frac{x}{90\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{150}=0, \tag{16}$$

найдем единственное критическое значение $x=\frac{3}{4}a=270$ *м*. Это значение лежит в рассматриваемом промежутке $(0, b)$. Так как вторая производная

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{1}{90}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{a^2}{90\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$$

в точке $x=\frac{3}{4}a$ (как и во всех других точках) положительна, то (§ 279, теорема 1) в этой точке имеем минимум. Будучи единственным, этот минимум дает (см. замечание 1) искомое наименьшее значение функции t:

$$t_{\text{наим}}=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}}{90}+\frac{b-\frac{3}{4}a}{150}=6 \text{ (мин.)}.$$

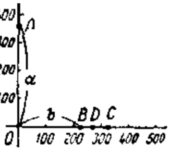
Путь пловца показан на черт. 282 пунктирной линией.

Пример 6а. Решить ту же задачу, что и в примере 6, изменив в условии значение $b=420$ *м* на $b=225$ *м* (черт. 283).

Решение. Достаточно рассмотреть изменение x в промежутке $(0, 225)$. Так как корень $x=270$ уравнения (16) падает за пределы этого промежутка, то функция t теперь не имеет минимума внутри промежутка. Наименьшее значение она принимает на конце $x=b=$ $=225$. Здесь

$$t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{90}=4 \text{ мин. } 43 \text{ сек.}$$

Пловец должен плыть прямо к финишу.



Черт. 283

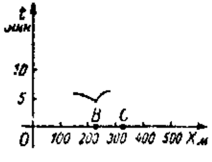
Замечание 3. При решении последней задачи мы, руководствуясь здравым смыслом, рассмотрели изменение аргумента x функции

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90}+\frac{b-x}{150} \tag{14}$$

(где $a=360$, $b=225$) лишь в промежутке $(0, 225)$.

Но мы могли бы и расширить область изменения аргумента и рассмотреть, скажем, промежуток $(0, 325)$. Тогда, рассуждая, как в примере 6, мы нашли бы, что функция (14) имеет минимум в точке $x=270$ (ибо эта точка лежит в рассматриваемом промежутке, является единственным критическим значением функции (14) и дает минимум для этой функции).

Отсюда, казалось бы, можно заключить, что пловцу надо плыть к пункту D, более далекому, чем финиш B, что явно нелепо.



Черт. 284.

Ошибка в том, что функция (14) выражает зависимость t от x лишь на участке OB, на участке же BC зависимость выражается формулой

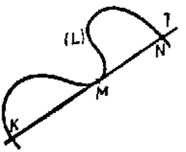
$$t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{90} + \frac{x-b}{150} \qquad (14')$$

(см. схематический график на черт. 284).

При $x=b$ обе формулы (14), (14′) дают одно и то же значение, так что функция $t(x)$ непрерывна при $x=b$, но производная $\frac{dt}{dx}$ при $x=b$ не существует. Поэтому точка $x=b$ является теперь критической для функции $t(x)$ (ср. § 278, замечание 1). Других критических точек в промежутке (0, 325) нет.

§ 281. Выпуклость плоских кривых; точка перегиба

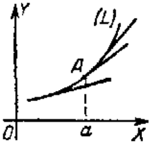
Плоская линия L называется *выпуклой в точке* M (черт. 285), если в достаточной близости от M линия L лежит по одну сторону от касательной MT (*сторона вогнутости* линии L). Противоположная сторона называется *стороной выпуклости*.



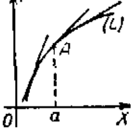
Черт. 285.

Черт. 286.

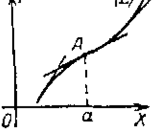
Если же линия L вблизи точки M лежит по обе стороны от касательной MT (черт. 286), то M называется *точкой перегиба* линии L.



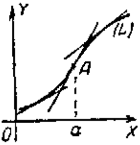
Черт. 287.



Черт. 288.



Черт. 289.



Черт. 290.

При переходе через точку перегиба сторона выпуклости становится стороной вогнутости и наоборот.

Пусть линия L представляется уравнением $y=f(x)$. Если *производная* $f'(x)$ возрастает в точке $x=a$, то линия L обращена здесь вогнутостью вверх (черт. 287), если убывает, то вниз (черт. 288). Если же производная $f'(x)$ имеет экстремум в точке $x=a$ (черт. 289, 290), то линия L имеет здесь точку перегиба.

§ 282. Сторона вогнутости

1. Если вторая производная $f''(x)$ в точке $x=a$ положительна, то линия $y=f(x)$ обращена здесь вогнутостью кверху, если отрицательна, то книзу (схематический чертеж 291).

Пояснение. Если $f''(a)>0$, то $f'(x)$ возрастает в точке $x=a$ (§ 274); значит (§ 281), вогнутость обращена кверху. Аналогичное рассуждение для случая $f''(a)<0$.

Черт. 291.

Черт. 292.

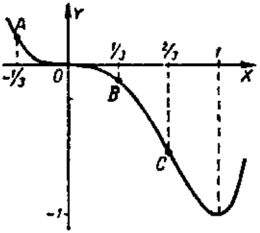
2. Пусть вторая производная $f''(x)$ в точке $x=a$ равна нулю, бесконечна или вовсе не существует.

Тогда, если при переходе через $x=a$ вторая производная [1]) меняет знак, то линия $y=f(x)$ имеет здесь точку перегиба (черт. 292). Если же $f''(x)$ сохраняет знак, то линия $y=f(x)$ обращена вогнутостью в соответствующую сторону (см. п. 1) (ср. §§ 277 и 281).

Пример 1. Линия

$$y = 3x^4 - 4x^3$$

(черт. 293) в точке $A\left(-\frac{1}{3};\ \frac{5}{27}\right)$ обращена вогнутостью кверху, а в точке $B\left(\frac{1}{3};\ -\frac{1}{9}\right)$ — книзу, ибо вторая производная



Черт. 293.

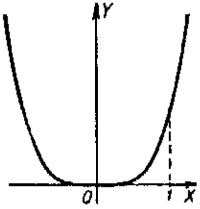
$$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

положительна при $x = -\frac{1}{3}$ [оба множителя $12x$ и $(3x-2)$ отрицательны] и отрицательна при $x = \frac{1}{3}$.

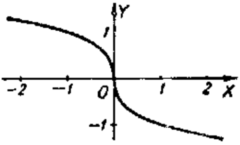
[1]) Предполагается, что она существует *вблизи* точки a.

В точке O (0; 0), где $y''=0$, имеем перегиб, ибо при переходе через $x=0$ вторая производная меняет знак с плюса (при $x<0$) на минус (при $x>0$). Слева от O линия обращена вогнутостью вверх, справа – вниз.

Пример 2. Линия $y=x^4$ (черт. 294) в точке O (0; 0), где $y''=0$, обращена вогнутостью кверху, ибо при прохождении через $x=0$ функция $y''=12x^2$ сохраняет знак плюс.



Черт. 294.



Черт. 295.

Пример 3. Линия $y=-x^{\frac{1}{3}}$ (черт. 295) в точке O (0; 0), где вторая производная бесконечна, имеет перегиб, ибо при переходе через $x=0$ вторая производная $y''=+\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ меняет знак с минуса на плюс. Слева от O линия обращена вогнутостью вниз, справа – вверх.

§ 283. Правило для разыскания точек перегиба

Чтобы найти все точки перегиба линии $y=f(x)$, надо испытать все те значения x, для которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю, бесконечна или не существует (только в таких точках перегиб возможен; § 282).

Если при переходе через одно из этих значений вторая производная меняет знак, то линия имеет в этой точке перегиб. Если же не меняет, то перегиба нет (§ 282, п. 2).

Пример 1. Найти точки перегиба линии $y=3x^4-4x^3$.

Решение. Имеем:

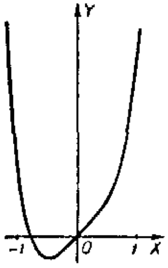
$$y''=36x^2-24x=12x(3x-2).$$

Вторая производная существует всюду и всюду конечна; она обращается в нуль в двух точках $x = \frac{2}{3}$ и $x = 0$. Рассмотрим точку $x = \frac{2}{3}$. Если x несколько меньше, чем $\frac{2}{3}$ $\left(\text{а именно, если } 0 < x < \frac{2}{3}\right)$, то

$$y'' = 12(+)(-) = -;$$

если x несколько больше, чем $\frac{2}{3}$ $\left(\text{в данном случае за } x \text{ можно взять любое число, большее } \frac{2}{3}\right)$, то

$$y'' = 12(+)(+) = +.$$



Черт. 296.

При переходе через $x = \frac{2}{3}$ вторая производная меняет знак; значит, в соответствующей точке графика (точка C на черт. 293) имеем перегиб. При $x = 0$ — также перегиб (§ 282, пример 1).

Пример 2. Найти точки перегиба линии

$$y = x + 2x^4.$$

Решение. Имеем: $y'' = 24x^2$.

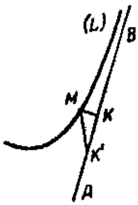
Вторая производная всюду конечна и обращается в нуль лишь при $x = 0$. При переходе через $x = 0$ вторая производная сохраняет, как и всюду, знак плюс. Значит, ни здесь, ни в других точках перегиба нет. Линия обращена вогнутостью вверх (черт. 296).

§ 284. Асимптоты

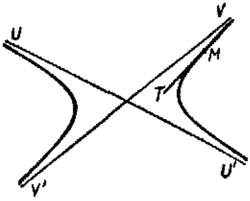
Пусть точка M, исходя из положения M_0, движется вдоль линии L в одном направлении. Если при этом расстояние M_0M (считаемое по прямой) неограниченно возрастает, то говорят, что точка *M удаляется в бесконечность*.

Определение. Прямая AB называется *асимптотой* линии L, если расстояние MK (черт. 297) от точки M линии L до прямой AB стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Замечание 1. Расстояние от M до AB можно измерять не только по перпендикуляру, но и по любому *постоянному* направлению MK', ибо если $MK \to 0$, то также $MK' \to 0$ и наоборот.



Черт. 297.



Черт. 298.

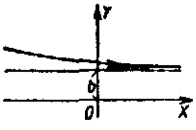
Замечание 2. Содержащееся в § 46 определение асимптот гиперболы ($U'U$ и $V'V$ на черт. 298) подходит под данное здесь общее определение.

Замечание 3. Не всякая линия, вдоль которой точка может удаляться в бесконечность, обладает асимптотой. Так, у параболы и у архимедовой спирали асимптот нет.

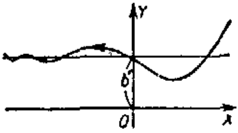
§ 285. Разыскание асимптот, параллельных координатным осям

1. Асимптоты, параллельные оси абсцисс. Для разыскания горизонтальных асимптот линии $y=f(x)$ ищем пределы $f(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то прямая $y=b$ — асимптота (при бесконечном удалении вправо; черт. 299).



Черт. 299.



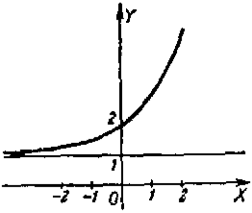
Черт. 300.

Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b'$, то прямая $y=b'$ — асимптота (при бесконечном удалении влево; черт. 300).

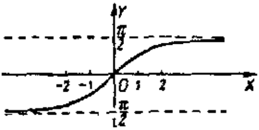
Если $f(x)$ не имеет конечного предела ни при $x\to+\infty$, ни при $x\to-\infty$, то у линии $y=f(x)$ нет асимптот, параллельных оси OX.

Пример 1. Найти те асимптоты линии $y=1+e^x$, которые параллельны оси OX.

Решение. При $x\to+\infty$ функция $1+e^x$ не имеет конечного предела $[\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty]$, а при $x\to-\infty$



Черт. 301.



Черт. 302.

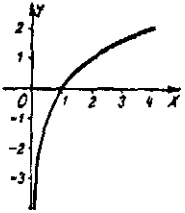
стремится к единице. Поэтому прямая $y=1$ есть асимптота при удалении влево (черт. 301).

Пример 2. Найти горизонтальные асимптоты линии $y=\operatorname{arctg}x$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

Прямые $y=\frac{\pi}{2}$, $y=-\frac{\pi}{2}$ — асимптоты (черт. 302).



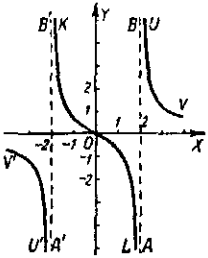
Черт. 303.

2. Асимптоты, параллельные оси ординат. Для разыскания вертикальных асимптот линии $y=f(x)$ надо найти те значения $x_1, x_2, x_3, \ldots$ аргумента x, где $f(x)$ имеет бесконечный предел (односторонний или двусторонний). Прямые $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, ... будут асимптотами. Если $f(x)$ ни при одном значении x не имеет бесконечного предела, то вертикальных асимптот нет.

Пример 3. Рассмотрим линию $y=\ln x$ (черт. 303). Функция $\ln x$ имеет правосторонний бесконечный предел при $x\to 0$ $(\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty)$. Прямая $x=0$ (ось ординат) служит асимптотой при бесконечном удалении вниз.

Пример 4. Найти вертикальные асимптоты линии

$$y = \frac{2x}{x^2-4}.$$



Черт. 304.

Решение. Функция $\frac{2x}{x^2-4}$ имеет бесконечный предел при $x \to 2$ и $x \to -2$.

Значит, прямые

$$x = 2 \quad \text{и} \quad x = -2$$

(AB и $A'B'$ на черт. 304) – асимптоты. Прямая AB служит асимптотой для двух ветвей, UV и KL. Вдоль первой бесконечное удаление направлено вверх, вдоль второй – вниз (ибо $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$). Аналогично для прямой $A'B'$.

Заметим, что прямая $x=0$ служит горизонтальной асимптотой (для ветвей UV и $U'V'$) (ср. п. 1).

§ 286. Разыскание асимптот, не параллельных оси ординат [1])

Для разыскания асимптот линии $y=f(x)$, не параллельных оси OY, надо сначала искать $\lim \frac{f(x)}{x}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Если в обоих случаях нет конечного предела, то нет и искомых асимптот.

Если же $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = c$, то надо затем искать $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - cx]$. Если этот предел равен d, то прямая $y = cx + d$ есть *асимптота при бесконечном удалении вправо*. Аналогично, если $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = c'$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - c'x] = d'$, то прямая $y = c'x + d'$ есть *асимптота при удалении влево*.

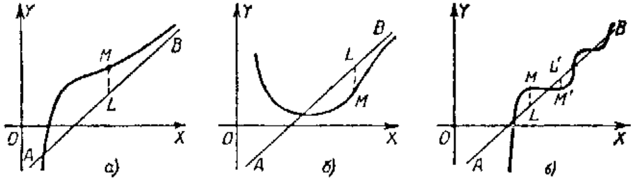
Если величина $f(x) - cx$ [или $f(x) - c'x$] не имеет конечного предела при $x \to +\infty$ [при $x \to -\infty$], то соответствующей асимптоты нет.

---

[1]) Нижеизложенный способ обнаруживает, в частности, горизонтальные асимптоты, если они есть. Но если нас интересуют только горизонтальные асимптоты, то проще применить способ § 285, п. 1. Вертикальных асимптот нижеизложенный способ не обнаруживает.

Выражение $f(x)-(cx+d)$ дает вертикальное отклонение LM (черт. 305) данной линии от ее асимптоты AB, уравнение которой $y=cx+d$.

Если это выражение при $x \to +\infty$ с некоторого момента сохраняет знак плюс, то точка M приближается к асимптоте AB сверху



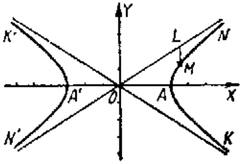
Черт. 305.

(черт. 305, *а*), если минус — снизу (черт. 305, *б*). Если знак не сохраняется, то точка M колеблется около асимптоты (черт. 305, *в*).

Аналогично для асимптоты $y=c'x+d'$.

Пример 1. Найти асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1. \qquad (1)$$



Черт. 306.

Решение. Уравнению (1) соответствуют две однозначные функции

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \qquad (2)$$

и

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}. \qquad (3)$$

Рассмотрим первую (ей отвечают бесконечные ветви AN и $A'K'$ черт. 306). Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=\frac{2}{3}\,(=c).$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-cx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x\right)=0\,(=d).$$

Стало быть, прямая $y=\frac{2}{3}x$ есть асимптота ветви AN.

Выражение $y-(cx+d)=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x$ сохраняет при $x\to+\infty$ знак минус. Поэтому ветвь AN приближается к асимптоте снизу.

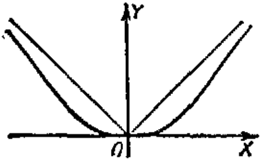
Далее находим:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} (= c'),$$

$$\lim_{x \to -\infty} (y - c'x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} + \frac{2}{3}x\right) = 0 \; (= d').$$

Стало быть, прямая $y = -\frac{2}{3}x$ — асимптота ветви $A'K'$.

Выражение $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} + \frac{2}{3}x$ сохраняет при $x \to -\infty$ знак минус. Поэтому и ветвь $A'K'$ приближается к асимптоте снизу.



Черт. 307.

Исследуя таким же образом функцию $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ (ей отвечают ветви AK и $A'N'$), найдем, что прямая $y = \frac{-2}{3}x$ есть асимптота ветви AK, а прямая $y = \frac{2}{3}x$ — асимптота ветви $A'N'$.

Каждая из ветвей AK, $A'N'$ приближается к своей асимптоте сверху.

Пример 2. Найти все асимптоты линии

$$y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

Функция $f(x) = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ни при каком значении x не имеет бесконечного предела. Значит, асимптот, параллельных OY, нет. Чтобы найти асимптоты, не параллельные OY, ищем сначала

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \; (= c)$$

и затем

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - cx] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{2x}+1} = 0 \; (= d).$$

Следовательно, прямая $y = x$ есть асимптота правой бесконечной ветви. Вычисляя те же пределы при $x \to -\infty$, найдем $c' = -1$, $d' = 0$, т. е. левая бесконечная ветвь имеет асимптоту $y = -x$ (черт. 307).

§ 287. Приемы построения графиков

График функции, заданной формулой $y = f(x)$, строится по точкам, которые затем соединяются плавной линией. Но если брать точки, как попало, то можно допустить грубую ошибку [1].

Чтобы вычертить график с большой точностью при небольшом числе точек, полезно предварительно выяснить его характерные особенности. Для этого надо:

1. Установить, в какой области функция $f(x)$ определена и нет ли у нее разрывов. Для каждого бесконечного разрыва учесть знак $f(x)$ справа и слева; получим вертикальные асимптоты графика (§ 285).

2. Найти первую и вторую производные $f'(x)$, $f''(x)$, а также определить, нет ли точек, где $f'(x)$ или $f''(x)$ не существует.

3. Найти все экстремумы функции $f(x)$ (§§ 278 и 279); получим наивысшие точки горбов и наинизшие точки впадин.

4. Найти все точки перегиба (§ 283) и наклон касательной в этих точках.

5. Если рассматриваемая область изменения аргумента бесконечна, то установить, нет ли горизонтальных и наклонных асимптот (§ 286).

Найденные результаты по мере их получения полезно заносить в таблицу (см. примеры). Перенеся их на координатную сетку, получим общую картину графика. Добавив немногие промежуточные точки, начертим график с достаточной точностью.

Пример 1. Построить график функции [2])

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3.$$

1. Функция определена и непрерывна всюду, вертикальных асимптот нет.

2. Находим:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2(5x+4),$$

$$f''(x) = (x-1)(10x^2+16x+1).$$

Обе производные всюду существуют и конечны.

---

[1]) Так, если график функции $y = {}^1/_2\,(x+2)^2(x-1)^3$ (см. ниже черт. 308) строить по точкам F, B, L, K (соответствующим значениям аргумента $-2{,}5$; $-0{,}8$; 0; $1{,}5$), то на участке FB график пойдет совершенно неверно.

[2]) Рекомендуется, читая примеры, попутно составлять таблицу.

3. Для разыскания экстремумов решаем уравнение $f'(x) = 0$. Находим критические значения

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -0{,}8, \qquad x_3 = 1.$$

Заносим в таблицу эти значения, а также соответствующие значения функции

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) \approx -4{,}20, \quad f(x_3) = 0.$$

В графе y' ставим нули.

Для исследования на экстремум здесь удобно применить вторую производную, поэтому откладываем исследование до п. 4.

4. Для разыскания точек перегиба решаем уравнение $f''(x) = 0$. Получим найденное прежде значение $x_3 = 1$ и, кроме того,

$$x_4 = -1{,}5, \quad x_5 = -0{,}07.$$

Заносим в таблицу эти значения, а также соответствующие значения функции и ее первой производной:

$$f(x_4) = -2{,}0, \qquad f(x_5) = -2{,}3;$$
$$f'(x_4) = -5{,}5, \qquad f'(x_5) = 4{,}0.$$

В графе y'' ставим нули.

Определяем знак $f''(x)$ до и после перехода через каждое из значений

$$x = x_3, \quad x = x_4, \quad x = x_5$$

и вносим пометки в соответствующие клетки таблицы. Так, в третьей строке графы y'' пометки $-0+$ означают, что $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через $x = x_3$ слева направо. Так как в каждой из точек x_3, x_4, x_5 вторая производная меняет знак, то во всех трех точках имеем перегиб.

Теперь определяем знаки $f''(x)$ в критических точках $x_1 = -2$ и $x_2 = -0{,}8$:

$$f''(-2) < 0, \quad f''(-0{,}8) > 0.$$

В первой строке графы y'' ставим минус, во второй — плюс. При $x = x_1$ имеем максимум, при $x = x_2$ — минимум.

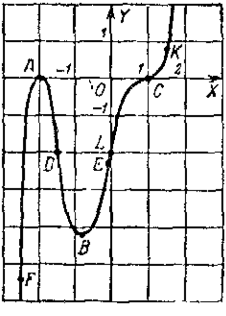
5. Горизонтальных и наклонных асимптот нет, ибо $\lim \dfrac{y}{x} = \infty$.

Наносим (черт. 308) найденные точки (A, B, C, D, E) на сетку и намечаем направления касательных. Добавив еще три точки $x_6 = -2{,}5$, $x_7 = 0$, $x_8 = 1{,}5$ (F, L, K), получаем довольно точный график функции.

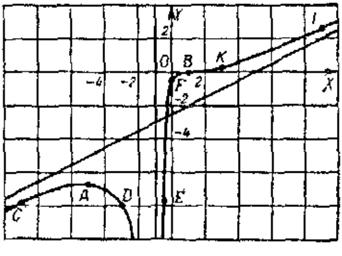
Номер точки	x	y	y'	y''	Экстремум, перегиб	Обозначения точек
1	-2	0	0	$-$	максимум	A
2	$-0{,}8$	$-4{,}2$	0	$+$	минимум	B
3	1	0	0	$-0+$	перегиб	C
4	$-1{,}5$	$-2{,}0$	$-5{,}5$	$-0+$	перегиб	D
5	$-0{,}07$	$-2{,}3$	$4{,}0$	$+0-$	перегиб	E
6	$-2{,}5$	$-5{,}4$	26			F
7	0	-2	4			L
8	$1{,}5$	$0{,}8$	5			K

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

1. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = -1$, где она имеет бесконечный разрыв. Как справа,



Черт. 308.



Черт. 309.

так и слева от точки разрыва функция имеет знак минус (в графу y заносим $-\infty$). Получаем асимптоту $x = -1$. Обе бесконечные ветви направлены вниз (черт. 309).

2. Находим:

$$y' = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}, \qquad y'' = 12\frac{x-1}{(x+1)^4}.$$

Обе производные существуют всюду, кроме точки разрыва;

3. Уравнение $f'(x) = 0$ имеет два корня:

$$x_1 = -5,\ x_2 = 1.$$

Соответствующие значения y:

$$y_1 = -6{,}75,\ y_2 = 0.$$

По знаку $f'(x)$ вблизи критических точек (см. ниже таблицу) видим, что в точке $x = -5$ — максимум, а в точке $x = 1$ нет экстремума.

4. Уравнение $y''(x) = 0$ имеет единственный корень $x_2 = 1$; по знаку второй производной (см. таблицу) можно видеть, что здесь — перегиб.

5. Ищем наклонные асимптоты; как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ имеем:

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{5}{2}.$$

Значит, прямая $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ служит асимптотой для двух бесконечных ветвей.

Правая ветвь лежит выше, левая — ниже асимптоты, ибо выражение $y - \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)$ при $x \to +\infty$ сохраняет знак плюс, а при $x \to -\infty$ минус. Впрочем, это обнаружится и из чертежа, когда будут отмечены точки C, D, E, F, K, L.

Номер точки	x	y	y'	y''	Экстремум, перегиб, разрывы	Обозначения точек
1	−1	$-\infty$			разрыв	
2	−5	−6,75	+0−		максимум	A
3	1	0	+0+	−0+	перегиб	B
4	−9	−7,81				C
5	−3	−8,00				D
6	−0,5	−6,75				E
7	0	−0,50				F
8	3	0,25				K
9	9	2,56				L

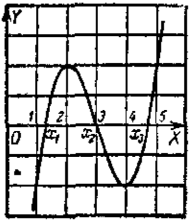
§ 288. Решение уравнений. Общие замечания

Алгебраические уравнения первой и второй степени решаются по формулам, известным из алгебры. Для уравнений третьей и четвертой степени формулы сложны, а общее уравнение пятой или более высокой степени не-разрешимо в радикалах. Однако как алгебраическое, так и неалгебраическое уравнение можно решить с требуемой точностью, если предварительно найти грубые приближения. Последние затем постепенно уточняются.

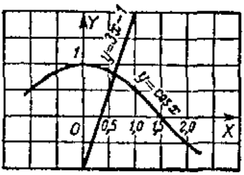
Грубое решение можно найти графически по одному из следующих способов.

П е р в ы й с п о с о б. Для решения уравнения $f(x)=0$ строим график $y=f(x)$ (см. § 287) и прочитываем абсциссы тех точек, где график пересекает ось OX.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^3-9x^2+24x-18=0$. Строим (черт. 310) график $y=x^3-9x^2+24x-18$; прочитываем абсциссы $x_1=1,3$, $x_2=3$, $x_3=4,7$. Подстановка покажет, что второй корень — точный, первый и третий — приближенные.



Черт. 310.



Черт. 311.

В т о р о й с п о с о б. Уравнение $f(x)=0$ можно представить в виде $f_1(x)=f_2(x)$, причем одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ произвольна. Произвол используется так, чтобы графики $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ строились возможно легче. Находим точки пересечения графиков. Прочитав их абсциссы, получаем приближенно корни уравнения $f(x)=0$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $3x-\cos x-1=0$. Представим данное уравнение в виде

$$3x-1=\cos x.$$

Строим (черт. 311) графики функций $y=3x-1$ и $y=\cos x$. Они пересекаются в одной точке. Прочитав ее абсциссу, получаем приближенный корень $x_1=0,6$.

В §§ 289–291 изложены три способа уточнения корней. Они требуют, чтобы искомый корень $\bar{x}$ был *отделен*, т. е. чтобы был известен некоторый промежуток (a, b) (*промежуток изоляции*), где содержится $\bar{x}$ и где нет других корней данного уравнения. Концы a, b сами являются приближенными значениями корня (недостаточным и избыточным). Их можно найти графически по одному из вышеуказанных способов. Чем короче промежуток (a, b), тем лучше.

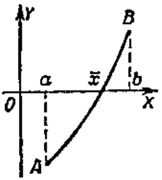
Пример 3. Отделить корни уравнения $x^3-9x^2+24x-18=0$. По графику (черт. 310), если он сделан грубо, прочитываем для наименьшего корня промежуток изоляции (1; 1,5); при более точном построении получим более короткий промежуток, например (1,2; 1,4). Для наибольшего корня получим промежуток (4,6; 4,8). Корень $x=3$ не нуждается в отделении: он — точный.

Замечание. Для алгебраических уравнений существуют специальные методы решения. Из них заслуживает особого упоминания метод Н. И. Лобачевского; он позволяет с помощью алгебраических действий над коэффициентами уравнения найти с любой степенью точности все корни, в том числе и мнимые.

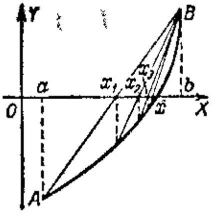
Метод Лобачевского не требует отделения корней.

§ 289. Решение уравнений. Способ хорд

Пусть на концах промежутка (a, b) функция $f(x)$ имеет противоположные знаки (черт. 312). Если при этом $f'(x)$ сохраняет в промежутке (a, b) неизменный знак [1]), то внутри промежутка лежит один-единственный корень $\bar{x}$ уравнения $f(x)=0$ (если $f'(x)$ не сохраняет знака, то корень тоже есть, но он может быть не единственным).



Черт. 312.



Черт. 313.

За первое приближение корня $\bar{x}$ принимаем точку $x=x_1$, где хорда AB (черт. 313) пересекает ось OX:

$$x_1 = a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}, \tag{1}$$

или, что то же [2]),

$$x_1 = b-\frac{(b-a)\,f(b)}{f(b)-f(a)}. \tag{2}$$

---

[1]) То есть на участке AB линия графика идет всюду вверх или всюду вниз.

[2]) В симметричном виде $x_1=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, но формулы (1) и (2) удобнее для вычислений.

Затем вычисляем $f(x_1)$ и берем тот из промежутков (a, x_1), (x_1, b), на концах которого $f(x)$ имеет противоположные знаки [промежуток (x_1, b) на черт. 313]. Искомый корень лежит в этом промежутке. Применив формулу, аналогичную (1), получаем второе приближение x_2. Продолжая процесс, найдем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; она имеет пределом искомый корень $\overline{x}$.

Степень приближения на практике можно определить следующим образом. Пусть требуется точность до 0,01. Тогда останавливаемся на том приближении x_n, которое разнится от предшествующего меньше чем на 0,01. Впрочем, не исключено (хотя и мало вероятно), что точность окажется недостаточной. Гарантия будет полной, если убедиться, что знаки $f(x_n)$ и $f(x_n \pm 0{,}01)$ противоположны.

Пример. Функция $f(x) = x^3-2x^2-4x-7$ на концах промежутка (3, 4) имеет противоположные знаки:

$$f(3) = -10 < 0,\ f(4) = 9 > 0.$$

Производная $f'(x) = 3x^2-4x-4$ сохраняет в промежутке (3, 4) знак плюс. Значит, внутри промежутка (3, 4) лежит один корень уравнения

$$x^3-2x^2-4x-7=0.$$

Найдем его с точностью до 0,01. Формула (1) дает:

$$x_1 = 3-\frac{1\cdot(-10)}{9-(-10)} = 3+\frac{10}{19} \approx 3{,}53.$$

Теперь вычисляем:

$$f(3{,}53) \approx -2{,}05.$$

Из двух промежутков (3; 3,53), (3,53; 4) выбираем второй, ибо на его концах знаки $f(x)$ противоположны.

Находим второе приближение:

$$x_2 = 3{,}53-\frac{0{,}47\cdot f(3{,}53)}{f(4)-f(3{,}53)} \approx 3{,}53+\frac{0{,}47\cdot 2{,}05}{11{,}05} = 3{,}62.$$

Значение

$$f(3{,}62) = -0{,}24$$

отрицательно, поэтому берем промежуток (3,62; 4). Находим:

$$x_3 \approx 3{,}62+\frac{0{,}38\cdot 0{,}24}{9{,}24} = 3{,}63$$

и

$$f(3{,}63) = -0{,}04$$

По ходу выкладки надо ждать, что x_4 будет отличаться от x_3 менее чем на 0,01 и что x_3 дает искомое приближение. Поскольку для полной гарантии мы все равно будем вычислять $f(3{,}64)$, не станем определять x_4, а сразу найдем:

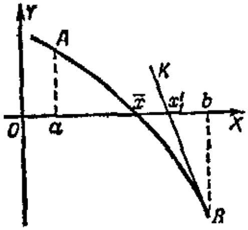
$$f(3{,}64) = 0{,}17.$$

Знаки $f(3{,}63)$ и $f(3{,}64)$ противоположны. Значит, x_3 есть искомое приближение.

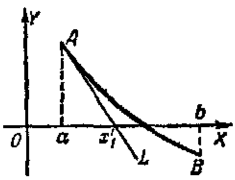
Замечание. Способ хорд, как и все способы последовательных приближений, «не боится ошибок»: ошибка в промежуточной выкладке автоматически исправится при следующем шаге. Но окончательную выкладку надо выполнить со всей тщательностью. Чтобы не возникла ошибка от округлений, полезно сохранять запасные цифры

§ 290. Решение уравнений. Способ касательных

Пусть на концах промежутка (a, b) функция $f(x)$ имеет противоположные знаки (черт. 314 и 315), а производные $f'(x)$, $f''(x)$ сохраняют в промежутке (a, b) неизменный



Черт. 314.



Черт. 315.

знак[1]). Для разыскания корня $\bar{x}$, лежащего в промежутке (a, b) (§ 289), поступаем так.

В том конце дуги AB, где знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы[2]), проводим касательную (BK на черт. 314, AL на черт. 315). За первое приближение искомого корня принимаем точку $x = x_1'$ [3]), где касательная пересекает ось OX.

---

[1]) То есть на участке AB линия графика идет всюду вверх или всюду вниз и обращена вогнутостью всюду вверх или всюду вниз.

[2]) То есть в верхнем, если AB обращена вогнутостью кверху, и в нижнем, если книзу.

[3]) Обозначения x_1', x_2', ... отличают приближения по методу касательных от приближений x_1, x_2, ... по методу хорд.

Если касательная взята в точке $x = b$, то

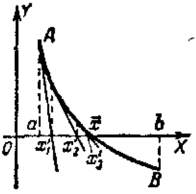
$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \tag{1}$$

если же — в точке $x = a$, то

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2}$$

В обоих случаях второе приближение находится по формуле

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}. \tag{3}$$

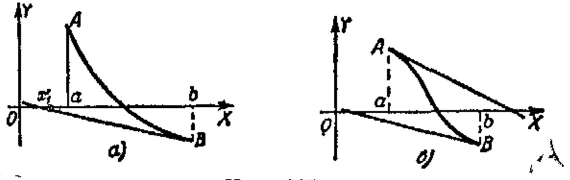


Черт. 316.

Продолжая процесс, найдем последовательность x_1', x_2', x_3', ... (черт. 316). Она имеет пределом искомый корень $\bar{x}$. Степень приближения можно определить так же, как в способе хорд.

Замечание 1. Если касательную провести в том конце дуги, где $f(x)$ и $f''(x)$ имеют противоположные знаки, то x_1' может выйти за пределы промежутка (a, b) и ухудшить приближения (черт. 317, a).

Замечание 2. Если $f''(x)$ не сохраняет знака в промежутке (a, b), то касательные в обоих концах дуги могут пересечь OX за пределами промежутка (черт. 317, $б$).



Черт. 317.

Пример. Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0,$$

содержащийся (см. пример § 289) в промежутке (3; 4).

Решение. Имеем:

$$f(3) = -10; \; f(4) = 9;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4; \quad f''(x) = 6x - 4.$$

Обе производные сохраняют в промежутке (3; 4) знак плюс. Поэтому берем тот конец данного промежутка, где $f(x)>0$, т. е. конец $b=4$. По формуле (1) находим первое приближение:

$$x_1' = 4-\frac{f(4)}{f'(4)} = 4-\frac{9}{28} \approx 3,68.$$

Далее находим:

$$f(3,68)=1,03, \quad f'(3,68)=21,9$$

и по формуле (3) получаем второе приближение

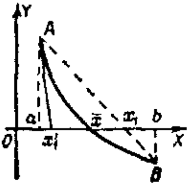
$$x_2' = 3,68-\frac{f(3,68)}{f'(3,68)} = 3,68-0,047=3,633$$

(с избытком).

Последующие приближения будут все меньше и меньше, причем по ходу выкладки можно предвидеть, что дальнейшие уточнения корня не повлияют на цифру сотен. Поэтому подсчитаем только $f(3,633)$ и $f(3,630)$. Вычисление дает:

$$f(3,633)=0,020, \quad f(3,630)=-0,042,$$

так что (с точностью, вдвое больше требуемой) $x=3,63$.



Черт. 318.

§ 291. Комбинированный метод хорд и касательных

При выполнении условий § 290 приближения x_n (по методу хорд) и приближения x_n' (по методу касательных) подходят к корню $\bar{x}$ с противоположных сторон (первые — со стороны вогнутости, вторые — со стороны выпуклости графика; см. черт. 318). Совместное применение обоих методов дает сразу избыточное и недостаточное приближения, и степень точности оценивается непосредственно.

Пусть a есть тот конец промежутка (a, b), где знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы. Тогда по формулам (1) § 289 и (2) § 290 находим [1]:

$$x_1 = a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{1}$$

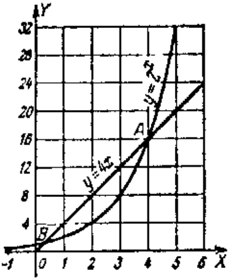
[1]) Для случая, когда знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы на конце b, вторая формула заменяется формулой $x_1' = b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

Искомый корень заключен между x_1 и x_1'. При этом $f(x_1')$ имеет тот же знак, что $f''(x_1')$ (см. черт. 318). Следовательно, мы можем снова применить формулы (1) настоящего параграфа, заменив в них a на x_1', а b на x_1. Получаем вторые приближения

$$x_2 = x_1' - \frac{(x_1-x_1')f(x_1')}{f(x_1)-f(x_1')},$$

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

Для вычисления x_3 применяем те же формулы, заменив в них x_1 и x_1' на x_2 и x_2' и т. д. Продолжая процесс, найдем $\bar{x}$ с требуемой точностью.



Черт. 319.

Пример. Решить уравнение $2^x = 4x$.

Следуя второму способу § 288, строим графики $y = 2^x$ и $y = 4x$ (черт. 319). Помимо точки A, дающей точный корень $x = 4$, получаем только одну точку пересечения B. Ее абсцисса $\bar{x}$ лежит между $a = 0$ и $b = 0{,}5$.

Вычислим $\bar{x}$ с точностью до 0,0001. Имеем:

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 - 4, \quad f''(x) = 2^x \ln^2 2,$$
$$f(0) = 1, \quad f(0{,}5) = -0{,}586.$$

Первая производная сохраняет в промежутке (0; 0,5) знак минус[1]), вторая — знак плюс. Для вычисления x_1' надо взять конец $a = 0$, ибо там знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы. Находим:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{0{,}5\cdot 1}{0{,}586+1} \approx 0{,}316 \text{ (с избытком)},$$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{1}{\ln 2 - 4} = -\frac{1}{0{,}69315-4} \approx 0{,}302$$

(с недостатком).

С помощью пятизначных таблиц логарифмов получим:

$$f(0{,}302) = 0{,}0249, \quad f'(0{,}302) = -3{,}14544,$$
$$f(0{,}316) = -0{,}0191.$$

[1]) Из чертежа видно, что в промежутке (0; 0,5) у графика $y = 2^x$ наклон меньше, чем у графика $y = 4x$.

Это дает вторые приближения:

$$x_2 = 0{,}302 - \frac{0{,}014 \cdot f(0{,}302)}{f(0{,}316) - f(0{,}302)} = 0{,}302 + 0{,}0079 = 0{,}3099$$

(с избытком),

$$x_2' = 0{,}302 - \frac{f(0{,}302)}{f'(0{,}302)} = 0{,}302 + 0{,}0079 = 0{,}3099$$

(с недостатком).

Искомый корень $\bar{x}$ лежит в промежутке (x_2', x_2) и поэтому $\bar{x} = 0{,}3099$ по меньшей мере с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$. На самом деле точность еще больше (пользуясь семизначными таблицами логарифмов, мы при тех же значениях x_1, x_1' получим для $\bar{x}$ границы 0,30990 и 0,30991).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 292. Вводные замечания

1. *Исторические сведения.* Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод разыскания площадей, объемов и центров тяжести.

В зародышевой форме такой метод применялся еще Архимедом. Систематическое развитие он получил в 17-м веке в работах Кавальери[1]), Торричелли[1]), Ферма, Паскаля и других ученых. В 1659 г. Барроу [2]) установил связь между задачей о разыскании площади и задачей о разыскании касательной. Ньютон и Лейбниц в 70-х годах 17-го века отвлекли эту связь от упомянутых частных геометрических задач. Тем самым была установлена связь между интегральным и дифференциальным исчислением (см. ниже п. 3).

Эта связь была использована Ньютоном, Лейбницем и их учениками для развития техники интегрирования. Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Л. Эйлера. Труды М. В. Остроградского [3]) и П. Л. Чебышева [4]) завершили развитие этих методов.

2. Понятие об интеграле. Пусть линия MN (черт. 320) дана уравнением

$$y=f(x),$$

и надо найти площадь F «криволинейной трапеции» $aABb$.

---

[1]) Бонавентура Кавальери (1591—1647) и Евангелиста Торричелли (1608—1647) — итальянские ученые, ученики Галилея.

[2]) Исаак Барроу (1630—1677) — английский математик, учитель Ньютона.

[3]) Академик Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик.

[4]) Академик Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — великий русский математик, проложивший новые пути во многих областях науки.

Разделим отрезок ab на n частей $ax_1, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}b$ (равных или неравных) и построим ступенчатую фигуру, показанную штриховкой на черт. 320. Ее площадь равна

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(b - x_{n-1}). \qquad (1)$$

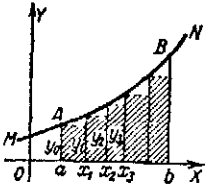
Если ввести обозначения

$$x_1 - a = dx_0, \quad x_2 - x_1 = dx_1, \ldots, \quad b - x_{n-1} = dx_{n-1}, \qquad (2)$$

то формула (1) примет вид

$$F_n = y_0\,dx_0 + y_1\,dx_1 + \ldots + y_{n-1}\,dx_{n-1}. \qquad (3)$$

Искомая площадь есть предел суммы (3) при бесконечно большом n. Лейбниц ввел для этого предела обозначение



Черт. 320.

$$\int y\,dx, \qquad (4)$$

в котором $\int$ (курсивное s) — начальная буква слова summa (сумма), а выражение $y\,dx$ указывает типичную форму отдельных слагаемых[1]).

Выражение $\int y\,dx$ Лейбниц стал называть *интегралом* — от латинского слова integralis — целостный[2]).

Фурье[3]) усовершенствовал обозначение Лейбница, придав ему вид

$$\int_a^b y\,dx. \qquad (5)$$

Здесь явно указаны начальное и конечное значения x.

3. **Связь между интегрированием и дифференцированием.** Будем считать a постоянной, а b — переменной величиной. В соответствии с этим

---

[1]) Понятие предела тогда еще не сформировалось, и Лейбниц говорил о сумме бесконечного числа слагаемых.

[2]) Это название было предложено учеником Лейбница Иваном Бернулли, чтобы отличить «сумму бесконечного числа слагаемых» от обычной суммы.

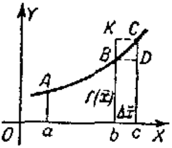
[3]) Жан Баптист Фурье (1768—1830) — французский математик и физик, основатель математической теории тепла.

изменим обозначение b на $\bar{x}$. Тогда интеграл

$$\int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx$$

(т. е. площадь $aABb$ при неподвижной ординате aA и подвижной bB) будет функцией от $\bar{x}$. Оказывается, что дифференциал этой функции равен $f(\bar{x})\,d\bar{x}$[1])

$$d\int_a^{\bar{x}} f(x)\,dx = f(\bar{x})\,d\bar{x}. \qquad (6)$$



Черт. 321.

4. Основная задача интегрального исчисления. Таким образом, вычисление интеграла (5) сводится к *разысканию функции по данному выражению ее дифференциала*. Отыскание такой функции и составляет основную задачу интегрального исчисления.

§ 293. Первообразная функция

Определение. Пусть функция $f(x)$ есть производная от функции $F(x)$, т. е. $f(x)\,dx$ есть дифференциал функции $F(x)$:

$$f(x)\,dx = dF(x).$$

Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x.)$

Пример 1. Функция $3x^2$ есть производная от x^3, т. е. $3x^2\,dx$ есть дифференциал функции x^3:

$$3x^2\,dx = d(x^3).$$

По определению функция x^3 является первообразной для функции $3x^2$.

Пример 2. Выражение $3x^2\,dx$ есть дифференциал функции x^3+7:

$$3x^2\,dx = d(x^3+7).$$

[1]) Это видно из черт. 321. Приращение ΔF площади $aABb$ есть площадь $bBCc$. Последнюю можно представить в виде суммы пл. $bBDc$ + пл. BDC. Здесь первый член равен $bB \cdot bc = f(\bar{x})\,\Delta x$, а второй имеет высший порядок относительно Δx (он меньше, чем пл. $BDCK = \Delta x \cdot \Delta y$). Значит (§ 228), $f(x)\,\Delta\bar{x}$ есть дифференциал площади F.

Стало быть, функция x^3+7 (как и функция x^3) — первообразная для функции $3x^2$.

Любая непрерывная функция $f(x)$ *имеет бесчисленное множество первообразных.* Если $F(x)$ есть одна из них, то всякая другая представляется выражением $F(x)+C$, где C — постоянная величина. Последнюю можно задать произвольно.

Пример 3. Функция $3x^2$ имеет бесчисленное множество первообразных. Одна из них (см. пример 1) есть x^3, всякая другая представляется выражением x^3+C, где C — постоянная величина. При $C=7$ получаем первообразную x^3+7 (пример 2), при $C=0$ получим снова первообразную x^3.

Пример 4. Одна из первообразных функций $3x^2$ есть x^3+7. Всякая другая представляется выражением x^3+ $+7+C$. При $C = -7$ получаем первообразную x^3.

Предостережение. Всякую первообразную от функции $3x^2$ можно представить как в виде x^3+C, так и в виде x^3+7+C. Но эти выражения *нельзя приравнять*, ибо постоянные C в них неодинаковы. Так, первое выражение дает первообразную x^3+10 при $C=10$, а второе — при $C=3$.

Если, вопреки предостережению, мы приравняем x^3+C и x^3+7+C, то получим нелепое равенство $0=7$. Однако можно написать:

$$x^3+C = x^3+7+C_1,$$

где C и C_1 — постоянные. Они связаны соотношением

$$C = C_1+7.$$

§ 294. Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом данного выражения $f(x)\,dx$ [или данной функции $f(x)$] называется наиболее общий вид его первообразной функции.

Неопределенный интеграл выражения $f(x)\,dx$ обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Постоянное слагаемое подразумевается включенным в это обозначение.

Происхождение знака $\int$ и наименования «интеграл» объяснено в § 292, пп. 2 и 3. Слово «неопределенный» подчеркивает, что в общее выражение первообразной функции входит постоянное слагаемое, которое можно взять по произволу [1]).

Выражение $f(x)\,dx$ называется *подинтегральным выражением*, функция $f(x)$ — *подинтегральной функцией*, переменная x — *переменной интегрирования*. Разыскание неопределенного интеграла данной функции называется *интегрированием* [2]).

Пример 1. Наиболее общий вид первообразной функции для выражения $2x\,dx$ есть x^2+C. Эта функция является неопределенным интегралом выражения $2x\,dx$:

$$\int 2x\,dx = x^2+C. \tag{1}$$

Можно также написать:

$$\int 2x\,dx = x^2-5+C_1. \tag{2}$$

Различие в обозначениях постоянных (C и C_1) *подчеркивает*, что они неодинаковы ($C=C_1-5$; ср. § 293, предостережение).

Пример 2. Найти неопределенный интеграл выражения $\cos x\,dx$.

Решение. Функция $\cos x$ является производной от $\sin x$. Поэтому

$$\int \cos x\,dx = \sin x+C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл выражения $\frac{dx}{x}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x}$ разрывна при $x=0$. Будем рассматривать сначала положительные значения x. Так как $d\ln x=\frac{dx}{x}$, то

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x+C. \tag{3}$$

Так как $d\ln 3x=\frac{dx}{x}$, то можно также написать:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln 3x+C_1. \tag{4}$$

---

[1]) В противоположность неопределенному интегралу предел суммы $y_0\,dx_0+y_1\,dx_1+\ldots+y_{n-1}\,dx_{n-1}$ (§ 292, п. 2) называется *определенным интегралом*. Неопределенный интеграл есть *функция*. Определенный интеграл есть *число*.

[2]) Интегрированием называют также разыскание определенного интеграла.

Постоянные C и C_1 связаны соотношением

$$C = \ln 3 + C_1.$$

Аналогично можно написать:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{7} + C \tag{5}$$

и т. д. Для отрицательных значений x функция $\ln x$ не определена, и формулы (3), (4) и (5) непригодны. Зато функция $\ln(-x)$ определена: ее дифференциал тоже равен $\frac{dx}{x}$. Теперь имеем:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \tag{6}$$

и аналогично:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-2x) + C_1, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln\left(-\frac{x}{5}\right) + C_2$$

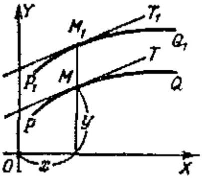
и т. д. Формулы (3) и (6) можно объединить:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C. \tag{7}$$

Формула (7) пригодна для любых значений x, кроме $x=0$ (ср. § 295, пример 3).

§ 295. Геометрическое истолкование интегрирования

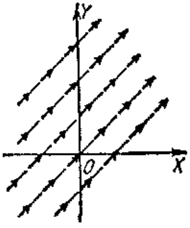
Пусть $f(x)$ — данная непрерывная функция, а $F(x)$ — какая-либо ее первообразная. Если построить график PQ функции $y=F(x)$ (черт. 322), то угловой коэффициент касательной MT будет выражаться данной функцией $f(x)$.



Черт. 322.

Пусть $F_1(x)$ — другая первообразная той же функции $f(x)$. Тогда угловые коэффициенты касательных MT и M_1T_1 (точки касания M, M_1 имеют одну и ту же абсциссу x) одинаковы, т. е. $MT \parallel M_1T_1$.

График первообразной функции $F(x)$ называется *интегральной линией функции* $f(x)$ [или уравнения $dy=f(x)\,dx$]. Касательные к двум интегральным линиям в соответственных точках параллельны. Вместе с тем две интегральные линии отстоят друг от друга (по вертикали) на постоянное расстояние C (MM_1 на черт. 322), так что, имея одну интегральную линию, легко построить другие.



Черт. 323.

Через каждую точку проходит одна-единственная интегральная линия.

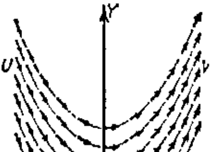
Интегральные линии строятся (приближенно) следующим образом. Из нескольких десятков точек (см., например, черт. 323), густо покрывающих какую-либо часть плоскости, проводим короткие отрезки (или стрелки), указывающие направление касательной.

Получаем «поле направлений». Затем проводим на глаз плавную линию так, чтобы она в ряде своих точек касалась стрелок. Получим одну интегральную линию. Таким же образом построим и ряд других.

Пример 1. Найти интегральные линии уравнения

$$dy = dx.$$

Данная функция $f(x)$ в рассматриваемом примере есть постоянная величина 1. Угловой коэффициент всех стрелок равен единице, т. е. наклон касательной всюду 45°. Интегральные линии (черт. 323) – параллельные прямые. Уравнение каждой из них есть $y = \int dx$, т. е. $y = x + C$.



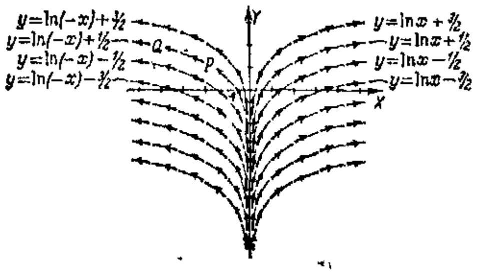
Черт. 324.

Величина C, постоянная для каждой прямой, меняется от одной прямой к другой.

Пример 2. Найти интегральные линии для функции $\frac{1}{2}x$ (т. е. для уравнения $dy = \frac{1}{2}x\,dx$).

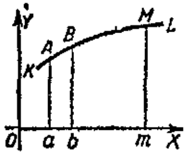
Вдоль оси OY ($x=0$) берем горизонтальные стрелки $\left(\frac{1}{2}x=0\right)$, вдоль ординаты $x = 1$ берем стрелки с угловым коэффициентом $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ и т. д. Проведя на глаз интегральные линии, получаем «параллельные» параболы $\left(y = \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + C;\text{ черт. } 324\right)$.

Пример 3. На черт. 325 показаны интегральные линии функции $\frac{1}{x}$. Ни одна из них не пересекает ось OY, так как при $x=0$ первообразные функции не определены $\left(\text{функция } \frac{1}{x} \text{ разрывна при } x=0\right)$. Вследствие этого лишь



Черт. 325.

те интегральные линии отстоят друг от друга на равные расстояния, которые лежат по одну сторону от оси ординат. Лежащие справа представляются уравнением $y=\ln x+C$, слева — уравнением $y=\ln(-x)+C$. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x}$ выражается (для всех x, кроме $x=0$) формулой



Черт. 326.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Замечание. Другое геометрическое истолкование интегрирования получится, если начертить график KL (черт. 326) данной функции $f(x)$. Пусть дуга KL целиком лежит выше оси OX. Проведем две ординаты aA и mM. Левую ординату aA будем считать неподвижной, а правую mM — подвижной. Площадь $aAMm$ будет одной из первообразных для функции $f(x)$ аргумента $x=Om$ (ср. § 292, п. 2). Взяв вместо aA неподвижную ординату bB, получим другую первообразную — площадь $bBMm$. Эти две первообразные разнятся на постоянную величину $C=$ пл. $aABb$.

§ 296. Вычисление постоянной интегрирования по начальным данным

Из множества первообразных данной функции $f(x)$ только одна может принимать данное значение b при данном значении аргумента $x=a$. Если известен неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

то соответствующее значение постоянной C находится из соотношения

$$b = F(a)+C.$$

Пример 1. Найти ту первообразную от функции $\frac{1}{2}x$, которая принимает значение 3 при $x=2$.

Решение. Имеем:

$$\int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2+C. \qquad (1)$$

Постоянную C находим из соотношения $3=\frac{1}{4}\cdot 2^2+C$. Получаем $C=2$. Подставляя в (1), находим искомую первообразную функцию

$$y=\frac{1}{4}x^2+2. \qquad (2)$$

Геометрически задачу можно сформулировать так: найти ту интегральную линию функции $\frac{1}{2}x$, которая проходит через точку (2, 3). Искомая линия есть парабола UV (черт. 324).

Пример 2. Найти ту первообразную от функции $\frac{1}{x}$, которая принимает значение $\frac{1}{2}$ при $x=-1$.

Решение. При отрицательных x неопределенный интеграл функции $\frac{1}{x}$ (§ 294, пример 3) имеет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x)+C. \qquad (3)$$

По условию имеем:

$$\frac{1}{2} = \ln 1 + C, \qquad (4)$$

откуда

$$C = \frac{1}{2}.$$

Искомая функция есть $\ln(-x) + \frac{1}{2}$. Ей соответствует интегральная линия PQ на черт. 325.

§ 297. Свойства неопределенного интеграла

1. Знак дифференциала перед знаком интеграла уничтожает последний:

$$d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{1}$$

(по определению неопределенного интеграла).

Иначе: производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x). \tag{2}$$

Пример.

$$d \int 2x\,dx = d(x^2 + C) = 2x\,dx, \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dx} \int 2x\,dx = 2x.$$

2. Знак интеграла перед знаком дифференциала уничтожает последний, но при этом вводится произвольное постоянное слагаемое.

Пример.

$$\int d \sin x = \sin x + C. \tag{3}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx. \tag{4}$$

Пример.

$$\int 6x\,dx = 6 \int x\,dx = 6\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = 3x^2 + 6C = 3x^2 + C_1,$$

где $C_1 = 6C$.

4. Интеграл алгебраической суммы равен сумме интегралов от каждого слагаемого в отдельности. Для трех слагаемых

$$\int [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx-\int f_3(x)\,dx; \qquad (5)$$

аналогично для всякого другого (неизменного) числа слагаемых.

Пример.

$$\int (5x^2-2x+4)\,dx = \int 5x^2\,dx-\int 2x\,dx+\int 4\,dx =$$
$$= \left(\frac{5}{3}x^3+C_1\right)-(x^2+C_2)+(4x+C_3) =$$
$$= \frac{5}{3}x^3-x^2+4x+C,$$

где

$$C = C_1-C_2+C_3.$$

Замечание. Нет нужды выписывать при промежуточных вычислениях для каждого интеграла свое постоянное слагаемое; достаточно приписать его по выполнении всех интегрирований.

§ 298. Таблица интегралов

Из каждой формулы дифференцирования, если ее обратить, получается соответствующая формула интегрирования. Так, из формулы

$$d\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad (1)$$

получается формула [1])

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C. \qquad (2)$$

Из десяти нижеследующих формул первые девять получаются обращением основных формул дифференцирования,

[1]) Величина $x+\sqrt{a^2+x^2}$ положительна при любом x, поэтому в (2) не пишем $\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$.

десятая совпадает с (2). Вывод ее дан в примере 1 § 312.

$$\text{I.}\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n \neq -1),$$

$$\text{II.}\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C \text{ [1]},$$

$$\text{III.}\quad \int e^x\,dx = e^x+C,$$

$$\text{IIIa.}\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\text{IV.}\quad \int \sin x\,dx = -\cos x+C,$$

$$\text{V.}\quad \int \cos x\,dx = \sin x+C,$$

$$\text{VI.}\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x+C,$$

$$\text{VII.}\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x+C,$$

$$\text{VIII.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C,$$

$$\text{VIIIa.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$\text{IX.}\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x+C,$$

$$\text{IXa.}\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,$$

$$\text{X.}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

Эти формулы надо знать на память (в каждой из трех пар формул III, VIII, IX достаточно запомнить одну — лучше ту, что обозначена литерой «a»).

В формуле IXa в отличие от VIIIa перед знаком arc стоит множитель $\frac{1}{a}$. Это связано с *размерностью* выражения $\frac{dx}{a^2+x^2}$: в числителе стоит первая степень величины dx, в знаменателе — вторые степени a и x. Размерность равна -1; ту же размерность имеет правая часть благодаря множителю $\frac{1}{a}$.

---

[1]) Ср. § 294, пример 3.

Выражение $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ в формуле VIIIa имеет нулевую размерность, так же как правая часть.

Замечание 1. Формулы I—X лучше заучивать постепенно, по мере их закрепления упражнениями. В дальнейшем полезно заучить еще следующие пять формул [1]:

$$\text{XI.}\quad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\text{XII.}\quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\text{XIII.}\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\text{XIV.}\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

$$\text{XV.}\quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Замечание 2. Интегралы XIII и XIV можно выразить также следующим образом:

$$\text{XIIIa.}\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C,$$

$$\text{XIVa.}\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x - \operatorname{tg} x| + C.$$

В этой форме их взаимная связь виднее, но для вычислений удобнее формулы, данные в тексте.

§ 299. Непосредственное интегрирование

Используя свойства 3 и 4 § 297, можно в ряде случаев свести интегрирование к табличным формулам § 298.

Пример 1.

$$\int (3\sqrt{x} - 4x)\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 4\int x\,dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4\frac{x^2}{2} + C = 2x\sqrt{x} - 2x^2 + C.$$

При первом преобразовании использованы свойства § 297, при втором — табличная формула I. Постоянная C появляется с того момента, когда исчезают знаки интеграла.

---

[1] Все они, равно как формулы, помещенные в приложении (стр. 841—851), выводятся из формул I—X по правилам, изложенным в §§ 300—302.

Пример 2.

$$\int (2\sin t - 3\cos t)\,dt = 2\int \sin t\,dt - 3\int \cos t\,dt =$$
$$= -2\cos t - 3\sin t + C$$

(использованы формулы IV и V).

Пример 3.

$$\int \frac{\sin^3\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int \sin\varphi\,d\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\cos\varphi - \operatorname{ctg}\varphi + C$$

(использованы формулы IV и VI).

Пример 4.

$$\int (x^2+1)^4 x^3\,dx = \int (x^{11} + 4x^9 + 6x^7 + 4x^5 + x^3)\,dx =$$
$$= \frac{1}{12}x^{12} + \frac{2}{5}x^{10} + \frac{3}{4}x^8 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

§ 300. Способ подстановки (интегрирование через вспомогательную переменную)

В подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно ввести вместо x вспомогательную переменную z, связанную с x некоторой зависимостью[1]). Пусть преобразованное выражение есть $f_1(z)\,dz$ [2]); тогда $\int f(x)\,dx = \int f_1(z)\,dz$. Если интеграл $\int f_1(z)\,dz$ принадлежит к табличным или сводится к ним легче, чем исходный, то преобразование достигает цели.

На вопрос: как выбрать удачную подстановку, общего ответа нельзя дать (ср. § 309); правила для важных частных случаев даны ниже в связи с примерами.

Пример 1. $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.

Среди табличных интегралов подходящего нет, но по формуле I можно вычислить интеграл $\int \sqrt{x}\,dx$, сходный с данным. Поэтому пробуем ввести вспомогательную переменную z, связанную с x зависимостью

$$2x - 1 = z. \qquad (1)$$

---

[1]) Предполагается, что функция $x = \varphi(z)$, выражающая эту зависимость, имеет непрерывную производную.

[2]) Имеем: $f_1(z)\,dz = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$.

Дифференцируя (1), получаем:

$$2\,dx = dz. \qquad (2)$$

Подинтегральное выражение $\sqrt{2x-1}\,dx$ преобразуется с помощью (1) и (2) к виду $\sqrt{z}\,\frac{dz}{2}$, и мы получаем:

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \int \sqrt{z}\,\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}z^{3/2}+C. \qquad (3)$$

Возвращаясь к переменной x, находим:

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C.$$

Проверяя дифференцированием, получаем:

$$d\left[\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{1/2}\,d(2x-1) = \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Здесь функция $2x-1$ снова использована как вспомогательная (ср. § 237).

Замечание 1. В простых случаях нет нужды вводить новую букву. Так, в примере 1, где взята вспомогательная функция $2x-1$, находим в уме ее дифференциал $d(2x-1) = 2\,dx$. Вводим в подинтегральное выражение перед dx множитель 2; для компенсации ставим $\frac{1}{2}$ перед интегралом. Получаем:

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{2x-1}\,2\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{1/2}\,d(2x-1) = \\ = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C.$$

Правило 1. *Если подинтегральная функция* (как в примере 1) *имеет вид* $f(ax+b)$, *то может оказаться полезной подстановка* $ax+b=z$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{(8-3x)^2}$.

Вводим вспомогательную функцию $8-3x=z$; отсюда $dx = -\frac{dz}{3}$. Находим:

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \int -\frac{dz}{3z^2} = \frac{1}{3z}+C = \frac{1}{3(8-3x)}+C.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{6x-7}$.

Берем $6x-7$ в качестве вспомогательной функции. Не вводя для нее буквенного обозначения (см. замечание 1), находим (с помощью II):

$$\int \frac{dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\int \frac{6\,dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x-7)}{6x-7} = \frac{1}{6}\ln|6x-7|+C.$$

Пример 4. $\int e^{3x}\,dx$ (вспомогательная функция $3x$).

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

Пример 5.

$$\int \cos\frac{x+1}{3}\,dx = 3\int \cos\frac{x+1}{3}\,d\left(\frac{x+1}{3}\right) = 3\sin\frac{x+1}{3}+C.$$

Правило 2. Пусть подинтегральное выражение разбито на два сомножителя и в одном из них легко распознать дифференциал некоторой функции $\varphi(x)$. Может оказаться, что после подстановки $\varphi(x)=z$ второй сомножитель превратится в такую функцию от z, которую мы умеем интегрировать. Тогда подстановка будет полезной.

Пример 6. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Разобьем подинтегральное выражение на сомножители $\frac{1}{1+x^2}$ и $2x\,dx$. Сомножитель $2x\,dx$ оказывается дифференциалом функции $1+x^2$, стоящей в знаменателе другого сомножителя. После подстановки $1+x^2=z$ сомножитель $\frac{1}{1+x^2}$ примет вид $\frac{1}{z}$. Эту функцию мы умеем интегрировать. Вычисление можно вести так:

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2)+C.$$

Замечание 2. Внешнее сходство данного интеграла с табличным $\int \frac{dx}{1+x^2}$ обманчиво. Наличие в числителе множителя $2x$ существенно меняет вид первообразной функции.

Пример 7. $\int \sin x\cos^3 x\,dx$.

Разбиваем подинтегральное выражение на сомножители $\cos^3 x$ и $\sin x\,dx = -d\cos x$. Подстановка $\cos x = z$

преобразует $\cos^3 x$ в функцию z^3, которую мы умеем интегрировать. Вычисление ведется так:

$$\int \sin x \cos^3 x\, dx = -\int \cos^3 x\, d\cos x = -\frac{\cos^4 x}{4}+C.$$

Пример 8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Сходство с табличным интегралом VIIIa обманчиво. Вводим вспомогательную функцию $a^2-x^2=z$. Имеем $-2x\,dx=dz$, т. е. $x\,dx=-\frac{dz}{2}$. Интеграл принимает вид

$$\int -\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -\sqrt{z}+C.$$

Вычисление ведется так:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 9. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

Вспомогательная функция x^2. Имеем:

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(a^2)^2-(x^2)^2}} = \frac{5}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C.$$

Пример 10. $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \int \ln^2 x\, d\ln x = \frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

Не всегда легко отличить удачную подстановку от неудачной. Это видно из примеров 11 и 12.

Пример 11. $\int (x^2+1)^4 x^3\,dx$.

Здесь хороша подстановка $x^2+1=z$. Подинтегральное выражение разбиваем на сомножители $x\,dx=\frac{1}{2}\,dz$ и $(x^2+1)^4 x^2 = z^4(z-1)$. Получаем:

$$\int (x^2+1)^4 x^3\,dx = \frac{1}{2}\int z^4(z-1)\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int z^5\,dz - \frac{1}{2}\int z^4\,dz = \frac{1}{12}(x^2+1)^6 - \frac{1}{10}(x^2+1)^5+C$$

(ср. пример 4 § 299, где тот же интеграл был найден без подстановки).

Пример 12. $\int (x^2+1)^4 x^2\,dx$.

Здесь подстановка $x^2+1=z$ нехороша: она дает интеграл $\frac{1}{2}\int z^4\sqrt{z-1}\,dz$, более трудный, чем исходный. Данный интеграл лучше всего вычислять непосредственно, как в примере 4 § 299. Получим: $\frac{1}{11}x^{11}+\frac{4}{9}x^9+\frac{6}{7}x^7+$ $+\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

Пример 13. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}=\ln|\operatorname{arctg} x|+C$ (вспомогательная функция $\operatorname{arctg} x$).

Пример 14. $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^6}}=\frac{1}{3}\arcsin y^3+C$ (вспомогательная функция y^3).

Пример 15. $\int \frac{u^3\,du}{\sqrt{1-u^4}}=-\frac{1}{2}\sqrt{1-u^4}+C$ (вспомогательная функция $1-u^4$).

Пример 16. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\ln(e^x+e^{-x})+C$ (вспомогательная функция e^x+e^{-x}).

Пример 17. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}=\frac{1}{3\cos^3 x}+C$ (вспомогательная функция $\cos x$).

Пример 18. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$ (вспомогательная функция $\operatorname{tg} x$; подинтегральное выражение равно $\frac{\operatorname{tg}^3 x\,dx}{\cos^2 x}$).

§ 301. Интегрирование по частям

Всякое подинтегральное выражение можно бесчисленными способами представить в виде $u\,dv$ (u и v — функции переменной интегрирования).

Интегрированием по частям называется сведение данного интеграла $\int u\,dv$ к интегралу $\int v\,du$ с помощью формулы

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{1}$$

Этот прием ведет к цели, если $\int v\,du$ находится легче, чем $\int u\,dv$ (примеры 1—4) или если один из этих интегралов выражается через другой (пример 5).

Пример 1. $\int e^x x\,dx$.

Представляем подинтегральное выражение в виде $x(e^x\,dx) = x\,de^x$. Здесь роль u играет x, роль v — функция e^x. Применяем формулу (1):

$$\int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx.$$

Интеграл $\int e^x\,dx$ — табличный. Вычисление ведется так:

$$\int e^x x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Замечание 1. Если подинтегральное выражение представить в виде $e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, т. е. взять $u = e^x$, $v = \frac{1}{2}x^2$, то по формуле (1) получим:

$$\int e^x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x\,dx.$$

Интеграл $\int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx$ не легче исходного.

Выражение $e^x x\,dx$ можно представить в виде $u\,dv$ бесчисленными способами, беря за v какую угодно функцию. Так, если взять $v = x^4$, то $dv = 4x^3\,dx$. Тогда $e^x x\,dx = \frac{e^x}{4x^2}(4x^3\,dx)$, т. е. $u = \frac{e^x}{4x^2}$. Но формула (1) снова приведет к интегралу, который труднее исходного.

Прежде чем интегрировать по частям, надо в уме прикинуть, что может дать тот или иной выбор функции v.

Пример 2. $\int x \ln x\,dx$.

Здесь хорошо представить подинтегральную функцию в виде $\ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$. Формула (1) $\left(\text{при } u = \ln x,\ v = \frac{1}{2}x^2\right)$ дает:

$$\int \ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \ln x\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2\,d\ln x =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x}.$$

Интеграл $\int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int x\,dx$ равен $\frac{1}{4} x^2 + C$, так что

$$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Пример 3. $\int x \sin x\,dx$.

Имеем:

$$\int x \sin x\,dx = \int x\,d(-\cos x) =$$
$$= -x \cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 4. $\int x^2 \cos x\,dx$.

Имеем:

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2\,d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x\,dx.$$

К полученному интегралу вновь применяем интегрирование по частям (см. пример 3). Окончательно получаем:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Пример 5. $\int e^x \cos x\,dx$.

Представим подинтегральное выражение в виде $e^x\,d \sin x$:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\,dx + C_1. \qquad (2)$$

Полученный интеграл не проще исходного, но его можно выразить через исходный. Для этого снова интегрируем по частям:

$$-\int \sin x\, e^x\,dx = \int e^x\,d \cos x =$$
$$= e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\,dx + C_2. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем уравнение

$$\int e^x \cos x\,dx =$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx + C_1 + C_2, \qquad (4)$$

из которого находим неизвестное $\int e^x \cos x\,dx$:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

где C обозначает $\frac{C_1 + C_2}{2}$.

Замечание 2. Можно представить подынтегральное выражение в виде $\cos x\, de^x$. Тогда и при втором интегрировании надо будет новое выражение $e^x \sin x\, dx$ представить в виде $\sin x\, de^x$ (а не в виде $e^x\, d\cos x$), иначе уравнение для определения $\int e^x \cos x\, dx$ обратится в тождество.

§ 302. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Правило 1. Для вычисления интегралов вида

$$\int \cos^{2n+1} x\, dx, \quad \int \sin^{2n+1} x\, dx \tag{1}$$

(n — целое положительное число) удобно ввести вспомогательную функцию $\sin x$ в первом случае и $\cos x$ — во втором.

Пример 1.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \\ = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Пример 2.

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2\, d\cos x = \\ = -\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\, d\cos x = \\ = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Для четных степеней $\sin x$ или $\cos x$ правило 1 не ведет к цели (см. правило 2).

Правило 2. Для вычисления интегралов вида

$$\int \cos^{2n} x\, dx, \quad \int \sin^{2n} x\, dx \tag{2}$$

удобно пользоваться формулами

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{4}$$

и вводить вспомогательную функцию $\cos 2x$.

Пример 3.

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 4.

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx.$$

Первые два интеграла вычислим сразу, к третьему повторно применим формулу (3), переписав ее в виде

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}.$$

Получаем:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Остается привести подобные члены.

Правило 3. Для вычисления интегралов вида

$$\int \cos^m x \sin^n x\,dx, \tag{5}$$

где по крайней мере одно из чисел m, n — нечетное, удобно ввести вспомогательную функцию $\cos x$ (если m нечетно) или $\sin x$ (если n нечетно) и поступать, как в примерах 1, 2.

Пример 5. $\int \cos^6 x \sin^5 x\,dx$.

Здесь имеем нечетную степень синуса. Представляем подинтегральное выражение в виде

$$\cos^6 x \sin^4 x\,d(-\cos x) = -\cos^6 x\,(1-\cos^2 x)^2\,d\cos x.$$

Получаем:

$$\int \cos^6 x \sin^5 x\,dx =$$
$$= -\int \cos^6 x\,d\cos x + 2\int \cos^8 x\,d\cos x - \int \cos^{10} x\,d\cos x =$$
$$= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C.$$

Когда оба числа m, n — четные, правило 3 не приводит к цели (см. правило 4).

Правило 4. Для вычисления интегралов вида (5), где m и n – четные числа, удобно пользоваться формулами

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{4}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \tag{6}$$

Пример 6. $\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx.$

Представляя подинтегральное выражение в виде

$$(\cos x \sin x)^2 \cos^2 x\, dx$$

и применив (6) и (3), получим:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx.$$

Первое слагаемое преобразуем по формуле (4), переписав ее в виде

$$\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}.$$

Второе вычисляем через вспомогательную функцию $\sin 2x$. Получаем:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Правило 5. Для вычисления интегралов вида

$$\int \sin mx \cos nx\, dx, \tag{7}$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx, \tag{8}$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx \tag{9}$$

удобно пользоваться преобразованиями

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (m-n)x + \sin (m+n)x], \tag{7'}$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos (m-n)x - \cos (m+n)x], \tag{8'}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m-n)x + \cos (m+n)x]. \tag{9'}$$

Прнмер 7.

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin (5-3)\, x + \sin (5+3)\, x]\, dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Правило 6. Для вычнсления интегралов вида

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx, \qquad \int \operatorname{ctg}^n x\, dx$$

(n — целое число, большее 1) удобно выделить миожнтель $\operatorname{tg}^2 x$ (или $\operatorname{ctg}^2 x$).

Пример 8. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

Выделяя множитель $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sc}^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, получаем

$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$$

Первый интеграл равен $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$. Второй вычисляется тем же прнемом:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x|.$$

Окоичательно:

$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C.$$

§ 303. Тригонометрические подстановкн

Для подинтегральных выраженнй, содержаших радикалы

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

(а также квадраты этих радикалов $a^2 - x^2$, $x^2 \pm a^2$), часто удобны следующие подстаиовки:

для	случая	$\sqrt{a^2 - x^2}$	подстаиовка	$x = a \sin t$,
»	»	$\sqrt{x^2 + a^2}$	»	$x = a \operatorname{tg} t$,
»	»	$\sqrt{x^2 - a^2}$	»	$x = a \operatorname{sc} t$.

Пример 1. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Полагая $x=a\sin t$, получаем[1]):

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\,dt. \tag{1}$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int \cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C \tag{2}$$

см. (3) § 302). Возвращаясь к переменной x, находим:

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\quad \frac{1}{2}\sin 2t=\sin t\cos t=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}. \tag{3}$$

Окончательно:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Полагая $x=a\operatorname{tg}t$, получаем:

$$x^2+a^2=a^2(\operatorname{tg}^2 t+1)=\frac{a^2}{\cos^2 t},\qquad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, находим:

$$t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a},\quad \frac{1}{2}\sin 2t=\sin t\cos t=\frac{ax}{a^2+x^2}.$$

Окончательно:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+C.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Полагая $x=a\sec t$, получаем[1]):

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg}t,\quad dx=a\operatorname{tg}t\sec t\,dt.$$

---

[1]) Знак радикала взят в предположении, что $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arcsc}\frac{x}{a} + C =$$
$$= \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C.$$

§ 304. Рациональные функции

Целой рациональной функцией аргумента x называется функция, представляемая многочленом

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (1)$$

Дробной рациональной функцией называется отношение целых рациональных функций

$$\frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}. \qquad (2)$$

Если степень числителя меньше степени знаменателя, дробь (2) называется *правильной*, в противном случае — *неправильной*.

Примеры. Функция $\frac{0{,}3x^2+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}$ — целая рациональная. Функции $\frac{2x^2-1}{4x^3-5}$, $\frac{3x^2+\pi}{x^2+4}$ — дробные рациональные. Первая дробь — правильная, вторая — неправильная. Функция $\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ — иррациональная.

§ 304а. Исключение целой части

Из неправильной дроби можно с помощью деления с остатком *исключить целую часть*, т. е. неправильную дробь можно представить в виде суммы целой рациональной функции и правильной дроби. Может оказаться, что деление выполняется без остатка; тогда неправильная дробь есть целая функция.

Пример 1. Неправильная дробь $\frac{4x^3-16x}{15x^2-3}$ после исключения целой части принимает вид $\frac{4}{15}x - \frac{15\frac{1}{5}x}{15x^2-3}$

$\left(\frac{4}{15}x\right.$ — частное, $-15\frac{1}{5}x$ есть остаток от деления числителя на знаменатель).

Пример 2. $\frac{1+x^5-x^6}{1-x}=x^5+\frac{1}{1-x}$.

Этот результат получается делением $-x^6+x^5+1$ на $-x+1$, или, короче, следующим образом:

$$\frac{1+x^5-x^6}{1-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{x^5(1-x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}+x^5.$$

Пример 3. Исключая целую часть из дроби $\frac{x^3-x^2}{x-1}$, получаем целую рациональную функцию x^2 (деление выполняется без остатка).

§ 305. О приемах интегрирования рациональных дробей

При интегрировании неправильной рациональной дроби сначала исключаем из нее целую часть (§ 304а).

Пример 1.

$$\int\frac{1+x^5-x^6}{1-x}\,dx=\int\left(x^5+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{x^6}{6}-\ln|1-x|+C\,^{1)}$$

(ср. § 304а, пример 2).

Так как целая часть интегрируется непосредственно, то интегрирование всякой дробной рациональной функции сводится к интегрированию правильной дроби. Для этого существует общий метод (§ 307). Но он часто связан с длительными вычислениями. Поэтому полезно, где возможно, использовать частные особенности подынтегрального выражения.

Так, *если числитель подынтегрального выражения равен дифференциалу знаменателя* (или отличается от него постоянным множителем), *то знаменатель надо принять за вспомогательную функцию.*

Пример 2.

$$\int\frac{(2x^3+6x^2+7x+3)\,dx}{x^4+4x^3+7x^2+6x+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\,(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)}{x^4+4x^3+7x^2+6x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)+C.$$

---

1) Можно было бы применить подстановку $1-x=z$ и не исключая предварительно целой части, но вычисление было бы длиннее.

Аналогичный прием, когда в числителе — дифференциал некоторого многочлена, а в знаменателе — степень того же многочлена.

Пример 3.

$$\int \frac{(3x^2+1)\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{d(x^3+x)}{(x^3+x)^2} = -\frac{1}{x^3+x} + C.$$

Если числитель и знаменатель имеют общий множитель, бывает полезно произвести сокращение.

Пример 4. $\int \frac{(x^2-x-2)\,dx}{x^3+x^2+x+1}$.

Здесь дробь сокращается на $x+1$. Получаем:

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

Замечание 1. Иной раз сокращать дробь нет смысла. Так, в примере 2 можно представить дробь в виде

$$\frac{(x+1)(2x^2+4x+3)}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$$

и сократить на $x+1$. Но интеграл

$$\int \frac{(2x^2+4x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$$

вычислить труднее, чем исходный, не говоря о том, что разложение на множители представляет немалую трудность.

Замечание 2. Общий метод интегрирования рациональных дробей состоит в разложении данной дроби на сумму так называемых *простейших дробей*. В § 306 объяснено, что это за дроби и как их интегрировать. В § 307 указано, как разложить данную дробь на простейшие.

§ 306. Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называются дроби, приводящиеся к следующим двум типам:

I. $\frac{A}{(x-a)^n}$ (n — натуральное число),

II. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ (n — натуральное число), где x^2+px+q *не разлагается на действительные множители первой степени* $\left[\text{т. е. } q-\left(\frac{p}{2}\right)^2>0\right]$; если же x^2+px+q разлагается на действительные множители первой степени $\left[\text{т. е. } q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\leqslant 0\right]$, то дробь II *не считается простейшей.*

Дроби $\frac{5}{x+2}$, $\frac{\sqrt{3}}{(x-\sqrt{2})^3}$ — простейшие первого типа, дроби $\frac{0{,}2}{x^2+1}$, $\frac{7x-1}{x^2+2}$, $\frac{5(x+4)}{x^2+\sqrt{3}}$ — простейшие второго типа. Дроби $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{3x-2}{(x^2-\sqrt{3})^3}$ — не простейшие, ибо выражения x^2-1, $x^2-\sqrt{3}$ разлагаются на действительные множители первой степени.

Дробь $\frac{3}{2x-9}$ — простейшая, так как ее можно привести к виду $\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{9}{2}}$. Дробь $\frac{18x-3}{(x^2+x+1)^3}$ — простейшая, ибо она вида II.

А) *Простейшие дроби первого типа* интегрируются по формулам

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{A}{(x-a)^{n-1}}+C\qquad(n>1),\tag{1}$$

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.\tag{2}$$

Б) *Простейшие дроби второго типа в случае* $n=1$ интегрируются до конца подстановкой

$$x+\frac{p}{2}=z,$$

приводящей знаменатель

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

к виду z^2+k^2 $\left[\text{где } k^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$.

Пример 1.

$$\int \frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx\left[p=-8,\ q=25;\ q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=9\right].$$

Подстановка

$$x-4=z$$

преобразует интеграл к виду

$$\int \frac{3z+7}{z^2+9}\,dz=3\int \frac{z\,dz}{z^2+9}+7\int \frac{dz}{z^2+9}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln\,(z^2+9)+\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{3}+C.$$

Возвращаясь к аргументу x, получаем:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx=\frac{3}{2}\ln\,(x^2-8x+25)+\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$

Формула (запоминать ее не надо) имеет вид

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=$$
$$=\frac{M}{2}\ln\,(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

В) *Простейшие дроби второго типа в случае* $n>1$ интегрируются той же подстановкой

$$x+\frac{p}{2}=z.$$

Она преобразует интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ к виду

$$\int \frac{Mz+L}{(z^2+k^2)^n}\,dz \tag{3}$$

$\left(\text{где } L=\frac{2N-Mp}{2},\ k^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right).$

Первое слагаемое $\int \frac{Mz\,dz}{(z^2+k^2)^n}$ интегрируется сразу через вспомогательную функцию z^2+k^2

$$\int \frac{Mz\,dz}{(z^2+k^2)^n}=-\frac{M}{2}\,\frac{1}{(n-1)\,(z^2+k^2)^{n-1}}+C. \tag{4}$$

Второе слагаемое $L\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$ вычисляется тригонометрической подстановкой (§ 303, пример 2) или по *формуле приведения*[1])

$$\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n} =$$
$$= \frac{1}{2(n-1)k^2}\left[\frac{z}{(z^2+k^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^{n-1}}\right] \qquad (5)$$

(ее можно проверить дифференцированием). Она сводит интеграл $\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}$ к интегралу того же типа, но показатель n в знаменателе уменьшается на единицу. Повторяя процесс, придем в конце концов к интегралу

$$\int \frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{z}{k} + C.$$

Пример 2. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3}$.

Подстановка $x-1=z$ приводит интеграл к виду

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3}\,dz = 3\int \frac{z\,dz}{(z^2+2)^3} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^3}. \qquad (6)$$

Первый член равен

$$\frac{3}{2}\int \frac{d(z^2+2)}{(z^2+2)^3} = -\frac{3}{4(z^2+2)^2}. \qquad (7)$$

Постоянное C опускаем, относя его ко второму члену, который вычислим по формуле (5) (полагая в ней $k^2=2$, $n=3$):

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^3} = \frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dz}{(z^2+2)^2}. \qquad (8)$$

Применяем повторно формулу (5), полагая $k^2=2$, $n=2$:

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+2} =$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + C. \qquad (9)$$

---

[1]) Так именуется всякая формула, выражающая какую-либо величину, зависящую от числа n $\left[\text{в нашем случае } \int \frac{dz}{(z^2+k^2)^n}\right]$, через ту же величину при меньшем абсолютном значении n. Формулы приведения называются также *рекуррентными* (т. е. возвратными).

Из формул (6) – (9) находим:

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3}\,dz =$$

$$= -\frac{3}{4(z^2+2)^2}+\frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2}+\frac{3}{32}\,\frac{z}{z^2+2}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}+C =$$

$$= \frac{3z^3+10z-24}{32(z^2+2)^2}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3} =$$

$$= \frac{3x^3-9x^2+19x-37}{32(x^2-2x+3)^2}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

§ 307. Интегрирование рациональных функций (общий метод)

Рациональные функции интегрируются по общему методу следующим образом:

1. Из данной функции исключаем целую часть; она интегрируется непосредственно (§ 305, пример 1).

2. Знаменатель остающейся правильной дроби разлагаем на действительные множители типа $x-a$ и x^2+px+q, причем множители второго типа должны быть *неразложимыми на действительные множители первой степени*[1]).

Разложение имеет вид

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n =$$

$$= a_0(x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\ldots \quad (1)$$

Такое разложение всегда существует[2]); оно единственно.

3. Числитель правильной дроби пробуем делить на каждый множитель выражения (1). Если деление выполняется без остатка, сокращаем дробь на соответствующий множитель (§ 305, пример 4).

4. Разлагаем полученную дробь на сумму простейших дробей и интегрируем слагаемые по отдельности (§ 306).

---

[1]) Если получился множитель x^2+px+q, разложимый на действительные множители $x-m$ и $x-n$, то его заменяем двумя этими множителями.

[2]) В простейших случаях оно выполняется группировкой членов и другими приемами, известными из алгебры. Об общем случае см. § 308.

Замечание 1. Всякая правильная дробь разлагается единственным образом на сумму простейших. Способ разложения объяснен ниже. Для лучшего его понимания рассмотрены 4 случая, исчерпывающие все возможности.

Случай 1. В разложение знаменателя входят только множители первой степени и ни один из них не повторяется.

Тогда правильная дробь разлагается на простейшие по формуле

$$\frac{F(x)}{a_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}, \qquad (2)$$

где постоянные $A, B, \ldots, L$ находятся (по методу неопределенных коэффициентов) следующим образом.

а) Освобождаемся в равенстве (2) от знаменателей.

б) *Приравниваем коэффициенты при одинаковых* степенях x в правой и левой части (может случиться, что в левой части нет соответствующего члена; тогда подразумеваем его с коэффициентом 0). Получаем для неизвестных $A, B, \ldots, L$ систему уравнений первой степени.

в) Решаем систему (она всегда имеет единственное решение).

Пример 1. Найти $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$.

Решение. Данная дробь — правильная. Разлагаем знаменатель на множители:

$$x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3). \qquad (3)$$

Числитель не делится ни на один из этих множителей, так что дробь не сокращается. Все множители — первой степени и ни один не повторяется.

Согласно формуле (2)

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}. \qquad (4)$$

Для разыскания постоянных A, B, C освобождаемся от знаменателей. Получаем:

$$7x-5=A(x-2)(x+3)+B(x+3)x+C(x-2)x, \qquad (5)$$

или

$$7x-5=(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A. \qquad (6)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

(в левой части подразумеваем член $0 \cdot x^2$). Получаем систему

$$\left.\begin{aligned} A+\ B+\ C &= 0, \\ A+3B-2C &= 7, \\ -6A &= -5. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решив ее, находим

$$A=\frac{5}{6}, \quad B=\frac{9}{10}, \quad C=-\frac{26}{15} \tag{8}$$

и из (4) получаем следующее разложение данной дроби на простейшие:

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{5}{6}\,\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\,\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\,\frac{1}{x+3}.$$

Интегрируя почленно, находим искомый интеграл

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx=\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C.$$

Замечание 2. Постоянные A, B, C можно найти еще так: берем три любых значения x и подставляем их в (5). Получим систему трех уравнений, из которой снова найдем те же значения (8).

Это замечание относится и к случаям 2, 3 и 4. Но в случае 1 указанный прием можно еще упростить, взяв такие значения x, которые обращают в нуль знаменатели простейших дробей; в данном примере — значения $x=0$, $x=2$, $x=-3$. Тогда получаем систему $-5=-6A$, $9=10B$, $-26=15C$, из которой сразу получаем значения A, B, C.

Случай 2. В разложение знаменателя входят лишь множители первой степени и некоторые из них повторяются.

Пусть множитель $x-a$ повторяется k раз. Тогда в разложении (2) надо заменить соответствующие k одинаковых членов суммой простейших дробей вида

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}. \tag{9}$$

Аналогично для других повторяющихся множителей. Простейшие дроби, отвечающие неповторяющимся множителям, остаются прежними. Постоянные, входящие в разложение, определяются как в случае 1.

Пример 2. Найти $\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$.

Решение. Разложение знаменателя имеет вид

$$x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3.$$

Все множители — первой степени. Множитель x не повторяется, множитель $x-1$ повторяется трижды. Неповторяющемуся множителю соответствует, как в примере 1, простейшая дробь вида $\frac{A}{x}$, повторяющемуся множителю $(x-1)$ — сумма трех простейших дробей вида

$$\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2 \qquad (10)$$

или

$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+ \\ +(3A+B-C+D)x-A. \qquad (11)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x; получаем:

$$\left.\begin{aligned} A+D&=1,\\ -3A+C-2D&=0,\\ 3A+B-C+D&=0,\\ -A&=1.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Решив эту систему, находим:

$$A=-1, \quad B=2, \quad C=1, \quad D=2.$$

Получаем разложение данной дроби

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

Интегрируя почленно, находим:

$$\int\frac{(x^3+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}=$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C=$$

$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$$

Другой вариант. Если положить в (10) сначала $x=0$, затем $x=1$ (см. замечание 2), то получим сразу $A=-1$, $B=2$. Подставив в (10) еще два значения, например $x=2$ и $x=-1$, и учитывая найденные значения A и B, получим систему $2C+2D=6$, $2C-4D=-6$, из которой найдем $C=1$, $D=2$.

Этот способ особенно удобен, когда в разложении знаменателя много неповторяющихся множителей, а кратность повторяющихся членов невелика.

Случай 3. В разложение знаменателя входят множители второй степени (не разложимые на действительные множители первой степени), и ни один из них не повторяется.

Тогда в разложении дроби каждому множителю x^2+px+q соответствует простейшая дробь $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (типа II). Множителям первой степени (если они есть) по-прежнему соответствуют простейшие дроби типа I.

Пример 3. Найти $\int \frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}$.

Решение. Разлагаем знаменатель на множители:

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2=$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3).$$

Получили два множителя вида x^2+px+q, но из них лишь первый не разлагается на действительные множители первой степени

$$\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=3-1^2=2>0\right].$$

Второй же

$$\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=-3-1^2=-4<0\right]$$

разлагается:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Поэтому разложение дроби на простейшие имеет вид [1])

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}. \qquad (13)$$

---

[1]) Не будет ошибки, если искать разложение вида

$$\frac{A'x+B'}{x^2+2x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3};$$

в данном примере вычисление даже упростится: мы получим $A'=2$, $B'=2$ и найдем:

$$\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x-3}=\ln|x^2+2x-3|+C.$$

В общем случае все равно пришлось бы разлагать дробь $\frac{A'x-B'}{x^2+2x-3}$ на сумму простейших $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$.

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$7x^2+26x-9 = (x^2+2x+3)\,[A\,(x+3)+B\,(x-1)]+ \\ +(Cx+D)\,(x-1)\,(x+3). \quad (14)$$

Приравниваем коэффициенты одинаковых степеней x:

$$\left.\begin{aligned} A+\ B+\ C &= 0,\\ 5A+B+2C+\ D &= 7,\\ 9A+B-3C+2D &= 26,\\ 9A-3B-3D &= -9. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Решая систему (15), находим

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-2,\quad D=5,$$

так что

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)\,(x-1)\,(x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

Интегрируя (см. § 306, случай Б), находим:

$$\int\frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\ln|x-1|+\ln|x+3|-$$

$$-\ln(x^2+2x+3)+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Другой вариант. Для определения A и B полагаем в (14) сначала $x=1$, затем $x=-3$ (см. замечание 2). Получаем простые уравнения $24=24A$, $-24=-24B$ и находим:

$$A=1,\quad B=1.$$

Полагая в (14) $x=0$, получаем $-9=9A-3B-3D$, откуда $D=5$. Полагая $x=-1$, находим $C=-2$.

Случай 4. В разложение знаменателя входят множители второй степени (неразложимые на действительные множители первой степени) и некоторые из них повторяются.

Тогда в разложении дроби каждому множителю $x^2+ +px+q$, повторяющемуся k раз, соответствует сумма простейших дробей вида

$$\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}. \quad (16)$$

Пример 4. Найти $\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x}$.

Решение. Разлагаем знаменатель на множители:

$$x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2.$$

Множитель x^2+1 не разлагается на действительные множители первой степени; он повторяется дважды. Поэтому разложение дроби имеет вид

$$\frac{3x+5}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Освобождаемся от знаменателей.

$$3x+5 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)x(x^2+1).$$

Приравниваем коэффициенты одинаковых степеней x.

$$A+D=0,\quad E=0,\quad 2A+B+D=0,$$
$$C+E=3,\quad A+E=5.$$

Решая систему, получаем:

$$A=5,\quad B=-5,\quad C=3,\quad D=-5,\quad E=0,$$

так что

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x} = 5\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(-5x+3)\,dx}{(x^2+1)^2} - 5\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Вычислив средний интеграл, как объяснено в § 306 (случай В), найдем.

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^5+2x^3+x} = 5\ln|x| + \left[\frac{5}{2(x^2+1)} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x\right] - \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + C =$$
$$= 5\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3x+5}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Замечание 3. Интеграл всякой рациональной функции теоретически выражается (ср. примеры 1 – 4) через логарифмы рациональных функций, аркфункции и «алгебраическую часть» (т. е. рациональную функцию). Но множители вида $x-a$, x^2+px+q (на которые разлагается знаменатель всякой рациональной функции), как правило, можно найти лишь приближенно (см § 308)

Впрочем, по способу, открытому М В. Остроградским, *алгебраическую* часть можно всегда выразить точно, ибо для разыскания ее нет нужды разлагать знаменатель.

§ 308. О разложении многочлена на множители

Разложение многочлена

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \ |a_0|\neq|0. \qquad (1)$$

на множители сводится к решению уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0. \qquad (2)$$

Действительно, если известен какой-либо корень x_1 уравнения (2), то многочлен (1) разделится без остатка на $x-x_1$, и мы получим разложение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n = a_0(x-x_1)(x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}). \qquad (3)$$

По способам, излагаемым в высшей алгебре, всегда можно найти (приближенно, но с любой точностью) один из корней всякого числового алгебраического уравнения [1]. Однако корень x_1 может быть и мнимым.

Получив разложение (3), мы можем далее найти корень x_2 уравнения $x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}=0$. Число x_2 будет вместе с тем корнем уравнения (2). Для многочлена (1) получится такое разложение:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\ldots+c_{n-2}) \qquad (4)$$

и т. д. В конце концов получим разложение на n (действительных или мнимых) множителей первой степени.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \qquad (5)$$

такое разложение единственно. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (2). Эти числа называют также корнями многочлена (1). Не исключена возможность, что некоторые корни равны между собой. Но и в этом случае считают, что уравнение (2) имеет n корней, только каждый из корней надо считать за один, за два, за три и т. д., смотря по тому, сколько раз повторяется соответствующий множитель в разложении (5).

Если все коэффициенты многочлена (1) действительны, то всякому комплексному корню $\alpha+\beta i$ отвечает другой комплексный корень $\alpha-\beta i$ (*сопряженные корни*). Если один из сопряженных корней повторяется, то столько же раз повторяется другой.

Два сопряженных комплексных множителя $x-(\alpha+\beta i)$ и $x-(\alpha-\beta i)$ дают в произведении *действительный* многочлен вида

$$x^2+px+q.$$

[1] При делении многочлена (1) на двучлен $x-x_1'$, где x_1' — приближенное значение корня, получится в остатке некоторое число q (равное значению многочлена при $x=x_1'$). По мере приближения x_1' к x_1 остаток q будет стремиться к нулю.

Здесь

$$p = -2\alpha, \quad q = \alpha^2+\beta^2; \quad q-\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \beta^2 > 0.$$

Значит, *всякий многочлен* (с действительными коэффициентами) *разлагается на действительные множители типа* $x-x_k$ и x^2+px+q (множители второго типа не разложимы на действительные множители первой степени).

Замечание. Хотя числа x_k, p, q, входящие в множители вида $x-x_k$, x^2+px+q, действительны, но, как правило, они являются иррациональными. Более того, в том случае, когда многочлен (1) имеет пятую или более высокую степень, эти числа, как правило, нельзя точно выразить даже с помощью радикалов. Поэтому далеко не всегда возможно точно разложить рациональную функцию на простейшие дроби.

