

**GENERAL RELATIVITY  
AND GRAVITATIONAL  
WAVES**

**J. Weber**

*Professor of Physics, University of Maryland  
College Park, Maryland*

New York, 1961

Дж. Вебер

---

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ  
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ**

---

Перевод с английского  
Н. Мицкевича

Под редакцией  
проф. Д. Иваненко

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1962

Настоящая книга, написанная известным американским физиком Джозефом Вебером, посвящена общей теории относительности в нынешнем ее состоянии и современной теории гравитации. Автор сжато, но с большой ясностью излагает основные положения римановой геометрии и тензорного анализа. Затем достаточно подробно рассматриваются уравнения поля в общей теории относительности и их решения, экспериментальные основы теории гравитации и законы сохранения. Центром тяжести книги является актуальнейшая в настоящее время проблема гравитационных волн, освещение как теоретических, так и экспериментальных аспектов которой, построенное на современном материале, можно считать одним из самых полных в существующей мировой литературе.

В заключительной части книги кратко затронуты вопросы космологии, единой теории поля, квантования полей и др. В конце книги приведен ряд упражнений, имеющих целью помочь читателю развить более глубокий взгляд на обсуждаемые вопросы.

В конце книги редакцией помещено два дополнения: небольшая статья Вебера и др. о возможностях детектирования гравитационных волн и обзор известного английского ученого Г. Бонди, посвященный анализу развития общей теории относительности и обсуждению ряда теоретических проблем в области теории гравитации и гравитационных волн.

Книга рассчитана на физиков — теоретиков и экспериментаторов и радиофизиков, приступивших или собирающихся ставить гравитационные исследования, а также представляет интерес для преподавателей, аспирантов и студентов физических специальностей.

---

# Вступительная статья

---

## 1. Введение

Книга „Общая теория относительности и гравитационные волны“ авторитетного американского физика Джозефа Вебера, профессора университета в Мэриленде, была опубликована в 1961 г. под № 10 в известной серии Р. Маршака, из которой на русский язык переведены книги Юза, Ливингстона и др.

Дж. Вебер, хорошо известный как специалист по атомным стандартам частоты („часам“), ныне вплотную занялся гравитационными волнами. Кроме теоретических исследований, ему принадлежит обративший на себя общее внимание первый реальный расчет генератора и детектора гравитационных волн, основанного на использовании пьезоэлектрика, натяжения в котором оказываются более выгодным источником, чем вращающиеся тела (см. гл. 8).

После сжатого введения в риманову геометрию и основы общей теории относительности (ОТО) [1] Вебер уделяет главное внимание гравитационным волнам, посвящая им две большие главы. Излучение гравитационных волн, вопрос об их энергии стали в порядок дня в качестве важнейшей задачи № 1 современной гравитационной динамики.

Наряду с этим Вебер обсуждает 3 доказательства ОТО, в том числе земной опыт Паунда - Крэншоу с гравитационным сдвигом частот, эксперименты Этвеша по сравнению инертной и гравитационной масс, новейшие опыты по анизотропии массы и др.

Заключительная глава посвящена отдельным актуальным вопросам: космологии, единой теории, квантованию, спинорам и др. Здесь автор не претендует на полноту; из единых теорий, например, рассматривается только „геометродинамика“ Уилера [5].

Таким образом, книга Вебера как по своей связи с эмпирикой, так и по фундаментальной трактовке гравитационных

волн и освещению ряда удачно выбранных новейших проблем весьма характерна для современной ситуации, существенно отличается от других монографий по теории относительности и, несомненно, займет важное место в имеющейся у нас литературе по этой ставшей весьма актуальной проблеме.

Напомним теперь совсем кратко современное положение в гравитинамике [2—5], которое может быть охарактеризовано как интенсивное исследование эйнштейновской теории, в частности трех типов решений Петрова, уравнений движения, тензора энергии [6], как период подготовки новых экспериментов [7, 8]<sup>1)</sup> (см. оптику в ОТО [7]) анализа космологических проблем, различных подходов к квантованию и попыток обобщения теории (закрученное пространство, компенсационная трактовка, уменьшающаяся константа тяготения и др.). Волна интереса к гравитации продолжает нарастать в связи с проблемами физики элементарных частиц и построения единой теории, благодаря острому интересу к проблемам пространства — времени — тяготения — космологии, вызванному запуском спутников и полетами космонавтов, а также ввиду необходимости учета тонких сторон гравитации в проблемах геологии и физики Земли (в частности, уточнения ее формы и возможного расширения). Ныне общественность с интересом обсуждает результаты очередной Международной гравитационной конференции (Варшава, июль, 1962 г.), четвертой после конгрессов в Берне (1955), Чэпел Хилле (США, 1957) и Руайомоне — Париже (1959). Важные дискуссии были проведены на 1-й Советской гравитационной конференции в 1961 г. в Москве [9] и на симпозиуме в Японии (весна 1962 г.).

<sup>1)</sup> В связи с новыми экспериментами внимание вновь было привлечено к проблеме экранировки тяготения. В свое время Майорана утверждал, что ему якобы удалось обнаружить экранировку в  $10^{-9}$  части соответствующего ньютоновского притяжения ( $N$ ); однако позднее Томашек не нашел даже тысячной доли подобной экранировки во время полного солнечного затмения. В. Б. Брагинский, В. П. Руденко и Г. И. Рукман [23] в недавних опытах также не обнаружили эффекта экранировки на уровне  $\geq 1,3 \cdot 10^{-10}$  от  $N$ ; по-видимому, из ОТО следует ожидать только эффекта порядка  $(G^2/2c^2)(m_1 m_2 m_3/r_{12}^2 r_{13}^2)$ , что составляло в данных условиях всего  $\sim 10^{-25}$  от  $N$ .

Общепризнанной базой гравитации является теория Эйнштейна, созданная исторически в рамках так называемой ОТО; главной идеей ее является отождествление потенциалов гравитации с метрическим тензором римановой геометрии искривленного пространства — времени. Для самого Эйнштейна трудный путь создания теории лежал через „принцип эквивалентности“, утверждающий локальную равноценность тяготения и ускоренной системы координат. Суть дела скорее всего заключается в универсальной равноценности инертной и тяжелой массы. Излишняя геометризация тяготения, сторонником которой является Л. Инфельд, отсутствие однородности или симметрии в римановом пространстве, подчеркнутое Э. Картаном, а также В. А. Фоком, стремящимся выделить преимущественные системы при помощи условия гармоничности, и другие принципиальные вопросы постоянно служат предметом дискуссий. Хотя, конечно, не может быть речи о возврате к „нормальной“ гравитационной динамике, построенной по образцу электро- или мезодинамики, как к теории гравитационного поля, „вложенного“ в пространство — время, следует все же признать, что для большинства реальных следствий ОТО вовсе не нужно привлекать всей ее сложной системы нелинейных уравнений, а достаточно ограничиться слабым линейным полем. (В этой связи см. вывод шварцшильдовской метрики при помощи преобразований Лоренца и ньютонова закона как нулевого приближения [10] и модельную нелинейную теорию с абсолютным временем [11].)

Наряду с обсуждением ряда принципиальных вопросов ОТО В. А. Фок в своей книге [12] поддерживает предложение Фоккера о переименовании теории в „хроногеометрию“, вероятно, обреченное на неудачу (притом не только по эстетическим причинам). Это название, подчеркивая геометризованную сторону, умалчивает о „гравитационной“<sup>1)</sup>, т. е. о близости поперечной части поля (гравитонов) с обычной материей благодаря возможности взаимных трансмутаций.

Весьма перспективной представляется нам „компенсационная“ точка зрения, сближающая гравитационное поле с другими бозонными полями, возникающими, согласно Сакураи, при переходе от постоянной к локализованной фазе

<sup>1)</sup> Этот термин был недавно предложен Б. ДеВитом и нами.

в калибровочных преобразованиях. Аналогично представляется разумным трактовать гравитационное поле как компенсирующее при переходе от постоянных к локализованным параметрам лоренцовой группы. При этом возникает, по-видимому, возможность получить обобщенные, вообще не симметричные коэффициенты связности, включающие кручение наряду с обычными символами Кристоффеля [13]. Остановимся теперь на некоторых пунктах, требующих дополнений и уточнений.

## 2. Энергия гравитационного поля

Трактовка энергии гравитационного поля в книге Вебера (см. гл. 6) нуждается в уточнениях в связи с новейшими результатами. Трудности теории состояли в том, что не удавалось построить плотности гравитационной энергии — импульса — натяжений, удовлетворяющей следующим пяти требованиям [3, 14]:

1. Плотность „квизитензора“ энергии  $t^{\nu}_{\mu}(x)$  в произвольной точке должна быть аффинной тензорной плотностью веса 1, алгебраически зависящей от потенциалов полей, их первых и вторых производных в этой точке.

2. Она должна удовлетворять аффинному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial t^{\nu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0.$$

3. Плотность потока энергии  $t^{\nu}_0$  должна преобразовываться как плотность 4-вектора при пространственных преобразованиях координат, не затрагивающих времени.

4. Интеграл энергии — импульса  $\mathcal{P}_{\mu} = \int t^0_{\mu} d\sigma$  должен преобразовываться как 4-вектор при линейных преобразованиях координат и не должен изменяться при произвольных преобразованиях, оставляющих координатную систему неизменной на больших пространственных расстояниях.

5. В квазидекартовой на бесконечности системе центра масс должно выполняться равенство

$$\mathcal{P}_0 = M_0 c^2,$$

где  $M_0$  — масса покоя данной островной системы.

Псевдотензор Эйнштейна не удовлетворяет требованию 3, „комплекс“ или „квazитензор“ Мёллера—Мицкевича [15, 16]—требованию 4. Мёллер показал, что квazитензор, зависящий от  $g_{\mu\nu}$  и их первых производных, не может удовлетворить всем 5 указанным требованиям. Это касается, в частности, симметричного псевдотензора [16], являющегося к тому же аффинной тензорной плотностью веса 2, вместо веса 1, присутствующего остальным предложенным аффинным тензорам [17, 18].

Однако недавно было замечено, что при добавлении в гравитационную часть плотности энергии — импульса новых переменных (например, второй метрики в рамках двуметрического формализма [19—21] или при использовании реперов [22], дающих еще 6 дополнительных функций) удастся удовлетворить всем требованиям. Необходимо выяснить вопрос об однозначности этих построений, их взаимной связи и степени согласования с гравитационной динамикой Эйнштейна или же с ее обобщениями на закрученное пространство и т. д.

### 3. Гравитационные волны

Проблемы гравитационного излучения, его скорости, взаимодействия с веществом, взаимных превращений гравитационного поля и обычной материи, роли волн во Вселенной относятся к важнейшим в современной гравитационной динамике.

Сложность вопроса усугубляется отсутствием полностью удовлетворительного определения энергии гравитационного поля (см. выше п. 2 и гл. 6 данной книги). Однако проблема прояснилась благодаря получению ряда волновых решений и анализу их с точки зрения трех типов Петрова [22]; оказалось возможным предложить установки для генерации и детектирования земных и космических гравитационных волн [23]. Вебер с сотрудниками рассчитывает влияние гравитационных волн на колебания Земли, собственные частоты которой лежат в области  $\sim 10^{-3}$  гц [24] (см. дополнение I к настоящей книге). В противоположность подавляющему большинству авторов (Вебер, Уилер, Бонди, Дирак, Петров, Фок, Иваненко и др.) Л. Инфельд отрицает возможность гравитационных волн, несущих энергию, на основе приближенных расчетов (в которых, по-видимому, использованы недостаточно обоснованные предположения, в частности постулируется плоская асимптотика и не учтены решения типа II [3, 25, 26]).



Остановимся на некоторых уточнениях проблемы гравитационных волн. Сложность вопроса привела к предложению ряда критериев для волнового характера метрики. Учитывая аналогию с электродинамикой, Лишиеровиц указал, что если существует вектор  $e_\alpha$ , удовлетворяющий условиям [27—30]

$$e [{}_\alpha R_{\beta\gamma}],_{\lambda\mu} = 0,$$

$$e^\alpha R_{\alpha\beta},_{\lambda\mu} = 0,$$

то  $e_\alpha$  будет действительно изотропным вектором и  $R_{\alpha\beta} = \tau e_\alpha e_\beta$ . Пирани [31] в основном сопоставляет волнам решения типа II и III Петрова [32]. Бонди, Пирани, Робинсон определяют метрику плоских волн в гравитационной динамике по аналогии с электродинамикой как неплоское решение уравнений поля для пустого пространства — времени, допускающее группу движений  $G_5$ . Следует обратить внимание на различие случаев, когда мы имеем дело с уравнениями в пустоте и с  $\delta$ -функциями справа.

Для излучения, порождаемого изолированной аксиально симметричной системой, Бонди показал уменьшение массы системы, находящейся в движении в течение некоторого времени [33]. Однако существует класс движений подобной системы, при которых излучение отсутствует. Наконец, существует класс движений источника, при которых энергия может быть поглощена детектором на некоторых средних расстояниях, хотя на бесконечности излучения нет. Однако ввиду нелинейности трудно провести различие между волновой зоной и остальными областями (см. ньютоновские аналоги аксиально-симметричных источников [34]). В дополнении II помещена обзорная статья Бонди, которая может служить введением в данную проблематику [35].

Д. Брилл [36] исследовал симметричные во времени гравитационные импульсы, сходящиеся и затем расходящиеся от какой-либо точки.

С иной точки зрения гравитационные волны недавно рассмотрел В. Д. Захаров [37], следуя А. Л. Зельманову [38] и исходя из его понятия хронометрических инвариантов (см. также [3]). При задании определенного тела отсчета общая ковариантность сводится к пространственной ковариантности

и хронометрической инвариантности

$$\bar{x}^0 := \bar{x}^0(x^0, x_1, x_2, x_3), \quad \bar{x}^l := x^l(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^0} = 0, \quad l = 1, 2, 3.$$

„Хронометризованный“ даламбертиан

$$*\square = h^{ik} \nabla_{ik} - \frac{* \partial^2}{c^2 \partial t^2} \quad (l, k = 1, 2, 3)$$

поочередно применяется к некоторому сконструированному из различных „волновых“ решений уравнений Эйнштейна „хронометрическому“ скаляру  $F$  от

$$h_{ik} = -g_{ik} + g_{0i}g_{0k}(g_{00})^{-1}.$$

Тогда, например, для плоских волн Переса [39], для которых

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - 2\alpha(dx_3 + dx_0)^2,$$

где  $\alpha = \alpha(x_1 - x_0)$ , имеем

$$*\square F = 0.$$

Для метрики Такено [40]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma + \rho & 0 & 0 & -\rho \\ 0 & -\alpha & -\delta & 0 \\ 0 & -\delta & -\beta & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & \rho - \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\gamma, \rho, \alpha, \beta, \delta$  являются функциями  $(x_3 - x_0)$ , удовлетворяющими некоторым условиям, получим справа выражение, содержащее первые производные (см. также [41]). Для „волновой“ метрики Петрова [28], которую в другой системе координат исследовали Бонди, Пирани и Робинсон,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — функции  $(x_1 + x_0)$ , получим

$$*\square F = \frac{1}{c} D (*\nabla_l F * \nabla_k F h^{lk})^{1/2},$$

где  $D$  — некоторый 3-скаляр [42].

Указанные пять решений относились к типу II Петрова. Как подчеркивает Вебер (см. гл. 7), согласно Траутману [43], вообще волновые решения асимптотически соответствуют типу II Петрова. Для двух метрик Петрова типа I получим относительно сложные правые части. Цилиндрические волны Эйнштейна — Розена [44] и их обобщение А. С. Компанейцем [45] не приводят с этой точки зрения к удовлетворительному результату, поскольку справа возникают члены со вторыми производными.

В. Д. Захаров по предложению А. Л. Зельманова рассмотрел также общековариантное волновое уравнение для тензора Римана

$$\Omega R = g^{\gamma\delta} R_{\mu\alpha\beta;\gamma\delta}$$

(где ; означает ковариантное дифференцирование).

Тогда для всех плоских волн типа II справа получим нуль, например

$$\Omega R_{\text{Перес}} = 0.$$

Однако для обоих решений типа I не получим справа нуля:

$$g^{\gamma\delta} R_{\mu\alpha\beta\nu;\gamma\delta} = \sqrt{3} B R_{\mu\alpha\beta\nu},$$

где инвариант  $B$  равен

$$B = \frac{1}{4} R_{\mu\alpha\beta\nu} R^{\mu\alpha\beta\nu}.$$

Для упомянутых цилиндрических волн получаем справа выражение с высшими производными.

Таким образом, и с точки зрения двух новых критериев разумными оказываются только плоские волны типа II. (Относительно приближенных методов в теории волн см. Синг [46].)

Исследуя островное распределение материи, Сакс получил важное разложение тензора Римана и снова пришел к выводу, что вековые решения относятся к типу II [75; 77]. (Об излучении см. также [78] и ценный обзор Пирани [79]).

#### 4. Космология

Вкратце останавливаясь на космологии (см. п. 4, гл. 9), Дж. Вебер подобно многим авторам при рассмотрении фридмановских нестационарных решений отбрасывает космо-

логический член с  $\Lambda$ . Мы повторно укажем, что „простота“ или ссылка на любопытный сам по себе факт введения, а затем отбрасывания его Эйнштейном, конечно, не могут служить для этого решающими аргументами, поскольку из общих соображений уравнения гравитации должны иметь вид [47]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}.$$

Следовательно, для определения  $\Lambda$  следует усилить поиски эмпирических данных и продолжить теоретический анализ (который может привести и к требованию точного равенства  $\Lambda = 0$ ). Ввиду малости  $\Lambda$  ее влияние не сказывается на трех стандартных эффектах, но, с другой стороны, проявляется в разнообразных космологических следствиях. Хотя данные космологических наблюдений, естественно, не точны, но, например, Мак-Витти [48, 5] утверждает, что наилучшие результаты наблюдений хаббловского красного смещения  $H \approx 75 - 100$  км/сек · мегапарсек и средней плотности материи  $\rho \approx 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup> говорят в пользу не исчезающего космологического члена с  $\Lambda < 0$ . Это соответствует наличию универсального космологического притяжения сверх обычного ньютонов-шварцшильдовского, что приводит к расширяющемуся пространству отрицательной кривизны Лобачевского. Следует, однако, подчеркнуть вместе с Вебером (см. гл. 9, п. 4), что учет нейтрино и антинейтрино, до сих пор не принимавшихся в расчет, но бесспорно присутствующих в значительном количестве в мировом пространстве [5, 49, 50], а также, вероятно, и гравитационных волн приводит к увеличению плотности и тем самым играет в сторону положительной кривизны.

Мак-Витти и Сэндэйдж считают, что модель стационарной Вселенной приводит к противоречию с эмпирическими данными, с чем не согласен Хойль [5, 51], указывающий на противоречие между возрастом самых старых звезд  $\sim 2.5 \cdot 10^{10}$  лет и временем эволюции Вселенной взрывного, фридмановского типа от соответствующей сингулярности. В вопросе о сингулярности космологический член как раз играет критическую роль, поскольку, например, лишь при  $\Lambda > 0$  в случае закрытой модели и уравнения состояния типа ультрарелятивистского газа сингулярность, как показал Брежнев [52], отсутствует и получается ненулевое значение радиуса Все-

ленной, а также конечное значение плотности в момент времени, соответствующий началу эволюции; в дальнейшем подобная модель Вселенной расширяется, никогда не осциллируя. С другой стороны, при  $\Lambda = 0$  сингулярности в метрике изотропной и однородной Вселенной при всех допустимых уравнениях состояния материи оказываются неизбежными [53]. Следует заметить, что окончательное решение проблемы сингулярности может быть получено лишь с учетом эффектов квантовой и ядерной физики.

В данной связи отметим эмпирически справедливое соотношение для плотности и тем самым общей массы Вселенной в известных ныне размерах

$$\frac{GM^2}{R} \sim Mc^2,$$

указывающее на примерное равенство энергии обычной материи и гравитационной энергии. Если это довольно удивительное соотношение должно выполняться при росте  $R$ , то (в особенности в случае допущения уменьшения  $G$ ) масса должна возрастать. Относительно сингулярности в моделях неоднородной, анизотропной Вселенной см. [3, 54 - 56].

Значение космологического члена хорошо иллюстрируется его влиянием на классификацию решений. При  $\Lambda \rightarrow 0$ , как показал недавно А. З. Петров с сотрудниками, некоторые пространства „перепрыгивают“ из классов II и III в класс I и меняется градация пространств максимальной подвижности:

	$\Lambda \neq 0$	$\Lambda = 0$
$T_1$	$G_{10}$	$G_{10}$
$T_2$	$G_3$	$G_6$
$T_3$	$G_4$	$G_2$

Итак, анализ космологического члена приобрел значительную важность, и сейчас, очевидно, не может идти речи о его отбрасывании.

## 5. Спиноры и гравитация

Ввиду фундаментальной роли, которую играют в строении всей материи фермионы, описываемые спинорами, их поведение в гравитационном поле продолжает все время привлекать внимание [5, 6, 57--60].

Кроме анализа спиноров в римановом искривленном пространстве, недавно приобрело интерес их поведение в закрученном пространстве. Изменение вектора при параллельном переносе в общем случае запишется как

$$dA^\mu = -{}^*\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\lambda dx^\sigma.$$

Коэффициенты аффинной связности  ${}^*\Gamma$ , несимметричные, вообще говоря, относительно нижних индексов, могут быть представлены в виде

$${}^*\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} + C^\mu_{\sigma\lambda},$$

где

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} = \tilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\sigma}, \quad C^\mu_{\sigma\lambda} = -C^\mu_{\lambda\sigma}.$$

Несимметричные величины  $C$ , характеризующие кручение, образуют тензор и нарушают правило параллелограмма.

Вводя метрику, получаем для изменения квадрата длины вектора при параллельном переносе

$$dA^2 = {}^*(g_{\mu\nu}, \sigma) A^\mu A^\nu dx^\sigma,$$

где  ${}^*(g_{\mu\nu}, \sigma)$  — ковариантная относительно  ${}^*\Gamma$  производная от  $g_{\mu\nu}$ , не равная, вообще говоря, нулю; воспользовавшись ею, получим

$${}^*\Gamma_{\mu\nu, \sigma} = \Gamma_{\mu\nu, \sigma} - S_{\mu\nu, \sigma} + C_{\sigma\mu, \nu} + C_{\sigma\nu, \mu} + C_{\mu\nu, \sigma};$$

здесь  $\Gamma$  — обычные символы Кристоффеля. Величины

$$S_{\mu\nu, \sigma} = \frac{1}{2} \{ {}^*(g_{\nu\sigma}, \mu) + {}^*(g_{\mu\sigma}, \nu) - {}^*(g_{\mu\nu}, \sigma) \}$$

образуют тензор Вейля — Эддингтона, определяющий изменение длины вектора при параллельном переносе. В. И. Родичевым [9, 61] рассмотрен частный случай, когда 1) сохраняется длина вектора  ${}^*(g_{\mu\nu}, \sigma) = 0$ , 2) геодезические в за-

крученном и римановом пространствах совпадают. Тогда тензор кручения оказывается полностью антисимметричным:

$$C_{\mu\nu, \sigma} = \Phi_{[\mu\nu\sigma]}, \quad * \Gamma = \Gamma + \Phi.$$

Если для простоты ограничиться еще галилеевой метрикой, то  $* \Gamma = \Phi$  и геодезические будут прямыми.

Наряду с этим имеются другие типы закрученных пространств, например „нейтрального“ (и „полунейтрального“) типа [62], характеризующиеся условиями

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} (+) &= R^{\mu}_{\mu\beta\gamma} (-), \\ R^{\mu}_{\alpha\beta\mu} (+) &= R^{\mu}_{\alpha\beta\mu} (-), \\ g_{\alpha\beta, \gamma} (+) &= g_{\alpha\beta, \gamma} (-) = 0, \end{aligned}$$

где (+) и (-) соответствуют включению кручения с тем или иным знаком. Учитывая кручение, можно реализовать (в духе Клиффорда) абсолютный параллелизм [63], и тогда при параллельном переносе искривление будет компенсировать закрученность.

Квантование кручения приводит к соответствующим квантам поля — „торсионам“ [64, 9]; некоторые из них Финкельштейн пытается сопоставить мезонам. Отметим, что для пространства Родичева возможны два представления:

1. Вводится псевдовектор, дуальный к  $\Phi$  (Родичев),

$$\tilde{\varphi}^{\alpha} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi_{\beta\gamma\delta}.$$

2. Используется суперпотенциал в виде антисимметричного тензора второго ранга (Владимиров)

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \varphi_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \varphi_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right).$$

В пространствах нейтрального типа возможно ввести псевдоскаляр (Финкельштейн)  $\tilde{\varphi}_{\alpha} = \partial \varphi_0 / \partial x^{\alpha}$ .

Сейчас закрученное пространство нашло интересные применения в теории параллельного переноса спиноров [9, 61] и при построении тензора энергии — импульса — натяжений (Мёллером, использующим абсолютный параллелизм).

<sup>1)</sup> О кручении и закрученных пространствах см. доклады Д. Иваненко, Е. Плебаньского и С. Мёллера на 4-й Гравитационной конференции в Варшаве (июль, 1962).

Изменение спинора при параллельном переносе в частном случае имеет вид

$$d\Psi = B_\sigma^* \Psi dx^\sigma, \quad *B_\sigma = \frac{1}{4} \Phi_{[\sigma\mu\nu]} \gamma_\mu \gamma_\nu + iI\varphi_\sigma.$$

Записав дираковский лагранжиан  $L_0$  в закрученном пространстве, дополнив его скалярной кривизной пространства  $*R = \tilde{\varphi}_\lambda^2$  и варьируя  $L = L_0 + b^*R$  по  $\tilde{\varphi}_\lambda$ , получаем  $\tilde{\varphi}_\lambda = (1/2ib) (\Psi^+ \gamma_5 \gamma_\lambda \Psi)$ ; варьируя затем по  $\Psi$ , приходим к нелинейно обобщенному дираковскому уравнению нашего типа (причем с псевдовекторной, наилучшей по Гейзенбергу добавкой)

$$\gamma_\alpha \Psi_{, \alpha} + m\Psi + i\lambda_0 (\Psi^+ \gamma_5 \gamma_\alpha \Psi) \gamma_5 \gamma_\alpha \Psi = 0.$$

При этом, как и в первоначальной теории параллельного переноса спиноров в искривленном пространстве (Фок — Иваненко), здесь существенно использование реперных коэффициентов (Ламэ)  $h_\mu(a)$ , из которых строится метрика:  $g_{\mu\nu} = h_\mu(a) h_\nu(a)$ . Тем самым перебрасывается мост между единой нелинейной спинорной теорией обычной материи (см. [74]), возможно включающей также гравитоны как поперечную часть поля, и гипотетическими геометризованными едиными теориями типа геометродинамики [5] (см. настоящую книгу гл. 9, п. 1). Возникает впечатление, что вообще в основу современной наиболее объединенной теории следует положить самые элементарные объекты из известных ныне, т. е. спиноры  $\Psi$  и реперные коэффициенты  $h_\mu(a)$ !

В этой связи отметим, что в развитии теории гравитации как компенсирующего поля (см. выше), исходя из замены постоянных коэффициентов преобразования Лоренца на локализованные, являющиеся функциями координат, также применяют весьма любопытным образом формализм реперов к коэффициентам связности; последние содержат не только обычные символы Кристоффеля, но допускают также часть, соответствующую кручению. Утверждение Вебера о симметрии коэффициентов связности (см. гл. 3, п. 3), очевидно, связано с ограничением, исключающим заранее кручение.

Таким образом, мы имеем цикл интересных работ, не только проливающих свет на структуру риман-эйнштейновской теории, но, возможно, указывающих даже пути ее



обобщения и открывающих новые перспективы в единой теории материи. В настоящее время обсуждается также выход за рамки эйнштейновской теории, связанный с гипотезой Дирака - Йордана относительно уменьшающейся со временем константы гравитации, которая ведет к множеству астрономических и геофизических следствий, например в теории происхождения солнечной системы (в свою очередь связываемой Альфвеном с плазменными явлениями [65]), в теории расширения Земли и образования на ней гигантских расколов, исследуемых А. В. Пейне и Б. Хеезеном, в частности предсказываемого нами с М. У. Сагитовым раскола в Сибири [74; 79; 80], и др. Рекомендую книгу Вебера советским читателям, мы вместе с тем выражаем надежду, что настоящая вводная статья и ссылки на новейшую литературу помогут со своей стороны научным работникам и студентам ориентироваться в весьма интересной современной ситуации в теории гравитации.

*Д. Иваненко.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, М., 1955. Herneck F., Phys. Blätter, 15, 563 (1959); 17, 275 (1961), Festschrift Humboldt Universität, Berlin, 1, 511 (1960).
2. Иваненко Д., Вступительная статья к сборнику „Новейшие проблемы гравитации“, ИЛ, 1961.
3. Сборник „Новейшие проблемы гравитации“, ИЛ, 1961.
4. Иваненко Д., Вступительная статья к сборнику „Нейтрино, гравитация, Вселенная“, ИЛ, 1962.
5. Уилер Дж. А., Нейтрино, гравитация, Вселенная, ИЛ, 1962.
6. Corina Idesi E., Nuovo cimento., 1, 1289 (1955); Proc. Phys. Soc., 69, 189 (1956).
7. Synge J. L., Rendiconti Seminario Mat. e Fis. di Milano, 30, 1 (1960).
8. Dicke, Sci. American, December (1961).
9. Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, М., МГУ, 1961.
10. Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958.
11. Kimister C. W., Preprint, London University.
12. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2-е изд., Физматгиз, М., 1961; Вопросы философии, № 12, 1961.

13. Бродский А. М., Иваненко Д., Соколик Г. А., ЖЭТФ, **41**, 1307 (1961); Acta Physica Hungarica **14**, 21 (1962).
14. Møller S., Ann. of Phys., **12**, 118 (1961); Mat.-Fys. Sk. Dan. Vid. Selsk., **1**, No. 10 (1961).
15. Мицкевич Н. В., Ann. d. Phys., **1**, 319 (1958); Иваненко Д., Мицкевич Н. В., ЖЭТФ, **37**, 868 (1959).
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, М., 1960; Мицкевич Н. В., Доклады Болгарской АН, **14**, 439 (1961).
17. Schmutzer E., Zs. f. Naturforsch., **16a**, 8 (1961); Trautman A., Preprint; Bergman P. G., Phys. Rev., **112**, 287 (1958). Комар А., Phys. Rev., **113**, 934 (1959); Bel L., Compt. rend., **248**, 1297 (1959).
18. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Phys. Rev., **116**, 1322 (1959); **117**, 1595 (1960); **118**, 1100 (1960); **120**, 321 (1960).
19. Rosen N., Phys. Rev., **57**, 147 (1940).
20. Пугачев П. И., Изв. ВУЗ'ов (физика), **6**, 152 (1959).
21. Мицкевич Н. В., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, М., 1961, стр. 37. Гутман И. И., ЖЭТФ, **37**, 1639 (1959); Изв. АН УзССР, **4**, 35 (1961); Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, М., 1961, стр. 40.
22. Corinaldesi E., Proc. Phys. Soc., **A69**, 189 (1956); Nuovo Cimento., **1**, 1289 (1955).
23. Брагинский В. Б., Рукман Г. И., ЖЭТФ, **41**, 34 (1961); Вестник МГУ, № 3 (1961).
24. Weber et al., Nature, **189**, 473 (1961). (См. перевод в настоящей книге.)
25. Инфельд Л., Плебаньский Е., Relativity and Motion, Warszawa, 1960. Движение и релятивизм, ИЛ, 1962.
26. Weisskopf V., Lectures theor. phys., vol. III, p. 60, No. 4 (1961).
27. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
28. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, Физматгиз, М., 1961. Статья в сборнике в честь Л. Инфельда „Recent Developments in General Relativity“, London 1962 (там же помещены ценные статьи Пираани, Бонди, Гутмана, ДеВитта и др.).
29. Bel L., Compt. rend., **247**, 1094 (1958); **248**, 2561 (1959).
30. Debever M. R., Compt. rend., **249**, 1324 (1959); **249**, 1744 (1959); **250**, 64 (1960).

31. Pirani F., Phys. Rev., 105, 1089 (1957); Proc. Roy. Soc., A252, 96 (1959).
32. Bondi H., Pirani F., Robinson J., Proc. Roy. Soc., A251, 519 (1959).
33. Bondi H., Nature, 186, 535 (1960).
34. Van der Burg M. G. J., Dissertation, London University.
35. Bondi H., Endeavour 20, 121 (1961). (См. перевод в дополнении к настоящей книге.)
36. Brill D., General Relativity, Lectures, Iowa University, 1961, Ann. of Phys., 7, 466 (1959).
37. Зельманов А. А., Доклад на 4-ой Гравитационной конференции (Варшава, 1962).
38. Зельманов А. А., Труды 6-го совещания по вопросам космогонии, М., 1959; ДАН СССР, 107, 815 (1956).
39. Peres A., Phys. Rev. Lett., 3, No. 12 (1959).
40. Takeno H., Tensor, 6, 15 (1956); 8, 59 (1958).
41. Takeno H., Tensor, 9, 73 (1959); 10, 34 (1960).
42. Bondi H., Nature, 179, 1072 (1957); Sachs R., Proc. Roy. Soc., A264, 309 (1961).
43. Trautman, Phys. Rev., Lett., 4, 431 (1960).
44. Einstein A., Rosen N., Journ. Franklin Inst., 223, 43 (1937).
45. Компанеев А. С., ЖЭТФ, 34, 953 (1958).
46. Israel W., Proc. Roy. Soc., A243, 404 (1958); Brill S. O., Synge J. L., Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. A, No. 9 (1952); Synge J. L., Proc. Roy. Irish Acad., 61A, No. 5, 37 (1961); 61A, No. 1, 1 (1961); Das A., Florides P. S., Synge J. L., Proc. Roy. Soc., A263, 451 (1961).
47. Weyl H., Raum-Zeit-Materie, 5te Aufl, 1927.
48. McVittie G. C., Доклад на конференции 1959 (Руайомон — Париж), (перевод см. в [5]).
49. Понтекорво Б., Смородицкий Я. А., ЖЭТФ, 41, 239 (1961).
50. Харитонов В. М., Тезисы 1-ой Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 172.
51. Pirani F. A. E., Proc. Roy. Soc., A228, 455 (1955).
52. Брежнев В. С., Тезисы 1-ой Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 14.
53. Tolman R., Relativity-Thermodynamics-Cosmology, Oxford, 1934.
54. Зельманов А. Л., Тезисы 1-ой Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 43.

55. Лифшиц Е. М., Судаков В. В., Халатников И. М., ЖЭТФ, **40**, 156 (1961).
56. Широков М. Ф., Фившер И. З., Тезисы I-ой Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 143.
57. Фок В. А., Иваненко Д., Compt. rend., **188**, 1470 (1929); Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, ч. II, М., 1952.
58. Infeld L., Van der Waerden B., Berl. Ber., **380** (1933).
59. Bargmann V., Berl. Ber., **346** (1932).
60. Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, 1947.
61. Родичев В. И., ЖЭТФ, **40**, 1469 (1961).
62. Finkelstein R., Ann. d. Phys., **15**, 223 (1961).
63. Einstein A., Weitzenböck, Berl. Ber., **1**, 466 (1928).
64. Владимиров Ю. С., Тезисы Ужгородской теоретической конференции, 1961, стр. 89.
65. Egged L., Geolog. Rundschau, **46**, 161 (1957); **50**, 225 (1960); **50**, 251 (1960); Transact. New York Acad. Sci., **23**, 424 (1961); Alfén H., Origin of the Solar System, Oxford, 1954; Amer. Journ. Phys., **23**, 613 (1960).
66. Агаки И., Ann. of Phys., **7**, 456 (1959).
67. Сборник „Нелинейная квантовая теория поля“, ИЛ, 1960.
68. Synge J. L., Relativity: General Theory, Amsterdam, 1960. (См. русск. перевод: Синг Дж., Общая теория относительности, ИЛ, 1963 (в печати)).
69. Belinfante F. J., Garrison J. C., The interaction picture in gravitational theory (preprint, 1961).
70. Synge J. L., Annali di Matem. pura e applicata, **54**, 275 (1961).
71. Bondi H., The Universe at Large, N. Y., 1960.
72. Bondi H., Bonnor W. B., Lyttleton R. L., Whitrow G. Y. (Oxford University Press, No. 4, 1961).
73. Hoyle F., The Nature of the Universe (Harper, 1960).
74. Иваненко Д., Сагитов М., Вестник МГУ, № 6, 1961.
75. Sachs R., Proc. Roy. Soc., A **264**, 309 (1961). Тезисы Варшавской гравитационной конференции 1962 г.
76. Trautman A., Lectures in General Relativity, London, 1958.
77. Bondi H., Metzner A., Proc. Roy. Soc. A (1962) (в печати).
78. Герценштейн Д. Д., Пустовийт Д. Д., ЖЭТФ, **22**, 222 (1962).
79. Pirani F. L., (сборник) „Gravitation“ под ред. L. Witten (New York, 1962).
80. Heezen B., Sci. American **203**, 99 (1960).



---

## Предисловие автора

---

Новое пробуждение интереса к общей теории относительности вызвано рядом причин. Для теоретика квантование гравитационного поля Эйнштейна открывает многообещающие возможности подхода к новой теории элементарных частиц и устранения известных трудностей квантовой теории поля. Для экспериментатора достижения техники за последние два десятилетия делают возможными некоторые новые гравитационные опыты, а старые опыты становятся воспроизводимыми с возросшей степенью точности.

Книга по общей теории относительности предлагаемого объема не может быть полной. Я пытаюсь дать здесь довольно основательное введение в основы этой теории, в риманову геометрию и в обычно применяемый при рассмотрении этих вопросов тензорный анализ, а также дать представление о законах сохранения и о классических экспериментах.

Приблизительно четверть всей книги посвящена теоретическим и экспериментальным проблемам гравитационного излучения. В последней главе кратко обсуждаются вывод уравнений движения, единые теории поля, космологическое решение Фридмана и гамильтонова формулировка общей теории относительности.

Изложение соответствует курсу общей теории относительности, читаемому мною на физическом факультете Мерилэндского университета.

Я хочу выразить благодарность проф. Дж. А. Уилеру за весьма стимулирующий год, который мне посчастливилось провести у него; проф. Дж. Андерсону, лекции которого были моим первым знакомством с уравнениями Эйнштейна; проф. П. Г. Бергману за многочисленные разъяснения на коллоквиуме Стивенсоновского технологического института

и д-ру Ч. Мизнеру за его проицательные замечания по многим вопросам. Многие параграфы этой книги были значительно улучшены благодаря дискуссиям с аспирантом Дж. Хиндсом. Профессор К. Дж. Гебел прочел рукопись книги и сделал ценные критические замечания.

Мои собственные исследования проводились при поддержке со стороны Национального научного фонда.

*Дж. Вебер*

---

## Принцип эквивалентности

---

*Этот принцип строгой физической эквивалентности исключает возможность говорить об абсолютном ускорении системы отсчета, точно так же как в специальной теории относительности не может быть и речи об абсолютной скорости системы.*

А. Эйнштейн

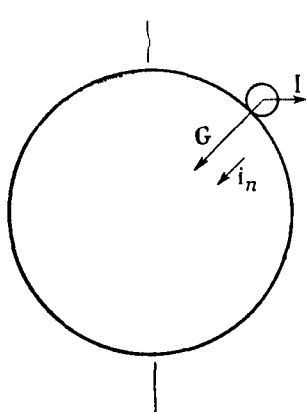
### 1. Эксперимент Этвёша

Со времен Ньютона считалось, что отношение инертной массы к весу тела (его гравитационной массе) одинаково для всех веществ. Если принять это предположение, то в уравнениях движения тела под действием гравитационного поля Земли можно сократить массу этого тела и ускорения всех свободно падающих тел окажутся равными друг другу.

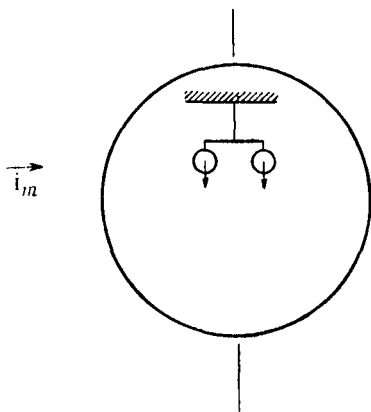
В 1890 г. Этвёш [1] произвел остроумный опыт с целью определить отношение инертной массы к весу. Рассмотрим массу, находящуюся на поверхности Земли (фиг. 1). Сила тяготения  $G$  направлена к центру Земли; кроме того, существует сила инерции  $I$  — центробежная сила, обусловленная вращением Земли. Отношение абсолютных значений или соответственных компонент этих сил зависит от отношения гравитационной и инертной масс. Этвёш поместил два тела на крутильных весах, как это изображено на фиг. 2, на широте, занимающей примерно среднее положение между экватором и полюсом. Пусть тела расположены так, что коромысло находится в равновесии, будучи расположено в плоскости горизонта наблюдателя в направлении с востока на запад. Прежде всего отсюда можно заключить, что результирующая величина момента, создаваемая вертикальными компонентами



суммарных сил  $\mathbf{G} + \mathbf{I}$ , приложенных к каждому из наших двух тел, равна нулю. Если отношения инертной и гравитационной масс для этих тел неодинаковы, то горизонтальные компоненты  $\mathbf{G} + \mathbf{I}$  образуют закручивающий момент сил, уравновешиваемый противоположным моментом со стороны нити подвеса. При повороте всей системы на угол  $\pi$  тела меняются местами и знак закручивающего момента, связанного с горизонтальными компонентами  $\mathbf{G} + \mathbf{I}$ , изменяется.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Момент же, создаваемый нитью подвеса, остается неизменным. В результате, если отношения инертной и гравитационной масс для наших тел различны, то коромысло, несущее тела, должно отклониться на некоторый угол относительно горизонтальной оси установки.

Пусть гравитационная масса одного из тел равна  $M_1$ , а его инертная масса —  $m_1$ . Направим от этого тела к центру Земли единичный вектор  $\mathbf{i}_n$ , а единичный вектор  $\mathbf{i}_m$  направим в плоскости меридиана перпендикулярно оси вращения Земли. Величину гравитационного поля Земли положим равной  $g_e$ . Тогда гравитационная сила  $\mathbf{G}_1$  будет равна

$$\mathbf{G}_1 = g_e M_1 \mathbf{i}_n. \quad (1.1)$$

Обозначим величину радиуса Земли через  $a$ , угловую скорость ее вращения — через  $\omega$ , а широту — через  $\varphi$ . Тогда

инертная (центробежная) сила  $I_1$  будет равна

$$I_1 = (m_1 a \omega^2 \cos \varphi) \mathbf{i}_m. \quad (1.2)$$

Пусть второе тело обладает гравитационной массой  $M_2$  и инертной массой  $m_2$ . Мы сравниваем силы, действующие на оба тела, при помощи крутильных весов. Выберем  $M_1$  и  $M_2$  так, чтобы точка подвеса совпадала с серединой коромысла. Сопоставим последнему вектор  $\mathbf{b}$  и обозначим закручивающий момент через  $T$ . Тогда можно записать

$$T = \left[ \frac{\mathbf{b}}{2} \times (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \right] + \left[ \frac{\mathbf{b}}{2} \times (I_1 - I_2) \right]. \quad (1.3)$$

Результирующая наших четырех сил должна быть направлена вдоль тонкой нити, на которой подвешено коромысло, и равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + I_1 + I_2. \quad (1.4)$$

Компонента момента силы, параллельная нити подвеса, обусловит наблюдаемый поворот коромысла. Пользуясь приведенными выше выражениями, можно получить эффективный закручивающий момент в следующем виде:

$$T_{\parallel} = \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})}{|\mathbf{F}|} \approx \frac{1}{2g_e (M_1 + M_2)} \cdot \{ (g_e (M_1 + M_2) \mathbf{i}_n + a \omega^2 \cos \varphi (m_1 + m_2) \mathbf{i}_m) \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 + I_1 - I_2)] \}, \quad (1.5)$$

где мы отбросили в знаменателе центробежную силу ввиду ее чрезвычайной малости по сравнению с силой тяготения. Преобразуя (1.5) и вводя подстановку

$$\alpha_1 = \frac{M_1}{m_1}, \quad \alpha_2 = \frac{M_2}{m_2}, \quad (1.6)$$

получаем для эффективного закручивающего момента

$$T_{\parallel} \approx \frac{a \omega^2 \cos \varphi m_1 m_2 (\alpha_1 - \alpha_2) (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{i}_n \times \mathbf{i}_m])}{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) обращается в нуль при  $\alpha_1 = \alpha_2$ , а при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  величина его зависит от ориентации коромысла  $\mathbf{b}$  относительно вектора  $[\mathbf{i}_n \times \mathbf{i}_m]$ , перпендикулярного плоскости меридиана. Она достигает максимума, когда  $\mathbf{b}$  направлен с востока на запад или наоборот. Как уже отмечалось, коромысло приводится в состояние равновесия путем вращения вплоть до его ориентации в направлении восток — запад

в плоскости, касательной к поверхности Земли. Затем систему поворачивают на угол  $\pi$ , в результате чего вектор  $\mathbf{b}$  меняет знак. Если бы имело место неравенство  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , то возник бы закручивающий момент, который мог бы придать коромыслу вращение относительно рамы, поддерживающей нить подвеса. Этвёш не обнаружил такого вращения и отсюда заключил, что для всех обследованных веществ  $\alpha_1 = \alpha_2$  с точностью 1 к  $10^8$ . Этот эксперимент был позднее повторен [2, 3]. Саузернс проделал опыт с маятниками и доказал равенство величин  $\alpha$  для радиоактивных веществ. Профессор Р. Дике [4] в настоящее время повторяет опыт Этвёша, используя в значительно усовершенствованном приборе три тела и тройную ось симметрии для сведения к минимуму местных возмущений. Полученные им до настоящего момента результаты согласуются с выводами Этвёша, причем для ряда веществ установлено совпадение величин  $\alpha$  с точностью до нескольких единиц к  $10^{10}$ .

Эксперимент Этвёша позволяет сделать некоторые заключения относительно свойств элементарных частиц. Тождественность отношений массы к весу для системы электрон — протон и для нейтрона может быть подтверждена с точностью 1 к  $10^7$ , а уменьшение массы ядра, обусловленное ядерными силами, как можно показать, сопровождается уменьшением веса, совпадающим с уменьшением массы с точностью 1 к  $10^5$ . С точностью до 5 к  $10^3$  можно заключить, что существование энергии связи орбитальных электронов приводит к соответствующему изменению веса.

Бонди [5] отмечает возможность различения масс, подвергающихся воздействию со стороны гравитационного поля, и масс, являющихся его источником. Подвергающуюся такому воздействию массу он называет пассивной гравитационной массой, а массу — источник поля — активной гравитационной массой. С этой точки зрения эксперимент Этвёша устанавливает равенство отношений инертной массы к пассивной гравитационной массе.

## 2. Отрицательные массы

Ни закон всемирного тяготения Ньютона, ни релятивистская теория гравитации не исключают возможности существования отрицательных масс, но эмпирический факт состоит

в том, что такие массы никогда не наблюдались. Как из теории тяготения Ньютона, так и из общей теории относительности вытекало бы поведение отрицательных масс, в корне отличное от соответствующей ситуации в электродинамике. При взаимодействии малой отрицательной массы с большой положительной, в уравнении движения масса (отрицательная) снова сокращается (слева и справа) и ускорение остается направленным навстречу положительной массе. Таким образом, положительная масса притягивает к себе все массы вообще, как положительные, так и отрицательные. Малая отрицательная масса должна была бы падать в гравитационном поле Земли.

Подобным же образом отрицательная масса отталкивает все прочие массы независимо от их знака. Для двух тел, одно из которых обладает положительной массой, а другое — отрицательной, но равной первой по абсолютному значению, следовало бы ожидать, что положительная масса будет притягивать отрицательную, а отрицательная — отталкивать положительную, так что одна будет гнаться за другой! Если движение будет совершаться по линии, соединяющей центры тел, то такая система будет двигаться с постоянным ускорением. Эту задачу рассмотрел Бонди [5].

Шифф [6] недавно рассмотрел возможность того, что гравитационная масса античастицы (позитрона) отрицательна. Его рассуждения основывались на перенормированной квантовой электродинамике. Кулоново поле атомного ядра производит поляризацию вакуума. Этот эффект, впервые вычисленный Юлиным [7] для водорода, вносит равный 27 мц вклад в лэмбовский сдвиг  $2S$ -состояния водорода. Виртуальные электронно-позитронные пары, связанные с поляризацией вакуума, должны были бы давать вклад в перенормированные массы атомов. Из опыта мы знаем, что инертная масса позитрона положительна. Если бы его гравитационная масса была отрицательной, то различные атомы должны были бы иметь несколько различные отношения инертной к пассивной гравитационной массе. Это следует из того обстоятельства, что относительный вклад виртуальных пар в общую массу будет зависеть от величины заряда ядра и его распределения. Последнее же будет различным у различных атомов. Если принять, что гравитационная масса покоя позитрона равна по величине и противоположна по знаку массе отрицательного

электрона, а воздействие гравитационного поля на кинетическую энергию частицы носит обычный характер, то разность между гравитационной и перенормированной инертной массой оказывается конечной и приблизительно равной [6]

$$\frac{3m}{8\pi} \left( \frac{Z}{137} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{|F(q)|^2 dq}{(q^2 + 4\mu^2)^{1/2}}.$$

Здесь  $m$  — масса электрона,  $\mu = mc/h$ ,  $Z$  — атомный номер, а  $F(q)$  — Фурье-образ распределения заряда ядра, нормированный к единичному полному заряду. Эта величина составляет  $10^{-7}$ ,  $2 \cdot 10^{-7}$  и  $4,3 \cdot 10^{-7}$  части атомного веса соответственно для алюминия, меди и платины. Так как эти числа выходят за пределы неточности определения отношений масс, выполненного Этвёшем, Шифф сделал вывод, что возможность существования отрицательной гравитационной массы у позитрона исключается.

По-видимому, возможно осуществить опыты по наблюдению падения антинейтронов в гравитационном поле Земли. Как мы отметили выше, существующие теории тяготения предсказывают для них падение вне зависимости от знака массы.

### 3. Эквивалентность различных систем отсчета

Экспериментальный факт эквивалентности двух видов массы стоял особняком в теоретической физике до тех пор, пока Эйнштейн [8] не указал, что его можно связать с понятием эквивалентности различных систем отсчета. Эйнштейн постулировал, что ускоренная система в отсутствие гравитационных полей эквивалентна<sup>1)</sup> покоящейся системе в заданной бесконечно малой области<sup>2)</sup> не зависящего от времени гравитационного поля. Это утверждение носит название принципа эквивалентности. Можно показать, что эквивалентность гравитационной и инертной масс является следствием из этого постулата. Будем

<sup>1)</sup> Это означает, что все наблюдения, произведенные локально в системе, помещенной в однородное статическое гравитационное поле, дадут те же результаты, что и в равноускоренной системе.

<sup>2)</sup> Неоднородность действительно существующего гравитационного поля делает невозможной замену его единой ускоренной системой в больших областях,

рассуждать следующим образом [8] (см. фиг. 3): пусть имеются две системы  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , оси  $z$  которых совпадают. Предположим, что система  $\Sigma$  покоится в гравитационном поле напряженности  $g$ , систему же  $\Sigma'$  будем считать свободной от гравитационного поля, но имеющей ускорение  $g$  в положительном направлении оси  $z$ . Пусть  $\Sigma'$  покоится в момент  $t = 0$ , когда из точки  $\alpha$  излучается световой импульс энергии  $E_\alpha$ . Этот импульс поглощается в точке  $\beta$ . В этот момент скорость  $\Sigma'$  равна  $gl/c$ .

Световой импульс обладал энергией  $E_\alpha$  и количеством движения  $E_\alpha/c$ . Его энергию в точке  $\beta$  можно получить с помощью преобразования Лоренца; она равна

$$E_\beta = E_\alpha \cos \psi + v E_\alpha \sin \psi, \quad (1.8)$$

где

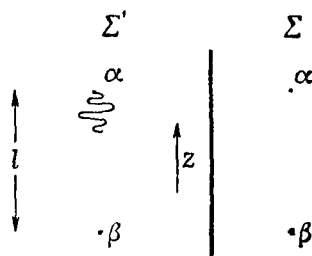
$$\cos \psi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad \sin \psi = -\frac{iv}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Вычисление (1.8) дает

$$E_\beta = E_\alpha \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2} \approx E_\alpha \left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_\alpha + E_\alpha \frac{gl}{c^2}. \quad (1.9)$$

На основании принципа эквивалентности мы полагаем, что полученный результат (1.9) справедлив для этого же процесса, совершающегося в системе  $\Sigma$ . Допустим, что масса  $M$  находилась вначале в точке  $\alpha$  системы  $\Sigma$ , а затем переместилась в точку  $\beta$ . Световой импульс энергии  $E_\alpha$  был излучен из точки  $\alpha$  и поглощен массой  $M$  в точке  $\beta$ . Пусть полная гравитационная масса  $M$  и поглощенного света равна  $M'$ . Вернем теперь массу  $M'$  в точку  $\alpha$  и вновь излучим световой импульс таким образом, чтобы масса в точке  $\alpha$  стала равной  $M$ . Поскольку в конечном счете изменения энергии не произошло, то изменение энергии при переходе от  $\alpha$  к  $\beta$  можно положить равным ее изменению при обратном переходе:

$$Mgl + E_\beta - E_\alpha = M'gl. \quad (1.10)$$



Фиг. 3.

Использование равенства (1.9) приводит тогда к выражению

$$M' - M = \frac{E_\alpha}{c^2}. \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) означает, что вклад в гравитационную массу равен изменению инертной массы, откуда следует, что эквивалентность массы и веса можно рассматривать как следствие эквивалентности ускоренной системы и гравитационного поля.