§ 309. Об интегрируемости в элементарных функциях

Интеграл рациональной функции, как правило, *не является рациональной функцией* $\left(\text{например, } \int \frac{dx}{x} = \ln x + C\right)$. Подобным же образом интеграл элементарной (нерациональной) функции, как правило, *не является элементарной функцией*.

Так, интегралы

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{x\,dx}{\ln x}$$

не выражаются элементарными функциями[1]), хотя сходные на вид интегралы

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \ln x\,dx, \quad \int x \ln x\,dx$$

являются элементарными функциями.

По правилам дифференциального исчисления можно для любой элементарной функции найти ее производную (также элементарную). В интегральном исчислении подобные правила для разыскания первообразной *принципиально невозможны*.

Но для некоторых классов элементарных функций интеграл всегда является функцией элементарной (хотя подчас имеет сложное выражение). В § 307 был изучен один такой класс (рациональных функций). В §§ 310–313 рас-

[1]) Тем не менее для всякой непрерывной функции неопределенный интеграл существует (и притом является непрерывной функцией).

смотрены другие важные классы и указаны общие правила для вычисления их интегралов. Впрочем, во многих случаях предпочтительны частные приемы. Они подсказываются навыком.

§ 310. Некоторые интегралы, зависящие от радикалов

Символ $R(x, y)$ здесь и в дальнейшем обозначает дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены относительно букв x, y. Такая дробь называется *рациональной функцией* двух переменных x, y (ср. § 304). Если знаменатель — постоянная величина (многочлен нулевой степени), рациональная функция называется *целой*.

Аналогично определяется рациональная функция трех переменных $R(x, y, z)$, четырех и т. д.

Интеграл вида[1])

$$I = \int R\left[x, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\alpha}, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\beta}, \ldots\right] dx, \tag{1}$$

где α, β — *рациональные* числа, а p, q, r, s — постоянные величины (числовые или буквенные), приводится к интегралу рациональной функции и, значит, выражается в элементарных функциях. Этой цели служит подстановка[2]) $\frac{px+q}{rx+s} = t^n$, где n — общий знаменатель дробей α, β, ...

В частности, интеграл

$$I = \int R[x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots]\, dx \tag{2}$$

вычисляется подстановкой $x = t^n$.

Замечание. Приведение данного интеграла к интегралу рациональной функции называют *рационализацией*

Пример 1. $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.

Здесь $p = q = s = 1$, $r = 0$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Общий знаменатель $n = 6$. Интеграл рационализируется подстановкой

$$1 + x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt.$$

---

[1]) Буква I здесь и в дальнейшем — сокращенное обозначение интеграла.

[2]) *Предполагается, что* $\frac{p}{r} \neq \frac{q}{s}$; *в случае* $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ дробь $\frac{px+q}{rx+s}$ сводится к постоянной, и тогда не требуется никакой подстановки

Получаем:

$$I = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{t^2-t^3} = -6\int (t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)\,dt =$$
$$= -6t^4\left(\frac{t^5}{9}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^3}{7}+\frac{t^2}{6}+\frac{t}{5}+\frac{1}{4}\right)+C,$$

где $t = \sqrt[6]{1+x}$.

Пример 2. $I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2}dx$.

Это — интеграл вида (2). Полагаем $x=t^6$. Получаем:

$$I = 6\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{3t}{1+t^2}+3\operatorname{arctg} t+C,$$

где $t = \sqrt[6]{x}$.

§ 311. Интеграл от биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом[1]) называется выражение

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n, p — рациональные числа, a, b — постоянные, не равные нулю. Интеграл

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx \tag{1}$$

выражается через элементарные функции в следующих трех случаях.

Случай 1. p — целое число. Тогда интеграл подходит под тип § 310.

См. пример 2 § 310, где $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$.

Случай 2. p — дробь $\left(p=\frac{r}{s}\right)$, но $\frac{m+1}{n}$ — целое число.

Тогда интеграл рационализируется подстановкой

$$a+bx^n=z^s$$

(s — знаменатель дроби p).

---

[1]) Некоторые авторы употребляют термин «дифференциальный бином».

Пример 1.

$$I = \int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx. \tag{2}$$

Здесь $m=\frac{1}{5}$, $n=\frac{3}{5}$, $\frac{m+1}{n}=2$ — целое число. Полагаем

$$3-2x^{\frac{3}{5}} = z^2. \tag{3}$$

Можно выразить x через z и подставить в (2). Но проще продифференцировать (3):

$$x^{-\frac{2}{5}}\,dx = -\frac{5}{3}z\,dz \tag{4}$$

и преобразовать I с помощью (3) и (4) следующим образом:

$$I = \int\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{5}}\left(x^{-\frac{2}{5}}\,dx\right) =$$

$$= \int (z^2)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{3-z^2}{2}\left(-\frac{5}{3}z\,dz\right) = -\frac{5}{6}\int (3-z^2)\,dz =$$

$$= -\frac{5}{2}z+\frac{5}{18}z^3+C,$$

где $z=\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Случай 3. Оба числа $p=\frac{r}{s}$ и $\frac{m+1}{n}$ — дробные, но их сумма $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число.

Тогда интеграл рационализируется подстановкой

$$ax^{-n}+b=z^s$$

(s — знаменатель дроби p).

Пример 2.

$$I = \int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx.$$

Здесь $m=-6$, $n=3$, $p=\frac{2}{3}$ (дробь), $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{3}$ (дробь), $\frac{m+1}{n}+p=-1$ (целое число).

Полагаем

$$x^{-3}+2=z^3, \qquad x^{-4}\,dx = -z^2\,dz.$$

Представив $1+2x^3$ в виде $x^3(x^{-3}+2)$, получаем:

$$I = \int x^{-4}(x^{-3}+2)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \int z^2(-z^2dz) = -\frac{1}{5}z^5+C =$$

$$= -\frac{1}{5}x^{-5}(1+2x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

Рассмотренные три случая были указаны еще Ньютоном. Эйлер, которого никто из когда-либо живших математиков не превзошел в искусстве преобразований, безуспешно искал новые случаи интегрируемости биномиального дифференциала. Он пришел к убеждению, что эти *три случая единственные*. Но лишь П. Л. Чебышев в 1853 г. доказал утверждение Эйлера. Д. Д. Мордухай-Болтовской в 1926 г. доказал соответствующую теорему для интеграла вида (1) при иррациональных показателях m, n, p.

§ 312. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Интегралы этого вида[1]) рационализируются одной из *подстановок Эйлера*.

Первая подстановка Эйлера применима при $a>0$. Полагаем [2])

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a} = t. \tag{1}$$

Тогда

$$ax^2+bx+c = (t-x\sqrt{a})^2.$$

Члены, содержащие x^2, взаимно уничтожаются, и x (а значит, и dx) выражается через t рационально. Подставив это выражение в (1), найдем рациональное выражение и для радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Пример 1.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}}.$$

Полагаем

$$\sqrt{k^2+x^2} = t-x.$$

---

1) Можно считать, что $a\neq 0$, ибо при $a=0$ получаем случай § 310.

2) С тем же успехом можно положить

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a} = t.$$

Отсюда

$$x=\frac{t^2-k^2}{2t}, \quad dx=\frac{(t^2+k^2)\,dt}{2t^2},$$
$$\sqrt{k^2+x^2}=t-x=\frac{t^2+k^2}{2t}.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{(t^2+k^2)\,dt}{2t^2}:\frac{t^2+k^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$
$$I=\ln\left(x+\sqrt{k^2+x^2}\right)+C.$$

Третья подстановка Эйлера (о второй см. ниже замечание) применима всякий раз, как трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни, и, в частности, при $a<0$ [1]).

Пусть корни будут x_1, x_2. Тогда полагаем

$$\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}}=t, \tag{2}$$

откуда находим рациональное выражение x через t:

$$x=\frac{x_2t^2-ax_1}{t^2-a}. \tag{3}$$

Рациональное выражение радикала находим так:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=$$
$$=\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}(x-x_2)^2}=t\,|x-x_2|. \tag{4}$$

Пример 2. $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Трехчлен $-x^2+3x-2$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=2$:

$$-x^2+3x-2=-(x-2)(x-1).$$

Подкоренное выражение положительно при $1<x<2$ (при $x=1$ и $x=2$ подинтегральная функция обращается в бесконечность).

---

[1]) При $a<0$ трехчлен ax^2+bx+c мог бы иметь и комплексные корни (если $4ac-b^2>0$), но тогда в силу тождества $ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$ трехчлен имел бы всегда отрицательные значения, так что корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ был бы мнимым при всяком значении x.

Полагаем [1])

$$\sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}} = t. \tag{5}$$

Отсюда

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}, \tag{6}$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}}\,|x-2| =$$
$$= t\,|x-2| = -t(x-2)$$

(в силу неравенства $1<x<2$ величина $x-2$ отрицательна). Подставляя в правую часть выражение x через t, находим:

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \frac{t}{t^2+1}. \tag{7}$$

В силу (6) и (7) имеем:

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-(x-2)(x-1)}} = \int \frac{2\,dt}{t^2} = -\frac{2}{t} =$$
$$= -2\sqrt{\frac{x-2}{-(x-1)}} + C.$$

З а м е ч а н и е. Первая и третья подстановки Эйлера достаточны, чтобы вычислить любой интеграл рассматриваемого вида. Для полноты приведем и в т о р у ю п о д с т а н о в к у Э й л е р а

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}. \tag{8}$$

Она применима при $c>0$. Возводя в квадрат и деля на x, получаем рациональное выражение x через t; затем (8) даст рациональное выражение радикала.

§ 313. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Интегралы этого вида рационализируются подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \tag{1}$$

откуда

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{2}$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{3}$$

---

[1]) Можно положить $x_1=2$, $x_2=1$. Тогда третья подстановка Эйлера видоизменяется $\left(\text{надо будет положить } \sqrt{\frac{-(x-2)}{x-1}} = t\right)$.

Пример. $I = \int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

С помощью (2) и (3) получаем:

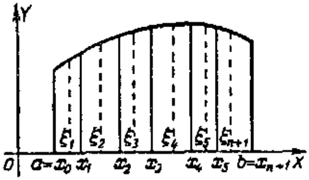
$$I = \int \frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(3+5\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{dz}{4-z^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right| + C.$$

Подставляя сюда $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, находим:

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

§ 314. Определеный интеграл [1])

Пусть функция $f(x)$ непрерывна внутри промежутка (a, b) и на его концах. Внутри промежутка возьмем n последовательных точек $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ (черт. 327, где $n=5$); для единообразия обозначим a через x_0, а b через x_{n+1}. Промежуток (a, b) разобьется на $n+1$ частичных промежутков (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), … …, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n+1}).



Черт. 327.

В каждом из частичных промежутков (внутри или на одном из концов) возьмем по точке [точка ξ_1 в промежутке (x_0, x_1), ξ_2 — в промежутке (x_1, x_2) и т. д.].

Составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots \\ \ldots + f(\xi_{n+1})(x_{n+1} - x_n). \qquad (1)$$

Имеет место следующая теорема.

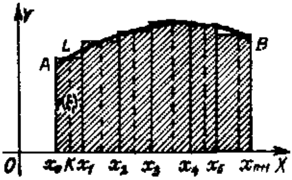
Теорема. Если при неограниченном возрастании числа промежутков (x_0, x_1), (x_1, x_2), … наибольшая из их длин стремится к нулю, то сумма S_n стремится к некоторому пределу S. Число S — одно и то же при любом способе образования частичных промежутков и при любом выборе точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$

---

[1]) Рекомендуется предварительно прочесть § 292, п. 2.

Наглядное пояснение теоремы даст черт. 328. Сумма S_n численно равна площади заштрихованной ступенчатой фигуры [основание левой ступеньки равно x_1-x_0, высота ее $KL=f(\xi_1)$; значит, площадь равна $f(\xi_1)\,(x_1-x_0)$ и т. д.].

Чем уже ступеньки, тем ближе площадь ступенчатой фигуры к площади «криволинейной трапеции» x_0ABx_{n+1}, так что предел S суммы S_n численно равен площади фигуры x_0ABx_{n+1}.



Черт. 328.

Сумму (1) часто обозначают сокращенно

$$\sum f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}). \qquad (2)$$

Здесь знак $\sum$ (прописная греческая буква «сигма», соответствующая русской букве «С») указывает, что выражение (2) есть сумма однотипных членов. Выражение $f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$ указывает закон образования членов: при $i=1$ получается первый член, при $i=2$ — второй и т. д. Употребляется также более подробная запись

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}). \qquad (2a)$$

Здесь отмечено, что первый член соответствует значению $i=1$, а последний — значению $i=n+1$.

Определение. Предел, к которому стремится сумма (1), когда наибольшая из длин всех частичных промежутков стремится к нулю, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$. Концы a, b данного промежутка (*промежутка интегрирования*) называются *пределами интеграла* — нижним (a) и верхним (b).

Определенный интеграл обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Эта запись читается: *интеграл от a до b эф от икс дэ икс.*

Значение определенного интеграла зависит от вида функции $f(x)$ и от значений верхнего и нижнего пределов. Аргумент функции можно обозначить любой буквой, например y, так что выражение

$$\int_a^b f(y)\,dy \tag{4}$$

представляет то же число, что (3).

Замечание. Верхний предел b может быть больше или меньше нижнего a. В первом случае

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b. \tag{5}$$

Во втором случае

$$a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n > b. \tag{6}$$

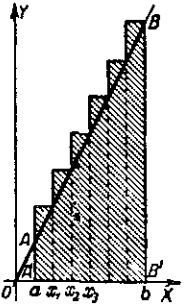
Дополнение к определению. В определении предполагается, что $a \neq b$. Но понятие определенного интеграла распространяют и на случай $a = b$; именно интеграл с равными пределами считается равным нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{7}$$

[это соглашение оправдано тем, что интеграл (3) стремится к нулю при сближении a и b, ср. черт. 327].

Пример. Найти $\int_a^b 2x\,dx$. Здесь

$$f(x) = 2x. \tag{8}$$



Черт. 329.

Решение. Разобьем промежуток (a, b) на равные части (черт. 329); тогда абсциссы

$$x_0 = a, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; x_{n+1} = b$$

образуют арифметическую прогрессию с разностью

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = \frac{b-a}{n+1}. \tag{9}$$

За точки $\xi_1, \xi_2, \ldots$ примем правые концы[1]) последо-

---

[1]) То есть ступеньки прилегают справа к ординатам прямой $y = 2x$.

вательных промежутков $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots$, так что

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \ldots, \quad \xi_n = x_n, \quad \xi_{n+1} = b;$$

$$f(\xi_1) = 2x_1, \; f(\xi_2) = 2x_2, \; \ldots, \; f(\xi_n) = 2x_n, \; f(\xi_{n+1}) = 2b. \qquad (10)$$

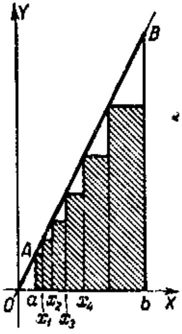
В силу (8) и (10) сумма (1) принимает вид

$$S_n = 2x_1(x_1 - x_0) + 2x_2(x_2 - x_1) + \ldots + 2x_n(x_n - x_{n-1}) + \\ + 2x_{n+1}(x_{n+1} - x_n) = 2\frac{b-a}{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}).$$

Суммируя арифметическую прогрессию, находим:

$$S_n = 2\frac{b-a}{n+1}\frac{(x_1 + x_{n+1})(n+1)}{2} = (b-a)(x_1 + b). \qquad (11)$$

При неограниченном увеличении числа равных промежутков длины их стремятся к нулю; при этом x_1 стремится к a. Поэтому



Черт. 330.

$$\lim S_n = (b - a)(a + b) = b^2 - a^2;$$

стало быть,

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2. \qquad (12)$$

Точно так же

$$\int_a^b 2y\,dy = b^2 - a^2,$$

$$\int_a^b 2t\,dt = b^2 - a^2$$

и т. д.

Величина $b^2 - a^2$ есть площадь S трапеции $A'ABB'$ (черт. 329); действительно,

$$S = \frac{1}{2}(A'A + B'B)A'B' = \frac{1}{2}(2a + 2b)(b - a) = b^2 - a^2.$$

Второй способ. Разобьем промежуток (a, b) на неравные части так, чтобы точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ образовали геометрическую прогрессию[1]) (черт. 330)

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \ldots, \quad x_n = aq^n, \quad x_{n+1} = b = aq^{n+1}. \qquad (13)$$

---

[1]) Это возможно, если оба предела a, b имеют одинаковый знак (ни один из них не должен равняться нулю). В предыдущем способе числа a и b могут быть любыми.

Из последнего равенства находим:

$$q^{n+1} = \frac{b}{a}. \tag{14}$$

За точки $\xi_1, \xi_2, \ldots$ примем левые концы[1]) последовательных промежутков (a, x_1) $(x_1, x_2), \ldots$, так что

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = x_1, \ldots, \quad \xi_n = x_{n-1}, \quad \xi_{n+1} = x_n.$$

Сумма (1) примет вид

$$S_n = 2x_0(x_1 - x_0) + 2x_1(x_2 - x_1) + \ldots + 2x_n(x_{n+1} - x_n) =$$
$$= 2a^2(q-1)[1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n}].$$

В квадратных скобках — геометрическая прогрессия со знаменателем q^2. Суммируя ее, находим:

$$S_n = 2a^2(q-1)\frac{q^{2(n+1)}-1}{q^2-1} = \frac{2a^2[(q^{n+1})^2-1]}{q+1}$$

или в силу (14)

$$S_n = \frac{2a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right]}{q+1} = \frac{2(b^2-a^2)}{q+1}. \tag{15}$$

При неограниченном увеличении числа n знаменатель q, как явствует из (14), стремится к единице:

$$\lim q = 1. \tag{16}$$

Длины всех частичных промежутков стремятся к нулю. В силу (15) и (16) имеем:

$$\lim S_n = b^2 - a^2,$$

т. е.

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2.$$

§ 315. Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов определенный интеграл сохраняет абсолютное значение, но меняет знак на обратный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1}$$

---

[1]) То есть ступеньки прилегают слева к ординатам прямой $y=2x$.

Вытекает из сопоставления сумм S_n, соответствующих обоим интегралам.

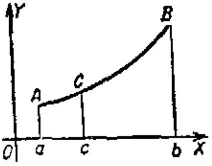
$$2. \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Это свойство поясняется черт. 331 (пл. $aABb$=пл. $aACc+$ + пл. $cCBb$), но оно имеет место и тогда, когда точка c лежит вне промежутка (a, b).

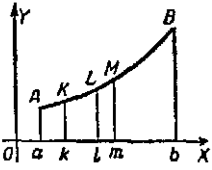
2а. Вместо одной добавочной точки c можно взять несколько; так, при трех точках k, l, m имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^k f(x)\,dx + \int\limits_k^l f(x)\,dx + \int\limits_l^m f(x)\,dx + \int\limits_m^b f(x)\,dx.$$

Порядок точек безразличен; практически важен случай, когда a, k, l, m, b взяты в порядке возрастания (черт. 332) или убывания.



Черт. 331.



Черт. 332.

3. Интеграл алгебраической суммы неизменного числа слагаемых равен алгебраической сумме интегралов отдельных слагаемых; так, при трех слагаемых

$$\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_3(x)\,dx. \qquad (3)$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b mf(x)\,dx = m\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (4)$$

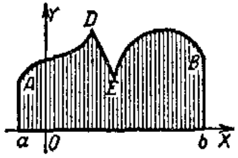
§ 316. Геометрическое истолкование определенного интеграла

Рассмотрим интеграл

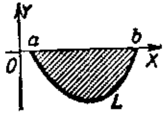
$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

у которого нижний предел меньше верхнего ($a < b$)[1].

Если при этом функция $f(x)$ положительна внутри промежутка (a, b) (черт. 333), то интеграл численно равен (§ 314) площади, покрываемой ординатами графика $y = f(x)$ ($aADEBb$ на черт. 333).



Черт. 333.



Черт. 334.

Если функция $f(x)$ отрицательна внутри (a, b) (черт. 334), то интеграл по абсолютному значению равен площади, покрываемой ординатами, но имеет отрицательное значение.

Пусть теперь $f(x)$ один или несколько раз меняет знак в промежутке (a, b) (черт. 335). Тогда интеграл равен

Черт. 335.

разности двух чисел, одно из которых (уменьшаемое) выражает площадь, покрытую положительными ординатами, а другое (вычитаемое) — площадь, покрытую отрицатель-

---

[1]) Случай $a > b$ сводится к рассматриваемому в силу § 315, п. 1.

ными ординатами (ср. § 315, п. 2а). Так, для случая, изображенного на черт. 335,

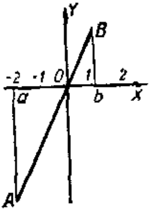
$$\int_a^b f(x)\,dx = (S_1+S_3+S_5)-(S_2+S_4).$$

Пример. Интеграл $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$ равен (§ 314, пример) $1^2-(-2)^2=-3$. Это число равно разности площадей (черт. 336)

$$ObB = \frac{1}{2}Ob\cdot bB = 1$$

и

$$OaA = \frac{1}{2}aO\cdot Aa = 4.$$



Черт. 336.

§ 317. Механическое истолкование определенного интеграла

1. Путь материальной точки. Пусть материальная точка движется в одном направлении со скоростью

$$v = f(t)$$

[t — продолжительность движения]. Требуется найти путь s, пройденный точкой с момента $t=T_1$ по момент $t=T_2$.

Если скорость постоянна, то

$$s = v(T_2-T_1).$$

Если же скорость меняется, то для разыскания s надо разбить промежуток времени на частичные промежутки

$$(T_1, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, T_2).$$

Пусть τ_1 — какой-либо момент промежутка (T_1, t_1), τ_2 — какой-либо момент промежутка (t_1, t_2) и т. д.

Величина $f(\tau_1)$ есть скорость в момент τ_1; произведение $f(\tau_1)(t_1-T_1)$ выражает приближенно путь, пройденный за первый промежуток времени. Точно так же $f(\tau_2)(t_2-t_1)$ приближенно выражает путь за второй промежуток и т. д. Сумма

$$s_n = f(\tau_1)(t_1-T_1)+f(\tau_2)(t_2-t_1)+\ldots+f(\tau_{n+1})(T_2-t_n)$$

выражает путь s тем точнее, чем меньше частичные промежутки. Предел суммы s_n, т. е. интеграл

$$\int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt,$$

дает точное значение пути s.

Пример. Скорость материальной точки растет пропорционально времени, протекшему от начального момента:

$$v = mt.$$

Найти путь, пройденный от начального момента до момента T.

Решение. Искомый путь выражается интегралом функции mt; нижний предел равен нулю, верхний равен T

$$s = \int^{T} mt\,dt = m\int_0^T t\,dt$$

(§ 315, п. 4). Мы знаем (§ 314, пример), что $\int_a^b 2t\,dt = b^2-a^2$. Значит (§ 315, п. 4), $\int_a^b t\,dt = \frac{b^2-a^2}{2}$. При $a=0$, $b=T$ имеем:

$$s = m\int_0^T t\,dt = \frac{1}{2}\,mT^2.$$

2. Работа силы. Если постоянная сила P действует на материальную точку, движущуюся по направлению силы, то работа A силы на участке (s_1, s_2) находится по формуле

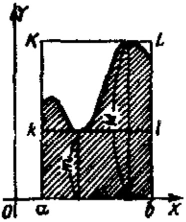
$$A = P\,(s_2 - s_1).$$

Если же сила P сохраняет направление движения, но величина ее меняется в зависимости от пути s, т. е. $P = f(s)$, то работа находится по формуле

$$A = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds.$$

§ 318. Оценка определенного интеграла

Теорема 1. Если m есть наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ в промежутке (a, b), то значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ заключено между $m(b-a)$ и $M(b-a)$. При $a < b$ имеем:



Черт. 337.

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \quad (1)$$

При $a > b$ знаки неравенства заменяются противоположными.

Геометрически: фигура, заштрихованная на черт. 337, по площади больше прямоугольника $ablk$ и меньше $abLK$.

Пример. Оценить интеграл $\int\limits_4^6 2x\,dx$.

Решение. Наименьшее значение функции $2x$ в промежутке $(4, 6)$ есть $m = 2\cdot 4 = 8$, наибольшее значение $M = 2\cdot 6 = 12$. Наконец, $b - a = 6 - 4 = 2$. Значит, интеграл содержится между $8\cdot 2 = 16$ и $12\cdot 2 = 24$;

$$16 < \int\limits_a^b 2x\,dx < 24.$$

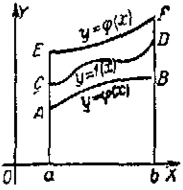
Точное его значение (§ 314, пример) равно 20.

Теорема 2. Если в каждой точке промежутка (a, b) соблюдаются неравенства

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x), \quad (2)$$

то

$$\int\limits_a^b \psi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \quad (3)$$



Черт. 338.

Геометрически (черт. 338) пл. $aABb <$ пл. $aCDb <$ пл. $aEFb$. Теорема 1 есть частный случай теоремы 2 ($\psi(x) = m$, $\varphi(x) = M$).

Замечание. Теорема 2 утверждает, что неравенства можно интегрировать. Дифференцировать же неравенства нельзя.

§ 318а. Неравенство Буняковского

Оценка интеграла по формуле (1) § 318 обычно очень груба. Существует ряд формул для более точной оценки; среди них важную роль играет неравенство Буняковского [1])

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx.$$

Пример. Оценить интеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Представим подинтегральную функцию в виде $1\cdot\sqrt{1+x^2}$, так что $f(x) = 1$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$. Неравенство Буняковского даст:

$$I^2 \leqslant \int_0^1 1^2\,dx \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 dx = \int_0^1 (1+x^2)\,dx = \frac{4}{3},$$

откуда

$$I \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} < 1{,}155.$$

Формула (1) § 318 дала бы ($M = \sqrt{2}$); $I \leqslant \sqrt{2} < 1{,}415$. Истинное значение интеграла (найденное по способу § 323) есть

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 1{,}147\ldots$$

§ 319. Теорема о среднем интегрального исчисления

Определенный интеграл [2]) равен произведению длины промежутка интегрирования (a, b) на значение подинтегральной функции в некоторой точке ξ промежутка (a, b):

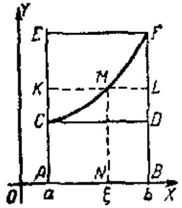
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{1}$$

---

[1]) Академик Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) — выдающийся русский математик, работавший преимущественно в области теории вероятностей и теории чисел.

[2]) При распространении понятия интеграла на случай разрывной функции (§ 328) теорема о среднем теряет силу.

Пояснение. Будем смещать прямую KL (черт. 339) от положения CD к положению EF. В начале движения площадь $AKLB$ меньше чем $\int_a^b f(x)\,dx$ (ср. § 318, теорема 1), в конце — больше. В некоторый промежуточный момент должно иметь место равенство пл. $AKLB = \int_a^b f(x)\,dx$. Основанием прямоугольника $AKLB$ служит $AB = b-a$, а высотой — ордината NM, соответствующая точке $N(\xi)$ промежутка AB. Стало быть



Черт. 339.

$$(b-a)\,f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание 1. Теорема о среднем устанавливает, что уравнение (1), где ξ рассматривается как неизвестное, имеет по меньшей мере один корень, заключенный между a и b.

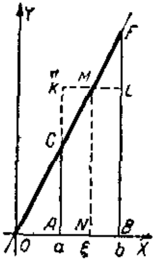
Пример. При $f(x) = 2x$ формула (1) принимает вид

$$\int_a^b 2x\,dx = (b-a)\,2\xi. \qquad (2)$$

Теорема утверждает, что ξ лежит между a и b. Действительно, интеграл равен b^2-a^2, и формула (2) дает:

$$\xi = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

т. е. ξ — *среднее арифметическое* [1] между a и b.



Черт. 340.

Замечание 2. Теорема о среднем дифференциального исчисления (§ 264) отличается от теоремы настоящего параграфа по существу только обозначениями. Обозначим подинтегральную функцию формулы (1) через $f'(x)$.

---

[1] Геометрическая формула (2) выражает известную теорему о площади трапеции ($ACFB$ на черт. 340; $AB = b-a$ есть высота, $NM = 2\xi$ — средняя линия).

Формула (1) примет вид

$$\int_a^b f'(x)\,dx = (b-a)\,f'(\xi).$$

Здесь левая часть равна $f(b)-f(a)$ (см. ниже § 322), и мы получаем формулу Лагранжа

$$f(b)-f(a) = (b-a)\,f'(\xi)$$

[в применении к функции $f(x)$, обладающей непрерывной производной].

§ 320. Определенный интеграл как функция верхнего предела

При неизменных пределах a, b интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от данной функции $f(x)$ имеет *определенное числовое значение*. Если же верхний (или нижний) предел способен принимать различные значения, то интеграл становится *функцией* от верхнего (или нижнего) предела. Вид ее зависит от вида подинтегральной функции $f(x)$ (а также от значения постоянного нижнего предела). О характере зависимости см. § 321, теорема 2.

Пример 1. Интеграл $\int_0^1 2t\,dt$ имеет числовое значение 1, интеграл $\int_0^2 2t\,dt$ – значение 4, интеграл $\int_0^3 2t\,dt$ – значение 9 и т. д. Стало быть, $\int_0^x 2t\,dt$ есть функция от x; она выражается формулой

$$\int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{1}$$

Замечание. В формуле (1) переменное интеграции и переменный верхний предел обозначены *разными буквами* (t и x), ибо эти переменные играют разную роль *в процессе интегрирования.* Именно, *сначала* мы вычисляем (§ 314) предел суммы

$$S_n = 2\tau_1(t_1 - 0) + 2\tau_2(t_2 - t_1) + \ldots + 2\tau_{n+1}(x - t_n),$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ взяты между 0 и x, а числа $\tau_1, \tau_2, \ldots$ принадлежат промежуткам $(0, t_1)$, $(t_1, t_2) \ldots$ В этом процессе x остается постоянным.

Затем x подвергается изменению, и теперь мы уже не имеем дела с переменной t.

Если вместо (1) написать:

$$\int_0^x 2x\,dx = x^2, \tag{2}$$

то упомянутое различие затушевывается.

Тем не менее часто пользуются записью (2) и вообще пишут:

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{3}$$

$\left[\text{а также } \int_a^t f(t)\,dt,\ \int_a^3 f(s)\,ds \text{ и т. п.}\right]$. Дело в том, что *после выполнения интегрирования* переменный предел имеет *тот же смысл* (геометрический, механический и т. д.), что и переменная интеграции (см. примеры 2 и 3).

Черт. 341.

Пример 2. Площадь S треугольника OPM (черт. 341) выражается интегралом $\int_0^a x\,dx$:

$$S = \int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}. \tag{4}$$

Пусть ордината PM подвижна: тогда интеграл (4) есть функция верхнего предела; в соответствии с этим напишем t вместо a:

$$S = \int_0^t x\,dx = \frac{t^2}{2}. \tag{5}$$

Запись (5) безупречна, но *неудобна, ибо* в формуле $S = \frac{t^2}{2}$ буква t представляет абсциссу, а последнюю мы обозначили через x. Поэтому часто предпочитают не вполне точную запись

$$S = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}. \tag{6}$$

Пример 3. Скорость v свободно падающего тела выражается формулой

$$v = gt. \tag{7}$$

Путь s, пройденный падающим телом за промежуток времени $(0, T)$, равен (§ 317, п. 1) интегралу $\int_0^T gt\,dt$:

$$s = \int_0^T gt\,dt = \frac{1}{2}gT^2. \tag{8}$$

Запись (8) безупречна, но в формулах (7) и (8) аргументы имеют различные обозначения, тогда как их физический смысл — один и тот же. Поэтому вместо (8) пишут:

$$s = \int_0^t gt\,dt = \frac{1}{2}gt^2.$$

§ 321. Дифференциал интеграла

Теорема 1. Дифференциал интеграла с переменным верхним пределом [1]) совпадает с подинтегральным выражением

$$d\int_\alpha^x f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{1}$$

▪ Формулу (1) точнее записать $d\int_\alpha^x f(t)\,dt = f(x)\,dx$ (см. § 320).

---

[1]) Интеграл с переменным верхним пределом x всегда является *дифференцируемой* функцией от x.

Пример.

$$d\int_0^x 2x\,dx = 2x\,dx. \tag{1a}$$

Проверим это равенство. Мы имеем (§ 320):

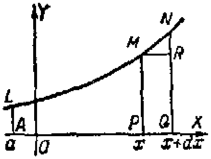
$$\int_0^x 2x\,dx = x^2.$$

Дифференцируя, получаем (1a).

Замечание. Из (1) получаем:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x), \tag{2}$$

т. е. *производная интеграла по верхнему пределу совпадает с подынтегральной функцией.* Это предложение можно высказать еще в такой форме.



Черт. 342.

Теорема 2. Интеграл с *переменным верхним пределом есть одна из первообразных* (§ 293) *подынтегральной функции.*

Пояснение формулы (1). Площадь $ALMP$ (черт. 342) выражается интегралом $\int_a^x f(x)\,dx$. Когда x возрастает на $dx = PQ$, площадь $ALMP$ получит приращение $PMNQ$. Это приращение разбивается на прямоугольник $PMRQ$ и криволинейный треугольник MNR. Площадь *прямоугольника равна* $PM \cdot PQ = f(x)\,dx$; *она пропорциональна* dx, а площадь треугольника MNR имеет высший порядок относительно dx (на черт. 342 она меньше чем $MR \cdot RN = dx\,\Delta y$). Значит (§ 230), подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ есть дифференциал интеграла $\int_a^x f(x)\,dx$.

Пояснение формулы (2). Если $f(t)$ — скорость точки в момент t, то $\int_a^t f(t)\,dt$ есть (§ 317, п. 1) путь s, пройденный точкой за время, отделяющее момент t от начального момента a.

$$s = \int_a^t f(t)\,dt. \tag{3}$$

Производная $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t f(t)\,dt$ есть скорость точки (§ 223).

Стало быть, $\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)\,dt = f(t)$.

§ 322. Интеграл дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница

Нижеследующая теорема сводит вычисление определенного интеграла к разысканию неопределенного интеграла (ср § 323).

Т е о р е м а. Интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен приращению функции $F(x)$ на промежутке интегрирования:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Иными словами: если $F(x)$ есть какая-либо первообразная подинтегральной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Формулу (2) у нас часто называют *формулой Ньютона — Лейбница* [1]).

П р и м е р 1. Имеем (§ 314):

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2. \tag{3}$$

[1]) Название справедливо лишь постольку, поскольку Ньютон и Лейбниц первые использовали связь дифференцирования с интегрированием для разыскания интегралов. Но формулы (2) у них нет (ни в буквенном, ни в словесном выражении). В геометрической форме теорема настоящего параграфа (равно как теорема I § 321) была установлена Барроу, учителем Ньютона.

Подинтегральное выражение есть дифференциал функции x^2 ($dx^2 = 2x\,dx$). При переходе от $x = a$ к $x = b$ функция x^2 получает приращение $b^2 - a^2$. Формула (3) выражает, что интеграл равен этому приращению.

Пример 2. Найти интеграл $\int\limits_a^b 3x^2\,dx$.

Решение. Заметив, что подинтегральное выражение есть дифференциал функции x^3, получаем по формуле (2):

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = \int\limits_a^b d(x^3) = b^3 - a^3. \tag{4}$$

Пояснение. Интеграл $\int\limits_a^b 3x^2\,dx$ равен (§ 314) пределу суммы

$$3x_0^2(x_1 - x_0) + 3x_1^2(x_2 - x_1) + \ldots + 3x_{n-1}^2(x_n - x_{n-1}) + \\ + 3x_n^2(x_{n+1} - x_n). \tag{5}$$

Первое слагаемое есть дифференциал функции x^3 для промежутка (x_0, x_1), второе — для промежутка (x_1, x_2) и т. д. Заменим каждый дифференциал соответствующим приращением. Получим сумму

$$\left(x_1^3 - x_0^3\right) + \left(x_2^3 - x_1^3\right) + \ldots + \left(x_n^3 - x_{n-1}^3\right) + \left(x_{n+1}^3 - x_n^3\right). \tag{6}$$

Раскроем скобки. Все члены, кроме $x_0^3 = a^3$ и $x_{n+1}^3 = b^3$, уничтожатся, так что сумма (6) в точности равна $b^3 - a^3$.

При переходе от (5) к (6) допущен ряд погрешностей, но каждая из них имеет высший порядок относительно соответствующего приращения аргумента. Поэтому, несмотря на накопление погрешностей, сумма последних бесконечно мала. Значит, выражение (5) при неограниченном возрастании числа его членов разнится от $b^3 - a^3$ на бесконечно малую величину. Иными словами, $b^3 - a^3$ есть предел суммы (5), т. е.

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = b^3 - a^3.$$

Таким же образом выводится общая формула (1).

Механическое истолкование. Пусть точка движется в одном направлении и пусть $F(t)$ — расстояние точки от иачальиого положеиия в момент t. Производная $\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$ есть (§ 223) скорость. Значит, интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ выражает (§ 317) путь s, пройденный с момента $t=a$ по момеит $t=b$:

$$s = \int\limits_a^b f(t)\,dt. \tag{7}$$

Но в момеит $t=a$ расстояиие от иачального пункта есть $F(a)$, в момент $t=b$ оно равно $F(b)$. Значит,

$$s = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получаем:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

§ 323. Вычислеиие определенного интеграла с помощью иеопределенного

Правило. Чтобы вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, достаточно найти неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$, подставить в иайденное выражеиие вместо x сначала верхний предел, затем иижний и вычесть вторую величину из первой.

Это правило основаио иа теореме § 322.

Замечание. Постояиное слагаемое неопределенного интеграла можно ие выписывать: оно все равно уничтожится при вычитаиии.

Пример 1. Найти $\int\limits_{-2}^{3} 3x^2\,dx$.

Решение. Находим неопределеииый интеграл

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Подставив $x=3$, находим $27+C$; при $x=-2$ получаем $-8+C$. Вычитая вторую величину из первой, находим:

$$\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx = (27+C)-(-8+C) = 27-(-8) = 35. \qquad (1)$$

Постоянное слагаемое C при вычитании уничтожилось.

Пример 2. Найти $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

Решение. Имеем: $\int \sin x\,dx = -\cos x$ (постоянное слагаемое опускаем). Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos\pi - \cos 0] = 2. \qquad (2)$$

Обозначение подстановки. Запись

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{или} \quad [F(x)]_a^b \qquad (3)$$

(читается: «$F(x)$ с двойной подстановкой от a до b») обозначает то же, что $F(b)-F(a)$. Например, вместо $-[\cos\pi - \cos 0]$ пишут $-\cos x\Big|_0^{\pi}$ или $[-\cos x]_0^{\pi}$.

Пример 3. Найти $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение.

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4a}.$$

Пример 4.

$$\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_3^5 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

§ 324. Определенное интегрирование по частям

Интегрирование по частям (§ 301) можно применять непосредственно к определенному интегралу, пользуясь формулой

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\,du. \qquad (1)$$

Применение формулы (1) выгоднее, чем предварительное вычисление неопределенного интеграла, особенно, когда интегрирование по частям выполняется повторно.

Пример 1. $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

Полагая

$$u = x, \quad dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right],$$

находим:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} x\,d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right] = -\frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{2(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}307.$$

Пример 2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$.

Имеем:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$$

Первое слагаемое обращается в нуль; получаем:

$$I = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§ 325. Способ подстановки в определенном интеграле

Правило. Для вычисления интеграла $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ можно ввести вспомогательную переменную z, связанную с x некоторой зависимостью. Подинтегральное выражение преобразуется, как при неопределенном интегрировании (§ 300), к виду $f_1(z)\,dz$. Сверх того, надо заменить пределы x_1, x_2 новыми пределами z_1, z_2 с таким расчетом, чтобы этим значениям переменной z соответствовали данные значения x_1, x_2 переменной x. Если это возможно, то имеем [1]):

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int\limits_{z_1}^{z_2} f_1(z)\,dz. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти

$$\int\limits_{5}^{13} \sqrt{2x-1}\,dx.$$

Решение. Введем вспомогательную переменную z, связанную с x зависимостью

$$z = 2x-1. \qquad (2)$$

Выражая x через z, получаем:

$$x = \frac{z+1}{2}. \qquad (3)$$

Подинтегральное выражение $\sqrt{2x-1}\,dx$ преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}}\,dz.$$

Пределы $x_1=5$, $x_2=13$ надо заменить новыми z_1, z_2 по формуле (2):

$$z_1 = 2x_1-1 = 9, \quad z_2 = 2x_2-1 = 25.$$

---

[1]) Предполагается: 1) что зависимость между x и z можно выразить формулой $x=\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ имеет непрерывную производную в промежутке (z_1, z_2); 2) что функция $f(x)$ непрерывна для всех значений, которые принимает x, когда z изменяется в промежутке (z_1, z_2).

Согласно (1) имеем:

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\, dx = \int_9^{25} \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} = 32\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти $\int\limits_{-a}^{+a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

Решение. Подстановка

$$x = a \sin t \tag{4}$$

приводит (§ 303, пример 1) подинтегральное выражение к виду

$$a^2 \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\, dt = \pm a^2 \cos^2 t\, dt. \tag{5}$$

Верхний знак берется, если t принадлежит первой или четвертой четверти, нижний — если второй или третьей.

Новые пределы t_1, t_2 надо выбрать так, чтобы

$$-a = a \sin t_1, \quad a = a \sin t_2.$$

Это возможно, и притом двояким образом. Можно взять:

$$t_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда t изменяется в пределах четвертой и первой четвертей, поэтому в (5) берем верхний знак; получаем:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Можно также взять:

$$t_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2},$$

но тогда в (5) берем нижний знак; получаем:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = -a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Если взять в (5) верхний знак, получим неверный результат $-\frac{\pi a^2}{2}$.

Замечание. Способ подстановки может привести к ошибке, если не соблюдено условие, высказанное в правиле, а именно, если нет таких значений z_1, z_2, которым соответствовали бы данные значения x_1, x_2 пределов интегрирования. С подобными ошибками мы встретимся в примере 3.

Пример 3. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad I_2 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(они отличаются друг от друга только значениями верхнего предела.)

Попробуем ввести вспомогательную функцию

$$x^2 = z. \tag{6}$$

При преобразовании подинтегрального выражения $\sqrt{1-x^2}\,dx$ сомножитель $\sqrt{1-x^2}$ заменяется выражением $\sqrt{1-z}$. Чтобы преобразовать сомножитель dx, выразим x через z; получим:

$$x = \pm\sqrt{z}. \tag{7}$$

Казалось бы, проще всего взять подстановку

$$x = +\sqrt{z}. \tag{8}$$

Однако тогда невозможно заменить в интегралах I_1 и I_2 нижний предел $x_1 = -1$ новым пределом z_1, которому соответствовало бы по формуле (8) значение $x = -1$. Возьмем поэтому подстановку

$$x = -\sqrt{z} \tag{9}$$

и попробуем применить ее сначала к интегралу I_1. Теперь значения пределов $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ соответствуют значениям $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{4}$. *Из (9) мы находим:*

$$dx = -\frac{dz}{2\sqrt{z}} \tag{10}$$

и по формуле (1) получаем:

$$I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz, \tag{11}$$

или, переставляя пределы,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz. \tag{12}$$

Вводим новую вспомогательную функцию

$$\sqrt{\frac{1-z}{z}} = t, \tag{13}$$

дающую новые пределы

$$t_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{3}, \quad t_2 = 0.$$

Соответствующая подстановка будет:

$$z = \frac{1}{1+t^2}, \quad dz = -\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}, \tag{14}$$

и мы получаем:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{0} t\left[-\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}\right] = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Как в примере 1 § 324, найдем:

$$I_1 = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}307.$$

Если вместо (9) применить подстановку (8), не обратив внимания на *нарушение условия, высказанного в правиле, то вместо* (12) *получим:* $-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz$ и для I_1 найдем неверное значение $(-0{,}307)$.

Что касается интеграла I_2, то для него непригодны ни подстановка (8), ни подстановка (9), ибо первая не дает нижнего предела, а вторая — верхнего. Если по ошибке применить, скажем, подстановку (8), то для I_2 получится: $\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz$, т. е. нуль. Это нелепо, так как подинтегральная функция $\sqrt{1-x^2}$ во всем промежутке интегрирования положительна.

Для вычисления интеграла I_2 можно его разбить на два слагаемых так:

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

К первому слагаемому применим подстановку (9), а ко второму — подстановку (8). Каждое из двух слагаемых примет вид

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz,$$

так что

$$I_2 = \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz. \qquad (15)$$

Этот интеграл — несобственный (§ 328), так как подинтегральная функция имеет разрыв в точке $z=0$. Однако и теперь можно применить подстановку (14) (ибо функция $z = \frac{1}{1+t^2}$ монотонна; см. § 328, замечание 3).

Найдем, что

$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Этот интеграл тоже несобственный (§ 327). Несмотря на это к нему можно применить (§ 327, замечание 1) интегрирование по частям, так что, поступая, как в примере 1 § 324, найдем

$$I_2 = -\frac{t}{2(1+t^2)}\Big|_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}.$$

Первое слагаемое равно нулю, и окончательно получим:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

§ 326. О несобственных интегралах

Понятие определенного интеграла было введено (§ 314) для конечного промежутка (a, b) и для непрерывной функции $f(x)$. Ряд конкретных задач (см. примеры §§ 327 и 328) приводит к расширению понятия интеграла на случаи бесконечных промежутков и разрывных функций. Для этого сверх предельного перехода § 314 выполняется еще один. Интегралы, получаемые двукратным переходом к пределу, называются *несобственными*; в противоположность несобственным интегралы, введенные в § 314, называются *собственными*. В § 327 рассмотрены несобственные интегралы *первого типа* (с одним или двумя бесконечными пределами), в § 328 — простейшие несобственные интегралы *второго типа* (от разрывной функции).

§ 327. Интегралы с бесконечными пределами

Определение 1. Если интеграл

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx \tag{1}$$

при $x' \to +\infty$ имеет конечный предел, то этот предел называется *интегралом функции $f(x)$ от a до бесконечности* и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Итак, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x' \to +\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если интеграл (1) при $x' \to +\infty$ имеет бесконечный предел[1]) или вовсе не имеет предела, то говорят, что *несобствен-*

---

[1]) Когда интеграл $\int_a^{x'} f(x)\,dx$ имеет при $x' \to +\infty$ бесконечный предел, говорят (*условно*), что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ имеет бесконечное значение, и пишут: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$.

ный интеграл (2) *расходится*. При наличии конечного предела интеграла (2) говорят, что несобственный интеграл (2) *сходится*.

Пример 1. Найти интеграл $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$.

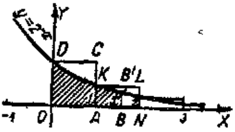
Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left(-2^{-x}\right)\Big|_0^{x'} = \frac{1}{\ln 2}\left(1-\frac{1}{2^{x'}}\right).$$

При $x' \to +\infty$ это выражение имеет пределом $\frac{1}{\ln 2}$.

Значит,

$$\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx = \lim_{x' \to +\infty} \int\limits_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4.$$



Черт. 343.

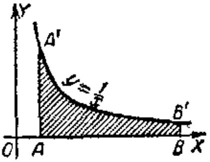
Геометрическое истолкование. Интеграл $\int\limits_0^{x'} 2^{-x}\,dx$ изображается площадью $OBB'D$ (черт. 343) под линией $y = 2^{-x}$. По мере удаления ординаты BB' площадь $OBB'D$ возрастает, но не безгранично. Она стремится к $\frac{1}{\ln 2}$. Говорят, что площадь *бесконечной полосы* под линией $y = 2^{-x}$ равна $\frac{1}{\ln 2}$.

Пояснение. Рассмотрим ступенчатую фигуру черт. 343. Ее первая ступень $OACD$ имеет площадь $OD \cdot OA = 1 \cdot 1 = 1$, вторая — площадь $AK \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, третья — площадь $\frac{1}{4}$ и т. д. С возрастанием числа ступеней общая их площадь стремится к 2 (сумма бесконечно убывающей прогрессии). Число 2 естественно считать мерой площади бесконечной ступенчатой полосы. Площадь бесконечной криволинейной полосы еще меньше.

Пример 2. Найти $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. Интеграл $\int\limits_{1}^{x'} \frac{dx}{x} = \ln x'$ имеет бесконечный предел при $x' \to +\infty$. Искомый несобственный интеграл расходится[1]).

Геометрически: площадь полосы $AA'B'B$ (черт. 344) под гиперболой $y = \frac{1}{x}$ неограниченно возрастает (бесконечная криволинейная полоса имеет бесконечную площадь).



Черт. 344.

Пример 3. На плоской поверхности закреплены два наэлектризованных шарика с положительными зарядами e_1, e_2 электростатических единиц. Расстояние между центрами R *см*. Шарик с зарядом e_2 освобожден и удаляется от e_1 под действием силы отталкивания $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ (r — переменное расстояние между центрами в сантиметрах, F — величина силы в динах).

Работа силы F на участке (R, r') выражается (в эргах) интегралом (§ 317):

$$\int\limits_{R}^{r'} \frac{e_1 e_2}{r^2}\, dr = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'}\right).$$

Несобственный интеграл

$$e_1 e_2 \int\limits_{R}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{r' \to \infty} \left[e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'}\right)\right] = \frac{e_1 e_2}{R}$$

выражает полный *запас работы* рассматриваемой системы. В физике эта величина называется *потенциалом*.

---

1) При этом он имеет бесконечное значение $\left(\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty\right)$. См. сноску на стр. 467.

Определение 2. *Интегралом функции* $f(x)$ *от* $-\infty$ *до* a называется предел интеграла $\int\limits_{x''}^{a} f(x)\,dx$ при $x'' \to -\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x'' \to -\infty} \int\limits_{x''}^{a} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Сходимость и расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ понимаются, как в определении 1.

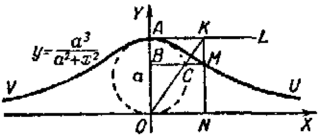
Определение 3. *Интегралом функции* $f(x)$ *от* $-\infty$ *до* $+\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5}$$

называется сумма

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Она не зависит от выбора a. Предполагается, что оба несобственных интеграла (6) сходятся.



Черт. 345.

Интеграл (5) выражает площадь полосы под линией $y = f(x)$, бесконечно простирающейся в обе стороны (линия VAU на черт. 345).

Пример 4. Найти площадь бесконечной полосы под линией $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ (*верзьера Аньези*, черт. 345; см. § 506).

Решение. Искомая площадь представляется интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2}. \tag{7}$$

Так как $\int_{0}^{x'} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = a^2 \operatorname{arctg} \frac{x'}{a}$, то

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = a^2 \lim_{x' \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x'}{a} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Аналогично вычисляется первое слагаемое, и получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = \pi a^2. \tag{8}$$

Замечание 1. Основная формула

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

в применении к сходящемуся интегралу $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ имеет вид

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a).$$

Символ $F(\infty)$ обозначает $\lim\limits_{x' \to \infty} F(x')$.

Аналогично применяется формула интегрирования по частям. Для вычисления несобственного интеграла $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ можно применять и способ подстановки, но при условии, что функция $x = \varphi(z)$ монотонна.

Замечание 2. Иной раз собственный интеграл выгодно преобразовать в несобственный. Так, для вычисления интеграла

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2} \tag{9}$$

лучше всего ввести вспомогательную функцию

$$\operatorname{tg} x = z. \tag{10}$$

Получим:

$$\int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^2} = -\frac{1}{3(1+z^3)}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Преобразуя интеграл (9) к виду (11), мы данный интеграл рассматриваем как предел интеграла

$$\int_0^{x'} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2} \quad \text{при} \quad x' \to \frac{\pi}{2}.$$

§ 328. Интеграл от функции, имеющей разрыв

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = b$, а в остальных точках промежутка (a, b) непрерывна.

Если интеграл

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx \tag{1}$$

имеет конечный предел, когда x' стремится к b (оставаясь меньше b), то этот предел называется *несобственным интегралом от a до b от функции $f(x)$* и обозначается так же, как одноименный собственный интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x' \to b-0} \int_a^{x'} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Формула (2) для собственных интегралов *доказывается*; для несобственных она *принимается за определение*.

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда $f(x)$ имеет разрыв только на конце $x = a$ промежутка (a, b).

Сходимость и расходимость несобственного интеграла понимаются, как в § 327.

Определение 2. Если $f(x)$ имеет разрыв только во внутренней точке c промежутка (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Предполагается, что в правой части оба несобственных интеграла сходятся.

Формула (3) для собственных интегралов **доказывается**; здесь же она служит **определением** несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Замечание 1. Определение 2 распространяется на случай, когда внутри промежутка (a, b) есть две, три и т. д. точки разрыва. Так, для двух точек c', c'' имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx + \int_{c''}^b f(x)\,dx. \qquad (3a)$$

Пример 1. Найти

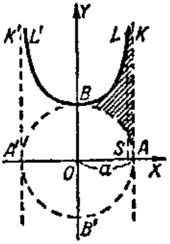
$$\int_0^a \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Данный интеграл — несобственный, ибо подынтегральная функция разрывна (обращается в бесконечность) при $x = a$. Интеграл сходится, ибо функция

$$\int_0^{x'} \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2 \arcsin\frac{x'}{a} \qquad (4)$$

стремится к пределу $\frac{\pi a^2}{2}$ при $x' \to a$. Стало быть,

$$\int_0^a \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi a^2}{2}. \qquad (5)$$



Черт. 346.

Геометрически: площадь бесконечной полосы $KAOBL$[1]) (т. е. предел площади $LSOB$ при стремлении точки S к A; черт. 346) равна площади полукруга $BOB'A$; значит, заштрихованная фигура, уходящая в бесконечность, равновелика сектору AOB'.

[1]) Радиус a окружности O есть средняя пропорциональная между ординатой линии $L'BL$ и соответствующей ординатой полуокружности $A'BA$; это позволяет легко построить линию $L'BL$.

Пример 2. Найти $\int\limits_{-a}^{+a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx$.

Интеграл — несобственный, ибо подинтегральная функция внутри промежутка $(-a, +a)$ обращается в бесконечность при $x=0$. Согласно определению 2 имеем:

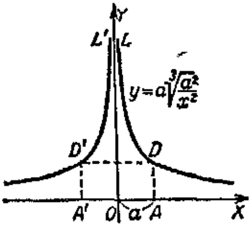
$$\int\limits_{-a}^{+a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx = a^{\frac{5}{3}}\int\limits_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + a^{\frac{5}{3}}\int\limits_{0}^{a} x^{-\frac{2}{3}}\,dx. \qquad (6)$$

По определению 1

$$\int\limits_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{x'\to 0}\int\limits_{-a}^{x'} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{x'\to 0} 3\left(a^{\frac{1}{3}} + x'^{\frac{1}{3}}\right) = 3a^{\frac{1}{3}}.$$

Аналогично для второго слагаемого формулы (6). Окончательно получаем:

$$\int\limits_{-a}^{+a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx = 6a^2.$$

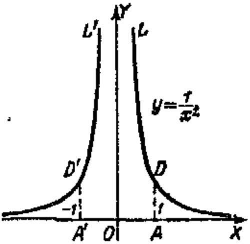


Черт. 347.

Геометрически: площадь бесконечной полосы $ADLL'D'A'$ (черт. 347) втрое больше площади прямоугольника $A'ADD'$ (так что «бесконечный шпиль» $DLL'D'$ равновелик квадрату, построенному на DD').

Пример 3. В выражении $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$ подинтегральная функция разрывна в точке $x=0$. При этом несобственные интегралы $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ расходятся (ибо интегралы $\int\limits_{-1}^{x'}\frac{dx}{x^2} = -1-\frac{1}{x'}$ и $\int\limits_{x''}^{1}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x''}-1$

имеют бесконечные пределы при $x' \to -0$ и $x'' \to +0$). Стало быть, данное выражение не представляет никакого несобственного интеграла (в смысле определения 2). Бесконечная полоса $ADLL'D'A'$ (черт. 348) под линией $y = \frac{1}{x^2}$ имеет бесконечную площадь.



Черт. 348.

Замечание 2. Применив основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

к выражению $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$, мы получили бы отрицательное число -2; этот нелепый результат (подинтегральная функция $\frac{1}{x^2}$ всюду положительна!) получается потому, что выражение $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ не имеет смысла. Если же несобственные интегралы

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

входящие в (3), сходятся, то для несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ формула (7) всегда *верна*.

Замечание 3. Относительно интегрирования по частям и способа подстановки можно повторить сказанное в замечании 1 § 327.

§ 329. О приближенном вычислении интеграла

На практике часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции (§ 309) или выражаются очень сложно. Нередко подинтегральная функция задается таблицей или графиком. В этих случаях интегралы находят приближенными методами.

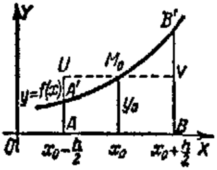
Исторически первым был разработанный Ньютоном *метод бесконечных рядов* (см. § 270). Он применяется и поныне (на более строгой основе; см. ниже § 402).

Другой метод, называемый часто *методом механических квадратур* [1]), состоит в замене подинтегральной функции $y = f(x)$ таким многочленом n-й степени

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

который при данных значениях $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_n$ (число их равно $n+1$) имеет те же значения, что и функция $f(x)$.

Геометрически: линия $y = f(x)$ заменяется «параболой n-й степени» $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, проходящей через $n+1$ точек данной линии.



Черт. 349.

Приближенное вычисление значений функции $f(x)$ по нескольким данным ее значениям $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ называется *интерполяцией* [2]), а многочлен (1) — *интерполяционным многочленом*.

Интегрируя интерполяционный многочлен, получаем приближенно интеграл функции $f(x)$.

Пример 1. При одном данном значении $y_0 = f(x_0)$ получаем интерполяционный многочлен нулевой степени

$$P(x) = y_0. \tag{2}$$

Линия $y = f(x)$ заменяется горизонтальной прямой UV (черт. 349), проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$. Приближенное значение интеграла

$$\int\limits_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} y_0\,dx = y_0h \tag{3}$$

дает площадь прямоугольника $AUVB$ (вместо площади криволинейной трапеции $AA'B'B$).

Пример 2. При двух данных значениях $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0+h)$ получаем интерполяционный многочлен первой степени

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0). \tag{4}$$

---

[1]) Он основан тоже на идеях Ньютона и был впервые развит Тейлором, Симпсоном и др. Новейшие работы принадлежат советским ученым (В. П. Ветчинкину и Ф. М. Коган).

[2]) Этот латинский термин означает «вставление внутрь».

Он представляет прямую M_0M_1 (черт. 350), проходящую через точки $M_0(x_0,\ y_0)$, $M_1(x_0+h;\ y_1)$. Соответствующее приближенное значение интеграла

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h} P(x)\,dx = \frac{1}{2}(y_0+y_1)\,h \tag{5}$$

дает площадь прямолинейной трапеции $x_0M_0M_1x_1$.

Пример 3. При трех данных значениях

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_0+h);\ y_2 = f(x_0+2h)$$

получаем интерполяционный многочлен второй степени

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0) + \\ + \frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}(x-x_0)[x-(x_0+h)]. \tag{6}$$

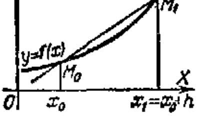
В справедливости формулы (6) убедимся, подставив последовательно

$$x = x_0,\ x = x_0+h,\ x = x_0+2h.$$

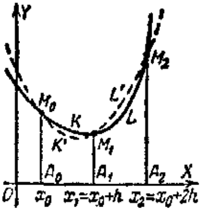
Получим:

$$P(x_0) = y_0,\quad P(x_0+h) = y_1,\quad P(x_0+2h) = y_2.$$

Если расположить $P(x)$ по степеням x, формула усложнится. Выражения $y_1-y_0\ (=\Delta y_0)$ и $y_2-2y_1+y_0\ (=\Delta^2 y_0)$ суть первая и вторая разности (§ 258) функции $f(x)$.



Черт. 350.



Черт. 351.

Многочлен (6) представляет параболу с вертикальной осью (черт. 351), проходящую через три точки: $M_0(x_0;\ y_0)$, $M_1(x_0+h;\ y_1)$, $M_2(x_0+2h;\ y_2)$.

Приближенное значение[1])

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx = \frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)\,h \qquad (7)$$

дает площадь *параболической трапеции* $A_0M_0K'M_1L'M_2A_2$ (вместо площади криволинейной трапеции $A_0M_0KM_1LM_2A_2$).

Формулы (4), (6) обобщаются на произвольное число равноотстоящих значений x. Для четырех значений имеем:

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{h}(x-x_0) + \frac{y_2-2y_1+y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)[x-(x_0+h)] +$$
$$+\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{3!\,h^3}(x-x_0)[x-(x_0+h)][x-(x_0+2h)],$$

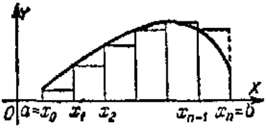
или сокращенно:

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta x_0^2}(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!\,\Delta x_0^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

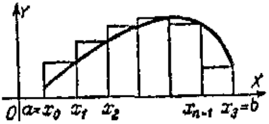
Соответствующая общая формула называется *интерполяционной формулой Ньютона*. Нестрогим способом Тейлор получил из нее разложение функции $f(x)$ в степенной ряд (он положил $x_1=x_0$, $x_2=x_0$ и т. д. и заменил разности Δx_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ и т. д. дифференциалами dx_0, dy_0, d^2y_0 и т. д.) (ср. § 270).

§ 330. Формулы прямоугольников

Промежуток интегрирования (a, b) делим точками x_1,



Черт. 352.



Черт. 353.

$x_2, \ldots, x_{n-1}$ (черт. 352, 353) на n равных частей; длина каждой

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

---

[1]) Вычисление интеграла $\int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx$ облегчается, если ввести вспомогательную переменную $x-(x_0+h)=z$.

Для единообразия полагаем $a = x_0$, $b = x_n$. Через $x_{1/2}$, $x_{3/2}$, $x_{5/2}$, ... (черт. 354) обозначаем середины участков (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ... Полагаем

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \ldots;$$
$$f(x_{1/2}) = y_{1/2}, \quad f(x_{3/2}) = y_{3/2}, \quad f(x_{5/2}) = y_{5/2}, \ldots$$

Формулами прямоугольников называются следующие приближенные равенства:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}], \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \ldots + y_n], \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}]. \tag{3}$$

Выражения (1), (2), (3) дают площади ступенчатых фигур черт. 352, 353, 354 (ср. § 329, пример 1).

Черт. 354.

В большинстве случаев при данном n формула (3) точнее, чем (1) и (2). С увеличением n точность формул (1), (2), (3) неограниченно возрастает.

Замечание. Предельная погрешность формулы (3) составляет:

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2, \tag{4}$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке (a, b). Для эмпирических функций вместо M_2 берут наибольшее значение величины $\left|\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right|$.

Пример. Вычислим по формуле (3) на 10 ординат ($n = 10$) приближенное значение интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\left(= \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right).$$

$$\begin{array}{llll}
x_{1/2} = 0{,}05 & & y_{1/2} = 0{,}9975 & \\
x_{3/2} = 0{,}15 & & y_{3/2} = 0{,}9780 & \\
x_{5/2} = 0{,}25 & & y_{5/2} = 0{,}9412 & \\
x_{7/2} = 0{,}35 & & y_{7/2} = 0{,}8909 & \\
x_{9/2} = 0{,}45 & & y_{9/2} = 0{,}8316 & \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10} \\
x_{11/2} = 0{,}55 & & y_{11/2} = 0{,}7678 & \\
x_{13/2} = 0{,}65 & & y_{13/2} = 0{,}7029 & \\
x_{15/2} = 0{,}75 & & y_{15/2} = 0{,}6400 & \\
x_{17/2} = 0{,}85 & & y_{17/2} = 0{,}5806 & \\
x_{19/2} = 0{,}95 & & y_{19/2} = 0{,}5256 & \\
\hline
& & \text{сумма } \sum y = 7{,}8561 &
\end{array}$$

$$I \approx \frac{b-a}{n}\sum y = \underline{\underline{0{,}78561}}.$$

Погрешность составляет примерно 0,0002.

Имеем: $f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. Наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке (0, 1) равно 2 (оно достигается при $x=0$). Подставляя в (4) $n=10$, $M_2=2$, найдем предельную погрешность 0,00085. Значит, нет смысла вычислять $y_{1/2}$, $y_{3/2}$ и т. д. больше чем на четыре знака.

По формулам (1) и (2) (значения $y_0, y_1, y_2, \ldots$ приведены в § 331) мы получим: $I \approx 0{,}8099$ и $I \approx 0{,}7599$, т. е. погрешность примерно в 50 раз больше.

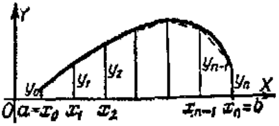
§ 331. Формула трапеций

При обозначениях § 330 имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]. \qquad (1)$$

Это — *формула трапеций*. Она дает общую площадь трапеций, показанных на черт. 355 (ср. § 329, пример 2).

Замечание. Предельная погрешность формулы (1) составляет $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ в промежутке (a, b) (ср. § 330, замечание).



Черт. 355.

Пример. Вычислим интеграл $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $(=0{,}785398\ldots)$ по формуле трапеций на 11 ординат ($n=10$). Имеем:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0{,}1 & y_1 = 0{,}9901 \\
x_2 = 0{,}2 & y_2 = 0{,}9615 \\
x_3 = 0{,}3 & y_3 = 0{,}9174 \\
x_4 = 0{,}4 & y_4 = 0{,}8621 \\
x_5 = 0{,}5 & y_5 = 0{,}8000 \\
x_6 = 0{,}6 & y_6 = 0{,}7353 \\
x_7 = 0{,}7 & y_7 = 0{,}6711 \\
x_8 = 0{,}8 & y_8 = 0{,}6098 \\
x_9 = 0{,}9 & y_9 = 0{,}5525 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}0000 \\
x_{10} = 1{,}0 & y_{10} = 0{,}5000 \\
 & y_0+y_{10} = 1{,}5000
\end{array}
$$

$$I \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2}+7{,}0998\right)=\underline{\underline{0{,}78498.}}$$

сумма $\sum\limits_{i=1}^{i=9} y_i = 7{,}0998.$

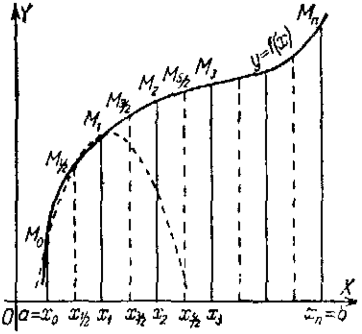
Погрешность составляет примерно 0,0004, как и по формуле (3) § 330. Но там мы нашли избыточное, а здесь — недостаточное приближение.

§ 332. Формула Симпсона (параболических трапеций)

При обозначениях § 330 имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\right.$$
$$\left.+(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+2\,(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2})\right]. \qquad (1)$$

Это — *формула Симпсона*. Она дает общую площадь криволинейных трапеций $x_0M_0M_{1/2}M_1x_1$, $x_1M_1M_{3/2}M_2x_2$, ... (черт. 356), у которых вместо дуг $M_0M_{1/2}M_1$, $M_1M_{3/2}M_2$, ... данной линии $y = f(x)$ взяты одноименные дуги парабол с вертикальными осями. На черт. 356 показана лишь парабола $M_0M_{1/2}M_1$ (ср. § 329, пример 3).



Черт. 356.

При одном и том же числе ординат формула Симпсона в большинстве случаев много точнее, чем формулы прямоугольников (§ 330) и трапеций (§ 331).

Замечание. Предельная погрешность формулы (1) составляет

$$\frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4}\,M_4. \tag{2}$$

Здесь M_4 — наибольшее значение $|f^{IV}(x)|$ в промежутке (a, b).

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\ (= 0{,}785398\ldots)$$

по формуле Симпсона на пять ординат

$$\left(n = 2,\ \ \frac{b-a}{3n} = \frac{1}{6}\right).$$

$x_0 = 0$	$\frac{1}{2}y_0 = 0{,}50000$
$x_{1/2} = 0{,}25$	$2y_{1/2} = 1{,}88235$
$x_1 = 0{,}50$	$y_1 = 0{,}80000$
$x_{3/2} = 0{,}75$	$2y_{3/2} = 1{,}28000$
$x_2 = 1{,}00$	$\frac{1}{2}y_2 = 0{,}25000$
	сумма 4,71235

$$I \approx \frac{1}{6}\cdot 4{,}71235 = \underline{0{,}78539}.$$

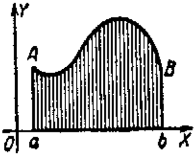
Погрешность составляет примерно 0,00001, т. е. в 40 раз меньше, чем в примерах §§ 330, 331, хотя там число ординат было вдвое больше.

Полезно сопоставить формулу Симпсона с формулой трапеций. В первой имеется лишнее слагаемое $2(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots)$, которое примерно вдвое больше, чем сумма остальных членов. Значит, выражение в квадратных скобках формулы Симпсона примерно втрое больше, чем соответствующее выражение в формуле трапеций. Сообразно с этим множитель $\frac{b-a}{3n}$ втрое меньше множителя $\frac{b-a}{n}$.

§ 333. Площади фигур, отнесенных к прямоугольным координатам

Площадь криволинейной трапеции ($aABb$ на черт. 357), расположенной над осью OX, выражается (§ 316) интегралом

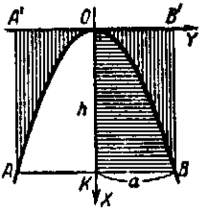
$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$



Черт. 357.

Для трапеции, лежащей под осью OX,

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1')$$



Черт. 358.

Фигуры другой формы разбивают на трапеции (или дополняют до трапеции) и находят площадь, как сумму (или разность) площадей трапеций. Вычисление облегчается подходящим выбором прямоугольной системы.

Пример 1. Найти площадь параболического сегмента AOB (черт. 358) по основанию $AB=2a$ и высоте $KO=h$.

Выберем оси, как на черт. 358. Разобьем сегмент AOB на равные криволинейные трапеции OKB и OKA:

$$\text{пл. } OKB = \int_0^h y\,dx. \qquad (2)$$

Координаты x, y связаны уравнением

$$y^2 = 2px. \qquad (3)$$

Параметр p определяется из условия, что парабола проходит через точку $B\ (h;\ a)$:

$$a^2 = 2ph. \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим:

$$y = \frac{a}{\sqrt{h}} \sqrt{x}. \tag{5}$$

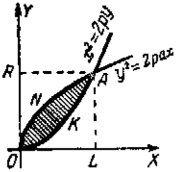
Подставляя в (2), получаем:

$$\text{пл. } OKB = \frac{a}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} ah,$$

$$\text{пл. } AOB = 2\,\text{пл. } OKB = \frac{2}{3}(2a)\,h,$$

т. е. *площадь параболического сегмента составляет* $\frac{2}{3}$ *площади прямоугольника* $ABB'A'$, *имеющего то же основание и ту же высоту.*

Другой способ. Дополняем сегмент AOB до прямоугольника $AA'B'B$. Площадь дополняющей трапеции равна



Черт. 359.

$$\int_{-a}^{+a} x\,dy \text{ или в силу (5)}$$

$$\frac{h}{a^2} \int_{-a}^{+a} y^2\, dy = \frac{1}{3} \cdot 2ah.$$

Значит,

$$\text{пл. } AOB = 2ah - \frac{1}{3} \cdot 2ah = \frac{2}{3} \cdot 2ah.$$

Пример 2. Найти площадь S фигуры, заключенной между параболами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$ (черт. 359).

Площадь S есть разность площадей $ONAL$ и $OKAL$. Параболы пересекаются в точках $O\ (0;\ 0)$ и $A\ (2p;\ 2p)$. Имеем:

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\, dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\, dx = \frac{4}{3} p^2 = \frac{(2p)^2}{3},$$

т. е. S составляет треть площади квадрата[1]) $OLAR$.

---

[1]) Опираясь на результат примера 1, можно найти S элементарным путем.

Пример 3. Площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$S = 2\int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \pi ab.$$

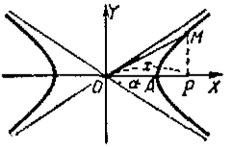
Пример 4. Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (черт. 360):

$$\text{пл. } AMP = \int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx =$$

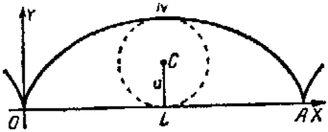
$$= \frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} =$$

$$= \frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

$$\text{пл. } OAM = \text{пл. } OPM - \text{пл. } AMP = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$



Черт. 360.



Черт. 361.

Пример 5. Циклоида (черт. 361):

$$x = a(t-\sin t), \qquad y = a(1-\cos t),$$

$$\text{пл. } ONALO = \int_0^{2\pi} y\,dx = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi a^2,$$

т. е. *площадь циклоиды втрое больше площади производящего круга.*

§ 334. Схема применения определенного интеграла

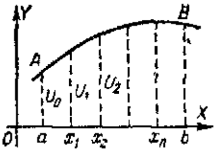
Определенным интегралом можно выразить многообразные геометрические и физические величины (см. §§ 335–338). При этом применяется следующая единообразная схема.

1) Искомая величина U ставится в соответствие с промежутком (a, b) изменения некоторого аргумента.

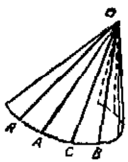
Так, чтобы выразить интегралом площадь $aABb$ под линией AB (черт. 362), мы ставим ее в соответствие с промежутком (a, b) изменения абсциссы x.

2) Промежуток (a, b) разбивается на участки (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) (в дальнейшем число участков будет стремиться к бесконечности, а длины их — к нулю).

Пусть искомая величина U распадается на части U_0, U_1, U_2, ... (черт. 362), в сумме дающие U.



Черт. 362.



Черт. 363.

Величины, обладающие этим свойством, называются *аддитивными*. Бывают и неаддитивные величины. Так, угол между образующими конической поверхности — неаддитивная величина. Угол AOB (черт. 363) можно поставить в соответствие с промежутком (a, b), где $a = \smile{RA}$ и $b = \smile{RB}$ — дуги направляющей, отсчитываемые от какой-либо начальной точки R. Но если разбить (a, b) на участки (a, c) и (c, b), то соответствующие углы AOC и COB в сумме не дают угла AOB.

Аддитивную величину можно выразить интегралом, неаддитивную — нельзя.

3) В качестве типичного представителя частей U_0, U_1, ... берется одна из них U_i; она выражается (исходя из условий вопроса) приближенной формулой вида

$$U_i \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i), \tag{1}$$

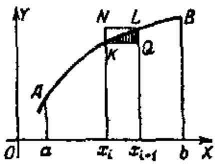
причем погрешность должна иметь высший порядок относительно $x_{i+1} - x_i$.

Выражение $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ или сокращенно

$$f(x)\,\Delta x \tag{2}$$

называется *элементом* величины U.

Элементом площади $aABb$ (черт. 364) является площадь прямоугольника x_iKQx_{i+1}; погрешность формулы (1) есть площадь треугольника KQL, заштрихованного на чертеже; она имеет высший порядок относительно $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$ (площадь KQL меньше площади $KNLQ = KQ\cdot KN = \Delta x_i\Delta y_i$, а последняя имеет высший порядок относительно Δx_i).



Черт. 364.

4) Из приближенного равенства (1) вытекает *точное* равенство

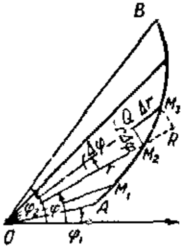
$$U=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Пояснение. С увеличением числа n погрешность суммы

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ \dots\ +f(x_n)(x_{n+1}-x_n) \qquad (4)$$

(несмотря на накопление ошибок) стремится к нулю, так как погрешности отдельных слагаемых убывают быстрее, чем возрастает число слагаемых. Поэтому U есть предел суммы (4), т. е.

$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$



Черт. 365.

§ 335. Площади фигур, отнесенных к полярным координатам

Площадь S сектора AOB, ограниченного линией AB и лучами OA и OB (черт. 365), выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi, \qquad (1)$$

где r — полярный радиус переменной точки M линии AB, φ — ее полярный угол.

Пояснение. Схема § 334 применяется здесь следующим образом.

1) Площадь AOB ставим в соответствие с промежутком (φ_1, φ_2) изменения полярного угла.

2) Промежуток (φ_1, φ_2) разбиваем на части, при этом сектор AOB распадается на секторы вида AOM_1, M_1OM_2 и т. д.; их площади в сумме дают площадь AOB.

3) В качестве типичного представителя секторов AOM_1, M_1OM_2 и т. д. берем один из них (M_2OM_3 на черт. 365). Заменяем его круговым сектором M_2OQ; площадь последнего

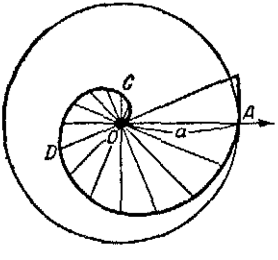
$$\frac{1}{2}OM_2\cdot M_2Q=\frac{1}{2}r\cdot r\,\Delta\varphi=\frac{1}{2}r^2\,\Delta\varphi$$

есть элемент площади AOB. Погрешность приближенной формулы

$$\text{пл. } M_2OM_3\approx\frac{1}{2}r^2\,\Delta\varphi \qquad (2)$$

имеет высший порядок относительно $\Delta\varphi$.

Погрешность равна площади криволинейного треугольника M_2QM_3, а последняя меньше пл. $QM_2RM_3=\frac{1}{2}(OM_3^2-OM_2^2)\Delta\varphi\approx r\Delta r\Delta\varphi$.



Черт. 366.

4) Из приближенного равенства (2) вытекает формула (1).

Пример. Найти площадь фигуры $OCDA$ (черт. 366), ограниченной первым завитком архимедовой спирали (§ 75) и отрезком $OA=a$ (*шаг спирали*).

Выбрав полярную систему, как на черт. 366, имеем:

$$r=\frac{a}{2\pi}\varphi.$$

Началу завитка O и концу A соответствуют значения

$$\varphi_1=0,\qquad \varphi_2=2\pi.$$

По формуле (1)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,d\varphi=\frac{a^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{1}{3}\pi a^2, \qquad (3)$$

т. е. *площадь первого завитка втрое меньше площади круга, имеющего радиусом шаг спирали*. Этот результат найден Архимедом [1]).

---

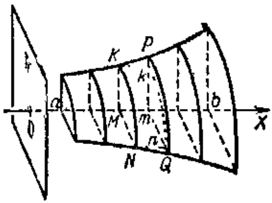
[1]) Хотя Архимед в явной форме не вводил ни понятия интеграла, ни понятия предела, но его метод по существу совпадает с методом интегрального исчисления.

§ 336. Объем тела по поперечным сечениям

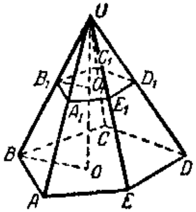
Рассмотрим тело произвольной формы (черт. 367). Пусть известны площади $F(x)$ всех его сечений, параллельных плоскости R (x — расстояние сечения от плоскости R). Тогда объем тела

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx. \tag{1}$$

Пояснение. Разобьем тело на параллельные слои; тело $NMKQmP$ — типичный представитель этих слоев.



Черт. 367.



Черт. 368.

Строим цилиндр $NMKnmk$. Его объем, равный $F(x)\,\Delta x$, есть элемент объема V. Отсюда вытекает формула (1) (ср. § 334 и § 335, пояснение).

Пример 1. Найти объем V пирамиды $UABCDE$ (черт. 368) по площади основания S и высоте $UO = H$.

Решение. Площадь $F(x)$ сечения $A_1B_1C_1D_1E_1$ находим из пропорции

$$F(x) : S = UO_1^2 : UO^2 = x^2 : H^2.$$

Согласно формуле (1)

$$V = \int_0^H F(x)\,dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{1}{3}SH. \tag{2}$$

Эта формула известна из элементарной геометрии, но там вывод много сложнее.

Пример 2. Найти объем эллипсоида (§ 173) с осями $2a$, $2b$, $2c$.

Решение. Сечение $KLK'L'$ (черт. 369), параллельное главному эллипсу $BCB'C'$ и отстоящее от него на расстояние $h=OM$, есть (§ 173) эллипс с полуосями

$$b' = MK = b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c' = ML = c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}.$$

Площадь $F(h)$ сечения равна (§ 333, пример 3)

$$F(h) = \pi b'c' = \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right).$$

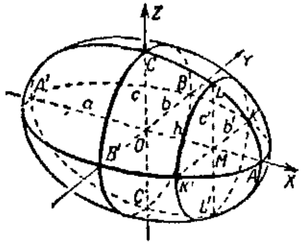
По формуле (1)

$$V = \int_{-a}^{+a} F(h)\,dh = 2\int_0^a \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right) dh = \frac{4}{3}\pi abc. \qquad (3)$$

Конус с эллиптическим основанием $BCB'C'$ и высотой $OA=a$ имеет объем

$$V_1 = \frac{1}{3} Sa$$

(выводится, как в примере 1), т. е. $V_1 = \frac{1}{3}\pi abc$. Значит, *эллипсоид по объему вчетверо больше конуса, имеющего основанием одно из главных сечений, а вершиной — противоположную вершину эллипсоида.* Этот результат найден Архимедом (для эллипсоида вращения).



Черт. 369.

Когда эллипсоид становится шаром ($a=b=c$), получаем известную формулу $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

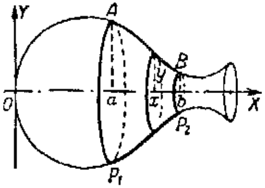
§ 337. Объем тела вращения

Объем V тела (черт. 370), ограниченного поверхностью вращения и двумя плоскостями P_1, P_2, перпендикулярными к оси вращения OX, выражается формулой

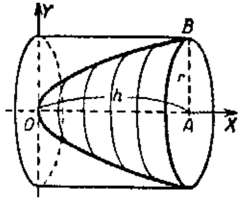
$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx, \qquad (1)$$

где $y=f(x)$ — ордината меридиана AB,

Замечание. Величина πy^2 есть площадь поперечного (кругового) сечения (ср. § 336).



Черт. 370.



Черт. 371.

Пример. Найти объем сегмента параболоида вращения (черт. 371) по радиусу основания $AB=r$ и высоте $OA=h$.

Решение. Как в § 333 (пример 1), находим, что меридиан (парабола) представляется уравнением

$$y^2 = \frac{r^2x}{h}.$$

По формуле (1)

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2x}{h}\,dx = \frac{1}{2}\pi r^2 h,$$

т. е. *сегмент параболоида составляет по объему половину цилиндра с тем же основанием и той же высотой.* Этот результат найден Архимедом.

§ 338. Длина дуги плоской линии

Длина s дуги AB плоской линии выражается (в прямоугольных координатах) формулой

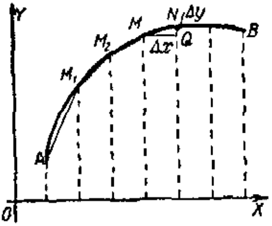
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt, \tag{1}$$

где t — какой-либо параметр, через который выражены текущие координаты x, y $(t_2 > t_1)$.

Если параметр еще не выбран, то формулу (1) удобнее записать так:

$$s = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (2)$$

Обозначения (A), (B) указывают, что в качестве пределов интегрирования должны быть взяты такие значения параметра, которые соответствуют концам дуги AB.



Черт. 372.

В частности, за параметр *часто удобно принять абсциссу* x. Тогда имеем:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (3)$$

Пояснение. Бесконечно малая дуга $\overset{\frown}{MN}$ эквивалентна хорде MN (черт. 372). С другой стороны,

$$MN = \sqrt{MQ^2 + QN^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Стало быть,

$$\overset{\frown}{MN} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Значит, выражение $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (оно пропорционально приращению Δt аргумента t) есть элемент (дифференциал) дуги AB. Согласно п. 4 схемы § 334 мы получаем формулу (2).

Разыскание длины дуги называют *спрямлением* дуги.

Пример. Найти длину дуги одной ветви циклоиды (§ 253) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение.

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} =$$

$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|, \qquad (4)$$

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a. \qquad (5)$$

Длина одной ветви циклоиды равна учетверенному диаметру производящего круга.

Если вычислить общую длину двух ветвей циклоиды по формуле $s=\int\limits_0^{4\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$, получим нуль. Ошибка вызвана тем, что в промежутке $(2\pi, 4\pi)$ имеем:

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| = -\sin\frac{t}{2}\left(\text{а не} +\sin\frac{t}{2}\right).$$

Замечание. Когда мы промеряем длину кривой тропинки шагами или длину нанесенной на карту извилистой реки с помощью масштаба, мы по существу исходим из убеждения об эквивалентности дуги и хорды. Таким образом, это свойство подсказывается повседневным опытом. Но если мы не хотим принимать это свойство за аксиому, а желаем доказать математически, то нам надо исходить из какого-либо определения длины дуги. Это понятие обычно определяют так.

Определение. *Длина дуги плоской или пространственной линии есть предел, к которому стремится периметр ломаной линии, вписанной в дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длины звеньев стремятся к нулю.*

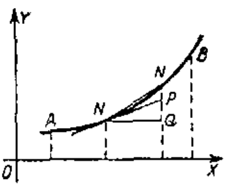
Исходя из этого определения, можно доказать, что $\breve{MN} \approx MN$. Из него же непосредственно выводится и формула (1), так что схема § 334 как будто вовсе не используется. Но по существу эта схема «спрятана» в самом определении.

Длину дуги можно определять и иначе, — например как предел описанной ломаной линии. Это определение равносильно предыдущему.

§ 339. Дифференциал дуги

Дифференциал длины дуги (короче: *дифференциал дуги*) выражается (§ 338, пояснение) формулой

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (1)$$



Черт. 373.

Если за аргумент принять x, *то* (черт. 373)

$$dx = MQ, \qquad dy = QP,$$
$$ds = \sqrt{MQ^2+QP^2} = MP,$$

т. е. дифференциал дуги выражает длину отрезка касательной от точки касания до пересечения с приращенной ординатой, Пример. Дифференциал дуги циклоиды равен (ср. пример § 338)

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$
$$= 2a\sin\frac{t}{2}\,dt \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

§ 340. Длина дуги и ее дифференциал в полярных координатах

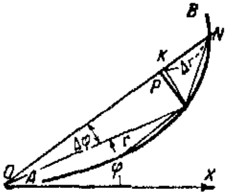
Длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ (черт. 374) выражается через полярные координаты r, φ интегралом

$$s = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}. \tag{1}$$

Дифференциал дуги выражается формулой

$$ds = \sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}. \tag{2}$$

Пояснение. Из точки O, как из центра, проведем (черт. 374) окружность радиуса $OM = r$. Ее дуга $\overset{\frown}{MK}(=r\Delta\varphi)$, отрезок $KN(=\Delta r)$ и дуга $\overset{\frown}{MN}$ $(=\Delta s)$ линии AB составляют криволинейный треугольник с прямым углом при вершине K. Хотя для такого треугольника теорема Пифагора не соблюдается в точности, однако при бесконечной малости дуги $\overset{\frown}{MN}$ квадрат «гипотенузы» эквивалентен сумме квадратов «катетов»:



Черт. 374.

$$\overset{\frown}{MN} \approx \sqrt{KN^2+\overset{\frown}{KM}{}^2},$$

т. е.

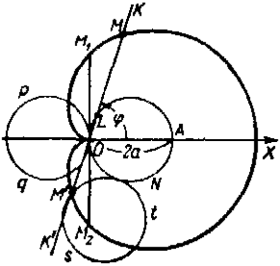
$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta r^2+r^2\Delta\varphi^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}.$$

Стало быть, выражение $\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}$ есть элемент (дифференциал) дуги s.

Замечание. Формулу (2) настоящего параграфа можно получить из (2) § 338 подстановкой

$$dx = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$dy = d(r\sin\varphi) = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi.$$

Пример. Из точки O на окружности радиуса a проводится луч OK (черт. 375), из точки L, где прямая OK вторично встречает окружность, откладывается отрезок $LM = 2a$ по направлению луча OK[1]). Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется *кардиоидой*[2]). Найти ее длину.



Черт. 375.

Решение. Выберем полярную систему, как на черт. 375. Имеем.

$$\left.\begin{aligned} OL &= OA\cos\varphi = 2a\cos\varphi, \\ r &= OL + LM = 2a(\cos\varphi + 1). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Когда φ пробегает промежуток $(-\pi, +\pi)$, кардиоида описывается полностью. Длина ее согласно (1) есть

$$s = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16a. \qquad (4)$$

Замечание. Кардиоиду можно получить как траекторию точки окружности Opq (черт. 375), катящейся без скольжения по окружности $ONAL$ того же радиуса.

---

1) Когда прямая касается окружности в точке O, то отрезки, равные $2a$, откладываются от O в обе стороны ($OM_1 = OM_2 = 2a$).

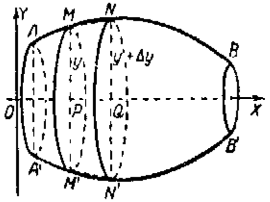
2) В переводе «сердцеобразная». Подробнее см. § 508.

Из (4) видно, что *длина кардиоиды равна восьмикратному диаметру производящего круга.*

Кардиоиду можно описать, изменяя φ от нуля до 2π. Но, если вычислить ее длину по формуле $s = 4a \int\limits_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$, получим нуль. Источник ошибки указан в § 338 (мелкий шрифт).

§ 341. Площадь поверхности вращения

Площадь S поверхности, образованной вращением дуги $\smile{AB}$ около оси OX, выражается интегралом



Черт. 376.

$$S = \int\limits_{(A)}^{(B)} 2\pi y\,ds, \qquad (1)$$

где y — ордината меридиана AB, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ — дифференциал его дуги (§ 339), (A) и (B) — крайние значения параметра, через который выражены координаты.

Пояснение. Разбиваем поверхность $ABB'A'$ (черт. 376) на параллельные пояса и каждый пояс $MNN'M'$ заменяем боковой поверхностью усеченного конуса с теми же основаниями. Площади этих поверхностей эквивалентны. Поэтому

$$\text{пл. } MNN'M' \approx \pi(PM + QN)MN. \qquad (2)$$

Так как $PM + QN = 2y + \Delta y$, $MN \approx \overset{\frown}{MN} = \Delta s$, то

$$\text{пл. } MNN'M' \approx \pi(2y + \Delta y)\,\Delta s \approx 2\pi y\,\Delta s. \qquad (3)$$

Отсюда вытекает формула (1).

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды около ее основания.

Решение. Имеем (§§ 338, 339):

$$ds = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi a\,(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Для сравнения возьмем площадь осевого сечения (т. е. двойную площадь циклоиды) $6\pi a^2$ (§ 333). Площадь поверхности вращения превышает ее в $3\frac{5}{9}$ раза.

Замечание. Чтобы доказать эквивалентность площади пояса $MNN'M'$ и площади боковой поверхности усеченного конуса, надо определить понятие «площадь кривой поверхности». Такое определение дано в § 459. Ввиду его сложности часто вводится следующее частное определение (согласующееся с общим).

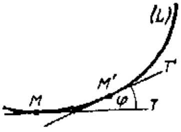
Площадь поверхности вращения есть предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением ломаной линии, вписанной в меридиан, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длины звеньев стремятся к нулю.

Из этого определения можно непосредственно вывести формулу (1) (ср. § 338, замечание 1).

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛИНИЯХ

§ 342. Кривизна

Пусть при переходе от точки M линии L к точке M' (черт. 377) касательная, направленная в сторону движения, переходя из положения MT в положение $M'T'$, поворачивается на угол ω[1]). Отношение $\frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}}$ угла ω к длине дуги $\overset{\frown}{MM'}$ характеризует искривленность линии L на участке MM' и называется *средней кривизной* дуги MM'. Угол ω принято измерять в радианах.



Черт. 377.

Средняя кривизна любого отрезка прямой линии (ее касательная совпадает с самой прямой) равна нулю, средняя кривизна любой дуги окружности радиуса R равна $\frac{1}{R}$.

Размерность средней кривизны обратна размерности длины, т. е. при изменении масштаба числовая мера кривизны меняется обратно пропорционально числовой мере длины отрезков.

Определение. *Кривизной* линии L в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{MM'}$, когда точка M' стремится к M. Кривизна обозначается буквой K:

$$K = \lim_{\overset{\frown}{MM'} \to 0} \frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}}. \qquad (1)$$

Кривизна характеризует искривленность линии в рассматриваемой точке. Кривизна прямой всюду равна нулю,

---

[1]) ω — греческая буква «омега» (строчная).

кривизна окружности радиуса R всюду равна $\frac{1}{R}$. Для всякой иной линии кривизна меняется от точки к точке. В отдельных точках она может равняться нулю; такие точки называются *точками спрямления*. Вблизи точки спрямления кривая походит на прямую.

Замечание. Кривизну (если она не равна нулю) мы считаем величиной положительной. Кривизне плоской линии можно приписать знак, пространственной — нельзя (см. § 364).

§ 343. Центр, радиус и круг кривизны плоской линии

Пусть точка M' (черт. 378), двигаясь по плоской линии L, стремится к неподвижной точке M, где кривизна K не равна нулю. Тогда точка C', где неподвижная нормаль MN *пересекается с нормалью* $M'N'$, стремится к точке C, отстоящей от M на расстояние $MC = \frac{1}{K}$ [1]). При этом луч MC направлен в сторону вогнутости линии L.

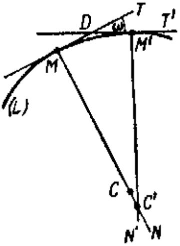
Отрезок MC называется *радиусом кривизны*, точка C — *центром кривизны* линии L (для точки M).

Радиус кривизны обозначается R или греческой буквой ρ («ро»). Величины R и K взаимно обратны, т. е.

$$R = \frac{1}{K} \tag{1}$$

и

$$K = \frac{1}{R}. \tag{2}$$



Черт. 378.

Радиус кривизны окружности равен ее радиусу, центр кривизны совпадает с ее центром.

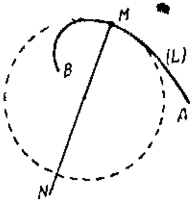
---

[1]) В треугольнике $MC'M'$ (черт. 378) угол C' равен углу ω (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), $\angle C'M'M = 90° - \lambda$, где угол $\lambda = \angle MM'D$ бесконечно мал (он меньше, чем ω). По теореме синусов $MC' = \frac{\sin(90° - \lambda)}{\sin\omega} MM' = \cos\lambda \frac{MM'}{\sin\omega}$. Переходим к пределу, учитывая, что $MM' \approx \overset{\frown}{MM'}$, $\sin\omega \approx \omega$ и $\cos\lambda \to 1$. Получаем:

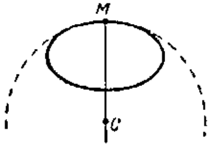
$$MC = \lim \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\omega} = 1 : \lim \frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}} = 1 : K.$$

Окружность, описанная из центра кривизны C (черт. 379) радиусом $R = MC$, называется *соприкасающейся окружностью* или *кругом кривизны* линии L (для точки M).

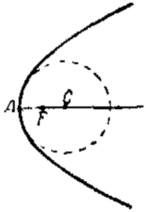
В направлении возрастания радиуса кривизны (на черт. 379 – вправо от M) линия L располагается вне круга кривизны, в направлении убывания (на черт. 379 – влево от M) – внутри круга кривизны. Поэтому, как правило,



Черт. 379.



Черт. 380.



Черт. 381.

круг кривизны, касаясь линии L, в то же время пересекает ее.

В исключительных случаях, когда радиус кривизны в точке M имеет экстремум, линия L по обе стороны точки M располагается внутри круга кривизны (при максимуме, черт. 380) или вне его (при минимуме, черт. 381). Первый случай имеет место, например, для конца малой оси эллипса, второй – для конца большой его оси.

Замечание. Если в точке M кривизна линии L равна нулю, то точка пересечения нормалей MN и $M'N'$ неограниченно удаляется от M, когда точка M' стремится к M. В соответствии с этим говорят, что в точке спрямления радиус кривизны бесконечен, и пишут $R = \infty$.

§ 344. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии [1]

Кривизна линии $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

[1] Соответствующие формулы для пространственной линии даны в § 363.

радиус кривизны — по формуле

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \tag{2}$$

координаты центра кривизны C — по формулам

$$x_C = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3}$$

Если $y'' = 0$, то кривизна равна нулю, радиус кривизны бесконечен и центра кривизны нет. Так всегда бывает, например, в точках перегиба (ср. § 283).