#### 4. Гравитационное красное смещение спектральных линий

Из принципа эквивалентности вытекает также, что следует ожидать гравитационного красного смещения спектральных линий. Ибо рассмотрим вновь излучение света в точке  $\alpha$  некоторым атомом в ускоренной системе  $\Sigma'$ , которая покоится в некий момент времени. Свет частоты  $\nu$  принимается в точке  $\beta$  наблюдателем, который измеряет частоту в единицах своего собственного времени. Допплеровское смещение частоты в точке  $\beta$  дает величину

$$\nu_\beta = \nu_\alpha \left( \frac{c + v}{c - v} \right)^{1/2}, \quad (1.12)$$

или

$$\nu_\beta \approx \nu_\alpha \left( 1 + \frac{v}{c} \right). \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) выполняется также и в неподвижной системе в присутствии гравитационного поля, причем

$$\frac{E_\beta}{E_\alpha} = \frac{\nu_\beta}{\nu_\alpha} = 1 + \frac{gl}{c^2}. \quad (1.14)$$

Величина  $gl$  в (1.14) представляет собой изменение гравитационного потенциала, так что сдвиг частоты  $\nu_\beta - \nu_\alpha$  можно записать как

$$\Delta\nu = \frac{\nu(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)}{c^2}. \quad (1.15)$$

В формуле (1.15)  $\varphi_\beta$  есть гравитационный потенциал (величина отрицательная) в точке приема светового сигнала, а  $\varphi_\alpha$  — гравитационный потенциал в точке его испускания. Если мы наблюдаем с Земли свет звезды, то  $\varphi_\beta > \varphi_\alpha$ . Для звезды, имеющей массу  $M$  и радиус  $r_s$ , если массу Земли

обозначить через  $m$ , ее радиус — через  $r_e$ , а гравитационную постоянную — через  $G$ , равенство (1.15) принимает вид

$$\Delta\nu \approx - \frac{\sqrt{G}}{c^2} \left[ \frac{M}{r_s} - \frac{m}{r_e} \right]. \quad (1.16)$$

Этот результат предсказывает смещение в красную сторону. При выводе (1.16) предполагалось, что частота остается неизменной относительно собственного времени атома или молекулы даже в гравитационном поле. Это предположение по сути относится к области внутренних свойств атома. Ясно, что оно неприменимо к часам с маятником, но могло бы выполняться по крайней мере приближенно в случае кварцевых часов<sup>1)</sup> и еще точнее в случае „атомных“ часов. При отсутствии совершенной квантовой теории атомных спектров, которая учитывала бы эффекты влияния всех полей, взаимодействующих с квантованным гравитационным полем, представляется разумным предположить, что равенство (1.16) выполняется с очень высокой степенью точности. Однако можно ожидать, что существуют некоторые эффекты, обусловленные пространственными производными гравитационного потенциала, которые могли бы в некоторых случаях приводить к очень малым отклонениям от (1.16), даже в случае атомных или молекулярных систем, центр масс которых свободно падает<sup>2)</sup>. Дополнительные соображения относительно красного смещения приводятся в гл. 5.

## 5. Дальнейшие замечания относительно принципа эквивалентности

Из факта эквивалентности ускоренной системы отсчета некоторому гравитационному полю следует, что последнее

<sup>1)</sup> Покоящийся на поверхности Земли кварцевый осциллятор испытывает давление собственной тяжести, что несколько меняет его размеры по сравнению с их значениями при его свободном падении, которые он имел бы на спутнике Земли.

<sup>2)</sup> То обстоятельство, что атом свободно падает, проявляется в минимальности вызываемых гравитационным полем натяжений. В атоме, покоящемся в ускоренной системе, такие натяжения могли бы создать некоторое возмущение и привести к каким-либо наблюдаемым (и поддающимся теоретическому учету) эффектам при экспериментах, производимых в ускоренных системах. (См., однако, работу Шервина [13].)



может быть компенсировано соответственно подобранным ускорением. Например, свободно падающий в гравитационном поле лифт представляется инерциальной системой отсчета, поскольку это касается гравитационных сил. Тела будут двигаться внутри него так, как если бы гравитационное поле отсутствовало, и никакие наблюдения, произведенные над этими телами, не смогут обнаружить различий между инерциальной системой и пространством внутри лифта.

Не ясно, однако, останется ли это так же верно, если помещенные в лифт тела электрически заряжены. С целью обнаружения возможного излучения точечного заряда при постоянном ускорении был предпринят целый ряд исследований [9 - 12]. Бонди и Голд, а также Фултон и Рорлих предсказывают, что подобный заряд в самом деле будет излучать. Реакция излучения (при постоянном ускорении) равна нулю, и проблема сохранения энергии усложняется вследствие того, что собственная энергия имеет бесконечно большую величину. Возможно, что при надлежащем учете внутренней структуры элементарных частиц удастся установить существование как излучения, так и отличной от нуля реакции его при падении заряженной частицы в однородном гравитационном поле. Из этого следовало бы, что, наблюдая свободное падение заряженного и нейтрального тел, можно с помощью измерений, выполненных внутри системы, различить, имеем ли мы дело с инерциальной системой или наша система свободно падает в гравитационном поле. В этом случае принцип эквивалентности стал бы просто средством формулирования уравнений одного лишь гравитационного поля, а не общим законом природы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Eötvös R. V., Math. u. Naturwiss. Ber. Ungarn., 8, 65 (1890); Beibl. Ann. Phys., 15, 688 (1891); Ann. d. Phys., 59, 354 (1896); Ann. d. Phys., 68, 11 (1922).
2. Southern L., Proc. Roy. Soc., 84, 325 (1910).
3. Zeeman P., Proc. Amsterdam Acad., 20, 542 (1917).
4. Dicke R. H., Rev. Mod. Phys., 29, 3, 355 (1957).

5. Bondi H., Rev. Mod. Phys., 29, 3, 423 (1957). (См. перевод: НПГ, стр. 309 <sup>1)</sup>.)
6. Schiff L. I., Phys. Rev. Let., 1, 7, 254 (1958).
7. Uehling E. A., Phys. Rev., 48, 55 (1935); Serber R., Phys. Rev., 48, 49 (1935).
8. Einstein A., Ann. d. Phys., 35 (1911).
9. Bondi H., Gold T., Proc. Roy. Soc., A229, 416 (1955).
10. DeWitt B., Brehme R. W., Ann. of Phys., 9, 220 (1960).
11. Drukey D. L., Phys. Rev., 76, 543 (1949).
12. Fulton T., Rohrlich F., Ann. of Phys., 9, 499 (1960).
13. Sherwin C. W., Phys. Rev., 120, 17 (1960).

---

<sup>1)</sup> Здесь и в дальнейшем сборник „Новейшие проблемы гравитации“ под ред. проф. Д. Иваненко, ИЛ, 1961, цитируется как НПГ. — *Прим перев.*

## Обобщение частной теории относительности

*Общие законы природы должны описываться уравнениями, справедливыми во всех координатных системах, то есть ковариантными относительно любых замен координат (общековариантными).*

А. Эйнштейн

### 1. Идея ковариантности

Минковский обнаружил важный факт [1], состоящий в том, что переход от одной инерциальной системы к другой, движущейся с относительной скоростью  $v$ , соответствует повороту осей четырехмерной пространственно-временной координатной системы. Изложение частной теории относительности приобретает, безусловно, наиболее изящную форму, если физическим законам придать форму соотношений между четырехмерными векторами. И хотя эта трактовка не вносит ничего принципиально ценного, она привлекает элементом простоты и стройности.

Мы будем пользоваться системой обозначений, в которой каждая координата помечается соответствующим индексом. Тогда координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $ct$  пространства Минковского в частной теории относительности следует обозначить соответственно  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  и  $x^0$ . Весьма важными величинами являются выражения, связывающие события. Событие не обладает протяженностью в пространстве или во времени, это точка в четырехмерном пространстве. Интервал между двумя событиями  $a$  и  $b$  обозначается через  $s_{ab}$  и по определению равен

$$s_{ab}^2 = (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1)^2 - (x_a^2 - x_b^2)^2 - (x_a^3 - x_b^3)^2. \quad (2.1)$$

При переходе от одной координатной системы Минковского к другой интервал между одной и той же парой событий остается неизменным (инвариантным) и в новых координатах  $x'^1, x'^2, x'^3, x'^0$  имеет вид

$$s_{ab}^2 = (x_a'^0 - x_b'^0)^2 - (x_a'^1 - x_b'^1)^2 - (x_a'^2 - x_b'^2)^2 - (x_a'^3 - x_b'^3)^2. \quad (2.2)$$

Тогда как значения одних величин, например  $s_{ab}$ , инвариантны, другие величины, например  $x_a^1 - x_b^1$ , изменяются при таких преобразованиях координат, составляющих группу. Форма выражения для  $s_{ab}$  при этом не меняется, и мы говорим, что подобные выражения ковариантны относительно группы преобразований координат (относительно поворотов осей пространства Минковского). Занимем здесь интервал между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds^2 = dx^0{}^2 - dx^1{}^2 - dx^2{}^2 - dx^3{}^2. \quad (2.3)$$

## 2. Метрический тензор

Мы очень часто будем иметь дело с суммами и поэтому примем условие, согласно которому повторение индекса означает суммирование. Это позволит нам переписать (2.3) в виде

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.4)$$

Компоненты  $g_{\mu\nu}$  задаются как

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

сама же величина  $g_{\mu\nu}$  называется метрическим тензором, а ее конкретный вид (2.5), сохраняющийся при преобразованиях Лоренца, называется метрикой Лоренца.

В криволинейных координатах метрический тензор меняет свой вид, однако он может быть вновь сразу во всем пространстве приведен к виду (2.5) посредством преобразования координат, если в пространстве выполняются постулаты евклидовой геометрии.

### 3. Метрический тензор в искривленном пространстве и в ускоренных системах

Искривленное двумерное пространство на поверхности сферы описывается квадратом линейного элемента

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Сумма углов у треугольников, образованных дугами больших кругов, больше  $\pi$  и меньше  $3\pi$ . Этот неевклидов, искривленный характер такого пространства через метрику (2.6) отражен во всех соотношениях, содержащих производные от  $g_{\mu\nu}$ . Не существует преобразований координат, приводящих (2.6) везде к диагональному виду с одинаковыми<sup>1)</sup> диагональными элементами. Позднее понятие кривизны будет нами рассмотрено более подробно.

Рассмотрим теперь плоский треугольник в инерциальной системе. Форма этого треугольника может меняться при его наблюдении в различных инерциальных системах, однако сумма углов всегда будет равна  $\pi$ , и геометрия останется прежней.

Возьмем набор точек, лежащих на одной окружности в инерциальной системе отсчета. Наблюдая их во вращающейся системе отсчета, ось которой проходит через центр окружности, мы обнаружим, что отношение длины этой окружности к ее диаметру зависит теперь от нашего метода измерения длины. Избегая здесь обсуждения проблемы синхронизации часов во вращающихся системах, предположим, что длины измеряются путем совмещения пар точек, а для определения одновременности применяются часы инерциальной системы. Отношение длины окружности к ее радиусу, измеренное с помощью масштабов, покоящихся во вращающейся системе, окажется меньше  $2\pi$ . Это происходит оттого, что твердая масштабная линейка будет мерой прежнего диаметра, а при ориентации, касательной к окружности, она подвергнется лоренцову сокращению. Метрический тензор во вращающейся системе в этом случае должен описывать неевклидово искривленное пространство.

<sup>1)</sup> По модулю, но с обычной сигнатурой. — *Прим. ред.*

В инерциальной системе мы можем во всем пространстве разместить совокупность покоящихся синхронизированных часов. Во вращающейся системе часы, расположенные на различных расстояниях от оси вращения, будут обладать различной скоростью хода. Тождественные часы на различных расстояниях от оси подобны тождественным часам в различных инерциальных системах. Синхронизовать их невозможно. Пусть временная координата измеряется с помощью сигналов, испущенных часами на оси вращающейся системы. Находящиеся в каждой точке вращающейся системы часы измеряют интервалы времени для наблюдателя в этой же точке. Отношение между этими интервалами и промежутками координатного времени, соответствующими приему наших световых сигналов, описывается через  $g_{00}$ -компоненту метрики  $g_{\mu\nu}$ . Эта величина зависит теперь от радиуса, так что метрика (2.5) специальной теории относительности теряет силу<sup>1)</sup>.

Эквивалентность гравитационного поля ускоренной<sup>2)</sup> системе тогда приводит к тому, что частная теория относительности оказывается неприменимой в протяженных областях [4], где присутствует гравитационное поле. Возникает необходимость ввести метрику искривленного пространства. В качестве другого примера мы построим в инерциальной системе треугольник, стороны которого образованы световыми лучами. Сумма его углов равна  $\pi$ . Если произвести такое же построение в гравитационном поле, то стороны нашего треугольника искривятся вследствие влияния гравитации на энергию фото-

<sup>1)</sup> Метрика, соответствующая вращающейся системе, имеет вид

$$-ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 + 2\omega r^2 d\varphi dt - (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2.$$

<sup>2)</sup> Следует сделать некоторые замечания о парадоксе часов. В первой статье Эйнштейна по электродинамике движущихся тел было отмечено, что если из двух тождественных часов одни все время покоятся в инерциальной системе, а другие, описывая замкнутый путь, возвращаются в ту точку, где находятся первые, то их показания не будут после этого совпадать. Рассмотрим теперь двух близнецов. Один из них пусть остается в инерциальной системе, а другой улетает на ракете и затем возвращается. Этот путешественник по возвращении обнаружит, что оставшийся дома брат стал старше его. Дарвин показал [2], что эта проблема вполне понятна уже в рамках специальной теории относительности, так как периоды ускоренного движения ракеты могут быть непродолжительными, время же равномерного движения — чрезвычайно большим. Таким образом, результат не может зависеть от процессов, про-

нов. Тогда сумма углов треугольника будет отличаться от  $\pi$ . Ковариантная теория описывает это обстоятельство, утверждая, что пути световых лучей всегда являются геодезическими линиями и что в гравитационном поле необходимо пользоваться метрикой искривленного пространства.

Было показано [5, 6], что при соответствующем переопределении операций измерения длины и времени всегда можно использовать метрику Лоренца. Мы могли бы просто постулировать, что поверхность Земли является плоскостью. Соответственно определив операции измерения в зависимости от широты и долготы, можно было бы прийти к внутреннему соответствию с евклидовой геометрией. В нашем изложении мы этого подхода придерживаться не будем.

#### 4. Общая ковариантность

Когда рассматриваются только гравитационные поля, принцип эквивалентности исключает возможность отличить с помощью локальных измерений инерциальную систему от системы, свободно падающей в гравитационном поле. Поэтому не существует априорных оснований для особого выделения инерциальных систем. Невозможно также построить какую-либо систему синхронизированных часов во всем гравитационном поле. Эти причины привели Эйнштейна к постулату о равноценности всех координатных систем при описании природы и о том, что физические законы должны иметь

последних за короткие периоды ускоренного движения. Если скорость путешественника относительно брата-близнеца, покоящегося в инерциальной системе, равна  $v$ , то

$$t_r = \frac{t_m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

где  $t_r$  — интервал времени, прожитый близнецом, оставшимся в инерциальной системе, а  $t_m$  — время, протекшее с точки зрения его движущегося брата. Этот вывод непосредственно следует из частной теории относительности, так как мы проводим все выкладки в системе близнеца, все время оставившегося в инерциальной системе отчета. Этот же результат [3] можно получить, проводя выкладки в системе, связанной с движущимся близнецом, если использовать формализм общей теории относительности, имеющий силу также и в системах, которые могут испытывать ускорения. Таким образом, никакого парадокса здесь нет.

один и тот же вид во всех системах. В этом и состоит принцип общей ковариантности.

Если мы примем этот принцип, то координаты станут не более чем своего рода бухгалтерской системой учета событий. Принцип общей ковариантности оказался ценным руководством при выводе правильных уравнений. Исходя из него, мы избегаем применения законов, кажущихся простыми только в некоторых системах координат, и сохраняем лишь те, которые просто выражаются в произвольных системах. Кречман [7] отметил, что все физические законы могут быть записаны в ковариантном виде. Получающиеся выражения обычно не бывают простыми. Кречман указал также, что поэтому принцип общей ковариантности совершенно не содержит никаких необходимых физических следствий. Несмотря на это, требование ковариантности при достаточной простоте формы оказалось ценным руководством при установлении уравнений; вопрос об окончательном принятии их решается на основании сравнения с опытом.

Применение аппарата тензорного анализа облегчает обращение с общековариантными уравнениями в искривленном пространстве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Minkowski H., Обращение к 80-му съезду немецких естествоиспытателей и врачей, Кёльн, 1908 г.; перепечатано в книге *The Principle of Relativity*, Dover Publications, New York, 1952. (См. перевод: „Принцип относительности“, сборник работ классиков релятивизма, М. — Л., 1935.)
2. Darwin C. G., *Nature*, **180**, 976 (1957).
3. Møller C., *The Theory of Relativity*, New York, 1952.
4. Einstein A., *Ann. d. Phys.*, **49**, 769 (1916).
5. Rosen N., *Phys. Rev.*, **57**, 147 (1949).
6. Dicke R. H., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 363 (1957).
7. Kretschmann E., *Ann. d. Phys.*, **53**, 575 (1917).



---

## Риманова геометрия и тензорное исчисление

---

*Внутренние свойства поверхностей более всего заслуживают усердного изучения геометрами.*

К. Ф. Гаусс

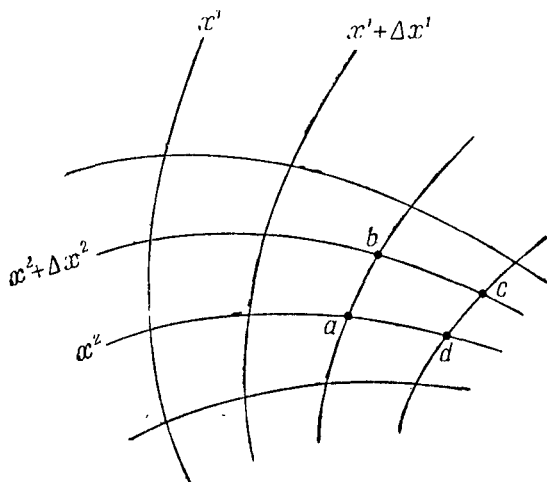
### 1. Понятие о кривизне

Рассмотрим теперь более общий тип геометрии, в которой метрика  $g_{\mu\nu}$  не обязательно везде сводима к метрике Лоренца посредством преобразования координат.

Гаусс исследовал следующий вопрос. Представим себе искривленную двумерную поверхность, населенную мыслящими двумерными существами. Могут ли они заметить, что их мир искривлен? Можно ли определить характеристики кривизны при помощи измерений, проведенных лишь внутри этой поверхности? Гаусс показал, что это в самом деле осуществимо. Начнем с того, что пронумеруем точки на нашей поверхности каким-либо систематическим, хотя и произвольным образом. Два произвольных семейства кривых  $x^1 = \text{const}$  и  $x^2 = \text{const}$  образуют координатную систему (фиг. 4). Прямое измерение длины между точками  $a$  и  $b$  дает  $g_{22}$ ; измеряя аналогичным образом длины  $ac$  и  $ad$ , получим  $g_{12}$  и  $g_{11}$ . Гаусс дал формулы, позволяющие выразить кривизну через  $g_{\mu\nu}$  и их производные.

Кривизна является внутренним свойством, и в любой фиксированной точке она имеет определенное значение вне зависимости от выбора координатной системы. Мы увидим, как можно обобщить понятие кривизны на случай числа

измерений, большего двух. Теория гравитации Эйнштейна связывает кривизну пространства с распределением натяжений и энергии. Это отчасти совпадает с предположением Маха



Ф и г. 4.

о том, что свойства пространственно-временного континуума определяются распределением энергии.

## 2. Законы преобразования различных тензоров

Прежде всего мы предположим, что имеется  $M$  переменных  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^M$ , и совокупность определенных значений этих переменных будем рассматривать как точку в пространстве или многообразии, имеющем  $M$  измерений. Само пространство образовано всеми точками, соответствующими допустимым значениям наших переменных. Пусть используется другой способ упорядочения точек  $x'^1, x'^2, x'^3, \dots, x'^M$ , такой, что

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^M). \quad (3.1)$$

Допустим существование производных и запишем

$$dx'^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta. \quad (3.2)$$

Дифференциалы координат  $dx^\alpha$  называют компонентами контрвариантного вектора<sup>1)</sup>. Подобным же образом любая совокупность величин  $F^\alpha$  по определению образует контрвариантный вектор, если эти величины подчиняются закону преобразования

$$F'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} F^\beta. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь величины вида  $\partial\varphi/\partial x^\beta$ , где  $\varphi$  — некоторая функция переменных  $x^1, x^2, \dots, x^M$ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}. \quad (3.4)$$

Мы видим, что величины  $\partial\varphi/\partial x^\alpha$  подчиняются закону преобразования, отличному от (3.3). Говорят, что любой набор величин, преобразующихся как

$$K'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} K_\beta, \quad (3.5)$$

образует ковариантный<sup>2)</sup> вектор.

Заметим, что наши определения ковариантных и контрвариантных векторов предполагают существование произвольных на нашем многообразии и не требуют существования метрики. Мы будем придерживаться общепринятого соглашения относительно обозначения ковариантных векторов нижними, а контрвариантных — верхними индексами.

Произведение двух контрвариантных векторов  $A^\alpha$  и  $B^\beta$  преобразуется как

$$A'^\alpha B'^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} A^\nu B^\lambda. \quad (3.6)$$

<sup>1)</sup> Вектор является тензором первого, а скаляр — тензором нулевого ранга.

<sup>2)</sup> Слово „ковариантный“ имеет два совершенно различных значения. Ковариантная теория или уравнение имеют один и тот же вид во всех системах координат. Но слово „ковариантный“ используется также для указания на то, что тензор обладает трансформационными свойствами (3.5). Таким образом, ковариантное уравнение может содержать наряду с ковариантными контрвариантные тензоры и другие объекты, которые вообще не являются тензорами.

Совокупность величин  $T^{\alpha\beta}$ , подчиняющихся закону преобразования вида (3.6), образует по определению контрвариантный тензор второго ранга. Аналогичным образом ковариантный тензор второго ранга подчиняется закону преобразования

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}. \quad (3.7)$$

Смешанный тензор произвольного ранга преобразуется по закону

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\eta\dots} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\eta}} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\gamma} \dots T^{\rho\sigma\dots}_{\alpha\beta\dots}. \quad (3.8)$$

Существуют величины, подчиняющиеся закону преобразования

$$T'^{\mu\dots}_{\alpha\dots} = J^W \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta}} \dots T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}, \quad (3.9)$$

где  $J$  - якобиан преобразования  $|\partial x^\alpha / \partial x'^{\alpha}|$ , а  $W$  указывает степень, в которую он возводится. Величину  $T'^{\mu\dots}_{\alpha\dots}$  называют тензорной плотностью веса  $W$ .

Функция  $S$ , переходящая при преобразовании в такую функцию  $S'$ , что  $S = S'$  в любой точке в любой системе координат, называется инвариантом или скаляром.

Во всех случаях, когда дана некоторая величина, форма ее задания предопределяет способ ее определения в других системах координат. Например, если  $T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ , то в другой координатной системе  $T'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu$ .

Произведение  $A_\lambda B^\lambda$  ковариантного и контрвариантного векторов преобразуется следующим образом:

$$A'_\lambda B'^{\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^\nu} A_\mu B^\nu = \delta_\nu^\mu A_\mu B^\nu = A_\nu B^\nu. \quad (3.10)$$

Поэтому такое произведение является скаляром. Следовательно, и внутреннее произведение (получающееся при попарном суммировании по верхним и нижним индексам) также является скаляром для тензоров высших рангов. Эти свойства могут быть использованы для доказательства тензорного характера величины. Пусть  $B^\mu$  является произвольным контрвариантным тензором, а  $A_\mu$  - набором величин, возможно

и не обладающим тензорным характером. Тогда, если произведение  $A_\mu B^\mu$  представляет собой инвариант, мы можем заключить, что  $A_\mu$  — тензор. Действительно,

$$A_\mu B^\mu = A'_\mu B^\alpha \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}. \quad (3.11)$$

Индексы  $\alpha$  или  $\mu$ , по которым следует производить суммирование, можно заменить любыми другими подходящими обозначениями<sup>1)</sup>. Это существенно упрощает рассуждения. Благодаря этому (3.11) можно переписать в виде

$$\left( A_\mu - A'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) B^\mu = 0. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что  $A_\mu$  преобразуется по закону  $A_\nu = A'_\nu \partial x'^\nu / \partial x^\mu$  и поэтому является ковариантным вектором.

Кroneckerовская дельта, записываемая как  $\delta_\mu^\nu$ , есть величина, равная единице при  $\mu = \nu$  и нулю при  $\mu \neq \nu$ . Запишем

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \delta'_\alpha{}^\beta. \quad (3.13)$$

Очевидно,  $\delta_\mu^\nu$  является смешанным тензором.

Если имеет место равенство  $S^{\mu\nu\alpha} = S^{\nu\mu\alpha}$ , то говорят, что тензор  $S^{\mu\nu\alpha}$  симметричен по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . Если же  $A^{\alpha\beta\gamma} = -A^{\beta\alpha\gamma}$ , то говорят, что тензор  $A^{\alpha\beta\gamma}$  антисимметричен (или кососимметричен) по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . Если записать для таких тензоров законы преобразования, то становится ясно, что свойства симметрии тензоров сохраняются при преобразованиях координат, коль скоро соответствующая пара индексов целиком ко- или контрвариантна. В общем случае свойства симметрии не сохраняются, если вариантность соответствующих индексов различна. Поэтому имеет смысл говорить о свойствах симметрии лишь в отношении индексов одинаковой вариантности.

Произвольный тензор  $A^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\delta$  можно записать как

$$A^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\delta = \frac{1}{2} [A^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\delta + A^{\nu\mu}{}_\alpha{}^\delta] + \frac{1}{2} [A^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\delta - A^{\nu\mu}{}_\alpha{}^\delta], \quad (3.14)$$

<sup>1)</sup> Такие индексы называются „немыми“. — *Прим. ред.*

откуда следует, что любой тензор можно рассматривать как сумму двух тензоров — симметричного по данной паре верхних (либо нижних) индексов и антисимметричного по ней.

Из законов преобразования следует, что равенство нулю всех компонент некоторого тензора в одной координатной системе влечет за собой равенство нулю всех его компонент во всех координатных системах вообще. Этот факт играет важную роль в теоретической физике. Если закон выражен в тензорной форме, констатируя, например, равенство двух тензоров, то разность между ними будет равна нулю во всех системах координат и указанный закон будет справедлив независимо от выбора системы координат. Подобным же образом, если в конкретной системе координат установлена справедливость какого-либо тензорного уравнения, то оно справедливо вообще.

Мы видели, что производные скаляра образуют ковариантный вектор. Напротив, производные от ковариантного вектора не имеют требуемых тензорных трансформационных свойств, так как

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} A'_\alpha \right) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\gamma} \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} + A'_\alpha \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}. \quad (3.15)$$

Получать тензорные величины путем дифференцирования тензоров позволяет новый вид производной — ковариантная производная. Чтобы прийти к ее определению, следует рассмотреть понятие параллельного переноса вектора.

### 3. Параллельный перенос и ковариантное дифференцирование

Понятие параллельного переноса вектора возможно последовательным образом распространить на искривленное пространство. Будем считать, что всегда существует такая система отсчета, что в непосредственной окрестности точки  $P$  имеет место геометрия Евклида (или Минковского)<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Мы всегда можем перейти к лоренцовой метрике в любой заданной точке, где  $g_{\mu\nu}$  имеет определенное значение. Пусть, например, пространство обладает  $n$  измерениями. Метрика  $g_{\mu\nu}$  в этой точке представляет собой набор  $n(n+1)/2$  чисел. Записывая

так что в этой окрестности можно использовать декартовы координаты. В такой координатной системе смысл бесконечно малого параллельного переноса вектора состоит просто в том, что ни одна из его компонент при этом не изменяется. Также не изменяется при параллельном переносе и скалярное произведение двух векторов  $A$  и  $B$ , т. е.  $A_\mu B^\mu$ . В произвольных координатах мы определяем операцию бесконечно малого параллельного переноса вектора  $A_\mu$  из точки  $P$  в соседнюю точку  $P'$  как операцию, при которой скалярное произведение этого вектора и произвольного вектора  $B^\mu$  остается неизменным.

Можно наглядно проиллюстрировать смысл параллельного переноса вдоль некоторой заданной кривой на двумерной поверхности. Пусть эта поверхность будет разворачиваемой. Мы можем тогда развернуть ее на плоскость и на этой плоскости произвести параллельный перенос векторов. Затем поверхность вновь свертывается, и искомый параллельный перенос на исходной поверхности получен. Если же наша поверхность неразворачиваема, мы должны сначала выбрать путь параллельного переноса, а затем построить касательные плоскости в каждой точке этого пути. Обгибающей этих касательных плоскостей будет разворачиваемая поверхность. Эта новая поверхность может быть затем развернута и после осуществления параллельного переноса вновь свернута. Если кривая, вдоль которой производится параллельный перенос, является геодезической, то после разворачивания на плоскость она представится в виде прямой линии. Ясно, что угол между геодезической и вектором не меняется при параллельном переносе. Мы подчеркиваем, что операция параллельного переноса из одной точки в другую зависит, вообще говоря, от пути, выбранного между этими точками.

Следует ожидать, что в криволинейных системах координат как в плоском, так и в искривленном пространстве,

$dx^\alpha = m^\alpha_\beta dx'^\beta$  и полагая для удобства  $m^\alpha_\beta = m^\alpha_\beta$ , подставим это равенство в  $ds^2$ , требуя, чтобы  $g'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Это даст нам  $n(n-1)/2$  уравнений для такого же количества гребующих определяя чисел  $m$ . Имеются и другие подходы к этому вопросу. Вообще говоря, указанный подход неосуществим в ковечной области ввиду того, что  $m$  оказываются тогда функциями, а не числами в уравнения  $dx^\alpha = m^\alpha_\beta dx'^\beta$  могут оказаться принципиально неинтегрируемыми для получения требуемого преобразования координат.

компоненты вектора  $A^\nu$  при параллельном переносе будут меняться. Пусть это изменение в случае бесконечно малого параллельного переноса равно  $\delta A^\nu$ . Величина  $\delta A^\nu$  должна быть тогда линейной функцией дифференциалов координат и компонент  $A^\nu$ . Можно записать

$$\delta A^\nu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\nu A^\alpha dx^\beta. \quad (3.16)$$

Величины  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  суть коэффициенты, свойства которых подлежат определению. Покажем сначала, что  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  симметричны по  $\alpha$  и  $\beta$ <sup>1)</sup>. Пусть  $A^\nu$  будет дифференциалом координаты  $dx^\nu$ :

$$\delta(dx^\nu) = -\Gamma_{\alpha\beta}^\nu dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.17)$$

Вернемся вновь к локально декартовой системе координат с помощью преобразований

$$\begin{aligned} x^\alpha &= f^\alpha(x'^1, x'^2, \dots), \\ x'^\alpha &= \varphi^\alpha(x^1, x^2, \dots), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где штрихованные координаты локально декартовы; тогда

$$dx^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta. \quad (3.19)$$

Из определения параллельного переноса следует, что  $\delta(dx'^\beta) = 0$ , так что исходя из (3.19), можно записать

$$\delta(dx^\nu) = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} dx'^\beta dx'^\gamma = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.20)$$

Сравнивая это выражение с (3.17), заключаем, что

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = -\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta}. \quad (3.21)$$

Правая сторона (3.21) явно симметрична по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , так что коэффициенты  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  также должны быть сим-

<sup>1)</sup> Приводимое здесь автором доказательство неполно, так как возможная антисимметричная часть символов  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  теряется в силу симметрии множителя  $dx^\alpha dx^\beta$  по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . Несимметричный вариант реализуется, например, в закрученном пространстве и неоднократно использовался при построении единых теорий поля. — *Прим. ред.*



метричны по этим индексам. Выше было указано, что применение верхних или нижних индексов связано с заданием трансформационных свойств тензора. К сожалению, индексы используются и в таких величинах, как  $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ , которые, как мы увидим, не подчиняются тензорным законам преобразования.

Если операция параллельного переноса из данной точки в любую другую точку ее окрестности определена для всех векторов, то такую точку называют аффинно связанной со своей окрестностью.

Теперь желательнее вновь ввести в рассмотрение метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ , определенный ранее с помощью соотношения

$$-ds^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Тензорные свойства  $g_{\mu\nu}$  вытекают из инвариантности квадрата „длины“  $ds^2$ , поскольку все использованные здесь преобразования координат оставляют „длины“ кривых неизменными. Если тензору  $g_{\mu\nu}$  сопоставить матрицу и взять обратную ей, то получим новые величины  $g^{\alpha\beta}$ , причем

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} := \delta_{\mu}^{\alpha}. \quad (3.22)$$

Так как кронекеровская дельта является смешанным тензором, величины  $g^{\nu\alpha}$  образуют контрвариантный тензор. Ковариантный и контрвариантный метрические тензоры используют для поднятия и опускания индексов<sup>1)</sup>, что дает новые тензоры<sup>2)</sup>, например

$$A^{\alpha} = g^{\nu\alpha} A_{\nu}. \quad (3.23)$$

Выразим  $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$  через метрический тензор. Из определения параллельного переноса следует, что

$$\begin{aligned} \delta(A_{\nu} A^{\nu}) &= g_{\mu\nu} \left( \begin{array}{c} \text{во второй} \\ \text{точке} \end{array} \right) \cdot (A^{\nu} + \delta A^{\nu})(A^{\mu} + \delta A^{\mu}) - \\ &- g_{\mu\nu} \left( \begin{array}{c} \text{в первой} \\ \text{точке} \end{array} \right) \cdot A^{\nu} A^{\mu} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что в произвольных координатах  $\delta_{\mu}^{\nu}$  заменяется на  $g_{\mu\nu}$ , ибо  $\delta_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \delta_{\nu}^{\alpha} = g_{\mu\nu}$ ; точно так же  $\delta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$ . В общем случае только  $\delta^{\nu}_{\mu} = 1$  при  $\mu = \nu$  и  $\delta^{\nu}_{\mu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$ .

<sup>2)</sup> В общем случае  $B_{\nu}^{\mu} \neq B^{\mu}_{\nu}$ . Порядок индексов слева направо при поднятии или опускании какого-либо из них должен сохраниться.

Производя явно указанные здесь действия, получаем

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} A^\mu A^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu = 0. \quad (3.25)$$

Исключая отсюда  $\delta A^\mu$  и  $\delta A^\nu$  с помощью (3.16), приходим к выражению

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta = 0, \quad (3.26)$$

Симметрия  $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$  по нижним индексам позволяет путем перестановки  $\nu$  и  $\alpha$  получить

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0. \quad (3.27)$$

Панишем по аналогии

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0. \quad (3.28)$$

Совместное решение (3.26), (3.27) и (3.28) при учете (3.22) даст

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (3.29)$$

Трехзначковую величину

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right] = \Gamma_{\nu, \mu\alpha}$$

называют символом Кристоффеля первого рода и часто записывают как  $[\mu\alpha, \nu]$ . Величину  $\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma$  называют символом Кристоффеля второго рода и записывают как  $\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\}$ . Мы уже отмечали, что величины  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  не являются компонентами тензора. Исходя из закона преобразования  $g_{\mu\nu}$  и дифференцируя его, не очень трудно показать, что  $[\mu\alpha, \nu]$  преобразуется по закону

$$[\mu\alpha, \nu]' = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu} [\beta\gamma, \delta] + g_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha}. \quad (3.30)$$

Используя закон преобразования  $g^{\alpha\beta}$ , мы приходим к закону преобразования  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta}$  в виде

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}}. \quad (3.31)$$

Из (3.31) видно, что всегда можно выбрать такую координатную систему, что в любой заданной точке все символы Кристоффеля обратятся в нуль. Один из способов достичь этого следующий. Обозначим выбранную точку через  $P$ ; пусть символы Кристоффеля в ней отличны от нуля. Произведем преобразование координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} - x^{\alpha}(P) + \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(P) (x^{\beta} - x^{\beta}(P)) (x^{\gamma} - x^{\gamma}(P)). \quad (3.32)$$

Индекс  $(P)$  соответствует значению величины в точке  $P$ . Используя (3.31) для непосредственного вычисления новых значений  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , видим, что эти новые значения обращаются в нуль в точке  $P$ . Это и завершает доказательство утверждения о возможности обращения символов Кристоффеля в нуль с помощью преобразования координат типа оттранспортирования, так как преобразование координат (3.32) может быть выполнено во всех точках, в которых символы Кристоффеля имеют конечное значение. Система координат, в которой символы Кристоффеля равны нулю в точке  $P$ , называется геодезической координатной системой, сама же точка  $P$  называется ее полюсом. Кроме того, с помощью преобразований координат можно обратить в нуль символы Кристоффеля вдоль кривой линии [4].

Вернемся теперь к нашей основной задаче — получению новых тензоров путем дифференцирования. Как мы уже видели, частная производная от вектора не является тензором. Построить новый тип производной можно следующим образом. Возьмем в некоторой фиксированной точке вектор  $A^{\mu}$ . В соседней точке он равен  $A^{\mu} + dA^{\mu}$ . Параллельный перенос его в эту соседнюю точку даст вектор  $A^{\mu} + \delta A^{\mu}$ . Вычитая одно значение из другого, получаем

$$dA^{\mu} - \delta A^{\mu} = \left( \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} A^{\gamma} \right) dx^{\alpha}. \quad (3.33)$$

Обе стороны этого равенства представляют собой векторы, так как разность двух векторов в одной и той же точке есть вектор. Поэтому величина

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} A^{\alpha}$$

является смешанным тензором; ее называют ковариантной производной от  $A^{\mu}$  и записывают как

$$A^{\mu}_{;\sigma} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} A^{\alpha}. \quad (3.34)$$

Из равенства  $\delta(A_{\mu} A^{\mu}) = 0$  при использовании (3.16) следует, что

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} A_{\alpha} dx^{\beta}. \quad (3.16a)$$

Отсюда и из соображений, аналогичных тем, которые привели нас к (3.33) и (3.34), можно записать ковариантную производную  $A_{\mu}$  в виде

$$A_{\mu;\sigma} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} A_{\alpha}. \quad (3.35)$$

Тензорные свойства (3.34) и (3.35) можно формально подтвердить, показав, что соответствующие величины удовлетворяют нужным законам преобразования (3.31). Контрвариантная производная строится путем поднятия индекса, обозначающего дифференцирование:

$$A^{ik}_{;\sigma} = g^{\sigma\alpha} A^k_{;\alpha}. \quad (3.36)$$

Ковариантные производные тензора второго ранга  $C_{\beta\delta}$  можно получить, потребовав, чтобы произведение  $C_{\beta\delta} A^{\beta} B^{\delta}$  оставалось инвариантным при параллельном переносе для произвольных  $A^{\beta}$  и  $B^{\delta}$ . Полагая  $\delta(C_{\beta\delta} A^{\beta} B^{\delta})$  равным нулю, получим  $\delta C_{\beta\delta}$ , и ковариантные производные запишутся как

$$C_{\beta\delta;\rho} = \frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} C_{\delta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\rho} C_{\beta\alpha}. \quad (3.37)$$

Аналогично

$$C^{\beta\delta}_{;\rho} = \frac{\partial C^{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} C^{\alpha\delta} + \Gamma^{\delta}_{\alpha\rho} C^{\beta\alpha}, \quad (3.38)$$

$$C^{\beta}_{\delta;\rho} = \frac{\partial C^{\beta}_{\delta}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} C^{\alpha}_{\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\rho} C^{\beta}_{\alpha}. \quad (3.39)$$

Обобщение на случай тензоров высших рангов очевидно.

Рассмотрим ковариантную производную метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ . Она также является тензором. В геодезических координатах все компоненты этого тензора должны обращаться в нуль, откуда следует, что

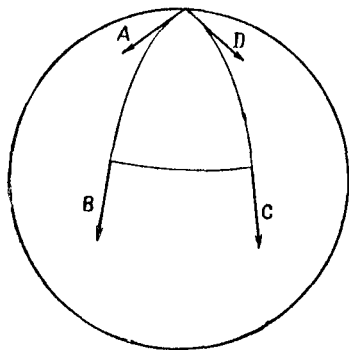
$$g_{\mu\nu;\sigma} = 0 \quad (3.40)$$

также и во всех других системах координат.

#### 4. Тензор кривизны

Мы отметили ранее, что если существует преобразование координат, приводящее метрический тензор к виду метрики Лоренца сразу в некоторой области пространства, то эта область называется плоской. Любой заданный вектор допускает параллельный перенос во всем таком пространстве, образуя при этом постоянное векторное поле. Параллельный перенос по замкнутому пути приводит тогда к вектору, тождественному с исходным.

В искривленном пространстве параллельный перенос по замкнутому пути, вообще говоря, не дает вновь исходного вектора. Например, рассмотрим поверхность сферы (фиг. 5), на которой из геодезических кривых построен сферический треугольник. Возьмем вектор  $A$

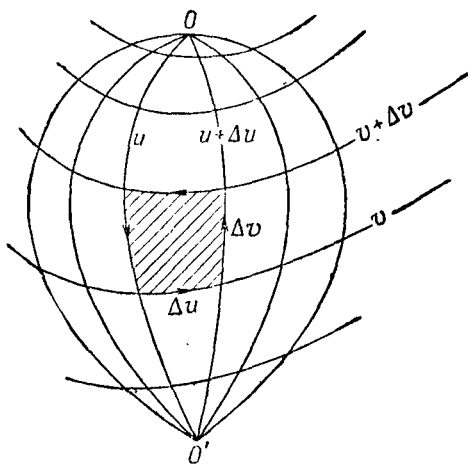


Фиг. 5.

и рассмотрим его параллельный перенос. Сначала этот вектор переходит в вектор  $B$ , затем в  $C$  и наконец в  $D$ . Очевидно, что  $A$  и  $D$  не тождественны. Займемся теперь вычислением того изменения, которое претерпевают компоненты вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого пути, изображаемого четырьмя кривыми, принадлежащими к двухпараметрическому семейству вида

$$x^{\alpha} = f^{\alpha}(u, v). \quad (3.41)$$

Этот путь переноса окружает заштрихованную четырехугольную область на фиг. 6 со сторонами  $\Delta u$  при постоянном  $v$



Фиг. 6.

и  $\Delta v$  при постоянном  $u$ . Изменение  $n^\mu$  на всем замкнутом пути равно

$$\delta n^\mu = - \oint \Gamma_{\alpha\beta}^\mu n^\alpha dx^\beta. \quad (3.42)$$

Взяв алгебраическую сумму вкладов противоположных сторон „параллелограмма“ и ограничиваясь лишь членами первого порядка по  $\Delta u$  и  $\Delta v$ , получим

$$\delta n^\mu = \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu n^\alpha) \Delta v \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u - \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu n^\alpha) \Delta u \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \Delta v. \quad (3.43)$$

Произведем в (3.43) дифференцирование, используя выражение для изменения  $n^\alpha$  при параллельном переносе; в результате имеем

$$\delta n^\mu = - \left[ \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma - \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right] \times \\ \times n^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial v} \frac{\partial x^\gamma}{\partial u} \Delta u \Delta v. \quad (3.44)$$

Так как мы ограничиваемся лишь членами первого порядка малости, было бы точнее записать (3.44) в виде

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\delta n^\mu}{\Delta v \Delta u} = \left[ \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \right. \\ \left. + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \right] n^\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \frac{\partial x^\beta}{\partial u}. \quad (3.45)$$

Левая сторона равенства (3.45) представляет собой вектор. Величины  $\partial x^\beta / \partial u$  и  $\partial x^\gamma / \partial v$  — также векторы ввиду того, что  $u$  и  $v$  суть параметры. Отсюда следует, что определяемая формулой

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \quad (3.46)$$

величина  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  является тензором. Она называется тензором Римана — Кристоффеля или, проще, тензором кривизны. Таким образом, для бесконечно малого замкнутого пути<sup>1)</sup>

$$\delta n^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} du dv. \quad (3.47)$$

Ввиду равенства нулю изменения  $\delta(n_\mu n^\mu)$  при параллельном переносе получим

$$\delta n_\mu = R^\alpha_{\mu\beta\gamma} n_\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} du dv. \quad (3.47a)$$

Из (3.47) и (3.47a) следует, что обращение в нуль  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  на любом замкнутом<sup>2)</sup> пути (что требует интегрирования по  $u$

<sup>1)</sup> Из этого рассуждения следует, что результат повторного ковариантного дифференцирования зависит, вообще говоря, от последовательности его проведения. Равенства (3.47) и (3.47a) приводят к соотношениям

$$B^\mu_{\ ;\alpha;\beta} - B^\mu_{\ ;\beta;\alpha} = -B^\nu R^\mu_{\ \nu\alpha\beta}, \\ B_{\mu;\alpha;\beta} - B_{\mu;\beta;\alpha} = B_\nu R^\nu_{\ \mu\alpha\beta}.$$

<sup>2)</sup> Так как вектор  $n^\alpha$  подвергается параллельному переносу, его значение в любой точке заданного контура зависит от выбора пути переноса. Интегрирование (3.47) и (3.47a) приобретает конкретный смысл, если осуществить параметризацию, как это показано на фиг. 6. Пусть начальной точкой будет  $O$ . Совершим параллельный перенос  $n^\alpha$  из  $O$  в  $O'$  вдоль всех заданных кривых. Это

и  $\varphi$ ) обеспечивает неизменяемость произвольного вектора при параллельном переносе.

Для метрики Лоренца тензор кривизны в области справедливости этой метрики равен нулю в силу постоянства  $g_{\mu\nu}$ . Если преобразования координат производятся в таком пространстве, то компоненты  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  в новой системе будут оставаться равными нулю вследствие их тензорных свойств. Следовательно, необходимым признаком плоского пространства является обращение в нуль  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ . С другой стороны, если тензор  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  повсюду равен нулю, то можно построить метрику Лоренца путем параллельного распространения совокупности осей Минковского, так как эта операция становится теперь однозначной, не зависящей от пути. Компоненты произвольного вектора будут тогда оставаться неизменными при параллельном переносе везде в такой области. Все символы Кристоффеля обратятся повсюду в нуль, и все первые производные метрики повсеместно исчезнут. Так как в исходной точке была взята метрика Лоренца, то ясно, что метрика будет лоренцовой везде. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство было плоским, является обращение в нуль всех ком-

приведет к появлению непрерывного векторного поля. Обращение (3.47) в нуль будет тогда гарантировать неизменность  $n^{\alpha}$  при его параллельном переносе вдоль контура, замыкающегося в исходной точке  $O$ . Суть вопроса можно уяснить, исходя из одного лишь равенства (3.16). Для заданного контура (3.16) можно записать как в виде

$$\frac{dA^{\mu}}{ds} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} \cdot \frac{dx^{\beta}}{ds}.$$

Эта система уравнений позволяет определить  $A^{\mu}$ , коль скоро при конкретизации пути касательный вектор  $dx^{\beta}/ds$  оказывается заданным. Если изменение  $A^{\mu}$  должно обращаться в нуль на любых замкнутых путях, то величина  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx^{\beta}$  должна быть точным дифференциалом, откуда

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} A^{\alpha}).$$

Разрешая это уравнение с учетом того, что вектор  $A^{\alpha}$  подвергается параллельному переносу, получаем требование равенства нулю правой стороны формулы (3.46).



полюс  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ . Ясно также, что обращение в нуль  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  гарантирует интегрируемость системы уравнений (3.16).

Из выражения (3.46) вытекает антисимметрия  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  по индексам  $\beta$  и  $\gamma$ . Тензор  $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$  равен <sup>1)</sup>

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\delta} R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\gamma\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\beta}} \right) + g_{\mu\nu} (\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\delta\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\nu}_{\delta\beta}). \quad (3.48)$$

Из (3.48) следует, что

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\alpha\delta}. \quad (3.49)$$

Исходя из (3.48) и (3.46), можно убедиться, что

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma\delta\beta} &= 0, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

## 5. Тождества Бианки

Теперь можно доказать справедливость важных дифференциальных тождеств. Выберем в некоторой точке геодезическую систему координат. В ней символы Кристоффеля обращаются в нуль, и ковариантная производная от  $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$  принимает вид

$$R^{\mu}_{\delta\beta\gamma; \nu} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\mu}_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\mu}_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\nu}}. \quad (3.51)$$

Из (3.51), таким образом, следует, что

$$R^{\mu}_{\delta\beta\gamma; \nu} + R^{\mu}_{\delta\nu\beta; \gamma} + R^{\mu}_{\delta\gamma\nu; \beta} = 0. \quad (3.52)$$

<sup>1)</sup> Раскрыть (3.48) можно, представив в явном виде  $g_{\mu\delta} R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ , а затем замечая, что

$$\begin{aligned} g_{\mu\delta} \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (g_{\mu\delta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}) - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\gamma}}, \\ g_{\mu\delta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} &= [\alpha\beta, \delta] \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\gamma}} = [\mu\gamma, \delta] + [\delta\gamma, \mu].$$

Левая часть (3.52) представляет собой тензор, величину которого мы определили в выбранной координатной системе, причем пашли все его компоненты равными нулю. Поэтому наш результат должен сохранять силу во всех остальных координатных системах. Соотношения (3.52) известны как тождества Бианки.

Смешанный тензор второго или более высокого ранга можно просуммировать по одному верхнему и одному нижнему индексу, получив тензор, имеющий ранг на две единицы ниже исходного. Эта операция называется свертыванием. При свертывании тензора  $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$  мы приходим к тензору  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \quad (3.53)$$

который называется тензором Риччи<sup>1)</sup>. Симметричность его очевидна. Получаемый при свертывании  $R_{\mu\nu}$  скаляр

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R \quad (3.54)$$

называют скалярной кривизной<sup>2)</sup>.

Умножая (3.52) на  $g^{\delta\beta} \delta_{\mu}^{\gamma}$ , получаем

$$g^{\delta\beta} [R^{\gamma}_{\delta\beta\gamma;\nu} + R^{\gamma}_{\nu\delta\beta;\gamma} + R^{\gamma}_{\nu\gamma\delta;\beta}] = 0. \quad (3.55)$$

Ковариантная производная от  $g^{\delta\beta}$  равна нулю; кроме того, из (3.46) следует, что  $R^{\nu}_{\delta\beta\gamma} = -R^{\nu}_{\delta\gamma\beta}$ ; поэтому уравнение (3.55) можно записать в виде

$$\left( R_{\gamma}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma}^{\nu} R \right)_{;\nu} = G_{\delta}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.56)$$

<sup>1)</sup> Свертка по первому и второму индексам дает нуль, так как  $R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha\beta\gamma}$  исчезает вследствие антисимметрии  $R_{\nu\alpha\beta\gamma}$  по индексам  $\nu$  и  $\alpha$ . Свертка по первому и четвертому индексам приводит к результату, отличающемуся от (3.53) только знаком.

<sup>2)</sup> В двумерном пространстве в любой точке имеют силу следующие соотношения:

$$\frac{R_{1212}}{g} = \frac{R}{2} = \frac{1}{r_1 r_2} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{S}.$$

Здесь  $g$  — детерминант  $g_{\mu\nu}$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — главные радиусы кривизны,  $S$  — площадь малого геодезического квадрата в данной точке  $\mu$ ;  $\Delta\theta$  — избыток, т. е. величина, на которую сумма его углов превышает четыре прямых угла (excess).

Уравнение (3.56) представляет собой свернутое тождество Бианки, а тензор  $G_{\gamma}^{\nu} := R_{\gamma}^{\nu} - 1/2\delta_{\gamma}^{\nu}R$  называют тензором Эйнштейна.

## 6. Геодезические линии

Зададимся вопросом: каково уравнение кривой, определяемой тем требованием, что каждый ее элемент получен параллельным переносом предыдущего? Уравнения любой кривой задаются как однопараметрическое семейство точек

$$x^{\alpha} = f^{\alpha}(s). \quad (3.57)$$

Касательный вектор равен  $dx^{\alpha}/ds$ , и новый касательный вектор, получающийся при параллельном переносе, равен

$$T'^{\rho} := \frac{dx^{\rho}}{ds} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} dx^{\beta}. \quad (3.58)$$

Этот новый касательный вектор задается, кроме того, соотношением

$$T'^{\rho} = \frac{dx^{\rho}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^{\rho}}{ds} \right) ds. \quad (3.59)$$

Приравнявая (3.58) и (3.59), получаем уравнение кривой, элементы которой параллельным образом продолжают друг друга, а именно

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{ds^2} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0. \quad (3.60)$$

Как можно было ожидать, формулы типа (3.60) представляют собой уравнения кривых экстремальной длины, называемых геодезическими линиями. Чтобы показать это, найдем соотношения, при удовлетворении которым интеграл

$$\int ds = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} \quad (3.61)$$

принимает экстремальное значение.

Вводя параметр  $k$ , запишем

$$\int ds = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dk} \frac{dx^{\nu}}{dk}} dk. \quad (3.62)$$

Пусть

$$L^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dk} \frac{dx^{\nu}}{dk}. \quad (3.63)$$

Условие экстремума интеграла (3.61) принимает вид<sup>1)</sup>

$$\delta \int L dk = 0. \quad (3.64)$$

В качестве параметра  $k$  можно выбрать длину  $s$ , измеренную вдоль геодезической. Для других кривых она не будет длиной.

В таком случае (3.64) принимает вид

$$\delta \int L ds = \int \left[ \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial (dx^i/ds)} \delta \left( \frac{dx^i}{ds} \right) \right] ds. \quad (3.65)$$

Второе слагаемое в подынтегральном выражении можно представить в виде разности двух членов:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (dx^i/ds)} \delta x^i \right) - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (dx^i/ds)} \right) \delta x^i,$$

первый из которых не даст вклада в интегрирование в силу обращения вариаций в нуль на концах пути. Тогда уравнения Эйлера — Лагранжа для этой задачи принимают вид

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial (dx^i/ds)} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \quad (3.66)$$

Заметим, что вдоль геодезической  $L = 1$ . Используя (3.63), получаем

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial (dx^i/ds)} = \left[ \frac{dg_{xy}}{ds} \frac{dx^y}{ds} + g_{xy} \frac{d^2 x^y}{ds^2} \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^z} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^z} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

и (3.66) примет вид

$$g_{xy} \frac{d^2 x^y}{ds^2} - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{xy}}{\partial x^z} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial x^{\mu\nu}} \right] \frac{dx^{\mu\nu}}{ds} \frac{dx^y}{ds} =$$

$$= g_{xy} \frac{d^2 x^y}{ds^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{xy}}{\partial x^{\mu\nu}} + \frac{\partial g_{xy\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^x} \right] \frac{dx^{\mu\nu}}{ds} \frac{dx^y}{ds} = 0. \quad (3.67)$$

<sup>1)</sup> Здесь  $\delta$  имеет смысл вариации, соответствующей изменению координат и вектора  $dx^i/dk$  при переходах от одного возможного пути к другому; параметр  $k$  лишь отмечает соответствующие точки на различных путях.