Формулы (1)—(3) заменяются симметричными формулами, если линию задать параметрическими уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. Тогда

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \tag{I}$$

$$R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}, \tag{II}$$

$$x_C = x - \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}y', \quad y_C = y + \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}x'. \tag{III}$$

Штрихи обозначают дифференцирование по параметру t. Формулы (1)—(3) получаются из (I)—(III), если положить $x = t$ (тогда $x' = 1$ и $x'' = 0$). Если же положить $y = t$ (тогда $y' = 1$, $y'' = 0$), т. е. если уравнение линии взять в виде $x = f(y)$, то вместо (1)—(3) получим следующие формулы:

$$K = \frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}, \tag{1a}$$

$$R = \frac{(1+x'^2)^{3/2}}{|x''|}, \tag{2a}$$

$$x_C = x + \frac{1+x'^2}{x''}, \quad y_C = y - \frac{x'(1+x'^2)}{x''}. \tag{3a}$$

* Существование производных x', y', x'', y'' в точке A данной линии обеспечивает существование кривизны в этой точке. Обратное предложение неверно: бывает и так, что при наличии кривизны в точке A производные x', y', x'', y'' (одна или несколько) не существуют. Тогда формулы (I)—(III) непригодны, и это свидетельствует о неудачном выборе параметра. См. пример 1 (мелкий шрифт).

Пример 1. Найти кривизну, радиус и центр кривизны C в вершине $A(0;\ 0)$ параболы $y^2 = 2px$ (черт. 381).

Решение. Проще всего принять за аргумент ординату y; из данного уравнения находим

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x' = \frac{y}{p}, \quad x'' = \frac{1}{p}. \tag{4}$$

В вершине параболы имеем

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{1}{p}. \tag{5}$$

По формулам (1a) – (3a) находим

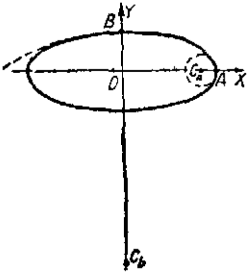
$$K = \frac{1}{p}, \quad R = p, \quad x_C = p, \quad y_C = 0. \tag{6}$$

Радиус кривизны в вершине параболы равен ее параметру, т. е. фокус F делит пополам отрезок AC.

Если принять за аргумент абсциссу x параболы $y^2 = 2px$, то вместо (4) получим (см. § 250)

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}. \tag{7}$$

В вершине параболы ($x = 0$, $y = 0$) производные y', y'' не существуют, так что формулы (1) – (3) использовать непосредственно нельзя. Однако для всех остальных точек параболы формулы (1) – (3) годятся, и после подстановки (7) они преобразуются так:



Черт. 382.

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}, \\ R &= \frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$x_C = x + \frac{y^2}{p} + p \; (= 3x + p),$$

$$y_C = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{9}$$

Если сюда подставить $x = 0$, $y = 0$, то снова получим значения (6). Смысл этой выкладки состоит в том, что мы нашли пределы, к которым стремятся величины K, R, x_C, y_C, когда точка параболы стремится к вершине последней.

Пример 2. Найти радиус и центр кривизны в вершинах эллипса с полуосями a, b (черт. 382).

Решение. Проще всего воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса (§ 252)

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Из них находим:

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t;$$
$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t.$$

По формулам (II) и (III) получаем:

$$R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{(a^2-b^2)\cos^3 t}{a}, \\ y_C &= -\frac{(a^2-b^2)\sin^3 t}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В вершине $A(a;\ 0)$, где $t = 0$, имеем:

$$R_a = \frac{b^2}{a}, \quad x_C = \frac{a^2-b^2}{a}, \quad y_C = 0 \tag{12}$$

В вершине $B(0;\ b)$, где $t = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$R_b = \frac{a^2}{b}, \quad x_C = 0, \quad y_C = -\frac{a^2-b^2}{b}. \tag{13}$$

Замечание. Составив уравнение касательной к эллипсу (§ 252)

$$b\cos t\cdot X + a\sin t\cdot Y - ab = 0,$$

найдем, что расстояние ее от центра (§ 28) равно

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}.$$

Сопоставив с (10), находим:

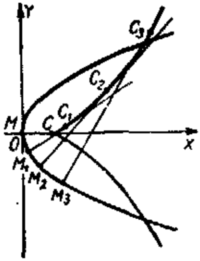
$$R = \frac{a^2b^2}{d^3},$$

т. е. *радиус кривизны эллипса обратно пропорционален кубу расстояния от центра до касательной* в соответствующей точке. В частности, из (12) и (13) находим:

$$R_a : R_b = b^3 : a^3,$$

§ 345. Эволюта плоской линии

Геометрическое место L' центров кривизны плоской линии L называют *эволютой* [1]) линии L. Формулы (III), (3) и (3а) § 344, дающие координаты x_C, y_C центра кривизны, вместе с тем являются параметрическими уравнениями эволюты [в формулах (3) и (3а) роль параметра играют соответственно x и y]. Исключив параметр, получим уравнение, связывающее координаты эволюты.



Черт. 383.

П р и м е р 1. Найти эволюту параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Примем за параметр ординату y. Подставив в формулы (3а) § 344 выражения $x' = \frac{y}{p}$, $x'' = \frac{1}{p}$, получим

$$x_C = \frac{y^2}{2p} + \frac{p^2+y^2}{p} = \frac{3}{2}\frac{y^2}{p} + p, \qquad (2)$$

$$y_C = y - \frac{y(p^2+y^2)}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}. \qquad (3)$$

Это — параметрические уравнения эволюты (роль параметра играет y). Чтобы исключить y, представим систему (2) — (3) в виде

$$\frac{2}{3}p(x_C - p) = y^2, \quad p^2 y_C = -y^3.$$

Обе части первого уравнения возведем в куб, а второго — в квадрат. Приравняв левые части, получим уравнение эволюты

$$27py_C^2 = 8(x_C - p)^3.$$

Эволюта есть полукубическая парабола (черт. 383).

П р и м е р 2. Найти эволюту циклоиды.

Р е ш е н и е. Из параметрических уравнений циклоиды (§ 253)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (4)$$

находим по формулам (III) § 344:

$$x_C = a(t + \sin t), \quad y_C = -a(1 - \cos t). \qquad (5)$$

---

[1]) «Эволюта» означает «развернутая». Происхождение названия выясняется в § 347.

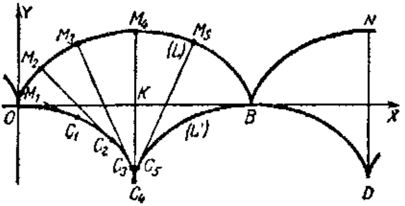
Сходство уравнений (4) и (5) не случайно; если ввести новый параметр t' с помощью соотношения

$$t = t' + \pi, \tag{6}$$

то уравнения (5) преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \pi a + a(t' - \sin t'), \\ y_0 &= -2a + a(1 - \cos t'). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

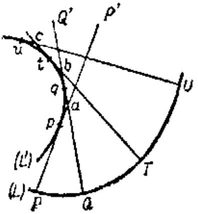
Значит, *эволюта L' циклоиды L* (черт. 384) *есть циклоида, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль*



Черт. 384.

основания OB на половину основания и опущенная под основание на расстояние KC_4, равное высоте.

Из (6) видно, что повороты производящих кругов в соответственных точках обеих циклоид разнятся на 180°; в частности, вершине одной из циклоид соответствует точка смыкания ветвей у другой.



Черт. 385.

§ 346. Свойства эволюты плоской линии

Свойство 1. Нормаль линии L касается ее эволюты L' в соответствующем центре кривизны.

Пример 1. Нормаль M_3C_3 циклоиды L (черт. 384) касается циклоиды L' в центре кривизны C_3 первой циклоиды.

Пояснение. На нормалях PP', QQ' линии L (черт. 385) возьмем центры кривизны p, q. Пусть точка P неподвижна, а Q к ней стремится. Тогда точка q описывает дугу qp эволюты L' и стремится к p. Точка a, где неподвижная нормаль пересекается с подвижной, тоже стремится к p (в силу определения центра кривизны). В треугольнике pqa угол p меньше внешнего угла $\angle PaQ = \omega$ и потому бесконечно мал. Значит, секущая qp стремится к совпадению с PP', т. е. PP' — касательная к эволюте; точка касания — центр кривизны p, соответствующий точке P.

Свойство 2. Пусть радиус кривизны R линии L возрастает при движении от точки P к точке U (черт. 385). Тогда длина дуги pu эволюты L' равна приращению радиуса кривизны линии L:

$$\breve{pu} = R_U - R_P.$$

Пример 2. У циклоиды L (черт. 384) радиус кривизны в точке O равен нулю; он возрастает на дуге OM_4 и в точке M_4 равен $M_4C_4 = 4a$ (см. пример 1). По свойству 2, длина дуги OC_4 циклоиды L' равна $4a - 0 = 4a$ (ср. § 345, пример 2).

Пояснение. Разобьем дугу pu эволюты L' на части pq, q, и т. д.; число их будет потом стремиться к бесконечности. Положим, что все дуги pq, qt, ... — одинакового порядка малости. Того же порядка будут соответствующие дуги PQ, QT, ... линии L. Разности же $Pa - Qa$, $Tb - Qb$ и т. д. будут высшего порядка. Так как

$$pa + aq = (Pa - Pp) + (Qq - Qa) = Qq - Pp + (Pa - Qa)$$

и аналогично для ломаных qbt, tcu, , то периметр ломаной $pqtu$ отличается от величины

$$(Qq - Pp) + (Tt - Qq) + (Uu - Tt) + \ldots = Uu - Pp$$

на бесконечно малую величину (получающуюся от накопления бесконечно малых высшего порядка).

Значит, длина дуги pu эволюты, являющаяся пределом длины описанной ломаной, равна $Uu - Pp$.

Замечание. Если между концами дуги линии L есть точки с экстремальным радиусом кривизны, то свойство 2 нарушается. Так, в точках M_3 и M_5 (черт. 384) циклоиды L радиусы кривизны одинаковы, тогда как длина дуги $C_3C_4C_5$, конечно, не равна нулю. Свойство 2 нарушено потому, что в точке M_4 радиус кривизны имеет максимум. Дуга $\breve{C_3C_4}$ равна $M_4C_4 - M_3C_3$, дуга $\breve{C_4C_5}$ тоже равна $M_4C_4 - M_3C_3$ (а не $M_3C_3 - M_4C_4$).

§ 347. Развертка (эвольвента) плоской линии

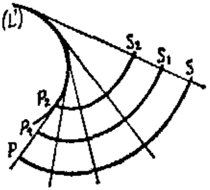
Плоскую линию L можно получить из ее эволюты L' следующим механическим построением.

Натянем на эволюту L' гибкую и нерастяжимую нить, которая, сходя с эволюты в точке p (черт. 385), имела бы свободный конец в точке P линии L. Если теперь сматывать нить с эволюты, то свободный конец опишет линию L.

Пояснение. Натянутая нить все время остается касательной к L'. Когда она будет сходить с эволюты в точке q, ее свободная часть возрастет на длину дуги $\smile{pq}$, т. е. (§ 346, свойство 2) на $Qq-Pp$. Свободная часть станет равной $Pp+(Qq-Pp)=Qq$ и конец нити совпадет с точкой Q.

Это построение приводит к следующему геометрическому определению.

Определение. На данной линии L' (черт. 385) выбираем направление возрастания дуг (любое из двух возможных, например от u к p); по этому направлению откладываем на касательных отрезки ($uU, tT, Qq, \ldots$), длины которых убывают настолько же, насколько возрастает длина дуги. Геометрическое место L концов этих отрезков называется *разверткой* (*эвольвентой*) данной линии.



Черт. 386.

Всякая плоская линия L' имеет бесчисленное множество разверток (PS, P_1S_1, P_2S_2 на черт. 386). Для каждой из них линия L' является эволютой.

Развертки линии L' являются *ортогональными траекториями* ее касательных (т. е. пересекают все касательные под прямым углом; ср. § 346, свойство 1).

О развертке пространственной линии см. § 362, замечание 2.

§ 348. Параметрическое задание пространственной линии

Линия в пространстве, рассматриваемая как пересечение поверхностей, представляется системой двух уравнений, связывающих x, y, z (см. § 170).

Линия в пространстве, рассматриваемая как след движущейся точки, представляется системой трех уравнений:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{1}$$

выражающих координаты точки через *параметр* t (в механике за параметр часто принимают время). Уравнения (1) называются *параметрическими уравнениями* пространственной линии (ср. § 251).

За параметр часто принимают одну из координат, например x. Тогда уравнения линии имеют вид

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \tag{2}$$

(первое из уравнений (1) обращается в тождество $x = x$).

Уравнениями (2) нельзя представить линию, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси OX (у такой линии все точки имеют одну и ту же абсциссу).

Если уравнение какой-либо поверхности после подстановки выражений (1) обращается в тождество, то линия (1) лежит на этой поверхности.

Всякую линию можно представить параметрически бесчисленными способами. Если известна одна система параметрических уравнений, то любую другую получим, заменив t некоторой функцией нового параметра t'.

Проекция линии (1) на плоскость $z = c$ (в частности, на координатную плоскость XOY) представляется уравнениями

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = c. \tag{3}$$

Уравнение $z = c$ часто опускают, подразумевая его. Аналогично для проекций на плоскости $x = a$ и $y = b$.

Пример. Параметрические уравнения

$$x = -2+t, \quad y = 3+2t, \quad z = 1-2t \tag{1a}$$

представляют прямую линию.

Если за параметр принять x, то та же прямая представится уравнениями

$$x = 2x+7, \quad z = -2x-3. \tag{2a}$$

Прямая (1a) лежит на поверхности

$$z-\frac{1}{2} = \frac{2x^2}{7}-\frac{y^2}{14} \tag{4}$$

(гиперболический параболоид), ибо равенство (4) станет тождеством, когда в него подставим выражения (1a).

Прямая (1a) лежит также на плоскости

$$y+z-4 = 0. \tag{5}$$

Значит, прямая (1a) принадлежит пересечению поверхностей (4) и (5).

Отсюда не следует, что поверхности (4) и (5) пересекаются *только* в точках прямой (1a). Плоскость (5) пересекает параболоид (4) по двум прямолинейным образующим (§ 180), одна из них есть прямая (1a).

Взяв выражение $t = 2+\frac{1}{2}t'$ параметра t через новый параметр t', получим другие параметрические уравнения той же прямой:

$$x = \frac{1}{2}t', \quad y = 7+t', \quad z = -3-t'. \tag{1б}$$

Проекция прямой (1а) на плоскость XOY представляется параметрическими уравнениями

$$x = -2+t, \quad y = 3+2t \tag{3a}$$

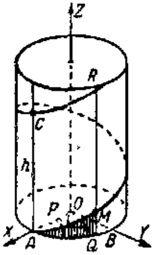
(подразумевается уравнение $z = 0$). Уравнение той же проекции получим из (1б) в виде

$$x = \frac{1}{2}t', \quad y = 7+t' \tag{3б}$$

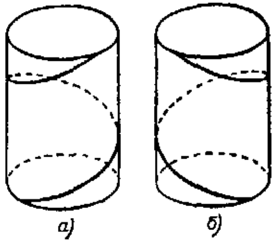
и т. д. Исключив параметр, получим в обоих случаях $y = 2x+7$.

§ 349. Винтовая линия

Пусть точка M (черт. 387) равномерно движется по образующей QR круглого цилиндра, а сама образующая равномерно вращается по поверхности цилиндра. Тогда точка M описывает кривую AMC, называемую *винтовой линией*. *Радиусом* винтовой линии называют радиус a цилиндра, на который нанесена винтовая линия.



Черт. 387.



Черт. 388.

Если наблюдать движение точки M со стороны основания, к которому она движется, то вращение образующей будет либо положительным (против стрелки часов), либо отрицательным (по стрелке)[1]. В первом случае винтовая линия называется *правой* (черт. 388, *а*), во втором — *левой* (черт. 388, *б*).

---

[1]) Если точка M будет двигаться по винтовой линии в обратном направлении, то и наблюдать ее мы будем со стороны другого основания, но и образующая будет вращаться в обратную сторону. Стало быть, положительное вращение останется положительным, а отрицательное — отрицательным.

Прямолинейный путь $AC = h$ (черт. 387), проходимый точкой M по образующей за время полного оборота последней, называется *шагом* винтовой линии. Шаг правой винтовой линии считается положительным, левой — отрицательным.

Правую и левую винтовые линии (одного и того же радиуса и с одним и тем же абсолютным значением шага) совместить нельзя. Они зеркально симметричны.

Замечание. Если развернуть цилиндрическую поверхность на плоскость, то окружность AQB (черт. 387) превратится в прямую линию, перпендикулярную к образующим. Так как отрезок QM пропорционален дуге AQ:

Черт. 389.

$$QM : \overset{\smile}{AQ} = h : 2\pi a, \tag{1}$$

то винтовая линия превратится в прямую (AM на черт. 389). Угол γ ее наклона к образующим определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AQ}{QM} = \frac{a}{b}, \tag{2}$$

где $b = \frac{h}{2\pi}$.

Параметрические уравнения винтовой линии. Ось цилиндра примем за ось OZ (черт. 387), ось OX направим в произвольно выбранную точку A винтовой линии. За параметр t примем угол поворота плоскости осевого сечения $OQMR$ из начального положения OAC. Тогда

$$x = OP = a\cos t,\quad y = PQ = a\sin t,\quad z = QM = bt. \tag{3}$$

Два уравнения $y = a\sin t$, $z = bt$ представляют проекцию винтовой линии на плоскость YOZ. Эта проекция есть синусоида. Проекция на плоскость XOZ — тоже синусоида, на плоскость XOY — окружность.

§ 350. Длина дуги пространственной линии

Длина дуги $\overset{\smile}{AB}$ пространственной линии выражается интегралом

$$s = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1}$$

или

$$s = \int\limits_{(B)}^{(A)} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{2}$$

Дифференциал дуги равен (ср. § 339)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \tag{3}$$

Пример 1. Найти длину s_1 одного витка винтовой линии.

Решение. Формула (2) с учетом формул (3) § 349 даст:

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{[d(a\cos t)]^2 + [d(a\sin t)]^2 + [d(bt)]^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}, \tag{4}$$

т. е. *длина одного витка винтовой линии равна гипотенузе треугольника, один катет которого* ($2\pi a$) *равен окружности основания, а другой* ($2\pi b$) – *шагу винтовой линии* (ср. § 349, замечание).

Если начальная точка дуги неподвижна, а конечная меняется, то длина дуги есть функция параметра t и, значит (§ 348), сама может быть принята за параметр.

Пример 2. Написать уравнения винтовой линии, приняв за параметр длину дуги, отсчитываемую от начальной точки $t = 0$.

Решение. Как в примере 1, находим:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, t. \tag{5}$$

Выражая t через s и подставляя в (3) § 349, получаем:

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}s. \tag{6}$$

§ 351. Касательная к пространственной линии

Касательная к линии (L) в точке $M(x; y; z)$ есть прямая MT, к которой стремится секущая MM', когда точка M' стремится к M (ср. § 225).

Если линия (L) задана параметрическими уравнениями

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{1}$$

то за направляющий вектор (§ 143) касательной можно принять вектор [1])

$$\boldsymbol{r}' = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\} \qquad (2)$$

или коллинеарный с ним вектор

$$\boldsymbol{t} = \left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}. \qquad (3)$$

Модуль его равен единице [2]). Поэтому вектор $\boldsymbol{t}$ называется *единичным вектором касательной*.

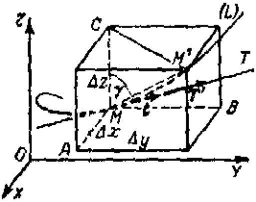
Координаты вектора $\boldsymbol{t}$ суть направляющие косинусы (§ 144) касательной

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \qquad (4)$$

(на черт. 390 $\alpha = \angle AMT$, $\beta = \angle BMT$, $\gamma = \angle CMT$).

Пояснение. За направляющий вектор секущей можно принять вектор $\overrightarrow{MM'} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$, а значит, и коллинеарные с ним векторы $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \left\{\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$ и $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\smile{MM'}} = \left\{\frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s}, \frac{\Delta z}{\Delta s}\right\}$. Формулы (2) и (3) получаются предельным переходом.

Из черт. 390 имеем $\cos\angle CMM' = \frac{MC}{MM'} \approx \frac{\Delta z}{\Delta s}$. Предельный переход дает $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$. Аналогично получаем две другие формулы (4).



Черт. 390.

Симметричные уравнения касательной (§ 150) имеют вид

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}. \qquad (5)$$

Штрихи обозначают производные по любому параметру.

Пример. Рассмотрим винтовую линию (§ 349)

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt. \qquad (1a)$$

---

[1]) Вектор $\boldsymbol{r}'$ есть производная от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$ (см. теорему § 355).

[2]) $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$

Вектор

$$\boldsymbol{r}' = \{-a\sin t,\quad a\cos t,\quad b\} = \{-y,\ x,\ b\} \tag{2a}$$

есть направляющий вектор касательной. Из уравнений (6) § 350 находим единичный вектор касательной:

$$\boldsymbol{t} = \\ = \left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}, \tag{3a}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t,\\ \cos\beta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t,\quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Последняя формула дает: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{b}$ (ср. § 349).

Уравнения касательной имеют вид

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y-a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z-bt}{b} \tag{5a}$$

или

$$\frac{X-x}{-y} = \frac{Y-y}{x} = \frac{Z-z}{b}. \tag{5б}$$

В параметрическом виде

$$X = x - yu,\quad Y = y + xu,\quad Z = z + bu. \tag{6}$$

В начальной точке ($t=0$, $x=a$, $y=0$, $z=0$) касательная представляется уравнениями $X=a$, $Y=au$, $Z=bu$.

§ 352. Нормальная плоскость

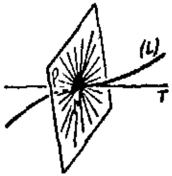
Плоскость P (черт. 391), проходящая через точку M линии L перпендикулярно к касательной MT, называется *нормальной плоскостью* линии L.

Направляющий вектор касательной (§ 351) $\boldsymbol{r}' = \{x', y', z'\}$ является нормальным вектором плоскости P. Уравнение нормальной плоскости имеет вид (§ 123)

$$(X-x)\,x' + (Y-y)\,y' + (Z-z)\,z' = 0$$

или в векторной форме

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}' = 0.$$



Черт. 391.

Пример. Уравнение нормальной плоскости к винтовой линии

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt$$

имеет вид

$$(X - a\cos t)(-a\sin t) + (Y - a\sin t)(a\cos t) + (Z - bt)\,b = 0$$

или

$$-yX + xY + bZ - bz = 0.$$

Нормальная плоскость в начальной точке (a; 0; 0) представляется уравнением

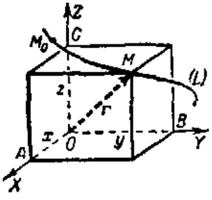
$$aY + bZ = 0.$$

Всякая прямая, проходящая через точку M пространственной линии L и перпендикулярная к касательной MT, называется *нормалью* линии L (в точке M). Пространственная линия имеет бесчисленное множество нормалей. Все они лежат в нормальной плоскости.

Если линия L лежит в одной плоскости, из множества нормалей выделяется одна (*главная нормаль*), лежащая в этой плоскости. У неплоской линии тоже можно выделить главную нормаль (§ 359).

§ 353. Вектор-функция скалярного аргумента

Определение. Вектор $\boldsymbol{p}$ называется *векторной функцией* (*вектор-функцией*) скалярного аргумента u, если каждому численному значению, которое может принимать u, отвечает определенное значение вектора $\boldsymbol{p}$ (т. е. определенный модуль и определенное направление этого вектора).



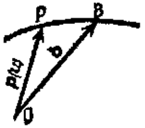
Черт. 392.

В противоположность векторной функции скалярная величина, зависящая от u, называется *скалярной функцией*.

Пример 1. Точка M движется по линии L (черт. 392). Скорость $\boldsymbol{v}$ (*рассматриваемая как вектор*) есть вектор-функция скалярного аргумента t (времени, отсчитываемого от начального момента), ибо в каждый момент вектор $\boldsymbol{v}$ имеет определенный модуль и определенное направление (он коллинеарен с касательной к линии L). Вектор $\boldsymbol{v}$ можно также рассматривать как функцию (скалярного) аргумента s (длины дуги M_0M). Модуль скорости есть скалярная функция аргумента t (или s).

Пример 2. Радиус-вектор (§ 95) $\overrightarrow{OM}$ точки M, описывающей линию L (черт. 392), есть вектор-функция длины дуги $s = \smile{M_0M}$. Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ (т. е. координаты точки M) суть скалярные функции от s (ср. § 350, пример 2).

Замечание. Если начальная точка вектора $\boldsymbol{p}$ подвижна (как в примере 1), то можно выбрать какую-либо неподвижную точку O (черт. 393) и принять ее за начало вектора $\overrightarrow{OP}$, равного вектору $\boldsymbol{p}$. Геометрическое место конца P (как правило, это — линия) называется *годографом* вектор-функции $\boldsymbol{p}$.



Черт. 393.

Обозначение вектор-функции. Запись

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u)$$

означает, что $\boldsymbol{p}$ есть вектор-функция скалярного аргумента u.

§ 354. Предел вектор-функции

Определение. Постоянный вектор $\boldsymbol{b}$ называется *пределом вектор-функции* $\boldsymbol{p}(u)$ при $u \to a$ (или при $u \to \infty$), если модуль разности векторов $\boldsymbol{p}(u)$ и $\boldsymbol{b}$ бесконечно мал при $u \to a$ (при $u \to \infty$).

Запись:

$$\lim_{u \to a} \boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Пояснение. Отнесем переменный вектор $\boldsymbol{p}(u)$ к неподвижному началу O (черт. 393). Если при $u \to a$ подвижный конец P стремится к совпадению с неподвижной точкой B, то вектор $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ есть предел вектора $\boldsymbol{p}(u)$. Разность $\boldsymbol{p}(u) - \boldsymbol{b}$ есть вектор $\overrightarrow{BP}$, а модуль последнего бесконечно мал.

Замечание 1. Если модуль вектор-функции $\boldsymbol{p}(t)$ бесконечно мал, то и сам вектор $\boldsymbol{p}$ называется *бесконечно малым. Порядком малости* вектора называется порядок малости его модуля.

Замечание 2. Непрерывность вектор-функции определяется так же, как для скалярной функции (§ 218.) Наглядно непрерывность вектор-функции выражается в том, что ее годографом является сплошная линия. Если вектор $\boldsymbol{p}$ есть непрерывная функция аргумента t, то координаты его — тоже непрерывные (скалярные) функции от t и обратно.

Замечание 3. Теоремы о пределе суммы и произведения распространяются и на вектор-функции, причем можно рассматривать всевозможные произведения (скалярной функции на векторную, скалярное произведение двух вектор-функций, векторное их произведение и смешанное произведение трех вектор-функций). Теорема о пределе частного применяется к единственному виду деления, рассматриваемого в векторной алгебре (деление вектор-функции на скалярную).

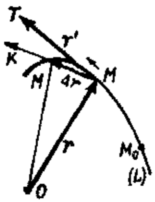
§ 355. Производная вектор-функция

Определение. Производной от вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$ называется вектор

$$\boldsymbol{p}' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{p}(u+\Delta u) - \boldsymbol{p}(u)}{\Delta u}. \qquad (1)$$

Вектор $\boldsymbol{p}'$ сам является вектор-функцией аргумента u. Отсюда название *производная вектор-функция* и обозначение $\boldsymbol{p}'(u)$.

Геометрическое истолкование. Пусть подвижный конец вектора $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}(u)$ (черт. 394) описывает линию L [годограф вектор-функции $\boldsymbol{r}(u)$]. Тогда вектор $\boldsymbol{r}'(u)$ направлен по касательной MT в сторону возрастания параметра u; его длина $|\boldsymbol{r}'(u)|$ равна $\left|\frac{ds}{du}\right|$ (см. пример 1). Если за аргумент принять s, то длина производной вектор-функции равна единице (см. пример 2).



Черт. 394.

Пояснение. При переходе от точки $M(u)$ к точке $M'(u+\Delta u)$ вектор $\boldsymbol{r}(u)$ получает приращение

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u) - \boldsymbol{r}(u) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}.$$

Вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta u}$ направлен по секущей MM'; длина его равна $\frac{MM'}{|\Delta u|} \approx \frac{\overset{\frown}{MM'}}{|\Delta u|} = \left|\frac{\Delta s}{\Delta u}\right|$. При $\Delta u \to 0$ секущая MM' стремится к совпадению с касательной, а отношение $\frac{\Delta s}{\Delta u}$ стремится к пределу $\frac{ds}{du}$.

Координаты производной $\boldsymbol{p}'(u)$ вектора $\boldsymbol{p}(u)$ соответственно равны производным от координат вектора $\boldsymbol{p}(u)$, т. е.

$$[x(u)\boldsymbol{i} + y(u)\boldsymbol{j} + z(u)\boldsymbol{k}]' = x'(u)\boldsymbol{i} + y'(u)\boldsymbol{j} + z'(u)\boldsymbol{k}, \qquad (2)$$

или в других обозначениях

$$\{x, y, z\}' = \{x', y', z'\}. \tag{3}$$

Пример 1. При обозначениях § 349 радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ винтовой линии выражается через параметр t следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos t,\ \ a\sin t,\ \ bt\}.$$

В силу (3)

$$\boldsymbol{r}' = \{-a\sin t,\ \ a\cos t,\ \ b\}.$$

Вектор $\boldsymbol{r}'$ направлен по касательной к винтовой линии [ср. § 351, формула (2а)]; его длина $\sqrt{a^2+b^2}$ равна $\frac{ds}{dt}$ [ср. (5) § 350].

Пример 2. Если за аргумент радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ винтовой линии принять дугу s, то (§ 350, пример 2)

$$\boldsymbol{r} = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right\},$$

$$\boldsymbol{r}' = \left\{\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{r}'$ равен

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Производные высшего порядка. Они определяются так же, как для скалярных функций, и обозначаются $\boldsymbol{p}''(u)$, $\boldsymbol{p}'''(u)$ и т. д. Выражения производных через дифференциалы даны в § 356.

Механическое истолкование производных. Пусть $\boldsymbol{r}(t)$ есть вектор-функция, выражающая радиус-вектор движущейся точки через время t. Тогда $\boldsymbol{r}'(t)$ есть вектор скорости точки M, а $\boldsymbol{r}''(t)$ – вектор ее ускорения.

§ 356. Дифференциал вектор-функции

Дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$ определяется так же, как для скалярной функции (§ 228), и обозначается $d\boldsymbol{p}$.

Дифференциал вектор-функции $\boldsymbol{p}(u)$ есть вектор; он равен произведению производной вектор-функции $\boldsymbol{p}'(u)$ на приращение аргумента:

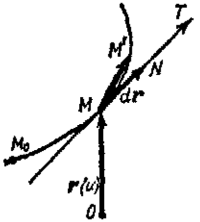
$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'(u)\,\Delta u \tag{1}$$

или

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'(u)\,du. \tag{2}$$

Геометрическое истолкование. Дифференциал $d\boldsymbol{r}(u)$ есть вектор $\overrightarrow{MN}$ (черт. 395), направленный по касательной MT; координаты вектора $d\boldsymbol{r}$ суть дифференциалы координат x, y, z точки M:

$$d\boldsymbol{r} = \{dx,\ dy,\ dz\}. \qquad (3)$$



Черт. 395.

Длина вектора $d\boldsymbol{r}$ равна дифференциалу дуги $s = \overset{\frown}{M_0M}$:

$$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds, \qquad (4)$$

т. е.

$$d\boldsymbol{r}^2 = ds^2. \qquad (5)$$

Если дуга s является аргументом вектор-функции $\boldsymbol{r}(s)$, то $|d\boldsymbol{r}| = \Delta s = \overset{\frown}{MM'}$. В общем же случае $|\Delta\boldsymbol{r}|$ разнится от дуги $\overset{\frown}{MM'}$ (равно как от хорды MM') на величину высшего порядка малости относительно Δu.

Инвариантность выражения (2). Формула (2) верна и в том случае, когда u рассматривается как функция какого-либо аргумента. Формула (1) не обладает этим свойством (ср. § 234).

Дифференциалы высшего порядка. Они определяются так же, как для скалярных функций (§ 258), и обозначаются $d^2\boldsymbol{p}$, $d^3\boldsymbol{p}$ и т. д.

Выражения производных через дифференциалы:

$$\boldsymbol{p}'(u) = \frac{d\boldsymbol{p}}{du}, \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{p}''(u) = \frac{d^2\boldsymbol{p}}{du^2}, \quad \boldsymbol{p}'''(u) = \frac{d^3\boldsymbol{p}}{du^3}, \ldots \qquad (7)$$

В формуле (6) u может быть как независимой, так и зависимой переменной; формулы (7) верны, когда u — независимая переменная; в противном случае они, как правило, неверны (ср. § 259).

§ 357. Свойства производной и дифференциала вектор-функции

1. Производная постоянного вектора $\boldsymbol{a}$ равна нулю, дифференциал тоже равен нулю:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{du} = 0, \quad d\boldsymbol{a} = 0. \qquad (1)$$

Обратно, если производная вектора тождественно равна нулю, то вектор — постоянный.

Замечание. Постоянный вектор имеет не только постоянную длину, но и неизменное направление. Производная $\frac{d\boldsymbol{p}}{du}$ переменного вектора $\boldsymbol{p}$ постоянной *не равна нулю* (она перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{p}$; см. свойство 6).

2. Дифференциал суммы нескольких векторов равен сумме их дифференциалов. Аналогичное свойство для производных:

$$d[\boldsymbol{p}(u)+\boldsymbol{q}(u)-\boldsymbol{r}(u)] = d\boldsymbol{p}(u)+d\boldsymbol{q}(u)-d\boldsymbol{r}(u), \tag{2}$$

$$\frac{d}{du}[\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}] = \frac{d\boldsymbol{p}}{du}+\frac{d\boldsymbol{q}}{du}-\frac{d\boldsymbol{r}}{du}. \tag{2a}$$

3. Для всех видов умножения векторов имеют место формулы дифференцирования, аналогичные формулам § 239, *с тем отличием, что в векторных и смешанных произведениях соблюдается надлежащий порядок сомножителей* (ср. § 112, п. 2, § 117, п. 1):

$$d(m\boldsymbol{p}) = m\,d\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\,dm, \tag{3}$$

$$d(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\times d\boldsymbol{q}+d\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}, \tag{4}$$

$$d(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{p}, \tag{5}$$

$$d(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}) = d\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{r}. \tag{6}$$

Соответствующие формулы для производных:

$$\frac{d}{du}(m\boldsymbol{p}) = m\frac{d\boldsymbol{p}}{du}+\boldsymbol{p}\frac{dm}{du}, \tag{3a}$$

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\times\frac{d\boldsymbol{q}}{du}+\frac{d\boldsymbol{p}}{du}\times\boldsymbol{q}, \tag{4a}$$

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{q}}{du}+\boldsymbol{q}\frac{d\boldsymbol{p}}{du}, \tag{5a}$$

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}) = \frac{d\boldsymbol{p}}{du}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{q}}{du}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\frac{d\boldsymbol{r}}{du}. \tag{6a}$$

4. В качестве частного случая формул (5) и (5a) имеем:

$$d(\boldsymbol{p}^2) = 2\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{p}, \quad \frac{d}{du}(\boldsymbol{p}^2) = 2\boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{p}}{du}. \tag{7}$$

5. Постоянный множитель (скалярный или векторный) можно вынести за знак дифференциала (производной):

$$d(a\boldsymbol{p}) = a\,d\boldsymbol{p} \qquad (a = \text{const}), \tag{3б}$$

$$d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{a} = \text{const}), \tag{4б}$$

$$d(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{a} = \text{const}), \tag{5б}$$

$$d(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\,d(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}) \qquad (\boldsymbol{a} = \text{const}). \tag{6б}$$

Вытекает из свойств 1 и 3.

6. Если вектор $\boldsymbol{p}(u)$ сохраняет постоянную длину, то он перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{p}'(u)$, а также к вектору

$d\boldsymbol{p}(u)$, т. е. если

$$\boldsymbol{p}^2 = \text{const}, \tag{8}$$

то (ср. п. 4)

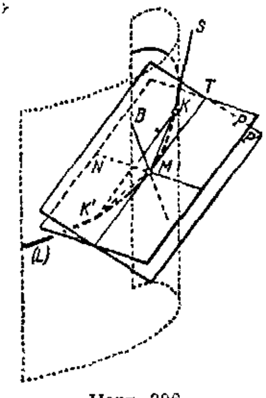
$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = 0, \quad \boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{p} = 0. \tag{9}$$

Вытекает из (7).

Геометрически: годограф вектора $\boldsymbol{p}(u)$ — сферическая линия; ее касательная перпендикулярна к радиусу сферы.

§ 358. Соприкасающаяся плоскость

Определение. *Соприкасающейся плоскостью* кривой L (в точке M) называется плоскость P, к совпадению с которой стремится плоскость KMK' (черт. 396), когда две (не совпадающие друг с другом) точки K и K', оставаясь на линии L, стремятся к точке M.



Черт. 396.

Замечание 1. Для кривой линии L, лежащей в одной плоскости Q, соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью Q. Для прямой линии соприкасающаяся плоскость остается неопределенной.

Пояснение. На проволочной модели линии L отметим три точки M, K, K'. Если они не слишком далеки друг от друга, то дуга KMK' практически уложится в плоскости KMK' (хотя дуга будет значительно уклоняться от прямолинейной формы). Соприкасающаяся плоскость есть отвлеченный образ плоскости KMK'. Если на модель положить листок бумаги так, чтобы он практически совпал с соприкасающейся плоскостью, то он, несмотря на некоторый наклон, сохранит равновесие (за счет трения на участке KMK'). Во всех же иных положениях листок не удержится на модели.

Уравнение соприкасающейся плоскости. «Вектор плоскости» $\boldsymbol{r}'(u)$ и «вектор ускорения» $\boldsymbol{r}''(u)$ оба лежат в соприкасающейся плоскости. Если они не коллинеарны, то векторное произведение

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \tag{1}$$

есть нормальный вектор соприкасающейся плоскости [1]) и уравнение последней есть

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''=0 \tag{2}$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Пример. Найти соприкасающуюся плоскость винтовой линии

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos u,\quad a\sin u,\quad bu\}.$$

Решение. Находим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'(u)&=\{-a\sin u,\quad a\cos u,\quad b\},\\ \boldsymbol{r}''(u)&=\{-a\cos u,\quad -a\sin u,\quad 0\},\\ \boldsymbol{r}'(u)\times\boldsymbol{r}''(u)&=\{ab\sin u,\quad -ab\cos u,\quad a^2\}=\\ &=a\{b\sin u,\quad -b\cos u,\quad a\}. \end{aligned}$$

В силу (3) уравнение соприкасающейся плоскости есть

$$(X-a\cos u)\,b\sin u-(Y-a\sin u)\,b\cos u+(Z-bu)\,a=0,$$

или

$$b\sin u X-b\cos u Y+aZ=abu.$$

Угол φ, образуемый соприкасающейся плоскостью с осью винтовой линии, находится (§ 146) из формулы

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{b^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}$, т. е. соприкасающаяся плоскость образует с осью винтовой линии тот же постоянный угол, что и касательная (§ 351, пример).

Соприкасающаяся плоскость обладает следующими свойствами.

1) Плоскость TMK (черт. 396), проходящая через касательную MT и точку K линии L, стремится к совпадению с соприкасающейся плоскостью P, когда точка K стремится к M.

[1]) Если $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ коллинеарны и если $\boldsymbol{r}^{(k)}$ — первый из производных векторов, не коллинеарных с $\boldsymbol{r}'$, то за нормальный вектор соприкасающейся плоскости можно принять $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}^{(k)}$.

2) Плоскость P' (черт. 396), проходящая через касательную MT и параллельная касательной KS, тоже стремится к совпадению с плоскостью P, когда точка K стремится к M.

Замечание. Каждое из этих свойств можно принять за определение соприкасающейся плоскости.

§ 359. Главная нормаль. Сопутствующий трехгранник

Нормаль MN линии L (черт. 396), лежащая в соприкасающейся плоскости P, называется *главной нормалью*; нормаль MB, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, — *бинормалью*. Плоскость TMB, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей плоскостью*.

Три взаимно перпендикулярные плоскости TMN (соприкасающаяся), NMB (нормальная) и BMT (спрямляющая) образуют *сопутствующий трехгранник*, три взаимно перпендикулярные прямые MT, MN, MB (*ребра* сопутствующего трехгранника) часто принимают за оси координат (касательную MT — за ось абсцисс, главную нормаль MN — за ось ординат, бинормаль MB — за ось аппликат). О выборе положительных направлений см. § 361.

Направляющие векторы ребер в общем случае удобно вычислять в следующем порядке:

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}'$ (вектор касательной; см. § 351), (1)

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''$ (вектор бинормали; см. § 358), (2)

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}'$ (вектор главной нормали). (3)

Выражение (3) вектора $\boldsymbol{N}$ упрощается, когда за параметр принята дуга s линии L. Именно

$$\boldsymbol{N} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\,[1]. \tag{4}$$

Пример. Найти сопутствующий трехгранник винтовой линии

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos u,\quad a\sin u,\quad bu\}.$$

---

[1]) С помощью формулы двойного векторного произведения (§ 122) получаем:

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}''(\boldsymbol{r}'^2) - \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'');$$

так как в данном случае $\boldsymbol{r}'^2 = 1$ и $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'' = 0$, то $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}''$.

Геометрически: вектор ускорения $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ лежит в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен к вектору касательной $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. Значит, он направлен по главной нормали.

Решение. Вектор касательной (§ 355, пример 1) есть

$$T = r' = \{-a\sin u, \quad a\cos u, \quad b\}.$$

Вектор бинормали (§ 358, пример) есть

$$B = r' \times r'' = \{ab\sin u, \quad -ab\cos u, \quad a^2\}.$$

Вектор главной нормали есть

$$N = B \times T = \{-a(a^2+b^2)\cos u, \quad -a(a^2+b^2)\sin u, \quad 0\}.$$

Уравнения главной нормали имеют вид

$$\frac{X - a\cos u}{\cos u} = \frac{Y - a\sin u}{\sin u} = \frac{Z - bu}{0}.$$

Из них видно, что главная нормаль перпендикулярна к оси винтовой линии и пересекает эту ось в точке $(0; 0; bu)$. Значит, главная нормаль идет вдоль радиуса цилиндра, несущего винтовую линию. Спрямляющая плоскость совпадает с касательной плоскостью цилиндра.

§ 360. Взаимное расположение линии и плоскости

1. Если плоскость Q, проходящая через точку M, не проходит через касательную MT линии L, то эта линия вблизи точки M располагается по обе стороны плоскости.

В частности, нормальная плоскость всегда рассекает линию L.

Расстояние d от соседней точки M' линии L до плоскости Q в рассматриваемом случае имеет тот же порядок малости, что и дуга $\overset{\frown}{MM'}$.

2. Если плоскость Q проходит через касательную MT, но не является соприкасающейся, то линия L вблизи точки M располагается, как правило, по одну сторону от плоскости (*сторона вогнутости* линии L). Исключение возможно лишь при коллинеарности векторов r', r''.

В частности, линия L располагается, как правило, по одну сторону от спрямляющей плоскости.

Расстояние d имеет в рассматриваемом общем случае второй порядок относительно дуги $\overset{\frown}{MM'}$.

3. Если плоскость Q — соприкасающаяся, то линия L вблизи точки M располагается, как правило, по обе

стороны от плоскости. Исключение возможно лишь при компланарности векторов $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}''$, $\boldsymbol{r}'''$.

Расстояние d имеет в рассматриваемом случае, как правило, третий порядок относительно $\overset{\frown}{MM'}$. Лишь в упомянутом исключительном случае порядок d выше третьего.

§ 361. Основные векторы сопутствующего трехгранника

За положительные направления на ребрах сопутствующего трехгранника принимают направления следующих единичных векторов (играющих роль векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в прямоугольной системе координат)

1. Основной вектор касательной $\boldsymbol{t}$. Он направлен по касательной в сторону возрастания параметра:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{T}}{\sqrt{\boldsymbol{T}^2}} = \frac{\boldsymbol{r}'(u)}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2(u)}}. \tag{1}$$

Если за параметр принята дуга s линии L, то

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}. \tag{1a}$$

2. Основной вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$. Он направлен по главной нормали в сторону вогнутости линии L:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\sqrt{\boldsymbol{N}^2}} = \frac{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}'}{\sqrt{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}. \tag{2}$$

Если за параметр принята дуга s, то это выражение значительно упрощается:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2}}. \tag{2a}$$

3. Основной вектор бинормали $\boldsymbol{b}$. Он направлен по бинормали так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ была правой:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''}{\sqrt{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}}. \tag{3}$$

При параметре s имеем:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}}{\sqrt{\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}}}. \tag{3a}$$

Замечание. Направление основного вектора главной нормали не зависит от выбора параметра, т. е. имеет объективный геометрический смысл. Основной вектор касательной может иметь любое из двух противоположных направлений в зависимости от параметризации. В частности, если за параметр принять время, то направление вектора $\boldsymbol{t}$ совпадает с направлением движения точки M по линии L. Если параметром служит дуга, то направление вектора $\boldsymbol{t}$ совпадает с направлением отсчета положительных дуг. Таким образом, объективного геометрического смысла направление вектора $\boldsymbol{t}$ не имеет. Когда направление вектора $\boldsymbol{t}$ установлено, направление вектора $\boldsymbol{b}$ вполне определено.

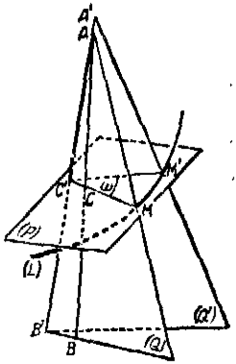
§ 362. Центр, ось и радиус кривизны пространственной линии

Пусть точка M' (черт. 397), двигаясь по пространственной линии L, стремится к неподвижной точке M, где кривизна K не равна нулю. Тогда прямая $A'B'$, по которой неподвижная нормальная плоскость Q пересекается с подвижной нормальной плоскостью Q', стремится совпасть с прямой AB, перпендикулярной к соприкасающейся плоскости P и отстоящей от точки M на расстояние $MC = \frac{1}{K}$. При этом луч MC направлен в сторону вогнутости линии L.

Прямая AB называется *осью кривизны*, точка C, где AB пересекает соприкасающуюся плоскость P, называется *центром кривизны*, отрезок MC — *радиусом кривизны*.

Радиус кривизны обозначается ρ, величины ρ и K взаимно обратны, т. е.

$$\rho = \frac{1}{K}, \quad K = \frac{1}{\rho}. \qquad (1)$$



Черт. 397.

Для плоской кривой (ее плоскость является соприкасающейся) центр и радиус кривизны можно получить построением, указанным в § 343.

Окружность, описанная из центра кривизны C радиусом $CM = \rho$, называется *соприкасающейся окружностью* или *кругом кривизны* линии L (для точки M).

Замечание 1. Если кривизна линии L в точке M равна нулю, то говорят, что радиус кривизны бесконечен, и пишут $\rho=\infty$ (ср. § 343, замечание)

Замечание 2. Определение развертки, данное в § 347, относится не только к плоским, но и к неплоским линиям. Неплоская линия L' тоже имеет бесчисленное множество разверток (все они – неплоские). Но в противоположность случаю плоской линии (ср. § 347) центр кривизны каждой из разверток L описывает линию, не совпадающую с L'. Поэтому геометрическому месту центров кривизны неплоской линии не присваивается наименование эволюты.

§ 363. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны пространственной линии

Кривизна K выражается формулой

$$K=\frac{\sqrt{(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2}}{\sqrt{(\mathbf{r}'^2)^3}}. \tag{1}$$

В координатной форме

$$K=\frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}}. \tag{2}$$

Если за параметр принята дуга, формулы (1) и (2) упрощаются:

$$K=\sqrt{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|, \tag{1a}$$

$$K=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{2a}$$

В соответствии с формулой (1a) вектор $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ называется *вектором кривизны*. Этот вектор равнонаправлен с вектором $\overrightarrow{MC}$, ведущим от точки M линии L к центру кривизны C.

Радиус кривизны ρ находится по формуле

$$\rho=\frac{1}{K}. \tag{3}$$

Сюда надо подставить одно из выражений (1), (2), (1a), (2a).

Радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра кривизны равен

$$\mathbf{r}_c=\mathbf{r}+\mathbf{n}\rho \tag{4}$$

и выражается [в силу (2) § 361] следующей формулой:

$$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{r}'^2}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}[(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}']. \tag{5}$$

В соответствии с этим координаты x_C, y_C, z_C центра кривизны выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}(Bz' - Cy'),\\ y_C &= y + \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}(Cx' - Az'),\\ z_C &= z + \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2}(Ay' - Bx'), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где для краткости введены следующие обозначения:

$$A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x''. \tag{7}$$

Если за параметр принять дугу, то формулы (5) и (6) после упрощений примут вид

$$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{r} + \frac{\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2} = \boldsymbol{r} + \rho^2 \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + \frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = x + \rho^2\frac{d^2x}{ds^2},\\ y_C &= y + \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = y + \rho^2\frac{d^2y}{ds^2},\\ z_C &= z + \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = z + \rho^2\frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

З а м е ч а н и е. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии (§ 344) получаются отсюда, если положить $z = z' = z'' = 0$.

П р и м е р. Найти кривизну, радиус и центр кривизны винтовой линии L:

$$\boldsymbol{r} = \{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}. \tag{8}$$

Решение. Приняв за параметр длину дуги, имеем (§ 350):

$$\boldsymbol{r} = \left\{ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\}.$$

Дифференцируя дважды, находим:

$$\boldsymbol{r}'' = \left\{ \frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad 0 \right\}.$$

Формулы (2а) и (3) дают:

$$K = \frac{a}{a^2+b^2},\quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}, \tag{9}$$

т. е. кривизна и радиус кривизны постоянны. Формулы (6а) дают:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \\ &= -\frac{b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}x, \\ y_c &= -\frac{b^2}{a}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}y, \\ z_c &= \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} = z. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из (10) видно, что для построения центра кривизны надо радиус цилиндра, несущего винтовую линию, продолжить за ось цилиндра на постоянное расстояние $\frac{b^2}{a}$. Значит, центр кривизны винтовой линии L опишет винтовую линию L_1 с тем же шагом $h = 2\pi b$, нанесенную на цилиндр радиуса $a_1 = \frac{b^2}{a}$ (с той же осью). Симметрия соотношения $aa_1 = b^2$ показывает, что линии L и L_1 взаимны, т. е. центр кривизны линии L_1 опишет линию L.

§ 364. О знаке кривизны

Кривизне плоских линий, лежащих *в одной и той же плоскости*, можно следующим образом приписать знак. Если при движении точки M в сторону возрастания параметра и вращение вектора касательной происходит против часовой стрелки, то кривизна считается положительной, если по часовой стрелке, — отрицательной.

Знак кривизны меняется на противоположный, если параметр u заменить другим параметром u', убывающим, когда u возрастает. Когда за параметр принимается абсцисса, возрастанию параметра соответствует смещение точки M «вправо». В этом случае кривизна положительна, когда линия обращена вогнутостью вверх, и отрицательна, когда вниз (§ 282).

Формулы (1) и (1) § 344 заменяются следующими:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

$$K = \frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \tag{1}$$

Пример. Кривизна окружности

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u,$$

вычисленная по формуле (1), равна $\frac{1}{a}$ (возрастанию параметра соответствует обход против часовой стрелки, в ту же сторону вращается вектор касательной). Если ту же окружность представить уравнениями

$$x = a\cos u', \quad y = -a\sin u',$$

то формула (1) дает $K = -\frac{1}{a}$.

Если окружность задать уравнением

$$x^2+y^2=a^2$$

и применить формулу (1), то для верхней полуокружности получим $K = -\frac{1}{a}$ (обход будет совершаться против стрелки часов, вогнутость обращена книзу), для нижней полуокружности получим $K = \frac{1}{a}$.

Этот пример показывает, что сам по себе знак кривизны не имеет геометрического смысла, имеет значение лишь изменение знака при переходе через некоторую точку (точка перегиба) или, напротив, сохранение знака на некотором участке.

Кривизне пространственных линий (в том числе и плоских) совсем нельзя приписать знака, ибо в пространстве нет ни вращения по часовой стрелке, ни вращения против часовой стрелки. Для линий, лежащих в одной плоскости, эти два направления различаются потому, что, выбрав на плоскости «лицевую» ее сторону, мы имеем в виду наблюдателя, созерцающего именно эту сторону. Если же мы по какому-либо признаку станем различать лицевую и оборотную стороны на соприкасающихся плоскостях произвольной кривой в пространстве, то ни с какой позиции наблюдатель не сможет созерцать все плоскости с лицевой стороны.

§ 365. Кручение

Кручение пространственной линии характеризует степень отклонения линии от плоской формы (подобно тому как кривизна характеризует степень отклонения от прямолинейной формы).

Определение. *Кручением* линии L в точке M называется величина, определяемая следующим образом: по абсолютному значению она равна пределу, к которому стремится отношение угла ω', составленного бинормалями MB и $M'B'$, к дуге $\overset{\frown}{MM'}$, когда точка M', оставаясь на линии L, стремится к M. Знак кручения (а также знак угла ω') считается положительным, когда пара бинормалей MB, $M'B'$ — правая (см. § 165а), и отрицательным, когда эта пара — левая. Кручение обозначается σ:

$$\sigma = \lim \frac{\omega'}{\overset{\smile}{MM'}}.$$

Замечание. Бинормаль плоской линии сохраняет постоянное направление, так что кручение плоской линии всюду равно нулю. Обратно, если кручение линии всюду равно нулю, то линия плоская. У неплоской линии кручение может равняться нулю лишь в отдельных точках (*точки сплощения*).

Радиус кручения. Величина $\tau = \frac{1}{\sigma}$, обратная кручению, называется *радиусом кручения* по аналогии с радиусом кривизны $\rho = \frac{1}{K}$. Но эта аналогия — неполная: процесс, аналогичный построению центра кривизны, не дает никакого «центра кручения».

Кручение выражается формулой

$$\sigma = \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2} \tag{1}$$

или в координатной форме

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}. \tag{2}$$

Если за параметр принять дугу s, то формулы (1) и (2) несколько упрощаются:

$$\sigma = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2} = \rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right), \tag{1a}$$

или в координатной форме

$$\sigma = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} : \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]. \tag{2a}$$

Пример. Найти кручение винтовой линии

$$x = a\cos u, \quad y = a\sin u, \quad z = bu.$$

Решение. Имеем:

$$\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''' = \begin{vmatrix} -a\sin u & a\cos u & b \\ -a\cos u & -a\sin u & 0 \\ a\sin u & -a\cos u & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

$$(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')^2 = a^2(a^2+b^2).$$

По формуле (1) находим:

$$\sigma = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Отсюда видно, что кручение правой винтовой линии ($b > 0$) положительно, левой — отрицательно.

РЯДЫ

§ 366. Вводные замечания

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, Ньютон и Лейбниц выражали подинтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом членов (см. § 270). Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики 18-го века сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять правила алгебры к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов. Эта задача была решена математиками 19-го века, имена которых мы встретим в последующих параграфах.

§ 367. Определение ряда

Пусть дана последовательность чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{1}$$

Будем складывать эти числа в данном их порядке. Получим новую последовательность $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$, где

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Процесс ее составления сокращенно обозначается выражением

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{3}$$

которое называется *бесконечным рядом* или, короче, *рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ называются *членами* ряда. Сумма

$$s_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$$

называется *частичной* (или *частной*) суммой ряда ($s_1=u_1$ — первая частичная сумма, $s_2=u_1+u_2$ — вторая частичная сумма, $s_3=u_1+u_2+u_3$ — третья и т. д.).

Пример 1. Выражение

$$1+(-1)+1+(-1)+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots, \tag{4}$$

или, как обычно пишут,

$$1-1+1-1+\ldots, \tag{4a}$$

является рядом. Смысл выражения (4) состоит в том, что из членов

$$1,\ -1,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots$$

составляются частичные суммы

$$s_1=1,\quad s_2=1-1=0,\quad s_3=1-1+1=1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ s_n=1-1+\ldots+(-1)^{n+1}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \ldots \tag{5}$$

Пример 2. Выражение

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots \tag{6}$$

является рядом. Оно означает, что из членов

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots$$

составляются частичные суммы

$$s_1=1,\quad s_2=1\frac{1}{2},\quad s_3=1\frac{3}{4},\ \ldots,\quad s_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots \tag{7}$$

§ 368. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Определение. Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда.

Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд не имеет суммы[1]).

Пример 1. Ряд

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots \quad (1)$$

— расходящийся, ибо последовательность его частичных сумм

$$s_1=1,\quad s_2=3,\quad s_3=6,\quad \ldots,\quad s_n=\frac{n(n+1)}{2},\ldots \quad (2)$$

имеет бесконечный предел.

Пример 2. Ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots \quad (3)$$

— расходящийся, ибо последовательность его частичных сумм

$$s_1=1,\quad s_2=0,\quad s_3=1,\quad \ldots,\quad s_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ldots \quad (4)$$

ср. § 367, пример 1) не имеет никакого предела.

Замечание 1. Когда последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ не имеет никакого предела, расходящийся ряд называется *неопределённым*.

Пример 3. Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots \quad (5)$$

— сходящийся, ибо последовательность

$$s_1=1,\quad s_2=1\frac{1}{2},\quad s_3=1\frac{3}{4},\ldots,\quad s_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots \quad (6)$$

имеет предел, равный 2:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=2.$$

Число 2 есть сумма ряда (5).

Замечание 2. Запись

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=S \quad (7)$$

означает, что ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ — сходящийся

---

[1]) Слово «сумма» понимается в смысле, установленном определением. Понятие суммы ряда можно расширить, и тогда некоторые расходящиеся ряды будут тоже обладать суммами (в расширенном смысле).

и сумма его равна S, т. е. запись (7) равнозначна с записью

$$\lim_{n\to\infty}(u_1+u_4+\dots+u_n)=S.$$

П р и м е р 4. Запись

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\dots=\frac{2}{3}$$

означает, что последовательность частичных сумм

$$s_1=1,\quad s_2=\frac{1}{2},\quad s_3=\frac{3}{4},\ \dots,\quad s_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right],\ \dots$$

имеет предел, равный $\frac{2}{3}$, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\dots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{2}{3}.$$

§ 369. Необходимое условие сходимости ряда

Ряд

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots \tag{1}$$

может сходиться лишь в том случае, когда член u_n (*общий член* ряда) стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0. \tag{2}$$

Иначе говоря: если общий член u_n не стремится к нулю, то ряд расходится.

П р и м е р 1. Ряд

$$0{,}4+0{,}44+0{,}444+0{,}4444+\dots \tag{3}$$

заведомо расходится, ибо общий член (он имеет пределом $\frac{4}{9}$) не стремится к нулю.

П р и м е р 2. Ряд

$$1-1+1-1+\dots \tag{4}$$

заведомо расходится, ибо общий член не стремится к нулю (и вообще не имеет предела).

П р е д о с т е р е ж е н и е. Условие (2) *недостаточно* для сходимости ряда: ряд, у которого общий член стремится к нулю, может сходиться, а может и расходиться (см. примеры 3 и 4).

Пример 3. Так называемый *гармонический* [1]) ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \tag{5}$$

расходится, хотя его общий член стремится к нулю. Чтобы убедиться в расходимости ряда, рассмотрим частичные суммы

$$s_2 = 1+\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_4 = s_2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) > 3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 4\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) >$$

$$> 4\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 5\cdot\frac{1}{2},$$

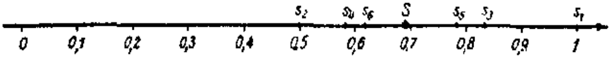
$$s_{16} = s_8+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right) > 6\cdot\frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что частичная сумма неограниченно возрастает, т. е. ряд (5) расходится.

Пример 4. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots, \tag{6}$$

получаемый из гармонического переменой знака у членов с четными номерами, сходится. Чтобы убедиться в этом,



Черт. 398.

отметим на числовой оси (черт. 398) точки, представляющие частичные суммы $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$, $s_3 = \frac{5}{6}$, $s_4 = \frac{7}{12}$, $s_5 = \frac{47}{60}$, $s_6 = \frac{37}{60}$. Каждая из «нечетных» точек s_1, s_3, s_5 окажется левее предыдущей, а каждая из «четных» точек s_2, s_4, s_6 — правее предыдущей, т. е. четные и нечетные точки движутся навстречу друг другу. Можно доказать,

[1]) Название связано с тем, что струна при делении ее на 2, 3, 4, ... равные части дает звуки, гармонирующие с основным тоном.

что подмеченный закон верен [1] и что точки s_{2n}, s_{2n+1} сближаются неограниченно [2]. Значит, как четные, так и нечетные точки стремятся к некоторой точке S (нечетные — справа, четные — слева). Стало быть, последовательность частичных сумм ряда (6) имеет пределом число S, т. е. ряд (6) сходится и S — его сумма.

Частичные суммы s_1, s_3, s_5 дают избыточные приближения для S, а s_2, s_4, s_6 — недостаточные. Подсчитав $s_9 = 0{,}745$ и $s_{10} = 0{,}645$, получим для S один верный знак: $S = 0{,}7$. Вычислив s_{999} и s_{1000}, мы нашли бы $S = 0{,}693$ с тремя верными знаками. Точное значение S есть $\ln 2$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2. \tag{7}$$

Формула (7) получается из разложения

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

при $x=1$ (ср. § 270, п. 4 и § 272, пример 2).

§ 370. Остаток ряда

Если отбросить первые m членов ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots, \tag{1}$$

то получим ряд

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots, \tag{2}$$

который сходится (или расходится), если сходится (или расходится) ряд (1). Поэтому *при исследовании сходимости ряда можно оставить без внимания несколько начальных членов.*

[1] Разность

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

отрицательна, разность $s_{2n+2}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$ положительна.

[2] Разность $s_{2n+1}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

В случае, когда ряд (1) сходится, сумма

$$R_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots \tag{3}$$

ряда (2) называется *остатком* (или *остаточным членом*) первого ряда ($R_1 = u_2 + u_3 + \ldots$ — первый остаток, $R_2 = u_3 + u_4 + \ldots$ — второй и т. д.). Остаток R_m есть погрешность, совершаемая при замене суммы S ряда (1) частичной суммой s_m. Сумма ряда S и остаток R_m связаны соотношением

$$S = s_m + R_m. \tag{4}$$

При $m \to \infty$ остаток ряда стремится к нулю. Практически важно, чтобы это стремление было «достаточно быстрым», т. е. чтобы остаток R_m стал меньше допустимой погрешности при не слишком большом m. Тогда говорят, что ряд (1) *сходится быстро*, в противном случае говорят, что ряд *сходится медленно*. Разумеется, быстрота или медленность сходимости — понятие относительное.

Пример 1. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{5}$$

сходится крайне медленно. Просуммировав двадцать его членов, мы получаем значение суммы ряда лишь с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-1}$; чтобы достичь точности до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, надо взять не менее чем 19 999 членов (см. пример 4 § 369).

Пример 2. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots \tag{6}$$

(геометрическая прогрессия) сходится гораздо быстрее ряда (5); уже пятнадцатый остаток его $-\frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}} - \frac{1}{2^{17}} + \ldots$ по абсолютной величине меньше чем $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, так что точность до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ обеспечивается пятнадцатью членами.

Пример 3. Ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

(сумма его равна e; ср. § 272, пример 1) сходится еще быстрее: точность до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ обеспечивается восемью членами ряда.

§ 371. Простейшие действия над рядами

1. Почленное умножение на число. Если ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

сходится и сумма его есть S, то ряд

$$wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots, \tag{2}$$

полученный почленным умножением ряда (1) на одно и то же число w, тоже сходится, и сумма его равна wS, т. е.

$$wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots=$$
$$=w(u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots). \tag{3}$$

Пример 1. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{4}$$

сходится и сумма его равна $0{,}693\ldots=\ln 2$ (§ 369, пример 4). Стало быть, ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \tag{5}$$

сходится и сумма его равна $0{,}346\ldots=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Почленное сложение и вычитание. Если ряды

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{6}$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{7}$$

сходятся и суммы их соответственно равны U и V, то ряд

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\ldots+(u_n\pm v_n)+\ldots, \tag{8}$$

полученный почленным сложением (или вычитанием), тоже сходится и сумма его равна $U+V$ (или $U-V$), т. е.

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\ldots=$$
$$=(u_1+u_2+\ldots)\pm(v_1+v_2+\ldots). \tag{9}$$

Пример 2. Ряд

$$0{,}11+0{,}0101+0{,}001001+\ldots$$

сходится и сумма его равна $\frac{12}{99}$. Действительно, этот ряд получается почленным сложением сходящихся рядов $0{,}1+0{,}1^2+0{,}1^3+\ldots$ и $0{,}01+0{,}01^2+0{,}01^3+\ldots$, а суммы последних соответственно равны $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{99}$.

Предостережение. *Не все свойства конечных сумм остаются в силе для сходящихся рядов.* Так, от перестановки членов сходящийся ряд может приобрести иную сумму и даже стать расходящимся. Переставим, например, члены сходящегося ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots= \\ =0{,}693\ldots \qquad (10)$$

так, чтобы за двумя положительными шел один отрицательный (порядок положительных членов остается прежним; то же для отрицательных). Получим ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+ \\ +\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\ldots \qquad (11)$$

Он сходится, но сумма его в полтора раза больше прежней. Действительно, мы имеем (см. пример 1):

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+\ldots= \\ =\frac{1}{2}\cdot 0{,}693 \qquad (12)$$

(вставление нулей не изменяет суммы ряда!). Сложив почленно ряды (10) и (12) (п. 2), получим:

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\frac{1}{8}+0+\ldots= \\ =\frac{3}{2}\cdot 0{,}693\ldots$$

Сократив дроби и отбросив нули, получим слева ряд (11).

§ 372. Положительные ряды

Положительный ряд (т. е. ряд, все члены которого положительны) не может быть неопределенным (§ 368, замечание 1). Его частичные суммы всегда имеют предел — конечный или бесконечный. В первом случае ряд сходится, во втором — расходится.

Положительный сходящийся ряд при перестановке членов остается сходящимся и *сумма его не изменяется* (ср. § 371, предостережение), расходящийся положительный ряд остается расходящимся.

§ 373. Сравнение положительных рядов

Для исследования сходимости данного положительного ряда

$$u_0+u_1+u_2+\dots \tag{1}$$

его часто сравнивают с другим положительным рядом

$$v_0+v_1+v_2+\dots, \tag{2}$$

о котором известно, что он сходится или расходится.

Если ряд (2) сходится и сумма его равна V, а члены данного ряда не превосходят соответствующих членов ряда (2), то данный ряд сходится, и сумма его не превосходит V. При этом и остаток данного ряда не превосходит остатка ряда (2).

Если ряд (2) расходится, а члены данного ряда не меньше соответствующих членов ряда (2), то данный ряд расходится.

Пример. 1. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\dots+\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}+\dots \tag{3}$$

и, если он сходится, найти четыре значащие цифры его суммы S.

Решение. Сравним данный ряд с геометрической прогрессией

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^{n-1}}+\dots \tag{4}$$

Ряд (4) сходится; сумма его равна 1,25. Члены данного ряда не превосходят соответствующих членов ряда (4). Значит, данный ряд сходится, и $S<1,25$. Остаток

$$R_n=\frac{1}{(n+1)5^n}+\frac{1}{(n+2)5^{n+1}}+\frac{1}{(n+3)5^{n+2}}+\dots \tag{5}$$

ряда (3) меньше n-го остатка ряда (4), т. е.

$$R_n<\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+2}}+\dots=\frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}.$$

Для лучшей оценки сравним остаток (5) с рядом

$$\frac{1}{(n+1)5^n}+\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)5^{n+2}}+\dots=$$
$$=\frac{1}{(n+1)\cdot 4\cdot 5^{n-1}}. \tag{6}$$

Рассуждая, как выше, получим неравенство

$$R_n < \frac{1}{4(n+1)\,5^{n-1}}. \tag{7}$$

Полагая последовательно $n=1,\ 2,\ 3, \ldots$, найдем, что выражение $\frac{1}{4(n+1)\,5^{n-1}}$ станет меньше 0,0005 при $n=4$. Суммируем четыре члена данного ряда. Получаем недостаточное (с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$) приближение

$$S \approx 1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3} = 1{,}115.$$

Пример 2. Для исследования сходимости ряда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots \tag{8}$$

сравним его с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \tag{9}$$

Последний расходится (§ 369, пример 3), а члены данного ряда не меньше соответствующих членов ряда (9). Значит, ряд (8) расходится.

Пример 3. Для исследования сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{10}$$

сравним его с рядом

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\ldots, \tag{11}$$

члены которого, начиная со второго, больше соответствующих членов ряда (10). Ряд (11) сходится и сумма его равна $S=2$, ибо n-ю частичную сумму можно представить в виде

$$s_n = 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \\ = 1+1-\frac{1}{n}. \tag{12}$$

Ряд (10) и подавно сходится и сумма его меньше чем 2. Остаток R_n ряда (11) равен (§ 370)

$$R_n = S - s_n = \frac{1}{n}.$$

Остаток ряда (10) лишь немногим меньше, так что ряд (10) сходится медленно: чтобы найти четыре значащие цифры суммы, надо сложить около 2000 членов. Точное значение суммы ряда (10) равно $\frac{\pi^2}{6}$ (см. ниже § 417, пример 3).

§ 374. Признак Даламбера для положительного ряда

Т е о р е м а. Пусть в положительном ряде

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ последующего члена к предыдущему при $n \to \infty$ имеет предел q. Возможны три случая:

С л у ч а й 1. $q < 1$. Тогда ряд сходится.

С л у ч а й 2. $q > 1$. Тогда ряд расходится[1]).

С л у ч а й 3. $q = 1$. Тогда ряд может сходиться, а может и расходиться.

Эту теорему называют *признаком Даламбера*[2]).

П р и м е р 1. Рассмотрим положительный ряд

$$2 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}8^2 + 4 \cdot 0{,}8^3 + \ldots + (n+1) \cdot 0{,}8^n + \ldots$$

Вначале наблюдается возрастание членов[3]) ($a_1 = 1{,}6$, $a_2 = 1{,}92$, $a_3 = 2{,}048, \ldots$). Однако ряд сходится, ибо $a_{n+1} : a_n = 0{,}8\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, а предел этого отношения равен 0,8, т. е. меньше чем 1.

П о я с н е н и е. Пусть для некоторого положительного ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ предел отношения $u_{n+1} : u_n$ равен 0,8. Тогда с некоторого номера N отношение $u_{n+1} : u_n$ разнится от 0,8 менее, чем на $\pm$ 0,1. Значит, оно будет оставаться меньшим, чем 0,9, так что

$$\left.\begin{aligned} &u_{N+1} < 0{,}9 u_N, \\ &u_{N+2} < 0{,}9 u_{N+1} < 0{,}9^2 u_N, \\ &u_{N+3} < 0{,}9 u_{N+2} < 0{,}9^3 u_N \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) Сюда включается и случай, когда $\lim u_{n+1} : u_n = \infty$.

[2]) Название основано на недоразумении. Теорему впервые высказал и доказал Коши.

[3]) Оно потом сменяется убыванием.

и т. д. Сравнение ряда $u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ с рядом $0{,}9u_N+0{,}9^2u_N+0{,}9^3u_N+\ldots$ (убывающая геометрическая прогрессия) показывает (§ 373), что данный ряд сходится.

Вместо 0,9 можно взять любое число, лежащее между 0,8 и 1. (Если взять единицу или большее число, рассуждение потеряет силу.)

По тому же плану ведется общее доказательство теоремы для случая $q < 1$.

Пример 2. Рассмотрим положительный ряд

$$1{,}1+\frac{1{,}1^2}{2}+\frac{1{,}1^3}{3}+\ldots+\frac{1{,}1^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

Начальные члены убывают, но ряд расходится, ибо предел отношения

$$u_{n+1}:u_n=\frac{1{,}1^{n+1}}{n+1}:\frac{1{,}1^n}{n}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ 1{,}1$$

равен 1,1, т. е. больше чем 1.

Пояснение. Так как $\lim(u_{n+1}:u_n)=1{,}1$, то с некоторого номера N отношение $u_{n+1}:u_n$ больше чем 1,09. Сравнивая ряд $u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ с расходящимся рядом $1{,}09u_N+1{,}09^2u_N+1{,}09^3u_N+\ldots$ и рассуждая, как в предыдущем пояснении, мы докажем (§ 373), что данный ряд расходится.

Вместо 1,09 можно взять любое число между 1,1 и 1 (но не единицу).

По тому же плану ведется общее доказательство теоремы для случая $q > 1$.

Пример 3. Рассмотрим ряды

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{4}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

Для обоих имеем

$$q=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}:u_n)=1.$$

Но ряд (4) расходится (§ 369), а (5) сходится (§ 373).

Замечание. В случае 1 ($q < 1$) сходимость тем быстрее, чем меньше q. В случае 2 ($q > 1$) расходимость тем быстрее, чем больше q. В случае 3 ($q = 1$) ряд, если сходится, то медленно, и потому мало пригоден для вычислений.

§ 375. Интегральный признак сходимости

Если каждый член положительного ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

меньше предшествующего, то для исследования сходимости можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(n)\,dn, \tag{2}$$

где $f(n)$ – непрерывная убывающая функция от n, принимающая при $n=1, 2, 3, \ldots$, значения $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Ряд (1) сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл (2). В случае сходимости остаток R_n ряда (1) удовлетворяет неравенствам

$$\int_{n+1}^{\infty} f(n)\,dn < R_n < \int_n^{\infty} f(n)\,dn. \tag{3}$$

Замечание. Интегральный признак удобен в тех случаях, когда член u_n задан выражением, имеющим смысл не только для целых значений n, но и для всех n, больших единицы.

Пример 1. Исследуем сходимость гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{4}$$

Этот ряд – положительный; каждый его член меньше предшествующего, и общий член u_n задан выражением $\frac{1}{n}$, имеющим смысл для всех значений n (кроме нуля). Функция $f(n)=\frac{1}{n}$ в промежутке $(1, \infty)$ непрерывна и убывает.

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dn}{n}$. Он расходится, ибо имеет бесконечное значение:

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dn}{n} = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Значит, расходится и ряд (4) (ср. § 369, пример 3).

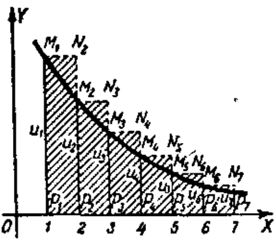
Пример 2. Исследуем сходимость ряда «обратных квадратов»

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

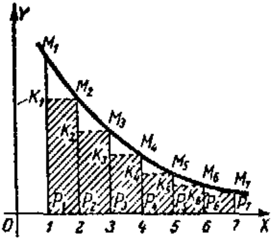
Здесь $f(n)=\frac{1}{n^2}$. Соответствующий несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dn}{n^2}=\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dn}{n^2}=1$$

сходится. Значит, сходится и ряд (5). Взяв 10 членов,



Черт. 399.



Черт. 400.

найдем $S_{10}=1{,}5498$. Остаток R_{10} удовлетворяет неравенству

$$\int_{11}^\infty \frac{dn}{n^2}<R_{10}<\int_{10}^\infty \frac{dn}{n^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{11}<R_{10}<\frac{1}{10}.$$

Значит, погрешность приближенного равенства

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\approx 1{,}5498$$

не превышает 0,1.

Пояснение. График черт. 399 изображает функцию $f(n)$; члены $u_1, u_2, \ldots$ изображаются ординатами P_1M_1, P_2M_2, ..., последние численно равны площадям ступенек $P_1M_1N_2P_2$, $P_2M_2N_3P_3$, ...

Расходимость интеграла $\int_1^\infty f(n)\,dn$ означает, что площадь полосы под линией $M_1M_2M_3\ldots$ бесконечно велика. Площадь описанной ступенчатой фигуры и подавно бесконечна, т. е. ряд $u_1+u_2+\ldots$ расходится.

Если же интеграл $\int\limits_1^\infty f(n)\,dn$ сходится, то площадь полосы под $M_1M_2M_3\ldots$ конечна. Площадь вписанной фигуры, заштрихованной на черт. 400, и подавно конечна, т. е. ряд $u_2+u_3+\ldots$ сходится. Значит, сходится и ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots$

Неравенство (3) поясним на частном примере $n=2$. Остаток $R_2=u_3+u_4+\ldots$ численно равен площади описанной фигуры $XP_3M_3N_4M_4N_5\ldots$ (черт. 399); значит, $R_2>\int\limits_3^\infty f(n)\,dn$ (по условию этот интеграл сходится). Тот же остаток равен площади фигуры $XP_2K_2M_3K_3M_4\ldots$ (черт. 400); значит,

$$R_2<\int\limits_2^\infty f(n)\,dn.$$

§ 376. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница

Ряд называется *знакопеременным*, если его члены поочередно положительны и отрицательны. Ряд

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots, \tag{1}$$

где буквы $u_1, u_2, u_3, \ldots$ обозначают положительные числа, — знакопеременный.

Признак Лейбница. Знакопеременный ряд сходится, если члены его стремятся к нулю, все время убывая по абсолютному значению[1]). Остаток такого ряда имеет тот же знак, что и первый отбрасываемый член, и меньше его по абсолютному значению.

Рассуждения, на которых основано доказательство признака, проведены для частного случая в примере 4 § 369.

Пример. Знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{2}$$

---

[1]) Члены знакопеременного ряда могут стремиться к нулю, но убывать не все время. Тогда нет гарантии, что ряд сходится. Так, ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\ldots,$$

члены которого стремятся к нулю, но убывают не все время, расходится. Действительно, группируя члены попарно, найдем, что $s_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, так что (§ 369, пример 3) $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=\infty$.

сходится, ибо члены его стремятся к нулю, все время убывая по абсолютному значению. Пятнадцатый остаток

$$R_{15} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \ldots$$

отрицателен, так что частичная сумма s_{15} дает для суммы ряда (2) приближение с избытком. По абсолютному значению остаток меньше чем $\frac{1}{16}$.

§ 377. Абсолютная и условная сходимость

Теорема. Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

заведомо сходится, если сходится положительный ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \qquad (2)$$

составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Остаток данного ряда по абсолютному значению не превосходит соответствующего остатка ряда (2)[1].

Сумма S данного ряда по абсолютному значению не превосходит суммы S' ряда (2)

$$|S| \leqslant S'.$$

Равенство имеет место только тогда, когда все члены ряда (1) — одного знака.

Замечание 1. Ряд (1) может сходиться и тогда, когда ряд (2) расходится.

Пример 1. Ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ldots, \qquad (3)$$

члены которого через два на третий отрицательны, сходится, ибо сходится (§ 373, пример 3) ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots, \qquad (4)$$

составленный из абсолютных значений членов данного ряда. Сумма S ряда (3) меньше суммы S' ряда (4)[2].

---

[1] Ход доказательства указан ниже (см. пояснение).

[2] В данном случае $S = \frac{7}{9} S'$ (см. пояснение).

Пример 2. Знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

сходится (§ 369, пример 4), несмотря на то, что ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, расходится (§ 369, пример 3).

Определение 1. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов (в этом случае сходится и данный ряд; ср. пример 1).

Определение 2. Ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд, составленный из абсолютных значений его членов, расходится (ср. пример 2).

Замечание 2. Сходящийся ряд, у которого все члены положительны или все члены отрицательны, — абсолютно сходящийся.

Пояснение к примеру 1. Сохраним в ряде (3) положительные члены, а отрицательные заменим нулями. Получим сходящийся положительный ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+0+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+0+\ldots=U \tag{5}$$

(сходимость его следует из сравнения с рядом (10) § 373). Заменим теперь нулями положительные члены ряда (3), а отрицательные возьмем с обратным знаком. Получим сходящийся положительный ряд

$$0+0+\frac{1}{3^2}+0+0+\frac{1}{6^2}+0+0+\frac{1}{9^2}+\ldots=V. \tag{6}$$

Вычтем почленно ряд (6) из ряда (5). Получим ряд (3). В силу § 371 (п. 2) он сходится и сумма его S равна

$$S=U-V. \tag{7}$$

Каждое из положительных чисел U, V меньше (§ 373), чем сумма S' ряда (4). Поэтому

$$S<S'.$$

Буквально так же доказывается общая теорема.

Замечание. Сложив (5) и (6), находим:

$$S'=U+V. \tag{8}$$

В данном же примере имеем сверх того (§ 371, п. 1):

$$V=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=\frac{1}{9}S'. \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) вытекает, что

$$S=\frac{7}{9}S'.$$

§ 378. Признак Даламбера для произвольного ряда

Положим, что в ряде

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

наряду с положительными членами есть и отрицательные (или все члены отрицательны). Пусть абсолютное значение отношения $u_{n+1}:u_n$ имеет предел q:

$$\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}:u_n|=q.$$

Тогда при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ расходится, при $q=1$ он может сходиться и расходиться.

Это следует из §§ 374, 377.

Пример. Ряд

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\ldots, \tag{2}$$

где за каждыми двумя положительными членами следуют два отрицательных, а за ними снова два положительных, сходится, ибо $|u_{n+1}:u_n|=\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{n}$; значит,

$$q=\lim_{n\to\infty}|u_{n+1}:u_n|=0,\quad \text{т. е.}\quad q<1.$$

§ 379. Перестановка членов ряда

В абсолютно сходящемся ряде можно произвольно переставлять члены; при этом абсолютная сходимость не нарушается и сумма не меняется (в частности, сумма сходящегося положительного ряда не зависит от порядка членов).

Напротив, в условно сходящемся ряде не всякая перестановка членов допустима, ибо сумма может измениться и даже сходимость может нарушиться.

Пример 1. Ряд

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots, \tag{1}$$

получаемый перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда

$$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\ldots, \tag{2}$$

тоже сходится и имеет ту же сумму S, что и геометрическая прогрессия (2). Стало быть,

$$S = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}. \qquad (3)$$

Формулу (3) можно проверить, рассматривая частичную сумму s_{2n} ряда (1) как сумму членов геометрической прогрессии с первым членом $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ и со знаменателем $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Пример 2. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots \qquad (4)$$

сходится условно (§ 377). Ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots, \qquad (5)$$

полученный перестановкой членов ряда (4), сходится, но сумма его в полтора раза больше суммы данного ряда (§ 371, предостережение).

Замечание. В каждом условно сходящемся ряде можно так переставить члены, чтобы новый ряд имел суммой любое наперед заданное число (можно также заставить ряд расходиться).

§ 380. Группировка членов ряда

В противоположность переместительному свойству (которое имеет место лишь для абсолютно сходящихся рядов; ср. § 379) сочетательным свойством обладает *всякий* сходящийся ряд.

Именно во всяком сходящемся ряде можно, *не меняя порядка членов*, объединять их в какие угодно группы. Сложив члены внутри всех групп, получаем новый ряд. Он тоже сходится и сумма его — прежняя.

Пример 1. В сходящемся (по признаку Лейбница) ряде

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots \qquad (1)$$

можно сгруппировать члены следующим образом:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots \qquad (2)$$

Сложив члены внутри групп, получим:

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\frac{2}{10^2-1}+\ldots \qquad (3)$$

Этот знакоположительный ряд имеет ту же сумму [1]), что и знакопеременный ряд (1).

Пример 2. В ряде (1) можно сгруппировать второй член с третьим, четвертый с пятым и т. д. Получим сходящийся ряд

$$1-\frac{2}{4^2-1}-\frac{2}{8^2-1}-\frac{2}{12^2-1}-\ldots, \tag{4}$$

имеющий ту же сумму.

Замечание. Обратное действие (раскрытие скобок) безусловно допустимо лишь в том случае, если *после раскрытия скобок* получается сходящийся ряд (тогда данный ряд — заведомо сходящийся). Однако возможен случай, когда данный ряд сходится, а после раскрытия скобок получается расходящийся ряд.

Пример 3. Ряд

$$(1-0{,}9)+(1-0{,}99)+(1-0{,}999)+\ldots \tag{5}$$

(геометрическая прогрессия $0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots$) сходится и имеет сумму $\frac{1}{9}$.

Если открыть скобки, получим ряд

$$1-0{,}9+1-0{,}99+1-0{,}999+\ldots, \tag{5'}$$

он расходится, ибо частичные суммы с четными номерами имеют прежний предел $\frac{1}{9}$, а с нечетными номерами — предел $1\frac{1}{9}$.

Пример 4. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots \tag{6}$$

Его можно представить в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots \tag{7}$$

Здесь скобки открыть можно, ибо полученный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{8}$$

— сходящийся. Действительно, всякая частичная сумма s_{2n-1} равна единице, а частичная сумма

$$s_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$$

стремится к единице. Сумма $S=1$ ряда (8) является также суммой ряда (6):

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=1.$$

---

[1]) Она равна $\frac{\pi}{4}$; см. § 398, пример 3.

§ 381. Умножение рядов

Теорема. Два абсолютно сходящихся ряда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=U, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots=V \tag{2}$$

можно перемножить, как многочлены. Каждый член ряда (1) помножается на каждый член ряда (2) и произведения складываются в любом порядке. Получим абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна UV:

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\ldots=UV. \tag{3}$$

Замечание 1. Чтобы в ряде (3) ни один член не был повторен дважды или опущен, рекомендуется группировать члены u_iv_k с одной и той же суммой указателей i, k (эту сумму называют *весом* члена u_iv_k). Тогда ряд получает вид

$$w_1+w_2+w_3+\ldots, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1v_1,\\ w_2 &= u_2v_1+u_1v_2,\\ w_3 &= u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_n &= u_nv_1+u_{n-1}v_2+u_{n-2}v_3+\ldots+u_1v_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Эта группировка соответствует умножению по схеме:

$$\begin{array}{r} u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots\\ v_1+v_2+v_3+v_4+\ldots\\ \hline u_1v_1+u_2v_1+u_3v_1+u_4v_1+\ldots\\ u_1v_2+u_2v_2+u_3v_2+\ldots\\ u_1v_3+u_2v_3+\ldots\\ u_1v_4+\ldots\\ \hline w_1+w_2+w_3+w_4+\ldots \end{array} \tag{6}$$

Пример 1. Рассмотрим два абсолютно сходящихся ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots, \tag{7}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots \tag{8}$$

Перемножая их по схеме (6), находим:

$$
\begin{array}{r}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\
-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots \\
\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\
-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots \\
+\frac{1}{16}+\ldots \\
\hline
1+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+\ldots
\end{array} \qquad (9)
$$

Закон составления полученного ряда выражается формулами [1])

$$w_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}}, \quad w_{2n}=0.$$

Опуская нули, получаем абсолютно сходящийся ряд

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots \qquad (10)$$

Его сумма есть произведение сумм рядов (7) и (8). Это легко проверить, ибо сумма прогрессии (7) равна 2, сумма прогрессии (8) есть $\frac{2}{3}$, а сумма прогрессии (10) есть $\frac{4}{3}$.

Пример 2. Ряд

$$1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ldots+\frac{n}{7^{n-1}}+\ldots \qquad (11)$$

абсолютно сходится (по признаку Даламбера). Найти его сумму.

Решение. Искомая сумма есть произведение сумм двух одинаковых абсолютно сходящихся рядов

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}, \qquad (12)$$

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}. \qquad (13)$$

---

[1]) В каждом столбце схемы (9) слагаемые имеют одно и то же абсолютное значение, а по знаку чередуются. Столбец четного номера (где число слагаемых четное) дает нуль. В столбце нечетного номера $2n-1$ первое слагаемое есть $\frac{1}{2^{2n-2}}$, а остальные взаимно уничтожаются.

Действительно, по схеме (6) получаем:

$$
\begin{array}{r}
1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ \ldots \\
\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ \ldots \\
\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ \ldots \\
\frac{1}{7^3}+\ \ldots \\
\hline
1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ \ldots
\end{array}
$$

Значит, сумма ряда (11) равна

$$\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{36}.$$

Замечание 2. Если один из рядов (1); (2) сходится абсолютно, а другой — условно, то ряд (4), найденный по схеме (6), — сходящийся, и сумма его по-прежнему равна UV. Но он может оказаться условно сходящимся; тогда не всякая перестановка членов допустима (§ 379).

Если оба ряда (1), (2) сходятся условно, то ряд (4) *может оказаться расходящимся* [1]). Но если он сходится, то его сумма равна UV.

---

[1]) Ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\mp\ldots \tag{U}$$

сходящийся (по признаку Лейбница, § 376), но он сходится условно, т. е. положительный ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

расходится (§ 373, пример 2). Если применить формулы (4), (5) к двум рядам, каждый из которых совпадает с (U), то получим ряд

$$w_1+w_2+w_3+\ldots, \tag{W}$$

у которого каждый член по абсолютному значению больше единицы. Действительно, формула (5) дает:

$$|w_n|=\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}.$$

Здесь каждое из n слагаемых больше чем $\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}=\frac{1}{n}$. Стало быть, w_n не стремится к нулю, и ряд (W) расходится (§ 369).

§ 382. Деление рядов

Теорема. Пусть имеем два сходящихся ряда:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=U, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=V. \tag{2}$$

Применив к ним схему деления многочлена $u_1+u_2+\ldots$ $\ldots+u_n$ на многочлен $v_1+v_2+\ldots+v_n$, получим ряд

$$w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots \tag{3}$$

Если ряд (3) — сходящийся [1]), то его сумма W равна $U:V$.

Пример. Применим к сходящимся рядам

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=U, \tag{1a}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots=V \tag{2a}$$

схему деления многочлена на многочлен. Имеем:

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots & \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots \\
-\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots & \overline{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots} \\
\hline
\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^3}+0+\frac{1}{2^5}+\ldots & \\
-\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots & \\
\hline
\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{2^4}+0+\ldots & \\
-\ \frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots & \\
\hline
\frac{1}{2^3}+0+\frac{1}{2^5}+\ldots & \\
-\ \frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\ldots & \\
\hline
\frac{1}{2^4}+0+\ldots &
\end{array}$$

---

[1]) Он может оказаться расходящимся даже при абсолютной сходимости рядов (1), (2). Так, если разделить по упомянутой схеме ряд $1+0+0+0+\ldots$ (все члены, кроме первого, — нули) на ряд $1+1+0+0+0+\ldots$ (все члены, кроме двух первых, — нули), получим расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$

В данном примере члены ряда (3) образуются по такому *закону:*

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{1}{2^0} \quad w_3 = \frac{1}{2^1},$$

$$w_4 = \frac{1}{2^2}, \ \ldots, \quad w_n = \frac{1}{2^{n-2}}, \ \ldots \qquad (n \geqslant 2)$$

Действительно, второй остаток получается почленным умножением первого остатка на $^1/_2$. следовательно, третий член ряда (3) получается из второго члена умножением на $^1/_2$. При третьем вычитании как в уменьшаемом, так и в вычитаемом все соответственные члены вдвое меньше, чем при втором вычитании. Следовательно, третий остаток получается из второго умножением на $^1/_2$. Значит, четвертый член ряда (3) получается из третьего умножением на $^1/_2$ и т. д.

Итак, члены ряда (3), начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $^1/_2$. Значит, ряд (3) сходится. Сумма его W равна $U : V$.

В самом деле, мы имеем:

$$U = 1, \quad V = \frac{1}{8}, \quad W = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3,$$

так что

$$U : V = W.$$

§ 383. Функциональный ряд

Функциональным рядом называется выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... (члены ряда) суть функции одного и того же аргумента x, определенные в некотором промежутке (a, b).

Смысл выражения (1) разъяснен в § 367. Только теперь члены ряда являются ф у н к ц и я м и, тогда как в § 367 рассматривался ряд, члены которого — числа; такой ряд в отличие от функционального называется *числовым*. *Частичные суммы* функционального ряда определяются так же, как для числового.

Если в ряде (1) аргументу x дать какое-либо значение [принадлежащее промежутку (a, b)], то из функционального ряда получается числовой.

§ 384. Область сходимости функционального ряда

Может случиться, что при любом значении x, взятом в промежутке (a, b), функциональный ряд сходится. Может случиться и так, что при любом значении x ряд расходится. В типичном же случае функциональный ряд сходится при одних значениях x и расходится при других. Совокупность значений x, при которых ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

В области сходимости каждому значению x соответствует определенная сумма ряда, так что последняя есть функция аргумента x, определенная в области сходимости. Вне этой области функциональный ряд не имеет суммы.

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд

$$1\cdot x+1\cdot 2x^2+1\cdot 2\cdot 3x^3+\ldots+1\cdot 2\ldots nx^n+\ldots \tag{1}$$

Члены его суть функции

$$u_1(x)=x,\quad u_2(x)=2x^2,\quad u_3(x)=6x^3,\ \ldots, \tag{2}$$

определенные в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Но лишь при $x=0$ ряд (1) сходится, а при любом другом значении x ряд расходится. Действительно, дадим аргументу x какое-либо значение x_0, не равное нулю. Получим числовой ряд

$$1\cdot x_0+1\cdot 2x_0^2+\ldots+1\cdot 2\ldots nx_0^n+\ldots \tag{3}$$

Отношение

$$|u_{n+1}:u_n|=|(n+1)!\,x_0^{n+1}:n!\,x_0^n|=(n+1)\,|x_0|$$

имеет бесконечный предел при $n\to\infty$. Стало быть (§ 378), ряд (3) при $x\neq 0$ расходится. Область сходимости состоит из одной точки $x=0$.

Пример 2. Функциональный ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{4}$$

[члены его суть функции, определенные в промежутке $(-\infty, +\infty)$] сходится при любом значении $x=x_0$. Действительно, отношение

$$|u_{n+1}:u_n|=\frac{|x_0|}{n+1}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$ (§ 378). Областью сходимости является весь промежуток $(-\infty, +\infty)$. Сумма ряда (4) есть функция, определенная в этом промежутке (эта функция равна e^x; ср. § 272, пример 1).

Пример 3. Найти область сходимости и выражение суммы для ряда

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\\ +\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots \qquad (5)$$

Решение. Запишем частичную сумму ряда (5) в виде

$$s_n=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-\ldots\\ \ldots-\frac{1}{2}x^{n-1}+\frac{1}{2}x^{n-1}-\frac{1}{2}x^n=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n. \qquad (6)$$

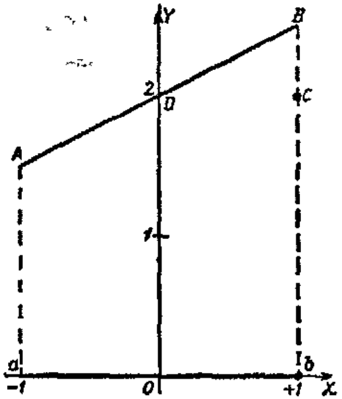
Если $|x|>1$, то s_n при $n\to\infty$ не имеет конечного предела $\left(\text{слагаемое } -\frac{1}{2}x^n \text{ есть бесконечно большая величина}\right)$, т. е. ряд (5) расходится. При $x=-1$ ряд тоже расходится, ибо тогда

$$s_n=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n=\\ =\frac{3}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{2}.$$

Отсюда видно, что s_n попеременно принимает значения 2 и 1.

При остальных значениях x (т. е. при $-1<x\leqslant 1$) ряд (5) сходится. Действительно, если $x=1$, то все члены ряда (5), кроме первого, обращаются в нуль, и мы имеем

$$S(1)=2. \qquad (7)$$



Черт. 401.

Если же $|x|<1$, то в формуле (6) слагаемое $-\frac{1}{2}x^n$ при $n\to\infty$ и при неизменном x стремится к нулю, так что

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n\right)=2+\frac{1}{2}x. \qquad (8)$$

Область сходимости ряда (5) есть промежуток $(-1, +1)$, из которого исключен конец $x=-1$ (на черт. 401 отрезок ab без точки a). В этой области сумма S ряда (5) есть функция от x, определяемая следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= 2+\tfrac{1}{2}x \text{ при } -1 < x < 1, \\ S(x) &= 2 \quad\quad \text{ при } x = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Функция $S(x)$ разрывна при $x=1$ и непрерывна в остальных точках области сходимости. Вне области $-1 < x \leqslant 1$ функция $S(x)$ вовсе не определена. График ее представляет (черт. 401) отрезок AB, из которого удалены концы A и B и к которому (взамен точки B) добавлена точка C.