Умножая (3.67) на  $g^{\alpha\beta}$  и выполняя суммирование, придем к уравнению геодезической

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (3.68)$$

которое тождественно уравнению (3.60).

Рассматривая распространение света, следует брать нулевые геодезические. Приведенный вывод в том виде, как это сделано здесь, в этом случае неприменим, так как интервал  $ds$  повсеместно исчезает. Однако ясно, что приведшие нас к (3.60) аргументы остаются в силе. Поэтому было бы более последовательным при выводе уравнения геодезической учитывать и этот нулевой случай, с важной оговоркой, что переменная  $s$  представляет собой определенный вдоль геодезической параметр, отличный от ее длины.

## 7. Вычислительные приемы

В заключение этой главы мы приведем ряд полезных правил манипулирования тензорными величинами. Рассмотрим прежде всего ковариантную дивергенцию  $A^\mu_{;\mu}$ :

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} A^\alpha. \quad (3.69)$$

Из (3.29) следует, что

$$\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) можно записать с помощью детерминанта  $g_{\mu\nu}$ , который мы обозначаем через  $g$ . Правило разложения детерминанта приводит к соотношению

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}. \quad (3.71)$$

В (3.71) величина  $\Delta^{\mu\nu}$  является алгебраическим дополнением (минором) элемента  $g_{\mu\nu}$ . Исходя из правила нахождения обратной матрицы и из определения  $g^{\mu\nu}$ , соотношение (3.71) можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}, \quad (3.72)$$

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = - g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}. \quad (3.72a)$$

Крайнее правое выражение в (3.72а) следует из равенства  $d(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = 0$ . Получаем

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = -g g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}. \quad (3.73)$$

Использование (3.73) позволяет записать (3.70) в виде

$$\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\ln \sqrt{-g}). \quad (3.74)$$

Используем теперь выражение (3.74) при записи ковариантной дивергенции (3.69):

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A^\mu \sqrt{-g}). \quad (3.75)$$

В случае контрвариантного тензора второго ранга уравнения (3.38) и (3.74) дают

$$C^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (C^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} C^{\gamma\beta}, \quad (3.76)$$

а для смешанного тензора правило (3.39) приводит к выражению

$$C_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (C_\alpha{}^\beta \sqrt{-g}) - \Gamma^\beta_{\alpha\sigma} C_\beta{}^\sigma. \quad (3.77)$$

В случае антисимметричного тензора  $F^{\alpha\beta}$  последнее слагаемое в (3.76) обращается в нуль и ковариантная дивергенция принимает вид

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}). \quad (3.78)$$

Если же тензор  $S^{\alpha\beta}$  симметричен, то преобразование последнего слагаемого в (3.77) приводит к результату

$$S_\alpha{}^\beta{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (S_\alpha{}^\beta \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} S^{\mu\nu}. \quad (3.79)$$

При проведении вычислений часто оказывается полезным символ Леви-Чивита  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Его определяют: условие, что  $\epsilon = 0$  при совпадении любых двух его индексов, изменение знака при переместе местами любой пары индексов и равен-

ство  $\varepsilon_{0123} = \pm 1$ . Детерминант  $K$  тензора  $K_{\mu\nu}$  удобно представлять в виде разложения

$$K\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu} K_{\iota\alpha} K_{\kappa\beta} K_{\lambda\gamma} K_{\mu\delta}. \quad (3.80)$$

Закон преобразования

$$K_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\iota}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} K'_{\beta\alpha}$$

в применении к (3.80) приводит после преобразований к установлению следующей связи между детерминантами  $K$  и  $K'$ :

$$K' = \left[ J \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right]^2 K. \quad (3.81)$$

Составляя (3.80), (3.81) и закон преобразования для  $K_{\mu\nu}$ , получаем

$$\varepsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left( J \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right)^{-1} \frac{\partial x^{\iota}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\delta}} \varepsilon_{\iota\kappa\lambda\mu}. \quad (3.82)$$

Это соотношение показывает, что символ  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  является тензорной плотностью веса  $-1$ . Подобным же образом можно показать, что символ  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  является тензорной плотностью<sup>1)</sup> веса  $+1$ . Заметим, что если  $\varepsilon$  — тензорная плотность в данном пространстве, то при такой интерпретации необходимо, чтобы полное число индексов у символа  $\varepsilon$  было равно числу измерений пространства.

Положим теперь  $K_{\mu\nu} =: g_{\mu\nu}$ ; из (3.81) можно заключить, что детерминант  $g'_{\mu\nu}$  связан с детерминантом  $g_{\alpha\beta}$  посредством соотношения

$$(-g')^{1/2} =: J \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) (-g)^{1/2}. \quad (3.83)$$

Элемент четырехмерного объема  $d^4x'$  связан с  $d^4x$  согласно правилу Якоби

$$d^4x = J \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) d^4x'. \quad (3.84)$$

<sup>1)</sup> Метрический тензор нельзя использовать для поднятия или опускания индексов у символа  $\varepsilon$  ввиду того, что  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  и  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  обладают различными весами.

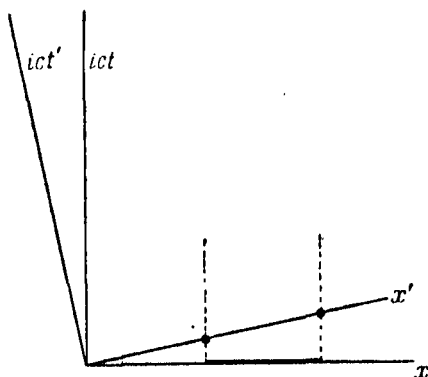
Сопоставление (3.83) и (3.84) дает

$$\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-g'} d^4x'. \quad (3.85)$$

Таким образом, показано, что величина  $\sqrt{-g} d^4x$  является инвариантом.

## 8. Измерение длин

Мы рассматривали координаты и интервалы. В частной теории относительности мы имеем дело также с длинами. Покоящийся в заданной лоренцевой системе стержень обладает вполне определенной длиной. Мировые линии концов



Фиг. 7.

стержня параллельны оси времени. В другой лоренцевой системе координат  $x'^\alpha$  изменение его длины дается формулой

$$(\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2, \quad (3.86)$$

где  $\Delta x'^1$  описывает разность координат  $x'^1$  в двух точках, в которых гиперплоскость  $x'^0 = \text{const}$  пересекает мировые линии концов стержня (см. фиг. 7). Рассматривая пару событий, мы каждую пространственно-временную точку по отдельности проектируем нормально на гиперповерхность  $x'^0 = \text{const}$ , снова используя затем соотношение (3.86).



Тем же способом можно определить длину в искривленном пространстве. Возьмем координаты  $x^0, x^1, x^2, x^3$  и метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ . В заданной точке введем локально лоренцову систему с координатами  $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ . Пусть координата  $x'^0$  будет параллельна  $x^0$ , так что

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \neq 0.$$

Индекс  $i$  указывает пространственные координаты. Для пары событий мы определяем

$$dl^2 = dx'^i dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.87)$$

Закон преобразования метрического тензора имеет вид

$$g_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^j} \frac{\partial x'^0}{\partial x^k},$$

$$g_{00} = - \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}, \quad (3.88)$$

$$g_{0j} = - \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^j}.$$

Использование (3.88) в (3.87) дает

$$dl^2 = \left( g_{jk} - \frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^j dx^k = \gamma_{jk} dx^j dx^k, \quad (3.89)$$

где

$$\gamma_{jk} = \left( g_{jk} - \frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}} \right). \quad (3.90)$$

Можно показать<sup>1)</sup>, что величина  $\gamma_{jk}$  обратна трехмерной матрице  $g^{jk}$ . Четырехмерный детерминант тензора  $g_{\mu\nu}$  связан с трехмерным детерминантом величины  $\gamma_{jk}$ , который мы обо-

<sup>1)</sup> Чтобы получить равенство  $g^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_k$ , достаточно записать  $g^{ij}g_{jk} + g^{i0}g_{0k} = \delta^i_k$ ,  $g^{ij}g_{j0} + g^{i0}g_{00} = 0$  и затем исключить  $g^{i0}$ .

значим через  $\gamma$ , соотношением<sup>1)</sup>

$$g = g_{00} \gamma. \quad (3.91)$$

Подобным же образом мы можем определить дифференциал времени для пары событий с помощью его значения в локально лоренцовой системе:

$$(dx'^0)^2 = dt^2 - g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Учитывая (3.89) и извлекая квадратный корень, получаем

$$dx'^0 = (-g_{00})^{1/2} dx^0 - (-g_{00})^{-1/2} g_{0i} dx^i.$$

## 9. Определение метрического тензора

Имея изгибаемый (но не растяжимый) стержень и „естественные“ часы, отмечающие инвариантные интервалы, можно использовать их для нахождения  $g_{\mu\nu}$  в заданной точке путем прямых измерений, используя соответственно выбранные пары событий, координаты которых известны. Жестких стержней не существует, однако можно использовать обычные стержни, если отклонение от абсолютной жесткости поддается учету.

При другом способе нахождения метрики применяется локально лоренцова система и требуется знать координаты событий как в исходной системе, так и в лоренцовой. С помощью стержня можно измерить квадрат длины в системе Лоренца, причем отпадает необходимость вносить поправки на неидеальную жесткость, так как стержень находится в состоянии свободного падения и свободен от натяжений. Данные измерения шести пар событий позволяют тогда вычислить  $\gamma_{ij}$  с помощью (3.89).

Допустим, что исходная временная координата определяется по приему радиосигналов, а в точке определения  $g_{\mu\nu}$

<sup>1)</sup> Положим сначала

$$\gamma = \frac{1}{g_{00}} \begin{vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ g_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ g_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ g_{30} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}.$$

Прибавляя первый столбец, умноженный на  $g_{10}/g_{00}$ , ко второму, а затем проделывая такую же операцию с третьим и четвертым столбцами, придем к равенству (3.91).

мы имеем часы с цезиевым пучком. Сравнение их показаний с сигналами времени дает  $g_{00}$ . Для определения  $g_{01}$  установим радиоприемники в двух точках с различными координатами  $x^1$ . Будем транслировать импульсы излучения от одного приемника к другому, измеряя времена прихода сигналов через координатные временные сигналы. Тогда

$$ds^2 = 0 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{10}dx^0 dx^1 + g_{00}(dx^0)^2, \quad (3.92)$$

и из (3.89) получим

$$(dl^1)^2 = \left( g_{11} - \frac{(g_{01})^2}{g_{00}} \right) (dx^1)^2. \quad (3.93)$$

Исключим теперь  $g_{11}$  из (3.92) с помощью (3.93); это дает

$$(dl^1)^2 + \frac{1}{g_{00}} \cdot (g_{01})^2 (dx^1)^2 + 2g_{10}dx^0 dx^1 + g_{00}(dx^0)^2 = 0. \quad (3.94)$$

В уравнении (3.94) нам известны все величины, кроме  $g_{01}$ , которая становится, таким образом, определенной. Аналогичным образом можно определить  $g_{02}$  и  $g_{03}$ . Знание их и результат измерения  $\gamma_{ij}$  определяют теперь все остальные компоненты  $g_{\mu\nu}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Levi-Civita T., The Absolute Differential Calculus, London, 1927.
2. Synge J. L., Schild A., Tensor Calculus, University of Toronto Press, 1952.
3. Spain B., Tensor Calculus, Interscience, New York, 1953.
4. Fermi E., Atti accad. nazl. Lincei, 31, 21, 51 (1922).

## Уравнения поля в общей теории относительности и электродинамике

*Гравитационные силы занимают исключительное положение среди других сил, в частности электромагнитных, поскольку те десять функций, которые характеризуют гравитационное поле, вместе с тем определяют и метрические свойства измеряемого пространства.*

А. Эйнштейн

### 1. Уравнения гравитационного поля

Во второй главе мы рассмотрели вращающуюся систему отсчета. Вследствие существования ускорений возникла необходимость в римановой метрике. Неоднородное гравитационное поле эквивалентно внутри каждой малой области соответствующей ускоренной системе. Поэтому следует ожидать, что риманова метрика позволит описать гравитационное поле. Квадрат линейного элемента задается равенством

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.1)$$

Мы будем отождествлять метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  с потенциалами гравитационного поля. Такое отождествление, следующее из принципа эквивалентности, является, по-видимому, важнейшей новой чертой общей теории относительности. Остается записать дифференциальные уравнения, связывающие  $g_{\mu\nu}$  с распределением энергии массы. Мы будем исходить из закона всемирного тяготения Ньютона, имеющего вид уравнения Пуассона для гравитационного потенциала  $\varphi$ :

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho_M. \quad (4.2)$$

Здесь  $G$  — гравитационная постоянная, а  $\rho_M$  — масса в единице объема.

Левую сторону равенства (4.2) можно сделать по меньшей мере лоренц-инвариантной, представив ее в следующем виде:

$$\square \varphi = 4\pi G \rho_M. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) аналогично уравнениям четырехмерного потенциала электродинамики. Там плотность электрического заряда была одной из компонент 4-вектора вследствие инвариантности полного электрического заряда. Однако масса не является инвариантом, поэтому правая сторона (4.3) не будет компонентой 4-вектора. Это компонента тензора второго ранга — тензора энергии — импульса — натяжений, уже знакомого из частной теории относительности. Эти тензорные свойства приводят к теории, более сложной, чем электродинамическая. Также и сопоставляемые гравитационному полю частицы нулевой массы покоя, гравитоны, обладают новым спином, равным двум, что снова является следствием тензорного характера гравитационных „потенциалов“  $g_{\mu\nu}$  (ранг два).

Обратимся к законам сохранения. Закон сохранения массы в релятивистской гидродинамике выражается через уравнение непрерывности

$$\frac{\partial (\rho_M v^i)}{\partial x^i} + c \frac{\partial \rho_M}{\partial x^0} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $v^i$  — скорость, а индекс  $i$  при суммировании пробегает три пространственных значения. Умножим уравнение (4.4) на  $dx^1 dx^2 dx^3$  и проинтегрируем по заданному объему. Первые три слагаемых сразу дают интеграл по замкнутой поверхности, охватывающей взятый объем. Этот результат означает, что производная по времени от полной массы, заключенной внутри области интегрирования, равна потоку массы через эту поверхность.

Обобщение закона (4.4) в специальной теории относительности имеет вид

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad (4.5)$$

где  $T_\mu^\nu$  — тензор энергии — импульса — натяжений.

В дальнейшем мы будем обозначать операцию  $\partial/\partial x^\alpha$  с помощью запятой перед индексом  $\alpha$ . Так уравнение (4.5) примет вид  $T_{\mu,\nu}^\nu = 0$ .

В теории поля специальной теории относительности существует метод получения  $T_{\mu\nu}$  из плотности лагранжиана  $L$ , которая считается функцией переменных полей  $q^\alpha$  и их первых производных  $q^{\alpha, \beta}$ . Функция действия является четырехмерным интегралом от  $L/c$ , и принцип экстремума действия утверждает, что при вариации переменных поля, обращаемой в нуль на границе интегрирования, выполняется равенство

$$\delta \int L d^4x = 0. \quad (4.6)$$

Здесь символ  $\delta$  имеет обычный смысл и предполагается, что переменные полей  $q^\alpha$  и  $q^{\alpha, \beta}$  зависят от некоторого параметра. Если этот параметр обозначить через  $k$ , то  $\delta$  имеет смысл  $dk$  ( $\partial/\partial k$ ), причем при дифференцировании  $\partial/\partial k$  величины  $x^\mu$  полагаются постоянными. Таким образом, порядок дифференцирования по  $k$  и по координатам может изменяться. Равенство (4.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int L d^4x = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \gamma}} \delta q^{\alpha, \gamma} \right) d^4x = \\ &= \int \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \gamma}} \right) \delta q^\alpha d^4x + \int \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \beta}} \delta q^\alpha \right) d^4x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Последнее слагаемое справа в (4.7) можно записать в виде поверхностного интеграла, обращаемого в нуль вследствие исчезновения вариаций  $\delta q^\alpha$  на границе рассматриваемой области. Так как уравнение (4.7) должно быть справедливо при произвольных вариациях, из него следуют уравнения поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \gamma}} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0. \quad (4.8)$$

Умножим (4.8) на  $q^{\alpha, \beta}$  и учтем, что

$$\frac{\partial L}{\partial x^\beta} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \rho}} \frac{\partial q^{\alpha, \rho}}{\partial x^\beta},$$

а также что  $q^{\alpha, \gamma, \beta} = q^{\alpha, \beta, \gamma}$ . После преобразований получим

$$\left[ \delta_\beta^\gamma L - q^{\alpha, \beta} \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \gamma}} \right]_{, \gamma} = 0. \quad (4.9)$$

Из (4.9) и (4.5) следует, что

$$T_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma} L - q^{\alpha, \beta} \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha, \gamma}}. \quad (4.10)$$

Сравнивая с классической механикой, мы отождествляем  $-T_0^0$  с плотностью энергии, так как  $q^{\alpha, 0}$  соответствует скорости. Анализ уравнений (4.9) и (4.10) показывает, что формула (4.10) не определяет  $T_{\beta}^{\gamma}$  однозначно. К величине  $T_{\beta}^{\gamma}$  можно прибавить любую величину  $\Phi_{\beta}^{\gamma\alpha, \alpha}$ , коль скоро  $\Phi_{\beta}^{\gamma\alpha, \alpha}$  антисимметрично по  $\gamma$  и  $\alpha$ . Стало обычным выбирать функцию  $\Phi$  таким образом, что получающийся тензор  $T_{\beta\gamma}$  (оба индекса опущены или подняты) оказывается симметричным [1, 2]. Это вызвано стремлением получить плотность момента импульса, которая задается равенством

$$M_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta} x_{\gamma} - T_{\alpha\gamma} x_{\beta} \quad (4.11)$$

и удовлетворяет закону сохранения

$$M_{\alpha\beta\gamma, \alpha} = 0. \quad (4.12)$$

Выполняя указанное в левой части уравнения (4.12) дифференцирование, находим, что (4.12), безусловно, удовлетворяется при симметричных  $T_{\alpha\beta}$ .

В случае жидкости  $T_{\mu\nu}$  записывается через 4-скорость  $U_{\mu}$  следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = (p + E) U_{\mu} U_{\nu} + \delta_{\mu\nu} p. \quad (4.13)$$

Здесь  $p$  — давление и  $E$  — полная плотность энергии (массы), определяемая в каждой точке в локальной системе покоя материи. Выражение (4.13) является четырехмерным обобщением трехмерного тензора натяжений<sup>1)</sup>  $T_{ij}$ , определяющего силу  $dF_i$ , приложенную к элементу поверхности  $ds^i$ , согласно формуле

$$dF_i = T_{ij} ds^j. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.4) описывало сохранение массы; из (4.5) следует и сохранение полной энергии и импульса. Импульс

<sup>1)</sup> Так возник тензор энергии — импульса — натяжений исторически. В теории упругости  $T_{ij}$  симметричен вследствие равновесия вращающих моментов, действующих на элементы объема.

и энергия задаются через пространственные и временную компоненты  $P_\alpha$ , причем

$$P_i = \int T_i^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad P_0 = \int T_0^0 dx^1 dx^2 dx^3.$$

Величина  $P_\alpha$  преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца.

В электродинамике <sup>1)</sup> тензор энергии — импульса — натяжений выражается через тензор напряженности поля  $F_{\mu\alpha}$  следующим образом:

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_{\mu}^{\nu} \right). \quad (4.15)$$

Это следует из (4.10), если выбрать лагранжиан максвелловского поля так, как указано ниже в этой главе. Член

$$- \frac{1}{4\pi} (A_{\mu} F^{\nu\alpha})_{,\alpha}$$

здесь введен для симметризации  $T_{\mu\nu}$ .

Приведенные выражения получены из соображений, справедливых в лоренцовых системах. Однако уравнения (4.13) и (4.15) являются тензорными и поэтому справедливы в произвольных координатах. Любое выражение, полученное из (4.10), будет либо тензорным, либо легко приводимым к виду, удовлетворяющему трансформационным свойствам тензоров (например, путем замены частных производных ковариантными). Явно ковариантная форма  $T_{\mu\nu}$  будет получена ниже в этой главе.

Вернемся теперь к (4.3) и заметим, что правая сторона этого равенства тождественна нуль-нуль-компоненте  $T_{\mu\nu}$ . Это подсказывает вывод, что уравнения гравитационного поля должны иметь вид соотношения, приравнивающего комбинацию тензоров второго ранга, относящихся к гравитационному полю, к тензору энергии — импульса — натяжений, характеризующему другие поля. Левая часть тензорных уравнений поля должна быть в некотором приближении сводима к уравнению Даламбера. Число возможных видов искомого тензора уменьшается вследствие того требования, что он должен быть образован из  $g_{\mu\nu}$  и его производных не выше второго

<sup>1)</sup> Мы используем здесь абсолютные единицы CGS.



порядка. Для слабых полей он должен переходить в даламбертиан. Для обеспечения этого свойства и согласования размерностей целесообразно потребовать, чтобы уравнения были линейны по крайней мере относительно вторых производных  $g_{\mu\nu}$ .

Предположим, что некоторый заданный тензор не содержит производных  $g_{\mu\nu}$  выше второго порядка и линеен по ним. Перейдем к геодезическим координатам, так чтобы символы Кристоффеля обращались в нуль. Из (3.48) видно, что в этих координатах вторые производные  $g_{\mu\nu}$  всегда можно записать как линейные функции тензора кривизны. Поэтому, если нужно построить тензор второго ранга, то его самый общий вид будет

$$C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R + C_3 g_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Здесь  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — постоянные. Первые два слагаемых в (4.16) суть линейные комбинации компонент тензора кривизны. Уравнение (4.16), как тензорное, справедливо во всех координатных системах. К выражению вида (4.16) мы пришли, исходя из требований общей ковариантности, построения тензора ранга два, линейности уравнения относительно вторых производных  $g_{\mu\nu}$  и отсутствия производных высших порядков.

Теперь полезно воспроизвести рассуждение Маха [3] и Гильберта [4]. Пусть искомый закон имеет вид соотношения

$$B_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

между симметричными тензорами. Допустим получено решение, задающее  $g_{\mu\nu}$  как функцию координат. Преобразования координат можно произвести, вводя четыре функции

$$x'^{\mu} = F^{\mu}(x). \quad (4.18)$$

Эти функции можно выбрать таким образом, что  $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  и что первые производные  $g_{\mu\nu}$  будут везде равны первым производным  $g'_{\mu\nu}$  в некоторый начальный момент времени или на некоторой пространственно-подобной поверхности<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Рассмотрим, например, преобразование  $x'^0 = x^0$ ,  $x'^1 = x^1 + a(x^0)^3$ ,  $x'^2 = x^2$ ,  $x'^3 = x^3$ ; тогда в момент  $x^0 = 0$  повсюду  $g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ , и все первые пространственные и временные производные от  $g^{\mu\nu}$  в момент  $x^0 = 0$  совпадают.

Вследствие ковариантности закона (4.17) преобразованные уравнения поля имеют в точности тот же вид, что и исходные. Отсюда, поскольку в них отсутствуют производные  $g_{\mu\nu}$  выше второго порядка, следует, что  $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$  посылую. Это обстоятельство противоречило бы равенству

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (4.19)$$

Поэтому Гильберт заключил, что четырехмерные ковариантные выражения вида (4.17) не состоят из десяти независимых уравнений, а должны иметь место четыре тождества, так что независимыми остаются лишь шесть уравнений. В этом случае решения будут содержать четыре произвольные функции, которые определяются однозначно, если некоторым нековариантным образом конкретизировать систему координат. Способ установления четырех тождеств, которым должно удовлетворять уравнение (4.17), вытекает из того факта, что при метрике Лоренца тензор энергии — импульса — натяжений, составляющий правую часть равенства (4.8), подчиняется закону сохранения

$$T_{\mu, \nu}{}^\nu = 0. \quad (4.20)$$

Логическое обобщение закона (4.20) на общековариантную теорию имеет вид

$$T_{\mu; \nu}{}^\nu = 0. \quad (4.21)$$

Как было показано [уравнение (3.56)], из тождеств Бианки следует, что

$$\left( R_{\mu}{}^\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^\nu R \right)_{; \nu} = 0. \quad (4.22)$$

Эти тождества применимы при соответствующем выборе постоянных в (4.16). Из этих соображений следует, что уравнения поля должны иметь вид

$$R_{\mu}{}^\nu - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^\nu R - \lambda \delta_{\mu}{}^\nu = K T_{\mu}{}^\nu. \quad (4.23)$$

Здесь  $\lambda$  и  $K$  — постоянные. Как данные опыта [5], так и соображения логической простоты указывают, что постоянную  $\lambda$  можно положить равной нулю. Первоначальная формулировка теории, данная Эйнштейном [7], содержала утвер-

ждение о том, что движение частиц в гравитационном поле описывается ковариантным обобщением законов Ньютона, которое дает уравнение геодезической

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (4.24)$$

Позднее было показано, что эти уравнения движения по существу уже содержатся в уравнениях поля (4.23) и не требуют отдельного постулирования. Согласно (4.24), сила, действующая на единицу массы покоящегося тела, задается тремя компонентами  $-c^2 \Gamma^i_{00}$ . В приближении слабого поля величины  $g^{i\alpha}$  весьма близки к соответствующим значениям метрики Лоренца, так что для метрики, не зависящей от времени

$$F^i = -c^2 \Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2} c^2 \nabla_i g_{00}.$$

Теперь естественно по аналогии с другими полями рассматривать  $\frac{1}{2} c^2 g_{\mu\nu}$  как гравитационные потенциалы. В случае слабых полей уравнение (4.23) сводится к уравнению Пуассона<sup>1)</sup> (4.2). Это можно осуществить, положив константу  $K$  в (4.23) равной  $8\pi G/c^4$ , где  $G$  — гравитационная постоянная, равная  $6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$ . Уравнения поля принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.25)$$

## 2. Вывод уравнений поля из вариационного принципа

Мы будем исходить из функции действия  $I$ , определяемой как

$$I = I_G + I_F = \frac{1}{c} \int (L_G + L_F) \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.26)$$

Здесь  $I_G$  — гравитационная часть функции действия,  $I_F$  — часть, связанная со всеми другими полями,  $L_G$  — плотность лагранжиана гравитационного поля и  $L_F$  — плотность лагранжиана всех других полей. В качестве  $L_G$  мы возьмем ска-

<sup>1)</sup> Анализ случая слабого поля проведен в гл. 7.

лярную кривизну  $R$ , умноженную на размерный коэффициент  $c^4/16\pi G$ . Тогда принцип стационарности действия дает

$$\frac{c^3}{16\pi G} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x + \delta I_F = 0. \quad (4.27)$$

При этом вариация гравитационной части функции действия равна

$$\delta I_G = \frac{c^3}{16\pi G} \left\{ \int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x \right\}. \quad (4.28)$$

Вспомним, что

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu, \alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha, \nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.$$

Предварительно перейдя к геодезической системе координат, можно записать [6]

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu}. \quad (4.29)$$

Это уравнение является тензорным и поэтому справедливо во всех координатных системах.