§ 385. О равномерной и неравномерной сходимости [1]

Пусть функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

сходится в каждой точке (замкнутого или незамкнутого) промежутка (a, b) [2] и пусть требуется приближенно найти сумму S ряда (1) с точностью до ε (т. е. остаток R_n по абсолютному значению не должен превышать положительного числа ε). Для каждого определенного значения x это требование удовлетворяется, начиная с некоторого номера $n=N$. Величина N, как правило, зависит от x, и может случиться, что *ни один номер n не обеспечивает требуемой точности для всех x сразу*. Тогда говорят, что ряд (1) сходится в промежутке (a, b) *неравномерно*. Если же требуемую степень точности всегда можно обеспечить сразу для всех x, начиная с одного и того же номера N, то говорят, что ряд (1) сходится в промежутке (a, b) *равномерно*.

Пример 1. Функциональный ряд

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots \qquad (2)$$

(см. § 384, пример 3) сходится в каждой точке замкнутого промежутка (0, 1). Покажем, что в этом промежутке он сходится неравномерно.

Потребуем, чтобы частичная сумма

$$s_n = 2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n \qquad (3)$$

[1]) Определение см. в § 386.

[2]) Ряд может сходиться и в точках вне промежутка (a, b), но такие точки мы оставляем без внимания.

давала сумму ряда (2) с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$. При $x=1$, а также при $x=0$ этому требованию удовлетворяют все частичные суммы (получается точное значение $S=2$). При остальных значениях x сумма ряда равна

$$S = 2+\frac{1}{2}x, \tag{4}$$

так что остаток ряда равен

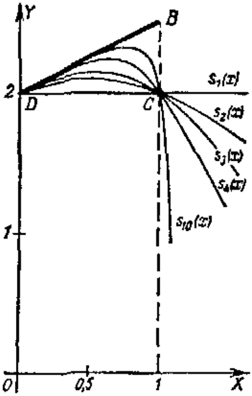
$$R_n = S-s_n = \frac{1}{2}x^n. \tag{5}$$

При $x=0{,}1$, или при $x=0{,}2$, или при $x=0{,}3$ требуемая точность обеспечивается, начиная с номера $N=2$; например, при $x=0{,}3$ имеем:

$$|R_2| = \frac{1}{2}\cdot 0{,}3^2 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}1.$$

Но при $x=0{,}4$ двух членов мало; надо взять по меньшей мере три. Тогда

$$|R_3| = \frac{1}{2}\cdot 0{,}4^3 \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}06 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}1.$$



Черт. 402.

Дальнейшие пробы покажут, что при $x=0{,}5$ требуемая точность обеспечивается, начиная лишь с номера $N=4$, при $x=0{,}6$ – начиная с номера $N=5$, а при $x=0{,}8$ придется взять $N=11$. По мере приближения x к 1 число N неограниченно возрастает, так что для всех значений x сразу никакой номер N не может обеспечить точность до 0,1 (а бо́льшую точность и подавно). Стало быть, ряд (2) в промежутке (0, 1) сходится неравномерно.

На черт. 402 изображены графики частичных сумм

$$s_1(x) = 2, \quad s_2(x) = 2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2,$$

$$s_3(x) = 2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^3, \quad s_4(x) = 2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^4.$$

Остаток изображается при $x \neq 1$ отрезками ординат между соответствующим графиком и прямой $y=2+\frac{1}{2}x$

[представляющей сумму ряда (2) для всех значений x, кроме $x=1$].

Сходимость ряда (2) проявляется в том, что графики частичных сумм все теснее прилегают к прямой DB на все большем ее протяжении. Неравномерность сходимости сказывается в том, что вблизи от B каждый из графиков s_n отходит от прямой DB. Но по мере роста n заметный отход совершается на все меньшем участке.

Пример 2. Покажем, что тот же ряд (2) сходится в промежутке (0; 0,5) равномерно.

Потребуем точность до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$. При $x=0{,}5$ эта точность обеспечивается, начиная с номера $N=4$, ибо

$$|R_4| = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5^4 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}0625 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}1.$$

Для всякого другого значения x в промежутке (0; 0,5) требуемая точность и подавно обеспечивается, начиная с номера 4.

Потребуем точность до $\frac{1}{2}\cdot 0{,}01$; тогда при $x=0{,}5$ достаточно взять $N=7$, ибо

$$|R_7| = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5^7 \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}0078 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}01.$$

Для всякого другого значения x в промежутке (0; 0,5) семи членов и подавно достаточно. Вообще, тот номер N, который обеспечивает точность до ε при $x=0{,}5$, всегда *обеспечивает ту же точность сразу для всех значений* x в промежутке (0; 0,5). Стало быть, в этом промежутке ряд (2) сходится равномерно.

На черт. 402 равномерность сходимости проявляется в том, что в промежутке (0; 0,5) наибольшее отклонение графика s_n от прямой DB стремится к нулю по мере роста n. В промежутке (0, 1) этого не происходит.

§ 386. Определение равномерной и неравномерной сходимости[1])

Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{1}$$

сходящийся в (замкнутом или незамкнутом) промежутке (a, b), называется *равномерно сходящимся* в этом промежутке, если остаток $R_n(x)$, начиная с некоторого номера N, *одного и того же для всех рассма-*

---

[1]) Рекомендуется предварительно прочесть § 385.

триваемых значений x, остается по абсолютному значению меньшим любого заранее данного положительного числа ε:

$$|R_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{при} \qquad n \geqslant N(\varepsilon) \tag{2}$$

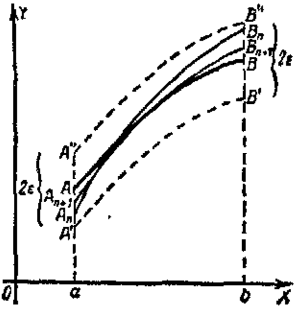
(номер N зависит *только* от ε).

Если же для некоторого ε условию (2) нельзя удовлетворить (для всех x сразу) ни при каком значении N, то говорят, что ряд (1) в промежутке (a, b) *сходится неравномерно*.

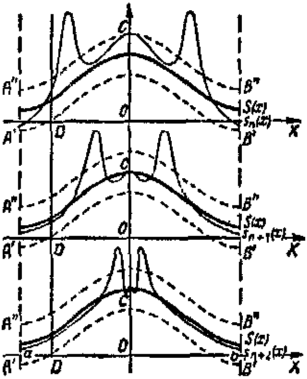
Примеры см. в § 385.

§ 387. Геометрическое истолкование равномерной и неравномерной сходимости

Пусть AB (черт. 403) есть график суммы $S(x)$ ряда, сходящегося в промежутке (a, b), а линии A_nB_n, $A_{n+1}B_{n+1}$, ... — графики частичных сумм $s_n(x)$, $s_{n+1}(x)$, ... Заключим AB в полосу $A'A''B''B'$, у которой каждая из границ



Черт. 403.



Черт. 404.

$A'B'$ и $A''B''$ отстоит от AB (по вертикали) на постоянное расстояние ε. При равномерной сходимости ряда все линии A_nB_n, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, помещаются (в пределах рассматриваемого промежутка) целиком внутри полосы.

Этого не будет при неравномерной сходимости. Наглядным пояснением может служить черт. 404; здесь у всех графиков $s_n(x)$ есть по два «языка», выбивающихся из полосы $A'A''B''B'$ (они по мере роста n придвигаются к точке C). Между тем *над каждой отдельной* точкой D участка ab графики $s_n(x)$ неограниченно приближаются к графику $S(x)$ (после того как язык миновал точку D).

§ 388. Признак равномерной сходимости; правильные ряды

Если каждый член $u_n(x)$ функционального ряда

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

при любом x, взятом в промежутке (a, b), по абсолютному значению не превосходит положительного числа A_n и если числовой ряд

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots \tag{2}$$

сходится, то функциональный ряд (1) в этом промежутке равномерно сходится.

Пояснение. Сходимость ряда (1) вытекает из §§ 377 и 373. Остаток ряда (1) по абсолютной величине не превосходит остатка ряда (2). Начиная с того номера N, который обеспечивает точность до ε для ряда (2), и подавно обеспечивается точность до ε для ряда (1) для всех x сразу.

Пример. Функциональный ряд

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots \tag{3}$$

равномерно сходится в промежутке $(-\infty, +\infty)$, ибо его члены при любом x не превосходят по абсолютному значению соответственных членов положительного числового ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{4}$$

Последний же сходится (§ 373, пример 3). Точность до 0,1 обеспечивается для ряда (4), начиная с номера $n=10$. Для ряда (3) та же точность и подавно обеспечивается, начиная с десятой частичной суммы.

В замкнутом промежутке $(-\pi, \pi)$ сумма ряда (3) равна

$$\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right).$$

При $x=\pm\pi$ функциональный ряд (3) обращается в числовой ряд (4); сумма последнего равна $\frac{\pi^2}{6}$ (см. § 417, пример 3).

Замечание. Функциональный ряд, подходящий под признак настоящего параграфа, называется *правильным*. Всякий правильный ряд сходится равномерно. Неправильные же ряды сходятся в одних случаях равномерно, в других — неравномерно.

§ 389. Непрерывность суммы ряда

Теорема. Если все члены функционального ряда

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

равномерно сходящегося в промежутке (a, b), являются (в этом промежутке) непрерывными функциями, то и сумма ряда (1) есть непрерывная функция в промежутке (a, b).

Пример 1. Все члены ряда

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots, \tag{2}$$

равномерно сходящегося в промежутке $(-\infty, +\infty)$ (§ 388), являются непрерывными функциями. Стало, быть, сумма ряда (2) есть функция, непрерывная при всяком значении x.

Замечание. Сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций в одних случаях непрерывна, в других разрывна.

Пример 2. Все члены ряда

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots, \tag{3}$$

сходящегося в замкнутом промежутке (0, 1) неравномерно (§ 385), являются непрерывными функциями. Но сумма ряда есть функция, разрывная при $x=1$ (см. § 384, пример 3).

Пример 3. Ряд

$$(x-x^2)+[(x^2-x^4)-(x-x^2)]+\\+[(x^3-x^6)-(x^2-x^4)]+\ldots \tag{4}$$

с общим членом

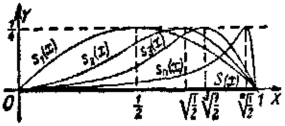
$$u_n(x)=(x^n-x^{2n})-(x^{n-1}-x^{2n-2}) \tag{5}$$

сходится в замкнутом промежутке (0, 1) неравномерно, но имеет непрерывную сумму $S(x)$, тождественно равную нулю.

Действительно, мы имеем $s_n(x)=x^n-x^{2n}$, и для каждого отдельного значения x промежутка (0, 1) это выражение стремится к нулю, так что ряд сходится и имеет сумму $S(x)=0$.

Но остаток ряда $R_n(x)=S(x)-s_n(x)=x^n-x^{2n}$ нельзя сделать меньшим чем $\frac{1}{4}$ сразу для всех рассматриваемых значений x, ибо, каково бы ни было n, остаток равен $\frac{1}{4}$ при $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$.

Стало быть (§ 385), сходимость ряда (4) — неравномерная. Между тем сумма его $S(x) = 0$ есть непрерывная функция.



Черт. 405.

Геометрически: графики всех частичных сумм s_n (черт. 405) имеют «горбы» на прямой $y = \frac{1}{4}$, так что ни один график не помещается целиком внутри полосы между прямыми $y = \pm \frac{1}{4}$. Это не мешает сумме ряда (изображаемой жирным отрезком оси OX) быть непрерывной функцией.

§ 390. Интегрирование рядов

Теорема. Если сходящийся ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = S(x), \tag{1}$$

составленный из функций, непрерывных в промежутке (a, b), сходится в этом промежутке равномерно, то его можно интегрировать почленно. Ряд

$$\int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \ldots \tag{2}$$

равномерно сходится в промежутке (a, b), и сумма его равна интегралу $\int_a^x S(x)\,dx$ от суммы ряда (1):

$$\int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \ldots =$$

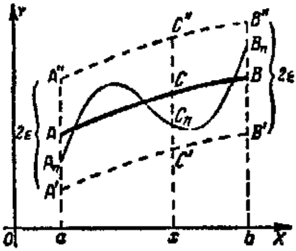
$$= \int_a^x S(x)\,dx. \tag{3}$$

Пояснение. Частичная сумма $s'_n(x)$ ряда (2) есть интеграл частичной суммы $s_n(x)$ ряда (1)

$$s'_n(x) = \int_a^x s_n(x)\,dx$$

и изображается площадью aA_nC_nx (черт. 406). Интеграл $\int_a^x S(x)\,dx$ суммы $S(x)$ ряда (1) изображается площадью $aACx$.

Теорема утверждает, во-первых, что ряд (2) сходится и сумма его равна $\int_a^x S(x)\,dx$.



Черт. 406.

Геометрически: площадь $aACx$ (черт. 406) есть предел площади aA_nC_nx при $n \to \infty$.

Действительно, при равномерной сходимости ряда (1) график A_nC_n помещается внутри полосы $A'A''C''C'$ (§ 387). Значит, площадь aA_nC_nx заключена между площадями $aA'C'x$ и $aA''C''x$. А обе они имеют пределом площадь $aACx$.

Теорема утверждает, во-вторых, что ряд (2) сходится равномерно.

Геометрически: сразу для всех положений ординаты xC'' величину

$$|\text{пл. } aACx - \text{пл. } aA_nC_nx|, \tag{4}$$

начиная с некоторого номера n, можно сделать меньше любой заранее данной площади E. Действительно, полосу $A'A''B''B'$ можно сузить настолько, чтобы ее площадь была меньше E. Тогда площадь $A'A''C''C'$ и подавно меньше E, а величина (4) еще меньше.

Пример 1. Ряд

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \tag{5}$$

в промежутке $(0, q)$, где q — правильная дробь, сходится равномерно (по признаку § 388), ибо его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося (§ 374) положительного ряда

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots \tag{6}$$

При этом [1])

$$S(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{7}$$

[1]) Формулу (7) можно получить почленным умножением ряда

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

на самого себя (ср. § 381, пример 2).

Согласно теореме настоящего параграфа ряд

$$\int_0^x dx+\int_0^x 2x\,dx+\ldots+\int_0^x nx^{n-1}dx+\ldots \tag{8}$$

равномерно сходится в промежутке $(0,\ q)$ и сумма его равна

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x \frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}-1 \quad (0\leqslant x\leqslant q). \tag{9}$$

Это легко проверить, ибо ряд (8) есть прогрессия

$$x+x^2+x^3+\ldots$$

Замечание. Если ряд (1) сходится неравномерно, то почленное интегрирование в одних случаях допустимо, в других нет (см. примеры 2 и 3).

Пример 2. Неравномерно сходящийся в промежутке $(0,\ 1)$ ряд

$$(x-x^2)+[(x^2-x^4)-(x-x^2)]+\\+[(x^3-x^6)-(x^2-x^4)]+\ldots=0 \tag{10}$$

(см. § 389, пример 3) можно интегрировать почленно в пределах от 0 до 1:

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx+\int_0^1 [(x^2-x^4)-(x-x^2)]\,dx+\ldots=\int_0^1 0\cdot dx=0. \tag{11}$$

Действительно, частичная сумма s_n' ряда (11) равна

$$s_n'=\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx=\frac{n}{(n+1)(2n+1)}. \tag{12}$$

Она стремится к нулю при $n\to\infty$.

Геометрически: площадь, ограниченная графиком $s_n(x)$ (черт. 405) и отрезком $(0,\ 1)$, стремится к нулю, несмотря на наличие «горба». (По мере роста n «горб» неограниченно суживается, а высота его остается постоянной.)

Пример 3. Ряд

$$(x-x^2)+[2(x^2-x^4)-(x-x^2)]+\\+[3(x^3-x^6)-2(x^2-x^4)]+\ldots \tag{13}$$

с общим членом

$$u_n(x)=n(x^n-x^{2n})-(n-1)(x^{n-1}-x^{2n-2}) \tag{14}$$

сходится в промежутке (0, 1) и имеет непрерывную сумму $S(x)=0$ [доказывается так же, как для ряда (10)]. Следовательно,

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Между тем почленное интегрирование в пределах от 0 до 1 дает не нуль, а $\frac{1}{2}$. Действительно, получаем ряд

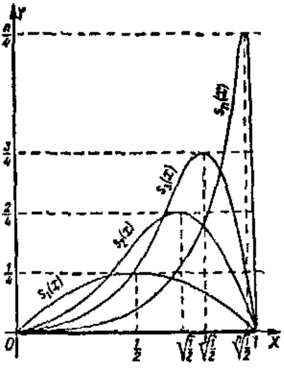
$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx + \left[2\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx - \int_0^1 (x-x^2)\,dx\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[n\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx - (n-1)\int_0^1 (x^{n-1}-x^{2n-2})\,dx\right] + \ldots \tag{16}$$

с частичной суммой

$$s'_n = n\int_0^1 (x^n-x^{2n})\,dx =$$
$$= \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}. \tag{17}$$

Следовательно, сумма его S' равна

$$S' = \lim_{n\to\infty} s'_n = \frac{1}{2}. \tag{18}$$



Черт. 407.

Несогласие между (15) и (18) вызвано неравномерной сходимостью ряда (13) (неравномерность доказывается, *как в примере 3 § 389*).

Геометрически: график s_n (черт. 407) стремится к слиянию с осью абсцисс над любым куском отрезка (0, 1), не содержащим точки $x=1$. Но вблизи этой точки образуется горб. Он неограниченно приближается к концу $x=1$. При этом он сужипается по горизонтали, но одновременно растет вверх [1]). В результате компенсации площадь между s_n и отрезком (0, 1) стремится не к нулю, а к $\frac{1}{2}$.

[1]) Графики черт. 407 получаются из одноименных графиков черт 405 растяжением по вертикали в отношении $n:1$.

Замечание. Если видоизменить ряд (13), взяв ряд с общим членом

$$u_n(x)=n^2\ (x^n-x^{2n})-(n-1)^2\ (x^{n-1}-x^{2n-2}), \tag{14a}$$

то по-прежнему будем иметь:

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0, \tag{16a}$$

но после почленного интегрирования получим ряд с частичной суммой

$$s'_n=\frac{n^3}{(n+1)(2n+1)}. \tag{18a}$$

Он будет расходящимся, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n=\infty$ (рост горба вверх будет более быстрым, чем сужение по горизонтали).

§ 391. Дифференцирование рядов

Даже при равномерной сходимости ряда почленное его дифференцирование не всегда допустимо. Нижеследующая теорема дает признак, обеспечивающий возможность почленного дифференцирования.

Теорема. Если функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

сходится в промежутке (a, b) и производные его членов непрерывны в этом промежутке, то ряд (1) можно почленно дифференцировать *при условии, что полученный ряд*

$$u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots+u'_n(x)+\ldots \tag{2}$$

будет равномерно сходящимся в данном промежутке. Сумма ряда (2) будет производной от суммы ряда (1).

Доказательство основано на взаимной обратности дифференцирования и интегрирования и опирается на теорему § 390.

Пример. Ряд

$$x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \tag{3}$$

сходится в промежутке $(0, q)$, где q — правильная дробь. При этом

$$x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{x}{1-x}\quad (0\leqslant x\leqslant q). \tag{4}$$

Производные членов непрерывны в промежутке $(0, q)$, и составленный из них ряд

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots \tag{5}$$

равномерно сходится в этом промежутке (§ 390, пример 1). Стало быть, сумма ряда (5) есть производная от суммы $\frac{x}{1-x}$ ряда (3):

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (6)$$

Замечание 1. В теореме не высказано требование, чтобы ряд (1) сходился *равномерно*. При условиях теоремы это требование само собой выполняется (в силу теоремы § 390).

Замечание 2. Даже при равномерной сходимости ряда (1) и непрерывности производных $u_n(x)$ ряд (2) может оказаться неравномерно сходящимся и тогда сумма его иногда равна, а иногда не равна производной от суммы ряда (1). Более того, ряд (2) может оказаться расходящимся. Так, ряд

$$\sin x+\frac{\sin 2^4x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n^4x}{n^2}+\ldots \qquad (7)$$

сходится равномерно на всей числовой прямой (ср. пример § 388), тогда как ряд производных

$$\cos x+2^2\cos 2^4x+\ldots+n^2\cos n^4x+\ldots \qquad (8)$$

расходится при $x=0$ (а также для бесчисленного множества значений x).

§ 392. Степенной ряд

Важнейшие для практики функциональные ряды — это степенные (об их происхождении см. § 270). *Степенным рядом* называется ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (1)$$

а также ряд более общего вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (2)$$

где x_0 — постоянная величина. О ряде (1) говорят, что он *расположен по степеням* x, о ряде (2) — что он *расположен по степеням* $x-x_0$.

Постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Если обозначить $x-x_0$ через z, то ряд (2) окажется расположенным по степеням z, т. е. примет вид (1). Поэтому в дальнейшем, если особо не оговорено, степенным рядом именуется ряд вида (1). Степенной ряд всегда сходится при $x=0$. Относительно сходимости его в других точках могут представиться три случая, рассмотренные в § 393.

§ 393. Промежуток и радиус сходимости степенного ряда

1. Может случиться, что степенной ряд расходится во всех точках, кроме $x=0$. Таков, например, ряд

$$1^1x+2^2x^2+3^3x^3+\ldots+n^nx^n+\ldots,$$

у которого общий член $n^nx^n=(nx)^n$ неограниченно увеличивается по абсолютному значению, начиная с момента, когда nx становится больше единицы. Такие степенные ряды практического значения не имеют.

2. Степенной ряд может сходиться во всех точках. Таков, например, ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots,$$

сумма которого при всяком значении x равна e^x (§ 272, пример 1).

3. В типичном случае степенной ряд сходится в одних точках и расходится в других.

Пример 1. Геометрическая прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \tag{1}$$

сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$. Здесь областью сходимости (§ 384) является промежуток $(-1, +1)$, из которого исключены оба конца $x=+1$ и $x=-1$. Сумма ряда (1) (в области сходимости) есть

$$\frac{1}{1-x}.$$

Пример 2. Степенной ряд

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots \tag{2}$$

сходится при $|x|\leqslant 1$ и расходится при $|x|>1$ (ср. § 374, пример 2). Область сходимости — промежуток $(-1, +1)$, в который включены оба конца $x=+1$ и $x=-1$. Сумма ряда (2) не выражается через элементарные функции.

Пример 3. Степенной ряд

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. При $x=-1$ он также расходится (§ 369, пример 3), при $x=1$ — сходится (§ 369, пример 4). Область сходимости — промежуток $(-1, +1)$, включая точку $x=1$; точка $x=-1$ исключается.

Сумма ряда (3) (в области сходимости) есть $\ln(1+x)$ (§ 272, пример 2). Ряд (3) получается почленным интегрированием ряда

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}.$$

Теорема. Область сходимости степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{4}$$

есть некоторый промежуток $(-R, R)$, симметричный относительно точки $x=0$. Иногда в него надо включить оба конца $x=R$ и $x=-R$, иногда только один, а иногда надо оба конца исключить.

Промежуток $(-R, R)$ называется *промежутком сходимости*, положительное число R — *радиусом сходимости* степенного ряда. Если степенной ряд сходится только в точке $x=0$, то $R=0$. В примерах 1—3 радиус сходимости равен единице. Если ряд сходится во всех точках, то говорят, что радиус сходимости равен бесконечности ($R=\infty$).

§ 394. Разыскание радиуса сходимости

Теорема. Радиус сходимости R степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

равен пределу отношения $|a_n|:|a_{n+1}|$ при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует:

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n:a_{n+1}|. \tag{2}$$

Пример 1. Найти радиус и область сходимости ряда

$$\frac{0,1x}{1}-\frac{0,01x^2}{2}+\frac{0,001x^3}{3}-\ldots-\frac{(-0,1)^nx^n}{n}+\ldots \tag{3}$$

Решение. Здесь $a_n=-\frac{(-0,1)^n}{n}$. Имеем:

$$|a_n|:|a_{n+1}|=\frac{0,1^n}{n}:\frac{0,1^{n+1}}{n+1}=10\frac{n+1}{n},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n:a_{n+1}|=10. \tag{4}$$

Радиус сходимости равен 10, промежуток сходимости есть $(-10, 10)$. Внутри этого промежутка ряд (3) сходится, вие его — расходится. При $x = 10$ ряд (3) принимает вид

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{(-1)^n}{n}+\ldots \qquad (5)$$

Этот ряд сходится (§ 369, пример 4). При $x=-10$ получаем расходящийся (§ 369, пример 3) ряд

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$$

Стало быть, область сходимости есть промежуток $(-10, +10)$, в который включается конец $x=+10$; другой конец исключается.

Пояснение. Будем рассматривать x как данное число и применим к ряду (3) признак Даламбера (§ 378). Имеем:

$$u_n = -\frac{(-0,1)^n x^n}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} : u_n| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot 0,1\frac{n}{n+1}\right) = |x|\cdot 0,1.$$

По признаку Даламбера ряд (3) сходится, когда $|x|\cdot 0,1<1$, т. е. когда $|x|<10$, и расходится, когда $|x|\cdot 0,1>1$, т. е. когда $|x|>10$.

Буквально повторяя это рассуждение применительно к ряду (1), получим формулу (2).

Замечание 1. Сумма ряда (3) (в области сходимости) равна $\ln(1+0,1x)$ (ср. § 393, пример 3).

Пример 2. Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (6)$$

Решение. Здесь $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. По формуле (2) имеем:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right] = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty. \qquad (7)$$

Ряд (6) сходится во всех точках. Сумма его равна e^{-x} (ср. § 272, пример 1).

Замечание 2. Если ряд (1) содержит бесчисленное множество коэффициентов, равных нулю, то отношение $|a_n| : |a_{n+1}|$ не имеет предела, и *формулу* (2) *применять нельзя*, даже если выкинуть нулевые коэффициенты и заново занумеровать остальные по порядку.

Пример 3. Найти радиус сходимости ряда

$$\frac{0,1\,z^2}{1}-\frac{0,01\,z^4}{2}+\frac{0,001\,z^6}{3}-\ldots, \qquad (8)$$

получающегося из ряда (3) подстановкой $x=z^2$.

Решение. Так как ряд (3) сходится при $|x| < 10$ и расходится при $|x| > 10$, то ряд (8) сходится при $|z| < \sqrt{10}$ и расходится при $|z| > \sqrt{10}$. Значит, радиус сходимости ряда (8) есть $\sqrt{10}$. Формула (2) неприменима: если учитывать нулевые коэффициенты при нечетных степенях z, то отношение $|a_n|:|a_{n+1}|$ не имеет смысла при четных n; если же выкинуть нулевые коэффициенты и занумеровать остальные по порядку, то предел отношения $|a_n|:|a_{n+1}|$ будет равен 10 и не даст радиуса сходимости.

Сумма ряда (8) (в области сходимости) есть $\ln(1+z^2)$.

§ 395. Область сходимости ряда, расположенного по степеням $x-x_0$

Область сходимости степенного ряда

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (1)$$

есть некоторый промежуток $(x_0-R,\ x_0+R)$, симметричный относительно точки x_0. Иногда в него надо включить оба конца, иногда один, а иногда надо оба конца исключить.

Промежуток $(x_0-R,\ x_0+R)$ называется *промежутком сходимости*, положительное число R — *радиусом сходимости* ряда (1). Если ряд сходится во всех точках, то радиус сходимости — бесконечный ($R=\infty$).

Если отношение $|a_n|:|a_{n+1}|$ имеет предел (конечный или бесконечный), то радиус сходимости находится по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n:a_{n+1}|. \qquad (2)$$

Пример. Найти радиус и область сходимости ряда

$$\frac{x+0{,}2}{1}+\frac{(x+0{,}2)^2}{2}+\ldots+\frac{(x+0{,}2)^n}{n}+\ldots \qquad (3)$$

Здесь $x_0=-0{,}2$, $a_n=\frac{1}{n}$. По формуле (2) находим:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right|=1.$$

Область сходимости есть промежуток $(-1{,}2;\ 0{,}8)$, из которого исключен один конец $x=0{,}8$. Сумма ряда (3) (в области сходимости) есть $-\ln[1-(x+0{,}2)]=\ln\frac{1}{0{,}8-x}$.

§ 396. Теорема Абеля[1])

Теорема. Если степенной ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

сходится (абсолютно или условно) в какой-либо точке x_0, то он сходится *абсолютно и равномерно* во всяком замкнутом промежутке (a, b), лежащем *внутри* промежутка $(-|x_0|, +|x_0|)$.

Замечание 1. Слово «внутри» понимается в узком смысле, т. е. по условию теоремы ни один из концов отрезка (a, b) не совпадает ни с точкой $|x_0|$, ни с точкой $-|x_0|$.

Пример. Ряд

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{2}$$

сходится (условно) в точке $x=-1$, обращаясь в ряд (§ 369, пример 4)

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

По теореме Абеля ряд (2) сходится абсолютно и равномерно во всяком замкнутом промежутке, лежащем внутри промежутка $(-1, 1)$, например в замкнутом промежутке $(-0{,}99;\ 0{,}99)$.

Если в качестве левого конца отрезка (a, b) взять точку $x_0=-1$, то нарушится *абсолютная* сходимость (в самой точке -1). Если в качестве правого конца (a, b) взять точку $x_0=1$, то ряд (2) станет расходящимся.

Замечание 2. Если в качестве одного из концов замкнутого промежутка (a, b) взять x_0, то сходимость в таком промежутке остается равномерной. То же относится и к точке $-x_0$, *если в ней ряд* (1) *сходится*.

§ 397. Действия со степенными рядами

Пусть даны два степенных ряда:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S_1(x), \tag{1}$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots=S_2(x). \tag{2}$$

---

[1]) Н. Абель (1802—1829) — норвежский математик. Он прожил только 27 лет, но создал работы первостепенной важности. Утверждение о равномерной сходимости ряда (1) представляет позднейшее добавление (различение равномерной и неравномерной сходимости введено Вейерштрассом в конце 40-х годов 19-го в.).

Пусть A — радиус сходимости ряда (1) и B — радиус сходимости ряда (2). Обозначим через r меньший из них (если они равны, то r — общее их значение).

Если ряды (1), (2) почленно сложить, вычесть или перемножить (по схеме умножения многочлена на многочлен; ср. § 381), то получим новые степенные ряды. Их радиусы сходимости в худшем случае равны r, а могут и превосходить r. Их суммы соответственно равны $S_1(x)+S_2(x)$, $S_1(x)-S_2(x)$, $S_1(x)\,S_2(x)$ (ср. §§ 371, 381, 396).

Почленное деление ряда (1) на ряд (2) выполнимо по схеме § 382 при условии, что $b_0\neq 0$. Если $r\neq 0$, то радиус сходимости r_1 полученного ряда отличен от нуля, но не превосходит A; может даже случиться, что r_1 меньше каждого из радиусов A, B [см. пример 4 и замечание к формуле (4) § 401]. Сумма нового ряда (в промежутке его сходимости) равна $S_1(x):S_2(x)$.

Если $b_0=0$, то почленное деление вовсе невозможно при $a\neq 0$ (ибо частное $S_1(x):S_2(x)$ бесконечно велико при $x\to 0$ и его нельзя представить рядом, расположенным по степеням x). Если же $b_0=0$ и $a_0=0$, то почленное деление невозможно, когда низшая степень делимого меньше низшей степени делителя (по той же причине). В противном же случае деление возможно, и новый ряд в промежутке $(-r_1, r_1)$ имеет сумму $S_1(x):S_2(x)$ [1].

Пример 1. В промежутке $(-1, +1)$ имеем:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x},\tag{3}$$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}.\tag{4}$$

Складывая почленно, находим:

$$2+2x^2+2x^4+\ldots=\frac{2}{1-x^2}.\tag{5}$$

Вычитая почленно (4) из (3), получаем:

$$2x+2x^3+2x^5+\ldots=\frac{2x}{1-x^2}.\tag{6}$$

Перемножая почленно (ср. § 381, пример 1), имеем:

$$1+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}.\tag{7}$$

[1] Для $x=0$ эта сумма (т. е. свободный член нового ряда) есть предел частного $S_1(x):S_2(x)$ при $x\to 0$.

Разделив почленно ряд (3) на ряд (4) (ср. § 382, пример), находим:

$$1+2x+2x^2+2x^3+\ldots=\frac{1+x}{1-x}. \qquad (8)$$

Ряды (5)—(8) имеют по теореме § 394 радиус сходимости $R=1$, как и ряды (3) и (4). Формулы (5)—(8) легко проверить: их левые части — геометрические прогрессии [в (8), начиная со второго члена].

Пример 2. В промежутке $(-\infty, +\infty)$ имеем [§ 272, пример 1)

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x. \qquad (9)$$

Заменяя x на $-x$, получаем:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^{-x}. \qquad (10)$$

Так как $e^x \cdot e^{-x}=1$, то при почленном умножении все члены, кроме свободного, должны взаимно уничтожиться, что и происходит на самом деле.

Пример 3. При почленном делении ряда (9) на ряд (10) получаем ряд

$$1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\ldots \qquad (11)$$

Закон следования коэффициентов не усматривается сразу, но, зная, что ряд (11) сходится в некотором промежутке и имеет там сумму $e^x : e^{-x}=e^{2x}$, можно представить ряд (11) в виде

$$1+\frac{2}{1!}x+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^4}{4!}x^4+\ldots+\frac{2^n}{n!}x^n+\ldots \qquad (12)$$

Ряд (12), как и ряды (9), (10), имеет по теореме § 394 бесконечный радиус сходимости.

Пример 4. Будем рассматривать двучлены $1+x$ и $1-x$ как степенные ряды, у которых коэффициенты всех членов, кроме двух первых, равны нулю. Радиусы сходимости A и B этих рядов бесконечны. При почленном делении $1+x$ на $1-x$ получится степенной ряд

$$1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\ldots \qquad (13)$$

Члены его, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x. Сумма ряда (13) в промежутке его сходимости равна $(1+x):(1-x)$, но радиус сходимости r_1 не бесконечен; он равен единице.

§ 398. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

Теорема 1. Если степенной ряд имеет радиус сходимости R и сумму $S(x)$:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S(x), \tag{1}$$

то ряд, полученный его почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R и сумма его есть производная функция от $S(x)$:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=S'(x). \tag{2}$$

Стало быть, сумма степенного ряда есть дифференцируемая функция; притом она имеет производные любого порядка [ибо к ряду (2) снова можно применить теорему 1 и т. д.].

Замечание 1. Если ряд (1) расходится на каком-либо конце промежутка $(-R, R)$, то на этом конце ряд (2) тоже расходится. Сходимость же ряда (1) на конце промежутка $(-R, R)$ может сохраниться в ряде (2), но может и нарушиться.

Замечание 2. Сходимость ряда (2) несколько хуже, чем ряда (1) (ибо na_n по абсолютному значению больше, чем a_n).

Пример 1. Последовательно дифференцируя ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}\ (-1<x<+1), \tag{3}$$

у которого $R=1$, получаем ряды с тем же радиусом сходимости. Их суммы суть последовательные производные от $\frac{1}{1-x}$:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}, \tag{4}$$

$$2+6x+12x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \tag{5}$$

$$6+24x+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}+\ldots=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}. \tag{6}$$

Ряд (3) расходится на обоих концах промежутка сходимости, ряды (4) — (6) — тоже.

Пример 2. Ряд (3) получается дифференцированием ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=-\ln(1-x). \tag{7}$$

Ряд (7) расходится при $x=1$ и сходится при $x=-1$, но после дифференцирования сходимость на конце $x=-1$ нарушается.

Теорема 2. Ряд, полученный почленным интегрированием ряда (1) в пределах от нуля до x, имеет тот же радиус сходимости и сумма его равна $\int_0^x S(x)\,dx$:

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots=\int_0^x S(x)\,dx. \quad (8)$$

Замечание 3. Если ряд (1) сходится на одном из концов промежутка $(-R, R)$, то на этом конце ряд (8) тоже сходится, и формула (8) остается в силе. Расходимость же ряда (1) на конце промежутка $(-R, R)$ может сохраниться в ряде (8), но может и нарушиться. Сходимость ряда (8) несколько лучше, чем ряда (1).

Пример 3. Радиус сходимости геометрической прогрессии

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

равен единице. Интегрируя почленно, получаем (при $|x|<1$):

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$$

$$=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x. \quad (10)$$

Радиус сходимости ряда (10) тоже равен единице. На конце $x=1$ ряд (9) расходится, а ряд (10) сходится (по признаку Лейбница), и мы имеем [1]):

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}.$$

На конце $x=-1$ ряд (10), как и (9), расходится (по интегральному признаку).

[1]) Этот результат найден Лейбницем.

Пример 4. Интегрируя почленно ряд

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sin x \tag{11}$$

(§ 272, пример 2), для которого $R=\infty$, получаем:

$$\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}+\ldots=\int_0^x \sin x\,dx = 1-\cos x,$$

где x — любое число. Отсюда находим разложение функции $\cos x$:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \tag{12}$$

Здесь тоже $R=\infty$.

§ 399. Ряд Тейлора [1]

Определение. *Рядом Тейлора* (расположенным по степеням $x-x_0$) *для функции* $f(x)$ называется степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{1}$$

При $x_0=0$ ряд Тейлора (расположенный по степеням x) имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{2}$$

Пример 1. Составить для функции $f(x)=\frac{1}{5-x}$ ряд Тейлора, расположенный по степеням $x-2$.

Решение. Вычислим значения функции $f(x)$ и ее последовательных производных при $x=2$. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} f(2)&=\frac{1}{3}, \quad f'(2)=\left.\frac{1}{(5-x)^2}\right|_{x=2}=\frac{1}{3^2},\\ f''(2)&=\left.\frac{1\cdot 2}{(5-x)^3}\right|_{x=2}=\frac{1\cdot 2}{3^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(2)=\\ &=\left.\frac{n!}{(5-x)^{n+1}}\right|_{x=2}=\frac{n!}{3^{n+1}},\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] Настоятельно рекомендуется предварительно прочесть § 270.

Искомый ряд есть

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}(x-2)+\frac{1}{3^3}(x-2)^2+\ldots+\frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n+\ldots \qquad (4)$$

Пример 2. Для той же функции составить ряд Тейлора, расположенный по степеням x.

Решение. Как в примере 1, находим:

$$f(0)=\frac{1}{5},\quad f'(0)=\frac{1}{5^2},\quad f''(0)=\frac{2!}{5^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=\frac{n!}{5^{n+1}},\ \ldots \qquad (5)$$

Искомый ряд имеет вид

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}x+\frac{1}{5^3}x^2+\ldots+\frac{1}{5^{n+1}}x^n+\ldots \qquad (6)$$

Пример 3. У функции $\frac{1}{x-5}$ нет ряда Тейлора, расположенного по степеням $x-5$, ибо функция в точке $x=5$ не определена (обращается в бесконечность).

Пример 4. У функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ нет ряда Тейлора, расположенного по степеням x, ибо производная $f'(0)$ бесконечна. Но у нее есть ряд Тейлора, расположенный по степеням $x-1$. Он имеет вид

$$1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}(x-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{2\cdot 5}{3^3}(x-1)^3+$$
$$+\frac{1}{4!}\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}(x-1)^4+\ldots$$

§ 400. Разложение функции в степенной ряд

Разложить функцию $f(x)$ *в степенной ряд*, расположенный по степеням $x-x_0$, — значит составить ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (1)$$

у которого радиус сходимости не равен нулю, а сумма тождественно равна данной функции всюду внутри промежутка сходимости.

Теорема. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (1), то разложение единственно, и ряд (1) совпадает с рядом Тейлора, расположенным по степеням $x-x_0$.

Пояснение. По условию в промежутке сходимости имеем тождественно:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2)$$

Значит (§ 398, теорема 1), функция $f(x)$ обладает производными любого порядка, и во всех точках промежутка сходимости мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-x_0) + 3\cdot 4a_4(x-x_0)^2 + \dots, \\ f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-x_0) + \dots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и т. д. При $x=x_0$ формулы (2) и (3) дают:

$$a_0 = f(x_0),\ \ a_1 = f'(x_0),\ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ \dots, \tag{4}$$

т. е. разложение (2) единственно и совпадает с рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Пример 1. Найти значение пятой производной от функции $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ при $x=0$.

Непосредственное вычисление утомительно. Но функцию $f(x)$ легко разложить в ряд, расположенный по степеням x, выполняя деление $x:(1-x^2)$ (§ 397). Получается разложение

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots \tag{5}$$

в промежутке $(-1, +1)$. Но ряд (5) есть ряд Тейлора функции $f(x)$, расположенный по степеням x. Значит, коэффициент $a_5 = 1$ дает значение $\frac{f^{V}(0)}{5!}$, т. е. $f^{V}(0) = 5! = 120$. Так же найдем:

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!,\quad f^{(2n)}(0) = 0. \tag{6}$$

Определение. Функция $f(x)$, разлагающаяся в ряд, расположенный по степеням $x-x_0$, называется *аналитической в точке* x_0.

Пример 2. Функция $\sqrt[3]{x}$ — не аналитическая в точке $x=0$ (§ 399, пример 4); та же функция — аналитическая в точке $x=1$ (и в любой точке $x_0 \neq 0$).

Замечание. Функция $f(x)$, определенная в точке $x=x_0$, может быть неаналитической в этой точке по одной из трех причин:

1) Она может не иметь при $x=x_0$ конечной производной какого-либо порядка; так, функция $\sqrt[3]{x}$ — не аналитическая в точке $x=0$, так как здесь первая производная бесконечна.

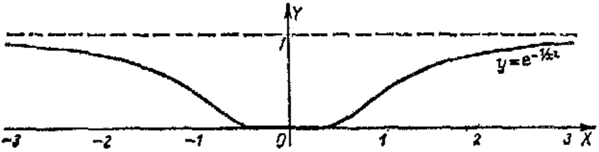
2) Ряд Тейлора функции $f(x)$, обладая ненулевым радиусом сходимости, может иметь сумму, не равную $f(x)$.

3) Радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ может равняться нулю.

Практическое значение имеет лишь первый тип. В примере 3 рассмотрена функция второго типа.

Известные в настоящее время примеры функций третьего типа слишком сложны.

Пример 3. Определим функцию $\varphi(x)$ (черт. 408) формулой $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (при $x \neq 0$). При $x=0$ положим $\varphi(0)=0$. У этой функции все производные в точке $x=0$ равны нулю [1]). Значит, у функции



Черт. 408.

$f(x) = e^x + \varphi(x)$ все производные $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... будут иметь те же значения, что и соответствующие производные от e^x, т. е. ряд Тейлора для функции $f(x)$ будет:

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд обладает ненулевым радиусом сходимости ($R=\infty$), но его сумма (она составляет e^x) не равна $f(x)$.

---

[1]) При $x \neq 0$ имеем

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

При $x=0$ это выражение непригодно, здесь

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

(по правилу Лопиталя). Далее,

$$\varphi''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(h)-\varphi'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h^4}e^{-\frac{1}{h^2}} = 0 \text{ и т. д.}$$

§ 401. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Предварительные замечания. Для разложения функции $f(x)$ в ряд, расположенный по степеням $x-x_0$, можно искать последовательные производные $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$, ... Если они существуют и конечны, получаем ряд Тейлора

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Ввиду сказанного в § 400 надо еще доказать, что этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости и дает в сумме именно $f(x)$, а не другую функцию. Иногда удается оценить «остаточный член» $R_n=f(x)-s_n(x)$ и доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. С этой целью R_n представляют в форме Лагранжа (§ 272, примеры 1 и 2) или в других видах.

В большинстве случаев такая оценка трудна или не выполнима на практике. Тогда можно получить разложение иными способами, минуя вычисление производных $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ... (последние сами собой получаются из найденного разложения, как в примере 1 § 400).

Ниже даны разложения простейших функций по степеням x. Общий член, когда его вид легко усмотреть, опускается.

Показательные функции.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ (R=\infty), \tag{1}$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\ (R=\infty). \tag{1a}$$

Оба разложения можно получить оценкой остаточного члена (§ 272, пример 1). Формула (1a) получается из (1) заменой x на $-x$.

Тригонометрические функции.

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ (R=\infty), \tag{2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ (R=\infty). \tag{3}$$

Оба разложения можно получить оценкой остаточного члена (§ 272, пример 2). Одно из них можно получить из другого почленным дифференцированием (или интегрированием).

Почленным делением (2) на (3) получаем:

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots\left(R=\frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

Закон следования коэффициентов не выражается элементарной формулой и потому разыскать радиус сходимости по теореме § 394 затруднительно. Но ясно, что R не превосходит $\frac{\pi}{2}$; ведь уже при $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ряд (4) расходится, поскольку $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\infty$.

Замечание. Радиус сходимости ряда (4) оказывается меньшим, чем каждый из радиусов сходимости рядов (2), (3), из которых ряд (4) получается почленным делением. Ср. § 397, пример 4.

Функция $\operatorname{ctg} x$ не разлагается по степеням x (ибо $\operatorname{ctg} 0=\infty$).

Гиперболические функции [1].

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad (R=\infty) \qquad (2a)$$

(*гиперболический синус*; обозначение: $\operatorname{sh} x$),

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \quad (R=\infty) \qquad (3a)$$

(*гиперболический косинус*; обозначение: $\operatorname{ch} x$),

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=$$
$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\ldots\left(R=\frac{\pi}{2}\right) \qquad (4a)$$

(*гиперболический тангенс*; обозначение: $\operatorname{th} x$).

Разложения (2a) *и* (3a) *получаются вычитанием и сложением* (1) и (1a), разложение (4a) — почленным делением (2a) на (3a). Ср. замечание к формуле (4).

Разложения гиперболических функций отличаются от разложений одноименных тригонометрических функций только знаками.

---

[1] О гиперболических функциях см. § 403.

Логарифмические функции.

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad (R=1), \tag{5}$$

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots \qquad (R=1). \tag{6}$$

Формулы (5), (6) получаются почленным интегрированием разложений $\frac{1}{1\pm x}=1\mp x+x^2\mp x^3+\ldots$ Почленным вычитанием находим:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right] \quad (R=1). \tag{7}$$

С помощью ряда (7) удобно вычислять логарифмы целых чисел. Например, при $x=\frac{1}{3}$ получаем быстро сходящийся ряд для $\ln 2$.

Биномиальные ряды.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+ \\ +\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \quad (R=1). \tag{8}$$

При целом положительном m ряд обрывается на члене m-й степени (последующие коэффициенты — нули). Получаемая формула называется биномом Ньютона[1]). Разложение (8) справедливо при любом действительном m.

При $-\frac{1}{2}<x<1$ для доказательства можно использовать остаточный член Лагранжа. Другими средствами[2]) можно доказать справедливость формулы (8) для всего промежутка $(-1, 1)$.

---

[1]) Это наименование следовало бы отнести к общей формуле (8) (ср. § 270, п. 1).

[2]) Для функции $f(x)=(1+x)^m$ имеем тождественно: $mf(x)=(1+x)f'(x)$. Непосредственная проверка (почленное дифференцирование и умножение) показывает, что для суммы $S(x)$ ряда (8) справедливо такое же соотношение: $mS(x)=(1+x)S'(x)$. Значит,

$$\frac{S(x)}{S'(x)}=\frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ т. е. } [\ln f(x)]'=[\ln S(x)]'$$

Так как функции $\ln S(x)$ и $\ln f(x)$ имеют одинаковые производные и равные значения при $x=0$, то они равны. Значит, $S(x)=f(x)$, что и требовалось доказать.

Частными случаями (8) являются следующие разложения:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots, \tag{9}$$

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\ldots, \tag{10}$$

$$(1+x)^{-3} = \frac{1}{(1+x)^3} = \\ = 1-\frac{2\cdot 3}{2}x+\frac{3\cdot 4}{2}x^2-\frac{4\cdot 5}{2}x^3+\ldots, \tag{11}$$

$$(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots, \tag{12}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = \\ = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots, \tag{13}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \\ = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots, \tag{14}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots \tag{15}$$

Обратные тригонометрические функции.

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots \quad (R=1), \tag{16}$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots \quad (R=1). \tag{17}$$

Разложения (16) и (17) получаются соответственно из (15) и (12) почленным интегрированием в пределах от нуля до x.

Разложения

$$\arccos x = \frac{\pi}{2}-\arcsin x \text{ и } \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x$$

получаются из (16) и (17).

Обратные гиперболические функции[1].

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots \quad (R=1) \qquad (16а)$$

(*гиперболический ареасинус*; обозначение: $\operatorname{Arsh} x$).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots \quad (R=1) \qquad (17а)$$

(*гиперболический ареатангенс*; обозначение: $\operatorname{Arth} x$).

Функции

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \operatorname{Arch} x$$

(*гиперболический ареакосинус*) и

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \operatorname{Arcth} x$$

(*гиперболический ареакотангенс*) не разлагаются в ряд по степеням x [они не определены ни в одной точке промежутка $(-1;\ 1)$, в частности в точке $x=0$].

Разложения (16а) и (17а) отличаются от разложений (16) и (17) только знаками.

§ 402. Применение рядов к вычислению интегралов[2]

Многие интегралы, не выражающиеся через элементарные функции в конечном виде, представляются быстро сходящимися бесконечными рядами. Есть смысл разлагать в ряды даже такие интегралы, которые можно представить конечными выражениями (если эти выражения сложны). Ведь погрешность возникает и при пользовании «точными» выражениями, ибо значения последних находятся, как правило, с помощью таблиц.

Пример 1. Интеграл $\int\limits_0^x e^{-x^2}dx$ нельзя выразить в конечном виде через элементарные функции. Воспользовавшись рядом

$$e^{-x^2} = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, \qquad (1)$$

---

[1] Об обратных гиперболических функциях см. § 404.

[2] Бесконечные ряды исторически возникли в связи с задачей интегрирования (ср. § 270).

сходящимся в промежутке $(-\infty, +\infty)$, получим:

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (2)$$

Промежуток сходимости здесь тоже $(-\infty, +\infty)$ (§ 398).

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-4}$.

Решение. Подставляя в (2) значение $x=1$, получаем:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75\,600} + \ldots \qquad (3)$$

Член $-\frac{1}{75\,600}$ и последующие отбрасываем, так как возникающая при этом погрешность много меньше чем $0{,}5\cdot 10^{-4}$ [ряд (3) — знакопеременный с убывающими членами; § 376]. Вычисления ведем на пять-шесть знаков. Получаем:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}7468.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$.

Решение. Неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x}dx$ не берется в конечном виде. Разлагая $\sin x$ в ряд и деля почленно на x, получаем ряд

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \qquad (4)$$

сходящийся при любом значении x (по теореме § 394)

Интегрируя, имеем:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{35\,280}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \dots \qquad (5)$$

Первый отброшенный член $\frac{1}{9\cdot 9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9$ (по грубому подсчету) много меньше, чем $0{,}5\cdot 10^{-3}$. Находим

$$+\begin{array}{r} \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \\ \frac{1}{600}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}0159 \\ \hline 1{,}5867 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}2153 \\ \frac{1}{35\,280}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}0007 \\ \hline 0{,}2160 \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1{,}5867 - 0{,}2160 \approx 1{,}371.$$

§ 403. Гиперболические функции

Степенные ряды

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \quad (R = \infty), \qquad (1)$$

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \quad (R = \infty), \qquad (2)$$

сходные с разложениями $\sin x$, $\cos x$, имеют суммы, соответственно равные $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Эти функции называются: первая — *гиперболическим синусом*[1]) (sh), вторая — *гиперболическим косинусом* (ch):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \qquad (4)$$

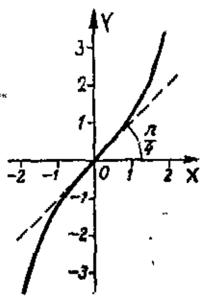
[1]) Обозначение sh — сокращение латинских слов sinus hyperbolicus (синус гиперболический), ch — cosinus hyperbolicus.

Гиперболическим тангенсом (th) и *гиперболическим котангенсом* (cth) называются функции

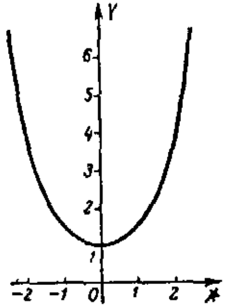
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{6}$$

Функции sh x, ch x, th x, cth x именуются *гиперболическими функциями*[1]). Графики даны на черт. 409—412.



Черт. 409. $y = \operatorname{sh} x$.



Черт. 410. $y = \operatorname{ch} x$.

Гиперболические функции имеют определенные значения для всех значений x (кроме cth x при $x=0$, где эта функция обращается в бесконечность).

Функция sh x принимает всевозможные значения, ch x — только не меньшие единицы (ch $0=1$), значения функции th x содержатся между -1 и $+1$, значения cth x больше 1 при $x>0$ и меньше -1 при $x<0$. Прямые $y=+1$ и $y=-1$ служат асимптотами для обеих линий $y=\operatorname{th} x$, $y=\operatorname{cth} x$.

Гиперболические функции связаны соотношениями

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{7}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, \tag{8}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \tag{9}$$

---

[1]) Связь с гиперболой выясняется в § 405.

и другими, аналогичными тригонометрическим. Так,

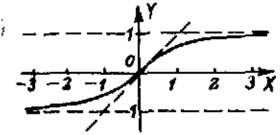
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{10}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{11}$$

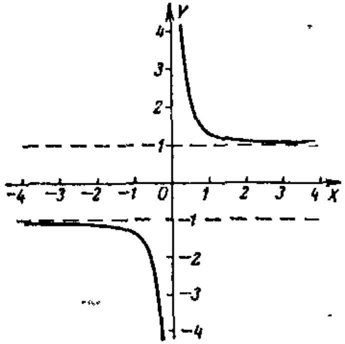
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{12}$$

Все они вытекают из формул (3)—(6).

Вообще каждой тригонометрической формуле, *не содержащей постоянных величин под знаками тригонометрических функций*)[1], соответствует аналогичное соотношение между гиперболическими функциями. Последнее получается, если заменить всюду $\cos\alpha$ на $\operatorname{ch}\alpha$, а $\sin\alpha$ на $i \operatorname{sh}\alpha$ (i — мнимая единица); мнимости устранятся сами собой.



Черт. 411. $y=\operatorname{th} x$.



Черт. 412. $y=\operatorname{cth} x$.

Пример 1. Из тригонометрической формулы

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

с помощью указанной замены получаем:

$$i \operatorname{sh}(x+y) = i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x\, i \operatorname{sh} y.$$

Разделив обе части равенства на i, получаем (10).

Пример 2. Из формулы

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

получаем:

$$\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Полагая $i^2 = -1$, получаем (7).

[1]) Эта оговорка существенна. Так, формулу $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ нельзя преобразовать по указанному здесь правилу.

Формулы дифференцирования и интегрирования

$$d\,\mathrm{sh}\,x = \mathrm{ch}\,x\,dx, \quad \int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C; \tag{13}$$

$$d\,\mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,x\,dx, \quad \int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C; \tag{14}$$

$$d\,\mathrm{th}\,x = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C; \tag{15}$$

$$d\,\mathrm{cth}\,x = -\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C. \tag{16}$$

Эти формулы получаются из соответствующих тригонометрических, если произвести указанную выше замену и сверх того написать $i\,dx$ вместо dx.

§ 404. Обратные гиперболические функции

Для гиперболических функций $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{th}\,x$, $\mathrm{cth}\,x$ существуют обратные функции:

$\mathrm{Arsh}\,x$ (*гиперболический ареасинус*; черт. 413),

$\mathrm{Arch}\,x$ (*гиперболический ареакосинус*; черт. 414),

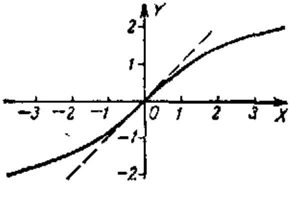
$\mathrm{Arth}\,x$ (*гиперболический ареатангенс*; черт. 415),

$\mathrm{Arcth}\,x$ (*гиперболический ареакотангенс*; черт. 416).

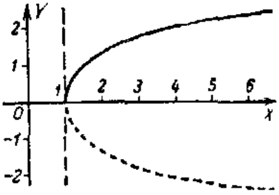
Ср. графики гиперболических функций на черт. 409 – 412.

Латинское слово «ареа» (area) означает площадь. Основание для такого наименования выясняется в § 405.

Функция $\mathrm{Arsh}\,x$ однозначно определена на всей числовой оси. *Функция* $\mathrm{Arch}\,x$ *определена лишь на отрезке*



Черт. 413. $y = \mathrm{Arsh}\,x$.

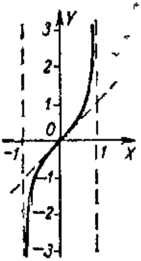


Черт. 414. $y = \mathrm{Arch}\,x$.

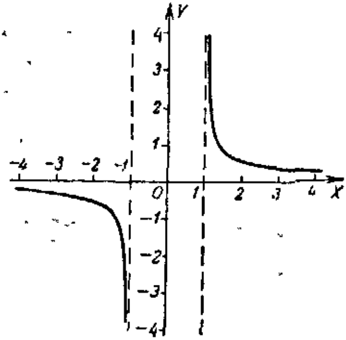
$(1, \infty)$ и здесь двузначна (значения ее равны по абсолютной величине и отличаются знаком). Обычно рассматриваются лишь положительные значения; соответствующая ветвь графика (*главная ветвь*) обозначена на черт. 414

сплошной линией. При этом условии функция Arch x становится однозначной.

Функции Arth x и Arcth x однозначны; первая определена лишь в (незамкнутом) промежутке $(-1, 1)$, вторая лишь вне промежутка $(-1, 1)$. Прямые $x=\pm 1$ служат асимптотами для обеих линий $y=\text{Arth}\ x$, $y=\text{Arcth}\ x$.



Черт. 415. $y=\text{Arth}\ x$.



Черт. 416. $y=\text{Arcth}\ x$.

Обратные гиперболические функции выражаются через основные элементарные следующим образом:

$$\text{Arsh}\ x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \tag{1}$$

$$\text{Arch}\ x = \ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right) = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1); \tag{2}$$

верхние знаки в формуле (2) соответствуют главному значению Arch x;

$$\text{Arth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1), \tag{3}$$

$$\text{Arcth}\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1). \tag{4}$$

Формулы дифференцирования и интегрирования[1])

$$d\,\text{Arsh}\ x = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}; \tag{5}$$

$$d\,\text{Arch}\ x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1); \tag{6}$$

---

[1]) Под Arch x разумеется положительное значение этой функции

$$d \operatorname{Arth} x = \frac{dx}{1-x^2} \; (|x| < 1); \tag{7}$$

$$d \operatorname{Arcth} x = \frac{dx}{1-x^2} \; (|x| > 1); \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C; \tag{5a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C \quad (x > a); \tag{6a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + C \quad (|x| < a), \tag{7a}$$

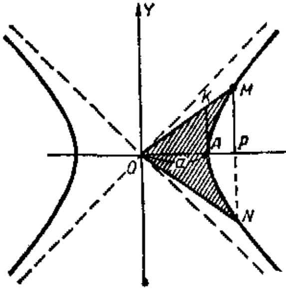
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + C \quad (|x| > a). \tag{8a}$$

§ 405. Происхождение наименований гиперболических функций

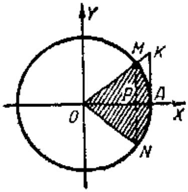
Рассмотрим равностороннюю гиперболу (черт. 417)

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

Обозначим через $\frac{s}{2}$ площадь гиперболического сектора AOM и припишем величине s (т. е. площади двойного сектора MON) тот знак,



Черт. 417.



Черт. 418.

который имеет угол поворота от OX к OM. Тогда отношения направленных отрезков PM, OP, AK (построенных для точки M гиперболы аналогично линиям синуса, косинуса и тангенса; ср. черт. 418) к полуоси a выражаются через s следующим образом [1]):

$$\frac{PM}{a} = \operatorname{sh}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{OP}{a} = \operatorname{ch}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{AK}{a} = \operatorname{th}\frac{s}{a^2}. \tag{2}$$

Возьмем теперь вместо гиперболы (1) окружность (черт 418)

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Если сохранить прежние обозначения, то взятая с надлежащим знаком величина $\frac{s}{a^2}$ (s — площадь кругового сектора $MONA$) даст угол $\alpha = \angle AOM$, так что вместо (2) придется написать.

$$\frac{PM}{a} = \sin\frac{s}{a^2}, \quad \frac{OP}{a} = \cos\frac{s}{a^2}, \quad \frac{AK}{a} = \operatorname{tg}\frac{s}{a^2}. \tag{2a}$$

Сравнение формул (2) и (2a) объясняет наименования *гиперболический синус, гиперболический косинус, гиперболический тангенс.*

§ 406. О комплексных числах

Комплексные числа [2]) *получили права гражданства в математике* вследствие того, что с их помощью облегчается разыскание многих связей между действительными величинами.

Пример 1 Последовательно умножая комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ само на себя, получаем *формулу Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

для целого положительного [3]) n. Применяем к левой части формулу

---

[1]) Имеем (§ 333, пример 4)

$$s = 2 \text{ пл. } AOM = a^2 \ln\frac{x+y}{a}$$

Решая это уравнение совместно с (1), находим

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} + e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{ch}\frac{s}{a^2}, \quad \frac{y}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} - e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{sh}\frac{s}{a^2}$$

Из подобия треугольников OAK, OPM имеем

$$\frac{AK}{a} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{x} = \operatorname{th}\frac{s}{a^2}$$

[2]) Действия над комплексными числами и геометрическое истолкование этих действий см. «Справочник по элементарной математике», §§ 34—48 раздела III

[3]) Отрицательную степень комплексного числа можно определить так же, как для действительного числа, и тогда формула (1) распространится и на отрицательные показатели Для дробных и иррациональных показателей формулу (1) можно принять в качестве определения. При этом результат получается многозначным (ввиду того, что угол φ определяется многозначно: $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где k — любое целое число). Правила действий со степенями остаются те же, что при действительном основании.

бинома и приравниваем соответственные координаты обеих частей (у двух равных комплексных чисел абсциссы и ординаты соответственно равны). Получаем выражения $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Например, при $n=4$ имеем:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi, \tag{2}$$
$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi. \tag{3}$$

Сюда входят только действительные величины.

Пример 2. *Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии*, находим:

$$1+(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2+\ldots+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = \frac{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}. \tag{4}$$

Применим к обеим частям (4) формулу (1) и выполним в правой части деление. Получим две формулы.

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi = \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \tag{5}$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{6}$$

Введя в рассмотрение *комплексные переменные величины* и определив для них понятия функции, предела, производной и т. д., мы находим много новых связей между действительными переменными величинами.

В §§ 407—410 в отступление от общего плана книги рассматриваются комплексные функции *действительного аргумента*; функций комплексного аргумента мы не касаемся вовсе.

§ 407. Комплексная функция действительного аргумента

Комплексная величина

$$z = x+iy \tag{1}$$

(x, y — действительные числа) называется *функцией действительного аргумента* t, если каждому из значений t (в рассматриваемой области) соответствует определенное значение z (т. е. определенное значение x и определенное значение y).

При этом каждая из координат x, y является (действительной) функцией аргумента t.

Запись:

$$z = f(t)+i\varphi(t) \tag{2}$$

равносильна следующим двум:

$$x = f(t),\quad y=\varphi(t). \tag{3}$$

Если изображать комплексное число $x+iy$ точкой $(x;\ y)$ плоскости XOY, то функция z изобразится множеством точек, обособленных или заполняющих линию [эта линия параметрически представляется уравнениями (3)]

Понятия предела и бесконечно малой величины для комплексных функций определяются так же, как для действительных (за абсолютное значение комплексного числа $x+iy$ принимают его модуль $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$) Точки, изображающие значения функции неограниченно приближаются к точке, изображающей предел, когда аргумент t стремится к данному значению (или к бесконечности) Чтобы найти предел c комплексной функции z, достаточно найти пределы a и b ее координат x, y Тогда $c=a+bi$.

Пример 1 Последовательность

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\quad z_3=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i,\ \ldots,\ z_n=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}i,\ \ldots \tag{4}$$

изображается (черт. 419) множеством обособленных точек $(x_n; y_n)$:

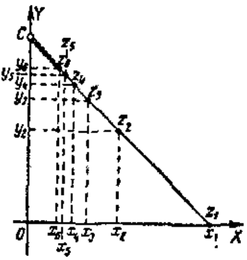
$$x_n=\frac{1}{n},\quad y_n=\frac{n-1}{n}. \tag{5}$$

Они лежат на прямой $x+y=1$. Имеем:

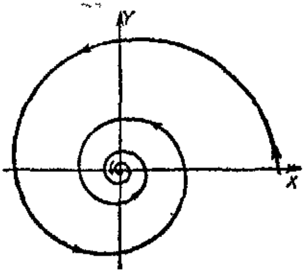
$$\lim_{n\to\infty} x_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty} y_n=1, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=0+1i=i. \tag{7}$$

Соотношение (7) означает, что модуль $|z_n-i|$ разности z_n-i неограниченно уменьшается при $n\to\infty$.



Черт. 419.



Черт. 420.

Геометрически: точки z_n неограниченно приближаются к точке C (0; 1).

Пример 2. Комплексная функция

$$z=e^{-0,1t}(\cos t+i\sin t) \tag{8}$$

аргумента t изображается (черт. 420) линией

$$x=e^{-0,1t}\cos t,\quad y=e^{-0,1t}\sin t \tag{9}$$

(*логарифмическая спираль*). Имеем:

$$\lim_{t\to\infty} x = 0; \quad \lim_{t\to\infty} y = 0;$$

$$\lim_{t\to\infty} z = \lim_{t\to\infty} (x+iy) = 0.$$

При $t\to\infty$ переменная точка комплексной плоскости, двигаясь вдоль спирали по направлению стрелки, неограниченно приближается к точке O, изображающей предел функции.

§ 408. Производная комплексной функции

Определение. Производная $F'(t)$ комплексной функции

$$F(t) = f(t)+i\varphi(t) \tag{1}$$

действительного аргумента t есть предел отношения $\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$.

Координаты производной являются производными координат $f(t)$, $\varphi(t)$ данной функции:

$$F'(t) = f'(t)+i\varphi'(t). \tag{2}$$

Вектор, изображающий $F'(t)$, есть вектор касательной в соответствующей точке графика

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t). \tag{3}$$

Если t — время, то модуль производной равен абсолютному значению скорости движения точки вдоль графика (3).

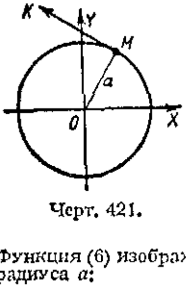
Дифференциал комплексной функции определяется так же, как для действительной, и обладает теми же свойствами.

Если комплексная функция $F(t)$ представляется многочленом

$$F(t) = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \tag{4}$$

где z — комплексная функция действительного аргумента t, то

$$F'(t) = (a_1+2a_2z+\ldots+na_nz^{n-1})\,z'(t). \tag{5}$$



Черт. 421.

Формулы производной произведения и частного — те же, что и для действительных функций.

Пример 1. Производная от функции

$$F(t) = a\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}+i\sin 2\pi\frac{t}{T}\right) \tag{6}$$

равна

$$F'(t) = \frac{2\pi a}{T}\left(-\sin 2\pi\frac{t}{T}+i\cos 2\pi\frac{t}{T}\right). \tag{7}$$

Функция (6) изображается множеством точек окружности (черт. 421) радиуса a:

$$x = a\cos 2\pi\frac{t}{T}, \quad y = a\sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{8}$$

Производная (7) изображается вектором касательной MK с координатами

$$x' = -\frac{2\pi a}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad y' = \frac{2\pi a}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}. \tag{9}$$

Модуль производной (выражающий скорость, если t—время) равен

$$|F'(t)| = \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{2\pi a}{T}. \tag{10}$$

Стало быть, скорость движения точки по окружности постоянна, так что $|F'(t)|$ есть дуга окружности, проходимая в единицу времени. Значит, T есть период полного оборота окружности.

Из (6) и (7) следует, что

$$F'(t) = F(t)\cdot\frac{2\pi}{T}i. \tag{11}$$

Геометрически: вектор MK получается из вектора OM удлинением (укорочением) в $\frac{2\pi}{T}$ раз и поворотом на 90° (умножение на i равносильно повороту на 90°).

Пример 2. Производная от функции

$$F(t) = (x+iy)^2 \tag{12}$$

где x и y—функции от t, равна

$$F'(t) = 2(x+iy)(x'+iy') = 2(xx'-yy')+2i(xy'+yx'). \tag{13}$$

Тот же результат получим, если предварительно представим (12) в виде

$$F(t) = (x^2-y^2)+2xyi. \tag{14}$$

§ 409. Возведение положительного числа в комплексную степень

Ряд

$$1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots \tag{1}$$

при всех *действительных* значениях u сходится всюду и имеет суммой e^u.

При любом *комплексном* значении u ряд (1) тоже сходится, т. е. его частичные суммы s_n (которые теперь являются комплексными числами) стремятся к конечному пределу (который также является комплексным числом).

На этом основано следующее определение нового действия — *возведения положительного числа в комплексную степень* [1].

Определение. Возвести число e (основание натуральных логарифмов) в комплексную степень $u = x+iy$—значит взять сумму ряда (1). За комплексную степень и всякого другого *положительного* числа a принимается величина $e^{u\ln a}$ (при действительном значении u она тождественна с a^u).

---

[1] О возведении комплексного числа в действительную степень сказано в § 406 (сноска [3]) на стр. 597). Можно определить и возведение комплексного числа в комплексную степень, но это сложнее.

Замечание. На комплексные степени положительных чисел распространяются все правила действия со степенями. Но их надо доказать особо.

Пример 1. Возвести e в степень πi.

Решение. По определению

$$e^{\pi i}=1+\frac{\pi i}{1!}+\frac{\pi^2 i^2}{2!}+\frac{\pi^3 i^3}{3!}+\frac{\pi^4 i^4}{4!}+\frac{\pi^5 i^5}{5!}+\ldots=$$
$$=1+\frac{\pi i}{1!}-\frac{\pi^2}{2!}-\frac{\pi^3 i}{3!}+\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^5 i}{5!}-\frac{\pi^6}{6!}-\frac{\pi^7 i}{7!}+\ldots$$

Абсцисса суммы равна

$$1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\ldots=\cos\pi=-1$$

ср. § 272). Ордината суммы равна

$$\frac{\pi}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\ldots=\sin\pi=0.$$

Значит,

$$e^{\pi i}=-1.$$

В данном случае получилось действительное число.

Пример 2. Вычислить 10^i.

Решение. По определению

$$10^i=e^{i\ln 10}=e^{\frac{1}{M}i},$$

где $\frac{1}{M}\approx 2{,}3026$ (см. § 242);

$$10^i=1+\frac{1}{1!\,M}i-\frac{1}{2!\,M^2}-\frac{1}{3!\,M^3}i+$$
$$+\frac{1}{4!\,M^4}+\frac{1}{5!\,M^5}i-\frac{1}{6!\,M^6}-\frac{1}{7!\,M^7}i+\ldots=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2!\,M^2}+\frac{1}{4!\,M^4}-\frac{1}{6!\,M^6}+\ldots\right)+$$
$$+i\left(\frac{1}{1!\,M}-\frac{1}{3!\,M^3}+\frac{1}{5!\,M^5}-\frac{1}{7!\,M^7}+\ldots\right)=$$
$$=\cos\frac{1}{M}+i\sin\frac{1}{M}\approx\cos 2{,}3026+i\sin 2{,}3026\approx$$
$$\approx\cos 131°56'+i\sin 131°56'=-0{,}6680+i\cdot 0{,}7440.$$

Пример 3. Вычислить 10^{2+i}.

Решение. Имеем (ср. пример 2):
$10^{2+i}=10^2\cdot 10^i\approx -66{,}80+74{,}40\,i.$

§ 410. Формула Эйлера

Соотношение

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (1)$$

называется *формулой Эйлера*. Оно является следствием определения § 409 (выводится, как в примере 1 § 409).

Если *определить* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ при комплексном φ с помощью тех же рядов, суммы которых *по доказанному* дают $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ для действительных φ, то формула (1) будет справедливой при любом комплексном φ.

Из формулы (1) получаем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{2}$$

а из (1) и (2) находим:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{3}$$

Эти формулы очень сходны с выражениями гиперболических функций

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}.$$

Из (1) вытекает также формула

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{4}$$

(ср. § 409, *замечание*).

Если x и y в формуле (4) суть функции аргумента t, то формулу (4) можно дифференцировать так же, как если бы i было действительное постоянное число:

$$e^{x+iy}(x'+iy') = x'e^x(\cos y + i\sin y) + y'e^x(-\sin y + i\cos y). \tag{5}$$

Справедливость формулы (5) проверяется непосредственно.

Пример. Найти производную от функции

$$F(t) = e^{0,1t}(\cos 2t + i\sin 2t).$$

Решение. Представим $F(t)$ в виде

$$F(t) = e^{(0,1+2i)t}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (0,1+2i)\,e^{(0,1+2i)t} = \\ &= (0,1+2i)\,e^{0,1t}(\cos 2t + i\sin 2t) = \\ &= e^{0,1t}[(0,1\cos 2t - 2\sin 2t) + i\,(0,1\sin 2t + 2\cos 2t)]. \end{aligned}$$

§ 411. Тригонометрический ряд

Тригонометрическим рядом называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots \tag{1}$$

Здесь a_0, a_1, $a_2, \ldots$, b_1, $b_2, \ldots$ — постоянные, называемые *коэффициентами* ряда.

Замечание 1. Свободный член (его можно записать в виде $\frac{a_0}{2}\cos 0x$) обозначается через $\frac{a_0}{2}$ (а не через a_0) с той целью, чтобы формулы для коэффициентов (ср. § 414) были единообразными.

Замечание 2. Все члены ряда (1) являются *периодическими функциями* с периодом 2π. Это значит, что когда аргумент x возрастает на величину, кратную 2π, все члены сохраняют свои значения.

Замечание 3. Тригонометрическим рядом называют также более общее выражение

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos 2\frac{\pi x}{l}+b_2\sin 2\frac{\pi x}{l}+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos n\frac{\pi x}{l}+b_n\sin n\frac{\pi x}{l}+\ldots, \qquad (2)$$

где l — положительная постоянная, называемая *полупериодом* [все члены ряда (2) — периодические функции с периодом $2l$; ср. замечание 2]. Ряд (1) есть частный случай ряда (2), когда полупериод $l=\pi$.

§ 412. Исторические сведения о тригонометрических рядах

Тригонометрические ряды были введены Д. Бернулли[1]) в 1753 г. в связи с изучением колебаний струны. Возникший при этом вопрос о возможности разложения данной функции в тригонометрический ряд породил горячие споры между первоклассными математиками того времени (Эйлер, Даламбер, Лагранж). Разногласия порождались тем, что понятие функции в то время не было отчетливо установлено. Упомянутые споры содействовали уточнению понятия функции.

Формулы, выражающие коэффициенты ряда (1) через данную функцию (§ 414), были даны Клеро[2]) в 1757 г., но не привлекли к себе внимания. Эйлер вновь получил эти формулы в 1777 г. (в работе, опубликованной после смерти Эйлера в 1793 г.). Строгий их вывод был намечен Фурье в 1823 г. Развивая идею Фурье, Дирихле[3]) в 1829 г. установил и строго доказал достаточный признак разложимости функции в тригонометрический ряд (§ 418).

---

[1]) Даниил Бернулли (1700—1782), швейцарец, выдающийся математик и механик, один из основоположников гидродинамики. С 1725 по 1733 г. работал в Петербургской академии наук, впоследствии состоял ее почетным членом.

[2]) Алексис-Клод Клеро (1713—1765) — выдающийся французский математик, астроном и геофизик. В возрасте 16 лет был избран членом Парижской академии наук.

[3]) Петер Густав Лежен-Дирихле (1805—1859) — выдающийся немецкий математик.

Впоследствии были установлены другие достаточные условия и исследованы функции, не удовлетворяющие упомянутым условиям. В разработку теории тригонометрических рядов и их практических приложений важный вклад внесли многие русские и советские ученые: Н. И. Лобачевский, А. Н. Крылов (1863—1945), С. Н. Бернштейн (род. 1880), Н. Н. Лузин (1883—1950), Д. Е. Меньшов (род. 1892), Н. К. Бари (1901—1961), А. Н. Колмогоров (род. 1903) и др.

§ 413. Ортогональность системы функций $\cos nx$, $\sin nx$

Определение 1. Две функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ называются *ортогональными в промежутке* (a, b), если интеграл произведения $\varphi(x)\psi(x)$, взятый в пределах от a до b, равен нулю.

Пример 1. Функции

$$\varphi(x) = \sin 5x$$

и

$$\psi(x) = \cos 2x$$

ортогональны в промежутке $(-\pi, \pi)$, ибо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 7x + \sin 3x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Пример 2. Функции

$$\varphi(x) = \sin 4x$$

и

$$\psi(x) = \sin 2x$$

ортогональны в промежутке $(-\pi, \pi)$, ибо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - \cos 6x)\, dx = 0.$$

Теорема. Любые две различные функции, взятые из системы функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \qquad (1)$$

ортогональны в промежутке $(-\pi, \pi)$, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos mx\,dx = 0 \quad (m \neq 0), \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin mx\,dx = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx = 0 \tag{3}$$

(при $m \neq n$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx = 0 \tag{4}$$

(m, n – любые натуральные числа).

Доказательство – по образцу примеров 1, 2.

Замечание 1. Если вместо двух различных функций системы (1) взять две одинаковые, то интеграл в пределах от $-\pi$ до π равен π для всех функций (1), кроме первой, для которой он вдвое больше:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,dx = 2\pi, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi\ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Формулы (6) получаются с помощью преобразований

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1+\cos 2nx), \quad \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1-\cos 2nx).$$

Замечание 2. Формулы (2)–(6) сохраняют силу для любого интервала длиной 2π. Например,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{1\frac{3}{4}\pi} \sin 4x\sin 2x\,dx = \int_{0}^{2\pi} \sin 4x\sin 2x\,dx = 0.$$

$$\int_{-2\pi}^{0} \cos^2 3x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 3x\,dx = \pi.$$

Определение 2. Если в какой-либо системе функций каждые две функции ортогональны, то и сама система называется *ортогональной*. В силу теоремы настоящего параграфа система (1) ортогональна в промежутке $(-\pi, \pi)$ (а также в любом промежутке длиной 2π).

§ 414. Формулы Эйлера—Фурье

Теорема. Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+a_1 \cos x+b_1 \sin x+a_2 \cos 2x+b_2 \sin 2x+ \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos nx+b_n \sin nx+ \ldots \quad (1)$$

сходится для всех значений x к некоторой функции $f(x)$ (эта функция — периодическая, с периодом 2π). Если для этой функции (она может быть и разрывной) существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$ (собственный или несобственный), то для коэффициентов ряда (1) имеют место следующие *формулы Эйлера — Фурье* (см. § 411):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\, dx, \qquad b_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx,$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\, dx, \qquad b_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x\, dx,$$

$$a_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 3x\, dx, \qquad b_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 3x\, dx,$$

. . . .

и вообще

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \quad (2)$$

Замечание. Выражение для a_0 получается из общей формулы для a_n, если в последней положить $n=0$. Это единообразие нарушается, если через a_0 обозначить свободный член ряда (1), а не его удвоенную величину. Ср. § 411, замечание 1.

Пояснение. Мы имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \quad (3)$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от $-\pi$ до π. Предполагая, что данный ряд допускает почленное интегрирование[1]), получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx + \ldots \quad (4)$$

Все интегралы правой части, кроме первого, равны нулю в силу (2) § 413, и мы находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0, \quad \text{т. е.} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Мы получили первую из формул (2) для случая $n=0$, остальные формулы получатся тем же способом, если предварительно помножить равенство (3) на $\cos nx$ или на $\sin nx$.

Так, помножая (3) на $\cos 2x$ и интегрируя почленно, получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\,dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos 2x\,dx +$$

$$+ b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos 2x\,dx + a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x\,dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 2x\,dx + \ldots \quad (5)$$

Справа все интегралы, кроме четвертого, равны нулю в силу (2), (3) и (4) § 413. Четвертый равен π в силу (6) § 413. Следовательно,

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x\,dx.$$

---

[1]) При сходимости интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ тригонометрический ряд (1), сходящийся к функции $f(x)$, допускает почленное интегрирование.

Тригонометрический ряд с произвольным периодом. Пусть тригонометрический ряд с периодом $2l$:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos 2\frac{\pi x}{l}+b_2\sin 2\frac{\pi x}{l}+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos n\frac{\pi x}{l}+b_n\sin n\frac{\pi x}{l}+\ldots \tag{6}$$

сходится для всех значений x к некоторой функции $f(x)$ (эта функция тоже имеет период $2l$). Если существует интеграл $\int\limits_{-l}^{l}|f(x)|\,dx$ (собственный или несобственный), то для коэффициентов ряда (6) имеют место следующие формулы Эйлера—Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Формулы (2) получаются из (7) при $l=\pi$.

§ 415. Ряд Фурье

В § 414 рассматривалась сумма $f(x)$ *данного* сходящегося тригонометрического ряда. На практике важна следующая обратная задача: дана функция $f(x)$ с периодом 2π[1]); требуется найти всюду сходящийся тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots, \tag{1}$$

имеющий сумму $f(x)$.

Если эта задача имеет решение, то оно единственно, и коэффициенты искомого ряда (1) находятся по формулам Эйлера—Фурье (§ 414):

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{2}$$

---

[1]) Предполагается, что для этой функции существует (собственный или несобственный) интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$.

Полученный ряд называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$.

Не исключено, что поставленная здесь задача *не имеет решения*: ряд Фурье [даже при непрерывности функции $f(x)$] может оказаться расходящимся в бесчисленном множестве точек на промежутке $(-\pi; \pi)$. Поэтому связь между функцией $f(x)$ и ее рядом Фурье обозначают так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \\ + b_2 \sin 2x + \dots, \qquad (3)$$

избегая знака равенства.

Однако *для всех практически важных непрерывных функций* задача имеет решение, т. е. ряд Фурье непрерывной периодической функции $f(x)$ на практике оказывается всюду сходящимся и сумма его равна данной функции, а не какой-либо иной. Это видно из § 416, где дано достаточное условие разложимости непрерывной функции в ряд Фурье.

Более того, разрывные периодические функции, имеющие практическое значение, тоже разлагаются в ряд Фурье, но с одной оговоркой: в точках разрыва функции $f(x)$ ее ряд Фурье может иметь сумму, отличную от соответствующего значения самой функции (см. § 418).

Замечание. Непериодические функции, определенные в промежутке $(-\pi, \pi)$, тоже можно разлагать в ряд Фурье, но со следующей оговоркой: за пределами промежутка $(-\pi, \pi)$ и на его концах ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь сумму, которая, как правило, будет отличаться от соответствующего значения самой функции [что и естественно, поскольку сумма тригонометрического ряда есть периодическая функция (см. § 417, пример 2)]. Но это несущественно, поскольку нас интересуют значения функции лишь внутри промежутка $(-\pi, \pi)$.

§ 416. Ряд Фурье для непрерывной функции

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $(-\pi, \pi)$ и либо не имеет здесь экстремумов, либо имеет их конечное число[1]). Тогда ряд Фурье

---

[1]) Примером непрерывной функции, имеющей на конечном промежутке бесконечное множество максимумов и минимумов, может служить $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, рассматриваемая в любом промежутке, охватывающем точку $x=0$ (в этой точке функции приписывается значение 0; ср. § 231).

для этой функции сходится всюду. Сумма его равна $f(x)$ для всякого значения x внутри промежутка $(-\pi, \pi)$. На обоих же концах сумма равна

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)],$$

т. е. среднему арифметическому между $f(-\pi)$ и $f(+\pi)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x$; она непрерывна в замкнутом промежутке $(-\pi, \pi)$ и не имеет экстремумов. Коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... ее ряда Фурье — нули. Действительно,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx. \tag{1}$$

Первое слагаемое после подстановки $x=-x'$ преобразуется в $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} x' \cos nx'\,dx'$ и в сумме со вторым дает нуль:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Коэффициенты b_n находятся интегрированием по частям:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \tag{3}$$

$$= -\frac{2\pi\cos\pi n}{\pi n} = 2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}. \tag{4}$$

Ряд Фурье для функции x имеет вид

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \ldots\right]. \tag{5}$$

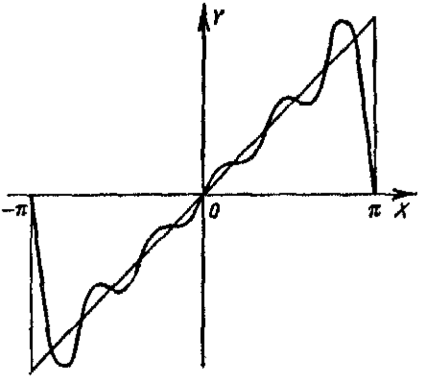
Согласно теореме ряд (5) всюду сходится; при $-\pi<x<\pi$ его сумма равна

$$2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right]=x$$
$$(-\pi<x<\pi). \quad (6)$$

При $x=\pm\pi$ сумма равна

$$\frac{1}{2}[-\pi+\pi]=0$$

Это очевидно, ибо все члены ряда обращаются в нуль.



Черт. 422.

При $x=\frac{\pi}{2}$ формула (6) дает ряд Лейбница (§ 398)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

Черт. 422, где изображен график 5-й частичной суммы ряда Фурье для функции $f(x)=x$

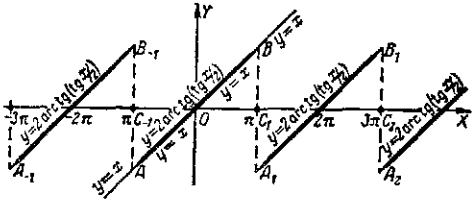
$$s_5=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right), \quad (8)$$

даст представление о степени близости между частичной суммой s_n ряда (5) внутри промежутка $(-\pi, \pi)$ и самой функцией $f(x)$. График $y=s_5(x)$ колеблется около прямой $y=x$; для одних значений x получаются недостаточные значения, для других — избыточные.

Линия $y=s_5(x)$ проходит через точки $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ и поэтому вблизи этих точек резко отрывается от прямой $y=x$.

Картина остается той же и для последующих частичных сумм s_n. Только размер промежутка, где наблюдается резкий отрыв, неограниченно уменьшается с ростом n. На концах промежутка $(-\pi, \pi)$ все частичные суммы равны нулю и, значит, не приближаются к значениям функции $f(x)=x$ в точках $x=\pm\pi$. Во всяком же внутреннем промежутке, концы которого не совпадают с точками $x=\pm\pi$, ряд (5) сходится, и притом равномерно, к функции $f(x)=x$. Но сходимость — плохая; так, взяв значение $x=\frac{\pi}{2}$, получим ряд (7), который (по признаку Лейбница; § 376) сходится крайне медленно.

Замечание 1. Функция $f(x)=x$ определена и вне промежутка $(-\pi, \pi)$, но так как она — не периодическая, то при $x\geqslant\pi$ и при $x\leqslant-\pi$ сумма ряда (5) не равняется x



Черт. 423.

(ср. § 415, замечание). График суммы ряда (5) состоит (черт. 423) из множества отрезков, полученных горизонтальным смещением отрезка AB на $\pm 2k\pi$ $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$. Все отрезки $A_{-1}B_{-1}$, AB, A_1B_1, ... лишены концов и вместо последних взяты точки C_{-1}, C_1 $C_2, \ldots$, делящие пополам отрезки $B_{-1}A$, BA_1, B_1A_2 и т. д.

Замечание 2. Рассмотрим периодическую функцию $f_1(x)=2\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)$; период ее равен 2π. Внутри промежутка $(-\pi, \pi)$ она совпадает с функцией $f(x)=x$ (черт. 423). В точках $\pm\pi$ эта функция не определена и имеет разрыв. Ряд Фурье для $f_1(x)$ совпадает с рядом Фурье для $f(x)$, и теперь сумма ряда Фурье равна $f_1(x)$ не только внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, но и всюду за исключением, конечно, точек разрыва $x=\pm\pi$, $x=\pm 3\pi$ и т. д. В этих последних она равна нулю.

§ 417. Ряд Фурье для четной и нечетной функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $(-a, a)$. Она называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется:

$$f(-x) = f(x). \tag{1}$$

Такова четная степень x^{2m} (откуда и термин «четная функция»), таковы функции $\cos nx$, $x^3 \sin nx$ и др.

Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента меняется только знак функции, а абсолютное значение остается тем же:

$$f(-x) = -f(x). \tag{2}$$

Такова нечетная степень x^{2m-1}, таковы функции $\sin nx$, $x \cos nx$, $\operatorname{tg} x$ и др.

График четной функции симметричен относительно оси OY, нечетной — относительно начала O.

Замечание 1. Интегралы $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$ для четной функции равны между собой, для нечетной — разнятся знаками. Поэтому для четной функции имеем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \tag{3}$$

а для нечетной

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Замечание 2. Ряд Фурье для четной функции не содержит синусов; коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0 \tag{5}$$

(ср. замечание 1). Ряд Фурье для нечетной функции не содержит косинусов и свободного члена; коэффициенты

Фурье равны

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx. \tag{6}$$

Пример 1. Функция $f(x)=x$, рассмотренная в примере § 416, — нечетная. Ее ряд Фурье не содержит косинусов и свободного члена. Коэффициенты b_n равны

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = 2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Пример 2. Функция $f(x)=|x|$ — четная; значит, ее ряд Фурье не будет содержать синусов. Коэффициент a_0 равен

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi. \tag{7}$$

При $n \neq 0$ получаем:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = 2\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}, \tag{8}$$

т. е.

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Стало быть, ряд Фурье для функции $f(x)=|x|$ будет

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right). \tag{10}$$

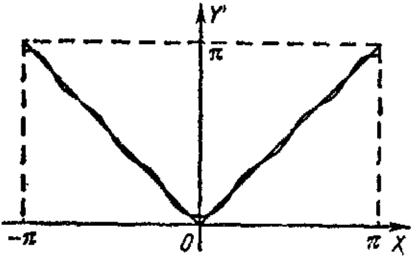
Функция $f(x)=|x|$ удовлетворяет условию теоремы § 416. Значит, ряд (10) сходится всюду. Сумма его равна $|x|$ для всякого значения x внутри промежутка $(-\pi, \pi)$. Более того, поскольку функция $f(x)=|x|$ — четная, сумма ее ряда Фурье равна $f(x)$ также и на концах промежутка $(-\pi, \pi)$. Действительно, для четной функции имеем $f(-\pi)=f(\pi)$, так что среднее арифметическое между значениями $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ совпадает с каждым из этих значений. Таким образом, имеем:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (10a)$$

В частности, подставляя в (10a) одно из значений $x = \pm\pi$ или $x=0$, найдем, что

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (11)$$

Ряд (11) и вообще ряд (10a) сходится плохо, хотя и лучше, чем ряд (5) § 416 (ср. графики черт. 422 и 424).

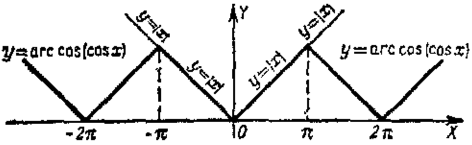


Черт. 424.

На черт. 424 дан график частичной суммы s_4 ряда (10)

$$s_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\right)$$

в промежутке $(-\pi, \pi)$. Ломаная линия, около которой колеблется линия $y = s_4(x)$, есть график суммы $f_1(x)$ ряда (10).

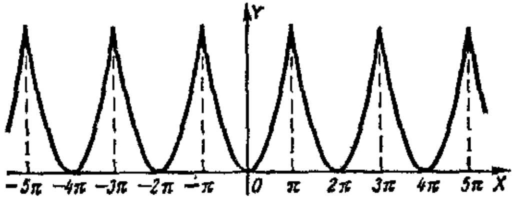


Черт. 425.

На черт. 425 изображен график суммы $f_1(x)$ в промежутке $(-3\pi, 3\pi)$. Там же изображен (двумя лучами, исходящими из точки O) график функции $f(x) = |x|$. В замкнутом промежутке $(-\pi, \pi)$ функции $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают, Замечание 3. Функцию $f_1(x)$ можно представить формулой

$$f_1(x) = \arccos(\cos x).$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ (черт. 426).



Черт. 426.

Решение. Данная функция четная; поэтому имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Для вычисления a_n при $n \neq 0$ дважды интегрируем по частям:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}. \qquad (12)$$

В промежутке $(-\pi, \pi)$, *включая концы* (ср. пример 2), имеем:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots\right]. \qquad (13)$$

При $x=\pi$ и $x=0$ получаем соответственно:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{12}. \qquad (15)$$

Почленно складывая (14) и (15), снова получим (11).

§ 418. Ряд Фурье для разрывной функции

Теорема § 416 допускает следующее обобщение.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках промежутка $(-\pi, \pi)$, кроме точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ (*в конечном числе*), где она имеет скачки (§ 219а). Если при этом в промежутке $(-\pi, \pi)$ имеется лишь конечное число экстремумов (или их вовсе нет), то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится всюду. При этом [1]:

1) на обоих концах $-\pi, \pi$ сумма ряда равна

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)]; \tag{1}$$

2) в каждой точке разрыва $x=x_i$ сумма ряда равна

$$\frac{1}{2}[f(x_i-0)+f(x_i+0)], \tag{2}$$

где символ $f(x_i-0)$ обозначает предел, к которому стремится $f(x)$, когда x стремится к x_i слева, а $f(x_i+0)$ — предел $f(x)$ при $x \to x_i$ справа;

3) в остальных точках промежутка $(-\pi, \pi)$ сумма ряда равна $f(x)$.

Замечание 1. Интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

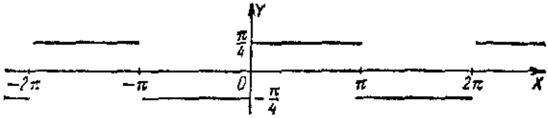
входящие в коэффициенты Фурье, в рассматриваемом случае — несобственные (§ 328).

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в промежутке $(-\pi, \pi)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0,\\ f(x) &= \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] Дальнейший текст допускает более короткую формулировку (см. замечание 2).

Эта функция разрывна при $x=0$, где у нее — скачок. Действительно, имеем [см. черт. 427, где изображена



Черт. 427.

функция $f(x)$, периодически продолженная за пределы промежутка $(-\pi, \pi)$]:

$$f(-0) = -\frac{\pi}{4}, \quad f(+0) = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Находим коэффициенты Фурье [функция $f(x)$ — нечетная]:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx\, dx = \frac{1}{2n}[1-(-1)^n]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Стало быть,

$$\left.\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{1}{2k-1}, \\ b_{2k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{6}$$

Во всех внутренних точках промежутка $(-\pi, \pi)$, кроме точки разрыва $x=0$, сумма ряда Фурье равна $f(x)$, т. е. при $-\pi < x < 0$ имеем:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} + \ldots = -\frac{\pi}{4}, \tag{7}$$

а при $0 < x < \pi$ имеем:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

В точке разрыва $x=0$ сумма ряда Фурье равна

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

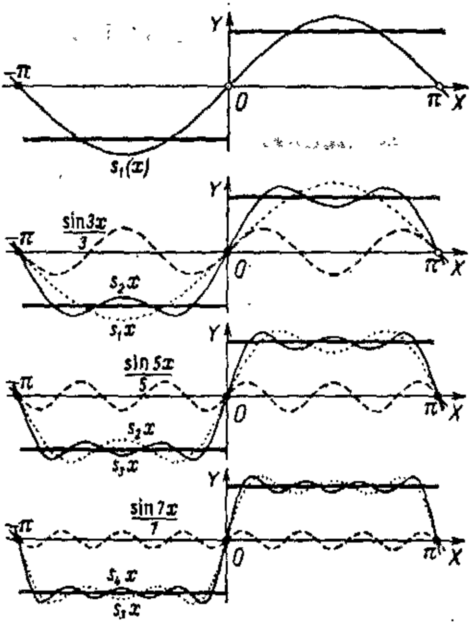
(все члены ряда — нули). На концах промежутка $(-\pi, \pi)$ сумма тоже равна

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

На черт. 428 видно, как частичные суммы $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$ постепенно подходят к $f(x)$. В первой (сверху) полосе дан график $s_1(x)$; во второй полосе сплошной линией изображен график $s_2(x)$:

$$s_2(x) = s_1(x) + \frac{\sin 3x}{3}.$$

Здесь же дан (штриховым пунктиром) график $\frac{\sin 3x}{3}$, а также воспроизведен (точечным пунктиром) график $s_1(x)$.



Черт. 428.

Ниже следует график $s_3(x)$, причем пунктиром изображены $s_2(x)$ и $\frac{\sin 5x}{5}$. Аналогично построен последний график.

Замечание 2. В теореме Дирихле пункты 1 и 3 по существу являются частными случаями пункта 2. Действительно, если $f(-\pi) \neq$ $\neq f(\pi)$, то концы промежутка являются точками разрыва периодически продолженной функции $f(x)$. Если же x есть внутренняя точка непрерывности, то оба предела — левый $f(x-0)$ и правый $f(x+0)$ равны $f(x)$, так что

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] = f(x). \tag{9}$$

Таким образом, теорему Дирихле можно сформулировать короче так:

Пусть периодическая функция $f(x)$ непрерывна во всех точках промежутка $(-\pi, \pi)$, кроме точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ (в конечном числе), где она имеет скачки. Если при этом в промежутке $(-\pi, \pi)$ имеется лишь конечное число экстремумов (или их вовсе нет), то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится всюду, и сумма его всюду равна

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

§ 419. Функция двух аргументов

Определение. Величина z называется *функцией двух переменных величин* x, y, если каждой паре чисел, которые могут (по условию вопроса) быть значениями переменных x, y, соответствует одно или несколько определенных значений величины z. При этом переменные величины x, y называются *аргументами* (ср. § 196, определение 1).

Однозначные и многозначные функции различаются, как в определении 2 § 196.

Пример 1. Высота h пункта на земной поверхности (над уровнем моря) есть функция географических координат — широты φ и долготы ψ. Широта может меняться в пределах от $-90°$ до $+90°$, долгота — от $-180°$ до $+180°$.

Пример 2. Произведение сомножителей x, y есть функция двух аргументов x и y. Значения аргументов x и y могут быть произвольными.

Числовая плоскость. Для наглядности пара значений x, y изображается геометрически точкой $M(x; y)$, отнесенной к прямоугольной системе координат XOY. Плоскость, на которой взята эта система, называется *числовой плоскостью*.

Выражение «точка $M(x; y)$» равнозначно с выражением «пара значений аргументов x и y». Например, выражение «точка $M(1; -3)$» означает то же, что и выражение «пара значений $x=1$, $y=-3$». В соответствии с этим функция двух переменных называется *функцией точки* (см. § 457). Часто значение функции и по своему физическому смыслу определяется выбором точки на плоскости или на кривой поверхности (ср. пример 1).

Область определения функции. Пары тех чисел, которые (по условию вопроса) могут быть значениями аргументов x, y функции $f(x, y)$, в совокупности составляют *область определения* этой функции.

Геометрически область определения изображается некоторой совокупностью точек плоскости XOY.

В примере 1 область определения функции h аргументов φ и ψ есть множество точек числовой плоскости, лежащих внутри и на границе некоторого прямоугольника. Последний имеет 360 масштабных единиц в длину и 180 в ширину; стороны его параллельны осям координат, а центр совпадает с началом координат. В примере 2 область определения функции есть вся числовая плоскость.

Обозначения. Запись

$$z = f(x, y)$$

(читается: «z равно эф от x, y») означает, что z есть функция двух переменных x, y. Запись $f(3, 5)$ означает, что рассматривается значение функции $f(x, y)$ в точке $M(3; 5)$, т. е. то значение функции, которое соответствует значениям аргументов $x=3$, $y=5$ (см. § 202). Вместо f употребляют и другие буквы.

Иногда в качестве характеристики функции употребляют ту же букву, которой обозначается сама функция, т. е. пишут: $z=z(x, y)$, $w=w(u, v)$ и т. д.

Замечание. Не исключено, что значение функции $f(x, y)$ меняется в зависимости от x, но остается одним и тем же при изменении аргумента y. Тогда функцию двух аргументов можно рассматривать как функцию одного аргумента (x). Если же значение $f(x, y)$ остается одним и тем же при любых значениях обоих аргументов, то функция двух аргументов оказывается постоянной величиной.

Пример 3. Суточное количество осадков (h *мм*) на территории Московской области есть функция широты φ и долготы ψ места наблюдения. Однако не исключено, что суточное количество осадков в направлении с юга на север остается неизменным и меняется только в направлении с востока на запад. Тогда h можно рассматривать как функцию одного аргумента ψ.

Если в течение суток по всей области осадки не выпадали, то h — постоянная величина (равная нулю).

§ 420. Функция трех и большего числа аргументов

Понятия функции трех, четырех и т. д. аргументов и области ее определения вводятся так же, как в случае двух аргументов (§ 419).

Область определения функции трех аргументов изображается некоторой совокупностью точек в пространстве. В соответствии с этим функция трех (а по аналогии — и большего числа) переменных называется *функцией точки*. Запись

$$u = f(x, y, z)$$

означает, что u есть функция трех аргументов x, y, z.

Замечание. Не исключена возможность, что значение функции $f(x, y, z)$ меняется в зависимости от x и y, а при изменении z остается одним и тем же. Тогда функция трех переменных $f(x, y, z)$ вместе с тем есть функция двух переменных x, y. Функция $f(x, y, z)$ может оказаться также функцией одной переменной и даже постоянной величиной (ср. § 419, замечание).

Вообще функция n переменных может оказаться функцией меньшего их числа.

§ 421. Способы задания функций нескольких аргументов

1. Функцию двух или большего числа аргументов можно задать формулой (или несколькими формулами). Функция, заданная формулой, может быть *явной* или *неявной* (ср. § 197, п. «в»).

Пример 1. Формула

$$pv = A(273{,}2 + t), \tag{1}$$

где $A = 0{,}02927$, выражает зависимость между объемом v одного килограмма воздуха (в $м^3$), его давлением p $\left(\text{в } \frac{т}{м^2}\right)$ и температурой t (по Цельсию). Каждая из переменных p, v, t есть неявная функция от двух других.

Формула

$$v = \frac{A(273{,}2 + t)}{p} \tag{2}$$

задает v как явную функцию двух аргументов p и t. Область определения этой функции есть совокупность физически возможных значений давления и температуры (t может принимать лишь значения, превышающие $-273°$, p — лишь положительные значения).

Замечание. Часто функция нескольких аргументов задается формулой без указания физического смысла входящих в нее величин. Если при этом не сделано никаких указаний относительно области определения функции, то подразумевается, что область определения охватывает все те точки, для которых формула имеет смысл.

Пример 2. Пусть функция двух аргументов x, y задана формулой

$$z = \sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \tag{3}$$

без указания области определения функции. Формула (3) имеет смысл лишь тогда, когда $x^2+y^2 \leq R^2$. Стало быть, область определения есть совокупность всех точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса R с центром в начале координат.

Пример 3. Формула $u = \sqrt{a^2-(x^2+y^2+z^2)}$ задает функцию трех переменных. Формула имеет смысл лишь при условии, что $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$; область определения есть совокупность всех точек, лежащих внутри и на поверхности шара радиуса a с центром в начале координат.

2. Функцию двух или большего числа аргументов можно задать таблицей. При двух аргументах таблицу удобно располагать в виде прямоугольника. В верхней строке проставляют значения одного из аргументов, в левом столбце — значения другого. В пересечении соответствующих строки и столбца записывают значение функции (*таблица с двойным входом*).

Пример 4. Нижеследующая таблица дает объем 1 *кг* воздуха как функцию давления и температуры (см. пример 1):

$p \frac{m}{м^2}$ \ $t°$	−20	−10	0	10	20
10,0	0,7411	0,7704	0,7997	0,8289	0,8582
10,1	0,7338	0,7628	0,7918	0,8207	0,8497
10,2	0,7266	0,7553	0,7840	0,8126	0,8414
10,3	0,7195	0,7480	0,7764	0,8048	0,8332
10,4	0,7126	0,7408	0,7689	0,7970	0,8252
10,5	0,7058	0,7337	0,7616	0,7894	0,8173

3. Функцию двух аргументов можно представить *пространственной моделью* (*пространственным графиком*). Пространственная модель функции $f(x, y)$ есть некоторая поверхность S, отнесенная к прямоугольной системе

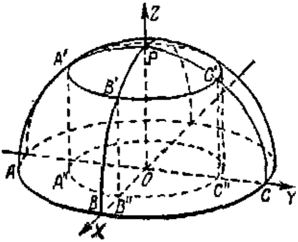
координат $OXYZ$; проекция точки M поверхности S на плоскость XOY служит изображением пары значений аргументов x, y, аппликата z точки M изображает соответствующее значение функции $f(x, y)$.

Для функции трех и большего числа аргументов этот способ неприменим.

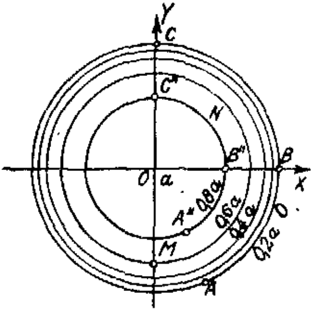
Пример 5. Функция, заданная формулой

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

представляется полусферой (черт. 429; ср. пример 2).



Черт. 429.



Черт. 430.

4. Функцию двух переменных можно представить на плоскости по *способу пометок*. Пара значений x, y изображается точкой M $(x; y)$, а значение z — числовой пометкой. (Этот способ применяется в картографии для обозначения высоты пункта.) Точки, для которых z имеет одно и то же значение, соединяют линией (*линия уровня*); при ней ставится соответствующая числовая пометка. Когда точка $(x; y)$ лежит на одной из линий уровня, то значение функции прочитывается непосредственно; если не лежит, то берем ближайшие две линии уровня, между которыми лежит точка $(x; y)$, и выполняем интерполяцию (на глаз).

Пример 6. На черт. 430 изображены линии уровня функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, соответствующие нарастанию функции на $0{,}2a$ $(OB = a)$. Значение z в точке M $(0; -0{,}8a)$ прочитывается по пометке: $0{,}6a$. Чтобы найти значение z в точке $N\left(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a\right)$, прочитываем пометки $0{,}6a$ и $0{,}8a$ при ближайших линиях уровня. Так как N находится примерно на равном расстоянии от обеих этих линий, то $z \approx 0{,}7a$.

Замечание. Если пересечь поверхность $z = f(x, y)$ плоскостью $z = k$ и спроектировать сечение на плоскость XOY, то получим линию уровня с пометкой k. Так, если пересечь полусферу $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ плоскостью $z = 0{,}8a$, то получим сечение $A'B'C'$ (черт. 429). Его проекция $A''B''C''$ (черт. 429 и 430) на плоскость XOY есть линия уровня с пометкой $0{,}8a$.

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ можно аналогично представить по способу пометок в пространстве. Роль линий уровня играют *поверхности уровня*.

§ 422. Предел функции нескольких аргументов

Понятие предела функции нескольких аргументов устанавливается так же, как для функции одного аргумента. Для определенности рассмотрим случай функции двух аргументов.

Число l называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(a; b)$, если z неограниченно приближается к l всякий раз, как точка $M(x; y)$ неограниченно приближается к M_0 (ср. § 204).

Запись:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = l$$

или

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = l.$$

Замечание 1. Предполагается, что внутри некоторого круга, охватывающего точку M_0, функция $f(x, y)$ определена во всех точках, не совпадающих с M_0; в самой же точке M_0 функция $f(x, y)$ либо определена, либо нет (ср. § 204, замечание 1).

Замечание 2. Математический смысл выражения «неограниченно приближается» выясняется из нижеследующего точного определения.

Определение. Число l называется *пределом* функции $f(x, y)$ в точке $M_0(a; b)$, если абсолютное значение разности $f(x, y) - l$ остается меньшим любого заранее данного положительного числа ε всякий раз, как расстояние $M_0M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ от точки $M_0(a; b)$ до точки $M(x; y)$ (не совпадающей с M_0) меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Геометрический смысл. Аппликата поверхности $z = f(x, y)$ отличается от l меньше чем на ε всякий раз, как проекция точки, лежащей на поверхности, попадает внутрь окружности радиуса δ с центром в точке $M_0(a; b)$.

Замечание 3. Для случая функции трех аргументов $f(x, y, z)$ расстояние M_0M представится выражением $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Для случая четырех аргументов, когда геометрическое истолкование выражения $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + (u-d)^2}$ становится невозможным, оно по аналогии все же называется *расстоянием* между точками $M(x; y; z; u)$ и $M_0(a; b; c; d)$.

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины устанавливается так же, как для функции одного аргумента (§§ 207, 208). О порядке малости см. § 423. Расширение понятия предела осуществляется, как в § 211.

§ 423. О порядке малости функции нескольких аргументов

При сравнении двух бесконечно малых функций α и β от одного аргумента мы различали (§ 217) следующие случаи:

1) отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ имеет конечный предел, отличный от нуля, тогда бесконечно малые величины α и β имеют одинаковый порядок;

2) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, тогда α имеет высший порядок относительно β;

3) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, тогда α имеет низший порядок относительно β;

4) отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, тогда α и β несравнимы.

Случай 4 при изучении элементарных функций одного аргумента *является исключительным. Для функций* двух и большего числа аргументов *исключительным является случай* 1, а практическую важность имеют случаи 2, 3, 4.

Таким образом, отношение двух бесконечно малых функций нескольких аргументов в типичном случае не имеет предела (см. пример 1). В иных случаях одна из двух бесконечно малых функций (например, α) имеет *высший порядок относительно* другой (см. примеры 2 и 3). Тогда вторая имеет низший порядок относительно первой.

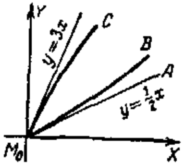
Пример 1. При $x \to 0$, $y \to 0$ величины $2x^2+y^2$ и x^2+y^2 бесконечно малы, но их отношение не имеет предела.

Действительно, точка $M(x; y)$ может стремиться к $M_0(0; 0)$ по линии, касающейся в точке M_0 прямой $y = \frac{1}{2}x$ (линия BM_0 на черт. 431), или прямой $y = 3x$, или прямой $y = x$ и т. д. В первом случае отношение $\frac{y}{x}$ стремится к $\frac{1}{2}$, во втором — к 3, в третьем — к 1. Значит, отношение

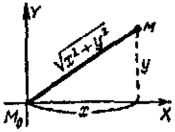
$$(2x^2+y^2):(x^2+y^2)=\left[2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]:\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$

в первом случае стремится к $\frac{9}{5}$, во втором — к $\frac{11}{10}$, в третьем — к $\frac{3}{2}$ и т. д.

Замечание. Бесконечно малая величина x^2+y^2 есть квадрат расстояния M_0M от точки M_0 до точки M, стремящейся к $M_0(0, 0)$. Вообще, случай, когда одна из



Черт. 431.



Черт. 432.

сравниваемых бесконечно малых является какой-либо степенью расстояния между точкой M и ее пределом M_0, имеет особенно важное значение (ср. §§ 430, 444).

Пример 2. Функция $2x^2-y^2$ имеет при $M\to M_0$ (0; 0) высший порядок малости относительно расстояния

$$MM_0=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Действительно, отношение $(2x^2-y^2):\sqrt{x^2+y^2}$ преобразуется так:

$$\frac{2x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=2x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (1)$$

Каждая из величин $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по абсолютному значению не превосходит единицы (см. черт. 432), а каждая из величин $2x$, y стремится к нулю. Следовательно, оба члена в правой части (1) стремятся к нулю. Значит, стремится к нулю и отношение $(2x^2-y^2):\sqrt{x^2+y^2}$.

Пример 3. Функция $f(x, y)=(x-x_0)^2(y-y_0)$ имеет высший порядок относительно квадрата расстояния MM_0, т. е. относительно $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. Действительно,

$$\frac{f(x, y)}{MM_0^2}=(x-x_0)\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\,\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

Первый сомножитель стремится к нулю, а каждый из двух других не превосходит единицы (ср. пример 2).

§ 424. Непрерывность функции нескольких аргументов

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если соблюдаются следующие два условия:

1) в точке M_0 функция $f(x, y)$ имеет определенное значение l,

2) в точке M_0 эта функция имеет предел, тоже равный l.

При нарушении хотя бы одного из этих условий функция называется *разрывной в точке* M_0.

Аналогично для случая трех и большего числа аргументов.

Определение 2. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в некоторой области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Пример 1. Функция $f(x, y)$, заданная формулами

$$f(0, 0)=0,$$
$$f(x, y)=\frac{2x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2+y^2\neq 0),$$

непрерывна в точке $M_0(0; 0)$. Действительно, она имеет в точке M_0 значение нуль; кроме того, она имеет здесь предел, тоже равный нулю (ср. пример 2 § 423). Во всех остальных точках числовой плоскости функция $f(x, y)$ тоже непрерывна. Поэтому она непрерывна в любой области.

Пример 2. Функция $\varphi(x, y)$, заданная формулами

$$\varphi(0, 0)=0,$$
$$\varphi(x, y)=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2\neq 0),$$

разрывна в точке $M_0(0; 0)$. Первое условие определения 1 здесь выполнено, а второе нет: функция $\varphi(x, y)$ не имеет предела при $M\to M_0$ (см. пример 1 § 423).

§ 425. Частные производные

О п р е д е л е н и е. *Частной производной* функции $u = f(x, y, z)$ по аргументу x называется предел отношения

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Обозначения:

$$u'_x,\ f'_x(x, y, z),\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}. \qquad (1)$$

О значении символов ∂u, ∂x см. § 429.

З а м е ч а н и е 1. Аргументы x, y, z *в процессе отыскания предела* считаются постоянными; полученная частная производная есть функция от x, y, z (ср. § 224).

Частные производные по аргументам y и z определяются и обозначаются аналогично, например

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z)-f(x, y, z)}{\Delta y}. \qquad (2)$$

З а м е ч а н и е 2. Для отыскания частной производной u'_x достаточно найти обыкновенную производную переменной u, считая последнюю функцией одного аргумента x. Если надо найти все три частные производные, то практичнее применять способ § 438.

П р и м е р. Найти значения частных производных от функции

$$u = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz \qquad (3)$$

в точке $M_0(0; 0; 1)$.

Р е ш е н и е. Считая u функцией одного аргумента x, находим, что ее производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ равна $4x-3y-2z$. В точке $(0; 0; 1)$ значение этой производной равно -2.

З а п и с ь:

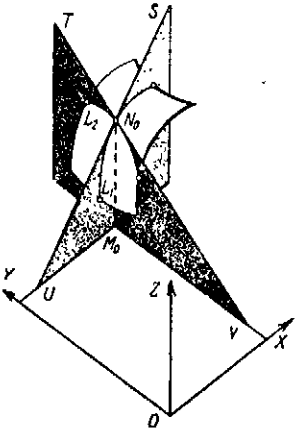
$$f'_x(0; 0; 1) = 4x-3y-2z\Big|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = -2,$$

$$f'_y(0; 0; 1) = 2y-3x\Big|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = 0,$$

$$f'_z(0; 0; 1) = -6.$$

§ 426. Геометрическое истолкование частных производных для случая двух аргументов

Пусть точке $M_0(x_0; y_0)$ (черт. 433) отвечает точка N_0 поверхности $z = f(x, y)$ (§ 421). Проведем через N_0 плоскость N_0M_0U, параллельную плоскости XOZ. В сечении получим линию L_1N_0, вдоль которой y остается постоянным ($y = y_0$). Апликата z линии L_1N_0 есть функция одного аргумента x. Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ численно равна угловому коэффициенту касательной UN_0, т. е. тангенсу угла M_0UN_0, образованного касательной US с координатной плоскостью XOY.



Черт. 433.

Проведя плоскость N_0M_0V, параллельную YOZ, получим сечение L_2N_0. Частная производная $f'_y(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла M_0VN_0, образованного касательной VT с плоскостью XOY.

§ 427. Полное и частное приращение

Возьмем какие-либо значения x_0, y_0, z_0 аргументов x, y, z и дадим им любые приращения Δx, Δy, Δz. Функция $u = f(x, y, z)$ получит *полное приращение*

$$\Delta u = \Delta f(x, y, z) = \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Может случиться, что приращения Δy, Δz равны нулю, т. е. y и z остаются неизменными; тогда функция $f(x, y, z)$ получает *частное приращение*

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x, y, z) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Аналогично получаются частные приращения

$$\Delta_y u = \Delta_y f(x, y, z) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$
$$\Delta_z u = \Delta_z f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Замечание. Для случая двух аргументов полное приращение функции геометрически изображается приращением аппликаты M_0N_0 (черт. 433) при любом смещении точки N_0 по поверхности $z = f(x, y)$. Частное приращение $\Delta_x f(x, y)$ получается при смещении точки N_0 вдоль сечения L_1N_0, частное приращение $\Delta_y f(x, y)$ – при смещении вдоль L_2N_0.

Пример. Полное приращение функции

$$u = 2x^2 - y^2 - z$$

равно

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta(2x^2 - y^2 - z) = \\ &= 2(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - (z+\Delta z) - 2x^2 + y^2 + z = \\ &= 4x\,\Delta x - 2y\,\Delta y - \Delta z + 2\Delta x^2 - \Delta y^2.\end{aligned}$$

Частные приращения равны

$$\Delta_x u = 4x\,\Delta x + 2\Delta x^2, \quad \Delta_y u = -2y\,\Delta y - \Delta y^2, \quad \Delta_z u = -\Delta z.$$

§ 428. Частный дифференциал

Определение. Если частное приращение $\Delta_x u$ (§ 427) функции $u = f(x, y, z)$ можно разбить на сумму двух членов:

$$\Delta_x u = A\,\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

где A не зависит от Δx, а α имеет высший порядок относительно Δx, то первый член $A\,\Delta x$ называется *частным дифференциалом* функции $f(x, y, z)$ по аргументу x и обозначается $d_x f(x, y, z)$ или $d_x u$:

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\,\Delta x. \tag{2}$$

Иначе говоря, частный дифференциал – это дифференциал (§ 228) функции $f(x, y, z)$, взятый в предположении, что величины y и z не изменяются ($\Delta y = \Delta z = 0$). В этом предположении x есть единственный аргумент, и потому вместо Δx можно писать dx (ср. § 234), так что

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\,dx.$$

Аналогично определяются частные дифференциалы $d_y f(x, y, z)$, $d_z f(x, y, z)$ по аргументам y, z.

Коэффициент A равен частной производной u'_x, т. е. частный дифференциал функции равен произведению соответствующей частной производной на приращение аргумента (§ 228, теорема 1)

$$d_x u = u'_x\,dx. \tag{3}$$

Аналогично

$$d_y u = u'_y \, dy, \tag{4}$$

$$d_z u = u'_z \, dz. \tag{5}$$

Пример. Найти частные дифференциалы функции

$$u = x^2 y + y^2 x.$$

Решение. Считая сначала y, а затем x постоянным, находим:

$$d_x u = (2xy + y^2)\, dx,$$

$$d_y u = (x^2 + 2xy)\, dy.$$

§ 429. О выражении частной производной через дифференциал

Частная производная u'_x функции $u = f(x, y, z)$ равна отношению частного дифференциала $d_x u$ к дифференциалу dx:

$$u'_x = \frac{d_x u}{dx}. \tag{1}$$

Вытекает из § 428 (ср. § 235).

В обозначении $\frac{\partial u}{\partial x}$ символ ∂u нецелесообразно понимать как *частный дифференциал* $d_x u$ по аргументу x, ибо в обозначении $\frac{\partial u}{\partial y}$ *тот же символ* ∂u надо было бы понимать как частный дифференциал $d_y u$, а в обозначении $\frac{\partial u}{\partial z}$ — как $d_z u$.

Поэтому выражение $\frac{\partial u}{\partial x}$ надо рассматривать *как нераздельный символ* частной производной (а не как отношение дифференциалов).

Пример. Пусть $u = xy$; тогда $x = \frac{u}{y}$ и $y = \frac{u}{x}$.

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{u}{y^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{x}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = y \cdot \left(-\frac{u}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{u}{xy} = -1.$$

Рассматривая знаки ∂u, ∂x, ∂y как самостоятельные величины, мы получили бы вместо -1 ошибочный результат $+1$.

§ 430. Полный дифференциал

Определение. Пусть полное приращение $\Delta f(x, y, z)$ (§ 427) функции $f(x, y, z)$ можно разбить на сумму двух членов:

$$\Delta f(x, y, z) = (A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z) + \varepsilon, \tag{1}$$

где ни один из коэффициентов A, B, C не зависит ни от Δx, ни от Δy, ни от Δz, а величина ε (рассматриваемая как функция от Δx, Δy, Δz) имеет высший порядок (§ 423) относительно расстояния $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Тогда первый член

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z \tag{2}$$

называется *полным дифференциалом* функции $f(x, y, z)$ (или просто *дифференциалом*) и обозначается $df(x, y, z)$ (ср. §§ 228, 428).

Пример 1. Возьмем функцию

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z. \tag{3}$$

Мы имеем (§ 427, пример):

$$\Delta f(x, y, z) = (4x\,\Delta x - 2y\,\Delta y - \Delta z) + (2\Delta x^2 - \Delta y^2).$$

Коэффициенты $A = 4x$, $B = -2y$, $C = -1$ не зависят ни от Δx, ни от Δy, ни от Δz, величина $\varepsilon = 2\Delta x^2 - \Delta y^2$ имеет высший порядок относительно $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (ср. § 423, пример 2). Стало быть, выражение $4x\,\Delta x - 2y\,\Delta y - \Delta z$ есть полный дифференциал функции $2x^2 - y^2 - z$:

$$d(2x^2 - y^2 - z) = 4x\,\Delta x - 2y\,\Delta y - \Delta z. \tag{4}$$

Теорема. Коэффициенты A, B, C соответственно равны частным производным функции $f(x, y, z)$:

$$A = f'_x(x, y, z), \quad B = f'_y(x, y, z), \quad C = f'_z(x, y, z). \tag{5}$$

Иначе говоря, *полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов* (§ 428):

$$df(x, y, z) = d_x f(x, y, z) + d_y f(x, y, z) + d_z f(x, y, z) \tag{6}$$

или

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z. \tag{7}$$

Пример 2. В формуле (4) коэффициенты $A = 4x$, $B = -2y$, $C = -1$ суть частные производные от функции

$2x^2-y^2-z$ по аргументам x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} 4x &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2-y^2-z), \\ -2y &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2-y^2-z), \\ -1 &= \frac{\partial}{\partial z}(2x^2-y^2-z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Замечание 1. В силу формулы (7) полные дифференциалы dx, dy, dz аргументов x, y, z соответственно равны Δx, Δy, Δz. Поэтому имеем:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

Например (ср. пример 1),

$$d(2x^2-y^2-z) = 4x\,dx - 2y\,dy - dz. \tag{10}$$

Формула (9) инвариантна (см. § 432) и потому предпочтительна перед (7).

Замечание 2. Если u есть функция одного аргумента, то полный дифференциал обращается в обыкновенный, а единственная частная производная—в обыкновенную.

§ 431. Геометрическое истолкование полного дифференциала (случай двух аргументов)

Пусть плоскость P касается (§ 435) в точке $M(x; y; z)$ поверхности S, изображающей функцию $z = f(x, y)$ (п. 3 § 421). Сместим проекцию $M_0(x; y; 0)$ точки M в положение $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; 0)$. Тогда апликата *касательной плоскости* получит приращение, равное полному дифференциалу:

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y. \tag{1}$$

Соответствующее приращение апликаты *поверхности* S равно полному приращению Δz функции $z = f(x, y)$.

Стало быть (§ 430, определение), расстояние между поверхностью S и касательной плоскостью P (считаемое по направлению оси апликат) имеет высший порядок малости относительно расстояния

$$\rho = M_0M_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

(ср. § 230).

§ 432. Инвариантность выражения $f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz$ полного дифференциала

Выражение $f'_x\,\Delta x+f'_y\,\Delta y+f'_z\,\Delta z$ представляет (§ 430) полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$, если x, y, z рассматриваются как аргументы [1]). Если же переменные x, y, z сами являются функциями одного, двух или большего числа аргументов, то написанное выражение, как правило, не представляет дифференциала. Напротив, выражение

$$f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz$$

всегда [1]) представляет полный дифференциал функции $f(x, y, z)$ (ср. § 234).

Пример 1. Рассмотрим функцию $u=xy$ аргументов x, y. Имеем:

$$du = u'_x\,dx+u'_y\,dy = y\,dx+x\,dy. \tag{1}$$

Эта формула верна и в том случае, когда x, y суть функции аргументов t, s, заданные формулами

$$x = t^2+s^2, \quad y = t^2-s^2. \tag{2}$$

Действительно, в этом случае имеем:

$$u = t^4-s^4, \tag{3}$$

$$du = u'_t\,dt+u'_s\,ds = 4t^3\,dt-4s^3\,ds. \tag{4}$$

Тот же результат получим по формуле (1), если в нее вместо x, y подставить выражения (2), а вместо dx, dy — выражения

$$dx = 2t\,dt+2s\,ds, \qquad dy = 2t\,dt-2s\,ds, \tag{5}$$

найденные с помощью формул (2). Если же вместо (1) взять формулу

$$du = y\,\Delta x+x\,\Delta y, \tag{6}$$

то она будет неверна при аргументах t, s.

Пример 2. Формула (1) верна и в том случае, когда x и y — функции одного аргумента.

Пример 3. Формула $d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$ остается верной, если положить $x=rst$:

$$d\operatorname{arctg} rst = \frac{d\,(rst)}{1+r^2s^2t^2}.$$

---

[1]) Предполагается, что полный дифференциал существует. О функциях, обладающих частными производными, но не имеющих полного дифференциала, см. § 434.

§ 433. Техника дифференцирования

Для разыскания частных производных в большинстве случаев удобно *предварительно* найти полный дифференциал. Последний вычисляется по тем же правилам, что и дифференциал функции от одного аргумента (ср. § 432 и § 430, замечание 2).

Пример 1. Найти частные производные от функции

$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Решение. Вычисляем полный дифференциал по правилам § § 247 и 240. Получаем.

$$du = \frac{d\,\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Коэффициенты при dx, dy суть частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Непосредственное вычисление производных потребовало бы больше труда и внимания.

Пример 2. Найти частные производные от функции $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$.

Решение.

$$d \ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\, d \ln (x^2+y^2) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Иной раз при дифференцировании функции одного аргумента удобно воспользоваться полным дифференциалом функции двух, трех и т. д. аргументов.

Пример 3. Найти дифференциал функции $u = x^x$.

Решение. Ищем dy^z (y и z — независимые переменные), для чего предварительно находим частные производные. Затем полагаем $y = x$, $z = x$:

$$dy^z = \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = zy^{z-1}\,dy + y^z \ln y\,dz, \tag{5}$$

$$dx^x = xx^{x-1}\,dx + x^x \ln x\,dx = x^x(1+\ln x)\,dx. \tag{6}$$

При некотором навыке запись ограничивается формулой (6), остальное делается в уме.

§ 434. Дифференцируемые функции

Функция $u=f(x, y, z)$, имеющая в точке M_0 полный дифференциал, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Дифференцируемая функция всегда обладает конечными частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ и частными дифференциалами

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z;$$

сумма последних дает полный дифференциал (§ 430).

Но существование частных дифференциалов (или конечных частных производных) не обеспечивает существования полного дифференциала.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определяемую в точке $M_0(0; 0)$ формулой

$$f(0,\ 0)=4, \tag{1}$$

а в остальных точках—формулой

$$f(x,\ y) = 4+2x+y+\frac{x^2y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Эта функция непрерывна в точке $M_0\ (0,\ 0)$ и имеет здесь частные производные

$$f'_x(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\ 0)-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2,$$

$$f'_y(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\ \Delta y)-4}{\Delta y}=1.$$

Но выражение $f'_x(0,\ 0)\,\Delta x+f'_y(0,\ 0)\,\Delta y=2\Delta x+\Delta y$ не является полным дифференциалом. Действительно, полное приращение имеет вид

$$\Delta f(0,\ 0)=f(\Delta x,\ \Delta y)-4=(2\Delta x+\Delta y)+\frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Первый член не является полным дифференциалом, так как второй член $\varepsilon=\frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ не имеет высшего порядка относительно

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

т. е. отношение $\varepsilon:\rho$ не стремится к нулю при $M\ (\Delta x,\ \Delta y)\to 0$. Так, если M стремится к M_0 по лучу $y=3t$, $x=4t$, то $\varepsilon:\rho$ сохраняет значение $\frac{36}{125}$.

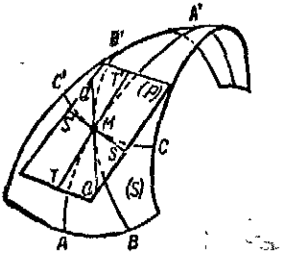
Другой пример недифференцируемой функции рассмотрен в § 442 (пример 2).

Замечание 1. Если все частные производные непрерывны в рассматриваемой точке, то функция дифференцируема в этой точке. В предыдущем примере обе частные производные были разрывны в точке $M_0(0; 0)$.

Замечание 2. Элементарные функции, как правило, дифференцируемы. Дифференцируемость нарушается лишь в отдельных точках или вдоль отдельных линий.

§ 435. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение 1. Через точку M поверхности S (черт. 434) будем проводить на поверхности линии AA', BB', CC', ..., имеющие в точке M касательные TT', QQ', SS, ... *Плоскость* P, в которой лежат всевозможные касательные, называется *касательной плоскостью к поверхности* S *в точке* M (*точка касания*).



Черт. 434.

Пример 1. Пусть прямая MT — касательная к какой-либо сферической линии. Тогда MT перпендикулярна к радиусу, т. е. лежит в плоскости P, проходящей через точку M перпендикулярно к радиусу. Стало быть, P — касательная плоскость сферы.

Пример 2. Коническая поверхность не имеет касательной плоскости в вершине K. Действительно, если через K проводить всевозможные линии, то их касательные в точке K не будут лежать в одной плоскости.

Замечание. Поверхность $z=f(x, y)$ не имеет касательной плоскости в точке M в том и только в том случае, когда функция $f(x, y)$ не дифференцируема в рассматриваемой точке. Поверхности, реализуемые физически, могут лишаться касательной плоскости лишь в отдельных точках (*конические точки*) или вдоль отдельных линий (*рёбра*) (ср. § 434, замечание 2).

Пример 3. Функция $f(x, y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}+2x+y+4$, доопределенная условием $f(0, 0)=4$, не дифференцируема в точке $x=0$, $y=0$ (§ 434, пример). В соответствии с этим поверхность

$$z=\frac{x^2y}{x^2+y^2}+2x+y+4 \tag{1}$$

лишена касательной плоскости в точке $A(0; 0; 4)$ [1].

---

[1]) Эта поверхность — конус (не круглый) с вершиной A. Действительно, всякая прямая

$$y=ax, \quad z=\left(\frac{a}{1+a^2}+a+2\right)x+4 \tag{2}$$

(a — постоянное число) проходит через A и лежит на поверхности (1), в чем убеждаемся, подставляя выражения (2) в уравнение (1). Множество прямых (2) образует коническую поверхность.

Определение 2. *Нормалью* к поверхности S в точке M называется нормаль к касательной плоскости, проведенной через точку M.

Пример 4. Нормаль сферической поверхности в каждой ее точке проходит через центр сферы.

§ 436. Уравнение касательной плоскости

1. Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ представляется уравнением

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{1}$$

где X, Y, Z — текущие координаты, x, y, z — координаты точки касания, p, q — соответствующие значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пояснение. Плоскость (1) проходит через прямую

$$Z - z = p(X - x), \qquad Y - y = 0, \tag{A}$$

в чем убеждаемся подстановкой в уравнение (1). Прямая (A) — касательная к сечению, проведенному через точку $(x;\ y;\ z)$ параллельно плоскости XOZ (§ 426). Так же убеждаемся, что плоскость (1) проходит через касательную к сечению, параллельному ZOY. Значит (§ 435), плоскость (1) совпадает с касательной плоскостью (если последняя существует; ср. § 435, замечание).

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости гиперболического параболоида $z = \frac{x^2 - y^2}{2a}$ в точке $\left(2a;\ a;\ \frac{3}{2}a\right)$.

Решение. Имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a} = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{a} = -1$. Уравнение искомой касательной плоскости есть

$$Z - \frac{3}{2}a = 2(X - 2a) - (Y - a),$$

или $Z = 2X - Y - \frac{3}{2}a$.

2. Если поверхность представляется уравнением вида $F(x,\ y,\ z) = 0$, то касательная плоскость представится уравнением

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) — частный вид уравнения (2).

Пример 2. Найти уравнение касательной плоскости эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{3}$$

в точке $M(x;\ y;\ z)$.

Решение. Имеем: $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$, $F'_z=\frac{2z}{c^2}$. Искомое уравнение есть

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0 \tag{4}$$

или, сокращая на 2 и учитывая уравнение эллипсоида,

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0.$$

Замечание. Уравнение касательной плоскости проще всего получается из уравнения данной поверхности следующим образом: данное уравнение дифференцируем и вместо dx, dy, dz пишем $X-x$, $Y-y$, $Z-z$. Так, дифференцируя уравнение (3), получаем:

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}+\frac{2z\,dz}{c^2}=0.$$

Заменив дифференциалы dx, dy, dz разностями $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, получаем уравнение (4).

§ 437. Уравнения нормали

Нормаль к поверхности $F(x,\ y,\ z)=0$ в точке $M(x;\ y;\ z)$ представляется уравнениями

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z} \tag{1}$$

(ср. §§ 436 и 156). В частности, если поверхность дана уравнением $z=f(x,\ y)$, то уравнения нормали при обозначениях § 436 имеют вид

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}. \tag{2}$$

Пример. Уравнения нормали к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (ср. § 436, пример 2) суть

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}.$$

§ 438. Дифференцирование сложной функции

Величина w называется *сложной функцией*, если она рассматривается как функция от (вспомогательных) переменных x, y, ..., которые в свою очередь зависят от одного или нескольких аргументов u, v, ... (ср. § 236).

Разыскание полного дифференциала сложной функции не требует особых правил (вследствие инвариантности выражения дифференциала; § 432). После того как найден полный дифференциал, выражения частных производных получаются автоматически (§ 433). Общий вид этих выражений дан в § 440.

Пример. Найти полный дифференциал и частные производные функции

$$w = e^{uv} \sin (u+v). \tag{1}$$

Если представить w в виде $e^x \sin y$, где $x = uv$ и $y = u+v$, то w будет сложной функцией от аргументов u, v. Полный дифференциал находится так же, как если бы x и y были независимыми переменными:

$$dw = e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy = e^x (\sin y \, dx + \cos y \, dy).$$

Подставляя сюда $x = uv$, $y = u+v$, находим:

$$dw = e^{uv} [\sin (u+v) (v \, du + u \, dv) + \cos (u+v) (du + dv)]. \tag{2}$$

Это — полный дифференциал данной функции; ее частные производные суть коэффициенты при du, dv. Именно:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = e^{uv} [v \sin (u+v) + \cos (u+v)], \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = e^{uv} [u \sin (u+v) + \cos (u+v)]. \tag{4}$$

Замечание. На практике не вводят особых обозначений для вспомогательных переменных. В примере 1 действуют так:

$$\begin{aligned} dw &= d[e^{uv} \sin (u+v)] = \\ &= \sin (u+v) \, de^{uv} + e^{uv} \, d \sin (u+v) = \\ &= \sin (u+v) \, e^{uv} \, d(uv) + e^{uv} \cos (u+v) \, d(u+v). \end{aligned}$$

Если раскрыть выражения $d(uv)$, $d(u+v)$, получится равенство (2).

§ 439. Замена прямоугольных координат полярными

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция прямоугольных координат x, y и пусть известны значения частных производных f'_x, f'_y в точке M. Тогда частные производные $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ по полярным координатам находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f'_x \cos\varphi + f'_y \sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\,(f'_y \cos\varphi - f'_x \sin\varphi). \qquad (1)$$

Пояснение. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (§ 73), то z есть сложная функция от r, φ. По способу § 438 находим:

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy = f'_x\,d(r\cos\varphi) + f'_y\,d(r\sin\varphi) =$$
$$= f'_x(\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi) + f'_y(\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi)$$

Производные $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ суть коэффициенты при dr, $d\varphi$.

Пример. По данным значениям

$$f'_x(3, 4) = 7, \qquad f'_y(3, 4) = 2$$

найти значения $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ в точке (3; 4).

Решение. В данной точке имеем: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. По формулам (1) находим:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 7 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = 5{,}8; \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 5\left(2 \cdot \frac{3}{5} - 7 \cdot \frac{4}{5}\right) = -22.$$

§ 440. Формулы для производных сложной функции

Пусть w есть сложная функция любого числа аргументов u, v, ..., t (§ 438), заданная через посредство вспомогательных переменных x, y, ..., z (в любом числе). Тогда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

т. е. частная производная по какому-либо аргументу равна сумме произведений частных производных по всем вспомогательным переменным на производные этих переменных по соответствующему аргументу.

Пояснение. Формулы (1) получатся из выражения полного дифференциала

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}dz, \tag{2}$$

если сюда подставить

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \ldots + \frac{\partial x}{\partial t}dt \tag{3}$$

и аналогичные выражения для $dy, \ldots, dz$ (ср. § 438).

§ 441. Полная производная

Пусть w рассматривается как функция переменных $x, y, \ldots, z$:

$$w = f(x, y, \ldots, z), \tag{1}$$

причем x служит аргументом, а остальные переменные зависят от x[1]). Производная от w по аргументу x, взятая с учетом этой зависимости, называется *полной производной* и обозначается $\frac{dw}{dx}$ в отличие от частной производной $\frac{\partial w}{\partial x}$ (§ 425). Полная производная выражается формулой

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

Она получается из выражения полного дифференциала dw (делением на dx).

Пример 1. Найти полную производную от функции $w = x^3e^{y^2}$, где y есть некоторая функция от x.

Решение.

$$dw = e^{y^2}d(x^3) + x^3de^{y^2} = 3e^{y^2}x^2\,dx + x^3e^{y^2}\,d(y^2) =$$
$$= 3e^{y^2}x^2\,dx + 2x^3e^{y^2}y\,dy,$$
$$\frac{dw}{dx} = 3e^{y^2}x^2 + 2x^3ye^{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

---

[1]) Это—частный вид сложной функции (§ 438) одного аргумента u (переменные $y, \ldots, z$ зависят от u как угодно, а переменная x связана с u равенством $x = u$)

Пример 2. Найти полную производную от функции $w=xy'$.

Решение. Роль переменной y играет здесь производная $y'=\frac{dy}{dx}$. По формуле (2) находим:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=y'+x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

То же выражение получим, разделив почленно на dx равенство

$$dw=y'\,dx+x\,dy'=y'\,dx+xy''\,dx.$$

§ 442. Дифференцирование неявной функции нескольких переменных

Правило 1. Уравнение

$$F(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

при известных условиях[1]) задает переменную z как неявную функцию аргументов x, y. Чтобы найти полный дифференциал этой функции, надо продифференцировать уравнение (1), т. е. приравнять нулю полный дифференциал его левой части. Полученное равенство надо разрешить относительно dz, и мы найдем полный дифференциал функции z. Коэффициенты при dx, dy дадут соответствующие частные производные.

Таким же образом поступаем при любом числе аргументов.

Пример 1. Найти полный дифференциал и частные производные неявной функции z аргументов x, y, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2=9 \qquad (2)$$

в точке $x=1, y=-2, z=-2$.

Решение. Дифференцируя, находим:

$$2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0.$$

Разрешив это равенство относительно dz, получаем полный дифференциал функции z (в произвольной точке)

$$dz=-\frac{x}{z}\,dx-\frac{y}{z}\,dy. \qquad (3)$$

[1]) См. ниже замечание 1.

В данной точке $(1; -2; -2)$ имеем:

$$dz = \frac{1}{2}\,dx - dy. \qquad (4)$$

Коэффициенты при dx, dy дают значения частных производных в данной точке:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1. \qquad (5)$$

Проверка Решив уравнение (2) относительно z, получим:

$$z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad (6)$$

(перед радикалом берем знак минус, ибо при $x = 1$, $y = -2$ должны иметь $z = -2$). Из (6) находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Подставляя сюда значения $x = 1$, $y = -2$, снова находим (5).

Замечание 1. В правиле 1 предполагается, что функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в некоторой точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, удовлетворяющей уравнению (1), и в достаточной близости от нее (т. е. во всех точках некоторого шара с центром в точке M_0). Кроме того, предполагается, что уравнение, полученное дифференцированием, однозначно разрешимо относительно dz (т. е. что коэффициент при dz отличен от нуля). При этих условиях можно утверждать:

1) что уравнение (1) действительно задает z как неявную функцию аргументов x, y, она определена в некотором круге с центром (x_0, y_0) и принимает значение z_0 при $x = x_0$, $y = y_0$;

2) что функция z дифференцируема в упомянутом круге и, в частности, в точке $(x_0; y_0)$.

В примере 1 вышеперечисленные условия выполнялись. В следующем примере рассмотрен один из разнообразных случаев их нарушения.

Пример 2. Уравнение

$$x^3 + 8y^3 - z^3 = 0 \qquad (7)$$

задает z как неявную функцию аргументов x, y. Явное ее выражение таково:

$$z = \sqrt[3]{x^3 + 8y^3}. \qquad (8)$$

Пытаясь применить правило 1 к разысканию полного дифференциала функции z в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, мы получили бы из (7) равенство

$$3x^2\,dx + 24y^2\,dy - 3z^2\,dz = 0. \qquad (9)$$

В точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ это равенство не допускает однозначного решения относительно dz, ибо оно обращается в тождество $0 = 0$. Таким образом, правило 1 не дает возможности найти ни полного дифференциала, ни частных производных функции z в рассматриваемой точке. Дополнительное исследование показывает, что в этой точке функция z недифференцируема (§ 434), но имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2 \text{ [1]}.$$

Правило 2. Система двух уравнений

$$F_1(x, y, z, u, v)=0,\quad F_2(x, y, z, u, v)=0 \tag{10}$$

при известных условиях [2]) задаст две переменные u, v как неявные функции аргументов x, y, z. Чтобы найти полные дифференциалы этих функций, надо продифференцировать уравнения (10). Полученную систему равенств надо разрешить относительно du, dv, и мы найдем полные дифференциалы функций u, v. Коэффициенты при dx, dy, dz дадут соответствующие частные производные.

Таким же образом поступаем, когда число уравнений в системе больше двух (при любом числе аргументов).

Пример 3. Найти полные дифференциалы и частные производные неявных функций u, v, заданных системой уравнений

$$x+y+u+v=a,\qquad x^2+y^2+u^2+v^2=b^2. \tag{11}$$

Решение. Дифференцируя, находим:

$$\begin{gathered} dx+dy+du+dv=0, \\ x\,dx+y\,dy+u\,du+v\,dv=0. \end{gathered} \tag{12}$$

Разрешив систему (12) относительно du, dv, получаем полные дифференциалы функций u, v:

$$du=\frac{(v-x)\,dx+(v-y)\,dy}{u-v},\quad dv=\frac{(u-x)\,dx+(u-y)\,dy}{v-u}. \tag{13}$$

---

[1]) Действительно, полагая $y=0$, получаем: $z=\sqrt[3]{x^3}=x$, так что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=0}=1$; полагая $x=0$, получаем: $z=\sqrt[3]{8y^3}=2y$, так что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=2$. Но выражение $\Delta x+2\,\Delta y$ не является полным дифференциалом, ибо разность

$$\Delta z-(\Delta x+2\,\Delta y)=\varepsilon$$

не имеет высшего порядка относительно $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Так, если точка $(x;\ y)$ стремится к точке $(0;\ 0)$, скажем, по биссектрисе первого координатного угла, то отношение $\frac{\varepsilon}{\rho}$ имеет значение

$$\frac{\varepsilon}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3+8\Delta y^3}-(\Delta x+2\,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-3}{\sqrt{2}},$$

т. е. к нулю не стремится.

[2]) См. ниже замечание 2.

Коэффициенты при dx, dy дают частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v-x}{u-v},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v-y}{u-v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u-x}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{u-y}{v-u}. \qquad (14)$$

Замечание 2. В правиле 2 предполагается, что функции $F_1(x, y, z, u, v)=0$, $F_2(x, y, z, u, v)=0$ дифференцируемы в некоторой точке $M_0(x_0; y_0; z_0; u_0; v_0)$ и в достаточной близости от нее. Кроме того, предполагается, что система уравнений, полученная дифференцированием, однозначно разрешима относительно du, dv (т. е. что определитель, составленный из коэффициентов при du, dv, отличен от нуля). При этих условиях можно утверждать:

1) что система (10) действительно задает u, v как неявные функции аргументов x, y, z; эти функции определены в некотором шаре с центром $(x_0; y_0; z_0)$ и принимают значения u_0, v_0 при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$;

2) что функции u, v дифференцируемы в упомянутом шаре и, в частности, в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

§ 443. Частные производные высших порядков

Определение 1. *Частными производными второго порядка* (или *вторыми частными производными*) от функции $z=f(x, y)$ называются частные производные от функций

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y). \qquad (1)$$

Общее число вторых частных производных — четыре. Частная производная от $\frac{\partial z}{\partial x}$ по аргументу x обозначается $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, или $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, или $f''_{xx}(x, y)$. Аналогично обозначаются остальные, так что имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x, y), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y). \qquad (5)$$

Вторые производные (2) и (5) называются *чистыми*, вторые производные (3) и (4) — *смешанными*.

Теорема 1. Смешанные производные второго порядка (они отличаются друг от друга порядком дифференцирования) равны между собой (при условии их непрерывности в рассматриваемой точке).

Пример 1. Найдем вторые частные производные от функции $z=x^3y^2+2x^2y-6$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+4xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2+4y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=6x^2y+4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=6x^2y+4x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3.$$

Смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ равны между собой.

Замечание 1. Четыре частных производных второго порядка в силу теоремы 1 сводятся к трем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Определение 2. Частные производные от частных производных второго порядка называются *частными производными третьего порядка* (или *третьими частными производными*) и обозначаются f'''_{xxx}, f'''_{yyy} (чистые производные), f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{xyy} и т. д. (смешанные производные) или $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$ и т. д.

Теорема 2. Смешанные производные третьего порядка, отличающиеся друг от друга лишь порядком дифференцирования, равны между собой (при условии их непрерывности в рассматриваемой точке).

Например, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$.

Пример 2. Частные производные третьего порядка от функции $z=x^3y^2+2x^2y-6$ (ср. пример 1) суть:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=6y^2, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=12xy+4,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=6x^2.$$

Замечание 2. Восемь частных производных третьего порядка в силу теоремы 2 приводятся к четырем.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Замечание 3. Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого и высших порядков от функции $f(x, y)$, а также от функций трех и большего числа аргументов. Для всех случаев имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

§ 444. Полные дифференциалы высших порядков

Образуем полное приращение (§ 427) Δz функции $z=f(x, y)$, затем, *сохраняя те же значения* Δx, Δy, образуем полное приращение $\Delta(\Delta z)$ величины Δz (рассматривая ее как функцию от x, y). Получим *вторую разность* $\Delta^2 z$ функции z.

Пусть $\Delta^2 z$ распадается на сумму двух членов:

$$\Delta^2 z = (r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2) + \alpha, \tag{1}$$

где r, s, t не зависят ни от Δx, ни от Δy, а α имеет высший порядок относительно $\varrho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Тогда первый член называется *вторым* (полным) *дифференциалом* функции z и обозначается $d^2 z$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $z = x^3 y^2$. Находим:

$$\Delta z = (x+\Delta x)^3 (y+\Delta y)^2 - x^3 y^2,$$
$$\Delta^2 z = (x+2\,\Delta x)^3 (y+2\,\Delta y)^2 - 2\,(x+\Delta x)^3 (y+\Delta y)^2 + \\ + x^3 y^2 = (6xy^2\,\Delta x^2 + 12x^2 y\,\Delta x\,\Delta y + 2x^3\,\Delta y^2) + \alpha, \tag{2}$$

где α имеет высший порядок относительно ϱ^2. Первый же член суммы (2) имеет вид $r\Delta x^2 + 2s\Delta x\Delta y + t\Delta y^2$, причем величины $r=6xy^2$, $s=6x^2y$, $t=2x^3$ не зависят ни от Δx, ни от Δy. Стало быть, первый член есть второй дифференциал функции $z=x^3y^2$:

$$d^2 z = 6xy^2\Delta x^2 + 12x^2y\,\Delta x\,\Delta y + 2x^3\,\Delta y^2. \tag{3}$$

Теорема 1. Величины r, s, t в формуле (1) равны соответствующим вторым частным производным функции z:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Пример 2. В предыдущем примере мы имели:

$$r = 6xy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = 6x^2 y = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = 2x^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Выражение второго дифференциала. В силу теоремы 1 имеем:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\Delta y^2. \tag{4}$$

Замечание. Так как

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

(§ 430, замечание 1), то вместо (4) можно написать:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{5}$$

В противоположность соответствующему выражению первого дифференциала (ср. § 432) формула (5), как правило, не верна, если x и y не являются аргументами (ср. сноску в § 258).

Теорема 2. Если считать дифференциалы dx, dy не зависящими ни от x, ни от y, то второй дифференциал d^2z равен дифференциалу от первого дифференциала dz (ср. § 258, теорема 2):

$$d\,[df(x, y)] = d^2 f(x, y). \tag{6}$$

Пример 3. Пусть $z = x^3y^2$. Имеем:

$$dz = 3x^2y^2\, dx + 2x^3y\, dy.$$

Дифференцируем еще раз, считая dx, dy постоянными. Получим:

$$d\,(dz) = d\,(3x^2y^2)\, dx + d\,(2x^3y)\, dy =$$
$$= 6xy^2\, dx^2 + 12x^2y\, dx\, dy + 2x^3\, dy^2.$$

А это — второй полный дифференциал функции x^3y^2 (см. пример 1).

Полные дифференциалы третьего, четвертого и т. д. порядков (d^3z, d^4z и т. д.) определяются аналогично и выражаются следующими формулами:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} dx^2\, dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3, \tag{7}$$

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\, \partial y} dx^3\, dy + 6 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y^2} dx^2\, dy^2 +$$
$$+ 4 \frac{\partial^4 z}{\partial x\, \partial y^3} dx\, dy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} dy^4. \tag{8}$$

Числовые множители равны соответствующим биномиальным коэффициентам.

Формулы (7), (8) и т. д., как правило, не верны, если x и y не являются аргументами.

Все вышесказанное распространяется на функции трех и большего числа переменных.

§ 445. Техника повторного дифференцирования

Для разыскания частных производных высшего порядка удобно предварительно найти полный дифференциал соответствующего порядка.

Пример. Найти частные производные от функции $z=x^3y^2$ до третьего порядка включительно.

Решение. Находим сначала первый дифференциал dz:

$$dz = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy, \tag{1}$$

затем второй, для чего дифференцируем (1), считая dx, dy постоянными:

$$d^2z = 6xy^2dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3dy^2 \tag{2}$$

(ср. § 444, пример 3). Дифференцируя (2), снова считая dx, dy постоянными, получаем:

$$d^3z = (6y^2\,dx^3 + 12xy\,dx^2\,dy) + \\ + (24xy\,dx^2dy + 12x^2\,dx\,dy^2) + 6x^2\,dx\,dy^2,$$

или

$$d^3z = 6y^2\,dx^3 + 3\cdot 12xy\,dx^2\,dy + 3\cdot 6x^2\,dx\,dy^2. \tag{3}$$

По коэффициентам выражений (1), (2), (3), учитывая формулы (5) и (7) § 444, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 6x^2, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

§ 446. Условное обозначение дифференциалов

Выражения дифференциалов усложняются по мере роста порядка. Для упрощения вводят следующее *условное обозначение* дифференциала k-го порядка от функции $z=f(x, y)$:

$$d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z. \tag{1}$$

Его надо понимать так: сначала «возводим в k-ю степень» двучлен $\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$ так, как если бы символы ∂x, ∂y, ∂ обозначали самостоятельные алгебраические величины. Затем «открываем скобки», приписывая к каждому символу ∂^k множитель z. После этого вкладываем во все символы их истинный смысл.

Пример. Запись $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial^3}{\partial y}dy\right)^3 z$ расшифровывается так: «возведя в куб», получаем:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)z,$$

«открыв скобки», находим:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

(ср. (7) § 444).

Замечание. Для трех, четырех и т. д. аргументов условные записи те же; например, запись

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 u$$

означает, что

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}dy\,dz+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}dz\,dx.$$

§ 447. Формула Тейлора для функции нескольких аргументов

Для функции одного аргумента формулу Тейлора (§ 271) можно записать в виде

$$f(x+\Delta x) = f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)\,\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)\,\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\,\Delta x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x^{n+1}, \quad (1)$$

где θ — некоторое положительное число, меньшее единицы [1]):

$$0<\theta<1. \quad (2)$$

Здесь выражения $f'(x)\Delta x$, $f''(x)\Delta x^2, \ldots$ суть дифференциалы первого, второго и т. д. порядков.

---

[1]) Число ξ, входящее в (1) § 271, лежит между x и $x+\Delta x$; поэтому разность $\xi-x$ имеет тот же знак, что и Δx, а по абсолютному значению меньше, чем Δx. Значит, частное $(\xi-x):\Delta x$ есть некоторое положительное число θ, меньшее, чем единица. Из равенства $(\xi-x):\Delta x=\theta$ находим: $\xi=x+\theta\Delta x$.

Формула Тейлора для функции нескольких переменных[1]) строится аналогично, только дифференциалы берутся *полные*. Так, для двух аргументов при $n=2$ имеем:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) =$$
$$= f(x, y)+\frac{1}{1}[f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y]+$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x, y)\,\Delta x^2+2f''_{xy}(x, y)\,\Delta x\,\Delta y+f''_{y}(x, y)\,\Delta y^2]+$$
$$+\frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x^3+$$
$$+3f'''_{xxy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x^2\,\Delta y+$$
$$+3f'''_{xyy}(x+\theta\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y^2+$$
$$+f'''_{yyy}(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y)\Delta y^3], \qquad (3)$$

где θ удовлетворяет неравенству (2).

Выражения в квадратных скобках суть (§ 444) полные дифференциалы. В последнем члене частные производные взяты при промежуточных значениях аргументов[2]).

Формула Тейлора с любым числом членов обозрима (даже для двух аргументов) лишь при условных обозначениях § 446. Тогда она имеет вид

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x, y)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y) \qquad (4)$$

или

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!}df(x, y)+\frac{1}{2!}d^2 f(x, y)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x, y)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta\,\Delta x, y+\theta\,\Delta y) \qquad (5)$$

и аналогично для большего числа аргументов.

---

[1]) Условие, при котором формула верна, дано ниже в замечании.

[2]) Точка $M(x+\theta\Delta x;\ y+\theta\Delta y)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $M(x; y)$ и $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Число θ даст отношение

$$\overline{MM} : MM_1.$$

З а м е ч а н и е. Формула Тейлора верна при условии, что функция $f(x, y)$ обладает полным дифференциалом $(n+1)$-го *порядка во всех точках отрезка, соединяющего точки* $M(x; y)$ и $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$.

П р и м е р. Проверим формулу (3) на примере функции

$$f(x, y) = xy^2$$

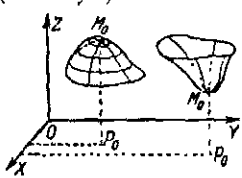
при $x=y=1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$. Будем иметь:

$$(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 = xy^2+[y^2\,\Delta x+2xy\,\Delta y]+$$
$$+\frac{1}{2}\,[4(y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y+2\,(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta y^2].$$

Подставив данные значения, получим уравнение $0{,}004 = 0{,}012\theta$, откуда $\theta=\frac{1}{3}$, т. е. θ действительно содержится между нулем и единицей.

§ 448. Экстремум (максимум и минимум) функции нескольких аргументов

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x, y)$ *имеет максимум* (*минимум*) в точке $P_0(a, b)$, если во всех точках, достаточно близких к P_0, значение $f(x, y)$ меньше (больше), чем значение $f(a, b)$ (ср. § 275).



Черт. 435.

Г е о м е т р и ч е с к и: над точкой P_0 (черт. 435) поверхность $z=f(x, y)$ имеет точку M_0, лежащую выше (ниже) всех соседних.

Н е о б х о д и м о е у с л о в и е э к с т р е м у м а. Если функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке $P_0\,(a; b)$, то в этой точке полный дифференциал либо тождественно равен нулю, либо не существует.

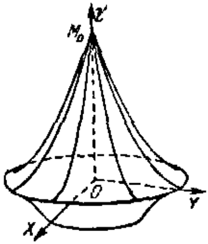
З а м е ч а н и е 1. Условие $df(x, y)=0$ равносильно системе двух равенств:

$$f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0.$$

Равенство $f'_x\,(x, y)=0$, взятое в отдельности, есть необходимое условие экстремума при неизменности y (§ 276). Геометрически оно *означает, что сечение поверхности, параллельное плоскости XOZ*, имеет в точке M_0 касательную, параллельную оси OX (ср. § 426). Аналогичный смысл имеет равенство $f'_y\,(x, y)=0$.

Геометрически: в точке M_0, лежащей выше (ниже) всех соседних, поверхность $z=f(x, y)$ либо имеет горизонтальную касательную плоскость (как на черт. 435), либо не имеет никакой касательной плоскости (как на черт. 436).

Замечание 2. Определение экстремума и необходимое условие остаются теми же для любого числа аргументов.



Черт. 436.

§ 449. Правило разыскания экстремума

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в некоторой области ее задания. Чтобы найти все ее экстремумы в этой области, надо:

1) Решить систему уравнений

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Решение даст *критические точки*.

2) Для каждой критической точки $P_0(a; b)$ исследовать, остается ли неизменным знак разности

$$f(x, y) - f(a, b) \qquad (2)$$

для всех точек $(x; y)$, достаточно близких к P_0. Если разность (2) сохраняет положительный знак, то в точке P_0 имеем минимум, если отрицательный, — то максимум. Если разность (2) не сохраняет знака, то в точке P_0 нет экстремума.

Аналогично находим экстремумы функции при большем числе аргументов.

Замечание. При двух аргументах исследование иногда облегчается применением достаточного условия § 450. При большем числе аргументов это условие усложняется. Поэтому на практике стараются использовать частные свойства данной функции.

Пример. Найти экстремумы функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

Решение. 1) Приравнивая нулю частные производные $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$, получаем систему уравнений

$$x^2 - y = 0, \quad y^2 - x = 0. \qquad (3)$$

Она имеет два решения:

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 1. \qquad (4)$$

Исследуем знак разности (2) для каждой из двух критических точек $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 1)$.

2а) Для точки $P_1(0; 0)$ имеем:

$$f(x, y)-f(0, 0) = x^3+y^3-3xy. \tag{5}$$

Разность (5) *не сохраняет* знака, т. е. *в любой близости* от P_1 есть точки двух типов: для одних разность (5) положительна, для других – отрицательна. Так, если точку $P(x; y)$ взять на прямой $y=x$, то разность (5) равна $2x^3-3x^2 = x^2(2x-3)$. Вблизи от P_1 $\left(\text{при } x<\frac{3}{2}\right)$ эта разность отрицательна. Если же точку $P(x; y)$ взять на прямой $y=-x$, то разность (5) равна $3x^2$, а эта величина всегда положительна.

Поскольку разность (5) не сохраняет знака, в точке $P_1(0; 0)$ экстремума нет. Поверхность

$$z = x^3+y^3-3xy+1$$

в точке $(0; 0; 1)$ имеет вид седла (наподобие гиперболического параболоида).

2б) Для точки $P_2(1; 1)$ имеем:

$$f(x, y)-f(1;\ 1)=x^3+y^3-3xy+1. \tag{6}$$

Докажем, что эта разность в достаточной близости от точки $(1; 1)$ сохраняет положительный знак. Положим:

$$x = 1+\alpha, \quad y = 1+\beta. \tag{7}$$

Разность (6) преобразуется к виду

$$3(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3). \tag{8}$$

Первый член при всех ненулевых значениях α, β положителен и притом больше чем[1] $\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)$. Второй член может быть и отрицательным, но при достаточной малости $|\alpha|$ и $|\beta|$ *он по абсолютному значению меньше чем*[2] $\alpha^2+\beta^2$. Значит, разность (8) положительна.

Стало быть, в точке $(1; 1)$ данная функция имеет минимум.

---

[1]) Имеем тождество $3(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{3}{2}(\alpha-\beta)^2$. Величина $(\alpha-\beta)^2$ положительна или равна нулю.

[2]) При $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$ имеем: $|\alpha^3|<\alpha^2$, $|\beta^3|<\beta^2$.

§ 450. Достаточные условия экстремума (случай двух аргументов)

Теорема 1. Пусть

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 \tag{1}$$

есть второй дифференциал функции $f(x, y)$ в критической (§ 449) ее точке P_0 $(a;\ b)$ (так что числа A, B, C дают значения вторых производных f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} в точке P_0). Если при этом имеет место неравенство

$$AC - B^2 > 0, \tag{2}$$

то функция $f(x, y)$ имеет в точке P_0 экстремум: *максимум, когда A (или C) отрицательно, минимум — если A (или C) положительно.*

Замечание 1. Числа A и C при условии (2) всегда имеют одинаковые знаки.

Теорема 1 дает *достаточное условие существования экстремума.*

Пример 1. Функция $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ (ср. пример § 449) *имеет в точке* $(1;\ 1)$ *экстремум, ибо первые* производные в этой точке равны нулю, а вторые производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ имеют значения $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, так что неравенство (2) удовлетворено. Экстремум является минимумом, ибо A и C положительны.

Теорема 2. Если в критической точке P_0 $(a;\ b)$ имеет место (при обозначениях теоремы 1) неравенство

$$AC - B^2 < 0, \tag{3}$$

то функция $f(x, y)$ не имеет экстремума в точке P_0.

Теорема 2 дает *достаточное условие отсутствия экстремума.*

Пример 2. Функция $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ (ср. пример § 449) в точке $(0;\ 0)$ не имеет экстремума: хотя первые производные и обращаются здесь в нуль, но теперь *имеем:*

$$A = 0,\quad B = -3,\quad C = 0,$$

так что

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Замечание 2. Если в критической точке имеет место равенство

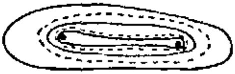
$$AC - B^2 = 0, \tag{4}$$

то функция может иметь здесь экстремум (максимум или минимум), а может и не иметь. Этот случай требует дополнительного исследования.

§ 451. Двойной интеграл [1])

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна внутри некоторой области D (черт. 437) и на ее границе. Разобьем область D на n частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$; площади их

Черт. 437.



Черт. 438.

обозначим через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ [2]). Наибольшую хорду каждой из областей назовем ее *диаметром*.

В каждой частичной области (внутри или на границе) возьмем по точке [точка $P_1(x_1; y_1)$ в области D_1, точка $P_2(x_2; y_2)$ в области D_2 и т. д.]. Составим сумму

$$S_n = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n. \tag{1}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если при неограниченном возрастании числа областей $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ наибольший из их диаметров стремится к нулю [3]), то сумма S_n стремится к некоторому

---

[1]) Понятие двойного интеграла есть расширение понятия определенного интеграла на случай двух аргументов. Поэтому рекомендуется предварительно прочесть § 314.

[2]) По образцу обозначений $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ (§ 314) для длин частичных промежутков. Но аналогия — только внешняя, ибо $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ не являются приращениями аргумента. Величины $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ *всегда положительны, тогда как* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ *могут быть и отрицательными* (если верхний предел меньше нижнего).

[3]) При этом площади всех частичных областей неограниченно уменьшаются. Однако площадь фигуры может неограниченно уменьшаться без того, чтобы диаметр ее стремился к нулю (ширина стремится к нулю, а длина — нет; ср. черт. 438). При таком образовании частичных областей теорема потеряла бы силу.

пределу; последний не зависит ни от способа образования частичных областей, ни от выбора точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Определение. Предел, к которому стремится сумма (1), когда наибольший из диаметров частичных областей стремится к нулю, называется *двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D*.

Обозначение:

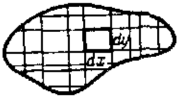
$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma. \tag{2}$$

Читается: (двойной) *интеграл по области D эф от икс игрэк дэ сигма.*

Другое обозначение:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Оно проистекает из разбиения области D (черт. 439) сетью прямых, параллельных осям координат (dx — длина частичного прямоугольника, dy — ширина).



Черт. 439.

Обозначение двойного интеграла по прямоугольной области см. § 455.

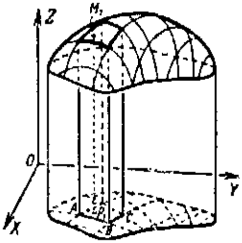
Термины. Область D называется *областью интегрирования*, функция $f(x, y)$ — *подынтегральной функцией*, выражение $d\sigma$ — *элементом площади*, выражение $dx\, dy$ в обозначении (3) — *элементом площади в прямоугольных координатах*.

§ 452. Геометрическое истолкование двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ принимает в области D только положительные значения. Тогда двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma$$

численно равен объему V вертикального цилиндрического тела (черт. 440), построенного на основании D и ограниченного сверху соответствующим куском поверхности $z = f(x, y)$.



Черт. 440.

Пояснение. Разобьем цилиндрическое тело на вертикальные столбики, как на черт. 440. Столбик с основанием

$$\Delta\sigma_1 = ABCE$$

по объему приближенно равен призматическому столбику с тем же основанием $\Delta\sigma_1$ и с высотой

$$P_1M_1 = f(x_1, y_1).$$

Стало быть, первое слагаемое $f(x_1, y_1)\,\Delta\sigma_1$ суммы S_n (§ 451) приближенно выражает объем вертикального столбика, а вся сумма S_n — весь объем V. Степень точности возрастает при измельчении частичных областей. Предел суммы S_n, т. е. интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, дает точное значение объема V.

§ 453. Свойства двойного интеграла

Свойство 1. Если область D разбить на две части D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,d\sigma$$

(ср. § 315, п. 2). Аналогично при разбиении области D на три части, на четыре и т. д.

Свойство 2. Двойной интеграл алгебраической суммы неизменного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов, взятых для каждого слагаемого (ср. § 315, п. 3); так, для трех слагаемых

$$\iint\limits_D [f(x, y) + \varphi(x, y) - \psi(x, y)]\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma + \iint\limits_D \varphi(x, y)\,d\sigma - \iint\limits_D \psi(x, y)\,d\sigma.$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла (ср. § 315, п. 4):

$$\iint_D mf(x, y)\,d\sigma = m\iint_D f(x, y)\,d\sigma \quad (m - \text{постоянная}).$$

§ 454. Оценка двойного интеграла

Пусть m есть наименьшее, M — наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области D и пусть S есть площадь области D. Тогда

$$mS \leqslant \iint_D f(x, y)\,d\sigma \leqslant MS.$$

Геометрически: объем цилиндрического тела заключен между объемами двух цилиндров, имеющих то же основание; первый имеет высотой наименьшую аппликату, второй — наибольшую (ср. § 318, теорема 1).

§ 455. Вычисление двойного интеграла (простейший случай)

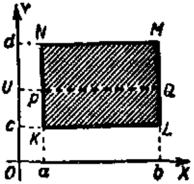
Пусть область D задана неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d, \tag{1}$$

т. е. изображается прямоугольником $KLMN$ (черт. **441**). Тогда двойной интеграл вычисляется по одной из формул

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3}$$



Черт. 441.

Выражения, стоящие в правых частях, называются *повторными интегралами.*

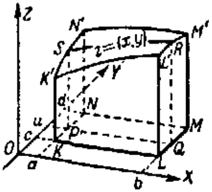
Замечание. В формуле (2) сначала вычисляется определенный интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$. *В процессе* этого *интегрирования* y рассматривается как постоянная величина.

Но *результат интегрирования* рассматривается как функция от y, и второе интегрирование (в пределах от c до d) выполняется по аргументу y. В формуле (3) порядок действий обратный.

Пояснение. Двойной интеграл $\iint\limits_{(KLMN)} f(x, y)\,dx\,dy$ выражает объем V призматического тела KM' (черт. 442) с основанием $KLMN$:

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Тот же объем получается из переменной площади F про-



Черт. 442.

дольного сечения $PQRS$ (она зависит от ординаты $y = Ou$) по формуле (§ 336)

$$V = \int\limits_{c}^{d} F(y)\,dy. \tag{5}$$

Площадь $PQRS$ выражается формулой

$$F(y) = \int\limits_{a}^{b} z\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x, y)\,dx. \tag{6}$$

Сопоставляя (4), (5) и (6), получаем (2). Аналогично получаем (3).

Обозначения. Двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$, взятый по прямоугольнику, стороны которого параллельны осям OX, OY, обозначается

$$\left.\begin{array}{c}\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,dy \\ \text{или} \\ \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx\end{array}\right\}, \tag{7}$$

(внешние знаки интеграла соответствуют внешним дифференциалам).

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_1^2\int\limits_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$.

Решение. Область интегрирования определяется неравенствами

$$3 \leqslant x \leqslant 4, \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

и представляет прямоугольник со сторонами, параллельными осям OX, OY. Сначала вычисляем определенный интеграл $\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$, где y рассматривается как постоянная величина:

$$\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

Теперь по формуле (2) получаем:

$$\int\limits_1^2\int\limits_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy = \ln\frac{25}{24} \approx 0{,}0408.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$I = \int\limits_1^3\int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy.$$

Решение. По формуле (3) находим:

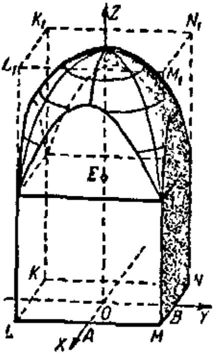
$$I = \int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx = \int\limits_1^3 (195y - 6y^3)\,dy = 660.$$

Пример 3. Прямоугольный параллелепипед KM_1 (черт. 443) срезан сверху параболоидом вращения с параметром p. Вершина параболоида совпадает с центром C верхнего основания, ось вертикальна. Определить объем V образовавшегося тела, если стороны его основания

$$KL = a, \qquad KN = b,$$

а высота

$$OC = h.$$



Черт. 443.

Решение. Выбираем систему координат $OXYZ$, как на черт. 443. Уравнение параболоида будет:

$$z = h - \frac{x^2+y^2}{2p}. \tag{8}$$

Искомый объем равен двойному интегралу $\iint\limits_{(KLMN)} z\,dx\,dy$ по прямоугольной области $KLMN$, т. е.

$$V = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{x^2+y^2}{2p}\right) dy\,dx. \tag{9}$$

Вместо этого интеграла можно взять учетверенный интеграл по области $OAMB$ (вследствие симметрии тела относительно плоскостей XOZ, YOZ), т. е.

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \int\limits_0^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{x^2+y^2}{2p}\right) dy\,dx.$$

Находим последовательно:

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \left[hy - \frac{x^2}{2p}y - \frac{y^3}{6p}\right]_0^{\frac{b}{2}} dx = 4\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{bh}{2} - \frac{bx^2}{4p} - \frac{b^3}{48p}\right) dx =$$

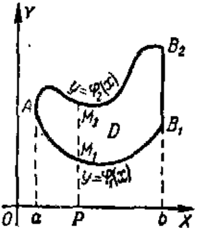
$$= abh - \frac{ab}{24p}(a^2+b^2).$$

§ 456. Вычисление двойного интеграла (общий случай)

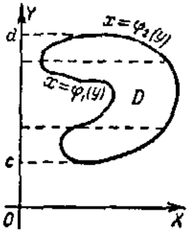
1. Если контур области D встречается со всякой пересекающей его в е р т и к а л ь н о й прямой не более чем в двух точках (M_1, M_2 на черт. 444), то область D задается неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \tag{1}$$

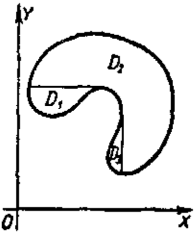
[a, b — крайние абсциссы области, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — функции, выражающие ординаты нижней и верхней граничных линий AM_1B_1, AM_2B_2].



Черт. 444.



Черт. 445.



Черт. 446.

В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{2}$$

2. Если контур области встречается не более чем в двух точках со всякой пересекающей его г о р и з о н т а л ь н о й прямой, имеем аналогично (при обозначениях черт. 445):

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Если контур не подходит ни под первый, ни под второй случай, то область D разбивают на несколько частей (D_1, D_2, D_3 на черт. 446) так, чтобы к каждой части была применима формула (2) или (3).

Пример 1. Найти интеграл $I=\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy$, если область D ограничена параболами $y=x^2$, $y^2=x$ (черт. 447; контур подходит под оба случая 1 и 2).

Первое решение. Применим формулу (2); в ней надо положить $a=0$, $b=1$, $\varphi_1(x)=x^2$, $\varphi_2(x)=\sqrt{x}$. Получаем:

$$\iint\limits_D (y^2+x)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(y^2+x)\,dy.$$

Вычисляем интеграл $\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(y^2+x)\,dy$, считая x постоянным:

$$\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(y^2+x)\,dy=\left[\frac{y^3}{3}+xy\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{3}x^6+x^3\right).$$

Найденное выражение интегрируем по x; получаем:

$$I=\int\limits_0^1\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^6-x^3\right)dx=\frac{33}{140}.$$

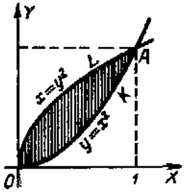
Второе решение. Применим формулу (3); в ней надо положить $c=0$, $d=1$, $\psi_1(y)=y^2$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$. Получаем последовательно:

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}(y^2+x)\,dx=\int\limits_0^1 dy\left[xy^2+\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}=$$

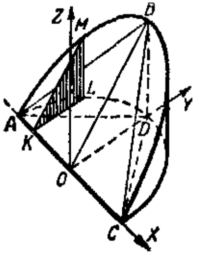
$$=\int\limits_0^1\left(y^{\frac{5}{2}}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}y^4\right)dy=\frac{33}{140}.$$

Пример 2. Найти объем V *«цилиндрического копыта»*, т. е. тела $ACDB$ (черт. 448), отсеченного от полуцилиндра плоскостью ABC, проведенной через диаметр AC основания. Даны радиус основания $R=OA$ и высота копыта $DB=h$.

Решение. Выберем систему координат, как на черт. 448 (тогда контур подходит под оба случая 1 и 2). Уравнение плоскости ABC будет $z = \frac{h}{R} y$. Имеем: $V = \iint\limits_{(ADC)} \frac{h}{R} y\, dx\, dy$.



Черт. 447.



Черт. 448.

Первый способ. В формуле (2) полагаем (черт. 448):

$$a = -R,\ \ b = R,\ \ \varphi_1(x) = 0,\ \ \varphi_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\ (= KL).$$

Получаем:

$$V = \int\limits_{-R}^{+R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R} y\, dy.$$

Выполним интегрирование по y; находим:

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R} y\, dy = \frac{h}{2R}(R^2 - x^2).$$

Это выражение дает площадь F сечения KLM $\left(F = \frac{1}{2} KL \times \times LM\right.$, где $KL = \sqrt{R^2 - x^2}$, а LM находится из подобия треугольников KLM, ODB). Окончательно имеем:

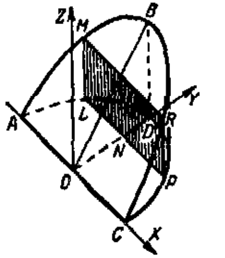
$$V = \int\limits_{-R}^{R} \frac{h}{2R}(R^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} R^2 h,$$

т. е. *цилиндрическое копыто по объему вдвое больше пирамиды* $BACD$[1]).

---

[1]) Этот результат был найден Архимедом.

Второй способ. В формуле (3) полагаем (черт. 449): $c=0$, $d=R$, $\psi_1(y)=-\sqrt{R^2-y^2}\,(=NL)$, $\psi_2(y)=\sqrt{R^2-y^2}$ $(=NP)$. Получаем:



Черт. 449.

$$V=\int_0^R dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{h}{R}\,y\,dx.$$

Первое интегрирование дает:

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{h}{R}\,y\,dx=2\frac{h}{R}\,y\sqrt{R^2-y^2}.$$

Это выражение представляет площадь S сечения $PLMR$. Окончательно имеем:

$$V=\int_0^R 2\frac{h}{R}\sqrt{R^2-y^2}\,y\,dy=\frac{2}{3}R^2h.$$

§ 457. Функция точки

Пусть дано некоторое множество точек (например, множество точек данного отрезка, данного куска поверхности, данного тела). Если каждой точке P этого множества поставлено в соответствие определенное значение величины z (скалярной или векторной), то последняя называется *функцией точки* P. Данное множество точек называется *областью задания функции*.

Обозначение. $z=f(P)$.

Пример 1. Температура газа, заполняющего некоторый сосуд, есть функция точки, область задания функции — множество точек, лежащих внутри сосуда.

Пример 2. Годовое количество осадков есть функция точки на поверхности земного шара.

Если данное множество точек отнесено к некоторой системе координат, то функция точки становится функцией координат. *Вид последней зависит от выбора системы координат.*

Пример 3. Расстояние точки P от фиксированной точки O есть функция $f(P)$ точки P. Если взять прямоугольную систему координат с началом в O, то $f(P) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Если же начало выбрать в иной точке, то $f(P) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, где a, b, c — координаты точки O.

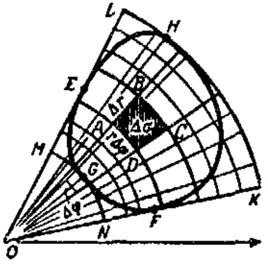
Пример 4. Подынтегральная функция $f(x, y)$ двойного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ есть функция точки $P(x; y)$, поэтому интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ записывают в виде $\iint\limits_D f(P)\,d\sigma$.

§ 458. Выражение двойного интеграла через полярные координаты

Двойной интеграл $\iint\limits_D f(P)\,d\sigma$ выражается через полярные координаты точки P формулой

$$\iint\limits_D f(P)\,d\sigma = \iint\limits_D F(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (1)$$

Здесь $F(r, \varphi)$ — та функция координат r, φ, которая представляет данную функцию $f(P)$ точки P. Выражение $r\,dr\,d\varphi$ называется *элементом площади в полярных координатах*. Оно эквивалентно площади четырехугольника $ABCD$ (черт. 450, где $AD \approx OA \cdot \Delta\varphi = r\,d\varphi$ и $AB = DC = dr$).



Черт. 450.

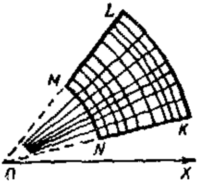
Интеграл (1) выражается через повторный (§ 455) так, как если бы r и φ были прямоугольными координатами [при подынтегральной функции $F(r, \varphi)r$].

Если полюс лежит вне контура и каждый полярный луч, пересекающий контур, встречает его не более двух раз (черт. 450), то

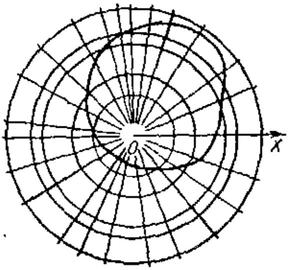
$$\iint\limits_D F(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi)\,r\,dr. \qquad (2)$$

Здесь $\varphi_1 = \angle XOK$, $\varphi_2 = \angle XOL$, а r_1 и r_2 — функции от φ, представляющие граничные дуги FGE, FHE. В частности, эти функции (одна или обе) могут быть постоянными (черт. 451).

Если полюс лежит внутри контура (черт. 452) и каждый полярный луч встречает контур однократно, то

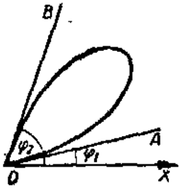


Черт. 451.

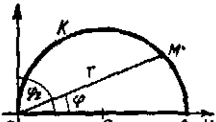


Черт. 452.

в формуле (2) можно положить $r_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$; если же полюс лежит на контуре, то $r_1 = 0$, $\varphi_1 = \angle XOA$, $\varphi_2 = \angle XOB$ (черт. 453).



Черт. 453.



Черт. 454.

Если каждая окружность с центром в полюсе, пересекающая контур, встречает последний не более двух раз (черт. 450), то

$$\iint_D F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} r\, dr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi)\, d\varphi. \qquad (3)$$

Здесь $r_1=OG$, $r_2=OH$, а φ_1, φ_2 — функции от r, представляющие граничные дуги GEH, GFH.

Пример 1. Найти двойной интеграл

$$I = \iint_D r \sin \varphi \, d\sigma, \qquad (4)$$

если область D — полукруг диаметра a, изображенный на черт. 454.

Решение. Для точек M полуокружности AKO имеем (§ 74, пример 2): $r=a \cos \varphi$. Применяем формулу (2), полагая $r_1=0$, $r_2=a \cos \varphi$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$:

$$\iint_D r \sin \varphi \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \, \frac{a^3 \cos^3 \varphi}{3} = \frac{a^3}{12}.$$

Замечание 1. Чтобы выразить интеграл (4) в прямоугольных координатах, надо положить:

$$r \sin \varphi = y, \quad d\sigma = dx\, dy.$$

Учитывая, что уравнение полуокружности AKO есть $y^2=ax-x^2$, получим:

$$I = \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} y \, dy = \frac{a^3}{12}.$$

Замечание 2. Интеграл (4) дает объем цилиндрического копыта (ср. § 456, пример 2), у которого высота равна радиусу основания.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \, dx \, dy.$$

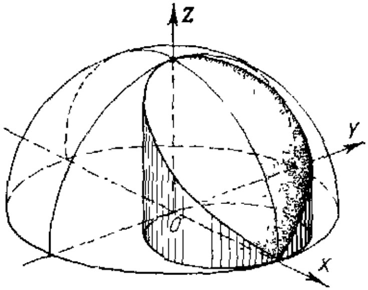
Решение. Область D — круг радиуса a с центром в точке (0; 0) (интеграл I выражает объем полушария радиуса a). Вычисление в прямоугольных координатах громоздко. Перейдем к полярным. За полюс примем теперь центр круга, т. е. начало координат. Подинтегральная функция примет вид $\sqrt{a^2-r^2}$. Получим:

$$I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\,d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

Применив (2), найдем:

$$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=\int\limits_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

Пример 3. Найти объем V тела, вырезанного из полушария радиуса a (черт. 455) цилиндрической поверхностью, у которой диаметр равен радиусу шара, а одна



Черт. 455.

из образующих совпадает с осью полушария (*тело Вивиани*)[1]).

Решение. Расположим оси, как на черт. 455. Искомый объем выражается интегралом

$$I=\iint\limits_D z\,d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

[1]) Винченцо Вивиани (1622—1703) — ученик Галилея, математик и архитектор. Контур верхнего основания Вивиани использовал для окна в сферическом куполе.

Вычисление в прямоугольных координатах громоздко. Переходя к полярным с полюсом в центре O полушария (ср. примеры 1, 2), получаем:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3(1-\sin^3\varphi)}{3}\, d\varphi = \frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

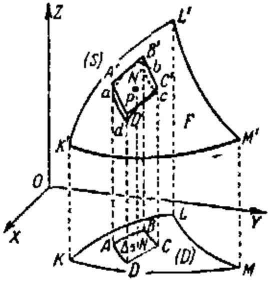
§ 459. Площадь куска поверхности

Пусть некоторый кусок $K'L'M'$ (черт. 456) поверхности S проектируется на область D плоскости XOY (KLM на черт. 456), причем в каждую точку N области D проектируется *только одна* точка N' рассматриваемого куска.

Тогда площадь F куска $K'L'M'$ выражается[1]) двойным интегралом:

$$F = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma, \quad (1)$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.



Черт. 456.

П о я с н е н и е. Пусть γ — угол между касательной плоскостью P в точке N' и плоскостью XOY. Тогда (§§ 127, 436) $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Цилиндрическая поверхность, имеющая основанием элемент $\Delta\sigma$ ($ABCD$ на черт. 456), отрезает от плоскости P кусок $A'B'C'D'$. Площадь последнего равна $\frac{\Delta\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma$. Площадь того элемента $abcd$ поверхности S, который проектируется на элемент $ABCD$, приближенно равна площади куска $A'B'C'D'$, так что сумма площадей кусков $A'B'C'D'$

---

[1]) Предполагается, что поверхность имеет касательную плоскость в каждой точке рассматриваемого куска, а также что касательная плоскость изменяется непрерывно (т. е. угол между двумя касательными плоскостями бесконечно мал вместе с расстоянием между точками касания).

в пределе дает[1]) F:

$$F = \lim\left(\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,\Delta\sigma_1+\ \ldots\ +\sqrt{1+p_n^2+q_n^2}\,\Delta\sigma_n\right). \quad (2)$$

Отсюда (§ 451) получается формула (1).

Пример. Найти площадь верхнего основания тела Вивиани (§ 458, пример 3).

Решение. Имеем:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Искомая площадь равна

$$F=\iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma=\iint\limits_D \frac{a\,d\sigma}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Область D ограничена окружностью

$$x^2+y^2-ax=0.$$

Выражая двойной интеграл через полярные координаты (§ 458), получаем:

$$F=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Выполняя интегрирование, находим:

$$F=2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Замечание 1. Мы приняли, что сумма площадей $A'B'C'D'$ в пределе дает площадь F. Это свойство (оно согласуется с наглядными представлениями, порожденными опытом) часто принимают за определение. Последнее формулируется так.

Определение. Рассматриваемый кусок поверхности разбиваем на части $abcd$; в каждой части выбираем по точке N'. Через точки N' проводим касательные плоскости и проектируем $abcd$ на соответствующую касательную плоскость P прямыми, параллельными OZ. Площадь

[1]) См. ниже замечание 1.

куска есть предел, к которому стремится сумма площадей проекций при неограниченном измельчении частей.

Условия, указанные в сноске на стр. 675, обеспечивают существование этого предела.

Замечание 2. При таком определении надо не только установить наличие предела, но и доказать независимость его от выбора системы координат. Последняя задача отпадает, если изменить определение, а именно проектировать $abcd$ на плоскость P по направлению, перпендикулярному к P. Но тогда усложняется вывод формулы (1).

§ 460. Тройной интеграл

Определение [1]). Пусть функция $f(x, y, z)$ точки $P(x; y; z)$ непрерывна внутри пространственной области D и на ее границе. Разобъем D на n частей; пусть Δv_1, Δv_2, ..., Δv_n — их объемы. В каждой части возьмем по точке и составим сумму:

$$S_n = f(x_1, y_1, z_1)\,\Delta v_1 + f(x_2, y_2, z_2)\,\Delta v_2 + \ldots \\ \ldots + f(x_n, y_n, z_n)\,\Delta v_n. \qquad (1)$$

Предел, к которому стремится S_n, когда наибольший из диаметров частичных областей стремится к нулю [2]), называется *тройным интегралом от функции* $f(x, y, z)$ *по области* D.

Обозначения:

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dv, \text{ или } \iiint_D f(P)\,dv, \text{ или } \iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Выражение $dx\,dy\,dz$ в последнем обозначении называется *элементом объема в прямоугольных координатах*.

Физическое истолкование. Пусть D — пространство, занимаемое физическим телом, и $f(P)$ — плотность тела в точке $P(x; y; z)$. Тогда сумма (1) дает приближенное значение массы M тела D, а тройной интеграл $\iiint_D f(P)\,dv$ — точное ее значение.

Свойства тройного интеграла — те же, что и двойного (§ 453).

---

[1]) Оно аналогично определению двойного интеграла (§ 451).
[2]) Имеет место теорема, аналогичная теореме § 451.

§ 461. Вычисление тройного интеграла (простейший случай)

Пусть пространственная область D задана неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d, \qquad e \leqslant z \leqslant f, \tag{1}$$

т. е. изображается параллелепипедом, ребра которого параллельны осям координат. Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{e}^{f} dz \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x, y, z)\,dx \tag{2}$$

или по одной из аналогичных (аргументы x, y, z могут меняться ролями) (ср. § 455).

Выражение, стоящее в правой части (2), называется повторным интегралом.

Тройной интеграл, взятый по параллелепипеду, ребра которого параллельны осям координат, обозначается также

$$\int\limits_{e}^{f}\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}\int\limits_{e}^{f} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

и т. д. (внешний знак интеграла соответствует внешнему дифференциалу, внутренний – внутреннему).

Пример. Найти интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2}^{4}\int\limits_{0}^{3} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

Решение.

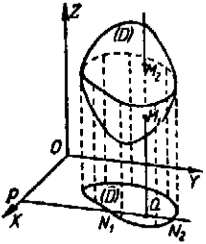
$$I = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} (x+y+z)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{2}^{4} dy \left[\frac{x^2}{2}+(y+z)\,x\right]_{x=0}^{x=3} = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{2}^{4} \left(\frac{9}{2}+3y+3z\right) dy.$$

Дальше вычисляем, как в § 455. Получаем $I=30$.

§ 462. Вычисление тройного интеграла (общий случай)

Данную пространственную область разбиваем, если надо, на части (ср. § 456) с таким расчетом, чтобы «горизонтальная» проекция $\bar{D}$ (черт. 457) каждой части D была плоской областью простейшего типа (§ 456, пп. 1 и 2) и чтобы каждая «вертикальная» прямая, встречающая границу области D, имела с ней не более двух общих точек (M_1, M_2 на черт. 457).



Черт. 457.

Тройной интеграл, взятый по каждой частичной области D, приводится к двойному по формуле

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\bar D} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz, \quad (1)$$

где функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ представляют аппликаты QM_1 и QM_2. В процессе вычисления интеграла

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz$$

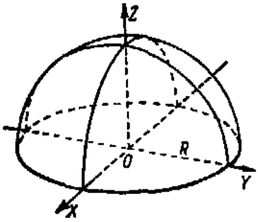
величины x, y являются постоянными. Результат вычисления рассматривается как функция аргументов x, y.

После того как интегрирование по переменному z выполнено, правая часть (1) превращается в двойной интеграл. А последний вычисляется, как в § 456. Поэтому в итоге тройной интеграл сводится к повторному:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (2)$$

Здесь функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ представляют ординаты PN_1, PN_2.

Пример. Найти интеграл $I=\iiint\limits_{D} z\,dv$, распространенный на полушарие радиуса R, изображенное на черт. 458.



Черт. 458.

Интеграл I выражает статический момент полушария относительно плоскости основания (плотность μ полушария принимается за единицу).

Решение. Разбивать данную область не надо. Областью $\bar{D}$ является круг

$$x^2+y^2\leqslant R^2,$$

так что $a=-R$, $b=R$, $y_1(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$, $y_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Аппликаты нижней и верхней границ полушария суть $z_1(x, y)=0$, $z_2(x, y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. По формуле (2) находим:

$$I=\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z\,dz=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R^2-x^2-y^2}{2}\,dy.$$

Дальше вычисление идет, как в примерах § 456. Получаем

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R}dx\left[(R^2-x^2)y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{4}x(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}R^2x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}R^4\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{+R}=\frac{\pi R^4}{4}.$$

Замечание. Масса полушария (при $\mu=1$) численно равна его объему $\frac{2}{3}\pi r^3$. Частное $I:\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{3}{8}R$ есть высота центра тяжести над плоскостью основания. Значит, центр тяжести делит высоту полушария в отношении 5:3.

§ 463. Цилиндрические координаты

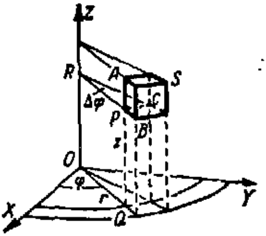
Положение точки P (черт. 459) в пространстве можно определить ее аппликатой

$$z = QP$$

и полярными координатами

$$r = OQ, \quad \varphi = \angle\, XOQ$$

ее проекции Q на плоскость XOY. Величины r, φ, z называются *цилиндрическими* или *полуполярными координатами точки* P. Прямоугольные и цилиндрические координаты точки P (при совпадении начала O с полюсом и оси OX с полярной осью) связаны соотношениями



Черт. 459.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

(аппликаты в обеих системах одинаковы).

§ 464. Выражение тройного интеграла через цилиндрические координаты

Тройной интеграл $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ выражается через цилиндрические координаты точки P формулой

$$\iiint\limits_D f(P)\,dv = \iiint\limits_D F(r,\ \varphi,\ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{1}$$

Здесь $F(r, \varphi, z)$ — та функция цилиндрических координат, которая представляет функцию $f(P)$ точки P. Выражение $r\,dr\,d\varphi\,dz$ называется *элементом объема в цилиндрических координатах*. Оно эквивалентно объему тела PS (черт. 459), у которого $PA = dz$, $PB = dr$, $\overset{\frown}{PC} = r\,d\varphi$.

Интеграл (1) выражается через повторный так, как если бы r, φ, z были прямоугольными координатами при подинтегральной функции $F(r, \varphi, z)\,r$.