Необходимо отыскать значение вариации  $-g$ . Из (3.72) следует, что

$$\delta(-g) = -g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Используя выражения (4.29) и (4.30) и учитывая, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, мы можем придать равенству (4.28) вид

$$\delta I_G = \frac{c^3}{16\pi G} \left\{ \int [g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}]_{;\alpha} \sqrt{-g} d^4x + \int \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \right\}. \quad (4.31)$$

Покажем теперь, что первый интеграл в (4.31) обращается в нуль [6]. Величина  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  — скаляр; из (4.29) следует, что величина  $g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}$  — вектор. Тогда использование выражения (3.75) дает

$$\begin{aligned} \int [g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}]_{;\alpha} \sqrt{-g} d^4x &= \\ &= \int [V \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\beta}_{\mu\beta})]_{;\alpha} d^4x. \end{aligned} \quad (4.32)$$

С помощью теоремы Гаусса правую часть (4.32) можно преобразовать в поверхностный интеграл, который равен нулю вследствие обращения в нуль вариаций на границе. Тогда (4.31) приобретает вид

$$\delta I_G = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.33)$$

При выводе этого результата не делалось никаких определенных предположений о том, какие величины (в дополнение к  $g^{\mu\nu}$ ) рассматриваются в качестве независимых переменных при варьировании. Относительно остальной части функции действия мы примем, что она не содержит производных  $g^{\mu\nu}$  выше первого порядка. Тогда для вариации  $I_F$  получим

$$\delta I_F = \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \delta g^{\mu\nu, \alpha} \right] d^4x. \quad (4.34)$$

Второе слагаемое в подынтегральном выражении (4.34) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial(g^{\mu\nu, \alpha})} \delta g^{\mu\nu, \alpha} = & \left[ \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right]_{, \alpha} - \\ & - \left[ \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right]_{, \alpha} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Первое слагаемое в правой части (4.35) можно преобразовать в поверхностный интеграл, который снова даст нуль вследствие обращения вариаций в нуль на границе. Поэтому

$$\delta I_F = \frac{1}{c} \int \left[ \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right)_{, \alpha} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.36)$$

Величину, стоящую в квадратных скобках в подынтегральном выражении (4.36), мы положим равной плотности тензора второго ранга  $\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g}$ . (Тензор  $T_{\mu\nu}$  будет сейчас же отождествлен с тензором энергии — импульса — натяжений.) Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \left( \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right)_{, \alpha} - \frac{\partial(L_F \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}. \quad (4.37)$$

Тогда соотношения (4.26), (4.33), (4.36) и (4.37) приводят к

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

Левая часть (4.38) удовлетворяет тождествам Бианки, так что тензор  $T_{\mu\nu}$ , определяемый равенством (4.37), удовлетворяет закону

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \quad (4.39)$$

и поэтому может быть отождествлен с тензором энергии — импульса — натяжений, исходя из обычных соображений единственности. Правило (4.37) для вычисления тензора  $T_{\mu\nu}$  в некоторых отношениях является более общим, чем правило (4.10), так как оно автоматически дает симметричную формулу  $T_{\mu\nu}$ .

### 3. Уравнения Максвелла

В электродинамике плотность лагранжиана равна

$$L_M = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha + L_p. \quad (4.40)$$

Величина  $L_p$  представляет собой плотность лагранжиана заряженных частиц; вектор  $j^\alpha$  — плотность четырехмерного тока. Рассмотрим прежде всего случай лоренцевой метрики. Тензор напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  строится с помощью четырехмерного вектор-потенциала  $A_\mu$  по правилу,

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (4.41)$$

В (4.40) компоненты четырехмерного потенциала рассматриваются как переменные поля. Уравнения Максвелла выражаются через тензорную напряженность и плотность 4-тока в виде

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (4.42)$$

и

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (4.43)$$

Подстановка равенства (4.41) в (4.43) показывает, что уравнению (4.43) тождественно удовлетворяет любой тензор  $F_{\mu\nu}$ , определенный согласно (4.41). Таким образом, при

выборе тензора напряженности, построенного из производных 4-потенциала, формула (4.42) полностью соответствует содержанию уравнений Максвелла.

Если, используя условие калибровки Лоренца в виде

$$A^{\nu}_{;\nu} = 0, \quad (4.44)$$

подставить (4.41) в (4.42), то в качестве уравнений электродинамики, записанных через 4-потенциалы, мы получим

$$A^{\mu}_{;\alpha}{}^{,\alpha} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \quad (4.45)$$

Предпримем теперь обобщение этих результатов на случай произвольных координатных систем. При этом формула (4.40) сохраняет свою силу, а (4.42) принимает вид

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \quad (4.46)$$

Определение (4.41) принимает вид  $A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ , который, однако, вновь сводится к (4.41) при подстановке (3.35) и учете свойств симметрии  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}$  по нижним индексам. Так как  $F^{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор, можно, пользуясь (3.78), записать

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}. \quad (4.47)$$

Соответствующее обобщение (4.43) имеет вид

$$(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (-g)^{-1/2} F_{\alpha\beta})_{;\delta} = 0. \quad (4.48)$$

Однако величина, стоящая в скобках, представляет собой антисимметричный по индексам  $\gamma$  и  $\delta$  тензор второго ранга; таким образом, из (3.78) вновь следует, что (4.48) сводится в произвольной системе координат к (4.43).

Выражение (4.44) принимает вид

$$A^{\nu}_{;\nu} = 0. \quad (4.49)$$

Вычисление, которое проще всего произвести в геодезических координатах (имея в виду, что обращаются в нуль лишь символы Кристоффеля, но не их производные), приводит к следующему правилу изменения порядка ковариантного дифференцирования вектора:

$$A^{\nu}_{;\rho;\sigma} - A^{\nu}_{;\sigma;\rho} = R^{\nu}_{\alpha\sigma\rho} A^{\alpha}.$$

Используем этот результат в уравнении (4.46), впервые записав его через  $A^\mu$ :

$$A^{\nu;\mu}_{;\nu} - A^{\mu;\nu}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Переносим здесь индекс  $\mu$  вниз, записывая  $A^\nu_{;\mu;\nu}$  через  $A^\nu_{;\nu;\mu}$  и учитывая (4.49), получаем

$$A_{\mu;\nu;\nu} - R_{\mu\alpha} A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j_\mu, \quad (4.50)$$

как результат обобщения (4.45).

#### 4. Движение заряженной частицы

Функция действия для частицы, несущей заряд  $e$ , задается формулой

$$I = -mc \int ds + \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (4.51)$$

Уравнения движения можно получить из этого выражения, положив вариацию  $I$  равной нулю. Исходя из (3.62) и используя (3.68), получаем для первого слагаемого в (4.51) выражение

$$-mc \delta \int ds = -mc \int \left( \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) g_{\mu\gamma} \delta x^\gamma ds. \quad (4.52)$$

Второе слагаемое в (4.51) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \delta \int A_\mu dx^\mu &= \frac{e}{c} \int \delta A_\mu dx^\mu + \frac{e}{c} \int A_\mu d \delta x^\mu = \\ &= \frac{e}{c} \int [d(A_\mu \delta x^\mu) - \delta x^\mu dA_\mu + \delta A_\mu dx^\mu]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Первый член в подинтегральном выражении справа при интегрировании дает нуль, так как на концах пути интегрирования вариации исчезают. Что же касается остальных слагаемых, то мы заметим, что

$$dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

тогда как

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu.$$



Комбинируя (4.52) и (4.53) с учетом определения (4.41) и приравнявая результат нулю, получаем, после поднятия одного из индексов у  $F_{\alpha\beta}$ , уравнения движения заряженной точечной частицы в гравитационном и электромагнитном полях:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = F^\mu_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{e}{mc^2}. \quad (4.54)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bellinfante F., Physica, 6, 887 (1939).
2. Rosenfeld L., Mem. acad. roy. Belgique, 28, 6 (1940).
3. Mach E., Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Praha, 1877; Mechanik, Leipzig, 1883.
4. Hilbert D., Grundlagen der Physik, I, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1915, S. 395.
5. Einstein A., The Meaning of Relativity, Princeton University Press, 1950. (См. перевод: Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.)
6. Palatini A., Rend. circ. mat. Palermo, 43, 203 (1919).
7. Einstein A., Ann. d. Phys., 49, 769 (1916).

## Экспериментальная проверка общей теории относительности

### 1. Решение Шварцшильда

Вплоть до настоящего времени экспериментальная проверка общей теории относительности состоит из опытов Этвёша и наблюдений гравитационного красного смещения, сдвигов перигелия планетных орбит и отклонения лучей света Солнцем. Последние три упомянутых эффекта изучают, исходя из решения уравнений гравитационного поля для случая сферической симметрии. Мы получим здесь это решение, следуя Шварцшильду [1].

Будем исходить из сферически симметричного квадрата линейного элемента для плоского пространства — времени:

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.1)$$

Поместим теперь в начале координат сферически симметричную массу. Тогда выражение (5.1) должно изменить свой вид, однако таким образом, чтобы сохранилась как сферическая симметрия, так и симметрия относительно обращения времени. При этих условиях

$$\begin{aligned} -ds^2 = & -f_0(r', t) c^2 dt^2 + f_1(r', t) dr'^2 + \\ & + f_2(r', t) r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Введем новую координату  $r$ , выбрав ее таким образом, чтобы имело место равенство  $f_2(r', t) r'^2 = r^2$ . Полагая

$$f_0 = e^\nu, \quad f_1 = e^\lambda,$$

находим

$$g_{00} = -e^\nu, \quad g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Итак,

$$-ds^2 = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.3)$$

В пустом пространстве, окружающем рассматриваемое тело,  $T_{\mu\nu} = 0$ , и уравнения поля принимают вид<sup>1)</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0.$$

Умножая на  $g^{\mu\nu}$  и свертывая полученное выражение, найдем, что  $R = 0$ . Тогда уравнения поля тяготения в вакууме можно записать так:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (5.4)$$

Для облегчения вычислений мы приведем здесь все неравные нулю компоненты символов  $\Gamma_{\mu\nu}^\delta$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2c} \frac{\partial \nu}{\partial t}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В случае поля в вакууме пользуются уравнениями (5.4), либо приравнивают к нулю тензор  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ . Выражения для компонент  $G_{\mu\nu}$  оказываются несколько проще, и они применимы также в других задачах, не ограниченных случаем вакуума, в котором присутствует только гравитационное поле. Непосредственное вычисление дает для отлич-

<sup>1)</sup> Точнее, справа должна стоять  $\delta$ -функция. — *Прим. ред.*

ных от нуля компонент  $G_{\mu}^{\nu}$  следующие значения:

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2},$$

$$G_0^1 = \frac{e^{-\lambda}}{rc} \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[ \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \nu}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right] - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \nu}{\partial t} \right],$$

$$G_1^1 = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}. \quad (5.6)$$

Приравнявая к нулю выражения (5.6), получаем независимые уравнения

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{e^{\lambda}}{r} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{r} + \frac{e^{\lambda}}{r} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (5.9)$$

Складывая (5.7) и (5.8), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} (\lambda + \nu) = 0. \quad (5.10)$$

Согласно уравнению (5.9),  $\lambda$  не зависит от времени. Тогда в силу (5.10) величина  $\nu$  может содержать временную зависимость только через функцию, не зависящую от  $r$ . Из (5.3) следует, что такая зависимость может быть устранена повсюду с помощью преобразования координат, касающегося лишь оси времени. Это эквивалентно утверждению о том, что предположение о сферической симметрии обеспечивает возможность описать геометрию такого пространства, не прибегая к зависимости от времени. В (5.5) и (5.6) все производные по времени можно считать равными нулю. Решение (5.7) и (5.8) имеет вид

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{K_0}{r}. \quad (5.11)$$

Постоянную  $K_0$  можно определить, потребовав, чтобы на больших расстояниях от данной массы наше соотношение переходило в закон тяготения Ньютона.

Из уравнения геодезической следует, что ускорение малого пробного тела, покоящегося относительно центральной массы  $M$ , равно

$$-c^2 \Gamma_{00}^r = \frac{c^2 K_0}{2r^2} \left( 1 + \frac{K_0}{r} \right) \rightarrow \frac{c^2 K_0}{2r^2}.$$

При сравнении этой величины с ее значением в теории Ньютона  $-GM/r^2$  получим

$$K_0 = -\frac{2GM}{c^2}. \quad (5.12)$$

Метрика Шварцшильда (5.3) теперь принимает вид

$$-ds^2 = -\left( c^2 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - (2GM/c^2r)}. \quad (5.13)$$

Из (5.13) следует<sup>1)</sup> существование „шварцшильдовской особенности“ при  $r = 2GM/c^2$ . Это обстоятельство, как оказывается, ограничивает размеры массивных тел величиной  $r > 2GM/c^2$ . Для электрона это расстояние равно  $13,2 \cdot 10^{-56}$  см; оно слишком ничтожно для того, чтобы быть связанным с современными теориями элементарных частиц. Соображения, приведшие нас к уравнению (5.3), сохраняют силу и при рассмотрении заряженной частицы в начале координат. Однако сопоставляемая электрическому полю этой частицы энергия распределена во всем пространстве. След  $T_{\alpha}^{\alpha}$  тензора натяжений Максвелла (4.15) равен нулю. При поднятии одного из индексов в уравнении (4.25) и последующем свертывании мы получим в случае совокупности полей Эйнштейна и Максвелла  $R = 0$ , так что

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

<sup>1)</sup> Г. П. Робертсон показал, что пробное тело затрачивает на прохождение через шварцшильдовскую особенность конечный промежуток времени. Новые координаты устраняют шварцшильдовскую особенность, но не особенность в начале координат, где сингулярны шварианты тензора Римана.

Финкельштейн [2] получил аналитическое продолжение решения Шварцшильда без особенностей везде, кроме начала координат. Оно не имеет временной симметрии, что, по мнению указанного автора, обусловлено нелинейным характером общей теории относительности.

если источником энергии является только электромагнитное поле. Будем исходить из метрики (5.3), выражений (5.6) и (4.15), а также из уравнений Максвелла (4.47) для сферически симметричного потенциала<sup>1)</sup>  $A_0$ . Мы получим для частицы, несущей электрический заряд  $e$ , вместо (5.13) метрику<sup>2)</sup>

$$- ds^2 = - \left( c^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{Ge^2}{c^2 r^2} \right) dt^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{e^2 G}{c^4 r^2}}. \quad (5.13a)$$

В случае сферического электрически нейтрального тела конечной протяженности метрика (5.13) имеет силу только вне тела. Внутреннее решение для жидкой сферы можно записать в виде

$$- ds^2 = - \left[ A - B \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_s^2}} \right]^2 c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (r^2/R_s^2)} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (5.13b)$$

Учитывая требование, чтобы это выражение точно шивалось с (5.13) на границе  $r = r_1$ , и вводя плотность  $\rho$ , находим

$$R_s^2 = \frac{3c^2}{8\pi\rho G}, \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R_s^2}}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

## 2. Гравитационное красное смещение

Обратимся вновь к метрике (5.13) с тем, чтобы еще раз вывести формулу для гравитационного красного смещения. Пусть на поверхности некоторой звезды имеется осциллятор, период колебаний которого задается инвариантом  $\Delta s$ . Пусть в максимуме каждого колебания излучается световой импульс,

<sup>1)</sup> Константу, содержащую  $e$ , можно определить, сравнив инвариант  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  на больших расстояниях с его значением в плоском пространстве для заряженной частицы.

<sup>2)</sup> Эта метрика носит название метрики Райснера — Нордстрёма. Обзор различных решений и библиографию см. в книге: В. Паули, Теория относительности, М., 1948. — *Прим. перев.*

и временная координата определяется во всех точках пространства по приему этих импульсов. Заметим прежде, что интервал координатного времени  $\Delta t$  между последовательными импульсами, принятыми в фиксированной точке, будет во всем пространстве равен его величине на поверхности звезды. Каждый импульс распространяется вдоль нулевой геодезической линии в радиальном направлении, так что для  $ds = 0$  мы получим из (5.13)

$$dt = \left( -\frac{g_{11}(r)}{cg_{00}(r)} \right)^{1/2} dr. \quad (5.15)$$

Интегрирование (5.15) дает время прихода  $n$ -го импульса в точку с радиальной координатой  $r$ :

$$t(r, n) - t(r_0, n) = \int_{r_0}^r \left( -\frac{g_{11}(r')}{cg_{00}(r')} \right)^{1/2} dr = F(r, r_0). \quad (5.16)$$

Аналогичным образом,

$$t(r, n+1) - t(r_0, n+1) = F(r, r_0). \quad (5.17)$$

Вычитая (5.16) из (5.17), получаем

$$t(r, n+1) - t(r, n) = t(r_0, n+1) - t(r_0, n) = \Delta t \quad (5.18)$$

— результат, не зависящий от  $r$ . Пусть координатная частота будет равна  $\nu_c$ :

$$\nu_c = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c \sqrt{-g_{00} \text{ (для удаленного осциллятора)}}}{\Delta s}. \quad (5.19)$$

Для аналогичного осциллятора, имеющегося у наблюдателя, находящегося в точке с координатой  $r$ , локально генерируемая частота  $\nu_l$  предполагается заданной через инвариантный интервал  $\Delta s$  посредством соотношения

$$\nu_l = \frac{c}{\Delta s} \sqrt{-g_{00} \text{ (для местного осциллятора)}}. \quad (5.20)$$

Сравнение (5.19) и (5.20) дает

$$\nu_c - \nu_l = \nu_l \left( \sqrt{\frac{g_{00} \text{ (для удаленного осциллятора)}}{g_{00} \text{ (для местного осциллятора)}}} - 1 \right). \quad (5.21)$$

Сдвиг частоты при переходе от тела, поверхности которого соответствует координата  $r_0$ , в точку с координатой  $r$  равен

$$\Delta\nu = \nu_c - \nu_l \approx -\frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \nu_l \quad (5.21a)$$

(в красную сторону), что согласуется с (1.15), так как координаты  $r$  и  $r_0$  весьма близки к соответствующим расстояниям. Различие между (5.21) и результатом, следующим из принципа эквивалентности (1.15), в случае сдвига относительной частоты равно примерно  $(GM/c^2 r_0)^2$ , т. е. составляет величину порядка 1 к  $10^{18}$  в случае измерения красного смещения в земных условиях.

Измерение красного смещения спектральных линий, излучаемых спутником Сириуса, дает величину, соответствующую доплеровскому смещению для скорости в 19 км/сек, в то время как теоретически вычисленная эквивалентная скорость равна 20 км/сек. Для белого карлика из системы двойной звезды 40 Эридана наблюдаемое красное смещение эквивалентно  $21 \pm 4$  км/сек (теоретически вычисленное значение  $17 \pm 3$  км/сек). Измерения красного смещения спектральных линий, излучаемых Солнцем, дают различные значения в зависимости от выбранной точки поверхности. Этот факт остается необъясненным.

Ведется экспериментальная работа по измерению красного смещения другими методами, в том числе учитывающими поле Земли. Один из типов экспериментов основан на сравнении прецизионных стандартов частоты типа „атомных часов“ [3] на поверхности Земли и в областях с другим гравитационным потенциалом с помощью спутников, запускаемых ракетами<sup>1)</sup> [4], другой — на использовании открытого Мёссбауэром эффекта [5], состоящего в отсутствии явления отдачи при излучении  $\gamma$ -квантов (с энергией порядка  $10^4$  эв) долгоживущими (более  $10^{-8}$  сек) ядрами в „изомерических“ состояниях. Импульс отдачи действует на твердое тело как на целое, причем доплеровский сдвиг<sup>2)</sup> или уширение линий

<sup>1)</sup> См. упражнение 18 в конце книги.

<sup>2)</sup> Импульс отдачи может возбудить колебания решетки, либо может быть передан как импульс поступательного движения кристаллу в целом. В первом случае доплеровский сдвиг будет иметь место вследствие отдачи излучающего атома. Критерий отсутствия возбуждения колебаний решетки можно сформулировать следующим



пренебрежимо малы. Большое время жизни является следствием того, что угловой момент основного состояния ядра отличается от углового момента его возбужденного состояния. Излучение при этом носит магнитный дипольный характер, либо мультипольный высшего порядка. Отношение частоты к ширине линии оказывается необычайно большим. Предположение использовать такое излучение для измерения красного смещения в земных условиях впервые было опубликовано Паундом и Ребка [6] и развито независимо Уилкинсоном, Бойлем, Девонсом, а также Крэншоу [7].

В печати были описаны свойства излучения  $\gamma$ -квантов энергии 14 700 эв изотопом  $\text{Fe}^{57}$  (имеющим время жизни  $10^{-7}$  сек), полученным при радиоактивном распаде изо-

образом. Пусть импульс отдачи при  $\gamma$ -излучении будет равен  $p = \hbar\omega_\gamma/c$ , а масса атома —  $m$ . Тогда условие того, что доплер-эффект будет пренебрежимо мал, можно записать в виде  $p^2/m \ll k\theta_D$ , где  $\theta_D$  — дебаевская температура и  $k$  — постоянная Больцмана. Физический смысл этого условия раскрывается, если рассмотреть явление переноса излученного импульса. Обозначим волновую функцию колебаний решетки до излучения гамма-кванта через  $\psi_j$ . Функция  $\psi_j$  является собственной функцией оператора Гамильтона. Если при излучении гамма-кванта кристаллу некоторым образом передается импульс  $p$ , то волновая функция непосредственно после акта излучения равна  $e^{ip_s q^s / \hbar} \psi_j$ . Здесь  $q^s$  — координата гармонического осциллятора, и новая волновая функция соответствует ожидаемому значению импульса, превышающему начальный на величину  $p$ . После излучения можно записать

$$a_r \psi_r = e^{ip_s q^s / \hbar} \psi_j,$$

$$a_r = \langle E_r | e^{ip_s q^s / \hbar} | E_j \rangle \approx \delta_{rj} + \frac{ip_s |q^s|_{rj}}{\hbar}.$$

Слагаемое  $p_s |q^s|_{rj}$  обуславливает излучение или поглощение фонона, а слагаемое  $\delta_{rj}$  нет. Для оценки относительной вероятности излучения, не сопровождающегося фоновым возбуждением, необходимо найти величину

$$\hbar^{-2} \sum_{\text{по сост.}} p^2 (|q|_{rj})^2,$$

где  $|q|_{rj}$  — матричные элементы координаты гармонического осциллятора. Далее

$$(|q|_{rj})^2 = \frac{\hbar}{Nm\omega_l} (N_{ph} + 1) \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{Nm\omega_l} N_{ph},$$

где  $N_{ph}$  — число фононов,  $N$  — число атомов,  $mN$  — масса кристалла

топа  $\text{Co}^{57}$  с 270-дневным периодом. Паунд и Ребка наблюдали это излучение с помощью сцинтилляционного спектрометра, причем источник излучения мог двигаться взад и вперед перед спектрометром, будучи приклеен к подвижной катушке преобразователя. Таким способом они нашли, что полуширина линии излучения равна  $\Delta\nu \sim 2 \cdot 10^6$  гц. Так как красное смещение пропорционально частоте, то сдвиг порядка 1 к  $10^{14}$  в гравитационном поле Земли следовало ожидать при разности высот порядка 50 м. Для излучения  $\text{Fe}^{57}$  этот сдвиг приблизительно равен  $3 \cdot 10^4$  гц, т. е. примерно 1% уже достигнутой ширины линии. Таким образом, эксперимент осуществим<sup>1)</sup>. Паунд и Ребка отмечают,

а  $\omega_l$  — частота колебаний решетки. Имеем

$$\sum_{\text{по сост.}} (|q_{lj}|)^2 \approx \frac{\hbar}{m\omega_l} (N_{ph} + 1) \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{m\omega_l} N_{ph}.$$

Так как энергия хотя бы приблизительно сохраняется, частота колебаний решетки будет достигать большой величины — порядка дебаевской частоты  $\omega_D = k\theta_D/\hbar$ , так что  $N_{ph} \sim 1$ . Используя эти соотношения и требуя, чтобы

$$\frac{p^2}{\hbar^2} \sum_{\text{по сост.}} (|q_{lj}|)^2 \ll 1,$$

придем к условию  $p^2/m \ll k\theta_D$ .

<sup>1)</sup> Результаты такого опыта были недавно опубликованы Крэншоу, Шинффером и Уайтхэдом [8]. Авторы использовали  $\text{Fe}^{57}$ , и полная разность высот была равна 12,5 м. Красное смещение, наблюдавшееся ими, составляло  $0,96 \pm 0,45$  величины, предсказываемой теорией. Позднее более точный опыт был произведен Паундом и Ребка [9], которые обнаружили красное смещение, равное  $1,05 \pm 0,10$  его предсказываемой величины. При этом должны были учитываться аномальные сдвиги частоты, обусловленные свойствами отдельных образцов источников и поглотителей, а также температурное смещение частоты. Последний эффект связан с замедлением хода „часов“ при движении со скоростью, зависящей от температуры. Сдвиг круговой частоты равен

$$\Delta\omega = \omega_l \left( 1 - \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \right)^{1/2} - \omega_l \approx - \frac{3\omega_l kT}{2mc^2},$$

где  $T$  — абсолютная температура, причем приведенное справа приближенное выражение справедливо при высоких температурах (когда имеет место равномерное распределение).

Этот эффект был сведен к минимуму регулированием температур излучателя и поглотителя. Другая аномалия была скорректирована путем перемены местами излучателя и поглотителя.

что при работе с источником ограниченной интенсивности статистические флуктуации снижают точность ввиду уменьшения числа отсчетов при возрастании расстояния между источником и поглотителем. При этом возрастание красного смещения почти компенсируется по мере увеличения вертикального удаления источника и наблюдателя. Таким образом, большие перепады высот не приводят к существенному повышению точности, если не принять меры для увеличения интенсивности излучения.

### 3. Поправки к движению планет

Выражения (5.5) можно использовать, записывая уравнения геодезической<sup>1)</sup> как для материальной точки, так и для светового луча.

Дифференциальное уравнение для координаты  $\theta$  имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \quad (5.22)$$

Для частицы с отличной от нуля массой покоя  $s$  есть величина интервала вдоль геодезической. Вся задача упрощается, если считать, что начальная скорость и центральная масса расположены в плоскости  $\theta = \pi/2$ . Тогда в начальный момент  $d\theta/ds = 0$  и, на основании (5.22),  $d^2\theta/ds^2 = 0$ . Таким образом, вся орбита будет лежать в экваториальной плоскости. Запишем остальные уравнения геодезической:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} \left(c \frac{dt}{ds}\right)^2 = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\nu}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (5.25)$$

Непосредственное интегрирование уравнений (5.24) и (5.25) дает

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = K_1, \quad (5.26)$$

$$\frac{dt}{ds} = K_2 e^{-\nu}, \quad (5.27)$$

<sup>1)</sup> При этих вычислениях предполагается, что оси нашей координатной системы фиксированы относительно неподвижных звезд.

где  $K_1$  и  $K_2$  — постоянные, характеризующие орбиту. Вместо того, чтобы непосредственно интегрировать уравнение (5.23), мы получим его первый интеграл, записав метрику Шварцшильда (5.13) для случая  $\theta = \pi/2$  в виде

$$e^{-\nu} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} \left( c \frac{dt}{ds} \right)^2 = -1. \quad (5.28)$$

Соотношение (5.28) связывает произвольную совокупность величин  $dr/ds$ ,  $d\varphi/ds$  и  $dt/ds$  в рассматриваемом пространстве. Если, однако, потребовать, чтобы  $d\varphi/ds$  и  $dt/ds$  задавались интегралами (5.26) и (5.27), то дифференциалы  $ds$  и  $dt$  можно исключить и таким образом получить обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее переменные  $r$  и  $\varphi$  для нашей орбиты

$$(K_1)^2 \frac{e^{-\nu}}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{K_1^2}{r^2} - e^{-\nu} c^2 (K_2)^2 = -1. \quad (5.29)$$

Производя замену  $W = 1/r$  и дифференцируя (5.29) по  $\varphi$ , получаем с помощью (5.11)

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} + W = \frac{GM}{(K_1)^2 c^2} + \frac{3GM}{c^2} W^2. \quad (5.30)$$

Уравнение (5.30) можно решить методом последовательных приближений. Пусть шварцшильдовский радиус равен  $\rho = 2GM/c^2$  и пусть

$$\rho W = \rho W^{(1)} + \rho W^{(2)} + \dots, \quad (5.31)$$

где  $\rho W^{(1)}$  — величина первого порядка, а  $\rho W^{(2)}$  — второго. Подставляя (5.31) в (5.30) и приравнивая нулю по отдельности члены соответствующих порядков, получаем уравнения

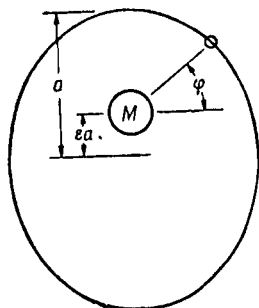
$$\frac{d^2 W^{(1)}}{d\varphi^2} + W^{(1)} = \frac{GM}{(K_1)^2 c^2}, \quad (5.32)$$

$$\frac{d^2 W^{(2)}}{d\varphi^2} + W^{(2)} = \frac{3GM}{c^2} (W^{(1)})^2. \quad (5.33)$$

Решение (5.32) имеет вид

$$W^{(1)} = \frac{GM}{(K_1)^2 c^2} [1 + \varepsilon \sin(\varphi - \varphi_0)]. \quad (5.34)$$

Здесь  $\varepsilon$  — эксцентриситет эллиптической орбиты, описываемой уравнением (5.34). Повернем координатные оси таким образом, чтобы  $\varphi_0 = 0$ . Обозначим через  $a$  большую полуось нашего эллипса (фиг. 8):



Фиг. 8.

$$2a = \left[ \frac{1}{W^{(1)}} \right]_{\varphi=\pi/2} + \left[ \frac{1}{W^{(2)}} \right]_{\varphi=3\pi/2} \quad (5.35)$$

Выражение для постоянной  $(K_1)^2$  через эксцентриситет и большую полуось можно записать с помощью (5.35) так:

$$(K_1)^2 = \frac{aGM}{c^2} (1 - \varepsilon^2). \quad (5.36)$$

Используя (5.36) и (5.34), можно получить решение уравнения (5.33), и тогда суммарное решение (с учетом эффектов второго порядка) уравнения (5.30) приобретает вид

$$W = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} \left[ 1 + \varepsilon \sin \varphi - \frac{3GM\varepsilon}{c^2 a (1-\varepsilon^2)} \varphi \cos \varphi + \frac{GM\varepsilon^2}{c^2 a (1-\varepsilon^2)} \cos^2 \varphi + \frac{GM}{c^2 a (1-\varepsilon^2)} (3 + \varepsilon^2) \right]. \quad (5.37)$$

Здесь член

$$- \frac{3GM\varepsilon}{c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \varphi \cos \varphi$$

обуславливает поворот перигелия; второе же и третье слагаемые можно привести к виду

$$\frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} \left[ \sin \varphi - \frac{3GM\varepsilon \cos \varphi}{c^2 a (1-\varepsilon^2)} \right] = \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} \times \times \left[ 1 + \frac{9G^2 M^2 \varphi^2}{c^4 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \right]^{1/2} \sin \left[ \varphi + \arctg \left( - \frac{3GM\varepsilon}{c^2 a (1-\varepsilon^2)} \right) \right]. \quad (5.38)$$

Из (5.38) следует, что за период каждого оборота перигелий смещается вперед на величину  $\Delta$ , равную

$$\Delta = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1-\varepsilon^2)}. \quad (5.39)$$

Зависимость поворота перигелия от эксцентриситета  $\varepsilon$  и от величины большой полуоси  $a$  очевидна. Величина  $c$

в уравнении (5.39) представляет собой скорость распространения гравитационного взаимодействия. Таким образом, согласие величины (5.39) с наблюдаемым значением поворота перигелия планеты Меркурия [астрономические наблюдения дают  $42,6 \pm 0,9''$  за столетие, выражение же (5.39) предсказывает величину  $43,0''$  за столетие] показывает, что общая теория относительности позволяет удовлетворительно описать явления гравитации и что гравитационные взаимодействия распространяются со скоростью света<sup>1)</sup>.

Интересно также отметить, что отклонение планетных орбит от строго периодической формы оказывается исключительно чувствительным методом проверки отклонения от закона обратной квадратической зависимости силы также в случае медленно движущихся тел ( $v \ll c$ ). Сила, действующая на покоящееся тело, отличается от ньютоновской и равна

$$c^2 \Gamma_{(0)}^r = -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{GM}{c^2 r} \right), \quad (5.40)$$

где  $r$  выражается через расстояние от поверхности центрального тела  $l$  формулой

$$l = \int_{r_0}^r g_{11}^{1/2} dr.$$

#### 4. Отклонение света

Чтобы получить величину отклонения света в гравитационном поле, мы должны вновь решить уравнения геодезической (5.22) — (5.25). Интегралы (5.26) и (5.27) сохраняют силу. Вместо (5.28) мы получим соответствующее выражение для нулевого интервала. Приравняв квадрат линейного элемента Шварцшильда нулю, разделим его на  $ds^2$ :

$$e^{-\nu} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} c^2 \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 0. \quad (5.41)$$

Параметр  $s$  теперь отличен от интервала. Подставляя в (5.41) интегралы (5.26) и (5.27) и переходя к  $W = 1/r$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{dW}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{cK_2}{K_1} \right)^2 - W^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2} W \right). \quad (5.42)$$

<sup>1)</sup> Это последнее заключение автора не является общепризнанным и применимым к полям произвольной силы. — *Прим. перев.*

Более просто поддается анализу уравнение, получаемое путем дифференцирования (5.42) и имеющее вид

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2} + W = \frac{3W^2GM}{c^2}. \quad (5.43)$$

Методом, использованным при решении уравнения (5.30), можно решить с точностью до членов второго порядка и уравнение (5.43). Это решение имеет вид

$$W = \frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{r_0} + \frac{GM}{c^2 r_0^2} (1 + \sin^2 \varphi). \quad (5.44)$$

Постоянная интегрирования  $r_0$  в (5.44) представляет собой наименьшее расстояние, на котором световой луч, приближаясь к телу, еще остается невозмущенным (см. фиг. 9).

При  $r \rightarrow \infty$  мы получаем два значения  $\varphi$ , удовлетворяющие решению уравнения

$$\cos \varphi = -\frac{GM}{c^2 r_0} (1 + \sin^2 \varphi). \quad (5.45)$$

Обозначим эти решения через

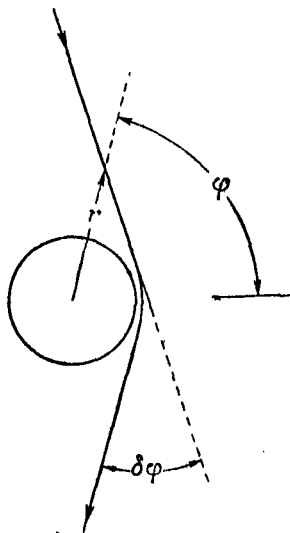
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta\varphi}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\varphi}{2}. \quad (5.46)$$

Решая (5.45), получаем для полного отклонения луча

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 r_0}. \quad (5.47)$$

Для светового луча звезды, проходящего влотию к границе диска Солнца, формула (5.47) дает отклонение, равное  $\delta\varphi = 1,75''$ .

Обзор астрономических измерений красного смещения и отклонения света был сделан Трамплером [10]. Для величины отклонения света, наблюдаемой при полных солнечных затмениях, отдельные результаты измерений содержат вероятную ошибку порядка 10% и обычно лежат в интер-



Фиг. 9.

вале 10% около величины, предсказываемой (5.47). Среднее значение результатов, полученных при одиннадцати затмениях, согласуется с (5.47) с точностью порядка 1 к 500.

## 5. Заключительные замечания

Четыре рассмотренных здесь эксперимента пока что составляют весь материал по экспериментальной проверке общей теории относительности. Это составляет разительный контраст с изобилием экспериментальных фактов, подтверждающих квантовую теорию. Постановка других реально осуществимых опытов была бы смелым начинанием. Эта задача в значительной мере затрудняется техническими возможностями. Современные приборы пока большей частью не могут обнаружить весьма малых эффектов, предсказываемых теорией чрезвычайно слабого гравитационного взаимодействия. В следующих главах будут рассмотрены недавно предложенные новые эксперименты.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzschild K., Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, S. 424.
2. Finkelstein D., Phys. Rev., 110, 965 (1958).
3. Lyons H., Ann. N. Y. Acad. Sci., 55, 831 (19aa).
4. Singer S. F., Phys. Rev., 104, 11 (1956).
5. Mössbauer R. J., Zs. f. Phys., 151, 124 (1958); Naturwiss., 45, 538 (1958); Zs. Naturforsch., 14a, 211 (1959).
6. Pound R. V., Rebka G. A., Jr., Phys. Rev. Lett., 3, 439 (1959). (См. перевод: ИИГ, стр. 469.)
7. Schiffer J. P., Marshall W., Phys. Rev. Lett., 3, 556 (1959)
8. Cranshaw, Schiffer, Whitehead, Phys. Rev. Lett., 4, 163 (1960).
9. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev. Lett., 4, 337 (1960).
10. Trumpler R. J., Jubilee of Relativity Theory (Helv. Phys. Acta, Suppl. IV), Mercier a. Kervaire, p. 408.



## Законы сохранения

### 1. Канонический псевдотензор энергии — импульса — натяжений

В частной теории относительности соотношение  $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ , которому удовлетворяет тензор энергии — импульса — натяжений, приводит при интегрировании по трем пространственным координатам к законам сохранения энергии и импульса. Например, в случае  $T_0{}^{\nu}{}_{;\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \int T_0^0 dx^1 dx^2 dx^3 &= \\ &= - \int \left( \frac{\partial T_0^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_0^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_0^3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3 = - \oint T_0^i dS_i. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Объемный интеграл преобразован в крайнем правом выражении в интеграл по поверхности, ограничивающей данный объем. Элемент этой поверхности равен вектору  $dS_i$ . Полученное соотношение связывает изменение энергии в заданном объеме с потоком энергии — импульса через ограничивающую его поверхность.

Положение изменяется, если используется не метрика Лоренца. Тензор энергии — импульса — натяжений удовлетворяет соотношению  $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ . В силу симметрии тензора  $T_{\rho\nu}$  можно, применяя (3.79), записать

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = (-g)^{-1/2} (T_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \mu} T^{\alpha\beta}. \quad (6.2)$$

Если взятая здесь метрика зависит от времени, то при  $\mu = 0$  второе слагаемое в (6.2) описывает зависящий от времени обмен энергией и импульсом между гравитационным полем в каждом элементе объема и другими полями. Чтобы обес-

печить возможность всегда выполнить операции, позволяющие осуществить интегрирование типа (6.1), мы найдем величину  $t_{\mu}^{\nu}$ , удовлетворяющую соотношению

$$(-g)^{-1/2} (t_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \mu} T^{\alpha\beta}. \quad (6.3)$$

Тогда (6.2) примет вид

$$[(T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) \sqrt{-g}]_{,\nu} = 0. \quad (6.4)$$

Интегрирование (6.4) производится в общем случае так же, как и интегрирование (6.1), и следует ожидать, что оно приведет к установлению законов сохранения [1–5], учитывающих гравитационное поле. Выражение (6.3) не определяет однозначно величины  $t_{\mu}^{\nu}$ . Из вида правой стороны (6.3), кроме того, следует, что  $t_{\mu}^{\nu}$  не является тензором. Мы увидим, что величина  $t_{\mu}^{\nu}$  ведет себя как тензор относительно некоторых ограниченных групп преобразований. Ее называют псевдотензором энергии — импульса — натяжений. Один из способов получения величины  $t_{\mu}^{\nu}$  в основном совпадает с методом, приведшим к (4.10). Эта задача, однако, отличается от обычно решаемой в теории поля, ибо гравитационный интеграл действия

$$I_G = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (6.5)$$

содержит вторые пространственные и временные производные переменных поля  $g^{\mu\nu}$ . Однако часть действия, содержащую вторые производные, можно записать в виде поверхностного интеграла. Действительно,

$$R \sqrt{-g} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} = (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\beta}) \sqrt{-g}. \quad (6.6)$$

Вторые производные содержатся лишь в первых двух слагаемых справа в (6.6). Их можно преобразовать следующим образом:

$$(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha}) \sqrt{-g} = (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \sqrt{-g})_{,\alpha} - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} \sqrt{-g})_{,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \quad (6.7)$$

Используя теперь (3.73), имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g g^{\lambda\alpha} g_{;\lambda,\alpha}, \quad g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0,$$

$$g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = -\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} g^{\gamma\nu} - \Gamma^\nu_{\gamma\alpha} g^{\mu\gamma}, \quad \Gamma^\beta_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} g_{\lambda\mu,\alpha} g_{\kappa\beta}.$$

Два последних слагаемых в (6.7) можно записать в виде

$$-\Gamma^\alpha_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{;\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{;\nu} =$$

$$= 2g^{\mu\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta}) \sqrt{-g}. \quad (6.8)$$

С помощью (6.6), (6.7) и (6.8) выражению (6.5) можно придать форму

$$\int R \sqrt{-g} d^4x = \int g^{\mu\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x +$$

$$+ \int [\sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\delta} \Gamma^\beta_{\alpha\beta})]_{;\delta} d^4x. \quad (6.9)$$

Мы видим, таким образом, что первый интеграл справа в равенстве (6.9) зависит лишь от  $g^{\mu\nu}$  и его первых производных, второй же интеграл можно непосредственно преобразовать в поверхностный с помощью теоремы Гаусса. Рассматривая вариации функции действия, обращающиеся в нуль на границе интегрирования, достаточно учитывать в (6.9) один только первый интеграл справа. Вводя обозначение

$$\mathcal{L}_G = \frac{c^4}{16\pi G} g^{\mu\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta}), \quad (6.10)$$

можно теперь определить полную плотность лагранжиана  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + L_F, \quad (6.11)$$

где  $L_F$  — плотность лагранжиана всех полей, кроме гравитационного. Так как (6.10) включает лишь часть лагранжиана гравитации, не зависящую от вторых производных, а  $L_F$  также содержит лишь переменные полей и их первые производные, то к интегралу действия

$$I = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \quad (6.12)$$

можно применить стандартный лагранжев формализм теории поля (см. гл. 4, п. 1). Отсюда следует, что уравнения поля имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} - \frac{\partial (\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \quad (6.13)$$

Используя (6.11) и (4.37), можно записать

$$\frac{16\pi G}{c^4} \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right] = \\ = \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (6.14)$$

и, пользуясь (4.10), полный канонический псевдотензор энергии — импульса — натяжений  $\tau_\mu^\nu$  можно определить как<sup>1)</sup>

$$\tau_\mu^\nu \sqrt{-g} = \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \sqrt{-g} - g^{\rho\beta, \mu} \frac{\partial (\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\beta, \nu}}, \quad (6.15)$$

гравитационная часть которого равна

$$t_\mu^\nu \sqrt{-g} = \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_G \sqrt{-g} - g^{\rho\beta, \mu} \frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\beta, \nu}}, \quad (6.16)$$

а

$$(\tau_\mu^\nu \sqrt{-g})_{, \nu} = (t_\mu^\nu \sqrt{-g} + T_\mu^\nu \sqrt{-g})_{, \nu} = 0. \quad (6.17)$$

Интересно отметить, что уравнения (6.13) и (6.14) выражают эйнштейновские уравнения гравитационного поля в форме уравнений Лагранжа.

Более поучительным является вывод величины (6.15) из иных соображений, а именно из свойства инвариантности  $\mathcal{L}$  относительно некоторых преобразований координат. Вспомним, что в физической теории законы сохранения связаны с определенными свойствами инвариантности. В механике, например, сохранение энергии связано с инвариантностью гамильтониана относительно сдвигов по оси времени, а сохранение момента импульса — с инвариантностью гамильтониана относительно вращений.

<sup>1)</sup> Замечим, что выражение (6.15) неполно. См. также равенство (6.32) и вывод  $t_\mu^\nu$  из (6.33). — *Прим. перев.*

Произведем бесконечно малое преобразование координат<sup>1)</sup>:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}. \quad (6.18)$$

Из общего закона преобразования тензора  $g^{xy}$  следует его изменение при преобразовании (6.18):

$$\delta g^{x\mu} = g^{x\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta x^{\mu} + g^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \delta x^x = g'^{x\mu}(x') - g^{x\mu}(x), \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \delta g^{x\mu}_{, \beta} &= \frac{\partial g'^{x\mu}(x')}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial g^{x\mu}(x)}{\partial x^{\beta}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\delta g^{x\mu}) - g^{x\mu}_{, \gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \delta x^{\gamma}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}} \delta g^{x\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} \delta g^{x\mu}_{, \alpha}. \quad (6.21)$$

Это вытекает из того факта, что  $L_F$  является скаляром, так что  $\delta L_F = 0$ . Используя (6.19) и (6.20), получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \left[ 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}} g^{xy} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{xy}_{, \alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\beta}_{, \nu}} g^{x\beta}_{, \mu} \right] \times \\ &\quad \times (\delta x^{\mu})_{, \nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{xy} (\delta x^{\mu})_{, \nu \alpha}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{x\mu}} &= \frac{\partial}{\partial g^{x\mu}} [(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g}) (-g)^{-1/2}] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}} + \frac{1}{2} g_{x\mu} \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Здесь мы снова использовали равенство  $dg = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$ . Отметим, что  $\sqrt{-g}$  не зависит от  $g^{x\mu}_{, \beta}$ . Подста-

<sup>1)</sup> В этой главе используется символ  $\delta$  в том смысле, в каком он применен в (6.18) и (6.19). Некоторые авторы вводят также символ  $\bar{\delta}$ , обозначающий операцию

$$\bar{\delta} g^{x\mu} = g'^{x\mu}(x) - g^{x\mu}(x) = \delta x^{x; \mu} + \delta x^{\mu; x}.$$

новка (6.23) в (6.22) дает

$$\begin{aligned}
 (\delta \mathcal{L}) \sqrt{-g} = & \left[ 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}} g^{\alpha\mu} + \mathcal{L}_0 \sqrt{-g} \delta_\mu^\nu + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu, \beta}} g^{\alpha\nu, \beta} - \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\beta, \nu}} g^{\alpha\beta, \mu} \right] (\delta x^\mu)_{, \nu} + \\
 & + 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu, \alpha}} g^{\alpha\nu} (\delta x^\mu)_{, \nu, \alpha}. \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

Величина  $\mathcal{L}$  инвариантна относительно линейных преобразований координат; в этом случае последнее слагаемое в правой части (6.24) обращается в нуль и  $\delta \mathcal{L}$  должно исчезнуть. Отсюда следует, что члены, стоящие в скобках, должны давать нуль, т. е. что

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}} g^{\alpha\nu} + \mathcal{L}_0 \sqrt{-g} \delta_\mu^\nu + \\
 + 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu, \beta}} g^{\alpha\nu, \beta} - \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\beta, \nu}} g^{\alpha\beta, \mu} = 0. \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Так как (6.25) не зависит от  $\delta x^\mu$ , то оно является тождеством. Поэтому для общего случая преобразования координат (6.24) можно записать в виде

$$(\delta \mathcal{L}) \sqrt{-g} = 2 \frac{\partial(\mathcal{L}_0 \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu, \alpha}} g^{\alpha\nu} (\delta x^\mu)_{, \nu, \alpha}. \quad (6.26)$$

Так как при любом преобразовании, не приводящем к каким-либо изменениям величин на границах области интегрирования, поверхностные интегралы равны нулю, то можно записать

$$\delta \int \left[ \left( \frac{c^3}{16\pi G} \right) R + L_F \right] \sqrt{-g} d^4x = \delta \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x. \quad (6.27)$$

Левая сторона равенства (6.27) обращается в нуль, ибо этот интеграл есть скаляр, поэтому для правой стороны равенства получим

$$\begin{aligned}
 \delta \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \\
 = \int \delta \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L} \delta(\sqrt{-g} d^4x) = 0. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Второй интеграл справа в (6.28) равен нулю, так как произведение  $\sqrt{-g} d^4x$  дает скаляр. Тогда при учете (6.26) равенство нулю первого интеграла равносильно тому, что

$$\int \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{x\nu} (\delta x^\mu)_{, \nu, \alpha} d^4x = 0. \quad (6.29)$$

Равенство (6.29) можно записать в виде

$$\int \left\{ \left[ (\delta x^\mu)_{, \alpha} \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{x\nu} \right]_{, \nu} - (\delta x^\mu)_{, \alpha} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{x\nu} \right]_{, \nu} \right\} d^4x = 0. \quad (6.30)$$

Первое слагаемое в (6.30) можно преобразовать в интеграл по поверхности, который опять исчезает, когда  $\delta x^\mu$  и их производные достаточно быстро стремятся к нулю на границе. Интеграл, оставшийся в (6.30), может быть вновь преобразован в сумму поверхностного интеграла, обращаемого в нуль, и объемного интеграла, который при произвольных  $\delta x^\mu$  дает

$$\left[ \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{x\nu} \right]_{, \nu, \alpha} = 0. \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31) определяет сохраняющуюся величину

$$\tau_\mu^\nu \sqrt{-g} = (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu) \sqrt{-g} = -2 \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} g^{x\nu} \right]_{, \alpha}, \quad (6.32)$$

которая имеет форму обычной дивергенции. Равенство (6.32) весьма полезно при вычислениях.

Теперь, умножая уравнения поля (6.13) на  $g^{x\nu}$  и записывая первое слагаемое как разность двух величин, мы можем снова получить выражение (6.16):

$$\left[ g^{x\nu} \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} \right]_{, \alpha} - \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} \times \\ \times g^{x\nu}_{, \alpha} - g^{x\nu} \frac{\partial(\mathcal{L}_g \sqrt{-g})}{\partial g^{x\mu}_{, \alpha}} = 0. \quad (6.33)$$

Пользуясь (6.25), дифференцируя по  $x^\nu$  и учитывая равенство (6.31), приходим непосредственно к выражению (6.16) для  $t_{\mu}^{\nu}$ .

Найдем выражения для величин

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\beta, \gamma}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}},$$

которые потребуются нам в дальнейших вычислениях. Рассмотрим прежде

$$\frac{\partial(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \frac{\partial(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}}. \quad (6.34)$$

Используя (3.73) и (3.74), получаем

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad (6.35)$$

Исходя из равенства  $g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0 = g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} g^{\beta\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} g^{\alpha\nu}$ , полагая в нем  $\beta = \mu$  и учитывая (3.74), приходим к равенству

$$\frac{\partial(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = -\frac{1}{2} (\delta_{\rho}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\gamma} + \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\rho}^{\gamma}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\rho\sigma}. \quad (6.36)$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = & -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} + \\ & + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \left[ -\frac{1}{2} (\delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\gamma} + \delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\rho}^{\gamma}) + \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} g_{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Тем же методом, которым получено выражение (6.36), находим

$$\frac{\partial(g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = -\Gamma_{\rho\sigma}^{\gamma} \sqrt{-g}. \quad (6.38)$$

Из (6.10), (6.37) и (6.38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} = & \left\{ -\Gamma_{\rho\sigma}^{\gamma} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) \right\} g_{\rho\sigma} + \\ & + \frac{1}{2} (\delta_{\rho}^{\gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} + \delta_{\sigma}^{\gamma} \Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}) \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi G}. \end{aligned} \quad (6.39)$$



Используя уравнения поля (6.14), можно записать

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma}} = \left( R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R \right) \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi G} + \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma, \gamma}} \right]_{, \gamma}. \quad (6.40)$$

Дальнейшие преобразования (6.40) можно упростить<sup>1)</sup>, если принять во внимание, что получаемое выражение не может содержать производных вида  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu, \beta}$ , так как величина  $\mathcal{L}_G \sqrt{-g}$  не содержит таких производных. Таким образом, в правой части (6.40) эти производные должны взаимно уничтожиться. Мы получим

$$\frac{16\pi G}{c^4} \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\rho\sigma}} = \left\{ -\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} \Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}) (g_{\sigma\tau} \Gamma^{\tau}_{\rho\alpha} + g_{\rho\tau} \Gamma^{\tau}_{\sigma\alpha}) - \frac{8\pi G}{c^4} g_{\rho\sigma} \mathcal{L}_G + \Gamma^{\mu}_{\rho\mu} \Gamma^{\nu}_{\sigma\nu} \right\} \sqrt{-g}. \quad (6.41)$$

Вернемся к исследованию свойств канонического псевдо-тензора энергии — импульса — натяжений  $\tau_{\mu}^{\nu}$ , определяемого равенством (6.15). Аналогично (6.1) запишем

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\mu}^0 \sqrt{-g} d^3x = - \int \tau_{\mu}^i \sqrt{-g} dS_i. \quad (6.42)$$

В случае изолированной системы, вблизи границы которой  $g_{\mu\nu}$  достаточно быстро приближается к лоренцовой метрике, а тензор  $T_{\mu}^{\nu}$  отличен от нуля лишь в конечной области, поверхностный интеграл в правой части (6.42) обращается в нуль, и интегралы

$$P_{\mu} = \frac{1}{c} \int \tau_{\mu}^0 \sqrt{-g} d^3x \quad (6.43)$$

<sup>1)</sup> Этот путь, предложенный Мёллером, гораздо проще, чем непосредственные вычисления. Если в качестве основных переменных взять  $g^{\mu\nu}$  и  $g^{\mu\nu, \alpha}$ , то  $g_{\mu\nu}$  выражается через  $g^{\alpha\beta}$ , а  $g_{\mu\nu, \alpha}$  может быть выражено лишь при использовании как  $g^{i\alpha}$ , так и  $g^{i\alpha, \lambda}$ .

оказываются независимыми от времени ( $\tau$  считают повсюду регулярным). Из равенства (6.32) следует, что все системы, для которых величина

$$g^{xy} \frac{\partial (\mathcal{L}_0 \sqrt{V-g})}{\partial g^{xy, a}}$$

одинакова на окружающей их замкнутой поверхности, обладают одними и теми же значениями  $P_\mu$ . При преобразованиях Лоренца величины  $\tau_\mu^0$  преобразуются как компоненты 4-тензора, поэтому  $P_\mu$  преобразуется в этом случае как 4-вектор энергии — импульса специальной теории относительности [13].

Вычислим теперь величину  $-P_0$  для шварцшильдовской частицы и покажем, что она равна  $Mc$ . Для этого сначала произведем преобразование координат

$$\begin{aligned} r &= r' \left( 1 + \frac{GM}{2c^2 r'} \right)^2, \\ r' &= \frac{1}{2} \left[ \left( r^2 - \frac{2GM}{c^2} r \right)^{1/2} + r - \frac{GM}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Координаты  $r'$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $t$  называются изотропными. Метрика Шварцшильда (5.13) принимает вид

$$\begin{aligned} -ds^2 &= \left( 1 + \frac{GM}{2c^2 r'} \right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) - \\ &\quad - \left[ \frac{1 - (GM/2c^2 r')}{1 + (GM/2c^2 r')} \right]^2 c^2 dt^2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Вводя теперь

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r'^2, \\ x &= r' \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r' \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r' \cos \theta \end{aligned}$$

и полагая, что  $r'$  очень велик, можно записать (6.45) в виде

$$-ds^2 \rightarrow \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r'} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r'} \right) c^2 dt^2. \quad (6.46)$$

Заметим, что все величины повсюду регулярны, так как внутри тела, создающего гравитационное поле, справедливо внутреннее решение Шварцшильда.