Пример. Вычислим с помощью цилиндрических координат интеграл, найденный в примере § 462. Имеем:

$$I = \iiint\limits_D zr\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^R dz \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int\limits_0^{2\pi} zr\,d\varphi. \tag{2}$$

Последовательно получаем:

$$I = 2\pi \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} zr\,dr = 2\pi \int_0^R z\,dz \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} =$$

$$= \pi \int_0^R (R^2-z^2)\,z\,dz = \frac{\pi R^4}{4}. \qquad (3)$$

§ 465. Сферические координаты

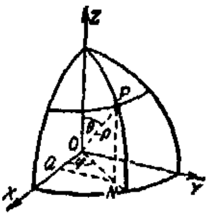
Положение точки P в пространстве (черт. 460) можно определить следующими тремя величинами: расстоянием

$$\rho = OP$$

от точки O, углом $\theta = \angle ZOP$ между лучами OZ и OP, углом

$$\varphi = \angle XON$$

между полуплоскостями ZOX и ZOP. Величины ρ, θ, φ называются *сферическими* или *полярными* координатами точки P. Прямоугольные и сферические координаты (при совпадении основных плоскостей обеих систем) связаны соотношениями



Черт. 460.

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

§ 466. Выражение тройного интеграла через сферические координаты

Тройной интеграл $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ выражается через сферические координаты точки P формулой

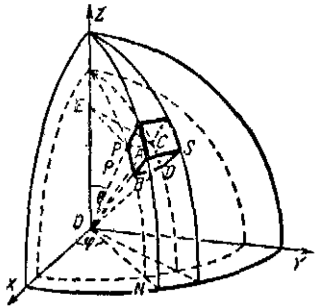
$$\iiint\limits_D f(P)\,dv = \iiint\limits_D F(\rho,\ \theta,\ \varphi)\,\rho^2\,d\rho\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \qquad (1)$$

Здесь $F(\varrho, \theta, \varphi)$ — та функция сферических координат, которая представляет функцию $f(P)$ точки P. Выражение $\varrho^2\,d\varrho\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ называется *элементом объема в сферических*

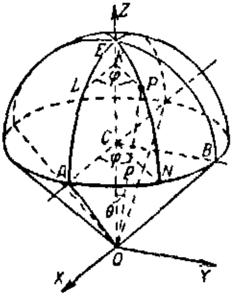
ских координатах. Оно эквивалентно объему тела[1]) PS (черт. 461), у которого

$BA = d\rho$, $\overset{\frown}{PB} = OP\,d\theta = \rho\,d\theta$, $\overset{\frown}{PC} = EP\,d\varphi = \rho\sin\theta\,d\varphi$. Множитель $\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ ($\approx PC\cdot PB$) в выражении элемента dv эквивалентен площади сферической фигуры $PCDB$. Множитель $\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ эквивалентен телесному углу, под которым четырехугольник $PCDB$ виден из центра [2]).

Пример. Найти интеграл $I = \iiint\limits_D r^2\,dv$, где функция $f(P) = r^2$ точки P есть квадрат ее расстояния от оси OZ



Черт. 461.



Черт. 462.

(KP на черт. 462), а область D есть тело, ограниченное снизу конусом (у него высота OC равна радиусу основания $CA = R$), а сверху — полусферой радиуса R.

Интеграл I выражает момент инерции тела D относительно оси OZ (§ 468).

Решение. Введем сферические координаты $\rho = OP$, $\theta = \angle EOP$, $\varphi = \angle ACN = \angle LKP$. Так как $r = KP = \rho\sin\theta$, то искомый интеграл имеет вид

$$I = \iiint\limits_D \rho^2\sin^2\theta\,dv = \iiint\limits_D \rho^4\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

---

[1]) Это тело ограничено двумя сферическими поверхностями (с радиусами r и $r + dr$), двумя плоскостями, проходящими через ось OZ, двумя коническими поверхностями, оси которых совпадают с осью OZ.

[2]) Телесный угол есть часть пространства, заключенная внутри одной полости некоторой конической поверхности (с замкнутой направляющей). За меру телесного угла принимают отношение площади, вырезываемой телесным углом на сфере (с центром в вершине телесного угла), к квадрату радиуса сферы.

Сначала интегрируем по аргументу φ (пределы интегрирования будут нуль и 2π), затем — по аргументу ρ (пределы будут $\rho_1=0$ и $\rho_2 = OP = OE\cdot\cos\theta$) и, наконец, по аргументу θ $\left(\text{пределы будут } \theta_1=0 \text{ и } \theta_2 = \angle EOA = \frac{\pi}{4}\right)$. Получаем:

$$I = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^4 \sin^3\theta\, d\rho = 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta\, d\theta\cdot\frac{32R^5\cos^5\theta}{5} =$$

$$= \frac{64\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\theta\,(1-\cos^2\theta)\, d(-\cos\theta) = \frac{11}{30}\pi R^5.$$

§ 467. Схема применения двойного и тройного интеграла

Многообразные геометрические и физические величины выражаются двойным или тройным интегралом — смотря по тому, относятся ли они к поверхности (плоской или кривой) или к пространственному телу [1]. Схема — та же, что и для величин, выражаемых с помощью обыкновенного (однократного) интеграла, а именно (ср. § 334):

1) Искомая величина U ставится в соответствие с некоторой областью D (поверхности или пространства).

2) Область D разбивается на части $\Delta\sigma_k$ (или Δv_k); число их в дальнейшем будет стремиться к бесконечности, а диаметры — к нулю.

Пусть при этом искомая величина U распадается на части $u_1, u_2, \ldots, u_n$, в сумме дающие U [2]).

3) В качестве типичного представителя частей $u_1, u_2, \ldots$ рассматривается одна из них; она выражается приближенной формулой вида

$$u_k \approx f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$
$$[\text{или } u_k \approx f(P_k)\,\Delta v_k],$$

---

[1]) Соответствующие величины, относящиеся к линии, выражаются обыкновенным интегралом.

[2]) Величины, обладающие этим свойством, называются аддитивными (ср. мелкий шрифт на стр. 486).

причем погрешность должна иметь высший порядок относительно $\Delta\sigma_k$ (или относительно Δv_k).

4) Из приближенного равенства получается точное:

$$U = \iint_D f(P)\,d\sigma$$

$$\left[\text{или } U = \iiint_D f(P)\,dv\right].$$

Примером может служить вычисление момента инерции (§ 468).

§ 468. Момент инерции

Кинетическая энергия T тела, вращающегося около оси AB, пропорциональна (при данном расположении оси относительно тела) квадрату угловой скорости ω:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{1}$$

Удвоенный коэффициент пропорциональности, т. е. величина I, называется *моментом инерции* тела относительно оси AB. Если тело состоит из n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, отстоящих от оси на расстояниях $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то момент инерции выражается формулой

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2. \tag{2}$$

Выражение момента инерции сплошного тела получается из (2) применением схемы § 467. Именно:

1) момент инерции I ставится в соответствие с областью D, занимаемой телом;

2) область D разбивается на части $D_1, D_2, \ldots, D_n$. При этом I распадается на части $I_1, I_2, \ldots, I_n$, в сумме дающие I.

3) Примем, что в частице D_k плотность μ_k всюду такая же, как в одной из ее точек P_k. Получим приближенное равенство

$$m_k \approx \mu_k\,\Delta v_k, \tag{3}$$

и момент инерции I_k выразится приближенной формулой

$$I_k \approx \mu_k r_k^2\,\Delta v_k. \tag{4}$$

4) Из приближенного равенства (4) получается точное равенство

$$I = \iiint\limits_D \mu r^2\,dv. \tag{5}$$

Пример см. в § 466.

Если ось AB принять за ось апликат, то (5) принимает вид

$$I = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Если данное тело есть пластинка, плоскость которой перпендикулярна к оси AB, то вместо тройного интеграла (6) получим двойной интеграл:

$$I = \iint\limits_D \mu(x, y)(x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{7}$$

где $\mu(x, y)$ – поверхностная плотность пластинки.

Если данное тело есть прямолинейный стержень, пересекающий ось AB под прямым углом, то, совместив его с осью OX (при этом будем иметь $y = 0$), получим вместо тройного интеграла (6) обыкновенный интеграл

$$I = \int\limits_a^b \mu(x)\,x^2\,dx, \tag{8}$$

где $\mu(x)$ – линейная плотность стержня.

З а м е ч а н и е. Моментом инерции геометрического тела называется момент инерции материального тела, занимающего то же пространство и имеющего всюду плотность, равную единице.

Формулы (6), (7), (8) принимают вид

$$I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz, \tag{6a}$$

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{7a}$$

$$I = \int\limits_a^b x^2\,dx \left(= \frac{b^3 - a^3}{3}\right). \tag{8a}$$

§ 469. Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы

Наименование величины	Общее выражение	В прямоугольных координатах	В полярных координатах
Площадь плоской фигуры	$S=\iint\limits_D d\sigma$	$\iint dx\,dy$	$\iint r\,dr\,d\varphi$
Площадь куска поверхности (§ 459) [1]	$S=\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\cos\gamma}$	$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$	$\iint\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,dr\,d\varphi$
Объем цилиндрического тела, стоящего на плоскости XOY (§ 452)	$V=\iint\limits_D z\,d\sigma$	$\iint z\,dx\,dy$	$\iint zr\,dr\,d\varphi$

[1] Область D — проекция на плоскость XOY; в каждую точку области проектируется только одна точка поверхности; γ — угол между касательной плоскостью и плоскостью XOY.

Продолжение

Наименование величины	Общее выражение	В прямоугольных координатах	В полярных координатах
Момент инерции плоской фигуры [1]) относительно оси OZ [2])	$I_z = \iint\limits_D r^2\,d\sigma$	$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$	$\iint r^3\,dr\,d\varphi$
Момент инерции плоской фигуры [1]) относительно оси OX	$I_x = \iint\limits_D y^2\,d\sigma$	$\iint y^2\,dx\,dy$	$\iint r^3 \sin^2\varphi\,dr\,d\varphi$
Координаты центра тяжести однородной пластинки [2])	$x_c = \dfrac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{S}$	$\dfrac{\iint x\,dx\,dy}{S}$	$\dfrac{\iint r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi}{S}$
	$y_c = \dfrac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{S}$	$\dfrac{\iint y\,dx\,dy}{S}$	$\dfrac{\iint r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi}{S}$

[1]) Совмещенной с плоскостью XOY.
[2]) Или, что то же, относительно центра O.

§ 470. Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы

Наименование величины	Общее выражение	В прямоугольных координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Объем тела	$V = \iiint\limits_D dv$	$\iiint dx\,dy\,dz$	$\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$
Момент инерции геометрического тела относительно оси OZ	$I_z = \iiint\limits_D r^2\,dv$	$\iiint (x^2 - y^2)\,dx\,dy\,dz$	$\iiint r^3\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \rho^4 \sin^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$
Массa физического тела [1])	$M = \iiint\limits_D \mu\,dv$	$\iiint \mu\,dx\,dy\,dz$	$\iiint \mu r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \mu\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

[1]) Через μ обозначена плотность (функция точки).

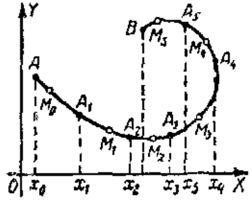
Продолжение

Наименование величины	Общее выражение	В прямоугольных координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Координаты центра тяжести однородного тела	$x_c = \dfrac{\iiint\limits_D x\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$y_c = \dfrac{\iiint\limits_D y\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$z_c = \dfrac{\iiint\limits_D z\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{V}$		

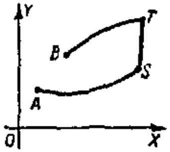
§ 471. Криволинейный интеграл

Пусть дана функция $P(x, y)$, непрерывная в некоторой области числовой плоскости XOY. Возьмем в этой области какую-либо линию [1]) с началом в точке A (черт. 463, 464) и концом в точке B (конец может совпадать с началом).

Разобьем AB (черт. 463) на n частичных дуг AA_1, $A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ и для единообразия присвоим точкам A, B



Черт. 463.



Черт. 464.

обозначения A_0, A_n. На каждой частичной дуге A_iA_{i+1} возьмем по точке $M_i(x_i, y_i)$ и составим сумму:

$$S_n = P(x_1, y_1)\,\Delta x_1 + \\ + P(x_2, y_2)\,\Delta x_2 + \dots + P(x_n, y_n)\,\Delta x_n, \qquad (1)$$

где Δx_i есть приращение абсциссы, соответствующее переходу от точки A_{i-1} к точке A_i [2]).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если при неограниченном возрастании числа n наибольшая из величин $|\Delta x_i|$ стремится к нулю, то сумма (1) стремится к пределу, не зависящему ни от способа образования участков A_iA_{i+1}, ни от выбора промежуточных точек M_i.

Определение. Предел, к которому стремится сумма S_n, когда наибольшая из величин $|\Delta x_i|$ стремится к нулю, называется *криволинейным интегралом* выражения $P(x, y)\,dx$, *взятым по пути* AB.

---

[1]) Предполагается, что линия AB обладает непрерывно меняющейся касательной, но допускается исключение для отдельных точек (в конечном числе), где касательная может измениться скачком, как в точках S, T на черт. 464.

[2]) Это приращение может быть и положительным (как на участке AA_1) и отрицательным (как на участке A_4A_5).

Обозначение.

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл выражения $Q(x, y)\, dy$, обозначаемый

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy, \tag{3}$$

а также криволинейный интеграл выражения $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$, обозначаемый

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Интегралы (2) и (3) суть частные виды интеграла (4) (при $Q=0$ и при $P=0$).

Таким же образом определяется криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \tag{5}$$

вдоль пространственной линии AB.

Замечание 1. Если, сохранив линию AB, изменить направление пути на противоположное, то криволинейный интеграл, сохраняя абсолютное значение, меняет знак. *Когда точки A и B* различны, *направление пути отмечается* порядком букв A, B в записях (2) – (5), и мы имеем:

$$\int\limits_{BA} P\, dx + Q\, dy = -\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy,$$

$$\int\limits_{BA} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = -\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Когда точки A и B совпадают, направление пути можно задать указанием промежуточных точек в соответствующем порядке.

Такого указания можно не делать в случае, когда путь представляет контур K плоской области. В этом случае запись $\int\limits_{+K} P\, dx + Q\, dy$ обозначает, что обход области совершается против стрелки часов (при обычном расположении осей). Если же область обходится в противоположном направлении, то криволинейный интеграл обозначается $\int\limits_{-K} P\,dx+Q\,dy$.

Замечание 2. Криволинейный интеграл является обобщением обыкновенного интеграла[1]) и обладает всеми его свойствами (§ 315).

§ 472. Механический смысл криволинейного интеграла

Пусть материальная точка M с массой m движется по пути AB в силовом поле. Пусть $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ — координаты *вектора напряжения* в точке $M(x; y; z)$, т. е. силы F, действующей в точке $(x; y; z)$ на единицу массы. Тогда работа, совершаемая силой, действующей на точку M, выражается криволинейным интегралом

$$\int\limits_{AB} m\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz). \qquad (1)$$

Пояснение. Пусть A_iA_{i+1} — малый участок пути AB. Работа на этом участке приближенно выражается[2]) скалярным произведением (§ 104а) $m\,\boldsymbol{F}_i\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, где $\boldsymbol{F}_i$ — вектор напряжения в точке A_i. В координатной форме получаем (§ 107) выражение $m\,[X_i\Delta x_i+Y_i\Delta y_i+Z_i\Delta z_i]$. Суммируя, находим приближенное значение работы вдоль пути AB. Предел суммы, т. е. криволинейный интеграл (1), дает точное значение работы.

§ 473. Вычисление криволинейного интеграла

Чтобы вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

---

[1]) Если путь интегрирования AB есть отрезок (a, b) оси абсцисс, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ обращается в обыкновенный интеграл $\int\limits_a^b P(x, 0)\,dx$.

[2]) Мы заменяем криволинейный участок $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ хордой A_iA_{i+1} и принимаем, что вдоль этой хорды напряжение поля остается неизменным.

надо представить линию AB параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{2}$$

и подставить выражение (2) в подинтегральное выражение. Обыкновенный интеграл

$$\int_{t_A}^{t_B} \{P[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt \tag{3}$$

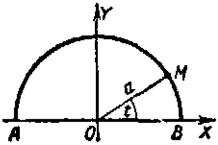
равен криволинейному интегралу (1).

Замечание. Одну из функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ можно выбрать произвольно, лишь бы обе функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ обладали непрерывными производными на всем промежутке (t_A, t_B), за исключением точек, где касательная меняется скачком, как в точках S, T на черт. 464. При наличии таких точек интеграл (3) — несобственный (§ 328).

Аналогично вычисляется криволинейный интеграл, взятый вдоль пространственной линии.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} -y\,dx + x\,dy \tag{4}$$



Черт. 465.

вдоль верхней части полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ (черт. 465).

Решение. Представим дугу AB параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \tag{5}$$

(здесь t есть угол BOM, так что $t_A = \pi$, $t_B = 0$). Подставляя (5) в (4), находим:

$$I = \int_{\pi}^{0} -a\sin t\,d(a\cos t) + a\cos t\,d(a\sin t) = a^2\int_{\pi}^{0} dt = -\pi a^2. \tag{6}$$

Можно принять за параметр абсциссу x, т. е. взять уравнение полуокружности в виде $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Тогда $x_A = -a$, $x_B = a$, и получаем:

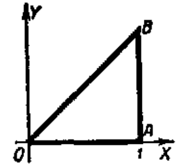
$$I = \int_{-a}^{a} -\sqrt{a^2 - x^2}\,dx + x\,d\sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$= -a^2 \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\pi a^2.$$

Чтобы принять за параметр ординату y, надо предварительно разбить дугу AB на части, иначе x не будет однозначной функцией ординаты.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{OABO} (x-y^2)\,dx + 2xy\,dy \qquad (7)$$



Черт. 466.

вдоль периметра треугольника OAB (черт. 466).

Решение. Разбиваем замкнутый путь $OABO$ на три участка OA, AB, BO. На участке OA принимаем за параметр абсциссу (при этом $y=0$, $dy=0$), на участке AB — ординату (при этом $x=1$, $dx=0$), на участке BO — абсциссу (при этом $y=x$, $dy=dx$). Имеем:

$$I_1 = \int_{OA} (x-y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$I_2 = \int_{AB} (x-y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_0^1 2y\,dy = 1,$$

$$I_3 = \int_{BO} (x-y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_1^0 (x+x^2)\,dx = -\frac{5}{6};$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

§ 474. Формула Грина

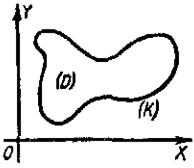
Пусть D — плоская область, ограниченная контуром K (черт. 467), и пусть всюду в этой области функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда имеет место следующая *формула Грина*[1]:

$$\int_{+K} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (1)$$

---

[1]) Джордж Грин (1793—1841) — английский математик и физик, внесший крупный вклад в математическую теорию электричества и магнетизма.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int (x-y^2)\,dx + 2xy\,dy$ вдоль периметра треугольника OAB (черт. 466) (ср. § 473, пример 2).



Черт. 467.

Решение. По формуле (1), полагая $P = x - y^2$, $Q = 2xy$, находим:

$$I = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y^2)\right] dx\,dy =$$

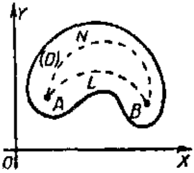
$$= \iint\limits_D 4y\,dx\,dy.$$

Здесь область D есть треугольник OAB; вычислив двойной интеграл, найдем:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x 4y\,dy = \int\limits_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

§ 475. Условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от пути

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области D (черт. 468), ограниченной некоторой непрерывной замкнутой линией (не пересекающей себя). Возьмем в области D две фиксированные точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$ и будем рассматривать всевозможные пути интегрирования, ведущие из A в B и расположенные целиком в области D (таковы пути ALB, ANB на черт. 468). Возможны два случая.



Черт. 468.

Случай 1 (исключительный). В области D тождественно удовлетворяется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Тогда криволинейный интеграл

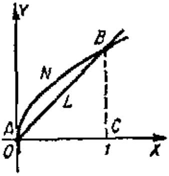
$$I = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{2}$$

не зависит от выбора пути, и соответственно с этим обозначается:

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy.$$

Случай 2 (общий). Равенство (1) не является тождеством. Тогда криволинейный интеграл (2) зависит от выбора пути.

Пояснение. Разность $I_1 - I_2$ криволинейных интегралов $I_1 = \int\limits_{ALB} P\,dx + Q\,dy$, $I_2 = \int\limits_{ANB} P\,dx + Q\,dy$ равен сумме $I_1 + (-I_2)$, т. е. (§ 471, замечание 1) сумме $\int\limits_{ALB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BNA} P\,dx + Q\,dy$. Последняя дает интеграл по контуру $ALBNA$, а он равен (§ 474) двойному интегралу $I_3 = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ по области $ALBNA$. Если равенство (1) есть тождество, то $I_3 = 0$, значит, $I_1 = I_2$, т. е. криволинейные интегралы вдоль путей ALB, ANB одинаковы. Если же равенство (1) не является тождеством, то можно подобрать пути ALB и ANB так, чтобы $I_3 \neq 0$, и тогда $I_1 \neq I_2$.



Черт. 469.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy. \qquad (3)$$

Функции $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ всюду непрерывны, и равенство (1) удовлетворяется тождественно. Значит, при фиксированных точках A, B интеграл (3) не зависит от пути. Возьмем, например, точки $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$ (черт. 469) и вычислим интеграл I вдоль прямолинейного пути ALB $(y = x)$. Получим

$$I_{ALB} = \int_0^1 x\,dx + x\,dx = 1.$$

Если в качестве пути взять дугу параболы $ANB (x = y^2)$, то получим снова $I_{ANB} = \int_0^1 y\,d(y^2) + y^2\,dy = 3\int_0^1 y^2\,dy = 1$. То же значение получим, идя вдоль ломаной ACB. Вдоль звена AC имеем: $y=0$, $dy=0$, так что $I_{AC}=\int\limits_0^1 0\cdot dx=0$;

вдоль CB имеем: $x=1$, $dx=0$, так что $I_{CB}=\int\limits_0^1 1\cdot dy=1$.

Значит, $I_{ACB}=I_{AC}+I_{CB}=1$.

Запись: $I=\int\limits_{A(0,\,0)}^{B(1;\,1)} y\,dx+x\,dy=1$.

Пример 2. Сохранив точки $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, рассмотрим интеграл $I=\int\limits_{AB} y^2\,dx+x^2\,dy$. Равенство (1) принимает вид $x-y=0$, т. е. не является тождеством. Интеграл I теперь зависит от пути. Так, вдоль пути ALB (черт. 469) имеем: $I=\int\limits_0^1 x^2\,dx+x^2\,dx=\frac{2}{3}$, а вдоль пути ANB интеграл имеет иное значение

$$I=\int\limits_0^1 y^2\,d(y^2)+y^4\,dy=\int\limits_0^1 (2y^3+y^4)\,dy=\frac{7}{10}.$$

То же значение $^7/_{10}$ получим вдоль дуги параболы $y=x^2$. И вообще в случае 2 всегда можно специально подобрать два пути, вдоль которых интеграл имеет одинаковые значения.

§ 476. Другая форма условия предыдущего параграфа

Теорема 1 (признак полного дифференциала). Если равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

удовлетворяется тождественно в области D, то для каждой точки этой области выражение $P\,dx+Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$. Если же равенство (1) не является тождеством, то выражение

$P\,dx+Q\,dy$ не является полным дифференциалом ни для какой функции.

Пример 1. Для выражения $y\,dx+x\,dy$ (здесь $P=y$, $Q=x$) равенство (1) удовлетворяется тождественно во всякой области. Поэтому $y\,dx+x\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. В данном случае можно взять $F(x, y)=xy$ или $xy+3$ и вообще $xy+C$.

Пример 2. Выражение $y^2\,dx+x^2\,dy$ не может быть полным дифференциалом ни для какой функции, ибо равенство (1), принимающее вид $2x-2y=0$, не является тождеством.

Пояснение. Допустим, что $y^2\,dx+x^2\,dy$ есть дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Тогда мы имели бы: $\frac{\partial F}{\partial x}=y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x^2$. Но это невозможно, ибо смешанные производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ (они непрерывны) должны быть равны (§ 443), т. е. должно тождественно удовлетворяться равенство $\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=0$, а этого нет.

В силу теоремы 1 условие § 475 принимает следующий вид.

Случай 1 (исключительный). Выражение $P\,dx+Q\,dy$ является (в данной области) полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$ (она называется *первообразной*). Тогда криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy$ не зависит от выбора пути (пролегающего в данной области).

Случай 2 (общий). Выражение $P\,dx+Q\,dy$ не является полным дифференциалом. Тогда криволинейный интеграл зависит от выбора пути.

В первом случае, зная первообразную, можно вычислить значение интеграла, опираясь на следующую теорему.

Теорема 2. Если подынтегральное выражение $P\,dx+$ $+Q\,dy$ есть полный дифференциал функции $F(x, y)$, то криволинейный интеграл $\int\limits_A^B P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ равен разности между значениями функции в точках B и A:

$$\int\limits_{A(x_0;\,y_0)}^{B(x_1;\,y_1)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{A(x_0;\,y_0)}^{B(x_1;\,y_1)} dF(x, y)=$$

$$=F(x_1, y_1)-F(x_0, y_0). \qquad (2)$$

Пример 3. Интеграл $I=\int\limits_{AB} 2xy\,dx+x^2\,dy$ при фиксированных точках $A(1;3)$, $B(2;4)$ не зависит от выбора пути $\left[\text{ибо } \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial (x^2)}{\partial x}-\frac{\partial (2xy)}{\partial y}\equiv 0\right]$. Требуется найти значение I.

Решение. Выражение $2xy\,dx+x^2\,dy$ есть полный дифференциал функции x^2y. По теореме 2 имеем:

$$I=\int\limits_{A(1;\,3)}^{B(2,\,4)} d(x^2y)=2^2\cdot 4-1^2\cdot 3=13.$$

Замечание. Разыскать первообразную в общем случае столь же трудно, как непосредственно вычислить криволинейный интеграл.

Но во многих случаях разыскание первообразной облегчается. Так, если каждая из функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ есть сумма членов вида Ax^my^n (A — постоянная, m и n — любые действительные числа), то первообразную находим следующим образом. Вычисляем неопределенные интегралы $\int P(x, y)\,dx$, $\int Q(x, y)\,dy$, считая постоянной y в первом интеграле и x — во втором. Полученные два выражения объединяем, причем каждый из членов, входящих в оба выражения, берем лишь по разу. Произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании, можно опустить, так как достаточно иметь одну первообразную.

Пример 4. Найти криволинейный интеграл

$$I=\int\limits_{A(0;\,0)}^{B(1;\,1)} x(1+2y^3)\,dx+3y^2(x^2-1)\,dy$$

[условие (1) выполнено].

Решение. Находим: $\int x(1+2y^3)\,dx=\frac{x^2}{2}+x^2y^3$ (y считаем постоянным), $\int 3y^2(x^2-1)\,dy=x^2y^3-y^3$ (x считаем постоянным).

Объединяем эти выражения, причем член x^2y^3 берем один раз. Получаем первообразную $F(x, y)=\frac{x^2}{2}-y^3+x^2y^3$. Формула (2) дает: $I=F(1, 1)-F(0, 0)=1/2$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 477. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции (или нескольких неизвестных функций). Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с частными производными*. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией таков:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение.

Примеры. Уравнение $y' = \frac{y^2}{x}$ есть дифференциальное уравнение первого порядка, дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ — второго порядка, уравнение $y'^2 = x^3$ — первого порядка.

Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения, если последнее обращается в тождество после подстановки $y = \varphi(x)$.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является разыскание всех решений данного дифференциального уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла. Поэтому решение дифференциального уравнения называют также его *интегралом*, а процесс разыскания всех решений — *интегрированием* дифференциального уравнения.

Вообще *интегралом данного дифференциального уравнения называют всякое уравнение, не содержащее производных, из которого данное дифференциальное уравнение вытекает как следствие.*

Пример 1. Функция $y=\sin x$ есть решение (интеграл) дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+y=0, \tag{2}$$

ибо после подстановки $y=\sin x$ равенство (2) принимает вид

$$(\sin x)''+\sin x=0, \tag{3}$$

т. е. становится тождеством.

Функции $y=\frac{1}{2}\sin x$, $y=\cos x$, $y=3\cos x$ — тоже решения уравнения (2), функция $y=\sin x+\frac{1}{2}$ не является решением.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$xy'+y=0. \tag{4}$$

Функция

$$y=\frac{1,5}{x} \tag{5}$$

есть решение уравнения (4), ибо последнее после подстановки (5) обращается в тождество

$$x\cdot\frac{1,5}{-x^2}+\frac{1,5}{x}=0.$$

Вместе с тем уравнение (5) есть интеграл дифференциального уравнения (4).

Уравнение

$$xy=0,2 \tag{6}$$

тоже является интегралом дифференциального уравнения (4). Действительно, из (6) следует, что $(xy)'=0$, а отсюда (если применить формулу производной произведения) следует (4). Из интеграла (6), разрешив его относительно y, получим

$$y=\frac{0,2}{x}. \tag{7}$$

Функция (7) есть решение дифференциального уравнения (4). Вместе с тем уравнение (7) является интегралом уравнения (4).

Уравнения $xy=\sqrt{3}$, $xy=-2$, $xy=\pi$ и т. д. являются интегралами дифференциального уравнения (4), а функции $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$, $y=\frac{\pi}{x}$ и т. д. — решениями.

Пример 3. Найти все решения дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = \cos x. \tag{8}$$

Решение. Неизвестная функция $y=\varphi(x)$ есть первообразная для функции $\cos x$. Наиболее общий вид такой функции есть неопределенный интеграл $\int \cos x\,dx$. Стало быть, все решения содержатся в формуле

$$y = \sin x + C. \tag{9}$$

Функция $y=\sin x+C$, содержащая произвольную постоянную C, есть *общее решение*[1]) уравнения (8), функция $y=\sin x$ (а также $y=\sin x+\frac{1}{2}$, $y=\sin x-1$ и т. д.) есть *частное решение*.

§ 478. Уравнение первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Уравнение, *разрешенное относительно* y', имеет вид

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ однозначно определена и непрерывна в некоторой области; ищутся интегралы, принадлежащие этой области.

§ 479. Геометрическое истолкование уравнения первого порядка

Линия L (черт. 470), изображающая какой-либо интеграл дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

называется *интегральной линией* этого уравнения.

Черт. 470.

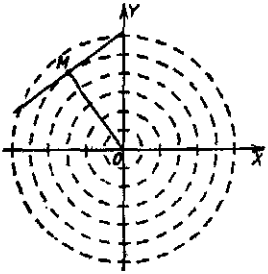
Производная y' есть угловой коэффициент касательной $T'T$ к интегральной линии. Еще до того, как найдена интегральная линия, проходящая через данную точку $M(x; y)$, мы можем из уравнения (1) найти y' и провести через M прямую $T'T$. Последняя укажет направ-

[1]) Определение общего и частного решения дифференциального уравнения см. в § 481 (для уравнения первого порядка) и в §§ 493, 494 (для уравнений высшего порядка).

ление искомой интегральной линии. Множество прямых $T'T$, соответствующих всевозможным точкам рассматриваемой области, называется *полем направлений* уравнения (1).

Задача интегрирования уравнения (1) геометрически формулируется так: *найти линии, у которых направление касательной всюду совпадает с направлением поля.*

Если поле направлений изобразить короткими и густо расположенными черточками (черт. 471, 472), то интегральные кривые можно построить (приближенно) на глаз.



Черт. 471.

Пример 1. На черт. 471 изображено поле направлений уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{2}$$

Уравнение (2) выражает, что направление поля в точке $M(x, y)$ перпендикулярно к прямой OM (угловой коэффициент направления поля есть $\frac{dy}{dx}$, а угловой коэффициент прямой OM есть $\frac{y}{x}$). Легко усмотреть, что интегральные линии суть окружности с центром в точке O. Стало быть, интегралы уравнения (2) имеют вид

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{3}$$

где a^2 — постоянная, которая может принимать любое положительное значение. Функции

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

являются решениями уравнения (2), что легко проверить.

Замечание. Согласно § 478, точки оси OX надо исключить из рассмотрения, ибо функция $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ в этих точках не определена. Однако мы и в этих точках изображаем направление поля (вертикальными черточками). Тем самым мы *расширяем смысл* уравнения (2) (в согласии с его геометрическим истолкованием).

Именно запись (2) мы понимаем как *совокупность двух уравнений*:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \tag{2a}$$

Во втором уравнении x рассматривается как функция аргумента y. В соответствии с этим мы считаем решениями не только интегралы (4), но также и интегралы

$$x = \sqrt{a^2-y^2}, \quad x = -\sqrt{a^2-y^2}. \tag{4a}$$

Уравнения (2a) равнозначны во всех точках, не лежащих на осях OX, OY. Второе из уравнений (2a) заменяет первое во всех точках оси OX (кроме точки O). Точка O все же остается исключенной. Это и естественно: через нее не проходит ни одна интегральная линия (окружность $x^2+y^2=a^2$ вырождается в точку).

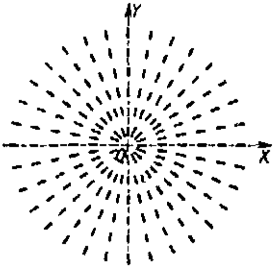
Уравнение (2), рассматриваемое в расширенном смысле, предпочтительно записывать в виде

$$x\,dx+y\,dy = 0. \tag{5}$$

Здесь подчеркнуто равноправие переменных x, y. Уравнение (5) можно преобразовать к виду $d(x^2+y^2)=0$. Значит, x^2+y^2 есть постоянная, и мы снова получаем интеграл (3).

Пример 2. На черт. 472 изображено поле направлений уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{6}$$



Черт. 472.

Интегральные линии — прямые $y=Cx$. Понимая уравнение (6) в расширенном смысле (см. выше замечание), мы можем изобразить поле направлений также и в любой точке оси OY (кроме точки O). Получаем вертикальные черточки, расположенные вдоль вертикальной прямой. Значит, эта прямая ($x=0$) присоединяется к интегральным линиям $y=Cx$.

В точке O направление поля остается неопределенным: здесь скопляются интегральные линии всевозможных направлений.

Функции

$$y = Cx \quad (C - \text{постоянная}), \tag{7}$$

а также функции

$$x = C_1 y \quad (C_1 - \text{постоянная}) \tag{7a}$$

являются решениями (интегралами) уравнения (6). Интегралами являются также уравнения

$$\frac{y}{x}=C,\quad \frac{x}{y}=C,\quad \frac{x^2}{y^2}=C,\quad \ln\left|\frac{y}{x}\right|=C \tag{8}$$

и т. д.

Уравнение (6) записывается в виде

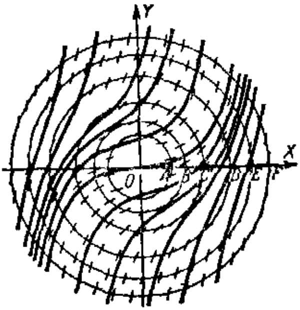
$$x\,dy-y\,dx=0. \tag{9}$$

Если разделить (9) на x^2, получим: $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0$, т. е. $d\left(\frac{y}{x}\right)=0$. Отсюда получаем интеграл $\frac{y}{x}=C$. Разделив (9) на y^2, получим: $\frac{x}{y}=C_1$ $\left(\text{здесь } C_1=\frac{1}{C}\right)$.

Пример 3. Поле направлений уравнения вида $y'=f(x)$ рассматривалось в § 295 (примеры 1—3). Интегральные линии $y=\int f(x)\,dx$ отстоят друг от друга на равном расстоянии (по направлению оси OY).

§ 480. Изоклины

Построение поля направлений уравнения $y'=f(x, y)$ облегчается, если предварительно начертить *линии равного наклона* (*изоклины*); это — такие линии, вдоль которых функция $f(x, y)$ имеет постоянное значение. Во всех точках какой-либо *изоклины направление* поля — одно и то же.



Черт. 473.

Пример. Изоклины уравнения $y'=x^2+y^2$ суть окружности $x^2+y^2=a^2$ (черт. 473). Во всех точках окружности $x^2+y^2=1$ (радиус OC принят за единицу масштаба) угловой коэффициент y' направления поля равен единице, во всех точках окружности $x^2+y^2=2$ (радиуса $OD=\sqrt{2}$) имеем $y'=2$ и т. д. Интегральные линии изображены жирными кривыми.

Замечание. На практике при пользовании изоклинами нет нужды изображать поле направлений черточками. Достаточно снабдить каждую изоклину числовой пометкой, дающей значение углового коэффициента. На чертеже, где нанесены изоклины, изображается, кроме того, густой пучок лучей и при каждом луче помечается его угловой коэффициент. Решение получается построением черточек, параллельных соответствующим лучам.

§ 481. Частное и общее решение уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

имеет бесчисленное множество решений (см. примеры § 479). Как правило, через данную точку рассматриваемой области (§ 478) проходит *одна-единственная интегральная линия*[1]). Соответствующее решение уравнения (1) называется *частным решением*, совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Общее решение дифференциального уравнения (1) стараются представить в виде некоторой функции

$$y = \varphi(x, C) \quad (C - \text{постоянная}), \tag{2}$$

которая дала бы любое частное решение (при надлежаще выбранном значении C). Такое представление иногда невозможно даже теоретически, а на практике удается лишь для немногих (но важных) классов уравнений (§§ 482–486).

Частное же решение, проходящее через данную точку $(x_0; y_0)$ можно всегда найти, если не в виде точного выражения через элементарные функции, то приближенно (с любой точностью; §§ 490, 491). Числа x_0, y_0 называются *начальными значениями*.

Интеграл дифференциального уравнения (1) называется *общим*, если он равносилен общему решению, и *частным*, если он равносилен одному частному решению или нескольким.

Пример 1. Найдем частное решение уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0 \tag{3}$$

---

[1]) Исключение возможно лишь для точек, где частная производная $f'_y(x, y)$ разрывна или не существует.

(§ 479, пример 1) при начальных значениях $x_0=4$, $y_0=-3$. Интегральные линии уравнения (3) суть окружности с центром (0; 0). Через точку $M_0(4;-3)$ проходит интегральная линия $x^2+y^2=25$. Это уравнение есть частный интеграл уравнения (3). Он равносилен двум частным решениям:

$$y=\sqrt{25-x^2},$$

$$y=-\sqrt{25-x^2}.$$

Второе является искомым (первое не проходит через M_0).

Пример 2. Частное решение уравнения (3), проходящее через точку $(x_0;\ y_0)$, имеет вид

$$y=\sqrt{x_0^2+y_0^2-x^2}, \qquad \text{если } y_0>0; \tag{4}$$

$$y=-\sqrt{x_0^2+y_0^2-x^2}, \quad \text{если } y_0<0. \tag{5}$$

В случаях, когда $y_0=0$, т. е. когда точка $(x_0;\ y_0)$ лежит на оси OX, частное решение (согласно замечанию к примеру 1 § 479) имеет вид

$$x=\sqrt{x_0^2-y^2}, \qquad \text{если } x_0>0; \tag{6}$$

$$x=-\sqrt{x_0^2-y^2}, \quad \text{если } x_0<0. \tag{7}$$

В точке $x_0=0$, $y_0=0$ (начало координат) частного решения нет.

Совокупность частных решений (4), (5), (6), (7) образует общее решение дифференциального уравнения (3).

Если обозначить постоянную величину $x_0^2+y_0^2$ через C^2, то общее решение можно записать в виде

$$y=\pm\sqrt{C^2-x^2}. \tag{8}$$

Уравнение

$$x^2+y^2=C^2, \tag{9}$$

равносильное общему решению (8), есть общий интеграл уравнения (3).

§ 482. Уравнения с разделенными переменными

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0 \tag{1}$$

(коэффициент P зависит только от x, коэффициент Q — только от y), то говорят, что *переменные разделены* (или *отделены*).

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными представляется уравнением[1])

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C \quad (C - \text{постоянная}). \tag{2}$$

Чтобы найти частный интеграл при начальных значениях x_0, y_0, можно поступить так: подставив x_0, y_0 в (2), находим соответствующее значение $C = C_0$. Искомый частный интеграл будет $\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C_0$. Когда общее решение нас не интересует, частное решение лучше находить непосредственно по формуле

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = 0. \tag{3}$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$\sin x\,dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0 \tag{4}$$

при начальных данных $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 3$.

Решение. Общий интеграл уравнения (4) есть

$$\int \sin x\,dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \text{ или } -\cos x + 2\sqrt{y} = C. \tag{5}$$

Полагая здесь $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 3$, получаем $C = 2\sqrt{3}$; искомое частное решение есть

$$y = \frac{(2\sqrt{3} + \cos x)^2}{4}. \tag{6}$$

Его можно прямо получить по формуле

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin x\,dx + \int_{3}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем символ $\int$ обозначает какую-либо одну первообразную функцию, т. е. произвольное постоянное слагаемое не учитывается. Впрочем, не будет ошибки, если в интеграл $\int P(x)\,dx$ включить постоянное слагаемое C_1, а в интеграл $\int Q(y)\,dy$ — слагаемое C_2. Но решение без нужды примет более сложный вид.

§ 483. Разделение переменных. Особое решение

Уравнение вида $X_1Y_1\,dx+X_2Y_2\,dy=0$, где функции X_1 и X_2 зависят только от x[1]), а функции Y_1, Y_2 — только от y, приводится к виду (1) § 482 делением на Y_1X_2. Процесс приведения называется *разделением переменных*.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y\,dx-x\,dy=0. \tag{1}$$

Разделив на xy, получаем уравнение

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0, \tag{2}$$

где переменные разделены. Интегрируя, находим:

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=C, \tag{3}$$

т. е.

$$\ln|x|-\ln|y|=C, \tag{4}$$

или

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C. \tag{4a}$$

Если ввести новую постоянную C_1, связанную с C зависимостью $C=\ln C_1$, то вместо (4а) можно написать:

$$\frac{x}{y}=C_1 \tag{4б}$$

(ср. пример 2 § 479).

Замечание. 1. Пусть значение $y=k$ служит корнем уравнения $Y_1=0$. Тогда функция $y=k$ (сводящаяся к постоянной величине k) служит одним из решений дифференциального уравнения $X_1Y_1\,dx+X_2Y_2\,dy=0$ (ибо при $y=k$ имеем $dy=0$ и по условию $Y_1=0$). Это решение может утеряться при делении на Y_1X_2. Точно так же может утеряться решение вида $x=l$, где l — корень уравнения $X_2=0$. Так, в примере 1, получив решение (4), мы утеряли частное решение $y=0$ дифференциального уравнения (1), а также частное решение $x=0$. Ведь равенство (4) лишено смысла как при $y=0$, так и при $x=0$ (число нуль не имеет логарифма).

Освободившись в равенстве (4а) от логарифмов, мы снова ввели решение $x=0$ (при $C_1=0$).

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1-y^2}\,dx-y\,dy=0. \tag{5}$$

Решение. В пределах полосы, ограниченной парой прямых $y=\pm1$, по меньшей мере одна из функций $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left(=\frac{dx}{dy}\right)$ однозначно определена и

[1]) Одна из них или обе могут быть постоянными; то же для функций Y_1, Y_2.

непрерывна. За пределами этой полосы ни одна из упомянутых функций не определена. Значит (§ 478), все интегралы уравнения (5) лежат в полосе, ограниченной прямыми $y = \pm 1$.

Делим уравнение (5) на $\sqrt{1-y^2}$. Получаем уравнение

$$dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

где переменные разделены. Интегрируя, находим

$$x - \sqrt{1-y^2} = C$$

или

$$x - C = \sqrt{1-y^2}. \tag{6}$$

Это уравнение представляет семейство полуокружностей, изображенное на черт. 474. Но оно содержит не все интегральные линии уравнения (5): разделив последнее на $\sqrt{1-y^2}$, мы утеряли решения $y=1$ и $y=-1$ (прямые uv, $u'v'$ на черт. 474).

Черт. 474.

Замечание 2. Утерянные здесь решения *не являются частными* (в противоположность решениям, утерянным в примере 1). Ведь частным решением мы назвали (§ 481) такое, которое единственно при некоторых начальных значениях. Между тем через каждую точку решения $y=1$ проходит *по два решения*: например, через точку M_0 (0; 1) (черт. 474), кроме прямой $y=1$, проходит полуокружность $x=\sqrt{1-y^2}$, которая изображает еще одно решение уравнения (5); это решение получается из (6) при $C=0$.

Уравнение (6), хотя оно не охватывает всех решений, содержит все *частные* решения (полуокружности), и потому является *общим* интегралом уравнения (5). Решения $y=1$, $y=-1$ называются *особыми*.

Вообще интеграл дифференциального уравнения первого порядка называется *особым*, если через каждую его точку проходит по крайней мере еще один интеграл.

§ 484. Уравнение в полных дифференциалах

Если коэффициенты $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в уравнении

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

то левая часть (1) есть полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$ (первообразная функция выражения $P\,dx + Q\,dy$; см. § 476). Общий интеграл уравнения (1) будет:

$$F(x, y) = C. \tag{3}$$

Пример. Найти частный интеграл уравнения

$$\frac{x^2 - y}{x^2}\,dx + \frac{x+1}{x}\,dy = 0 \tag{4}$$

при начальных данных $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Решение. Условие (2) выполняется. При этом функции $P(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2}$, $Q = 1 + \frac{1}{x}$ разлагаются на члены вида $Ax^m y^n$. Поэтому первообразную функцию находим (§ 476, замечание) так.

Выполняем интегрирование

$$\int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx = x + \frac{y}{x} \text{ (при постоянном } y\text{)},$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = y + \frac{y}{x} \text{ (при постоянном } x\text{)}.$$

Объединяем эти выражения, сохраняя член $\frac{y}{x}$ только один раз. Функция $x + y + \frac{y}{x}$ есть первообразная. Общий интеграл будет:

$$x + y + \frac{y}{x} = C. \tag{5}$$

Подставляя начальные данные $x = 1$, $y = 1$, находим $C = 3$. Искомый частный интеграл есть $x + y + \frac{y}{x} = 3$.

§ 484a. Интегрирующий множитель

Если коэффициенты $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в уравнении

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

не удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

то левая часть (1) не является полным дифференциалом. Но иногда удается подобрать такой множитель $M(x, y)$, чтобы выражение $M(P\,dx + Q\,dy)$ стало полным дифференциалом некоторой функции $F_1(x, y)$. Тогда общий интеграл есть

$$F_1(x, y) = C.$$

Функция $M(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Пример. Левая часть уравнения $2y\,dx + x\,dy = 0$ не является полным дифференциалом. Но по умножении на x получается:

$$x(2y\,dx + x\,dy) = d(x^2y).$$

Общий интеграл данного уравнения есть

$$x^2y = C.$$

Замечание. Всякое дифференциальное уравнение имеет интегрирующие множители (и даже бесчисленное множество их). Но общих приемов для их отыскания нет

§ 485. Однородное уравнение

Дифференциальное уравнение

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *однородным*, если отношение $\frac{M}{N}$ можно представить как функцию отношения $\frac{y}{x}$. Это отношение мы будем обозначать буквой t:

$$t = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Так, уравнение

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - x\,dy = 0 \tag{3}$$

— однородное, ибо

$$\frac{M}{N} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{-x} = -\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$= -t - \sqrt{1 + t^2}. \tag{4}$$

С помощью подстановки

$$y = tx \quad (\text{откуда} \quad dy = t\,dx + x\,dt) \tag{5}$$

всякое однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, Пример 1. Проинтегрировать уравнение (3) при начальных условиях $x_0=3$, $y_0=4$.

Решение. После подстановки (5) уравнение (3) принимает вид

$$\sqrt{x^2+x^2t^2}\,dx-x^2\,dt=0 \tag{6}$$

или

$$|x|\sqrt{1+t^2}\,dx-x^2\,dt=0. \tag{7}$$

Переменные разделяются. Получаем

$$\frac{dx}{|x|}=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{8}$$

При разделении переменных мы утеряли решение $x=0$. Однако оно заведомо не удовлетворяет начальным условиям.

Так как интегрировать надо при начальных условиях $x_0=3$, $t_0=\frac{y_0}{x_0}=\frac{4}{3}$, то абсцисса x положительна (см. ниже замечание), и надо положить

$$|x|=x. \tag{9}$$

Получаем

$$\int_3^x \frac{dx}{x}=\int_{4/3}^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10}$$

откуда

$$\ln x-\ln 3=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)-\ln 3. \tag{11}$$

Заменяя t на $\frac{y}{x}$ и потенцируя, получаем частный интеграл:

$$x=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}. \tag{12}$$

Соответствующее частное решение есть

$$y=\frac{x^2-1}{2}. \tag{13}$$

Замечание. Левая часть формулы (10) не имеет смысла, когда верхний предел равен нулю или принимает отрицательные значения. Поэтому мы должны были при разыскании решения ограничиться положительными значениями x. Дает ли функция (13) решение уравнения (3) также и при $x \leqslant 0$, это надо дополнительно исследовать. Подстановка выражения (13) в левую часть (3) показывает, что функция $y=\frac{x^2-1}{2}$ дает решение для всех значений x.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение (3) при начальных условиях $x_0=-3$, $y_0=4$.

Решение. Последовательность действий та же, что в примере 1. Однако вместо (9) надо положить

$$|x| = -x, \tag{9a}$$

так что вместо (10) получаем

$$-\int_{-3}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{-4/3}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10a}$$

откуда

$$-\ln|x| + \ln 3 = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) - \ln\frac{1}{3}. \tag{11a}$$

Вместо (12) получаем

$$\frac{1}{|x|} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \tag{12a}$$

или

$$-\frac{1}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \tag{12б}$$

(знак минус перед последней дробью появился потому, что при $x < 0$ имеем $\sqrt{x^2} = -x$). Из (12б) получаем искомое частное решение

$$y = \frac{x^2-1}{2}.$$

Оно совпадает с решением примера 1 (ср. замечание к примеру 1).

Если, не обратив внимания на (9а), мы вместо (10а) воспользовались бы формулой (10), то получили бы ошибочный результат.

§ 486. Линейное уравнение первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *линейным*, если отношение $\frac{M}{N}$ содержит y лишь в первой степени («линейно»). Линейное уравнение принято записывать в виде

$$y' + P(x)\,y = Q(x); \tag{2}$$

здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — какие угодно (непрерывные) функции от x.

Если, в частности, $Q(x)=0$, то уравнение (2) называется *линейным уравнением без правой части* [1]. В этом случае переменные разделяются, и общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-\int P\,dx}. \tag{3}$$

Пример 1. Найти общее решение линейного уравнения без правой части

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0. \tag{4}$$

Решение. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{1+x^2}, \tag{5}$$

откуда

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C \tag{6}$$

или

$$y = C_1\sqrt{1+x^2}, \tag{6a}$$

где $C_1=e^C$. Тот же результат мы получили бы по формуле (3) $\left(\text{при } P=-\frac{x}{1+x^2}\right)$:

$$y = Ce^{-\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = C\sqrt{1+x^2}.$$

Замечание 1. Частное решение $y=0$, получаемое из (6а) при $C_1=0$, нельзя получить из (6); это решение утерялось при делении уравнения (4) на y. Освободившись от логарифмов, входящих в (6), мы снова ввели решение $y=0$. Ср. § 484, пример 1.

Замечание 2. На практике применение готовой формулы (3) не дает существенного преимущества перед последовательными преобразованиями, показанными в примере 1.

Линейное уравнение с правой частью [в нем $Q(x)\neq 0$] интегрируется следующим образом: находим общее решение (3) соответствующего уравнения без правой части;

---

[1] Линейное уравнение без правой части называют также *однородным*. Но это наименование имеет еще другой смысл (§ 485).

в этом решении заменяем постоянную C неизвестной функцией u. Полученное выражение подставляем в (2). После упрощений переменные u, x разделяются, и, интегрируя, мы найдем выражение u через x. Функция $y = ue^{-\int P\,dx}$ будет общим решением [1]) уравнения (2).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = x. \tag{7}$$

Решение. Общее решение соответствующего уравнения без правой части есть (см. пример 1) $y = C\sqrt{1+x^2}$. Заменяя постоянную C неизвестной функцией u, получаем:

$$y = u\sqrt{1+x^2}, \tag{8}$$

откуда

$$y' = \frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2} + \frac{ux}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{9}$$

Подставляем (8) и (9) в (7). После упрощений находим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отсюда получаем выражение u через x:

$$u = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C_1. \tag{10}$$

В силу (8) и (10) общее решение данного уравнения будет:

$$y = (\sqrt{1+x^2} + C_1)\sqrt{1+x^2}\ ^{2)}. \tag{11}$$

---

1) Это общее решение выражается формулой

$$y = \left[\int dx\, Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} + C_1\right] e^{-\int P\,dx} \tag{A}$$

2) Тот же результат $\left[\text{при } P = -\frac{x}{1+x^2},\quad Q = x\right]$ получим по формуле (A):

$$y = \left[\int x\,dx\, e^{\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} + C_1\right] e^{-\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} =$$

$$= \left[\int x\,dx\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C_1\right]\sqrt{1+x^2} = (\sqrt{1+x^2} + C_1)\sqrt{1+x^2}.$$

Замечание. Аналогично интегрируется уравнение

$$\frac{dx}{dy}+P(y)\,x=Q(y), \qquad (12)$$

получаемое из (2), если поменять ролями x и y.

§ 487. Уравнение Клеро

Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$y=xy'+\varphi(y'). \qquad (1)$$

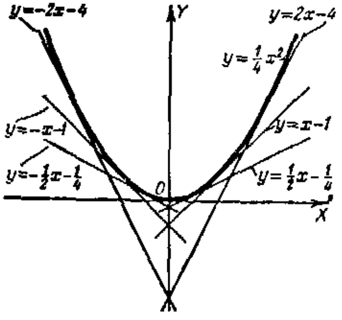
Его общий интеграл есть

$$y=xC+\varphi(C). \qquad (2)$$

Кроме того, уравнение Клеро имеет особый интеграл (§ 483); последний получается исключением параметра t из уравнений

$$x=-\varphi'(t), \quad y=-t\varphi'(t)+\varphi(t). \qquad (3)$$

Общий интеграл (2) изображается совокупностью прямых линий, касающихся некоторой кривой L. Особый интеграл изображается самой кривой L [уравнения (3) представляют ее в параметрическом виде].



Черт. 475.

Пример. Уравнение

$$y=xy'-y'^2 \qquad (1a)$$

есть уравнение Клеро. Общий его интеграл

$$y=Cx-C^2 \qquad (2a)$$

изображается совокупностью прямых (черт. 475), касающихся параболы

$$y=\frac{1}{4}x^2. \qquad (4)$$

Уравнение (4) есть особый интеграл. Он получается следующим образом. В данном примере имеем $\varphi(t)=-t^2$, $\varphi'(t)=-2t$, и уравнения (3) принимают вид

$$x=2t, \quad y=t^2. \qquad (3a)$$

Исключив t, получаем (4).

Пояснение. Покажем на примере уравнения (1а), как получается уравнение особого интеграла.

Кривая L, касающаяся интегральных линий (2а), сама тоже будет интегральной линией (ибо направление ее всюду совпадает с направлением поля). Чтобы разыскать кривую L, учтем, что она должна иметь с каждой из прямых

$$y = Cx - C^2 \tag{5}$$

по одной общей точке $N(\bar{x}; \bar{y})$. Величина C, будучи постоянной для каждой прямой (5), меняется от одной прямой к другой, так что координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ суть функции от C. Найдем эти функции. Так как точка $N(\bar{x}; \bar{y})$ лежит на прямой (5), то мы должны иметь тождество

$$\bar{y} = C\bar{x} - C^2. \tag{6}$$

Так как в точке N направления линии L и прямой (5) совпадают, то дифференциалы $d\bar{y}$, $d\bar{x}$ должны иметь то же отношение, что и дифференциалы dx, dy координат прямой (5), т. е. должно быть:

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x}. \tag{7}$$

Вместе с тем дифференциалы $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ должны удовлетворять равенству

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x} + \bar{x}\,dC - 2C\,dC, \tag{8}$$

полученному дифференцированием тождества (6). Сравнивая (7) с (8), получаем: $(\bar{x} - 2C)\,dC = 0$, т. е.

$$\bar{x} = 2C. \tag{9}$$

Таково выражение функции $\bar{x}$. Подставляя это в (6), находим:

$$\bar{y} = C^2. \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) отличаются от (3а) лишь обозначениями.

§ 488. Огибающая

Определение 1. Множество линий называется семейством (однопараметрическим), если каждой линии можно поставить в соответствие определенное число C (*параметр семейства*) таким образом, чтобы непрерывному изменению параметра C соответствовало непрерывное видоизменение линии. Уравнение вида

$$f(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, C)$ — непрерывная функция трех аргументов x, y, C, представляет семейство линий на плоскости. Отдельные линии семейства соответствуют отдельным значениям C.

Уравнение (1) называется *уравнением семейства*.

Пример 1. Уравнение

$$y = Cx - C^2$$

представляет семейство прямых линий, изображенное на черт. 475. За параметр семейства принят угловой коэффициент прямой.

Пример 2. Уравнение

$$(x-C)^2 + y^2 = 1$$

представляет семейство окружностей радиуса 1 с центрами на оси OX (черт. 474 на стр. 711). За параметр принята абсцисса центра.

Пример 3. Уравнение

$$x^2 + y^2 = C^2$$

представляет семейство окружностей с центром в $O(0, 0)$. За параметр принят радиус.

Определение 2. *Огибающей* данного семейства называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной из линий семейства.

В примере 1 огибающая есть парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ (ср. § 487), в примере 2 огибающая есть пара прямых $y = \pm 1$, в примере 3 огибающей нет.

Теорема. Огибающая семейства (1) принадлежит так называемой *дискриминантной линии*, т. е. геометрическому месту точек, удовлетворяющих уравнениям

$$f(x, y, C) = 0, \quad f'_C(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

при всевозможных значениях C. Если исключить C из уравнений (2), получим уравнение дискриминантной линии.

Замечание 1. Не исключено, что дискриминантная линия лишь частично покрывается огибающей, а может даже случиться, что дискриминантная линия существует, но у семейства (1) вовсе нет огибающей.

Пример 4. Дискриминантная линия семейства прямых $y = Cx - C^2$ представляется системой

$$y = Cx - C^2, \quad x - 2C = 0.$$

Исключив C, получаем уравнение $y = \frac{1}{4}x^2$. Дискриминантная линия есть парабола, совпадающая с огибающей семейства (ср. пример § 487).

Пример 5. Дискриминантная линия семейства окружностей

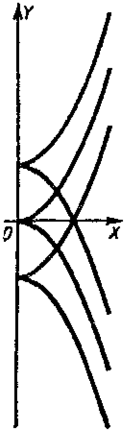
$$(x-C)^2+y^2 = 1$$

представляется системой

$$(x-C)^2+y^2 = 1, \quad -2(x-C) = 0.$$

Исключив C, получаем уравнение $y^2 = 1$. Дискриминантная линия (пара прямых $y = \pm 1$) совпадает с огибающей (ср. § 483, пример 2).

Пример 6. Дискриминантная линия семейства полукубических парабол $(y-C)^2 = x^3$ (черт. 476) есть прямая $x = 0$, но у данного семейства нет огибающей.



Черт. 476.

Замечание 2. Если семейство (1) изображает общий интеграл некоторого дифференциального уравнения, то огибающая представляет особый интеграл. Если нет огибающей, нет и особого интеграла.

§ 489. Об интегрируемости дифференциальных уравнений

В §§ 482—487 были рассмотрены важнейшие типы уравнений первого порядка, решение которых сводится к разысканию интегралов от известных функций[1]). О таких уравнениях говорят, что они *приводятся к квадратурам*.

В практике встречаются и такие уравнения первого порядка, которые не приводимы к квадратурам. При решении уравнений высших порядков такие случаи встречаются еще чаще. Для решения уравнений, не приводящихся к квадратурам, пользуются приближенными методами. О них см. ниже §§ 490—492.

§ 490. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

при начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$. Требуется найти его решение в некотором промежутке (x_0, x). Делим этот промежуток на n частей (равных или неравных) последовательными точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (черт. 477).

---

[1]) Эти интегралы могут не выражаться через элементарные функции (§ 309).

На участке (x_0, x_1) полагаем:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \tag{2}$$

т. е. вместо искомой интегральной линии M_0K_0 берем ее касательную M_0M_1.

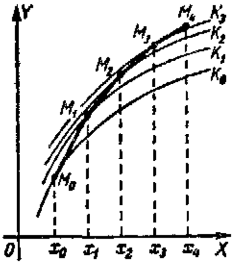
В точке $x = x_1$ получаем приближенное значение искомого решения

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x_0. \tag{3}$$

На участке (x_1, x_2) полагаем:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

т. е. вместо искомой интегральной линии M_0K_0 берем касательную M_1M_2 к интегральной линии M_1K_1 (при этом возникает двойная погрешность: касательная M_1M_2 отклоняется от линии M_1K_1, а последняя не совпадает с искомой линией M_0K_0). Продолжая процесс, получаем последовательные приближенные значения



Черт. 477.

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\Delta x_1, \\ y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,\Delta x_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

При достаточном измельчении данного промежутка достигнем любой требуемой точности, но ценой большого труда. Поэтому способ Эйлера применяется лишь для грубых приближений. Чаще всего выгодно делить промежуток (x_0, x) на равные части.

Пример. Найти приближенное решение уравнения

$$y' = \frac{1}{2}xy$$

в промежутке $(0, 1)$ при начальных данных $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ $\left[\text{здесь } f(x, y) = \frac{1}{2}xy\right]$.

Решение. Делим промежуток $(0, 1)$ на 10 равных частей, так что

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_9 = 0{,}1,$$

По формулам (3) и (4) находим последовательно:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} x_0 y_0 \,\Delta x_0 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1\cdot 0{,}1 = 1,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_1 \,\Delta x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot 0{,}1 = 1{,}005$$

и т. д. Вычисления располагаются по следующей схеме:

x	y	$\Delta y = \frac{1}{2} xy\,\Delta x$	Истинное значение y
0	1	0	1
0,1	1	0,005	1,0025
0,2	1,005	0,0101	1,0100
0,3	1,0151	0,0152	1,0227
0,4	1,0303	0,0206	1,0408
0,5	1,0509	0,0263	1,0645
0,6	1,0772	0,0323	1,0942
0,7	1,1095	0,0392	1,1303
0,8	1,1487	0,0459	1,1735
0,9	1,1946	0,0538	1,2244
1,0	1,2484		1,2840

Из первых двух столбцов составляется таблица приближенного решения. Данное уравнение допускает и точное решение по формуле $\int\limits_1^y \frac{dy}{y} = \int\limits_0^x \frac{1}{2} x\,dx$, откуда $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$.

Соответствующие значения y даны в последнем столбце. Сравнение с первым столбцом показывает, что погрешность последовательно возрастает и при $x = 1$ достигает 2,9%.

§ 491. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Решение уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

при начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$ можно искать в виде ряда, расположенного по степеням $x - x_0$, т. е. в виде

$$y = y_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots \tag{2}$$

Множители $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ находятся по методу неопределенных коэффициентов (§ 307) или другими способами.

Метод рядов в применении к дифференциальным уравнениям систематически применялся Ньютоном (§ 292). В противоположность методу Эйлера, дающему решение в виде таблицы (§ 490), здесь решение получается в виде формулы. Но последняя не пригодна вне промежутка сходимости ряда. Теоретически возможны и такие случаи, когда решение не представимо рядом (ср. § 400). Теоретическое исследование вопроса было выполнено О. Коши. С. В. Ковалевская[1]) исследовала аналогичный вопрос для уравнений с частными производными.

Несмотря на вышеуказанные ограничения, метод рядов имеет важное практическое значение.

Пример. Найти решение уравнения

$$y' = \frac{1}{2}xy \tag{3}$$

при начальных условиях $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Решение. Согласно формуле (2) полагаем:

$$y = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots \tag{4}$$

Коэффициенты $c_1, c_2, c_3, \ldots$ пока не известны. Дифференцируя (4), находим:

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), получаем:

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2x^3 + \ldots \tag{6}$$

Теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях буквы x. Получаем соотношения

$$c_1 = 0, \quad 2c_2 = \frac{1}{2}, \quad 3c_3 = \frac{1}{2}c_1, \quad 4c_4 = \frac{1}{2}c_2, \ \ldots \tag{7}$$

Из них последовательно находим коэффициенты

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{32}, \quad c_5 = 0, \ \ldots \tag{8}$$

Искомое решение имеет вид

$$y = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{384}x^6 + \ldots \tag{9}$$

---

[1]) Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891) — знаменитый русский ученый. Ей принадлежат важные результаты в области математики, механики и теоретической физики, а также ряд публицистических и художественных произведений.

При $x = 1$ получаем: $y \approx 1{,}2839$ (ср. таблицу § 490).

Разложение (9) совпадает с разложением функции $e^{\frac{x^2}{4}}$:

$$e^{\frac{x^2}{4}} = 1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3+\ldots \tag{10}$$

Другое решение. Дифференцируя последовательно равенство (3), находим:

$$y'' = \frac{1}{2}(xy)' = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}xy', \tag{11}$$

$$y''' = \left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}xy'\right)' = y'+\frac{1}{2}xy'', \tag{12}$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \left(y'+\frac{1}{2}xy''\right)' = \frac{3}{2}y''+\frac{1}{2}xy''' \tag{13}$$

и т. д. Подставляя в (3) начальные значения $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, находим $y_0' = 0$, затем из (11) получаем:

$$y_0'' = \frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}x_0y_0' = \frac{1}{2}.$$

Таким же образом находим:

$$y_0''' = 0, \quad y_0^{\mathrm{IV}} = \frac{3}{4}$$

и т. д. Подставляя найденные значения в ряд Тейлора

$$y = y_0+y_0'x+\frac{y_0''}{2!}x^2+\frac{y_0'''}{3!}x^3+\frac{y_0^{\mathrm{IV}}}{4!}x^4+\ldots,$$

снова получаем ряд (9).

§ 492. О составлении дифференциальных уравнений

Процесс составления дифференциального уравнения по условию задачи (геометрической, физической или технической) состоит в том, что мы выражаем на математическом языке *связь между переменными величинами и их бесконечно малыми приращениями*. Иногда дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений — за счет того, что они учтены заранее. Так, представляя скорость выражением $v = \frac{ds}{dt}$, мы не привлекаем приращений Δs, Δt, но они фактически учтены, ибо

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При составлении дифференциальных уравнений первого порядка бесконечно малые приращения сразу же заменяются соответствующими дифференциалами. Погрешность, совершаемая при этом, автоматически устраняется при переходе к пределу [1]). Вообще всякую бесконечно малую величину можно заменить ей эквивалентной, например бесконечно малую дугу соответствующей хордой или наоборот.

Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений дать нельзя. Как и при составлении алгебраических уравнений, здесь часто требуется изобретательность. Многое зависит от навыков, приобретаемых упражнением.

Пример 1. В резервуаре имеется 100 *л* рассола, содержащего 10 *кг* растворенной соли. Каждую минуту 2 *л* рассола вытекает из резервуара, а 3 *л* пресной воды притекает в него. Перемешивание сохраняет одинаковую концентрацию соли во всем резервуаре. Сколько соли останется в резервуаре через час?

Решение. Обозначим через x количество соли в резервуаре (в *кг*), через t — время, отсчитываемое от начального момента (в минутах).

За промежуток времени dt из резервуара уходит $(-dx)$ *кг* соли [ведь x — убывающая функция времени, значит, dx — отрицательная величина, а $(-dx)$ — положительная].

Чтобы составить уравнение, вычислим убыль соли иным путем. В момент t в резервуаре находится $(100+t)$ *л* жидкости (притекло $3t$ *л* и утекло $2t$ *л*); в ней растворено x *кг* соли. Значит, в одном литре рассола содержится $\frac{x}{100+t}$ *кг* соли. За время dt из резервуара вытекает $2dt$ *л* рассола; значит, количество соли уменьшится на

$$\frac{x}{100+t}\cdot 2\,dt\ кг.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$-dx=\frac{2x\,dt}{100+t}. \qquad (1)$$

Разделяя переменные и учитывая начальные условия

---

[1]) Как это происходит, показано в замечании.

$t_0 = 0,\ x_0 = 10$, получаем:

$$\int_{10}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{0}^{t} \frac{2dt}{100+t}, \tag{2}$$

т. е.

$$\ln\frac{10}{x} = 2\ln\frac{100+t}{100} \tag{3}$$

или

$$\frac{10}{x} = \left(\frac{100+t}{100}\right)^2. \tag{3a}$$

Подставляя $t = 60$ в (3а), найдем искомое количество соли $x \approx 3{,}91$ (*кг*).

При менее округленных данных лучше взять формулу (3). Умножив обе ее части на модуль M (§ 242), перейдем от натуральных логарифмов к десятичным.

Замечание. При составлении уравнения (1) мы дважды допустили погрешность: во-первых, мы взяли dx и dt вместо Δx и Δt, во-вторых, мы приняли, что за время dt убыль соли составила $\frac{x}{100+t}\cdot 2\,dt$ *кг*, т. е. что концентрация рассола равна $\frac{x}{100+t}$ в течение всего промежутка $(t,\ t+dt)$. На самом деле она равна $\frac{x}{100+t}$ лишь в начале промежутка, а затем уменьшается. Но эти две погрешности автоматически компенсируются.

Действительно, в течение *малого* промежутка времени $(t,\ t+\Delta t)$ концентрация рассола незначительно отличается от $\frac{x}{100+t}\frac{кг}{л}$; значит, за это время количество соли уменьшится хотя и не в точности на $\frac{2x\,\Delta t}{100+t}$ *л*, но *примерно* на такое количество. Стало быть, имеем приближенное равенство

$$-\Delta x \approx \frac{2x\,\Delta t}{100+t}$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -\frac{2x}{100+t}.$$

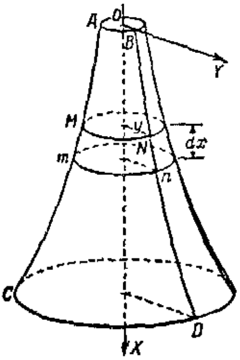
Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δt; иными словами, $-\frac{2x}{100+t}$ есть предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при

$\Delta t \to 0$. А этот предел есть производная $\frac{dx}{dt}$. Следовательно, производная $\frac{dx}{dt}$ *в точности* равна $-\frac{2x}{100+t}$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{100+t}.$$

Это точное равенство равносильно уравнению (1).

Пример 2. Для моста строится каменный бык высотой в 12 *м* с круговыми горизонтальными сечениями. Бык рассчитан на нагрузку $P = 90$ *т* (помимо собственного веса). Плотность материала $\gamma = 2,5 \frac{т}{м^3}$. Допустимое давление составляет $k = 300 \frac{т}{м^2}$. Найти площади верхнего и нижнего оснований, а также форму осевого сечения быка (при наиболее экономном расходе стройматериала).



Черт. 478.

Решение. Площадь s_0 верхнего основания при допустимом давлении $k = 300 \frac{т}{м^2}$ может выдержать нагрузку ks_0, а по условию $ks_0 = P$. Следовательно,

$$s_0 = \frac{P}{k} = \frac{90}{300} = 0,3 \text{ (м}^2\text{)}. \quad (4)$$

Площадь s горизонтального сечения возрастает с понижением уровня, ибо, помимо нагрузки P, на площадь s давит вышележащая часть быка.

Обозначим через x расстояние сечения s (MN на черт. 478) от верхнего основания. Выделим бесконечно малый горизонтальный слой $MNnm$. Площадь его нижнего основания mn превышает площадь верхнего основания MN на ds. Поэтому у нижнего основания предельная нагрузка на $k\,ds$ больше, чем у верхнего. С другой стороны, нагрузка mn больше, чем нагрузка сечения MN на величину, равную весу слоя $MNnm$, т. е. на $\gamma s\,dx$[1]). Получаем дифференциальное уравнение

$$k\,ds = \gamma s\,dx. \quad (5)$$

[1]) Мы принимаем, что слой $MNnm$ — цилиндрический (погрешность имеет высший порядок относительно dx).

Разделяя переменные и интегрируя при начальных условиях $x = 0$, $s = s_0$, получаем:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = \frac{\gamma}{k} \int_{0}^{x} dx, \tag{6}$$

откуда

$$\ln \frac{s}{s_0} = \frac{\gamma}{k} x. \tag{7}$$

Чтобы найти площадь s_1 нижнего основания, надо подставить $x = 12$ (при $s_0 = 0,3$, $\gamma = 2,5$, $k = 300$). Переходя к десятичным логарифмам (§ 242), получим:

$$\lg \frac{s_1}{0,3} = M \cdot \frac{2,5}{300} \cdot 12, \tag{8}$$

откуда $s_1 = 0,33$ ($м^2$).

Форма осевого сечения характеризуется уравнением меридиана BD. Обозначим радиус сечения MN через y; тогда $\frac{s}{s_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$, и равенство (7) дает:

$$2 \ln \frac{y}{y_0} = \frac{\gamma}{k} x, \text{ или } y = y_0 e^{\frac{\gamma}{2k} x}. \tag{9}$$

Таково уравнение меридиана. Линия (9) называется *логарифмикой*.

§ 493. Уравнение второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка таков:

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Уравнение, разрешенное относительно y'', имеет вид

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2}$$

Предполагается, что функция $f(x, y, y')$ трех аргументов x, y, y' однозначно определена и непрерывна в некоторой области изменения этих аргументов.

Как правило[1]), задание начальных значений $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ (принадлежащих рассматриваемой области) определяет одно-единственное решение уравнения (2).

---

[1]) Исключение возможно только в случае, когда хотя бы одна из производных $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ разрывна или не существует.

Геометрически: через данную точку $M(x_0; y_0)$ в данном направлении проходит одна-единственная интегральная линия.

Соответствующее решение уравнения (2) называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Общее решение стараются представить в виде некоторой функции

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \quad (C_1 \text{ и } C_2 \text{— постоянные}), \tag{3}$$

которая дала бы любое частное решение (при надлежаще выбранных значениях C_1, C_2).

Замечание. Через данную точку $M(x_0; y_0)$ проходит бесчисленное множество интегральных линий — в каждом из возможных направлений по одной.

Пример. При начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$ найти частное решение уравнения

$$y'' = x. \tag{4}$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy'}{dx} = x. \tag{5}$$

Учитывая начальные условия, имеем: $\int\limits_2^{y'} dy' = \int\limits_1^x x\,dx$, т. е. $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$. Снова учитывая начальные условия, получаем: $\int\limits_1^y dy = \int\limits_1^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\right) dx$. Искомое частное решение есть

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}. \tag{6}$$

Другой способ. Из (5) находим:

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \tag{7}$$

а отсюда

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \tag{8}$$

Функция (8) представляет общее решение, ибо при надлежаще взятых значениях C_1, C_2 она дает любое частное решение. Так, подставив в (7) и (8) данные начальные значения, будем иметь:

$$2=\frac{1}{2}+C_1, \quad 1=\frac{1}{6}+C_1+C_2, \tag{9}$$

откуда найдем:

$$C_1=\frac{3}{2}, \quad C_2=-\frac{2}{3}.$$

Подставив эти значения в (8), снова получим частное решение (6).

Предостережение. Далеко не всякое решение, содержащее две произвольные постоянные, является общим. Например, функция

$$y=\frac{x^3}{6}+C_3x-C_4\left(x-\frac{1}{C_4}\right) \tag{10}$$

есть решение уравнения (4), но содержит не все частные решения; так, из (10) ни при каких значениях C_3, C_4 не получается решение (6). Стало быть, решение (10) — не общее. Это видно уже из того, что две постоянные C_3, C_4 «не являются существенными», т. е. их можно заменить одной. В самом деле, формулу (10) можно записать в виде

$$y=\frac{x^3}{6}+(C_3-C_4)\,x+1.$$

Обозначив C_3-C_4 через C_1, получим:

$$y=\frac{x^3}{6}+C_1x+1;$$

это решение получается из общего решения (8) при $C_2=1$.

§ 494. Уравнение n-го порядка

Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

при данных начальных значениях x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ имеет, как правило (ср. § 493), одно-единственное решение. Такое решение называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Общее решение стараются представить в виде

$$y=\varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right).$$

Не всякое решение, содержащее n постоянных, является общим (ср. § 493, предостережение).

§ 495. Случаи понижения порядка

Иногда дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка допускает понижение порядка. Важнейшими являются следующие два случая.

Случай 1. Уравнение не содержит y. Тогда в качестве неизвестной функции берется величина y'.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение второго порядка

$$(1+x)y''+y'=0. \tag{1}$$

Решение. Принимая y' за неизвестную функцию, перепишем (1) в виде

$$(1+x)\frac{dy'}{dx}+y'=0. \tag{2}$$

Это — уравнение первого порядка (с неизвестной функцией y'). Помножив на dx, получим уравнение в полных дифференциалах (§ 484), так что общий интеграл уравнения (2) есть

$$(1+x)\,y'=C_1. \tag{3}$$

Теперь вернемся к прежней неизвестной функции y и запишем уравнение (3) так:

$$(1+x)\frac{dy}{dx}=C_1. \tag{3a}$$

Интегрируя уравнение (3a), находим:

$$y=C_1\ln(1+x)+C_2. \tag{4}$$

Это — общее решение уравнения (1).

Случай 2. Уравнение не содержит x. Тогда в качестве неизвестной функции опять берется y', но за аргумент (вместо x) принимаем y. При этом производные второго и высших порядков преобразуем по формулам

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dy}y', \tag{5}$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy}y'\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy}y'\right)y' \tag{6}$$

и т. д.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение второго порядка

$$y''+y=0. \tag{7}$$

Решение. Применив формулу (5), преобразуем (7) к виду

$$y'\,dy'+y\,dy=0. \tag{8}$$

Это — уравнение первого порядка (переменные y и y'). Общий интеграл уравнения (8) есть

$$y'^2+y^2 = C_1^2. \tag{9}$$

Возвращаясь к прежним переменным x, y, записываем (9) в виде

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}} = \pm\, dx. \tag{10}$$

Интегрируя, находим:

$$\arcsin\frac{y}{C_1} = \pm\,(x+C_2),$$

откуда

$$y = C_1 \sin(x+C_2)$$

(знак $\pm$ включен в постоянную C_1).

Это — общее решение уравнения (8); его можно преобразовать к виду

$$y = C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

где

$$C_3 = C_1 \cos C_2, \quad C_4 = C_1 \sin C_2.$$

§ 496. Линейное уравнение второго порядка

Линейным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y = R(x), \tag{1}$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ не зависят от y.

Если $R(x)=0$, то уравнение (1) называется *уравнением без правой части*[1]), если же $R(x)\neq 0$, то — *уравнением с правой частью.*

Уравнение без правой части

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y = 0 \tag{2}$$

обладает следующими свойствами.

Теорема 1. Если функция $\varphi_1(x)$ есть решение уравнения (2), то функция $C_1\varphi_1(x)$ (C_1 — постоянная) — также решение.

Теорема 2. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть два решения уравнения (2), то функция $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ — также решение.

---

[1]) Линейное уравнение без правой части называют также *однородным.* Ср. сноску [1]) на стр. 716.

Следствие. Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ суть два решения уравнения (2), то $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ (C_1 и C_2 — постоянные) — тоже решение.

Пример 1. Рассмотрим линейное уравнение без правой части

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0. \tag{3}$$

Убедившись проверкой, что функции x и $\frac{1}{x}$ являются решениями, заключаем, что функция

$$y=C_1x+C_2\frac{1}{x}$$

также есть решение уравнения (3).

Замечание 1. Решение $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ *не всегда будет общим*. Так, функции $\varphi_1(x)=3x$ и $\varphi_2(x)=5x$ суть решения уравнений (3), функция $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)=(3C_1+5C_2)x$ — также решение, но не общее (две постоянные C_1, C_2 не существенны; ср. § 493, предостережение).

Замечание 2. *Решение $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ не будет общим, если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$* ***линейно зависимы***, т. е. если их можно связать соотношением

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)=0, \tag{4}$$

где хотя бы одна из постоянных a_1, a_2 отлична от нуля.

Если же решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *линейно независимы*, т. е. если соотношение (4) возможно лишь тогда, когда обе постоянные a_1, a_2 равны нулю, то функция

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$$

дает общее решение.

Пример 2. *Решения $\varphi_1(x)=3x$ и $\varphi_2(x)=5x$ уравнения* (3) линейно зависимы, ибо при $a_1=5$, $a_2=-3$, или при $a_1=10$, $a_2=-6$, или при $a_1=15$, $a_2=-9$ и т. д. получаем $a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)=0$.

Решения $\varphi_1(x)=3x$ и $\varphi_2(x)=-\frac{1}{2x}$ линейно независимы, ибо соотношение (4) возможно лишь при $a_1=a_2=0$. В соответствии с этим решение $y=3C_1x+5C_2x$ — не общее, а решение $y=3C_1x-\frac{C_2}{2x}$ — общее.

Все вышесказанное относится только к линейному *уравнению без правой части*.

Уравнение с правой частью

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y = R(x) \tag{5}$$

обладает следующим свойством.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ является одним из решений уравнения (5), то общее его решение есть

$$y = C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+f(x), \tag{6}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (2), т. е. соответствующего уравнения без правой части.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y = 8x. \tag{7}$$

Убедившись проверкой, что функция $f(x)=x^3$ является его решением, заключаем, что общее решение уравнения (7) есть (ср. пример 1)

$$y = C_1x+C_2\frac{1}{x}+x^3.$$

Теорему 3 можно сформулировать еще так: *общее решение линейного уравнения с правой частью есть сумма какого-либо частного его решения и общего решения соответствующего уравнения без правой части.*

Замечание 3. Линейное уравнение второго порядка (как с правой частью, так и без нее) приводится к квадратурам лишь в специальных случаях. Но к числу последних принадлежит особенно важный для практики случай, когда коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ оба постоянны (см. ниже §§ 497–499).

§ 497. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$y''+py'+qy = R(x), \tag{1}$$

где p и q — постоянные, а $R(x)$ зависит только от x (или является постоянной величиной), называется *линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.* Уравнение (1) всегда приводится к квадратурам. А в случае, когда $R(x)=0$ (уравнение без правой части), решение не только приводится к квадратурам, но и всегда выражается в элементарных функциях (см. § 498).

§ 498. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части

Рассмотрим уравнение

$$y''+py'+qy=0, \tag{1}$$

где p, q — постоянные. Будем искать решение вида

$$y=e^{rx}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), найдем, что число r должно удовлетворять уравнению

$$r^2+pr+q=0. \tag{3}$$

Последнее называется *характеристическим уравнением*.

Могут представиться три случая.

Случай 1. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$. Характеристическое уравнение (3) имеет два неравных действительных корня r_1, r_2 $\left(r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$.

В этом случае имеем два линейно независимых (§ 496, замечание 2) *решения*: $y=e^{r_1x}$, $y=e^{r_2x}$. Общее решение будет:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \tag{4}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$8y''+2y'-3y=0, \tag{5}$$

а также частное решение при начальных условиях $x_0=0$, $y_0=-6$, $y_0'=7$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$8r^2+2r-3=0 \tag{6}$$

имеет два неравных действительных корня:

$$r_1=\frac{1}{2}, \quad r_2=-\frac{3}{4}.$$

Функции $y=e^{\frac{1}{2}x}$, $y=e^{-\frac{3}{4}x}$ дают два линейно независимых решения. Общее решение уравнения (5) есть

$$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7}$$

Для разыскания частного решения вычисляем производную y':

$$y' = \frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}C_2e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7a}$$

Подставляя в (7) и (7а) начальные данные, получаем систему

$$-6 = C_1+C_2, \quad 7 = \frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{4}C_2.$$

Из нее находим: $C_1=2$, $C_2=-8$. Искомое частное решение есть

$$y = 2e^{\frac{1}{2}x} - 8e^{-\frac{3}{4}x}.$$

Случай 2. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$. Характеристическое уравнение имеет два равных корня $\left(r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}\right)$.

В этом случае решения $y=e^{r_1x}$, $y=e^{r_2x}$ линейно зависимы (они совпадают). Но теперь наряду с решением $y=e^{-\frac{p}{2}x}$ есть линейно независимое решение $y=xe^{-\frac{p}{2}x}$. Общее решение будет:

$$y = (C_1+C_2x)\,e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{8}$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+4y = 0 \tag{9}$$

и частное решение при начальных условиях $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $y'_0=-4$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2+4r+4 = 0$$

имеет равные корни $r_1 = r_2 = -2$. Функции $y=e^{-2x}$, $y=xe^{-2x}$ дают линейно независимые решения. Общее решение уравнения (9) есть

$$y = (C_1+C_2x)\,e^{-2x}. \tag{10}$$

Дифференцируя, находим:

$$y' = [-2C_1+C_2(1-2x)]\,e^{-2x}. \tag{10a}$$

Подставив в (10) и (10а) начальные данные, получим систему

$$0{,}5 = (C_1+0{,}5C_2)\,e^{-1}, \quad -4 = -2C_1e^{-1}.$$

Отсюда находим: $C_1=2e$, $C_2=-3e$. Искомое частное решение есть

$$y = (2e-3ex)\,e^{-2x}$$

или

$$y = (2-3x)\,e^{1-2x}.$$

Случай 3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$. Характеристическое уравнение имеет пару комплексных корней:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\beta i, \tag{11}$$

где

$$\beta = \sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

В этом случае выражения

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x} \tag{12}$$

не имеют действительных значений ни при каком действительном значении x, кроме $x=0$. Но теперь можно использовать функции

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\beta x, \quad y = e^{-\frac{p}{2}x}\sin\beta x. \tag{13}$$

Подставляя их в уравнение (1), убеждаемся, что каждая из функций (13) является решением уравнения (1).

В § 498а показано, как выводятся решения (13) из комплексных решений вида (12).

Решения (13) линейно независимы, и потому общее решение будет:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \tag{14}$$

или в ином виде

$$y = C_3e^{-\frac{p}{2}x}\sin(C_4+\beta x) \tag{14a}$$

(где $C_3\sin C_4 = C_1$, $C_3\cos C_4 = C_2$).

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''+y'+y = 0. \tag{15}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2+r+1=0 \tag{16}$$

имеет мнимые корни $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Функции

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{и} \quad y=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

дают линейно независимые решения. Общее решение уравнения (1) есть

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \tag{17}$$

или

$$y=C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(C_4+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \tag{17a}$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y''+y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2+1=0$ имеет мнимые корни $r_{1,2}=\pm i\left(\text{здесь } \beta=1,\ -\frac{p}{2}=0\right)$. Общее решение есть (ср. § 495, пример 2)

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

§ 498а. Связь между случаями 1 и 3 § 498

Частные решения вида

$$\varphi_1(x)=e^{r_1x},\quad \varphi_2(x)=e^{r_2x}\left[r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right], \tag{1}$$

которые были использованы в § 498 для случая 1, можно использовать и для случая 3, если ввести в рассмотрение комплексные числа и определить комплексную степень числа e, как это было сделано в § 409. Формулы (1) запишутся теперь так:

$$\varphi_1(x)=e^{\left(-\frac{p}{2}+\beta i\right)x},\qquad \varphi_2(x)=e^{\left(-\frac{p}{2}-\beta i\right)x}, \tag{2}$$

где $\beta\left[=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\right]$ и $-\frac{p}{2}$ — действительные числа. Выражения (2) представляют пару *комплексных* функций *действительного* аргумента x. Так как эти функции дифференцируются по обычным правилам (§ 408), то они являются решениями уравнения $y''+py'+qy=0$ также и в случае 3. Эти решения не удовлетворяют нас, так как они не являются действительными. *Но из них можно вывести и действительные решения.* В самом деле, применив формулу Эйлера (§ 410), мы можем представить решения (2) в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)&=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ \varphi_2(x)&=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).\end{aligned} \tag{3}$$

Функция $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ является решением при любых постоянных значениях C_1, C_2 (§ 496). Положив сначала $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=\frac{1}{2}$, а в другой раз $C_1=-\frac{i}{2}$, $C_2=\frac{i}{2}$, мы получим два действительных решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Они и были использованы в случае 3 § 498.

§ 499. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью

Общее решение уравнения с правой частью

$$y''+py'+qy=R(x) \tag{1}$$

получается с помощью квадратур из общего решения соответствующего уравнения без правой части

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

по общему методу, изложенному ниже в § 501. Но во многих практически важных случаях цель достигается проще следующим образом.

Надо сначала подыскать какое-либо *частное решение* $f(x)$ данного уравнения (1), затем надо *прибавить* $f(x)$ *к общему решению соответствующего уравнения* (2) *без правой части*. В сумме получится (§ 496, теорема 3) общее решение данного уравнения.

Для подыскания функции $f(x)$ пользуются следующими тремя правилами.

Правило 1. Если правая часть $R(x)$ уравнения (1) имеет вид

$$R(x)=P(x)e^{kx}, \tag{3}$$

где $P(x)$ — какой-либо многочлен степени m, и если число k не является корнем характеристического уравнения

$$r^2+pr+q=0, \tag{4}$$

то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y^*=Q(x)e^{kx}, \tag{5}$$

где $Q(x)$ — некоторый многочлен той же степени m [звездочка при y поставлена для отличия частного решения $y^*=f(x)$ уравнения (1) от общего его решения].

Коэффициенты и свободный член многочлена $Q(x)$ можно найти по методу неопределенных коэффициентов.

Замечание 1. Если множитель $P(x)$ есть постоянная величина (многочлен нулевой степени), то $Q(x)$ — тоже постоянная.

Замечание 2. Правило распространяется и на случай, когда $R(x)$ — многочлен (т. е. $k=0$). Тогда решение (5) — тоже многочлен.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y = 3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{6}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2} = 0 \tag{7}$$

имеет корни $r_1=1$, $r_2=-\frac{1}{2}$, так что общее решение соответствующего уравнения без правой части есть

$$\bar{y} = C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x} \tag{8}$$

[черточка над y поставлена для отличия общего решения уравнения (2) от общего решения y уравнения (1)].

Остается найти какое-либо частное решение y^* уравнения (6). Правая часть последнего имеет вид (3), причем $P(x)=3$ (многочлен нулевой степени) и число $k=\frac{1}{2}$ не является корнем характеристического уравнения (7). По правилу 1 уравнение (6) имеет решение вида

$$y^* = Ae^{\frac{1}{2}x} \quad (A \text{ — постоянная}). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), находим:

$$\left(\frac{1}{4}A-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A\right)e^{\frac{1}{2}x} = 3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{\frac{1}{2}x}$, получаем:

$$A = -6. \tag{11}$$

Искомое решение y^* есть

$$y^* = -6e^{\frac{1}{2}x}. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (6) есть

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 6e^{\frac{1}{2}x}. \qquad (13)$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x. \qquad (14)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, так что (при обозначениях примера 1)

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \qquad (15)$$

Правая часть уравнения (14) имеет вид (3), причем $P(x) = x^2 + 3x$ и число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Ищем решение вида

$$y^* = Ax^2 + Bx + C. \qquad (16)$$

Подставляя в (14), получаем равенство

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2C - 3B + 2A = x^2 + 3x. \qquad (17)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему

$$2A = 1, \quad 2B - 6A = 3, \quad 2C - 3B + 2A = 0, \qquad (18)$$

из которой находим: $A = \frac{1}{2}$, $B = 3$, $C = 4$, так что

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4. \qquad (19)$$

Общее решение уравнения (14) есть

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4. \qquad (20)$$

Замечание 3. Для уравнения $y'' - 3y' = x^2 + 3x$ [1]) поиски частного решения вида (16) были бы бесполезны [2]), *ибо число $k = 0$ теперь является корнем характеристического уравнения* ($r^2 - 3r = 0$). Условия правила 1 нарушены, и надо применить правило 2.

---

[1]) Оно решено ниже в примере 3.

[2]) Однако ошибки не получится: при попытке отыскать решение вида $y^* = Ax^2 + Bx + C$ мы получим вместо (17) следующее равенство:

$$-6Ax + (2A - 3B) = x^2 + 3x.$$

Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x невозможно, так как в правой части есть член второй степени, а в левой его нет. Попытка оказалась несостоятельной, но к ошибке не привела.

Правило 2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$R(x) = P(x)\,e^{kx}, \tag{21}$$

где $P(x)$ — многочлен степени m, и пусть число k является корнем характеристического уравнения $r^2+pr+q=0$. Если этот корень — однократный (т. е. один из неравных корней), то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y^* = xQ(x)\,e^{kx}, \tag{22}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени m, если же k — двукратный корень характеристического уравнения (т. е. один из двух равных корней), то уравнение (1) имеет решение вида

$$y^* = x^2Q(x)\,e^{kx}. \tag{23}$$

Замечания 1 и 2 остаются в силе.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''-3y' = x^2+3x, \tag{24}$$

а также частное решение при начальных условиях

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 3.$$

Решение. Здесь $P(x) = x^2+3x$ и число $k=0$ служит однократным корнем характеристического уравнения

$$r^2-3r = 0$$

($r_1=3$, $r_2=0$). Уравнение (24) имеет частное решение вида

$$y^* = x(Ax^2+Bx+C) = Ax^3+Bx^2+Cx. \tag{25}$$

Поступая, как в примере 2, получим систему

$$-9A=1, \qquad -6B+6A = 3, \qquad -3C+2B = 0.$$

из которой находим: $A = -\frac{1}{9}$, $B = -\frac{11}{18}$, $C = -\frac{11}{27}$, так что

$$y^* = -\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (24) есть

$$y = C_1e^{3x}+C_2-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x. \tag{27}$$

Дифференцируя, получаем:

$$y' = 3C_1e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x - \frac{11}{27}. \qquad (27a)$$

Подставляя в (27) и (27а) начальные значения, получаем систему

$$1 = C_1 + C_2, \quad 3 = 3C_1 - \frac{11}{27}.$$

Она дает: $C_1 = \frac{92}{81}$, $C_2 = -\frac{11}{81}$; искомое частное решение есть $y = \frac{92}{81}e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x - \frac{11}{81}$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = xe^x. \qquad (28)$$

Здесь $P(x) = x$ и число $k = 1$ есть двукратный корень характеристического уравнения $r^2 - 2r + 1 = 0$. Уравнение (28) имеет частное решение вида

$$y^* = x^2(Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x. \qquad (29)$$

Подставим (29) в (28); члены, содержащие x^3 и x^2, сами собой устранятся, и мы получим равенство

$$(6Ax + 2B)e^x = xe^x. \qquad (30)$$

Приравняв коэффициенты при членах с одинаковыми степенями x, получим систему $6A = 1$, $2B = 0$, так что

$$y^* = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Общее решение уравнения (28) (см. § 498, случай 2) есть

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{6}x^3e^x. \qquad (31)$$

Правило 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$R(x) = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x], \qquad (32)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2.

Возможны два случая:

1) комплексные числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения $r^2 + pr + q = 0$,

2) числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями этого уравнения [1].

---

[1]) Случай, когда лишь одно из чисел $\alpha \pm \beta i$ является корнем уравнения $r^2 + pr + q = 0$, невозможен (при действительных значениях коэффициентов p, q).

В первом случае уравнение (1) имеет решение вида

$$y^* = e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x], \tag{33}$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — многочлены, степени которых не превышают старшей из степеней m_1, m_2.

Во втором случае уравнение (1) имеет решение вида

$$y^* = xe^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x]. \tag{34}$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 10e^x \sin 2x. \tag{35}$$

Здесь $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 10$ (т. е. $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены нулевой степени), $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Комплексные числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения $r^2 + 1 = 0$. Уравнение (35) имеет частное решение вида

$$y^* = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x). \tag{36}$$

Подставляя (36) в (35), приходим к равенству

$$(-2A + 4B)\cos 2x + (-4A - 2B)\sin 2x]e^x = 10\,e^x \sin 2x \tag{37}$$

и получаем систему

$$-2A + 4B = 0, \quad -4A - 2B = 10.$$

Она дает: $A = -2$, $B = -1$, так что

$$y^* = -e^x\,(2\cos 2x + \sin 2x).$$

Общее решение уравнения (35) есть

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - e^x(2\cos 2x + \sin 2x). \tag{38}$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 4x\sin x. \tag{39}$$

Здесь $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 4x$ [старшая степень многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — первая], $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Комплексные числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения $r^2 + 1 = 0$. Уравнение (39) имеет частное решение вида

$$\begin{aligned} y^* &= x[(A_1x + B_1)\cos x + (A_2x + B_2)\sin x] = \\ &= (A_1x^2 + B_1x)\cos x + (A_2x^2 + B_2x)\sin x). \end{aligned} \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39), приходим к равенству

$$\begin{aligned} [4A_2x + (2B_2 + 2A_1)]\cos x + [-4A_1x + (-2B_1 + 2A_2)]\sin x = \\ = 4x\sin x \end{aligned} \tag{41}$$

и получаем систему

$$4A_2 = 0, \quad 2B_2 + 2A_1 = 0, \quad -4A_1 = 4, \quad -2B_1 + 2A_2 = 0.$$

Она дает: $A_1 = -1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$, так что

$$y^* = -x^2\cos x + x\sin x.$$

Общее решение уравнения (39) есть

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x(-x\cos x + \sin x). \tag{42}$$

Замечание. 4. Если в правой части уравнения (1) стоит сумма, где каждое слагаемое имеет вид (21) или (32), то уравнение (1) имеет частное решение, представляющее сумму выражений вида (5), (22), (23), (33), (34). Коэффициенты отыскиваются, как в примерах 1—6.

§ 500. Линейные уравнения любого порядка

Линейным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)}+P_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+P_n(x)\,y=R(x). \qquad (1)$$

Если $R(x)=0$, то (1) называется *уравнением без правой части* (или *однородным*), если $R(x)\neq 0$, то — *уравнением с правой частью* (или *неоднородным*).

Свойства линейных уравнений второго порядка (§§ 496—499) следующим образом распространяются на линейные уравнения высших порядков.

Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — решения уравнения без правой части

$$y^{(n)}+P_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+P_n(x)\,y=0, \qquad (2)$$

то функция

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x) \qquad (3)$$

тоже является решением. Последнее не будет общим, если решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *линейно зависимы*, т. е. связаны соотношением

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)=0, \qquad (4)$$

где из постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ хотя бы одна отлична от нуля.

Если же решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы, т. е. если равенство (4) возможно лишь тогда, когда все постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю, то (3) есть общее решение уравнения (2).

Общее решение уравнения (1) получается из какого-либо частного его решения прибавлением общего решения уравнения (2).

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами без правой части

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=0 \qquad (5)$$

решается с помощью *характеристического уравнения*

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\ldots+p_n=0. \qquad (6)$$

I. Если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения действительны и однократны, то общее решение уравнения (5) есть

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx}. \qquad (7)$$

II. Если какой-либо действительный корень r имеет кратность k ($r_1=r_2=\ldots=r_k$), то в формуле (7) соответствующие k членов заменяются слагаемым

$$(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\,e^{rx}. \qquad (8)$$

III. Если характеристическое уравнение имеет пару однократных сопряженных комплексных корней ($r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$), то соответствующая пара членов в формуле (7) заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (9)$$

IV. Если какая-либо пара сопряженных комплексных корней имеет кратность k, то соответствующие k пар членов в формуле (7) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+$$
$$+(D_1+D_2x+\ldots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]. \qquad (10)$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y^{\mathrm{V}}+y^{\mathrm{IV}}+2y'''+2y''+y'+y=0. \qquad (11)$$

Его характеристическое уравнение

$$r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0 \qquad (12)$$

имеет однократный действительный корень $r=-1$ и пару двукратных сопряженных мнимых корней $r=\pm i$. Общее решение уравнения (11) есть

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x. \qquad (13)$$

Для линейного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=R(x) \qquad (14)$$

общее решение получается с помощью квадратур из общего решения соответствующего уравнения без правой части по методу, объясненному в § 501. Но если правая часть $R(x)$ имеет вид $P(x)e^{kx}$ [$P(x)$ – многочлен], или более общий вид

$$e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x],$$

или представляет сумму членов подобного вида, то решение упрощается.

I. Пусть

$$R(x)=P(x)e^{kx}, \qquad (15)$$

где $P(x)$ – многочлен степени m. Тогда уравнение (14) имеет частное решение вида

$$y^*=Q(x)e^{kx}, \qquad (16)$$

где $Q(x)$ – многочлен степени m – при условии, что число k не является корнем характеристического уравнения (6). В противном случае уравнение (14) имеет частное решение вида

$$y^*=x^lQ(x)e^{kx}, \qquad (17)$$

где l – кратность, с какой k входит в число корней характеристического уравнения (ср § 499, правила 1, 2 и примеры 1 – 4).

II. Пусть

$$R(x)=e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x], \qquad (18)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2. Тогда уравнение (14) имеет частное решение вида

$$y^*=e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x], \qquad (19)$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ суть многочлены, степень которых не превышает старшей из степеней m_1 и m_2 – при условии, что комплексные числа $\alpha\pm\beta i$

не являются корнями характеристического уравнения (6). В противом случае уравнение имеет частное решение вида

$$y^* = x^l e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x], \tag{20}$$

где l — кратность, с какой пара корней $\alpha \pm \beta i$ входит в число корней характеристического уравнения (ср. § 499, правило 3 и примеры 5, 6).

§ 501. Метод вариации постоянных

Общее решение линейного уравнения с правой частью получается из общего решения соответствующего уравнения без правой части с помощью квадратур. Для этого можно применить следующий прием.

В общем решении уравнения без правой части заменяем все произвольные постоянные неизвестными функциями. Полученное выражение дифференцируем и попутно подчиняем неизвестные функции добавочным условиям, упрощающим вид последовательных производных. Подставляя выражение производных y', y'', y''' и т. д. в данное уравнение, получаем еще одно условие, налагаемое на неизвестные функции. Тогда оказывается возможным найти первые производные всех неизвестных функций и остается выполнить квадратуры.

Этот метод применим к линейным уравнениям любого порядка как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. В § 486 он был применен к линейному уравнению первого порядка. Здесь рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x). \tag{1}$$

Пусть общее решение соответствующего уравнения без правой части есть

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x). \tag{2}$$

Ищем общее решение уравнения (1) в виде (2), считая теперь C_1 и C_2 неизвестными функциями от x.

Дифференцируя (2), находим:

$$y' = C_1\varphi_1'(x) + C_2\varphi_2'(x) + C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x). \tag{3}$$

Вводим добавочное условие

$$C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0. \tag{4}$$

Тогда вид первой производной упрощается, и мы имеем:

$$y' = C_1\varphi_1'(x) + C_2\varphi_2'(x). \tag{5}$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$y'' = C_1\varphi_1''(x) + C_2\varphi_2''(x) + C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x). \tag{6}$$

После подстановки выражений (2), (5) и (6) в уравнение (1) все члены, содержащие C_1, взаимно уничтожатся (ибо функция $y=\varphi_1(x)$ есть решение уравнения $y''+Py'+$ $+Qy=0$); точно так же взаимно уничтожатся все члены, содержащие C_2, и мы получим еще одно условие

$$C_1'\varphi_1'(x)+C_2'\varphi_2'(x)=R(x). \tag{7}$$

Условия (4) и (7) позволяют найти выражения производных C_1', C_2', и остается выполнить квадратуры.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''+y=\operatorname{tg} x. \tag{1a}$$

Общее решение соответствующего уравнения без правой части есть

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x, \tag{2a}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Ищем решение уравнения (1a) в виде (2a), считая теперь C_1 и C_2 неизвестными функциями.

Условия (4) и (7) принимают вид

$$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0, \quad -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\operatorname{tg} x. \tag{3a}$$

Отсюда находим:

$$C_1'=-\operatorname{tg} x\sin x, \qquad C_2'=\sin x;$$

$$C_1=\int-\operatorname{tg} x\sin x\,dx+C_3, \qquad C_2=\int\sin x\,dx+C_4$$

(C_3, C_4 — постоянные). В данном случае интегрирование выполнимо в элементарных функциях. Подставляя в (2a), получаем общее решение

$$y=\left(\ln\frac{\cos x}{1+\sin x}+\sin x+C_3\right)\cos x+(-\cos x+C_4)\sin x=$$

$$=\cos x\ln\frac{\cos x}{1+\sin x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

§ 502. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, содержащих несколько неизвестных функций и их производные, причем в каждое из уравнений входит хотя бы одна производная. На практике имеют дело с такими системами, где число уравнений равно числу неизвестных.

Система называется *линейной*, если неизвестные функции и их производные входят в каждое из уравнений только в первой степени. Линейная система имеет *нормальный вид*, когда она решена относительно всех производных.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x - y + \frac{3}{2}t^2, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x - 2y + 4t + 1 \tag{2}$$

— линейная; она имеет нормальный вид.

В этом примере мы имеем *линейную систему с постоянными коэффициентами* (коэффициенты при неизвестных функциях и их производных постоянны).

Из линейной системы (присоединяя к ней уравнения, *выведенные дифференцированием*) *можно исключить все неизвестные* (*и их производные*), кроме одной. Полученное уравнение будет содержать одну неизвестную функцию и ее производную первого и более высоких порядков. Это уравнение тоже будет линейным, а если исходная система была системой с постоянными коэффициентами, то и найденное уравнение высшего порядка будет иметь постоянные коэффициенты.

Разыскав неизвестную функцию этого уравнения, подставляем ее выражение в данные уравнения и находим остальные неизвестные функции.

Пример 2. Решить линейную систему примера 1.

Решение. Чтобы исключить y и $\frac{dv}{dt}$, продифференцируем (1). Получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3t. \tag{3}$$

Из уравнения (1) находим выражение y через t, x и $\frac{dx}{dt}$; подставляя в (2), найдем выражение $\frac{dy}{dt}$ через те же величины. Подставляя это выражение в (3), получим линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 3t^2 - t - 1. \tag{4}$$

По способу § 499 находим его общее решение

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2. \tag{5}$$

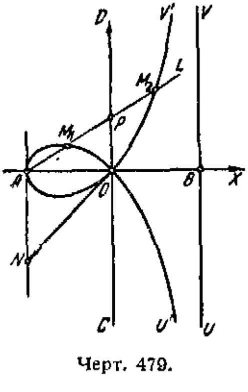
Это выражение подставляем в уравнеиие (1) н находим вторую неизвестную функцию

$$y = -\frac{dx}{dt} + x + \frac{3}{2}t^2 = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t^2 + t. \tag{6}$$

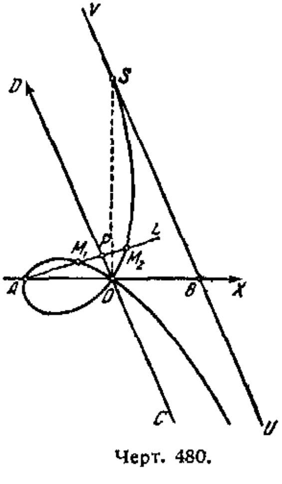
НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

§ 503. Строфоида

1. Определение и построение. *Прямая строфоида*[1]), или просто *строфоида*, определяется так: берем взаимно-перпендикулярные прямые AB, CD (черт. 479) и на одной из них точку A; через нее проводим произвольную прямую AL, пересекающую CD



Черт. 479.



Черт. 480.

в точке P. На AL откладываем отрезки PM_1, PM_2, равные OP (O – точка пересечения AB и CD). Строфоида (прямая) есть геометрическое место точек M_1, M_2.

Косая строфоида (черт. 480) строится аналогично с той разницей, что AB и CD пересекаются косоугольно.

---

[1]) От греческого «строфе́» (στροφή) – поворот.

Строфоида была рассмотрена (вероятно, впервые) Робервалем[1]) в 1645 г. под именем *птероиды*[2]). Нынешнее название введено Миди в 1849 г.

2. Стереометрическое образование. Представим себе цилиндрическую поверхность с осью CD (черт. 479) и радиусом AO. Через точку A проведем перпендикулярную к плоскости чертежа произвольную плоскость K (прямая AL — след этой плоскости). В сечении получим эллипс; его фокусы M_1, M_2 описывают прямую строфоиду.

Косая строфоида строится аналогично с той разницей, что цилиндрическая поверхность заменяется конической: ось конуса (OS на черт. 480) проходит через O перпендикулярно к AB; прямая UV, проходящая через B параллельно CD, — одна из образующих. Точки M_1, M_2 — фокусы соответствующего конического сечения; косая строфоида расположена на обеих полостях конической поверхности и проходит через вершину S последней.

3. Уравнение в декартовой системе (O — начало; ось OX направлена по лучу OB; $AO = a$, $\angle AOD = \alpha$; когда строфоида — косая, система координат — косоугольная, ось OY направлена по лучу OD):

$$y^2(x-a) - 2x^2y\cos\alpha + x^2(a+x) = 0. \qquad (1)$$

Для прямой строфоиды уравнение (1) приводится к виду

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \qquad (2)$$

Уравнение в полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho = -\frac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Рациональное параметрическое представление ($u = \operatorname{tg}\varphi$):

$$x = a\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right), \qquad y = au\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right).$$

4. Особенности формы. Точка O — узловая[3]); касательные к двум ветвям, проходящим через O, взаимно-

[1]) Роберваль — псевдоним французского ученого Г. Персонье (1602—1675) родом из деревни Роберваль. Один из основоположников метода бесконечно малых, изобретатель весов, носящих его имя.

[2]) От греческого «птерóн» (πτερόν) — крыло.

[3]) *Узловой точкой* некоторой линии называется такая ее точка, через которую эта линия проходит дважды (или более двух раз), имея здесь отличные друг от друга направления.

перпендикулярны (как для прямой, так и для косой строфоиды). Для косой строфоиды (черт. 480) прямая UV служит асимптотой (при бесконечном удалении вниз). Кроме того, UV касается косой строфоиды в точке S, равноотстоящей от A и B.

У прямой строфоиды точка касания S «уходит в бесконечность» (при удалении вверх), так что прямая UV (черт. 479) служит асимптотой для обеих ветвей.

5. Радиус кривизны в узловой точке прямой строфоиды

$$R_0 = a\sqrt{2} = ON \quad \text{(черт. 479)}.$$

6. Площади и объемы для прямой строфоиды. Площадь S_1 петли AOM_1:

$$S_1 = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Объем V_1 тела, произведенного вращением петли около оси CX:

$$V_1 = \pi a^3\left(2\ln 2 - \frac{4}{3}\right) \approx 0{,}166a^3.$$

Площадь S_2 между ветвями OU', OV' и асимптотой (эта площадь простирается в бесконечность, но имеет конечную величину)

$$S_2 = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2.$$

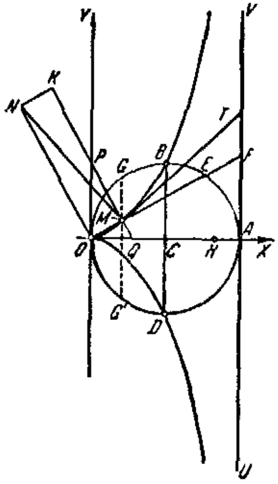
Объем тела, произведенного вращением фигуры $U'OV'VU$ около оси OX, имеет бесконечную величину.

§ 504. Циссоида Диокла

1. Определение и построение. На отрезке $OA = 2a$, как на диаметре, строим окружность C (черт. 481) и проводим через A касательную UV. Через O проводим произвольную прямую OF, пересекающую UV в точке F; эта прямая пересечет (вторично) окружность C в точке E. На прямой OF от точки F по направлению к O откладываем отрезок FM, равный хорде OE. Линия, описываемая точкой M при вращении OF около O, называется *циссоидой Диокла* — по имени греческого ученого II века до н. э., который ввел эту линию для графического решения задачи об удвоении куба[1]).

[1]) В этой задаче требуется по данному ребру куба построить ребро другого куба, вдвое большего по объему.

2. Исторические сведения. Диокл определял циссоиду с помощью иного построения. Он проводил диаметр BD, перпендикулярный к OA; точка M получалась в пересечении *хорды* OE с прямой $GG' \parallel BD$, проведенной через точку G, симметричную с E относительно BD. Поэтому *линия* Диокла располагалась целиком *внутри* круга C. Она состояла из дуг OB и OD. Если замкнуть линию BOD *полуокружностью* BAD, описанною точкой E, получается фигура, напоминающая лист *плюща. Отсюда название* «циссоида»[1]).



Черт. 481.

Примерно в 1640 г. Роберваль, *а позднее Слюз*[2]) заметили, что циссоида неограниченно продолжается и за пределы *окружности, если точка* E описывает и другую полуокружность BOD; тогда M лежит *на продолжении* хорды OE. Однако наименование «циссоида Слюза», предложенное Гюйгенсом, не утвердилось в литературе.

3. Уравнение в прямоугольной системе (O — начало, OX — ось абсцисс):

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

В полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Рациональное **параметрическое** представление ($u = \operatorname{tg} \varphi$):

$$x = \frac{2a}{1+u^2}, \quad y = \frac{2a}{u(1+u^2)}.$$

4. Особенности формы. Циссоида симметрична относительно OA, проходит через точки B, D и имеет

---

1) По-гречески «киссоида» — от «киссос» (κισσός) — плющ.

2) Р. де Слюз (1622—1685) — нидерландский ученый, последователь Декарта.

асимптоту UV ($x = 2a$); O — точка возврата[1]) (радиус кривизны $R_0 = 0$).

Построение касательной. Чтобы построить касательную к циссоиде в ее точке M, приводим $MP \perp OM$. Пусть P, Q - точки пересечения MP с прямыми OX, OY. От точки P на продолжении отрезка QP откладываем отрезок $PK = PQ$. Строим $KN \parallel MO$ и $ON \parallel QP$. Точку N пересечения KN и ON соединяем с M. Прямая MN — нормаль к циссоиде. Искомая касательная MT перпендикулярна к MN.

5. Площадь S полосы, заключенной между циссоидой и ее асимптотой (эта полоса простирается в бесконечность), конечна; она втрое больше площади производящего круга C:

$$S = 3\pi a^2.$$

6. Объем V тела вращения вышеупомянутой полосы около асимптоты UV равен объему V' тела вращения круга C около той же оси (Слюз):

$$V = V' = 2\pi^2 a^3.$$

При вращении той же полосы около оси симметрии получается тело бесконечного объема.

7. Центр тяжести H полосы между циссоидой и ее асимптотой UV делит отрезок OA в отношении $OH : HA = 5 : 1$ (Гюйгенс).

8. Связь с параболой. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы ($y^2 = 2px$) на ее касательные, есть циссоида

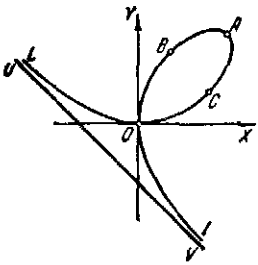
$$\left(y^2 = -\frac{x^3}{\frac{p}{2} - x}\right).$$

§ 505. Декартов лист

1. Исторические сведения. В 1638 г. Декарт, чтобы опровергнуть (неверно им понятое) правило Ферма для разыскания касательных, предложил Ферма найти касательную к линии $x^3 + y^3 = nxy$. При обычном для нас толковании отрицательных координат эта линия, которую в XVIII веке стали называть декартовым листом, состоит из петли $OBAC$ (черт. 482) и двух бесконечных

[1]) Определение точки возврата см. § 507, п. 4.

ветвей (OI, OL). Но в таком виде ее представил впервые Гюйгенс (в 1692 г.). До этого линию $x^3+y^3=nxy$ представляли в виде четырех лепестков (один из них $OBAC$), симметрично расположенных в четырех координатных углах. Поэтому ее называли «цветком жасмина».



Черт. 482.

2. Уравнение декартова листа обычно записывают в виде

$$x^3+y^3=3axy. \qquad (1)$$

Коэффициент $3a$ выражает диагональ квадрата, сторона которого равна наибольшей хорде OA петли, так что

$$OA=\frac{3a}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Уравнение в полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}. \qquad (3)$$

Рациональное параметрическое представление ($u=\operatorname{tg}\varphi$):

$$x=\frac{3au}{1+u^3}, \quad y=\frac{3au^2}{1+u^3}. \qquad (4)$$

Особенности формы. Точка O — узловая. Касательные, проходящие через O, совпадают с осями координат. Прямая OA ($y=x$) есть ось симметрии. Точка $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, наиболее удаленная от узловой точки, называется *вершиной*. Прямая UV ($x+y+a=0$) — асимптота обеих бесконечных ветвей.

3. Уравнение относительно оси симметрии. Если ось симметрии OA принять за ось абсцисс, направив последнюю от узла O (начала координат) к асимптоте UV (черт. 483), то декартов лист представится уравнением

$$y=\pm x\sqrt{\frac{l+x}{l-3x}}, \qquad (5)$$

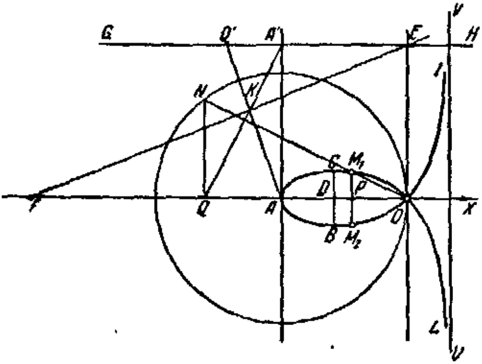
где $l=\frac{3a}{\sqrt{2}}=OA$.

Соответствующее уравнение в полярной системе:

$$\rho = \frac{l(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{3\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Рациональное параметрическое представление ($u = \operatorname{tg}\varphi$):

$$x = l\frac{u^2-1}{3u^2+1}, \quad y = l\frac{u(u^2-1)}{3u^2+1}.$$



Черт. 483.

4. Радиус кривизны: в вершине $R_A = \frac{3a}{8\sqrt{2}} = \frac{l}{8}$; в узловой точке $R_O = \frac{3a}{2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

5. Площадь S_1 петли и площадь S_2 (бесконечной) полосы между бесконечными ветвями и асимптотой равны между собой и выражаются формулой

$$S_1 = S_2 = \frac{3}{2}a^2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2.$$

6. Наибольший поперечник петли:

$$BC = \frac{2l}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx 0{,}448\, l.$$

Его расстояние от узла:

$$DO = \frac{l}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577\, l.$$

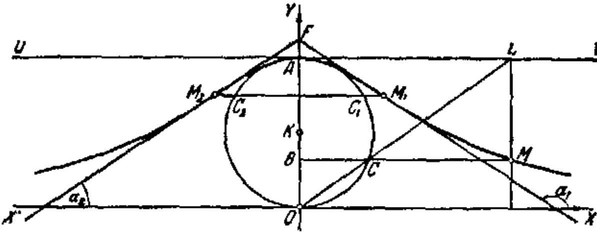
7. Построение. Чтобы построить декартов лист с диаметром петли l, проведем окружность A радиуса $AO=l$ и какую-либо прямую GH, параллельную AO. Далее проведем прямые AA' и OE, перпендикулярные к AO, и отметим точки A', E их пересечения с GH. Наконец, отложим на луче OA отрезок $OF=3OA$ и проведем прямую FE. Теперь искомая линия строится по точкам следующим образом.

Через O проводим любую прямую ON и через точку N, где эта прямая пересекает (вторично) окружность, проводим $NQ \parallel AA'$). Точку Q, где NQ пересекает прямую OF, соединяем с A' и отмечаем точку K, где QA' пересекает FE. Проводим прямую AK до пересечения с прямой GH в точке Q'. Наконец, откладываем на прямой OA отрезок OP, равный и равнонаправленный с отрезком $A'Q'$. Прямая M_1M_2, проведенная через P параллельно AA', пересечет прямую ON в точке M_1. Эта точка (а также точка M_2, симметричная с ней относительно AO), принадлежит искомой линии.

Когда точка N, исходя из O, описывает окружность A против часовой стрелки, точка M_1 описывает траекторию $LOCABOI$.

§ 506. Верзьера Аньези

1. Определение. Пусть на отрезке $OA=a$ (черт. 484), как на диаметре, построена окружность и пусть



Черт. 484.

полухорда BC продолжена до точки M, определяемой из пропорции

$$BM:BC=OA:OB.$$

Когда точка C описывает окружность OC_1C_2, точка M описывает линию, называемую *верзьерой Аньези* — по имени итальянского ученого Марии-Гаэтаны Аньези (1718—1799), которая рассматривала эту линию в руководстве по высшей математике (1748), пользовавшемся в свое время широким распространением.

2. Построение. М. Аньези указала следующее простое построение верзьеры. Пусть L — точка пересечения прямой OC с прямой UV, касающейся данной окружности в точке A (*вершина* верзьеры). Проводим прямые $LM \parallel AO$ и $CB \parallel AL$. Точка пересечения M прямых LM и CB принадлежит верзьере. При построении полезно учесть особенности формы верзьеры (см. ниже).

3. Уравнение (O — начало; касательная $X'X$ к производящей окружности в точке O — ось абсцисс):

$$y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$$

($a = OA$ — диаметр производящей окружности).

4. Особенности формы. Диаметр OA — ось симметрии верзьеры. Верзьера располагается целиком по одну сторону от прямой $X'X$. Последняя является асимптотой верзьеры. Верзьера обладает двумя точками перегиба $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. Они строятся по вышеуказанному способу, если точку C совместить с одной из точек C_1, C_2 $\left(\breve{AC_1} = \breve{AC_2} = \frac{\pi}{3}\right)$. Углы α_1, α_2, составляемые касательными M_1F, M_2F с осью $X'X$ находятся по формуле $\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \mp\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Для построения касательных M_1F, M_2F достаточно отложить отрезок $AF = \frac{a}{8}$ на продолжении диаметра OA.

В вершине A центр кривизны K верзьеры совпадает с центром производящей окружности, так что радиус кривизны $R_A = AK = \frac{a}{2}$. Поэтому вблизи вершины A верзьера практически сливается с окружностью.

5. Площадь S бесконечной полосы между верзьерой и ее асимптотой равна учетверенной площади производящего круга: $S = \pi a^2$ (ср. § 327, пример 4).

6. Объем V тела вращения верзьеры около асимптоты равен удвоенному объему V_1 тела вращения производящего круга около той же оси:

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{2}, \quad V_1 = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

Тело вращения верзьеры около оси симметрии имеет бесконечный объем.

7. Исторические сведения. Линия, заданная уравнением $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$, впервые встречается у Ферма, который в 30-х годах XVII века нашел площадь, ограниченную дугой этой линии, двумя ординатами и осью абсцисс (задача эта тогда представляла значительные трудности, так как методы интегрирования были еще мало разработаны). Построение верзьеры и ряд ее свойств были указаны итальянским ученым Гвидо Гранди в 1718 г. Ему принадлежит и термин «верзьера» (versiera); это слово, не смущаясь его двусмысленностью (по-итальянски оно означает «ведьма»), Гранди произвел от термина *sinus versus* (*«обращенный синус»): в эпоху Гранди отрезок BC именовался синусом дуги OC*, а отрезок *BA* — обращенным синусом. Курьезное название «локон Аньези», встречающееся в некоторых нынешних руководствах, не имеет, по-видимому, никаких исторических оснований.

§ 507. Конхоида Никомеда

1. Исторические сведения. Никомед, древнегреческий ученый, жил в 250—150 гг. до н. э. Линию, названную им конхоидой, по сходству ее с раковиной[1]) (*PAQ* на черт. 485) он ввел для графического решения задачи о разделении данного угла α на три равные части (*трисекция угла*).

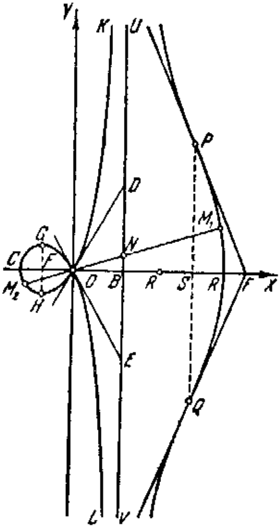
Как мы теперь знаем, эта задача решается с помощью линейки и циркуля только при специальном подборе угла α $\left(\text{например, при } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Так, задача о трисекции угла $\alpha = \frac{\pi}{3}$ неразрешима, если пользоваться только линейкой и циркулем, т. е. если строить только прямые и окружности. Однако задача решается, если привлечь еще иные линии, — в частности конхоиду. Для ее построения Никомед сконструировал специальный инструмент (конхоидограф).

2. Определение и построение. Даны: точка O (*полюс*), прямая UV (*основание*) и отрезок l. Из полюса O (черт. 485) проводим произвольную прямую ON, пересекающую основание в точке N. На прямой ON откладываем

---

1) Конхе (κογχή) — раковина.

в обе стороны от N отрезки $NM_1 = NM_2 = l$. Геометрическое место точек M_1, M_2 мы теперь называем *конхоидой Никомеда*. Линия, описываемая точкой, лежащей на продолжении отрезка ON за точку N (точка M_1 на черт. 485) называется *внешней ветвью* конхоиды; линия, описываемая другой точкой (M_2 на черт. 485), — *внутренней ветвью*.



Черт. 485.

Замечание. Сам Никомед (а также позднейшие авторы вплоть до конца XVII в.) именовал конхоидой линию, называемую сейчас внешней ветвью. Внутренняя ветвь рассматривалась как особая линия и называлась «второй», «третьей» или «четвертой» конхоидой в зависимости от особенностей ее формы (см. ниже) [1].

3. Уравнение (начало — в полюсе O; ось абсцисс направлена по лучу OB, точка B — проекция полюса на основание):

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = l^2x^2, \qquad (1)$$

где $a\,(=\mp OB)$ есть расстояние полюса от основания.

Строго говоря, это уравнение представляет фигуру, состоящую из двух ветвей конхоиды и полюса O, который может и не принадлежать определенному выше геометрическому месту (см. ниже черт. 487).

Уравнение в полярной системе (O — полюс; OX — полярная ось):

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + l, \qquad (2)$$

где φ меняется от какого-либо значения φ_0 до $\varphi_0 + 2\pi$. При этом точка $M(\rho, \varphi)$ описывает обе ветви конхоиды. При прохождении φ через значение $\frac{\pi}{2}$ точка M скачком

[1] Ни внешняя, ни внутренняя ветвь, взятая в отдельности, не представляется *алгебраическим* уравнением.

переходит с внешней ветви на внутреннюю («уходит в бесконечность» по направлению «вверх», а появляется «снизу»). Аналогично совершается переход при $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ с внутренней ветви на внешнюю[1]).

В отличие от (1) уравнение (2) представляет фигуру, содержащую только те точки, которые удовлетворяют определению конхоиды.

Параметрические уравнения:

$$x = a + l\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{tg}\varphi + l\sin\varphi. \tag{3}$$

4. Особенности формы. Конхоида симметрична относительно прямой OB; последняя пересекает конхоиду помимо точки O в двух точках A, C (*вершины*). Основание UV — асимптота как для внутренней, так и для внешней ветви. Форма конхоиды (внутренней ее ветви) существенно зависит от соотношения между отрезками $a\,(=OB)$ и $l\,(=BA)$.

1) Когда $l:a>1$ (черт. 485), внутренняя ветвь имеет петлю (OCM_2); точка O - узловая.

Угловой коэффициент касательных OD, OE в узловой точке:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{a}.$$

Для построения касательных в точке O достаточно засечь на основании UV точки D, E дугами радиуса l из центра O.

Наибольший поперечник GH петли:

$$GH = 2\,(la^{1/3} - al^{1/3}):(l^{2/3} + a^{2/3})^{1/2}. \tag{4}$$

Ему соответствует абсцисса $x_G = OF = (l^2a)^{1/3} - l$ и полярный угол φ_G, определяемый формулой $\cos\varphi_G = -(a:l)^{1/3}$. На черт. 485, где $l:a=2$, имеем

$$GM \approx 1{,}11a,\ x_G \approx -0{,}59a,\ \cos\varphi_G = -\sqrt[3]{0{,}5},\ \varphi_G \approx 142^\circ 30'.$$

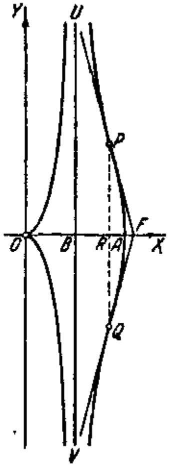
---

[1]) Полярный радиус ρ в уравнении (2) принимает как положительные, так и отрицательные значения (см. § 73, замечание 2). Во избежание этого вместо уравнения (2) можно пользоваться уравнением $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$. Однако в случае $l>a$ (черт. 485) положительность величины ρ на внутренней ветви достигается за счет того, что при переходе точки M_2 через узловую точку ее полярный угол φ совершает скачок на $\pm\pi$. Вследствие этого область изменения угла φ состоит из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ и из некоторой части промежутка $\left(+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right)$. Кроме того, при одних значениях φ надо брать перед l оба знака $\pm$, а при других — только знак плюс.

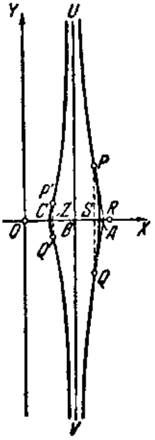
2) Когда $l:a=1$, петля внутренней ветви стягивается к полюсу O и превращается в точку возврата[1]) (черт. 486), касательная в этой точке совпадает с OX.

3) Когда $l:a<1$, внутренняя ветвь не проходит через полюс O (черт. 487); последний является изолированной точкой[2]) линии (1).

5. Точки перегиба. На внешней ветви — две точки перегиба PQ (черт. 485—487). На внутренней ветви точки



Черт. 486.



Черт. 487.

перегиба (P', Q' на черт. 487) имеются лишь в том случае, когда полюс является изолированной точкой. Абсциссу x_1 пары точек P, Q и абсциссу x_2 пары точек P', Q' можно найти из уравнения

$$x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0. \qquad (5)$$

1) При $l:a>1$ (черт. 485) уравнение (5) имеет единственный корень x_1; он заключен между $a\sqrt{3}\,(=OR)$ и $a+l$

---

[1]) *Точкой возврата* некоторой линии называется такая ее точка, где направление движения вдоль данной линии скачкообразно меняется на противоположное.

[2]) Точка, входящая в состав некоторого геометрического места, называется *изолированной* (по отношению к этому геометрическому месту), если из нее, как из центра, можно описать окружность, внутри которой не содержится других точек данного геометрического места.

($=OA$) и тем ближе к $a\sqrt{3}$, чем меньше $l:a$ разнится от 1. Так, при $l:a=2$ (черт. 485) уравнение (5) имеет вид $\left(\frac{x}{a}\right)^3-3\left(\frac{x}{a}\right)-6=0$. Корень x_1 заключен между $a\sqrt{3}$ и $3a$. Используя эти границы и применив (дважды) формулы § 291, найдем

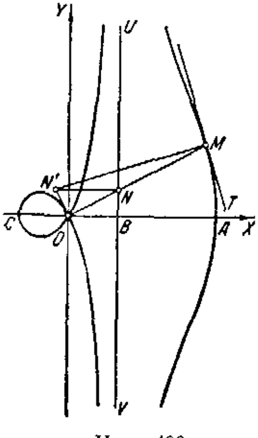
$$x_1 \approx 2{,}35a\,(=OS).$$

2) При $l:a=1$ (черт. 486) уравнение (5) принимает вид $x^3-3a^2x=0$. Оно имеет три действительных корня $x_1=a\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=-a\sqrt{3}$. Первый дает абсциссу OR точек перегиба P, Q; второму соответствует точка возврата O; третьему не соответствует никакая точка конхоиды.

3) При $l:a<1$ (черт. 487) уравнение (5) имеет три действительных корня, из которых первый $x_1(=OS)$ заключен между $a\,(=OB)$ и $a\sqrt{3}\,(=OR)$; он не превосходит также и отрезка $a+l\,(=OA)$. Второй корень $x_2\,(=OZ)$ заключен между $a-l\,(=OC)$ и a (оба корня тем ближе к a, чем меньше $l:a$ разнится от нуля). Третий корень x_3 отрицательный. Корень x_1 дает абсциссу точек P, Q; корень x_2 — абсциссу точек P', Q'. Корню x_3 не соответствует никакая точка конхоиды. Так, при $l:a=0{,}5$ (черт. 487) имеем уравнение

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3-3\left(\frac{x}{a}\right)+1{,}5=0.$$

Между a и $a+l=1{,}5a$ лежит корень $x_1\approx 1{,}38a\,(=OS)$, дающий точки перегиба P, Q. Между $a-l=0{,}5a$ и a лежит корень $x_2\approx 0{,}57a\,(=OZ)$; он дает точки P', Q'. Третий корень ($x_3\approx -1{,}9a$) отрицательный.



Черт. 488.

6. Свойство нормали. Нормаль конхоиды в ее точке M (черт. 488) проходит через точку N' пересечения двух прямых, одна из которых есть перпендикуляр к OM, проведенный через полюс O, а другая — перпендикуляр к основанию UV, проведенный через точку N, где UV пересекается с OM.

7. Построение касательной. Чтобы построить касательную к конхоиде в ее точке M, соединяем последнюю с полюсом O. Через точку N пересечения прямых OM, UV проводим прямую $NN' \perp UV$, а через полюс O — прямую $ON' \perp OM$. Точку N' пересечения этих прямых соединяем с M. Прямая $N'M$ будет нормалью к конхоиде. Проведя $MT \perp N'M$, получим искомую касательную.

8. Радиусы кривизны в точках A, C, O:

$$R_A = \frac{(l+a)^2}{l}, \quad R_C = \frac{(l-a)^2}{l}, \quad R_O = \frac{l\sqrt{l^2-a^2}}{2a}.$$

Так, при $l=2a$ (черт. 485)

$$R_A = 4{,}5a, \quad R_C = 0{,}5a, \quad R_O = a\sqrt{3}.$$

9. Площадь между асимптотой и одной из ветвей конхоиды (внешней или внутренней) бесконечна.

Площадь S петли:

$$S = a\sqrt{l^2-a^2} - 2al \ln\frac{l+\sqrt{l^2-a^2}}{a} + l^2 \arccos\frac{a}{l}.$$

Так, при $l=2a$ (черт. 485)

$$S = a^2\left[\sqrt{3} - 4\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{4}{3}\pi\right] \approx 0{,}65a^2.$$

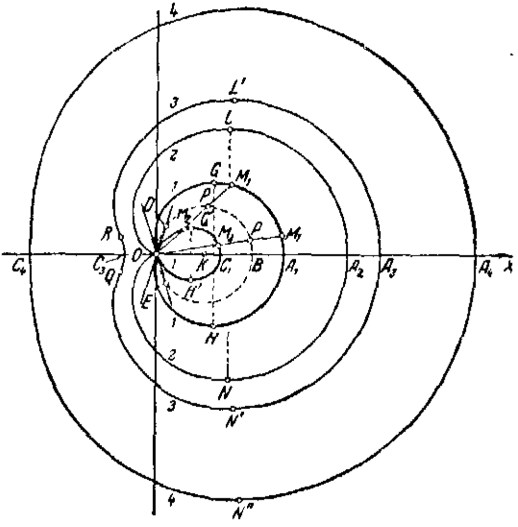
10. Обобщенные конхоиды. Взяв вместо прямой линии UV какую-либо кривую L, а в остальном полностью сохранив определение конхоиды Никомеда, получим новую линию, называемую *конхоидой линии L относительно полюса O*.

К числу обобщенных конхоид принадлежит, в частности, улитка Паскаля (см. § 508).

§ 508. Улитка Паскаля; кардиоида

1. Определение и построение. Даны: точка O (*полюс*), окружность K диаметра $OB=a$ (черт. 489), проходящая через полюс (*основная окружность*; она показана на чертеже пунктиром), и отрезок l. Из полюса O проводим произвольную прямую OP. От точки P, где прямая OP вторично пересекает окружность, откладываем в обе стороны от P отрезки $PM_1 = PM_2 = l$. Геометриче-

ское место точек M_1, M_2 (жирная линия на черт. 489) называется *улиткой Паскаля* — в честь Этьена Паскаля (1588—1651), отца знаменитого французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662).



Черт. 489.

Термин «улитка Паскаля» предложен Робервалем, современником и другом Паскаля. Роберваль рассматривал эту линию как один из видов обобщенной конхоиды (см. § 507).

2. Уравнение (начало — в полюсе O; ось OX направлена по лучу OB):

$$(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2). \tag{1}$$

Строго говоря, это уравнение представляет фигуру, состоящую из улитки Паскаля и полюса O, который может и не принадлежать определенному выше геометрическому месту (такой случай имеет место для линий *3* и *4* на черт. 489).

Уравнение в полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho = a\cos\varphi + l, \tag{2}$$

где φ меняется от какого-либо значения φ_0 до $\varphi_0 + 2\pi$ [1]).

В отличие от (1) это уравнение представляет фигуру, содержащую только те точки, которые удовлетворяют определению улитки Паскаля.

Параметрические уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^2\varphi + l\cos\varphi, \\ y &= a\sin\varphi\cos\varphi + l\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рациональное параметрическое представление $\left(u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}[(l+a)+u^2(l-a)], \\ y &= \frac{2u}{(1+u^2)^2}[(l+a)+u^2(l-a)]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. Особенности формы. Улитка Паскаля симметрична относительно прямой OB. Эта прямая (*ось улитки*) пересекает улитку: 1) в точке O (если последняя принадлежит улитке); 2) в двух точках A, C (*вершины*). Форма линии зависит от соотношения между отрезками $a\ (=OB)$ и $l\ (=AB=BC)$.

1) Когда $l:a<1$ (линия *1* жирная; для нее $l:a=1:3$) улитка Паскаля пересекает сама себя в узловой точке O

$$\left(\rho_{1,2}=0,\quad \cos\varphi_{1,2} = -\frac{l}{a},\quad \sin\varphi_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{a}\right),$$

образуя две петли: внешнюю OHA_1GO и внутреннюю $OH'G_1G\,O$. Угловой коэффициент касательных OD, OE в узловой точке:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}\left(=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$

Для построения касательных достаточно провести хорды OD, OE длины l в окружности K. Наиболее удаленным от

---

[1]) При $l<a$ (жирная линия на черт. 489) полярный радиус ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Во избежание этого можно пользоваться уравнением $\rho = l \pm a\cos\varphi$. Но при этом возникают неудобства, аналогичные с отмеченными в сноске к п. 3 § 507.

оси точкам G, H внешней петли отвечает значение

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a} \ (\approx 0{,}62);$$

наиболее удаленным точкам G', H' внутренней петли — значение

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a} \ (\approx 0{,}80)^{1)}.$$

Соответствующее значение полярного радиуса:

$$\rho_{G'} = a\cos\varphi_{G'} + l = \frac{-\sqrt{l^2+8a^2}+3l}{4} \ (\approx -0{,}45a).$$

2) Когда $l:a=1$ (линия 2 на черт. 489), внутренняя петля стягивается к полюсу и превращается в точку возврата, где движение по направлению луча OX сменяется движением в противоположном направлении. Наиболее удаленным от оси точкам L, N отвечают значения

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \rho = \frac{3}{2}a; \quad x = \frac{3}{4}a, \quad y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a.$$

Линия 2 называется *кардиоидой*, т. е. «сердцеобразной» (термин введен Кастиллоном в 1741 г.). Она изображена отдельно на черт. 490.

3) Когда $1<l:a<2$ (линия 3; для нее $l:a=4:3$), улитка Паскаля — замкнутая линия без самопересечения; оторвавшись от полюса, она заключает его внутри себя. Наиболее удаленным от оси точкам L', N' отвечает значение $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}$ $\left(=\dfrac{\sqrt{22}-2}{6} \approx 0{,}45\right)$. Лишившись точки возврата, улитка приобретает взамен точки перегиба R, Q, которым отвечает значение $\cos\varphi_R = -\dfrac{2a^2+l^2}{3al}$. Угол ROQ $(=2\pi-2\varphi_R)$, под которым отрезок RQ виден из полюса, по мере возрастания $l:a$ сначала возрастает от нуля до $2\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $(\approx 39°40')$; этому значению соответствует $l:a=\sqrt{2}$. При дальнейшем увеличении $l:a$ угол ROQ убывает, стремясь к нулю при $l:a\to 2$.

4) При $l:a=2$ точки перегиба, сливаясь с вершиной C, пропадают (причем кривизна в точке C становится рав-

---

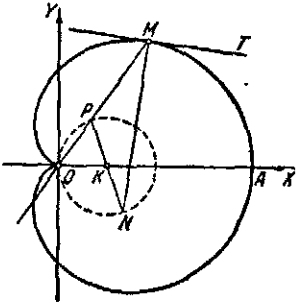
1) Таким образом, полярным углом точки G' является не угол XOG', а угол между OX и лучом, *противоположным* лучу OG' (см. § 73, замечание 2).

ной нулю). Улитка приобретает овальную форму и сохраняет ее при всех значениях $l:a>2$ (линия 4; для нее $l:a=7:3$). Наиболее удаленным от оси точкам L'', N'' отвечает значение

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\left(=\frac{1}{3}\right).$$

4. Свойство нормали. Нормаль улитки Паскаля в ее точке M (черт. 490) проходит через точку N основной окружности K, диаметрально противоположную той точке P, где OM пересекается с основной окружностью.

5. Построение касательной. Чтобы провести касательную к улитке Паскаля в ее точке M, соединяем последнюю с полюсом O. Точку N основной окружности K, диаметрально противоположную точке P, соединяем с M. Прямая MN будет нормалью к улитке. Проводя $MT \perp MN$, получим искомую касательную.



Черт. 490.

6. Радиус кривизны в точках A, C, O:

$$R_A = \frac{(l+a)^2}{l+2a}, \quad R_C = \frac{(l-a)^2}{|l-2a|}, \quad R_O = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-l^2}.$$

Последнее выражение предполагает, что $l \leqslant a$ (при $l>a$ точка O обособлена от улитки). В частности, для кардиоиды ($l=a$; точки O и C совпадают):

$$R_A = \frac{4}{3}a, \quad R_C = R_O = 0.$$

7. Площади. Площадь S, описываемая полярным радиусом улитки при полном обороте:

$$S = \left(\frac{1}{2}a^2+l^2\right)\pi \tag{5}$$

(Роберваль).

В случае отсутствия петли ($l \geqslant a$) величина S выражает площадь, ограниченную улиткой. При наличии петли имеет место равенство

$$S = S_1 + S_2,$$

где S_1 — площадь, ограниченная внешней петлей (со включением площади внутренней петли), S_2 — площадь одной внутренней петли; по отдельности площади S_1, S_2 выражаются так:

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}a^2+l^2\right)\varphi_1+\frac{3}{2}l\sqrt{a^2-l^2}, \tag{5a}$$

где $\varphi_1 = \arccos\left(-\frac{l}{a}\right)$;

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}a^2+l^2\right)\varphi_2-\frac{3}{2}l\sqrt{a^2-l^2}, \tag{5б}$$

где $\varphi_2 = \arccos\frac{l}{a}$.

Для кардиоиды

$$S\,(=S_1) = \frac{3}{2}\pi a^2,$$

т. е. *площадь кардиоиды равна шестикратной площади основного круга.*

8. Длина дуги улитки Паскаля в общем случае не выражается через элементарные функции. Для кардиоиды длина s дуги, отсчитываемой от вершины A ($\varphi=0$):

$$s = 4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Длина всей кардиоиды составляет $8a$, т. е. равна восьмикратному диаметру основного круга.

9. Связь с окружностью. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных на касательные к окружности радиуса r с центром B из какой-либо точки O, есть улитка Паскаля. Если точка O лежит в плоскости окружности B, то полюсом улитки является O, основная окружность строится на отрезке $OB=a$, как на диаметре; постоянный отрезок l, откладываемый на полярном луче, равен радиусу r окружности B.

Когда точка O лежит на окружности B, улитка Паскаля является кардиоидой.

§ 509. Линия Кассини

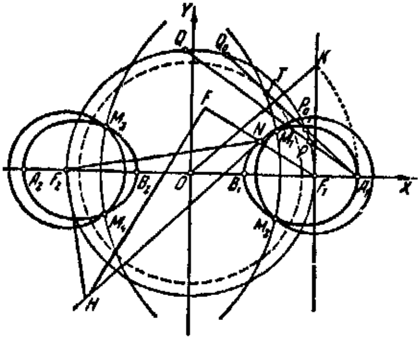
1. Определение. *Линией Кассини* называется геометрическое место точек M, для которых произведение $MF_1\cdot MF_2$ расстояний до концов данного отрезка $F_1F_2=2c$ равно квадрату данного отрезка a:

$$MF_1\cdot MF_2 = a^2.$$

Точки F_1, F_2 называются *фокусами*; прямая F_1F_2 называется *осью* линии Кассини; середина O отрезка F_1F_2 — *центром*.

2. Исторические сведения. Знаменитый астроном Джиованни Доменико (Жан Доменик) Кассини (1625—1712) полагал, что линия, носящая теперь его имя, может точнее представить орбиту Земли, чем эллипс. Об этом стало известно в 1749 г. из публикации Жака Кассини-сына (тоже выдающегося астронома). Хотя гипотеза Кассини и не оправдалась, но введенная им линия стала предметом многочисленных исследований. Ее часто называют *овалом Кассини*, хотя на самом деле она не всегда овальна [1]) (см. ниже).

3. Построение. На $F_1F_2=2c$, как на диаметре (черт. 491), строим окружность O. На ее касательной F_1K берем отрезок $F_1K=a$. Отложив на оси F_1F_2 от точки O отрезки OA_1 и OA_2, равные OK, получим точки A_1, A_2 линии Кассини, наиболее удаленные от центра ($OA_1 = OA_2 = \sqrt{c^2+a^2}$).



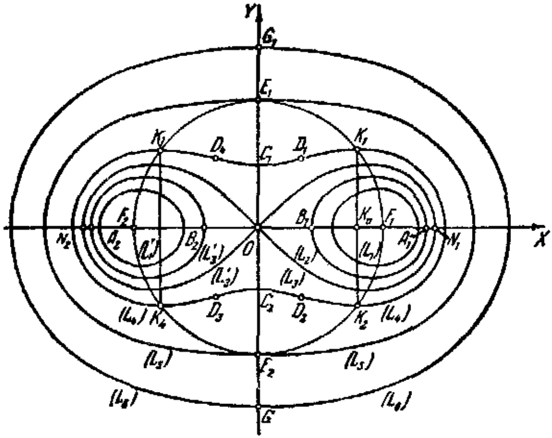
Черт. 491.

Если $a < c$, как на черт. 491, то дополнительно строим окружность радиуса a с центром в O (на черт. 491 она проведена пунктиром) и проводим к ней из A_1 касательную A_1T. В пересечении с основной окружностью O (c)

[1]) *Овалом* называется плоская замкнутая кривая, обладающая тем свойством, что прямая линия может иметь с ней не более двух общих точек. Овальная линия не может иметь ни точек перегиба, ни точек возврата, ни узловых точек.

получим точки P_0, Q_0. От одного из фокусов, скажем, от F_1, отложим по направлению к O отрезки $F_1B_1 = A_1P_0$ и $F_1B_2 = A_1Q_0$. Получим точки B_1, B_2, наименее удаленные от центра ($OB_1 = OB_2 = \sqrt{c^2 - a^2}$).

Если же $a \geqslant c$, то наименее удаленные точки C_1, C_2 (черт. 492) лежат на оси симметрии OY отрезка F_1F_2 на расстоянии $F_1C_1 = F_2C_1 = a$ от фокусов F_1, F_2 ($OC_1 = OC_2 = \sqrt{a^2 - c^2}$).



Черт. 492.

Точки A_1, A_2 и B_1, B_2 (или C_1, C_2) назовем *вершинами* линии Кассини.

Через точку A_1 (или A_2) проводим (черт. 491) произвольную секущую A_1PQ основной окружности $O(c)$, причем в случае $a < c$ ограничиваемся теми секущими, которые пересекают также дополнительную окружность $O(a)$. Из фокуса F_1, как из центра, описываем окружность радиуса $r = A_1P$, а из F_2 — окружность радиуса $r' = A_1Q$. Их точки пересечения M_1, M_2 принадлежат линии Кассини. Меняя ролями точки F_1 и F_2, получим еще пару точек M_3, M_4. Искомая линия есть геометрическое место точек M_1, M_2, M_3, M_4.

4. Уравнение (O — начало; F_2F_1 — ось абсцисс):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \qquad (1)$$

Уравнение в полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2 \cos 2\varphi + c^4 - a^4 = 0 \tag{2}$$

или

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi}. \tag{3}$$

Двойной знак берется, когда $a < c$. В противном случае берем только знак плюс (иначе ρ будет мнимым).

5. Особенности формы. Линия Кассини симметрична относительно прямых OX и OY и, значит, относительно точки O.

При $a < c$ линия Кассини состоит из пары обособленных овалов. (На черт. 492 пара овалов L_1, L_1' соответствует значению $a = 0{,}8c$; пара L_2, L_2' — значению $a = 0{,}9c$.) При $a > c$ это замкнутая кривая (при $a = 1{,}1c$ — линия L_4, при $a = c\sqrt{2}$ — линия L_5, при $a = c\sqrt{3}$ — линия L_6). В граничном случае $a = c$ линия Кассини есть лемниската L_3 (ср. определение лемнискаты). Когда a, возрастая, стремится к c, вершины A_1, A_2 стремятся к совпадению с вершинами N_1, N_2 лемнискаты, а вершины B_1, B_2 — с узловой точкой O; при этом правый овал превращается в правую петлю лемнискаты, а левый — в левую.

При дальнейшем возрастании отрезка a, когда он превышает c, но меньше $c\sqrt{2}$ ($c < a < c\sqrt{2}$), линия Кассини (L_4 на черт. 492) приобретает четыре симметрично расположенные точки перегиба D_1, D_2, D_3, D_4; будучи замкнутой, она, однако, не является овалом [1]). Кривизна в вершинах C_1, C_2 бесконечно велика при бесконечной малости $a - c$. Когда же a, возрастая, стремится к $c\sqrt{2}$, кривизна в точках C_1, C_2 стремится к нулю.

Граничная линия Кассини, отвечающая соотношению $a = c\sqrt{2}$ (L_5 на черт. 492), и все остальные линии ($a > c\sqrt{2}$) являются овалами. Но граничный овал имеет нулевую кривизну в вершинах E_1, E_2 (в этих точках попарно сливаются точки перегиба линии L_4, а в точках перегиба кривизна всегда равна нулю).

6. Наибольший поперечник. При $a \geqslant c\sqrt{2}$, т. е. для всех овалов, объемлющих граничный овал L_5, наибольший поперечник $G_1G_2 = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ лежит на оси OY. Всякая же линия Кассини, лежащая внутри

---

[1]) Некоторые прямые, как, например, прямая D_1D_4, пересекают линию Кассини в четырех точках.

гравичного овала (как объемлемая лемнискатой, так и объемлющая ее), имеет два наибольших поперечника $K_1K_2 = K_3K_4 = \frac{a^2}{2c}$. Они расположены симметрично относительно OY и отстоят от центра O на расстояние

$$OK_0 = \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}.$$

Концы их K_1, K_2, K_3, K_4 лежат на основной окружности O. Последняя является геометрическим местом тех точек, в которых касательные к линиям Кассини параллельны оси OX. Каждая такая касательная является «двойной», т. е. она касается линии Кассини в двух точках K_1, K_3, симметричных относительно OY.

7. Радиус кривизны:

$$R = \frac{2a^2\rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4} = \frac{a^2\rho}{\rho^2 + c^2\cos 2\varphi}. \tag{4}$$

В частности, в вершинах A ($\rho = \sqrt{c^2+a^2}$, $\varphi = 0$), B ($\rho = \sqrt{c^2-a^2}$, $\varphi = 0$), $C\left(\rho = \sqrt{a^2-c^2},\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$R_A = \frac{a^2\sqrt{c^2+a^2}}{2c^2+a^2}, \quad R_B = \frac{a^2\sqrt{c^2-a^2}}{2c^2-a^2}, \quad R_C = \frac{a^2\sqrt{a^2-c^2}}{|a^2-2c^2|}.$$

8. Точки перегиба. Полярные координаты точек перегиба D_1, D_2, D_3, D_4 определяются по формулам

$$\rho_D = \sqrt[4]{\frac{a^4-c^4}{3}}, \quad \cos 2\varphi_D = -\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a^4}{c^4}-1\right)}. \tag{5}$$

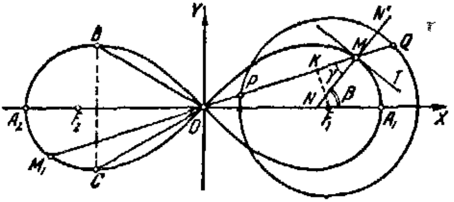
Геометрическое место точек перегиба есть лемниската с вершинами E_1, E_2 (на чертеже не изображена).

9. Построение касательной. Чтобы построить касательную к линии Кассини в ее точке N (черт. 491), продолжим отрезок F_1N за точку N, на расстояние $NF = NF_1$. Через точки F и F_2 проведем прямые FH и F_2H, соответственно перпендикулярные к F_1N и F_2N. Точку их пересечения H соединим с N. Прямая NH есть искомая касательная.

Если прямые FH, F_2H пересекаются в недоступной точке, то отрезки NF, NF_2 можно пропорционально уменьшить.

§ 510. Лемниската Бернулли

1. Исторические сведения. В 1694 г. Яков Бернулли[1]) в работе, посвященной теории приливов и отливов, использовал в качестве вспомогательного средства линию, которую он задает уравнением $x^2+y^2 = a\sqrt{x^2-y^2}$. Он отмечает сходство этой линии (черт. 493) с цифрой 8



Черт. 493.

и с узлообразной повязкой, которую он именует «лемниском» [2]). Отсюда название *лемниската*. Лемниската получила широкую известность в 1718 г., когда итальянский математик Джулио Карло Фаньяно (1682—1766) установил, что интеграл, представляющий длину дуги лемнискаты, не выражается через элементарные функции, и тем не менее лемнискату можно разделить (с помощью линейки и циркуля) на n равных дуг при условии, что $n=2^m$ или $3\cdot2^m$ или $5\cdot2^m$, где m — любое целое положительное число.

Лемниската есть частный вид линии Кассини (§ 509, п. 6) Однако, хотя линии Кассини получили всеобщую известность с 1749 г., тождественность «восьмерки Кассини» с лемнискатой Бернулли была установлена лишь в 1806 г. (итальянским математиком Саладини).

2. Определение. Лемниската есть геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до концов данного отрезка $F_1F_2=2c$ равно c^2. Точки F_1, F_2 называются *фокусами* лемнискаты; прямая F_1F_2 — ее *осью*.

---

[1]) Яков Бернулли (1654—1705) — выдающийся швейцарский ученый, ученик и сотрудник Лейбница в разработке исчисления бесконечно малых и его приложений. Основоположник теории вероятностей, где он сформулировал и доказал теорему, носящую его имя («закон больших чисел»).

[2]) λημνίσκος по-гречески — шерстяная повязка.

3. Уравнение (начало O — середина отрезка F_1F_2; ось OX направлена по F_2F_1):

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2). \qquad (1)$$

Уравнение в **полярной** системе (O — полюс, OX — полярная ось):

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi. \qquad (2)$$

Угол φ изменяется в промежутках $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Рациональное параметрическое представление:

$$x = c\sqrt{2}\,\frac{u+u^3}{1+u^4}, \quad y = c\sqrt{2}\,\frac{u-u^3}{1+u^4} \; (-\infty < u < +\infty), \qquad (3)$$

где параметр u связан с φ соотношением $u^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$.

4. Построение. Можно применить общий способ построения линий Кассини, но нижеизложенный способ (Маклорена) и проще и лучше. Строим (черт. 493) окружность радиуса $\frac{c}{\sqrt{2}}$ с центром в точке F_1 (или F_2). Проводим произвольную секущую OPQ и откладываем на этой прямой в обе стороны от точки O отрезки OM и OM_1, равные хорде PQ. Точка M опишет одну из петель лемнискаты, точка M_1 — другую.

5. Особенности формы. Лемниската имеет две оси симметрии: прямую F_1F_2 (OX) и прямую $OY \perp OX$. Точка O — узловая; обе ветви имеют здесь перегиб. Касательные в этой точке составляют с осью OX углы $\pm\frac{\pi}{4}$. Точки A_1, A_2 лемнискаты, наиболее удаленные от узла O (*вершины* лемнискаты), лежат на оси F_1F_2 на расстоянии $c\sqrt{2}$ от узла.

6. Свойство нормали. Полярный радиус OM лемнискаты образует с нормалью MN угол γ ($\angle OMN = \gamma$), вдвое больший полярного угла φ ($= \angle XOM$):

$$\gamma = \angle OMN = 2\varphi.$$

Иными словами: угол $\angle XNM = \beta$ между осью OX и вектором NN' внешней нормали лемнискаты в точке M равен утроенному полярному углу точки M:

$$\beta = 3\varphi.$$

7. Построение касательной. Чтобы построить касательную к лемнискате в ее точке M, проводим полярный радиус OM и строим $\angle OMN = 2\angle XOM$. Перпендикуляр MT к прямой MN есть искомая касательная.

8. Наибольший поперечник $BC = \frac{1}{2} F_1F_2 = c$ (черт. 493) служит основанием равностороннего треугольника с вершиной O.

9. Радиус кривизны

$$R = \frac{2c^2}{3\rho}.$$

10. Площадь S полярного сектора A_1OM:

$$S(\varphi) = \frac{c^2}{2}\sin 2\varphi = OK \cdot F_1K$$

(K – проекция фокуса F_1 на полярный радиус OM).

Иными словами: перпендикуляр F_1K, опущенный из фокуса лемнискаты на произвольный полярный радиус OM, делит площадь сектора A_1OM пополам.

Площадь каждой петли лемнискаты $2S\left(\frac{\pi}{4}\right) = c^2$.

11. Связь с гиперболой. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра O равносторонней гиперболы с вершинами A_1, A_2 на ее касательные, есть лемниската с теми же вершинами.

§ 511. Архимедова спираль [1]

1. Построение. Чтобы построить архимедову спираль с данным параметром k, проводим из центра O (черт. 494) произвольную окружность, например окружность радиуса $ON = k$ [2]).

Делим ее точками b_0, b_1, b_2, b_3, ... [3]) на произвольное число n равных дуг (мы взяли $n = 12$). На луче Ob_0 откладываем отрезок $OA_1 = 2\pi k$ (шаг спирали). Делим его на такое же число равных частей. На лучах Ob_1, Ob_2, Ob_3, ... откладываем отрезки $OD_1 = \frac{1}{n} OA_1$; $OD_2 = \frac{2}{n} OA_1$, ...

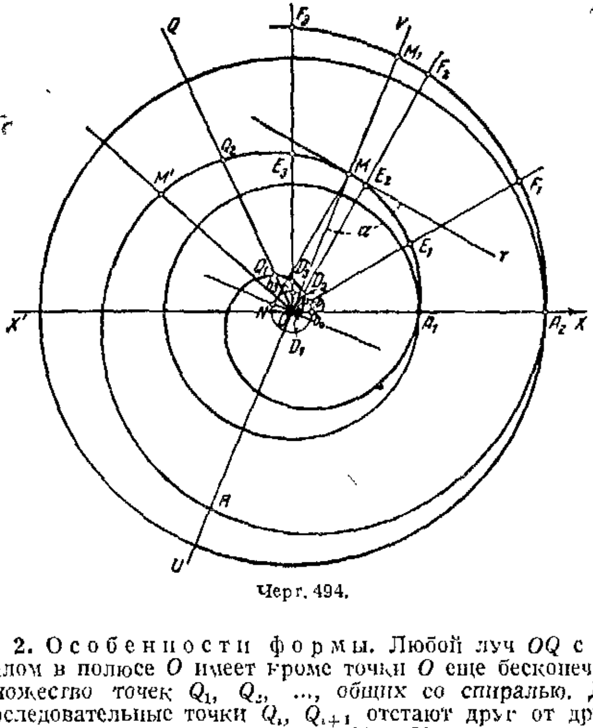
---

[1]) Предварительно прочитайте § 75 под таким же названием (см. стр. 113).

[2]) Для построения удобнее взять окружность большего радиуса; мы взяли окружность радиуса k лишь потому, что она нам понадобится в дальнейшем.

[3]) Точка b_2 на чертеже не отмечена, так как она лежит внутри кружка, отмечающего точку D_2 (расстояние b_2D_2 составляет около 5 % радиуса k).

Получаем точки D_1, D_2, D_3, ... первого витка спирали. Точки E_1, E_2, E_3, ... второго витка получим, отложив на продолжениях отрезков OD_1, OD_2, OD_3, ... отрезки D_1E_1, D_2E_2, ..., равные шагу OA_1. Аналогично получим точки следующих витков.



Черт. 494.

2. Особенности формы. Любой луч OQ с началом в полюсе O имеет кроме точки O еще бесконечное множество точек Q_1, Q_2, ..., общих со спиралью. Две последовательные точки Q_i, Q_{i+1} отстают друг от друга на расстояние, равное шагу a $(=2k\pi)$. Касательная к спирали в точке O совпадает с начальной прямой OX (это полезно учесть при построении спирали). Касательная MT в произвольной точке M спирали получается из прямой MO поворотом последней на (острый) угол $OMT=\alpha$, для которого

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{OM}{k}=\frac{\rho}{k}=\varphi.$$

При $\rho \to \infty$ угол α стремится к 90° и дуга спирали вблизи точки M все более походит на дугу окружности.

3. Свойство нормали. Нормаль MN, проведенная через точку M архимедовой спирали с шагом a, пересекает прямую ON, перпендикулярную к полярному радиусу OM, в точке N, отстоящей от O на расстоянии $ON = \frac{a}{2\pi}$ $(= |k|)$.

4. Построение касательной. Чтобы построить касательную в точке M архимедовой спирали (см. черт. 494), поворачиваем луч OM около точки O на угол $+\frac{\pi}{2}$. Точку N, где повернутый луч пересекает окружность радиуса k с центром в O, соединяем с M. Прямая MN — нормаль к спирали. Построив $MT \perp MN$, получаем искомую касательную. Касательная к левой спирали (см. § 75 и черт 106) строится аналогично с тем отличием, что луч OM поворачивается на угол $-\frac{\pi}{2}$.

5. Площадь S сектора MOM' (если полярные углы точек M, M' разнятся не более чем на 2π):

$$S = \frac{1}{6}\,\omega\,(\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2), \qquad (1)$$

где $\rho = OM$, $\rho' = OM'$, $\omega = \angle MOM'$.

Геометрически: сектор архимедовой спирали по площади равен среднему арифметическому из трех круговых секторов, у которых угол тот же, что у сектора MOM', причем один из радиусов равен полярному радиусу OM, другой — полярному радиусу OM', третий — среднему пропорциональному $\sqrt{OM \cdot OM'}$ между ними.

6. Площади витков. Формула (1) при $\rho = 0$, $\rho' = a$, $\omega = 2\pi$ дает площадь S_1 фигуры $OD_2D_3Q_1A_1O$ (черт. 494), ограниченной первым витком спирали и отрезком OA_1:

$$S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 = \frac{1}{3}S_1', \qquad (2)$$

где S_1' — площадь круга радиуса OA_1.

Площадь S_2 фигуры $A_1E_3HA_2A_1$, ограниченной вторым витком и отрезком A_2A_1 ($\rho = a$, $\rho' = 2a$, $\omega = 2\pi$):

$$S_2 = \frac{7}{3}\pi a^2 = \frac{7}{12}S_2', \qquad (3)$$

где S_2' — площадь круга радиуса OA_2.

Вообще площадь S_n, ограниченная n-м витком спирали и отрезком OA_n, выражается так:

$$S_n = \frac{n^3-(n-1)^3}{3}\pi a^2 = \frac{n^3-(n-1)^3}{3n^2}S'_n, \tag{4}$$

где S'_n — площадь круга радиуса OA_n.

7. Площади колец. Назовем *первым кольцом* архимедовой спирали фигуру, образуемую движением отрезка полярного луча между первым и вторым завитками при повороте полярного луча из начального положения на 360°. Чтобы обойти эту фигуру вдоль ее периметра, надо пройти отрезок A_1O, затем первый виток OQ_1A_1 спирали, затем отрезок A_1A_2 и, наконец, второй завиток $A_2HQ_2A_1$ (попятным движением).

Второе кольцо аналогично образуется отрезком полярного луча между вторым и третьим завитками. Оно ограничено: 1) отрезком A_2A_1, 2) вторым витком, 3) отрезком A_2A_3, 4) третьим витком (проходимым вспять).

Таким же образом определяются третье, четвертое и т. д. кольца.

Площадь F_n n-го кольца выражается так:

$$F_n = S_{n+1} - S_n = 6nS_1.$$

Здесь $S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2$ есть площадь первого завитка (нулевого кольца).

Свойства, изложенные в этом и предыдущих пунктах, были открыты Архимедом.

8. Длина l дуги OM

$$\begin{aligned} l &= \frac{k}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\rho\sqrt{\rho^2+k^2}}{k} + k\ln\frac{\rho+\sqrt{\rho^2+k^2}}{k}\right] = \\ &= \frac{1}{2}k\left[\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sc}\alpha + \ln(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{sc}\alpha)\right], \end{aligned}$$

где α — острый угол между касательной MT (черт. 494) и полярным радиусом OM, или $\alpha = \angle ONM$.

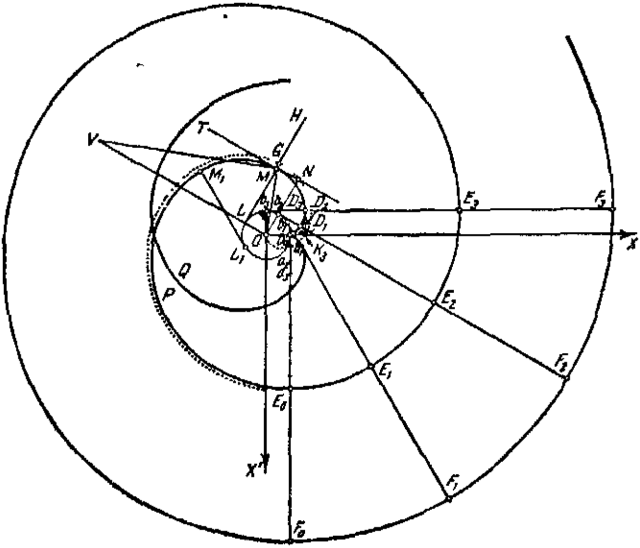
9. Радиус кривизны

$$R = \frac{(\rho^2+k^2)^{3/2}}{\rho^2+2k^2} = k\,\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2} = k\,\frac{(\operatorname{tg}^2\alpha+1)^{3/2}}{\operatorname{sc}^2\alpha+1}.$$

В начальной точке $R_0 = \frac{k}{2}$.

§ 512. Эвольвента (развертка) круга

1. Механическое образование. В близком родстве с архимедовой спиралью находится другая спираль — *эвольвента круга* (или эвольвента окружности). Это — линия, описываемая концом M (черт. 495) натянутой нити



Черт. 495.

LM, сматываемой с круглой катушки D_0LL_1 (или наматываемой на катушку; в последнем случае точка M движется в обратном направлении).

Геометрически указанное свойство выражается так:

2. Определение. Пусть точка L, исходя из начального положения D_0, многократно описывает окружность радиуса k (k — *параметр* эвольвенты круга). На касательной LH откладывается по направлению, противоположному направлению вращения, отрезок LM, равный дуге D_0L, пройденной точкой L. Эвольвента круга есть линия, описываемая точкой M. Одна и та же окружность имеет бесчисленное множество эвольвент (соответствующих всевозможным положениям начальной точки D_0).

Смотря по тому, вращается ли точка L по часовой стрелке или в противоположном направлении, получаем *правую* эвольвенту круга (D_0MP на черт. 495) или *левую* (D_0Q). Обычно две эвольвенты данного круга рассматриваются как две ветви *одной* линии.

3. Построение. Данную окружность делим на n равных дуг $D_0b_1 = b_1b_2 = b_2b_3 = \ldots = b_{n-1}D_0$. На касательной, проведенной через D_0, откладываем отрезок $D_0E_0 = 2\pi k$. Его делим на то же число равных частей:

$$D_0a_1 = a_1a_2 = \ldots = a_{n-1}E_0.$$

На касательных, проведенных через последовательные точки b_1, b_2, b_3, ..., откладываем (по направлению, противоположному смещению точки касания) отрезки b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3, ..., соответственно равные отрезкам D_0a_1, D_0a_2, D_0a_3, ... Получим точки D_1, D_2, D_3, ... первого витка D_0PE_0 эвольвенты круга. Точки E_1, E_2, E_3, ... второго витка получим, отложив на продолжениях отрезков b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3, ... отрезки D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, ..., равные D_0E_0. Аналогично получим точки следующих витков.

4. Особенности формы. Эвольвента окружности, в силу общих свойств эвольвенты любой линии (ср. § 347, а также § 346), обладает следующими свойствами.

а) Эвольвента окружности пересекает все касательные этой окружности под прямым углом. В частности, эвольвента составляет в начальной точке D_0 прямой угол с касательной D_0F_0.

б) Обратно, нормаль MH к эвольвенте служит касательной к окружности. При этом точка касания L является центром кривизны эвольвенты, так что отрезок ML есть радиус кривизны эвольвенты:

$$R = ML. \tag{1}$$

В частности, в начальной точке D_0 радиус кривизны эвольвенты равен нулю:

$$R_0 = 0. \tag{2}$$

в) Радиус кривизны R эвольвенты возрастает по мере удаления точки M от начальной точки; его приращение $R_1 - R = M_1L_1 - ML$ равно длине соответствующей дуги $\smile{LL_1}$ окружности:

$$R_1 - R = \overset{\frown}{LL_1}. \tag{3}$$

В частности, на участке D_0M эвольвенты приращение радиуса кривизны равно $R_M - R_0 = R_M$, причем

$$R_M = \overset{\frown}{D_0L} = k\alpha, \tag{4}$$

где $\alpha = \angle D_0OL$ — угол поворота радиуса OL от начального положения OD_0.

г) По построению эвольвента не проникает внутрь круга O. Поэтому при прохождении точки M через начальную точку D_0 направление движения меняется на противоположное, т. е. D_0 — точка возврата эвольвенты.

5. Связь с архимедовой спиралью. Сопоставим правую (левую) ветвь эвольвенты круга с правой (левой) архимедовой спиралью с тем же параметром $k = OD_0$ (т. е. с шагом $2\pi a = D_0E_0$), что и эвольвента круга. Пусть эта спираль (пунктирная линия на черт. 495) исходит из центра O данной окружности по направлению луча OX', получаемого поворотом начального радиуса OD_0 на угол $-90°$ $(+90°)$. Точка G, описывающая спираль, неограниченно приближается к эвольвенте: кратчайшее расстояние точки G до эвольвенты (оно измеряется отрезком GM нормали LH эвольвенты) уже в конце 1-го витка составляет лишь 1% от шага спирали.

С другой стороны, полярный радиус ON спирали, составляющий угол $-90°$ $(+90°)$ с радиусом OL, имеет ту же длину $k\alpha$, что отрезок LM. Это значит, что *основание перпендикуляра, опущенного из центра O на касательную MT эвольвенты, описывает архимедову спираль.*

6. Полярное уравнение эвольвенты окружности (полюс O — центр данной окружности; полярная ось OX направлена по начальному радиусу OD_0):

$$\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2}}{k} - \arccos\frac{k}{\rho}, \tag{5}$$

где k — радиус окружности.

7. Параметрические уравнения

$$x = k(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha); \quad y = k(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha), \tag{6}$$

где $\alpha = \angle D_0OL$.

8. Длина s дуги $\overset{\frown}{D_0M}$:

$$s = \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{(k\alpha)^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{OL}. \tag{7}$$

Чтобы получить отрезок той же длины, проведем прямую $MV \perp OM$ до пересечения в точке V с продолжением радиуса OL. Половина отрезка OV по длине равна дуге $\overset{\frown}{D_0M}$:

$$s = \overset{\frown}{D_0M} = \frac{1}{2} OV. \tag{8}$$

9. П л о щ а д ь S с е к т о р а D_0OM, описанного полярным радиусом, а также площадь S_1 криволинейного треугольника LMD_0, основанием которого служит отрезок LM, а боковыми сторонами — дуга D_0L окружности и дуга D_0M эвольвенты, втрое меньше площади треугольника OMV (построенного в пункте 8):

$$S = S_1 = \frac{1}{3} \text{ пл. } OMV = \frac{1}{6} k^2a^3. \tag{9}$$

10. Н а т у р а л ь н о е у р а в н е н и е э в о л ь в е н т ы к р у г а. *Натуральным уравнением* линии называется уравнение, связывающее длину s ее дуги $\overset{\frown}{M_0M}$, отсчитываемой от некоторой начальной точки M_0, и радиус кривизны R в точке M. Натуральное уравнение эвольвенты круга

$$R^2 = 2ks; \tag{10}$$

оно получается из (4) и (7) исключением α.

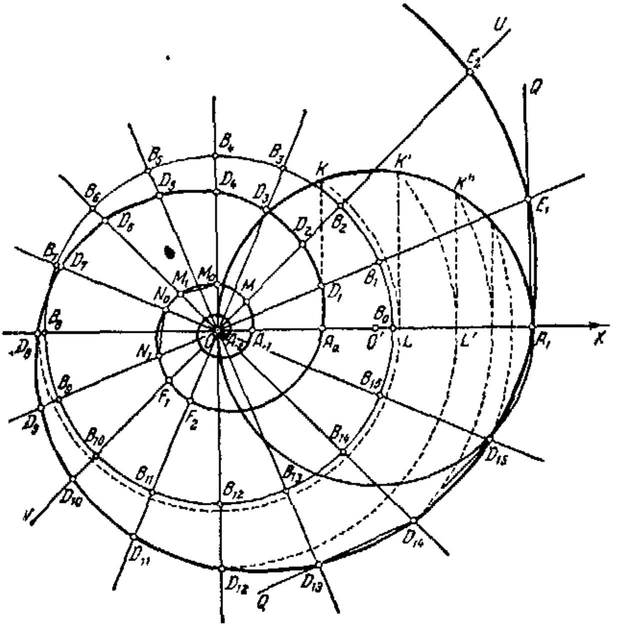
11. К и н е м а т и ч е с к о е с в о й с т в о. На языке кинематики натуральное уравнение (10) выражает следующее свойство: если дуга эвольвенты круга катится (без скольжения) по прямой, то центр кривизны L, соответствующий точке касания, движется по параболе с параметром k.

12. И с т о р и ч е с к и е с в е д е н и я. Эвольвенты различных линий впервые были изучены Гюйгенсом в его *знаменитой работе о часовом маятнике (1673 г.)* (ср. § 514, п. 17). Основные свойства эвольвенты круга найдены французским ученым ла Гиром (1640—1718) и изложены в его работе 1706 г. Свойство п. 5 найдено Клеро (1713—1765) в 1740 г. Свойство 9, а также кинематическое истолкование натурального уравнения (любой линии) указаны Маннгеймом в 1859 г.

§ 513. Логарифмическая спираль

1. О п р е д е л е н и е. Пусть прямая UV (черт. 496) равномерно вращается около неподвижной точки O (*полюс*), а точка M движется вдоль UV, удаляясь от O со скоростью, пропорциональной расстоянию OM. Линия, описываемая точкой M, называется *логарифмической спиралью*.

2. Основное геометрическое свойство. Повороту прямой UV из любого ее положения на данный угол ω $(= \angle M_0OM_1)$ отвечает одно и то же отношение $OM_1 : OM_0$ полярных радиусов. Иначе говоря: если пара точек M_0, M_1 логарифмической спирали видна из полюса



Черт. 496.

под тем же углом, что и другая пара точек N_0, N_1 той же спирали, то треугольники OM_0M_1 и ON_0N_1 подобны.

Отношение q конечного полярного радиуса (OA_1) к начальному (OA_0) при повороте прямой UV на угол $+2\pi$ будем называть *коэффициентом роста* логарифмической спирали.

3. Правая и левая спирали. Если удаление точки M от полюса O сопровождается вращением прямой

UV против часовой стрелки, то логарифмическая спираль называется *правой*; в противном случае — *левой*. Для правой спирали коэффициент роста $q>1$; для левой $q<1$. При $q=1$ спираль вырождается в окружность.

Правую и левую спирали, у которых коэффициенты роста в произведении дают 1, можно совместить, но для этого надо лицевую сторону одной из них сделать оборотной.

4. Построение. Чтобы построить правую логарифмическую спираль с данным коэффициентом роста q [1]), делим какую-либо окружность с центром O на $n=2^k$ равных частей точками B_0, B_1, B_2, $B_3, \ldots$, следующими друг за другом в направлении, противоположном ходу часовой стрелки [2]). Для определенности положим $n=2^4=16$. На луче OB_0 берем произвольную точку A_0 и откладываем отрезок $OA_1=qOA_0$. На отрезке OA_1, как на диаметре, строим окружность O' и проводим $A_0K\perp OA_1$ до пересечения с этой окружностью в точке K. Окружность радиуса OK пересечет луч OB_8 в точке D_8, принадлежащей искомой спирали; та же окружность пересечет луч OA_1 в некоторой точке L. Проводим $LK'\perp OA_1$ до пересечения с окружностью O' в точке K'. Окружность радиуса OK' пересечет луч OB_{12} в точке D_{12}, принадлежащей искомой спирали, а луч OA_1 — в некоторой точке L'. Через нее опять проводим $L'K''\perp OA_1$ и т. д. Таким образом получим точки D_{14} и D_{15}.

Бесчисленное множество других точек спирали, лежащих на прямых B_0B_8, B_1B_9 и т. д., можно построить следующим образом. При точке D_{14} строим угол $\angle OD_{14}Q$, равный углу $OD_{15}D_{14}$; в пересечении с лучом OB_{13} получаем точку D_{13} искомой спирали. При точке A_1 строим $\angle OA_1Q'=\angle OD_{15}A_1$; в пересечении с лучом OB_1 получим точку E_1 и т. д.

5. Уравнение в полярных координатах (полюс совпадает с полюсом спирали; полярная ось проведена через произвольно взятую точку M_0 спирали):

$$\rho=\rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}, \tag{I}$$

где $\rho_0=OM_0$ — полярный радиус точки M_0, а q — коэффициент роста.

---

[1]) Так же строится и левая спираль с коэффициентом роста $\frac{1}{q}$.

[2]) При построении левой спирали точки B_0, B_1, B_2, B_3, ... следуют друг за другом по ходу часовой стрелки.

Пример. Спираль, построенная на черт. 496 ($q=3$), представляется уравнением

$$\rho = \rho_0 \, 3^{\frac{\varphi}{2\pi}}.$$

Если за полярную ось принять луч OB_0, то $\rho_0 = OA_0$. Полагая, в частности, $\varphi = \pi$, получаем $\rho = \rho_0 \sqrt{3} = OD_8$; при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $\rho = \rho_0 \sqrt[4]{3} = OD_4$ и т. д.

Обычно уравнение (1) записывают в виде

$$\rho = \rho_0 \, e^{k\varphi}, \tag{2}$$

где k — параметр, выражающийся через коэффициент роста q так:

$$k = \frac{\ln q}{2\pi}. \tag{3}$$

Обратно

$$q = e^{2k\pi}. \tag{4}$$

Геометрический смысл параметра k прочитывается из соотношения

$$k = \operatorname{ctg} \alpha, \tag{5}$$

где $\alpha = \angle OMT$ — угол между прямой OM и касательной MT (см. ниже черт. 497).

Для правых спиралей параметр k имеет положительные значения, для левых — отрицательные.

6. Особенности формы. При неограниченном количестве оборотов прямой UV против часовой стрелки (по часовой стрелке) точка M, описывающая правую (левую) спираль, неограниченно удаляется от полюса и описывает бесконечное количество витков. При неограниченном количестве оборотов в противоположном направлении точка M неограниченно приближается к полюсу O, но ни при каком положении прямой UV не совпадает с O. Таким образом спираль делает бесконечное множество витков также около полюса. Однако длина дуги, описываемой при этом точкой M и отсчитываемой от некоторого начального положения A_0 точки M, хотя и возрастает, но не безгранично. Она стремится к некоторому пределу s, который называют *длиной дуги* OA_0. Название это условно, так как точка O, строго говоря, не принадлежит логарифмической спирали.

7. Касательная и длина дуги. Угол α ($=\angle OMT$), на который надо повернуть прямую UV около точки M логарифмической спирали (черт. 497), чтобы эта прямая совпала с касательной MT, одинаков для всех точек спирали. Отрезок MT касательной от точки касания до пересечения с прямой OW, проведенной через полюс O перпендикулярно к полярному радиусу OM, имеет ту же длину s, что дуга спирали от точки M до полюса O:

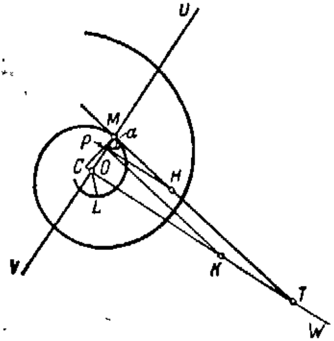
$$s = \breve{OM} = MT = \frac{\rho}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

где ρ — полярный радиус OM.

Длина $\bar{s}$ любой дуги LM логарифмической спирали:

$$\bar{s} = \breve{LM} = \breve{OM} - \breve{OL} = \frac{\rho_M - \rho_L}{\cos\alpha}, \tag{7}$$

т. е. длина дуги $\breve{LM}$ пропорциональна разности полярных радиусов в ее концах. Чтобы построить отрезок той же длины, достаточно отложить на большем радиусе OM отрезок OP, равный меньшему радиусу OL, и провести через P прямую PH, перпендикулярную к OM. Она пересечет касательную MT в некоторой точке H. Отрезок MH — искомый.



Черт. 497.

Угол α выражается через коэффициент роста q формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ln q}{2\pi}. \tag{8}$$

Для спирали, изображенной на черт. 496, где $q = OA_1 : OA_0 = 3$, имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ln 3}{2\pi} \approx 0{,}1748,$$

$$\alpha \approx 80°5'.$$

8. Характеристический треугольник и секториальная площадь. Площадь, описываемая полярным радиусом OL (черт. 497), когда точка L, исходя из некоторого начального положения M, неограниченно приближается по логарифмической спирали к полюсу O, стремится к *конечному* пределу S (*секториальная площадь*). Секториальная площадь в точке M вдвое меньше площади *характеристического треугольника* OMT, образованного полярным радиусом OM, перпендикулярной к нему прямой OW и касательной MT:

$$S = \frac{1}{2} S_{OMT} = \frac{1}{4} \rho^2 \operatorname{tg} \alpha, \tag{9}$$

где ρ — полярный радиус точки M.

Площадь $\bar{S}$ любого сектора LOM (предполагаем, что OM — больший радиус и что $\angle LOM$ по абсолютной величине не превосходит 2π) вдвое меньше площади трапеции $PMTK$ (черт. 497), которая будет отсечена от характеристического треугольника OMT, если на OM отложить отрезок $OP = OL$ и провести $PK \parallel MT$:

$$\bar{S} = S_{PMTK} = \frac{1}{4} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \operatorname{tg} \alpha, \tag{10}$$

где ρ_1, ρ_2 — полярные радиусы точек L, M.

9. Радиус и центр кривизны. Центр кривизны C, соответствующий точке M логарифмической спирали (черт. 497), лежит в пересечении нормали MC, проведенной через M, с прямой OW, проведенной через полюс перпендикулярно к полярному радиусу OM. Радиус кривизны

$$R = \frac{\rho}{\sin \alpha}. \tag{11}$$

Это равенство усматривается из треугольника COM.

10. Эволюта. Геометрическое место центров кривизны C (эволюта) логарифмической спирали есть логарифмическая спираль, получаемая из исходной спирали поворотом около полюса на угол

$$\omega = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \alpha, \tag{12}$$

где n — любое целое число. Так, если исходная спираль пересекает полярные радиусы под углом $\alpha = 45°$, то она совмещается со своей эволютой при повороте около полюса на угол $\omega = \frac{\pi}{2}$, или $\omega = 5\frac{\pi}{2}$, или $\omega = -3\frac{\pi}{2}$ и т. д. В частности, существует бесчисленное множество логарифмических спиралей, которые сами являются своими эволютами. Это те спирали, для которых угол α удовлетворяет одному из уравнений

$$\operatorname{tg}\alpha \ln \operatorname{tg}\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

где n — целое число.

11. Натуральное уравнение (т. е. уравнение, связывающее длину дуги и радиус кривизны; ср § 512, п. 10)

$$R = ks \; (= s \operatorname{ctg}\alpha). \tag{13}$$

Вытекает из (6) и (11); усматривается из треугольника CMT.

12. Кинематическое свойство. На языке кинематики уравнение (13) выражает следующее свойство: если дуга логарифмической спирали катится (без скольжения) по прямой AB, то центр кривизны, соответствующий точке касания, движется по прямой, наклоненной к AB под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

13. Картографическое свойство. Сферическая линия, пересекающая меридианы под постоянным углом α (эта линия называется *локсодромой*[1])), проектируется из полюса сферы P на плоскость экватора логарифмической спиралью; полюс последней находится в центре сферы. Меридианы проектируются при этом лучами, направленными по полярным радиусам спирали; эти лучи пересекаются спиралью под тем же углом α, под которым локсодрома пересекает меридианы.

14. Исторические сведения. В 1638 г. Декарт нашел, что спираль, дуга которой растет пропорционально полярному радиусу, обладает тем свойством, что ее касательная образует постоянный угол с полярным радиусом. Примерно в то же время Торричелли независимо от Декарта и гораздо более подробно изучил свойства «геометрической спирали» — так он назвал линию, которую определил с помощью построения, изложенного выше в п. 3. Торричелли доказал геометрически свойства, изложенные в пп. 6 и 7. Яковом Бернулли в 1692 г. были открыты свойства пп. 8—11 и ряд других свойств «изумительной спирали» (spira mirabilis). Название «логарифмическая спираль» (угол между полярными радиусами про-

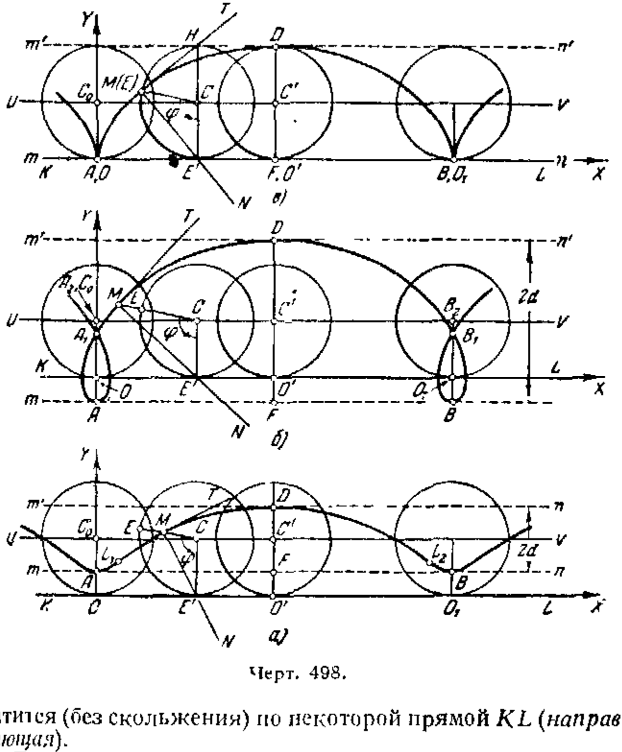
---

[1]) Что значит «кособежная» — от греческих слов «локсос» — косой и «дромос» — бег. Корабль, сохраняющий неизменный курс, движется по локсодроме.

порционален логарифму их отношения) дано Вариньоном в 1704 г. Позднее логарифмическая спираль была предметом многочисленных исследований. Так, кинематическое ее свойство (п. 12) найдено Е. Каталаном в 1856 г.

§ 514. Циклоиды

1. Определение. *Циклоидой* называется линия, которую описывает точка (черт. 498), закрепленная в плоскости круга (*производящий круг*), когда этот круг



Черт. 498.

катится (без скольжения) по некоторой прямой KL (*направляющая*).

Если точка M, описывающая циклоиду, взята внутри производящего круга (т. е. расстояние $CM = d$ от центра C

меньше радиуса r), то циклоида называется *укороченной* (черт. 498, *а*); если вне круга (т. е. $d > r$), — *удлиненной* (черт. 498, *б*); если же точка M лежит на окружности (т. е. $d = r$), то линия, описываемая этой точкой, называется *обыкновенной циклоидой* (черт. 498, *в*) или чаще просто циклоидой (ср. § 253).

Пример. Когда вагон движется по рельсам, внутренняя точка колеса описывает укороченную циклоиду, точка на ободе — удлиненную, а точка окружности колеса — обыкновенную циклоиду.

Начальной точкой циклоиды (A на черт. 498, *а* — *в*) называется такая ее точка, которая лежит на прямой (C_0O), соединяющей центр C_0 производящего круга с точкой его опоры (O), и расположена по ту же сторону от центра C_0, что и точка опоры O. Точка B на черт. 498, *а* — *в* — тоже начальная.

Начальные точки обыкновенной циклоиды (черт. 498, *в*) лежат на направляющей и совпадают с соответствующими точками опоры производящего круга.

Вершиной циклоиды (D на черт. 498, *а* — *в*) называется такая ее точка, которая лежит на прямой $C'O'$, соединяющей центр C' производящего круга с точкой опоры O', но расположена на продолжении отрезка $C'O'$ за точку C'.

Отрезок AB, соединяющий две соседние начальные точки, называется *основанием* циклоиды; перпендикуляр DF, опущенный из вершины циклоиды на ее основание, — *высотой*. Дуга, описываемая точкой M между двумя соседними начальными точками, называется *аркой* циклоиды; прямая UV, описываемая центром C производящего круга, — *линией центров* циклоиды.

2. Построение. Чтобы построить циклоиду по радиусу r производящего круга и расстоянию d точки M, описывающей циклоиду, от центра C производящего круга, проводим сначала (черт. 499) линию центров UV. Из некоторой ее точки C_0, как из центра, проводим окружность радиуса d [1]). Один из концов ее диаметра, перпендикулярного к UV, обозначим буквой M_0. Это будет вершина искомой линии.

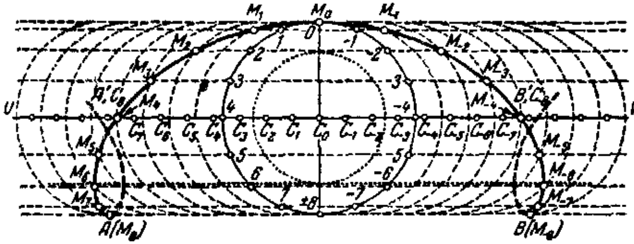
Окружность C_0 делим на четное число $2n$ равных дуг (мы взяли $2n = 16$), так чтобы точка M_0 оказалась одной из точек деления, и снабжаем точки деления пометками

[1]) В случае обыкновенной циклоиды это окружность производящего круга. Вообще же ни производящий круг, ни направляющая в описываемом построении не участвуют. На черт. 499 они показаны (точечным пунктиром) только для наглядности.

0, ± 1, ± 2, ..., $\pm n$ (точки $+n$ и $-n$ совпадают). На линии центров в обе стороны от точки C_0 откладываем отрезки C_0A', C_0B', равные полуокружности производящего круга:

$$C_0A' = C_0B' = \pi r,$$

и делим каждый из этих отрезков на n равных частей. Точки деления обозначим $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$, ..., $C_{\pm n}$, (точки C_n, C_{-n} совпадают соответственно с точками A', B'; положительным номером на прямой UV и на окружности C_0 соответствуют точки, лежащие по одну и ту же сторону



Черт. 499.

от прямой C_0M_0). Через точки *1*, *2*, *3*, ... окружности C_0 проводим прямые, параллельные линии центров (они пройдут соответственно и через точки -1, -2, -3; ...), а из точек $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$, ... проводим полуокружности радиуса d, у которых диаметры перпендикулярны к UV и которые обращены вогнутостью к точке C_0.

Отмечаем точки M_1, M_{-1}, где полуокружности C_1, C_{-1} встречают прямую, проведенную через точки $+1$, -1; затем отмечаем точки M_2, M_{-2}, где полуокружности C_2, C_{-2} встречают прямую, проведенную через точки $+2$, -2, и т. д. Все точки M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2} и т. д. лежат на искомой циклоиде. В точках M_n, M_{-n} находятся ее начальные точки A, B.

Так строится по точкам одна арка циклоиды. Для построения соседних арок надо продолжить ряд точек C, как показано на черт. 499. Нумерацию этих точек надо произвести заново. Окружность же C_0 нет нужды вычерчивать заново, так как прямые, параллельные линии центров, остаются прежними.

3. Параметрические уравнения [ось абсцисс — направляющая KL; начало координат O — проекция одной из начальных точек (A на черт. 498, a—$в$) на направляющую KL]:

$$x = r\varphi - d\sin\varphi; \quad y = r - d\cos\varphi, \tag{I}$$

где $\varphi = \angle MCE'$ — угол поворота производящего круга, отсчитываемый от того положения, в котором точка M совпадает с начальной точкой A.

Для обыкновенной циклоиды ($d = r$)

$$x = r(\varphi - \sin\varphi); \quad y = r(1 - \cos\varphi). \tag{Ia}$$

4. Особенности формы. По направлению прямой KL циклоида в обе стороны простирается в бесконечность. Любой ее дуге, отсчитываемой от какой-либо начальной точки A, соответствует симметричная дуга, отсчитываемая от той же точки в противоположном направлении; AC_0 — ось симметрии. Циклоида симметрична также относительно прямой DF, проведенной через какую-либо из вершин перпендикулярно к направляющей

При смещении по направлению линии центров на расстояние, кратное $2\pi r$ (длине производящей окружности), циклоида совмещается сама с собой. Последовательными смещениями на расстояние $\pm 2\pi r$ можно получить всю циклоиду из любой ее дуги, соответствующей изменению параметра от некоторого значения $\varphi = \varphi_0$ до значения $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, например от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$ или от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

Циклоида заключена внутри полосы, ограниченной прямыми $y = r + d$ и $y = r - d$. Первая из них касается циклоиды в каждой из ее вершин. Вторая проходит через все начальные точки; она является касательной к циклоиде, когда эта циклоида — укороченная или удлиненная. Для обыкновенной же циклоиды вторая прямая ($y = 0$) совпадает с направляющей и *перпендикулярна* к касательным (односторонним) в начальных точках циклоиды.

5. Узловые точки. Удлиненная циклоида всегда обладает узловыми точками. Число и расположение последних зависят от отношения $d : r$ ($= \lambda$). Пока это отношение не превосходит числа $\lambda_0 = 4{,}60333\ldots$ [1]), все узловые точки расположены на прямых $x = 2k\pi r$ (k — целое число), причем на каждой из этих прямых лежит одна узловая точка:

---

[1]) Это иррациональное число равно $\sec\alpha_0$, где α_0 — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\alpha - \alpha = 0$.

точка A_1 (черт. 498, *б*) — на прямой $x = 0$, точка B_1 — на прямой $x = 2\pi r$ и т. д.

Эти точки можно найти, решив уравнение

$$\varphi - \lambda \sin \varphi = 0, \tag{2}$$

которое в рассматриваемом случае $\lambda < \lambda_0$ имеет единственный положительный корень φ_1; последний расположен в промежутке $(0, \pi)$. Значения $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = -\varphi_1$ соответствуют точке A_1 на арке ADB $(0 < \varphi < 2\pi)$ и на соседней арке $(-2\pi < \varphi < 0)$ [1]).

Пример 1. Пусть $d = 1{,}43r$, как на черт. 498, *б*. Решив уравнение

$$\varphi - 1{,}43 \sin \varphi = 0 \tag{2a}$$

(по способу §§ 288—289), найдем значение $\varphi_1 = 81°$, соответствующее точке A_1 (на арке ADB). Ординату y_1 точки A_1 находим из второго уравнения (1):

$$y_1 = OA_1 = r(1 - 1{,}43 \cos \varphi_1) \approx 0{,}78r.$$

Узловые точки данной циклоиды суть

$$(2\pi kr; \qquad 0{,}78r).$$

Пусть теперь отношение λ лежит в промежутке

$$\lambda_0 < \lambda \leqslant \lambda_1,$$

где $\lambda_1 = 7{,}78968\ldots$ [2]); тогда кроме рассмотренных выше узловых точек появляются узловые точки на прямых $x = (2k+1)\pi r$, по одной паре на каждой из этих прямых: точки P_1, P_2 (черт. 500) на прямой $x = \pi r$, точки Q_1, Q_2 на прямой $x = -\pi r$, точки R_1, R_2 на прямой $x = 3\pi r$ и т. д. Эти точки можно найти, решив уравнение

$$\varphi - \lambda \sin \varphi = \pi, \tag{3}$$

которое в рассматриваемом случае имеет два положительных корня φ_1, φ_2. Оба корня лежат в промежутке $(2\pi, 3\pi)$ и соответствуют точкам P_1, P_2 на арке $BD''N$, которая пересекается здесь с аркой $LD'A$ [3]), отделенной от $BD''N$ одной промежуточной аркой ADB.

---

[1]) Нулевому корню уравнения (2) соответствует начальная точка A, не являющаяся узловой.

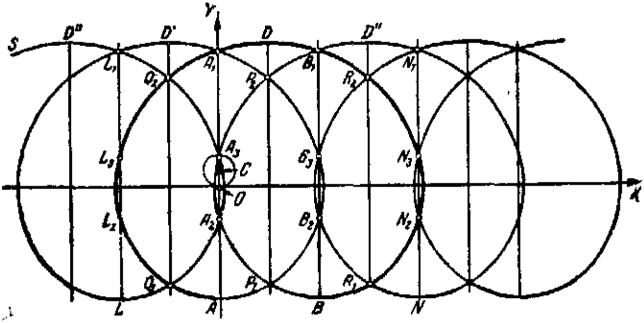
[2]) Это иррациональное число равно $\sec \alpha_1$, где α_1 — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = \pi$.

[3]) Если $\lambda = \lambda_0$, то точки P_1 и P_2 совпадают, так что арки $BD''N$ и $LD'A$ касаются друг друга.

В том случае, когда λ лежит в промежутке

$$\lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2,$$

где $\lambda_2 = 14,102\ldots$[1]), у циклоиды появляются новые узловые точки — на этот раз опять на прямых $x = 2k\pi r$, по одной паре на каждой из этих прямых: точки A_2, A_3 (см. черт. 500) на прямой $x=0$, точки B_2, B_3 на прямой $x = 2\pi r$, точки L_1, L_2 на прямой $x = -2\pi r$ и т. д. Эти точки можно найти, решив уравнение (2), которое в рассматриваемом случае имеет не один положительный корень, как в



Черт. 500.

примере 1, а три. Наименьший корень φ_1 лежит в промежутке $(0, \pi)$ и соответствует узловой точке A_1 (черт. 500), лежащей в пересечении соседних арок ADB и $LD'A$. Два других корня φ_2, φ_3 лежат в промежутке $(2\pi, 3\pi)$ и соответствуют точкам A_2, A_3, лежащим в пересечении арок $BD''N$ и $LD'''S$, разделенных двумя промежуточными ($LD'A$ и ADB).

По мере дальнейшего роста отношения λ у циклоиды появляются все новые и новые пары узловых точек: сначала по одной паре точек на прямых $x = (2k+1)\pi r$ (в этих точках пересекаются две арки, разделенные тремя промежуточными), затем — по одной паре точек на прямых $x = 2k\pi r$ (здесь пересекаются две арки, разделенные четырьмя промежуточными) и т. д. попеременно.

Пример 2. Пусть $\lambda = 8$, как на черт. 500. Так как это значение λ лежит в промежутке (λ_1, λ_2), то данная

---

[1]) Число λ_2 равно $\sec\alpha_2$, где α_2 — второй (в порядке возрастания абсолютной величины) положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\alpha - \alpha = 0$.

удлиненная циклоида имеет по три узловые точки на каждой из прямых $x=2k\pi r$ и по две — на каждой из прямых $x=(2k+1)\pi r$.

Узловые точки A_1, A_2, A_3 на прямой $x=0$ найдем из уравнения

$$\varphi - 8\sin\varphi = 0. \tag{2б}$$

Его корни суть

$$\varphi_1 = 159°40'; \qquad \varphi_2 = 360° + 69°30'; \qquad \varphi_3 = 360° + 95°54'.$$

Ординаты точек A_1, A_2, A_3 находим из второго уравнения (1):

$$y_1 = OA_1 = r(1 - 8\cos\varphi_1) \approx 8{,}50r$$

и аналогично

$$y_2 = OA_2 \approx 1{,}80r; \qquad y_3 = OA_3 \approx 1{,}83r.$$

Узловые точки P_1, P_2 на прямой $x=\pi$ найдем из уравнения

$$\varphi - 8\sin\varphi = \pi. \tag{3а}$$

Его корни суть

$$\varphi_1' = 360° + 26°49'; \qquad \varphi_2' = 360° + 136°21'.$$

Ординаты точек P_1, P_2 будут

$$y_1' = OP_1 \approx -6{,}14r; \qquad y_2' = OP_2 \approx 6{,}79r.$$

На каждой арке нашей циклоиды лежит по 10 узловых точек (на арке ADB — точки Q_1, L_2, L_3, Q_2, A_1 и симметричные с ними точки R_1, N_2, N_3, R_2, B_1).

Ни укороченная, ни обыкновенная циклоида узловых точек не имеют.

6. Точки возврата. По мере того как внешняя точка M производящего круга приближается к окружности, описываемая точкой M удлиненная циклоида (черт. 498, *б*) стремится к совпадению с обыкновенной циклоидой (черт. 498, *в*). При этом петля с узловой точкой A_1 стягивается в точку O, которая становится *точкой возврата* обыкновенной циклоиды: при переходе с арки $(-2\pi, 0)$ на арку $(0, 2\pi)$ направление движения точки M меняется на противоположное. Точками возврата являются все точки $\varphi=2k\pi$ обыкновенной циклоиды, и только они. Удлиненные и укороченные циклоиды точек возврата не имеют.

7. Точки перегиба. Укороченная циклоида имеет на каждой арке по две точки перегиба (L_1 и L_2 на

черт. 498, *а*): соответствующие значения параметра φ определяются из уравнения

$$\cos\varphi = \frac{d}{r}.$$

Для циклоиды, изображенной на черт. 498, *а*, где $d = 0{,}6r$, имеем $\cos\varphi = 0{,}6$. Точке L_1 соответствует значение $\varphi_1' \approx 52°25'$, точке L_2 — значение $\varphi_2' = 127°35'$. Координаты x_1, y_1 точки L_1 суть

$$x_1 = r\varphi - d\sin\varphi = r(\varphi - 0{,}6\sin\varphi) \approx 0{,}43r,$$
$$y_1 = r - d\cos\varphi = r(1 - 0{,}6\cos\varphi) \approx 0{,}63r.$$

Координаты точки L_2:

$$x_2 = 2\pi - x_1 \approx 5{,}85r; \qquad y_2 = y_1 \approx 0{,}63r.$$

8. Свойства нормали и касательной. Нормаль MN (черт. 498, *а*—*в*) любой циклоиды проходит через точку опоры E' производящего круга. Касательная MT (черт. 498, *а*) обыкновенной циклоиды проходит через точку H, диаметрально противоположную точке опоры производящего круга.

Отсюда ясен способ построения касательной.

9. Радиус кривизны. Для любой циклоиды

$$R = \frac{(r^2 + d^2 - 2dr\cos\varphi)^{3/2}}{d\,|d - r\cos\varphi|}. \tag{4}$$

В частности, для обыкновенной циклоиды

$$R = 2r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi} = 4r\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = 2\sqrt{2ry} = 2ME' \tag{4a}$$

(черт. 498, *в*), т. е. *радиус кривизны обыкновенной циклоиды равен удвоенному отрезку нормали между циклоидой и направляющей*. Иными словами, для построения центра кривизны достаточно продолжить хорду ME' за точку E' на расстояние, равное этой хорде.

10. Эволюта и эвольвента обыкновенной циклоиды. Эволюта обыкновенной циклоиды (геометрическое место центров кривизны) есть циклоида, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль направляющей на половину основания AB и опущенная под основание на расстояние, равное высоте циклоиды (см. черт. 384 на стр. 505).

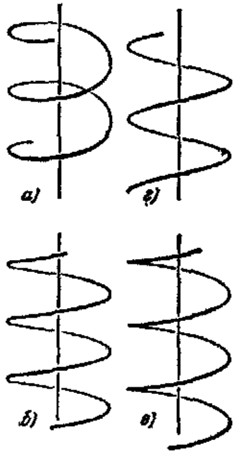
Иными словами, эвольвента циклоиды C_4BD (см. черт. 384), исходящая из вершины B этой циклоиды, есть циклоида M_2BN, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль направляющей на половину основания C_4D и поднятая над основанием на расстояние, равное высоте циклоиды.

11. Циклоида и синусоида. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки M циклоиды на диаметр производящего круга, проходящий через точку опоры, есть синусоида с длиной волны $2\pi r$ и амплитудой d. Ось этой синусоиды совпадает с линией центров циклоиды.

12. Циклоида как проекция винтовой линии. Обозначения: h — шаг винтовой линии; a — ее радиус; α — угол подъема; β — угол между осью винтовой линии и плоскостью проекций; σ — угол наклона проектирующих лучей к плоскости проекций.

Косоугольная проекция винтовой линии на плоскость, *перпендикулярную к оси*, есть циклоида. Если $\sigma > \alpha$, то эта циклоида удлиненная; если $\sigma < \alpha$, то укороченная; если $\sigma = \alpha$, то обыкновенная. Прямоугольная проекция винтовой линии на ту же плоскость есть, очевидно, окружность.

Прямоугольная проекция винтовой линии на плоскость, *не перпендикулярную к оси*, но и не параллельную последней, есть «сжатая циклоида» (черт. 501, *а*—*в*), т. е. линия, получаемая из циклоиды с помощью равномерного сжатия (§ 40) к какой-либо прямой, перпендикулярной к линии центров циклоиды.



Черт. 501.

Коэффициент сжатия $k = \sin\beta$; величины r и d, характеризующие циклоиду (до ее сжатия), выражаются так:

$$r = \frac{h}{2\pi}\operatorname{ctg}\beta\ (= a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta); \qquad d = a. \tag{5}$$

Отсюда видно, что при $\beta > \alpha$ проекция винтовой линии (черт. 501, *а*) родственна с удлиненной циклоидой; при $\beta < \alpha$ (черт. 501, *б*) — с укороченной; при $\beta = \alpha$ (черт. 501, *в*) — с обыкновенной.

Ортогональная проекция винтовой линии на плоскость, параллельную оси (черт. 501, *г*), есть синусоида, у которой амплитуда есть радиус a винтовой линии, а длина волны есть проекция $h \cos \beta$ шага h.

13. Длина дуги s циклоиды между точками $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_1$:

$$s = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\varphi}\, d\varphi. \qquad (6)$$

Эта дуга равна по длине дуге эллипса

$$x = 2(d+r)\cos\frac{\varphi}{2}, \quad y = 2(d-r)\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (7)$$

между точками с теми же значениями параметра φ.

Интеграл (6) в общем случае не выражается через элементарные функции аргумента φ_1. Но для обыкновенной циклоиды [эллипс (7) вырождается в отрезок длины $8r$] имеем

$$s = 2r\int_0^{\varphi_1} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4r\left(1-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\varphi_1}{4} \quad (\varphi_1 \leqslant 2\pi). \qquad (8)$$

В частности, *одна арка обыкновенной циклоиды равна по длине учетверенному диаметру производящего круга*:

$$s = 4\cdot 2r. \qquad (8a)$$

14. Натуральное уравнение обыкновенной циклоиды (в пределах *одной* арки)

$$R^2+(s-4r)^2 = (4r)^2 \qquad (0 < s < 2\pi r). \qquad (9)$$

Получается из (8) и (4a) исключением φ. Дуги отсчитываются от начальной точки. Если за начало дуг принять вершину, то натуральное уравнение будет

$$R^2+s^2 = (4r)^2 \qquad (-4r \leqslant s \leqslant 4r). \qquad (9a)$$

15. Кинематическое свойство обыкновенной циклоиды. Уравнение (9) выражает на языке кинематики следующее свойство: *если обыкновенная циклоида катится (без скольжения) по прямой AB, то центр кривизны точки касания движется по окружности. Радиус последней вчетверо больше радиуса производящего круга, а центр лежит в той точке прямой AB, через которую прокатывается вершина циклоиды.*

16. Площади и объемы. Площадь S_1, описываемая ординатой при изменении φ от $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_1$:

$$2S_1 = (2r^2+d^2)\varphi - 4dr\sin\varphi + \frac{d^2\sin 2\varphi}{2}. \qquad (10)$$

«Полная площадь» S (при $\varphi_1=2\pi$):

$$S = 2\pi r^2+\pi d^2. \tag{11}$$

Для обыкновенной и укороченной циклоид — это площадь фигуры $OADBO_1$ (черт. 498, *а*, *в*); для удлиненной — площадь фигуры, остающейся от фигуры AA_1DB_1B после изъятия прямоугольника $OABO_1$ (черт. 498, *б*).

Для обыкновенной циклоиды ($d=r$)

$$S = 3\pi r^2, \tag{12}$$

т. е. фигура, ограниченная аркой циклоиды и основанием, по площади втрое больше производящего круга [Роберваль (1634), Торричелли (1643)].

Площадь F_1 поверхности, образованной вращением обыкновенной циклоиды около ее основания AB:

$$F_1 = \frac{64}{3}\pi r^2 = \frac{64}{9}S, \tag{13}$$

где S — площадь петли циклоиды.

Объем V_1 соответствующего тела вращения

$$V_1 = 5\pi^2 r^3 = \frac{5}{8}V, \tag{14}$$

где V — объем описанного цилиндра.

Площадь F_2 — поверхности, образованной вращением обыкновенной циклоиды около высоты DF:

$$F_2 = 8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)r^2. \tag{15}$$

Объем V_2 соответствующего тела вращения

$$V_2 = \pi r^3\left(\frac{3}{2}\pi^2-\frac{8}{3}\right) = \frac{3}{4}V'-2V'', \tag{16}$$

где V' — объем описанного цилиндра, V'' — объем вписанного шара.

17. Т а в т о х р о н н о е[1]) с в о й с т в о ц и к л о и д ы. Материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по обыкновенной циклоиде ADB (черт. 502), обращенной вогнутостью вверх, достигает низшего положения D за промежуток времени

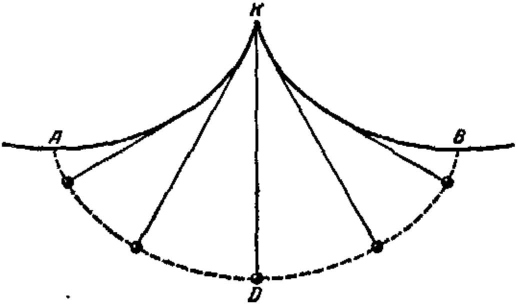
$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{17}$$

---

[1]) От ταυτός χρόνος — одинаковое время.

(r — радиус производящего круга, g — ускорение силы тяжести). Этот промежуток не зависит от начального положения точки (Гюйгенс, 1673).

Поэтому период T колебания циклоидального маятника ($T = 4t$) не зависит от его амплитуды (круговой маятник практически обладает этим свойством лишь при малых



Черт. 502.

колебаниях). Нить циклоидального маятника, сконструированного Гюйгенсом, укрепляется в начальной точке K другой циклоиды AKB, являющейся эволютой циклоиды ADB (см. п. *10*).

18. Циклоида как брахистохрона[1]. Брахистохрона точки, перемещающейся под действием силы тяжести (в среде, сопротивлением которой можно пренебречь) из данной точки A в нижележащую точку B (не расположенную на одной вертикали с A), есть обыкновенная циклоида. Она обращена вогнутостью вверх; точка A является ее начальной точкой. Величина производящего круга определяется из условия, чтобы циклоида проходила через точку B.

Продолжительность t быстрейшего спуска определяется по формуле

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\varphi_B, \tag{18}$$

[1]) Брахистохрона (от βραχύστος χρόνος — кратчайшее время) — линия, по которой осуществляется быстрейший переход точки из одного данного положения в другое. Термин введен Иваном Бернулли (1667—1748), который поставил и задачу о разыскании «линии кратчайшего спуска». В 1696 г. он одновременно с Яковом Бернулли опубликовал решение задачи.

где φ_B — угол поворота производящего круга, соответствующий точке B.

Пример. Точка B ниже точки A на 0,83 *м*, а по горизонтали находится на расстоянии 1,54 *м* от A. Найти продолжительность быстрейшего ската из A в B.

Решение. Возьмем начало координат в точке A, ось OX направим вертикально вниз; за плоскость XOY примем вертикальную плоскость, проходящую через A и B. Направим ось OY так, чтобы точка B имела положительную абсциссу. За единицу масштаба примем 1 *м*. Тогда координаты точки B будут

$$x_1 = 1{,}54; \qquad y_1 = 0{,}83. \tag{19}$$

Циклоида, обеспечивающая быстрейший скат, представляется уравнениями

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi). \tag{20}$$

Из условия (19) можно найти радиус r производящего круга и значение $\varphi = \varphi_B$, соответствующее точке B.

Для этого, исключая r из (20), решаем уравнение

$$1{,}54\,(1 - \cos\varphi) = 0{,}83\,(\varphi - \sin\varphi)$$

по способу §§ 288—289. Получаем

$$\varphi \approx 195^\circ \ (\approx 3{,}40 \text{ радиана}).$$

Теперь из второго уравнения (20) находим

$$r \approx 0{,}42 \ (\text{м}).$$

Наконец, по формуле (18), полагая $g = 9{,}8$ (*м/сек*²), находим

$$t = \sqrt{\frac{0{,}42}{9{,}8}} \cdot 3{,}40 \approx 0{,}70 \ (\text{сек}).$$

Спуск из A в B по наклонной плоскости продолжался бы 0,87 *сек*, т. е. почти на 25% дольше.

19. Исторические сведения. В истории высшей математики циклоида сыграла исключительно важную роль. Более полустолетия она привлекала внимание крупнейших ученых XVII века. Ряд ее свойств, найденных геометрическими средствами, подтвердил правильность новых аналитических методов. Другие ее свойства удалось открыть только с помощью этих новых методов.

В 1590 г. Галилей, изучая траекторию точки катящейся окружности, построил циклоиду (ему принадлежит и наименование этой линии). Он пытался определить площадь, ограниченную аркой циклоиды и ее основанием. Не располагая средствами для теоретического решения задачи, он пытался найти отношение площади циклоиды к площади производящего круга путем взвешивания. Вначале он полагал, что это отношение равно 3, но потом обратил внимание на то, что эксперимент всегда давал ему число, меньшее трех. Так как разность была незначительна, то искомое отношение казалось невозможным выразить с помощью небольших целых чисел, и Галилей пришел к убеждению, что это отношение иррационально.

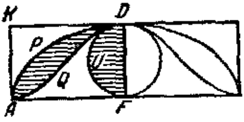
После смерти Галилея (1642 г.) его ученики Торричелли и Вивиани, делившие с ним горести заточения, занялись математическим исследованием циклоиды. Вивиани, применяя кинематические соображения, нашел свойство касательной, изложенное в п. 5; Торричелли, применяя приемы, предвосхитившие интегральное исчисление, определил площадь циклоиды (п. 14).

Площадь циклоиды была найдена также Робервалем независимо от Торричелли и, вероятно, на несколько лет раньше последнего. Метод Роберваля замечателен по остроумию и простоте (он основывался на свойстве п. 11)[1]).

Тем же методом Роберваль нашел объемы тел вращения циклоиды около основания и около высоты. Роберваль рассматривал не только обыкновенную циклоиду, но также удлиненную и укороченную и дал метод построения их касательных.

Как ни замечательны были эти открытия, они относились все же к задачам, которые для ряда других фигур решались уже с давних пор. Между тем все попытки осуществить **точное** спрямление криволинейных дуг оставались безуспешными. Циклоида была первой кривой линией, которую удалось спрямить. Впервые это сделал

[1]) Идея метода: из соображений симметрии ясно, что синусоида AQD (черт. 503), о которой идет речь в свойстве 11, делит на равновеликие части прямоугольник $AFDK$, построенный на половине основания циклоиды и на ее высоте. Из элементарных соображений отсюда следует, что фигура $AFDQ$, образованная высотой, половиной основания и синусоидой, равновелика производящему кругу. Чтобы получить площадь полуциклоиды, надо добавить площадь «лепестка» $AQDP$ между полуаркой циклоиды и синусоидой. Роберваль доказывает, что этот лепесток равновелик половине производящего круга. Доказательство состоит в применении так называемого принципа Кавальери (полукруг ограничен вертикальным диаметром, сечения производятся параллельно основанию).



Черт. 503.

выдающийся английский астроном, физик, математик и архитектор Рен (1632–1723). Работа Рена была опубликована в 1658 г. Вскоре та же задача была решена рядом других ученых, причем Ферма, кроме того, впервые выполнил спрямление а л г е б р а и ч е с к о й линии (полукубической параболы).

Исчерпывающее исследование геометрических свойств циклоиды было произведено Б. Паскалем, работа которого вышла в свет в 1659 г.

В последующее сорокалетие трудами таких первоклассных ученых, как Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц и братья Бернулли, были исследованы механические применения циклоиды (см. пп. 15 и 16). Задача о брахистохроне (п. 16) в ее обобщенном виде явилась одним из основных истоков созданной в XVIII веке трудами Эйлера и Лагранжа новой отрасли математики – вариационного исчисления.

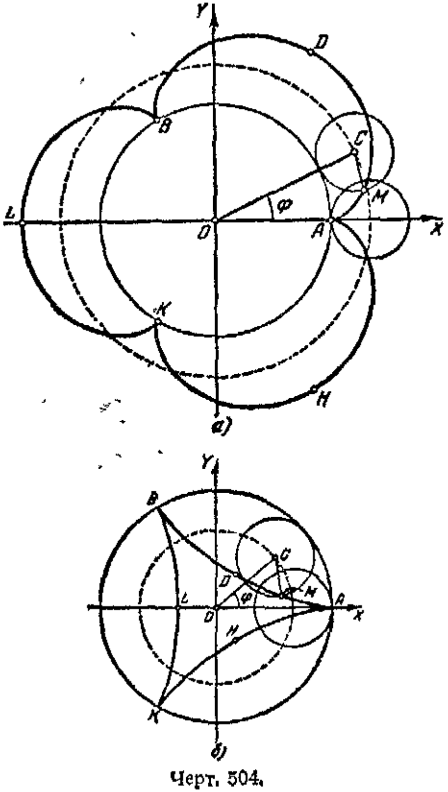
§ 515. Эпициклоиды и гипоциклоиды

1. О п р е д е л е н и е. Как эпициклоида (черт. 504, *а*), так и гипоциклоида (черт. 504, *б*) есть линия L, которую описывает точка M, закрепленная в плоскости некоторого круга C радиуса r (производящий круг), когда этот круг катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса R (направляющая). Линия L называется эпициклоидой, когда окружности C и O касаются внешним образом, и гипоциклоидой, когда касание внутреннее.

Эпициклоида черт. 504, *а* и гипоциклоида черт. 504, *б* описаны движением точки M, находящейся на окружности производящего круга. Такие эпициклоиды и гипоциклоиды называют *обыкновенными* в отличие от укороченных и удлиненных. Эпициклоида (черт. 505, *а*) и гипоциклоида (черт. 505, *б*) называются *укороченными*, когда точка M взята внутри производящего круга, т. е. когда $d < r$ ($d = CM$ – расстояние точки M от центра C производящего круга), и *удлиненными* (черт. 506, *а* и *б*), когда M лежит вне производящего круга, т. е. когда $d > r$.

Начальной точкой эпициклоиды или гипоциклоиды (A на черт. 504–506) называется такая ее точка, которая лежит на прямой (C_1E_1), соединяющей центр (C_1) производящего круга с точкой опоры (E_1), и находится по ту же сторону от центра C_1, что и точка опоры E_1. Точки A, B, B' на черт. 505, *а* и *б* тоже начальные.

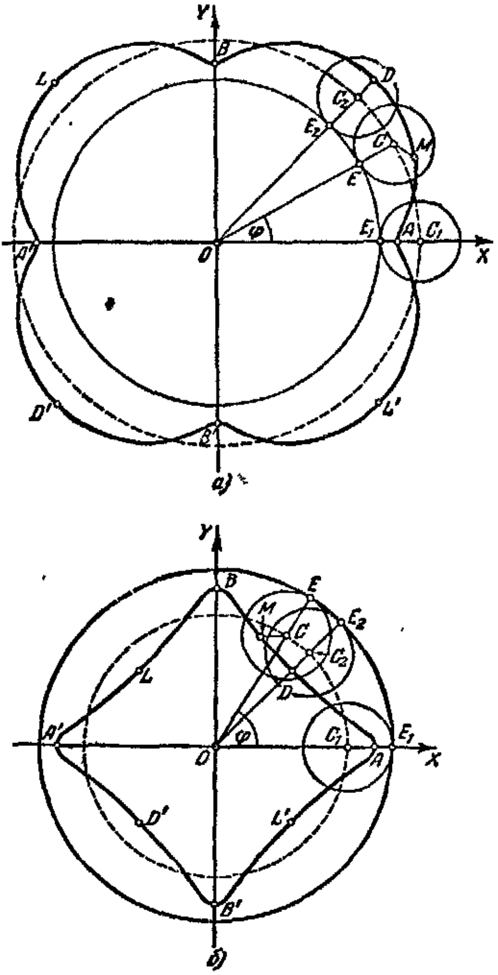
Начальные точки обыкновенной эпициклоиды и обыкновенной гипоциклоиды (A, B, K на черт. 504, *а* и *б*) лежат на направляющей окружности и совпадают с соответственными точками опоры производящего круга.



Черт. 504.

Вершиной эпициклоиды или гипоциклоиды (D на черт. 505, *а* и *б*) называется такая ее точка, которая лежит на прямой C_2E_2, соединяющей центр C_2 производящего круга с точкой опоры E_2, но находится на продолжении отрезка C_2E_2 за точку C_2.

Точки D', L, L' на черт. 505, *а* и *б* — тоже вершины.

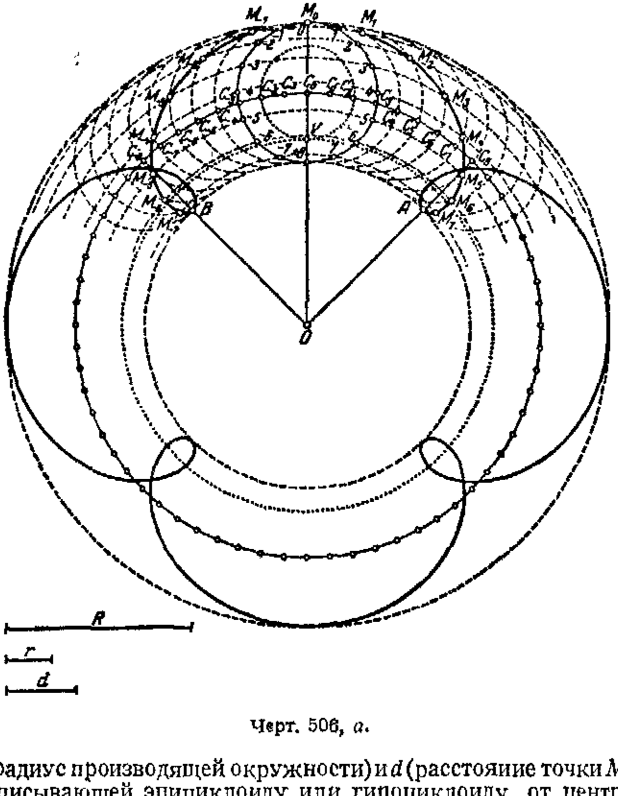


Черт. 505.

Окружность, описываемая центром производящего круга, называется *линией центров* эпициклоиды (гипоциклоиды). Радиус OC линии центров равен

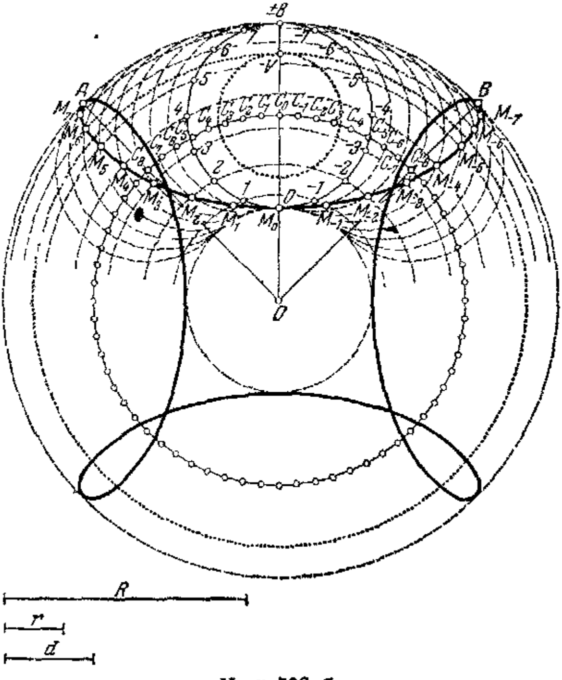
$$OC = OE + EC = R + r \quad \text{для эпициклоиды,}$$
$$OC = |OE - EC| = |R - r| \quad \text{для гипоциклоиды.}$$

2. Построение. Чтобы построить эпициклоиду или гипоциклоиду по данным: R (радиус направляющей), r



Черт. 506, *а*.

(радиус производящей окружности) и d (расстояние точки M, описывающей эпициклоиду или гипоциклоиду, от центра C производящего круга), поступаем следующим образом, Проводим две окружности (на черт. 506, *а* и *б* они показаны жирным точечным пунктиром) $O(R)$ и $C_0(r)$, касающиеся друг друга в точке V внешним образом, если строится эпициклоида (черт. 506, *а*), и внутренним образом, если строится гипоциклоида (черт. 506, *б*).



Черт. 506, *б*.

Из центра C_0 проводим также окружность радиуса d (она обозначена сплошной линией и снабжена числовыми пометками) и обозначаем буквой M_0 ту из ее точек пересечения с прямой OC_0, которая лежит на продолжении отрезка C_0V за точку C_0. Точка M_0 будет одной из вершин искомой линии.

Окружность $C_0(d)$ делим на четное число $2n$ равных дуг (мы взяли $2n = 16$) так, чтобы точка M_0 оказалась одной из точек деления. Точки деления снабжаем числовыми пометками $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ (нулевая пометка соответствует точке M_0, пометки n и $-n$ соответствуют одной и той же точке). Для определенности положим, что номера пометок возрастают при обходе окружности C_0 по направлению движения стрелки часов.

Далее из центра O проводим окружность радиуса OC_0 — линию центров искомой эпициклоиды (гипоциклоиды) — и на ней откладываем из точки C_0 дугу C_0C_n, градусная мера которой определяется из пропорции

$$\overset{\frown}{C_0C_n} : 180^\circ = r : R \tag{1}$$

и которая направлена по ходу стрелки часов, если строится эпициклоида, и в противоположную сторону, если строится гипоциклоида. От той же точки C_0 откладываем дугу C_0C_{-n}, симметричную с C_0C_n [1]). На черт. 506, *а* и *б*, где $r : R = 1 : 4$, дуги C_0C_8 и C_0C_{-8} содержат по 90° каждая и легко строятся с помощью линейки и циркуля геометрически точно. В других случаях такое построение может оказаться затруднительным или вовсе невозможным. Тогда построение выполняется приближенно с требуемой степенью точности.

Каждую из дуг C_0C_n, C_0C_{-n} делим на n равных частей и нумеруем точки деления буквами $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}, \ldots, C_{\pm n}$, начиная от точки C_0.

Теперь из точки O проводим ряд концентрических окружностей, проходящих последовательно через точку M_0, носящую пометку 0, через пару точек с пометками ± 1, через пару точек с пометками ± 2 и т. д. На первой из этих окружностей будут лежать все вершины, на последней — все начальные точки.

Из точек $C_1, C_2, \ldots, C_n$, как из центров, проводим полуокружности радиуса d так, чтобы их концы лежали на первой и последней из концентрических окружностей и чтобы эти полуокружности можно было после поворота около точки O совместить с полуокружностью, носящей пометки $1, 2, 3, \ldots$ Таким же образом из центров C_{-1}, C_{-2}, $C_{-3}, \ldots$ проводятся полуокружности, которые после поворота около точки O совмещаются с полуокружностью, носящей пометки $-1, -2, -3, \ldots$

---

1) Если $r > R$, то дуги C_0C_n и C_0C_{-n} перекрываются друг с другом, а если $r > 2R$, то, кроме того, каждая из дуг C_0C_n, C_0C_{-n} перекрывает сама себя.

Отмечаем точки M_1, M_{-1}, где полуокружности $C_1(d)$, $C_{-1}(d)$ встречают ту из концентрических окружностей, которая была проведена через точки ± 1; затем отмечаем точки M_2, M_{-2}, где полуокружности C_2, C_{-2} встречают окружность, проведенную через точки ± 2, и т. д. Все точки $M_{\pm 1}$, $M_{\pm 2}$, $M_{\pm 3}$, ... лежат на искомой линии, причем точки $M_8 M_{-8}$ совпадают с начальными точками A, B (последние можно было получить заранее, проведя прямые OC_n, OC_{-n}).

Так строится по точкам одна ветвь эпициклоиды (гипоциклоиды). Для построения соседних ветвей достаточно продолжить ряд точек C, как показано на черт. 506, *а* и *б*. Нумерацию этих точек надо произвести заново. Окружность же C_0 нет нужды вычерчивать заново, так как она требуется лишь для построения концентрических окружностей, а последние остаются теми же.

3. Параметрические уравнения (начало координат O — в центре направляющей окружности; ось OX направлена к одной из начальных точек; φ — угол поворота луча OC из его начального положения [1])).

Для эпициклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\varphi - d\cos\frac{R+r}{r}\varphi, \\ y &= (R+r)\sin\varphi - d\sin\frac{R+r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2а)$$

Для гипоциклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\varphi + d\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \\ y &= (R-r)\sin\varphi - d\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2б)$$

Уравнения (2б) получаются из (2а) заменой r на $-r$ и d на $-d$ [2]).

---

[1]) Этот угол равен $\angle XOC$ для всех эпициклоид и для тех гипоциклоид, у которых радиус производящего круга меньше радиуса направляющей ($r < R$). Если же $r > R$, то $\varphi = \angle XOC + \pi$. Заметим, что не существует такой гипоциклоиды, для которой $r = R$, ибо в этом случае производящий круг не может катиться без скольжения по направляющей окружности, касаясь ее внутренним образом.

[2]) При указанном выборе направления оси OX и параметра φ уравнение (2б) сохраняет силу и для тех гипоциклоид, у которых $r > R$ (такие гипоциклоиды называют перициклоидами). Если же в качестве параметра φ взять, как это часто делают, угол $\angle XOC$, то параметрические уравнения перициклоид будут отличаться от уравнений остальных гипоциклоид.

4. Особенности формы. Всякая эпициклоида лежит в круговом кольце, ограниченном окружностями радиусов $R+r+d$ и $|R+r-d|$. На первой из этих окружностей лежат вершины, а на второй — начальные точки эпициклоиды. Таким образом, вершины эпициклоиды всегда дальше от центра, чем начальные точки, как это видно на черт. 504, *а*, 505, *а* и 506, *а*.

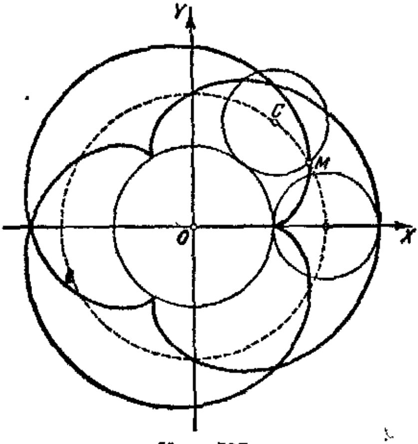
Всякая гипоциклоида лежит в круговом кольце, ограниченном окружностями радиусов $|R-r-d|$ и $|R-r+d|$. На первой лежат вершины, а на второй — начальные точки гипоциклоиды. Таким образом, в случае, когда $R>r$, вершины гипоциклоиды ближе к центру, чем начальные точки, как это видно на черт. 504, *б*, 505, *б* и 506, *б*. Дело обстоит наоборот в том случае, когда $R<r$. Гипоциклоиды этого второго типа называются *перициклоидами*. Мы не даем для них особых чертежей по той причине, что всякая перициклоида тождественна с некоторой эпициклоидой и отличается от последней только способом порождения. Об этом подробно сказано ниже в п. 7.

При повороте около центра O на угол, кратный $\frac{2\pi r}{R}$, эпициклоида (гипоциклоида) совмещается сама с собой. Так, линия черт. 504, *а*, где $R=3r$, совмещается сама с собой при повороте около O на угол $\pm\frac{2\pi}{3}$, на угол $\pm\frac{4\pi}{3}$, $\pm 2\pi$ и т. д. То же на черт. 504, *б*. На черт. 505, *а*, *б* и 506, *а*, *б*, где $R=4r$, совмещение достигается при повороте на угол, кратный $\frac{\pi}{2}$.

Начальные точки обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды) являются точками возврата (см. черт. 504, *а* и *б*).

Если отношение $R:r$ есть целое число m, то эпициклоида (*обыкновенная*, *удлиненная или укороченная*) является замкнутой алгебраической линией порядка $2(m+1)$, а *гипоциклоида — замкнутой алгебраической линией порядка* $2(m-1)$. Так, эпициклоида черт. 504, *а* (где $R:r=3:1$) есть кривая 8-го порядка, а гипоциклоида черт. 504, *б* (здесь тоже $R:r=3:1$) — кривая 4-го порядка. Как эпициклоида, так и гипоциклоида состоит из m конгруэнтных ветвей.

Если отношение $R:r$ есть дробь, которая в несократимой форме имеет вид $\frac{p}{q}$ $(q\neq 1)$, то эпициклоида (гипоциклоида) — тоже алгебраическая кривая [порядка $2|p\pm q|$] и состоит из p конгруэнтных ветвей. Так, обыкновенная эпициклоида черт. 507 ($R:r = 3:2$) есть кривая 10-го порядка и состоит из трех конгруэнтных ветвей.



Черт. 507.

Если отношение $R:r$ есть иррациональное число, то эпициклоида (гипоциклоида) не замкнута, она имеет бесчисленное множество ветвей, пересекающихся друг с другом.

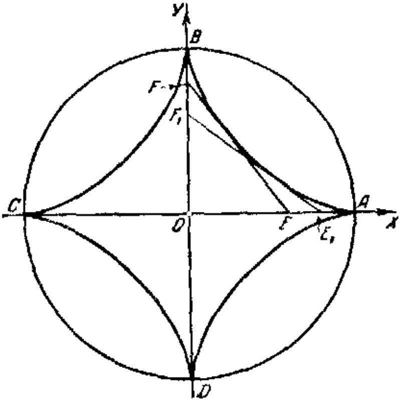
5. Частные виды.

1) При $R:r = 2:1$ как удлиненная, так и укороченная гипоциклоиды представляют собой эллипс с центром в точке O. Полуоси эллипса суть $a = r+d$; $b = |r-d|$; концами большой оси являются начальные точки, концами малой оси — вершины гипоциклоиды. На этом способе образования эллипса основано устройство прибора, вычерчивающего эллипсы.

1а) Если при постоянных R и r, связанных соотношением $R:r = 2:1$, разность $r-d$ стремится к нулю, то малая ось эллипса неограниченно уменьшается, а большая ось стремится к совпадению с диаметром направляющей окружности. Обыкновенная гипоциклоида, получаемая в предельном случае ($d = r$), представляет собой отрезок прямой, а именно тот диаметр направляющей окружности, который соединяет начальные точки. При одном полном обороте производящего круга этот диаметр описывается в одном направлении, при следующем обороте — в противоположном направлении. Таким образом, и в этом предельном случае начальные точки обыкновенной гипоциклоиды являются точками возврата.

2) При $R = r$ каждая из эпициклоид представляет собой улитку Паскаля (§ 508); в частности, обыкновенная эпициклоида рассматриваемого типа есть не что иное, как кардиоида.

3) При $R : r = 4 : 1$ обыкновенная гипоциклоида представляет собой *астроиду* (черт. 508); эта линия характеризуется тем, что отрезок EF ее касательной, заключенный



Черт. 508.

между двумя взаимно-перпендикулярными прямыми (проходящими через две пары противоположных начальных точек), имеет одну и ту же длину R. Уравнение астроиды в прямоугольной системе координат, указанной на черт. 508, есть

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3},$$

или в параметрической форме

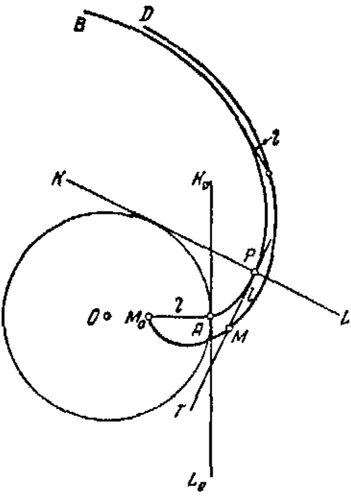
$$x = R\cos^3 u, \qquad y = R\sin^3 u.$$

6. Предельные случаи.

Случай I. При бесконечном радиусе направляющей окружности и данном радиусе производящего круга эпициклоида (гипоциклоида) обращается в циклоиду (§ 514, п. 1) с тем же радиусом производящего круга.

Случай 2. При бесконечном радиусе производящего круга последний обращается в прямую (KL на черт. 509), которая катится без скольжения по направляющей окружности O; при этом эпициклоида (гипоциклоида) обращается в линию, описываемую точкой M, неподвижно скрепленной с прямой KL.

Если точка M лежит на самой прямой KL (как точка P на черт. 509), то описываемая линия (AB на черт. 509) есть эвольвента направляющей окружности (§ 512, пп. 1 и 2).



Черт. 509.

Если точка, скрепленная с прямой AB, лежит по ту же сторону, что и направляющая (как точка M на черт. 509), то проекция P этой точки описывает эвольвенту AB, а сама точка M — *укороченную эвольвенту окружности*. Эта линия есть геометрическое место конца отрезка PM данной длины l, откладываемого на касательной PT к эвольвенте AB; при этом направление отрезка PM совпадает с направлением убывания дуги $\overset{\frown}{AP}$ эвольвенты.

Если же точка, скрепленная с прямой KL, лежит по другую сторону от этой прямой, то она описывает *удлиненную эвольвенту*. Эта линия строится аналогично, с той только разницей, что отрезок данной длины откладывается на касательной PT в сторону возрастания дуги $\overset{\frown}{AP}$.

7. **Двоякое образование гипоциклоид и эпициклоид.** Обыкновенная гипоциклоида, получаемая с помощью производящего круга радиуса r, который катится по окружности радиуса R, тождественна с «гипоциклоидой», получаемой с помощью производящего круга

радиуса

$$r_1 = R - r, \qquad (3)$$

который катится по той же окружности радиуса R.

Слово «гипоциклоида» поставлено в кавычки потому, что в том случае, когда $r > R$, *под этим термином надо понимать эпициклоиду, у которой радиус производящего круга есть* $r - R$.

Пример 1. Астроиду, вписанную в круг радиуса R, которая получается (п. 5) качением круга радиуса $\frac{1}{4} R$ по окружности радиуса R, имеющего внутреннее касание с производящим кругом, можно получить так же, как гипоциклоиду, для которой $R_1 = R$, $r_1 = R - \frac{1}{4} R = \frac{3}{4} R$.

Пример 2. Обыкновенная гипоциклоида, получаемая качением круга радиуса $r = 4$ *м* по окружности радиуса $R = 2$ *м*, тождественна с «гипоциклоидой», получаемой качением круга радиуса $r_1 = 2\,м - 4\,м = -2\,м$ по окружности радиуса $R_1 = 2$ *м*, т. е. с эпициклоидой, для которой $R_1 = 2\,м$, $r_1 = 2\,м$. Эта эпициклоида является кардиоидой (п. 5).

Из сказанного следует, что всякая обыкновенная эпициклоида (R, r) тождественна с гипоциклоидой[1] $(R, R+r)$. Так, обыкновенную эпициклоиду черт. 504, *a* $\left(r = \frac{1}{3} R\right)$ можно получить как гипоциклоиду, соответствующую значениям $R_1 = R$, $r_1 = \frac{4}{3} R$.

Двоякое образование применимо также и к гипоциклоидам (эпициклоидам) общего вида, а именно: гипоциклоиду, соответствующую данным величинам R, r, d, можно получить так же, как «гипоциклоиду» (R_1, r_1, d_1), где R_1, r_1, d_1 выражаются через R, r, d следующими формулами:

$$R_1 = \frac{d}{r} R, \qquad r_1 = \frac{d}{r}(R - r), \qquad d_1 = R - r. \qquad (4)$$

В случае, когда $R < r$[2], линия (R_1, r_1, d_1) есть эпициклоида, для которой $R_1 = \frac{d}{r} R$, $r_1 = \frac{d}{r}(r - R)$, $d_1 = r - R$.

Всякая же эпициклоида (R, r, d) тождественна с гипоциклоидой

$$R_1 = \frac{d}{r} R, \qquad r_1 = \frac{d}{r}(R + r), \qquad d_1 = R + r, \qquad (4a)$$

принадлежащей к типу перициклоид.

[1] Принадлежащей к типу перициклоид; см. п. 4.

[2] То есть когда исходная гипоциклоида является перициклоидой.

Замечание. Гипоциклоида (эпициклоида), которая при одном из способов своего образования была удлиненной, при другом способе оказывается укороченной (и наоборот).

Пример 3. Удлиненную гипоциклоиду $\left(R, \frac{1}{4}R, \frac{3}{8}R\right)$, построенную на черт. 506, *б*, можно получить как (укороченную) гипоциклоиду (R_1, r_1, d_1), где

$$R_1 = \frac{3}{2}R, \qquad r_1 = \frac{9}{8}R, \qquad d_1 = \frac{3}{4}R$$

(по формулам (4)).

Пример 4. Удлиненную эпициклоиду $\left(R, \frac{1}{4}R, \frac{3}{8}R\right)$, построенную на черт. 506, *а*, можно получить как (укороченную) гипоциклоиду (R_1, r_1, d_1), где (по формулам (4а)

$$R_1 = \frac{3}{2}R, \qquad r_1 = \frac{15}{8}R, \qquad d_1 = \frac{5}{4}R.$$

8. Свойство нормали и касательной. Нормаль, проведенная через точку M любой эпициклоиды (гипоциклоиды), проходит через соответствующую точку касания E производящего круга с направляющей. Касательная к обыкновенной эпициклоиде (гипоциклоиде) проходит через точку E' производящего круга, диаметрально противоположную точке E (ср. § 514, п. 8).

Отсюда ясен способ построения касательной.

9. Радиус кривизны $\overline{R}$ любой эпициклоиды:

$$\overline{R} = (R+r)\frac{\left(r^2+d^2-2dr\cos\frac{R\varphi}{r}\right)^{3/2}}{\left|r^3+d^2(R+r)-dr(R+2r)\cos\frac{R\varphi}{r}\right|}. \tag{5}$$

Соответствующая формула для гипоциклоиды получается из (5) заменой r на $-r$ и d на $-d$.

Для обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды) получаем

$$\overline{R} = \frac{4r\,|R\pm r|}{|R\pm 2r|}\sin\frac{R\varphi}{2r}, \tag{5а}$$

где знак плюс соответствует эпициклоиде, а знак минус — гипоциклоиде.

Формулу (5а) можно переписать так:

$$\overline{R} = 2l\left|\frac{R\pm r}{R\pm 2r}\right| \tag{5б}$$

Здесь l — хорда ME производящего круга, соединяющая точку M эпициклоиды (гипоциклоиды) с соответствующей точкой опоры E производящего круга. Формула (5б) дает простой способ построения центра кривизны.

В начальных точках обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды) $\overline{R}=0$.

В вершинах

$$\overline{R}=\frac{4r\,|R\pm r|}{|R\pm 2r|}.$$

10. Эволюта. Эволюта обыкновенной эпициклоиды или гипоциклоиды (т. е. геометрическое место ее центров кривизны) есть линия, подобная исходной. Отношение подобия для эпициклоиды есть $R:(R+2r)$, а для гипоциклоиды $R:(R-2r)$. Эволюта имеет тот же центр, что *исходная эпициклоида (гипоциклоида). Вершины эволюты совпадают с начальными точками исходной линии* (ср. § 514, п. 10), *так что одну из этих линий можно получить из другой поворотом на угол* $\pi\cdot\frac{r}{R}$ с последующим пропорциональным изменением расстояний до центра.

Пример. Эволюта астроиды $ABCD$ (черт. 508), т. е. гипоциклоиды, для которой $R=4r$, есть тоже астроида, получаемая из данной поворотом около центра на угол 45° и пропорциональным изменением расстояний до центра в отношении $R:(R-2r)=4:2=2:1$. Начальные точки A, B, C, D будут вершинами эволюты.

11. Длина дуги s эпициклоиды между точками $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_1$:

$$s=\frac{R+r}{r}\int_0^{\varphi_1}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\frac{R\varphi}{2r}}\,d\varphi. \tag{6}$$

Эта дуга по длине равна дуге эллипса

$$x=2(d+r)\frac{R+r}{R}\cos\frac{R\varphi}{2r},\qquad y=2(d-r)\frac{R+r}{R}\sin\frac{R\varphi}{2r} \tag{7}$$

между точками с теми же значениями параметра φ.

Интеграл (6) в общем случае не выражается через элементарные функции аргумента φ_1. Но для обыкновенной эпициклоиды (эллипс вырождается в отрезок, длина которого есть $8r$) имеем

$$s=\frac{8r(R+r)}{R}\sin^2\frac{R\varphi_1}{4r}. \tag{8}$$

В частности, дуга между двумя соседними начальными точками равна

$$8r\left(1+\frac{r}{R}\right). \qquad (9)$$

Для гипоциклоиды все вышесказанное останется в силе, если заменить d, r соответственно на $-d$, $-r$.

12. Натуральное уравнение обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды):

$$\frac{\overline{R}^2}{a^2}+\frac{(s-b)^2}{b^2}=1 \quad (0 \leqslant s \leqslant 2b), \qquad (10)$$

где $a=\frac{4r\,(R\pm r)}{R\pm 2r}$, $b=\frac{4r\,(R\pm r)}{R}$, $\overline{R}$ — радиус кривизны, s — длина дуги, отсчитываемая от одной из начальных точек. В выражениях для a, b верхние знаки относятся к случаю эпициклоиды, нижние — к случаю гипоциклоиды. Уравнение (10) получается исключением параметра φ из (8) и (5a).

Если за начало отсчета дуг принять одну из вершин, то натуральное уравнение будет

$$\frac{R^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1 \quad (-b \leqslant s \leqslant b). \qquad (10a)$$

Ср. § 514, п. 13.

13. Кинематическое свойство. Уравнение (10) или (10a) выражает на языке кинематики следующее свойство: если дуга обыкновенной эпициклоиды или обыкновенной гипоциклоиды катится без скольжения по прямой AB, то центр кривизны точки касания движется по эллипсу; центр последнего лежит в той точке прямой AB, через которую прокатывается вершина эпициклоиды (гипоциклоиды); одна из полуосей совпадает с прямой AB и по длине равна полуветви эпициклоиды (гипоциклоиды) $\left|\frac{4r\,(R\pm r)}{R}\right|$, другая полуось есть радиус кривизны в вершине и равна $\left|\frac{4r\,(R\pm r)}{R\pm 2r}\right|$. Ср. § 514, п. 14.

14. Секториальная площадь S, описываемая полярным радиусом OM, который в исходном положении ведет к начальной точке эпициклоиды, выражается формулой

$$S=\frac{R+r}{2}\left\{\left(R+r+\frac{d^2}{r}\right)\varphi-\frac{d\,(R+2r)}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\}. \qquad (11)$$

В частности, для обыкновенной эпициклоиды

$$S = \frac{(R+r)(R+2r)}{2}\left\{\varphi - \frac{r}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\} \tag{12}$$

(Ньютон).

В случае гипоциклоиды в формулах (11) и (12) надо заменить r на $-r$.

В формулах (11) и (12) площадь рассматривается как направленная величина, т. е. принимается, что в тех промежутках изменения параметра φ, где полярный радиус вращается в отрицательном направлении, он описывает отрицательную площадь.

Площадь S_1 сектора, описываемого полярным радиусом OM обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды), когда точка M пробегает одну ветвь, выражается формулой

$$S_1 = \frac{\pi r(R \pm r)(R \pm 2r)}{R}, \tag{13}$$

где верхние знаки берутся для эпициклоиды, а нижние — для гипоциклоиды.

Площадь же S_2 соответствующего сектора направляющего круга есть

$$S_2 = \pi Rr. \tag{14}$$

Поэтому площадь $\overline{S}$ фигуры, ограниченной одной ветвью обыкновенной эпициклоиды (гипоциклоиды) и соответствующей дугой направляющей окружности выражается формулой

$$S = |S_1 - S_2| = \pi r^2\left|3 \pm 2\frac{r}{R}\right|. \tag{15}$$

Пример. Рассмотрим обыкновенную гипоциклоиду, для которой $r:R = 1:4$, т. е. астроиду $ABCD$ (черт. 508). По формуле (15) находим

$$\overline{S} = \pi r^2\left|3 - 2\cdot\frac{1}{4}\right| = \frac{5}{2}\pi r^2 = \frac{5}{32}\pi R^2. \tag{15а}$$

Это — площадь, ограниченная одной из ветвей астроиды, например ветвью AB, и соответствующей дугой $\smile{AB}$ направляющей окружности O ($\smile{AB} = 90°$).

Но ту же астроиду можно рассматривать и как гипоциклоиду, для которой $r:R = 3:4$ (п. 7). Тогда, применив формулу (15), найдем

$$S = \pi r^2\left|3 - 2\cdot\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{27}{32}\pi R^2. \tag{15б}$$

Этот результат может показаться нелепым. Однако надо учесть, что теперь для ветви AB астроиды соответствующей является не та дуга $\overset{\frown}{AB}$, которая содержит 90°, а вторая дуга ($BCDA$), содержащая 270°, так что формула (15б) выражает ту площадь, которая вместе с площадью (15а) заполняет весь круг O. В самом деле, сложив (15а) и (15б), получаем

$$\frac{27}{32}\pi R^2+\frac{5}{32}\pi R^2=\pi R^2.$$

15. Исторические сведения. Чтобы объяснить попятные движения планет, древнегреческие астрономы, следуя Гиппарху (II в. до н. э.), приписывали им равномерное движение по окружности (*эпицикл*), центр которой равномерно движется по другой окружности (*деферент*). Линия, описываемая точкой при этих условиях, является эпициклоидой. Мы не знаем, однако, какие геометрические ее свойства были известны ученым древности. В середине XIII века выдающийся мусульманский астроном и математик Мухаммед Насирэддин ат-Туси (1201—1274) установил, что точка окружности, катящейся по неподвижной окружности, вдвое большего радиуса, касаясь ее изнутри, описывает диаметр неподвижной окружности (п. 5). Это свойство независимо от Насирэддина было найдено великим польским астрономом Николаем Коперником (1473—1543); оно содержится в знаменитом его труде «Об обращениях небесных кругов», опубликованном в 1543 г Теорема Насирэддина—Коперника нашла широкое применение в прикладной механике.

Начало систематического изучения эпициклоид и гипоциклоид было положено в 1525 г. знаменитым немецким художником Альбрехтом Дюрером (1471—1528), широко применявшим геометрические методы в изобразительном искусстве. Однако математикам исследования Дюрера остались неизвестными.

В середине XVII века Ж. Дезарг (1593—1662), у которого глубина математических идей сочеталась с талантами конструктора, изучал свойства эпициклоид в связи с задачей создания зубчатых колес с наименьшим трением. Результаты этих, как и многих других, исследований Дезарга не были им опубликованы, но они были известны в кругу его друзей.

Ла Гир, продолживший исследования Дезарга, опубликовал в 1675 г. «Трактат об эпициклоидах и их применении в механике». Здесь установлен ряд важных свойств.

в частности, свойства, приведенные в пп. 7, 8, 10, 11, 14 и 15.

В своем бессмертном труде «Математические начала натуральной философии» (1687) Ньютон, обобщив исследования Гюйгенса о циклоидальном маятнике (§ 514, п. 17), установил, что в сферическом поле тяготения линией изохронного колебания маятника является эпициклоида.

Являясь естественным обобщением циклоид, эпициклоиды и гипоциклоиды многократно привлекали внимание исследователей; кроме вышеуказанных авторов упомянем еще Лейбница, Эйлера и Даниила Бернулли (1700–1782).

§ 516. Трактриса

1. Исторические сведения. Французский врач Клод Перров 1693 г. предложил ряду математиков такую задачу: один конец нерастяжимой нити прикреплен к материальной точке M, лежащей на горизонтальной плоскости; другой конец движется по прямой $X'X$, лежащей в той же плоскости. Какую линию опишет материальная точка, увлекаемая натянутой нитью?

Эта задача была решена Лейбницем, который составил дифференциальное уравнение искомой линии, исходя из того, что отрезок ее касательной от точки касания M до пересечения с прямой $X'X$ должен иметь постоянную длину (равную длине нити). Независимо от Лейбница и одновременно с ним задача была решена Гюйгенсом, который назвал найденную линию тракторией[1]). Сейчас ее чаще называют трактрисой[2]).

2. Определение. *Трактрисой* (черт. 510) называется геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что отрезок MP касательной от точки касания M до пересечения с данной прямой $X'X$ (направляющей) имеет данную величину a. Точка A трактрисы, наиболее удаленная от направляющей, называется *вершиной*, а перпендикуляр AO, опущенный из вершины на направляющую, — *высотой* трактрисы.

3. Параметрические уравнения (ось абсцисс — направляющая трактрисы, ось ординат направлена по высоте в сторону вершины A):

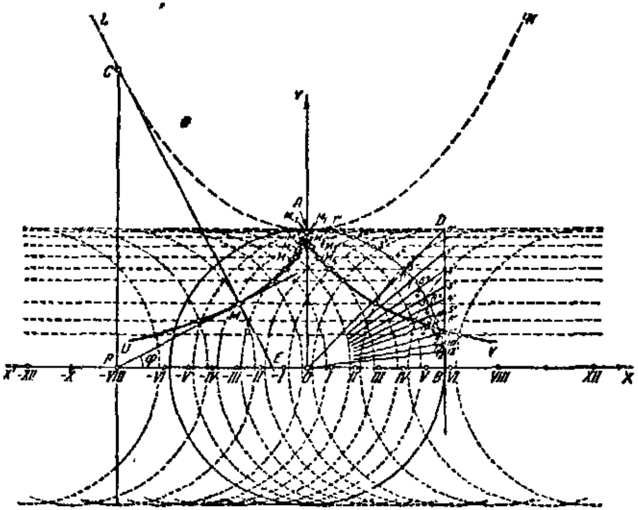
$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + a\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \\ y &= a\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

1) От того же латинского слова trahere (тянуть, увлекать), от которого образовано слово «трактор».

2) Дополнительные исторические сведения содержатся в п. 14.

где $\varphi = \angle XPM$ — угол, составленный лучом PM с положительным направлением оси абсцисс ($0 < \varphi < \pi$).

4. Особенности формы. Трактриса симметрична относительно высоты AO (последняя равна данному отрезку a). Прямая AO касается трактрисы в точке A; последняя является точкой возврата трактрисы. Трактриса



Черт. 510.

расположена по одну сторону от направляющей и удаляется в бесконечность в обе стороны от вершины. Направляющая является асимптотой трактрисы.

5. Построение. Чтобы построить трактрису по данной ее высоте a, проводим прямую $X'X$ (направляющую); из какой-либо точки O этой прямой, как из центра, проводим окружность радиуса a. В пересечении с лучом $OY \perp X'X$ находим точку A — вершину трактрисы. Через точку A, а также через одну из точек, где окружность O пересекает $X'X$, например через B, проводим касательные AD, BD к окружности; D — точка их встречи. На отрезке $BD = a$ берем ряд точек $1'$, $2'$, $3'$, ... так, чтобы

отрезки $BD, B1', B2', B3', \ldots$ образовывали геометрическую прогрессию

$$BD : B1' = B1' : B2' = B2' : B3' = \ldots = q.$$

Знаменатель q можно взять по произволу. Во избежание накопления погрешностей удобно поступить так: отрезок BD делим пополам точкой $4'$; отрезок $B4'$ делим пополам точкой $8'$ и т. д.; занумеровав для единообразия точку D цифрой $0'$, мы будем иметь ряд отрезков $B0'$, $B4'$, $B8'$, $B16', \ldots$, образующих прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$. Теперь между точками $0'$, $4'$ построим промежуточные точки $1'$, $2'$, $3'$ [1]) в следующем порядке: сначала находим точку $2'$ так, чтобы отрезок $B2'$ был средним пропорциональным между $B0'$ и $B4'$. Заодно отмечаем точку $6'$, делящую пополам отрезок $B2'$, и точку $10'$, делящую пополам отрезок $B6'$ [2]). Тогда получим ряд отрезков $B0'$, $B2'$, $B4'$, $B6'$, $B8'$, $B10', \ldots$, образующих геометрическую прогрессию со знаменателем $1 : 2^{1/2}$.

Далее строим точку $1'$ так, чтобы отрезок $B1'$ был средним пропорциональным между $B0'$ и $B2'$, а затем отмечаем точку $5'$ — середину отрезка $B1'$, точку $9'$ — середину отрезка $B5'$ и т. д. Таким же образом строится точка $3'$ (конец отрезка $B3'$, среднего пропорционального между $B2'$ и $B4'$), и затем отмечаются точка $7'$ (середина $B3'$), точка $11'$ (середина $B7'$) и т. д. [3]).

В результате мы получили ряд отрезков $B0'$, $B1'$, $B2', \ldots, B12', \ldots$, образующих прогрессию со знаменателем $1 : 2^{1/4}$.

Поступая так же, мы могли построить прогрессию отрезков со знаменателем $1 : 2^{1/8}$, $1 : 2^{1/16}$ и т. д.

Теперь на направляющей $X'X$ в обе стороны от точки O откладываем ряд равных отрезков

$$OI = I\,II = II\,III = III\,IV = \ldots = d.$$

---

[1]) Имея в виду разделить отрезок $0'4'$ на четыре части, мы заранее занумеровали его нижний конец цифрой $4'$; для большей точности можно делить этот отрезок на 8, на 16 и т. д. частей и тогда соответственно изменить нумерацию.

[2]) Номера 2, 6, 10 образуют арифметическую прогрессию с той же разностью (4), какую образовывали номера 0, 4, 8, 12, ...

[3]) Точки $7'$, $9'$, $11'$ на черт. 510 не показаны, чтобы не загромождать построения. Вообще нет нужды отмечать те точки, которые попадают внутрь слишком малых прежде построенных отрезков. Эти точки все равно не увеличат точность построения.

Теоретически точное значеине d определяется из пропорции

$$d : a = \ln (a : B1'). \tag{2}$$

Но если отношение $a : B1'$ близко к 1, то практически достаточно взять

$$d = O'1'\ ^{1)}. \tag{2a}$$

Дальнейшее построение протекает так: точки $1', 2', 3', \ldots$ соединяем с центром O и в пересечении лучей $O1'$, $O2'$, $O3', \ldots$ с окружностью отмечаем точки $1, 2, 3, \ldots$ (на черт. 510 эти номера проставлены внутри окружности; для единообразия номером 0 обозначена точка пересечения окружности с лучом OD).

Отложим на дуге BA от точки B дуги $B1^\circ = 2 \cdot B1$, дугу $B2^\circ = 2 \cdot B2$ и т. д. Через концы 1°, 2°, $3^\circ, \ldots$ удвоенных дуг (соответствующие номера проставлены на черт. 510 вне окружности) проведем прямые, параллельные направляющей $X'X$[2]), а из точек $\pm I, \pm II, \pm III$, как из центров, проведем полуокружности радиуса a, как показано на черт. 510 (полуокружности I, II, III обращены вогнутостью в сторону возрастания номеров центров, а полуокружности $-I$, $-II$, $-III$ — в обратную сторону).

Наконец, отмечаем пару точек, где полуокружности $\pm I$ пересекают прямую, проведенную через 1°, пару точек, где полуокружности $\pm II$ пересекают прямую, проведенную через 2°, и т. д. Все эти попарно симметричные точки принадлежат искомой линии.

6. Трактриса как ортогональная траектория; приближенное построение. Ортогональная траектория семейства окружностей радиуса a с центрами на данной прямой $X'X$ (т. е. линия, которая пересекает все эти окружности под прямым углом) есть

---

[1]) В нашем случае, когда $a : B1' = 2^{1/4}$, пропорция (2) дает

$$d = a \ln (2^{1/4}) = \frac{1}{4}\, a \ln 2 \approx 0{,}173\, a,$$

тогда как, полагая $d = O'1'$, мы получаем

$$d = O'1' = BO' - B1' = a\left(1 - \frac{1}{2^{1/4}}\right) \approx 0{,}160\, a.$$

Таким образом погрешность составляет 7,5 %.

[2]) Для этого лучше всего отложить на окружности O от точки A дуги, симметричные с дугами $A1^\circ$, $A2^\circ$, и соединить каждую из точек 1°, 2° с симметричной точкой.

трактриса. Указанное семейство окружностей имеет бесчисленное множество ортогональных траекторий: через каждую точку одной из окружностей проходит одна трактриса, ортогональная к этой окружности. Одна из траекторий изображена на черт. 510; другая симметрична с ней относительно $X'X$. Остальные получаются параллельным смещением этой пары трактрис вдоль прямой $X'X$.

Это свойство позволяет сделать довольно точный набросок трактрисы следующим образом. Начертив ряд полуокружностей радиуса a с центрами, густо расположенными на прямой $X'X$, и выбрав на одной из окружностей произвольную точку, удаленную от прямой $X'X$ примерно на расстояние $\frac{1}{3}a$, проводим через нее на глаз линию, пересекающую ряд соседних полуокружностей под прямым углом, т. е. направленную всякий раз вдоль соответствующего радиуса. Можно поступить и так: отметим точку пересечения радиуса взятой окружности (или продолжения этого радиуса) с соседней полуокружностью; центр последней соединим с найденной точкой и отметим точку пересечения нового радиуса со следующей полуокружностью и т. д. Получим ломаную линию, которая при достаточной густоте центров практически заменяет искомую трактрису. Точность построения уменьшается по мере приближения к вершине.

7. Построение касательной. Чтобы построить касательную в данной точке M трактрисы с данными вершиной A и направляющей $X'X$, достаточно засечь на $X'X$ точку P дугой, проведенной из центра M радиусом $AO = a$. Прямая MP есть искомая касательная.

8. Радиус кривизны

$$R = a \operatorname{ctg} \varphi. \tag{3}$$

Геометрически эта формула выражает (см. черт. 510), что *радиус кривизны трактрисы в точке M есть отрезок MC нормали от точки M до пересечения с прямой PC, проведенной перпендикулярно к направляющей $X'X$ через точку P ее пересечения с касательной в точке M.*

Построенная указанным образом точка C есть центр кривизны трактрисы в точке M.

Радиус кривизны в вершине A

$$R_A = a. \tag{3a}$$

Радиус кривизны MC и отрезок нормали ME (от точки M до пересечения E с направляющей) связаны соотношением

$$MC \cdot ME = a^2, \tag{4}$$

т. е. *радиус кривизны MC и отрезок нормали ME обратно пропорциональны.*

9. Эволюта. Эволюта LAN трактрисы (черт. 510), т. е. геометрическое место ее центров кривизны C, есть *цепная линия* (§ 517). В системе координат OXY черт. 510 уравнение эволюты имеет вид

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{5}$$

или, что то же,

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{5a}$$

10. Длина s дуги $\smile{AM}$ выражается формулой

$$s = a \ln \csc \varphi = a \ln \frac{a}{y}.$$

Разность $s - |x|$ между длиной дуги $\smile{AM}$ и длиной ее проекции на направляющую при неограниченном удалении точки M от вершины A стремится к пределу $a(1 - \ln 2)$.

$$\lim_{x \to \infty} (s - |x|) = a(1 - \ln 2) \approx 0{,}307\,a. \tag{6}$$

11. Натуральное уравнение

$$s = a \ln \sqrt{\frac{R^2}{a^2} + 1}. \tag{7}$$

12. Площадь S бесконечной полосы, заключенной между трактрисой и ее асимптотой $X'X$, вдвое меньше площади круга, радиус которого есть высота AO трактрисы:

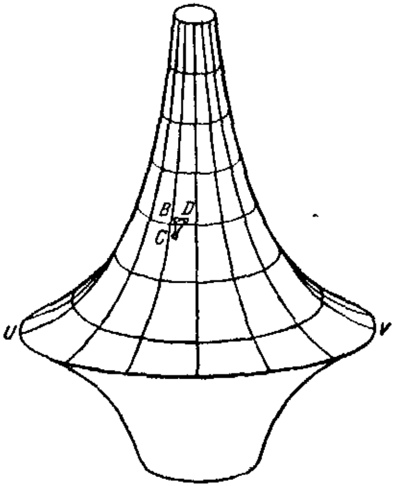
$$S = \frac{1}{2}\pi a^2. \tag{8}$$

13. Тело вращения трактрисы около асимптоты $X'X$ (бесконечно протяженное вдоль $X'X$) имеет конечную поверхность S_1, равную поверхности шара радиуса R, и конечный объем V, равный половине объема этого шара:

$$S_1 = 4\pi a^2, \tag{9}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3. \tag{10}$$

14. Трактриса и псевдосфера. Поверхность (черт. 511), образованная вращением трактрисы около ее асимптоты, называется *псевдосферой*. Эта поверхность названа так потому, что между ней и поверхностью шара существует глубокая аналогия. Так, если три точки B, C, D на поверхности шара попарно соединить кратчайшими дугами, то в полученном сферическом треугольнике BCD сумма внутренних углов всегда будет больше, чем π, причем избыток суммы $B+C+D$ над π равен отношению



Черт. 511

площади S сферического треугольника к квадрату радиуса a шара:

$$(B+C+D)-\pi=\frac{S}{a^2}. \tag{11}$$

Если же взять три точки B, C, D (черт. 511) на псевдосфере (по одну сторону от параллели UV, описанной вершиной трактрисы) и тоже соединить их кратчайшими дугами, то в полученном псевдосферическом треугольнике сумма внутренних углов всегда будет меньше, чем π, причем недостаток суммы $B+C+D$ до π равен отношению площади S псевдосферического треугольника к квадрату радиуса a параллели UV.

$$\pi-(B+C+D)=\frac{S}{a^2}. \tag{12}$$

Замечательно, что свойством (12) обладают прямолинейные треугольники в геометрии Лобачевского. И вообще на любом куске псевдосферы, не содержащем точек параллели UV, осуществляются все без исключения свойства, которыми обладает некоторый кусок плоскости в геометрии Лобачевского. Это открытие, сделанное в 1863 г. итальянским геометром Е. Бельтрами (1835 – 1900), устранило то недоверие к геометрии Лобачевского, с которым к ней прежде относились почти все математики, в том числе и очень видные.

§ 517. Цепная линия

1. Определение. *Цепной линией* называется линия, по которой провешивается однородная нерастяжимая нить, закрепленная в двух ее концах.

Замечание 1. В первоначальной постановке вопроса (см. п. 9) речь шла о линии провеса цепи, откуда и название «цепная линия». Заменяя цепь нитью, мы отвлекаемся от ряда обстоятельств (размер звеньев, их трение и т. д.), затрудняющих исследование. Напряжение земного тяготения предполагается постоянным по величине и направлению.

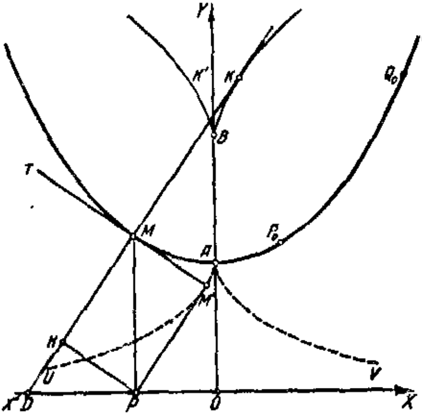
Замечание 2. В зависимости от положения точек P, Q, где закрепляются концы нити, и от длины l самой нити ($l>PQ$) дуга провеса имеет различный вид. Однако исследование показывает, что изображение дуги PQ, сделанное в надлежащем масштабе, можно совместить с некоторой дугой P_0Q_0 (черт. 512) вполне определенной бесконечной линии LAN. Именно к этой бесконечной линии в целом (а не к дуге провеса, составляющей ее часть) и относится наименование «цепная линия».

Низшая точка A цепной линии называется ее *вершиной*.

2. Уравнение. Если за начало координат принять вершину цепной линии (что представляется довольно естественным), а ось ординат направить вертикально вверх, то цепная линия представится уравнением

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a, \tag{1}$$

где a (*параметр* цепной линии) есть длина такого отрезка нити, вес которого равен горизонтальной составляющей натяжения нити (эта составляющая постоянна на всем протяжении дуги провеса).



Черт. 512.

Однако обычно начало координат берут в точке O, лежащей ниже точки A на расстоянии a. Тогда получаем более простое уравнение

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{2}$$

или, пользуясь обозначениями гиперболических функций (§ 403),

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{2a}$$

Таким образом, цепная линия есть график функции ch x (если отрезок a принять за единицу масштаба).

Ось абсцисс $X'X$, т. е. прямая, параллельная касательной в вершине A и лежащая ниже этой вершины на расстоянии a, называется *директрисой* цепной линии.

3. Цепная линия и трактриса. Цепная линия (LAN на черт. 512) есть эволюта трактрисы UAV, высота которой равна параметру a цепной линии. Трактриса UAV

является той эвольвентой цепной линии, у которой начальная точка есть вершина A цепной линии. Иначе говоря, отрезок MM' касательной MT от точки касания M до пересечения с трактрисой UAV в точке M' по длине равен дуге MA цепной линии.

4. Построение. Чтобы построить цепную линию с данным параметром a, найдем предварительно ряд точек трактрисы с высотой a (§ 516, п. 5). Попутно будем соединять каждую такую точку M' (черт. 512) с центром P соответствующей полуокружности. Прямая $M'P$ – касательная к трактрисе. Теперь проводим нормаль $M'M$ трактрисы ($MM' \perp M'P$) до пересечения в точке M с перпендикуляром PM, восставленным из точки P к направляющей $X'X$. Точка M (центр кривизны трактрисы) принадлежит искомой цепной линии LAN.

Замечание. Нормаль $M'M$ трактрисы является касательной ее эволюты LAN (§ 346, п. 1). Это свойство облегчает проведение плавной линии через ряд построенных точек M. Вместе с тем оно позволяет проконтролировать точность построения.

5. Длина дуги. Длина s дуги $\smile{AM}$ цепной линии, отсчитываемой от вершины A, равна проекции MM' ординаты PM на касательную MT и выражается формулой

$$s = \smile{AM} = MM' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{3}$$

или

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \tag{3a}$$

С ординатой $PM = y$ дуга s связана соотношением

$$s^2 + a^2 = y^2. \tag{4}$$

Последнее вытекает из (2) и (3) и легко прочитывается из треугольника $PM'M$, где $PM = y$, $MM' = s$ и $PM' = a$ (по основному свойству трактрисы).

6. Проекция ординаты на нормаль. Проекция MH ординаты MP цепной линии на нормаль MD имеет постоянную длину a:

$$HM = OA = a. \tag{5}$$

Это соотношение прочитывается из прямоугольника $MM'PH$, где $MH = M'P = a$ (по основному свойству трактрисы).

7. Радиус кривизны. Радиус кривизны $MK=R$ цепной линии равен отрезку MD нормали от точки M до директрисы $X'X$ и выражается формулой

$$R = MD = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 \tag{6}$$

или

$$R = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}. \tag{6a}$$

8. Построение центра кривизны; эволюта цепной линии. Чтобы построить центр кривизны цепной линии в данной ее точке M, продолжаем нормаль MD за точку M и откладываем отрезок $MK = MD$. Точка K – искомый центр кривизны. Так строится по точкам линия $K'BK$, описываемая центром кривизны, т. е. эволюта цепной линии. Ее параметрические уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= a\left[\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a} + \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a} - \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\right], \\ y_K &= 2a\operatorname{ch}\frac{x}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Точка B (центр кривизны для вершины A) есть точка возврата эволюты (7).

9. Натуральное уравнение цепной линии:

$$R = \frac{s^2}{a} + a. \tag{8}$$

Оно получается из (3а) и (6а) исключением x. На языке кинематики уравнение (8) означает следующее: если цепная линия катится без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания описывает параболу; ось последней вертикальна; вершина лежит в точке B; параметр параболы равен полупараметру $\frac{a}{2}$ цепной линии.

10. Площадь S «криволинейной трапеции» $OAMP$ ($OA=a$ – ордината вершины, PM – ордината конца M дуги $\smile{AM}=s$) равна площади прямоугольника со сторонами a, s, так что

$$S = as = a^2\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}. \tag{9}$$

11. Исторические сведения. Когда точки закрепления цепи находятся на одинаковой высоте и цепь ненамного длиннее, чем расстояние между точками закрепления, дуга провеса кажется тождественной с дугой параболы. Долгое время так и считалось. Исследования Галилея в области механики поставили под сомнение правильность этого мнения, но самому Галилею не удалось ни подтвердить его, ни опровергнуть. В 1669 г. Юнгнус установил как теоретически, так и экспериментально, что линия провеса цепи не является параболой. Но для разыскания истинной формы этой линии математика в это время еще не располагала необходимыми средствами. Вскоре после того, как Ньютон и Лейбниц разработали методы анализа бесконечно малых, оказалось возможным решить и задачу о линии провеса цепи. Эта задача была сформулирована в 1690 г. Яковом Бернулли и тотчас же решена его братом Иваном Бернулли, Гюйгенсом и Лейбницем.

Я. Бернулли поставил и другую задачу: пренебрегая весом паруса, раздуваемого ветром, найти линию профиля паруса. Самому Я. Бернулли удалось лишь составить дифференциальное уравнение. Иван Бернулли решил его. Оказалось, что искомый профиль является цепной линией.

В 1744 г. Эйлер поставил и решил такую задачу: на плоскости даны: прямая AB и две точки C, D (не лежащие на AB). Провести через C и D такую линию, чтобы поверхность, образованная ее вращением около оси AB, имела наименьшую площадь. Оказалось, что и эта кривая является цепной линией (прямая AB — ее директриса).

Поверхность вращения цепной линии около ее директрисы (*катеноид*[1])) обладает и более общим свойством, а именно: *любой* ее кусок по площади меньше, чем всякая другая поверхность, ограниченная тем же контуром. Это свойство катеноида было найдено в 1776 г. выдающимся французским математиком, инженером и полководцем Ж. Менье. Тем же свойством обладает целый класс поверхностей (так называемые *минимальные* поверхности[2])). Но среди поверхностей вращения катеноид является единственной поверхностью этого класса.

Значение цепной линии для техники обусловлено, между прочим, тем, что собственный вес арки, имеющей форму цепной линии, не действует на прогиб арки.

[1]) От латинского catena — цепь.

[2]) Менье указал еще одну минимальную поверхность: *геликоид* (она образуется винтовым движением горизонтальной прямой, пересекающей вертикальную ось).

ТАБЛИЦЫ

I. Натуральные логарифмы [1])

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953

[1]) Натуральный логарифм числа, не содержащегося *среди аргументов* таблицы, находится следующим образом. Пусть ищется $\ln 753$. Имеем: $\ln 753 = \ln(7{,}53 \cdot 10^2) = \ln 7{,}53 + 2 \ln 10$. Первое слагаемое находим по таблице натуральных логарифмов, второе — по таблице III. Получаем: $\ln 753 = 2{,}0189 + 4{,}6052 = 6{,}6241$.

Таким же образом находим $\ln 0{,}00753 = \ln(7{,}53 \cdot 10^{-3}) = 2{,}0189 - 6{,}9078 \approx -4{,}8889$.

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782

Продолжение

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

II. Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным (таблица умножения на $M = \log e = 0{,}4342945\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	4,3430	8,6859	13,0288	17,3718	21,7147	26,0577	30,4006	34,7436	39,0865
1	0,4343	4,7772	9,1202	13,4631	17,8061	22,1490	26,4920	30,8349	35,1779	39,5208
2	0,8686	5,2115	9,5545	13,8974	18,2404	22,5833	26,9263	31,2692	35,6122	39,9551
3	1,3029	5,6458	9,9888	14,3317	18,6747	23,0176	27,3606	31,7035	36,0464	40,3894
4	1,7372	6,0801	10,4231	14,7660	19,1090	23,4519	27,7948	32,1378	36,4807	40,8237
5	2,1715	6,5144	10,8574	15,2003	19,5433	23,8862	28,2291	32,5721	36,9150	41,2580
6	2,6058	6,9487	11,2917	15,6346	19,9775	24,3205	28,6634	33,0064	37,3493	41,6923
7	3,0401	7,3830	11,7260	16,0689	20,4118	24,7548	29,0977	33,4407	37,7836	42,1266
8	3,4744	7,8173	12,1602	16,5032	20,8461	25,1891	29,5320	33,8750	38,2179	42,5609
9	3,9086	8,2516	12,5945	16,9375	21,2804	25,6234	29,9663	34,3093	38,6522	42,9952

III. Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным $\left(\text{таблица умножения на } \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}302585\right)$

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	23,026	46,052	69,078	92,103	115,129	138,155	161,181	184,207	207,233
1	2,3026	25,328	48,354	71,380	94,406	117,431	140,458	163,484	186,509	209,535
2	4,6052	27,631	50,657	73,683	96,709	119,734	142,760	165,786	188,812	211,838
3	6,9078	29,934	52,959	75,985	99,011	122,037	145,062	166,089	191,115	214,140
4	9,2103	32,236	55,262	78,288	101,314	124,340	147,365	170,391	193,417	216,443
5	11,513	34,539	57,565	80,590	103,616	126,642	149,668	172,694	195,720	218,746
6	13,816	36,841	59,867	82,893	105,919	128,945	151,971	174,997	198,022	221,048
7	16,118	39,144	62,170	85,196	108,221	131,247	154,273	177,299	200,325	223,351
8	18,421	41,447	64,472	87,498	110,524	133,550	156,576	179,602	202,627	225,653
9	20,723	43,749	66,775	89,801	112,827	135,853	158,878	181,904	204,930	227,956

IV. Показательная функция e^x (натуральные антилогарифмы)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3,0042	3,0344	3,0649	3,0957	3,1268	3,1582	3,1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3,4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3,7062	3,7434	3,7810	3,8190	3,8574	3,8962	3,9354	3,9749	4,0149
1,4	4,0552	4,0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4,3929	4,4371
1,5	4,4817	4,5267	4,5722	4,6182	6,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5,0028	5,0531	5,1039	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5,3656	5,4195
1,7	5,4739	5,5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,9299	5,9895
1,8	6,0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6,4237	6,4883	6,5535	6,6194
1,9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6,9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7,6906	7,7679	7,8460	7,9248	8,0045	8,0849
2,1	8,1662	8,2482	8,3311	8,4149	8,4994	8,5849	8,6711	8,7583	8,8463	8,9352
2,2	9,0250	9,1157	9,2073	9,2999	9,3933	9,4877	9,5831	9,6794	9,7767	9,8749
2,3	9,9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15,029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16,777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17,814	17,993
2,9	18,174	18,357	18,541	18,728	18,916	19,106	19,298	19,492	19,688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21,328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22,421	22,646	22,874	23,104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25,028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26,576	26,843
3,3	27,113	27,385	27,660	27,938	28,219	28,503	28,789	29,079	29,371	29,666
3,4	29,964	30,265	30,569	30,877	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33,784	34,124	34,467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3,6	36,598	36,966	37,338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3,7	40,447	40,854	41,264	41,679	42,098	42,521	42,948	43,380	43,816	44,256
3,8	44,701	45,150	45,604	46,063	46,525	46,993	47,465	47,942	48,424	48,911
3,9	49,402	49,899	50,400	50,907	51,419	51,935	52,457	52,985	53,517	54,055

V. Таблица неопределенных интегралов

1. Функции, содержащие $a+bx$ в целой степени

1) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln (a+bx) + C.$

2) $\int (a+bx)^n \, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$

3) $\int \frac{x\,dx}{1+bx} = \frac{1}{b^2} [a+bx-a \ln (a+bx)] + C.$

4) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a+bx)^2 - 2a(a+bx) + \right.$
$$\left. + a^2 \ln (a+bx)\right] + C.$$

5) $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

6) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln (a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a+bx-2a \ln (a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C.$

9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$

10) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C.$

2. Функции, содержащие a^2+x^2, a^2-x^2, $a+bx^2$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$

или

14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C.$

15) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} x \sqrt{\frac{b}{a}} + C$ при $a > 0$ и $b > 0.$

Если a и b отрицательны, то знак $(-)$ выносится за интеграл, а если a и b разных знаков, то пользуются № 16.

16) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C.$

17) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln \left(x^2 + \frac{a}{b}\right) + C.$

18) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+bx^2},$

далее см. № 15 или № 16.

19) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a+bx^2} + C.$

20) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2},$

далее см. № 15 или № 16.

21) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+bx^2},$

далее см. № 15 или № 16.

3. Функции, содержащие $\sqrt{a+bx}$

22) $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3} + C.$

23) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C.$

24) $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C.$

25) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$

26) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C.$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C$ при $a>0.$

28) $\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C$ при $a<0.$

29) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$

далее см. № 27 или № 28.

30) $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$

далее см. № 27 или № 28.

4. Функции, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$

31) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

32) $$\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

33) $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C.$$

34) $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

35) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

36) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

37) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}+C.$$

38) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

39) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

40) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

41) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$$

42) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

43) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2+a^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

44) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

5. Функции, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$

45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

48) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

49) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

50) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

51) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

52) $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx =$

$$= \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

53) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} + C.$

54) $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5} + C.$

55) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

$$= \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

56) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

57) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

58) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

59) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

60) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

61) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

6. Функции, содержащие $\sqrt{x^2-a^2}$

62) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

63) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

64) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}+C.$

65) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

66) $$\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$

67) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C.$

68) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C.$

69) $$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$

70) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

71) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

72) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x+C.$

73) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C.$

74) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

75) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C.$

76) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

77) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

7. Функции, содержащие $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$

Функция, содержащая $\sqrt{2ax-x^2}$, интегрируется подстановкой $t = x-a$. Тогда $\sqrt{2ax-x^2}$ получит вид $\sqrt{a^2-t^2}$, и интеграл находят в группе 5 этой таблицы. Если его в таблице нет, то стараются привести его к виду, имеющемуся в таблице.

То же можно сказать и о функции, содержащей выражение $\sqrt{2ax+x^2}$. В этом случае подстановка $t = x+a$ приводит радикал к виду $\sqrt{t^2-a^2}$ (группа 6 этой таблицы).

8. Функции, содержащие $a+bx+cx^2$ $(c>0)$

78) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & \text{если } b^2 < 4ac. \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C, & \text{если } b^2 > 4ac. \end{cases}$$

79) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

80) $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

81) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

9. Функции, содержащие $a+bx-cx^2$ $(c>0)$

82) $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} + C.$$

83) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

84) $$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

85) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

10. Другие алгебраические функции

86) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right) + C.$$

87) $$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$$

88) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$$

89) $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

90) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

11. Показательные и тригонометрические функции

91) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 92) $\int e^x\,dx = e^x + C.$

93) $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$ 94) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

95) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$ 96) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C.$

97) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C.$

98) $$\int \operatorname{sc} x\,dx = \ln(\operatorname{sc} x + \operatorname{tg} x) + C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

99) $$\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

100) $\int \operatorname{sc}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

101) $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

102) $\int \operatorname{sc} x\,\operatorname{tg} x\,dx = \operatorname{sc} x + C.$

103) $\int \csc x \operatorname{ctg} x\, dx = -\csc x + C.$

104) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

105) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

106) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$

Эта формула употребляется несколько раз, пока не приведет к интегралу $\int \sin x\, dx$ или $\int \sin^2 x\, dx$ (в зависимости от того, четное или нечетное n), а эти интегралы см. под №№ 94 и 104.

107) $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$

(см. замечание к предыдущему интегралу и №№ 95 и 105).

108) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

Употребляется несколько раз, пока не приведется к интегралу $\int dx$, если n — четное, или к интегралу $\int \frac{dx}{\sin x}$, если n — нечетное (последний интеграл дан под № 99).

109) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ (см. замечание к предыдущему интегралу и № 98).

110) $\int \sin x \cos^n x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

111) $\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

112) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx =$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx.$$

Упротребляется несколько раз, пока степень косинуса не будет равна нулю (если m — четное) или единице (если m — нечетное). В первом случае см. № 106, во втором — № 111. Этой формулой следует пользоваться, когда $m<n$. Если $m>n$, то лучше пользоваться следующей:

113) $\int \cos^m x \sin^n x\, dx =$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\, dx$$

(см. замечание к предыдущему интегралу и №№ 107 и 110).

$$\left.\begin{aligned}
&114)\ \int \sin mx \sin nx\,dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.\\
&115)\ \int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.\\
&116)\ \int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.
\end{aligned}\right\}\quad (m \neq n)$$

117) $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C,$$ если $a > b$.

118) $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}} + C,$$ если $a < b$.

119) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C,$$ если $a > b$.

120) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}} + C,$$ если $a < b$.

121) $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$$

122) $$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

123) $$\int e^{ax} \sin nx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

124) $$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

125) $$\int e^{ax} \cos nx\,dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

126) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C.$

127) $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$

Формула применяется несколько раз, пока степень x не сделается равной единице; тогда интеграл находят под № 126.

128) $\int xa^{mx}\,dx = \frac{xa^{mx}}{m\ln x} - \frac{a^{mx}}{m(\ln a)^2}+C.$

129) $\int x^n a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}x^n}{n\ln a} - \frac{n}{m\ln a}\int a^{mx} x^{n-1}\,dx.$

Формула применяется до тех пор, пока степень x не сделается равной единице; тогда интеграл находят под № 128.

130) $$\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x\,(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

Формула применяется до тех пор, пока косинус не исчезнет (в случае четного n) или пока его степень не сделается равной единице (в случае нечетного n). В последнем случае см. № 122.

131) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

132) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

133) $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x + C.$

134) $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x + C.$

135) $\int \operatorname{sch} x\,dx = 2\operatorname{arctg} e^x + C.$

136) $\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2} + C.$

137) $\int \operatorname{sch}^2 x\,dx = \operatorname{th} x + C.$

138) $\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\operatorname{cth} x + C.$

139) $\int \operatorname{sch} x \operatorname{th} x\,dx = \operatorname{sch} x + C.$

140) $\int \operatorname{csch} x \operatorname{cth} x\,dx = -\operatorname{csch} x + C.$

141) $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C.$

142) $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 2x + C.$

12. Логарифмические функции

Даются функции, содержащие только натуральный логарифм. Если требуется найти интеграл от функции, содержащей логарифм при другом основании, то предварительно переводят его в натуральный по формуле $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, а затем пользуются таблицей.

143) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

144) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

145) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

146) $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx.$

Формула употребляется до тех пор, пока не получится интеграл $\int \ln x\,dx$, который берется по формуле № 143.

147) $\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x\,dx.$

Формула употребляется до тех пор, пока не приведет к интегралу № 145.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Название	Печатные буквы	Рукописные буквы	Название
A a	*A a*	а	*N n*	*N n*	эн
B b	*B b*	бэ	*O o*	*O o*	о
C c	*C c*	цэ	*P p*	*P p*	пэ
D d	*D d*	дэ	*Q q*	*Q q*	ку
E e	*E e*	э	*R r*	*R r*	эр
F f	*F f*	эф	*S s*	*S s*	эс
G g	*G g*	гэ (жэ)	*T t*	*T t*	тэ
H h	*H h*	ха (аш)	*U u*	*U u*	у
I i	*I i*	и	*V v*	*V v*	вэ
J j	*J j*	йот (жи)	*W w*	*W w*	дубль-вэ
K k	*K k*	ка	*X x*	*X x*	икс
L l	*L l*	эль	*Y y*	*Y y*	игрек
M m	*M m*	эм	*Z z*	*Z z*	зэт

Греческий алфавит

Αα	альфа	Νν	ню (ни)
Ββ	бэта	Ξξ	кси
Γγ	гамма	Οο	омикрон
Δδ	дельта	Ππ	пи
Εε	эпсилон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	эта	Ττ	тау
Θθ, ϑ	тэта	Φφ	фи
Ιι	йота	Χχ	хи
Κκ	каппа	Υυ	юпсилон (ипсилон)
Λλ	ламбда	Ψψ	пси
Μμ	мю (ми)	Ωω	омега

Марк Яковлевич Выгодский

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

М., 1977 г., 872 стр. с илл.

Редакторы: *И. М. Овчинникова и Г. Я. Пирогова.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректор *Т. А. Панькова*

Печать с матриц.
Подписано к печати 30 09. 1976
Бумага 70×90$^{1}/_{32}$.
Физ. печ. л. 27,25. Условн. печ. л. 31,88.
Уч.-изд. л. 45,79.
Тираж 150 000 экз. Т-15165.
Цена книги 2 р. 60 к. Заказ № 20019

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография «Франклин», Будапешт, Венгрия