Тогда из (6.46), (6.39), (6.43) и (6.32) следует, что

$$-P_0 = Mc = \frac{E_0}{c}, \quad (P_1 = P_2 = P_3 = 0), \quad (6.47)$$

$$E_0 = Mc^2.$$

С другой стороны, если бы мы использовали метрику Шварцшильда (5.13) непосредственно, мы бы получили

$$E_0 = -\infty. \quad (6.48)$$

Бесконечная величина энергии получается также, если пользоваться метрикой плоского пространства

$$-ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 dt^2. \quad (6.49)$$

Эти результаты не неожиданны, так как  $\tau_\mu^\nu$  не является тензором.

Мы видим, что законы сохранения (6.15) и (6.16) дают четырехмерный вектор энергии — импульса лишь при вполне определенных условиях. На пространственной бесконечности метрика должна достаточно быстро стремиться к лоренцовой, причем необходимо использовать конкретный вид метрики (6.46). Последовательная интерпретация  $t_0^0$  как плотности энергии невозможна, поскольку смысл имеют только интегралы от нее по объему. Преобразования координат, производимые внутри области интегрирования, изменяют значения  $t_0^0$  внутри этой области, однако не оказывают влияния на интеграл по объему, вычисленный в системах координат, для которых верна асимптотика (6.46). Энергия фигурирует просто как коэффициент при величине  $2G/c^4 r'$  в выражении (6.46), поэтому все системы, для которых в форме (6.46) коэффициенты одинаковы, имеют одинаковые величины энергии независимо от способа их внутреннего описания.

## 2. Другие законы сохранения

Законы сохранения типа (6.17) констатируют неизменность во времени некой величины. В данной системе координат может и не существовать простой формы связи между этой сохраняющей величиной и плотностью энергии. Выра-

жение (6.16) описывает лишь один из классов псевдотензорных плотностей, удовлетворяющих законам сохранения. Добавление к  $t_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}$  любых величин, обычная дивергенция которых обращается в нуль, не нарушает закона (6.17). Этот произвол в определении  $t_{\mu}^{\nu}$  был использован Ландау и Лифшицем [6] для получения сохраняющегося симметричного псевдотензора  $K^{\mu\nu}$  и Мёллером [8] для получения величины, нуль-нуль компонента которой ведет себя как скаляр при преобразованиях координат, не касающихся оси времени<sup>1)</sup>. Для получения этих результатов удобно [7] ввести величину  $U_{\mu}^{\nu\sigma}$ , антисимметричную по индексам  $\sigma$  и  $\nu$ . Символ в виде ломаной черты часто используется для обозначения такой антисимметрии. Канонический псевдотензор энергии — импульса — натяжений может быть записан через  $U_{\mu}^{\nu\sigma}$  в виде

$$\tau_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g} = U_{\mu}^{\nu\sigma},_{\sigma}. \quad (6.50)$$

Он удовлетворяет закону сохранения  $(\tau_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}),_{\nu} = 0$  вследствие антисимметрии  $U_{\mu}^{\nu\sigma}$ . Искать выражение<sup>2)</sup> для  $U_{\mu}^{\nu\sigma}$  можно, исходя из (6.32) и замечая, что оно должно отличаться от

$$-2 \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu},_{\sigma}} g^{\alpha\nu}$$

на слагаемое, обычная дивергенция которого равна нулю. Если этому слагаемому придать вид  $a_{\mu}^{\nu\sigma\beta}$ , то дивергенция будет обращаться в нуль автоматически. Поэтому мы запишем

$$-2 \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu},_{\sigma}} g^{\alpha\nu} = U_{\mu}^{\nu\sigma} + a_{\mu}^{\nu\sigma\beta}. \quad (6.51)$$

С помощью (6.39) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu},_{\sigma}} g^{\alpha\nu} = & \left\{ -\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\sigma} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha}^{\sigma} \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}) g^{\nu\alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{g_{\mu\alpha}}{2} (g^{\rho\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\rho\gamma} - g^{\tau\beta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}) g^{\alpha\nu} \right\} \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi G}. \quad (6.52) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Н. В. Мицкевич [17, 18] получил то же выражение, исходя из принципа действия. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Величины  $U_{\mu}^{\nu\sigma}$  иногда называют суперпотенциалами.

Помня, что

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} = \frac{g_{,\beta}}{2g}, \quad d(g_{\nu\lambda}g^{\nu\lambda}) = 0 \quad \text{и} \quad g_{\nu\lambda, \alpha}g^{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}g^{\nu\lambda}_{,\alpha},$$

можно путем преобразований привести (6.52) к виду

$$\frac{\partial(-\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\sigma}} g^{\alpha\nu} = \left[ \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\nu\alpha} [g(g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta} - g^{\sigma\alpha}g^{\nu\beta})]_{,\beta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} \delta_{\mu}^{\sigma} g^{\beta\nu} - \sqrt{-g} \delta_{\mu}^{\beta} g^{\sigma\nu})_{,\beta} \right] \frac{c^4}{16\pi G}. \quad (6.53)$$

Из сравнения (6.53) и (6.51) следует, что

$$U_{\mu}{}^{\nu\sigma} = \frac{c^4}{16\pi G \sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} [(-g)(g^{\nu\alpha}g^{\sigma\beta} - g^{\sigma\alpha}g^{\nu\beta})]_{,\beta} \quad (6.54)$$

и

$$a_{\mu}{}^{\nu\sigma\beta}_{,\beta} = \frac{c^4}{16\pi G} [\sqrt{-g} (\delta_{\mu}^{\sigma} g^{\nu\beta} - \delta_{\mu}^{\beta} g^{\sigma\nu})]_{,\beta}. \quad (6.55)$$

При линейных (аффинных) преобразованиях координат эти величины ведут себя как тензорные плотности, поэтому их называют аффинными тензорными плотностями.

Для выполнения закона сохранения момента импульса представляется удобным (но не необходимым) [4] построить величину, соответствующую  $\tau_{\alpha\beta}$ , но симметричную по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . Такая величина может быть получена из  $U_{\mu}{}^{\nu\sigma}$  следующим образом. Рассмотрим выражение  $U^{\mu\nu}{}_{,\alpha}$

$$U^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = (g^{\mu\beta} U_{\beta}{}^{\nu\alpha})_{,\alpha} = \{ [-g(g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho} [(-g)^{-1/2}]_{,\alpha} + \\ + (-g)^{-1/2} [-g(g^{\nu\mu}g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho, \alpha} \} \frac{c^4}{16\pi G}. \quad (6.56)$$

Последнее слагаемое в (6.56) симметрично по  $\mu$  и  $\nu$ , первое же не симметрично. Если в выражении (6.54) отбросить множитель  $(-g)^{-1/2}$ , то полученная величина

$$h^{\mu\nu\sigma} = [-g(g^{\nu\mu}g^{\sigma\rho} - g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho})]_{,\rho} \frac{c^4}{16\pi G} \quad (6.57)$$

будет иметь дивергенцию, симметричную по  $\mu$  и  $\nu$ . Мы будем обозначать гравитационный псевдотензор Ландау — Лифшица через  $\bar{T}^{\mu\nu}$ , а полученное ими сложное выражение для псевдотензорной плотности через  $K^{\mu\nu}$ . С помощью (6.57) Ландау

и Лифшиц записывают

$$K^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + \bar{t}^{\mu\nu}) (-g) = h^{\mu\nu}_{,\rho} \quad (6.58)$$

Тогда закон сохранения для  $K^{\mu\nu}$  выполняется вследствие антисимметрии  $h^{\mu\nu}_{,\rho}$  по  $\nu$  и  $\rho$ . Интегрирование дает величину  $\mathcal{P}^\mu$  вида

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{1}{c} \int (-g) [T^{\mu 0} + \bar{t}^{\mu 0}] dx^1 dx^2 dx^3. \quad (6.59)$$

При линейных преобразованиях  $\mathcal{P}^\mu$  ведет себя как плотность четырехмерного вектора, а не как 4-вектор. Используя уравнения поля и определение  $h^{\mu\nu}_{,\rho}$ , Ландау и Лифшиц дали следующую формулу для  $\bar{t}^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \bar{t}^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} [ & (2\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} \Gamma^{\nu}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \Gamma^{\nu}_{\gamma\rho}) (g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma} - g^{\mu\nu} g^{\beta\gamma}) + \\ & + g^{\mu\beta} g^{\gamma\alpha} (\Gamma^{\nu}_{\beta\rho} \Gamma^{\rho}_{\gamma\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\gamma\alpha} \Gamma^{\rho}_{\beta\rho} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) + \\ & + g^{\nu\beta} g^{\gamma\alpha} (\Gamma^{\mu}_{\beta\rho} \Gamma^{\rho}_{\gamma\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} \Gamma^{\rho}_{\beta\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) + \\ & + g^{\beta\gamma} g^{\alpha\rho} (\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \Gamma^{\nu}_{\gamma\rho} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \Gamma^{\nu}_{\alpha\rho}) ]. \quad (6.60) \end{aligned}$$

Здесь вновь псевдотензорная плотность  $K^{\mu\nu}$  обладает нежелательным свойством, заключающимся в том, что для получения правильного выражения энергии необходимо пользоваться специальной координатной системой, в которой метрика приближается на больших расстояниях к изотропной. Последовательная интерпретация  $K^{00}$  как локальной плотности энергии здесь снова невозможна.

Задавшись целью устранить эти недостатки, Мёллер использовал возможность добавления к правой части равенства (6.51) новой аффинной тензорной плотности третьего ранга  $V_\mu^{\nu\sigma}$ , что не нарушает справедливости законов сохранения, коль скоро  $V_\mu^{\nu\sigma}$  антисимметрична по индексам  $\nu$  и  $\sigma$ . Мёллер ввел функцию  $\chi_\mu^{\nu\sigma}$ , определяемую равенством

$$\chi_\mu^{\nu\sigma} = U_\mu^{\nu\sigma} + V_\mu^{\nu\sigma}. \quad (6.61)$$

Тогда псевдотензор энергии—импульса—натяжений  $\Lambda_\mu^\nu$  будет равен

$$\Lambda^\nu \sqrt{-g} = (T_\mu^\nu + \tilde{t}_\mu^\nu) \sqrt{-g} = \chi_\mu^{\nu\sigma}. \quad (6.62)$$

Здесь  $\tilde{t}_\mu{}^\nu$  — гравитационный псевдотензор, соответствующий  $\Lambda_\mu{}^\nu$ . Добавочная аффинная тензорная плотность  $V_\mu{}^{\nu\sigma}$  выбирается из соображений придания  $\Lambda_\mu{}^\nu$  следующих свойств. Для физических систем, допускающих использование „лоренцовой“ метрики (6.46) на больших расстояниях, должно иметь место равенство

$$\int \Lambda_\mu{}^0 V \sqrt{-g} d^3x = \int \tau_\mu{}^0 V \sqrt{-g} d^3x. \quad (6.63)$$

Величина  $\Lambda_0{}^\sigma$  должна вести себя как 4-вектор при всех не затрагивающих оси времени преобразованиях координат. Таким образом, при произвольных чисто пространственных преобразованиях величина  $\Lambda_0{}^0$  ведет себя как скаляр, а  $\Lambda_0{}^i$  — как 3-вектор. Для определения удовлетворяющей этим требованиям величины  $V_\mu{}^{\nu\sigma}$  Мёллер исследовал трансформационные свойства  $\tau_0{}^0 V \sqrt{-g}$  при произвольных бесконечно малых преобразованиях, не затрагивающих временной координаты. Таким образом, был рассмотрен вопрос, в чем заключается отличие свойств  $\tau_0{}^0 V \sqrt{-g}$  от свойств скалярной плотности при преобразованиях пространственных координат. Следует рассмотреть такие комбинации  $g_{\mu\nu}$  и его первых производных, которые с помощью (6.46) приводят к величине  $V_0{}^{0\nu}$ , убывающей при  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $1/r^2$ . Эти соображения привели Мёллера к функции

$$V_\mu{}^{\nu\sigma} = U_\mu{}^{\nu\sigma} - \delta_\mu{}^\nu U_\alpha{}^{\alpha\sigma} + \delta_\mu{}^\sigma U_\alpha{}^{\alpha\nu}. \quad (6.64)$$

С помощью (6.54) можно вычислить выражения для  $V_\mu{}^{\nu\sigma}$  и  $\chi_{;\mu}{}^{\nu\sigma}$ , например

$$\chi_{;\mu}{}^{\nu\sigma} = \frac{V \sqrt{-g} c^4}{8\pi G} (g_{\mu\beta, \alpha} - g_{\mu\alpha, \beta}) g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta}. \quad (6.65)$$

Для нахождения величины  $\Lambda_0{}^\nu$  нам понадобится

$$\chi_{;0}{}^{\nu\sigma} = \frac{V \sqrt{-g} c^4}{8\pi G} (g_{0\beta, \alpha} - g_{0\alpha, \beta}) g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta}. \quad (6.66)$$

Рассмотрим теперь поведение выражения (6.66) и  $\Lambda_0{}^\nu$  при преобразованиях, нигде не касающихся временной координаты, но произвольных в остальных отношениях. Тогда  $g_{0\alpha}$  преобразуется как 4-вектор. Вспоминая, что для любого

вектора  $B_{\mu}$  верно соотношение  $B_{\mu;\nu} - B_{\nu;\mu} = B_{\mu,\nu} - B_{\nu,\mu}$ , заметим, что разность, стоящая в скобках в (6.66), преобразуется как тензор. Тогда из (3.78) следует, что величина  $\chi_{0;\mu}{}^{0\mu} = \Lambda_0^0 \sqrt{-g}$  преобразуется как скалярная плотность. Так как  $\chi_{0;\mu}{}^{0\mu}$  преобразуется по закону антисимметричной тензорной плотности, то величины  $\Lambda_0^i$  составляют 3-вектор. Мы видим, таким образом, что псевдотензор Мёллера — Мицкевича, задаваемый по (6.62) и (6.65), обладает искомыми трансформационными свойствами<sup>1)</sup>.

Теперь вкратце рассмотрим связь сохраняющихся величин с бесконечно малыми преобразованиями координат, следуя Бергману [12]. Пусть бесконечно малое преобразование имеет вид

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad (6.67)$$

Величина  $M^{\rho}$ , определяемая равенством

$$M^{\rho} = (\delta x^{\alpha} U_{\alpha}{}^{\rho}), \quad (6.68)$$

удовлетворяет закону  $M^{\rho}{}_{,\rho} = 0$ . Ввиду произвольности  $\delta x_{\alpha}$  ясно, что из (6.68) следует бесконечное множество такого рода законов. Выбирая в качестве  $\delta x^{\alpha}$  набор констант, получаем эйнштейновскую формулировку задачи. Полагая  $\delta x^{\alpha} = g^{\alpha\beta} k_{\beta} \sqrt{-g}$ , где  $k_{\beta}$  — набор постоянных, придем к выражениям, полученным Ландау и Лифшицем. Законы сохранения момента импульса можно получить, используя

$$\delta x^{\alpha} = (g^{\alpha\beta} x^{\gamma} - g^{\alpha\gamma} x^{\beta}) J_{\beta\gamma} \sqrt{-g}, \quad (6.69)$$

<sup>1)</sup> В своей последней работе [9] Мёллер показал, что все выведенные ранее „псевдотензоры“ не удовлетворяют разумно сформулированным требованиям и, более того, что из метрического тензора и его первых и вторых производных вообще невозможно построить „комплекс“ с желаемыми свойствами. Следует, однако, заметить, что при дополнительном введении нового симметричного тензора второго ранга  $e_{\mu\nu}$  можно удовлетворить всем требованиям Мёллера (см. [10]; там же дан полный анализ трансформационных свойств квазитензоров энергии — импульса и спина). Новый квазитензор переходит в псевдотензор Эйнштейна в квазидекартовых координатах; кроме того, он удовлетворяет требованиям хронометрической инвариантности Зельманова (см. формулировку этих требований [11]). — *Прим. ред.*



где  $J_{\beta\gamma}$  — снова набор постоянных. Очевидно, что в (6.68) можно использовать любое векторное поле.

Комар [13] указал способ построения семейств законов сохранения в тензорной форме. Исходя из результата Мёллера, он записал

$$\begin{aligned} D^\rho \sqrt{-g} &= (\delta x^\alpha U_\alpha^{\rho\beta} + \delta x^\alpha V_\alpha^{\rho\beta})_{;\beta} = \\ &= \left[ \frac{c^4}{8\pi G} \delta x^\beta g^{\rho\alpha} g^{\beta\gamma} (g_{\beta,\alpha} - g_{\alpha,\beta}) \sqrt{-g} \right]_{;\delta}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Добавление к (6.70) роторного поля

$$W^\rho \sqrt{-g} = \left\{ \frac{c^4}{8\pi G} g^{\rho\alpha} g^{\beta\gamma} [(\delta x^\gamma)_{;\alpha} g_{\gamma\beta} - (\delta x^\beta)_{;\gamma} g_{\gamma\alpha}] \sqrt{-g} \right\}_{;\alpha} \quad (6.71)$$

дает

$$Q^\rho = \frac{c^4}{8\pi G} (\delta x^{;\rho\beta} - \delta x^{;\beta\rho})_{;\beta}. \quad (6.72)$$

Из (3.75) видно, что (6.72) сохраняется; к тому же эта величина обладает тензорными свойствами. Анализ соотношений (6.70) и (6.71) показывает, что результат Мёллера получается из (6.72) при  $\delta x^\rho = \delta_0^\rho$ .

### 3. Дальнейшие замечания о законах сохранения

Из изложенного ясно, что в тех случаях, когда энергия вещества и негравитационных полей в достаточной мере локализована, так что на больших расстояниях можно использовать „лоренцову“ метрику (6.46), величина полной энергии оказывается вполне определенной и может быть вычислена с помощью приведенных здесь выражений. Предложенный Мёллером псевдотензор не требует использования метрики (6.46), и его нуль-нуль компонента сохраняет одно и то же значение во всех координатных системах, временные координаты которых совпадают. Величина же, полученная Ландау и Лифшицем, обладает свойством симметрии.

Можно сконструировать множество других псевдотензоров энергии — импульса — натяжений, и Дирак отметил возможные преимущества некоторых из них при решении уравнений движения. Ниже будут приведены другие выражения, вытекающие

щие из анализа проблемы излучения. В главе, посвященной излучению, мы отметим также некоторые другие трудности, приводящие к выводу, что проблема энергии в общей теории относительности не получила еще вполне удовлетворительного решения.

Бергманн различает законы сохранения, выполняющиеся тождественно, и законы, справедливые лишь при условиях, в которых удовлетворяются уравнения поля. Такие тождества, например тождества Бианки или тождества  $U_{\nu}^{\alpha\beta}{}_{;\sigma,\mu} = 0$  носят название „сильных“ законов. Соотношения же, справедливые лишь при удовлетворении уравнений поля, называют „слабыми“ законами.

Любопытно отметить существование тензора четвертого ранга, величины полностью симметричной, найденной Беллем [14]. Для его построения нам прежде всего понадобится ввести понятие дуального тензора. Если задан некоторый тензор  $A^{\mu\nu}$ , то дуальный ему тензор можно получить по правилу

$$*A_{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} A^{\alpha\beta} \frac{\sqrt{-g}}{2}, \quad (6.73)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  — уже знакомая нам тензорная плотность Леви-Чивита. Тензор, дуальный тензору Римана, равен

$$*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} \frac{\sqrt{-g}}{2}. \quad (6.74)$$

Построенный из этих величин тензор Беля

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\mu\nu\delta} R_{\beta}^{\mu\nu}{}_{\gamma} + *R_{\alpha\mu\nu\delta} *R_{\beta}^{\mu\nu}{}_{\gamma} \quad (6.75)$$

удовлетворяет соотношениям

$$T^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} = 0 \quad (6.76)$$

и

$$T^{\alpha\beta}{}_{\alpha\delta} = 0, \quad (6.77)$$

когда скоро величина  $R_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям поля. Эти свойства тензора Беля были установлены Робинсоном в еще не опубликованной работе.

Тензор  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , кроме того, симметричен по всем индексам. Закон „сохранения“ (6.76) непригоден для получения ранее

использовавшихся трехмерных интегралов. В настоящее время тензор Беля исследуется с целью выяснения полезности его свойств при рассмотрении проблемы гравитационного излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Berl. Ber., 42, 1111 (1916).
2. Bergmann P. G., Phys. Rev., 75, 680 (1949).
3. Bergmann P. G., Schiller R., Phys. Rev., 89, 4 (1953).
4. Bergmann P. G., Thomson R., Phys. Rev., 89, 400 (1953).
5. Goldberg J. N., Phys. Rev., 111, 315 (1958).
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1960, стр. 351.
7. von Freud P., Ann. d. Math., 40, 417 (1939).
8. Møller C., Ann. of Phys., 4, 347 (1958).
9. Møller C., Ann. of Phys., 12, 118 (1961).
10. Мицкевич Н. В., Доклад на 1-й Советской гравитационной конференции, Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, М., 1961, стр. 37.  
Мицкевич Н. В., Доклады Болгарской АН, 14, 439 (1961).
11. Зельманов А. Л., ДАН СССР, 107, № 6, 815 (1956).
12. Bergmann P. G., Phys. Rev., 112, 287 (1958).
13. Komar A., Phys. Rev., 113, 934 (1959).
14. Bel L., Compt. rend., 243, 1297 (1959).
15. Fletcher J. G., Rev. Mod. Phys., 32, 65 (1960).
16. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, New York, 1954.
17. Мицкевич Н. В., Ann. d. Phys., 1, 319 (1958).
18. Иваненко Д., Мицкевич Н., ЖЭТФ, 37, 868 (1959).

## Гравитационные волны

### 1. Решения для слабого поля

Одной из центральных проблем общей теории относительности всегда был вопрос о существовании гравитационного излучения. До сих пор гравитационные волны не наблюдались. До недавнего времени [1] не было известно решений точных уравнений гравитационного поля в форме сферических гравитационных волн. По этим причинам за последние четыре десятилетия появилось множество теоретических работ, посвященных этой проблеме. Мы увидим далее, что в настоящее время представляются осуществимыми некоторые экспериментальные исследования в этом направлении. За последние годы были решены некоторые теоретические вопросы, и целый ряд физиков смогли прийти к заключению, что общая теория относительности действительно предсказывает существование гравитационных волн.

В 1916 г. Эйнштейн [2] исследовал в случае слабого поля решения уравнений

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

получающиеся в предположении, что

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (7.2)$$

Здесь  $\delta_{\mu\nu}$  лоренцова метрика, а величина  $h_{\mu\nu}$  — первого порядка малости. По определению,  $h_{\mu}^{\lambda}$  и  $h$  задаются как

$$h_{\mu}^{\lambda} = \delta^{\lambda\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad (7.3)$$

$$h = h_{\alpha}^{\alpha} = \delta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}. \quad (7.4)$$

Тензор Риччи выражается через символы Кристоффеля следующим образом:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\nu, \beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\beta, \nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \quad (7.5)$$

Учитывая (7.2) — (7.4), можно записать  $R_{\mu\nu}$  с точностью до величин первого порядка в виде

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} h_{\mu\nu, \sigma\lambda} - \frac{1}{2} (h_{, \mu\nu} - h_{\mu}^{\beta}{}_{, \nu\beta} - h^{\beta}_{\nu, \mu\beta}). \quad (7.6)$$

В (7.6) последние три слагаемых можно перегруппировать следующим образом:

$$h_{, \mu\nu} - h_{\mu}^{\beta}{}_{, \nu\beta} - h^{\beta}_{\nu, \mu\beta} = \left( \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\beta} h - h_{\mu}^{\beta} \right)_{, \beta\nu} + \left( \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\beta} h - h_{\nu}^{\beta} \right)_{, \beta\mu}. \quad (7.7)$$

Выражение (7.7) может быть обращено в нуль выбором системы координат, в которой выполняются условия<sup>1)</sup>

$$\left( h_{\mu}^{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\beta} h \right)_{, \beta} = 0. \quad (7.8)$$

Тогда тензор  $R_{\mu\nu}$  равен одному первому слагаемому в (7.6), и уравнения поля принимают вид

$$-\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} h_{\mu\nu, \sigma\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{1}{4} \delta^{\sigma\lambda} h_{, \sigma\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (7.9)$$

При использовании уравнений (7.9) необходима осторожность, поскольку обычно не все компоненты, составляющие их правую часть, имеют одинаковый порядок. Введем теперь величину

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu} = h_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} h, \quad (7.10)$$

Координатные условия (7.8) теперь записываются в виде

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{, \nu} = 0. \quad (7.11)$$

Поднимая индекс  $\nu$  в (7.9) и учитывая (7.10), получаем

$$\square \varphi_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu}{}^{\nu}. \quad (7.12)$$

<sup>1)</sup> Как показал Гильберт, эти «координатные условия» для слабого поля всегда могут быть удовлетворены путем бесконечно малого преобразования координат и поэтому не нарушают общности приведенного рассуждения. Подробности см. ниже. — *Прим. ред.*

Решения уравнений (7.12) хорошо известны из электродинамики и имеют вид

$$\varphi_{\mu}^{\nu}(\mathbf{r}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{(T_{\mu}^{\nu})_{\text{зап.}} d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7.13)$$

Здесь  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  представляет собой расстояние от точки расположения источника до точки, в которой определяется поле. Как уже отмечалось выше, соотношения (7.12) можно получить непосредственно из закона всемирного тяготения Ньютона при замене  $\nabla^2$  на  $\square$ . Тогда условия (7.11) вытекают из закона сохранения  $T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ .

Несколько лет назад Паули и Фирц [3] исследовали вопрос о том, какие релятивистские волновые уравнения соответствуют частицам с нулевой массой покоя и спином, равным двум. Оказалось, что для релятивистского описания частиц со спином  $S$  требуется использовать волновые функции с числом компонент  $2(2S + 1)$ , так что в данном случае требуется тензор второго ранга. Паули и Фирц пришли к уравнениям

$$\square \psi_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (7.14)$$

при дополнительных условиях

$$\psi_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (7.15)$$

Так как эти уравнения совпадают с уравнениями (7.11) и (7.12) в вакууме, то следует ожидать, что гравитоны будут обладать спином два<sup>1)</sup>. Поскольку для них единственным выделенным направлением является направление их движения, следовательно, спиновый момент гравитона должен быть ориентирован в направлении движения. Так как гравитационные силы действуют на больших расстояниях, то отсюда следует, что масса покоя гравитона должна быть равна нулю<sup>2)</sup>.

Рассмотрим теперь, при каких условиях удовлетворяются равенства (7.11). Произведем бесконечно малое преобразование координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x). \quad (7.16)$$

<sup>1)</sup> Обрати, определяя спин гравитационного поля по общим правилам, придет к выражению, соответствующему значению спина два (используя простейшее квантование линейного поля). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Если взаимодействие переносится частицами с массой покоя  $m$ , то действует потенциал Юкавы  $\varphi \sim (1/r) e^{-mcr/\hbar}$ . Бесконечному радиусу действия соответствует  $m \rightarrow 0$ .

В первом приближении это преобразование можно переписать как

$$x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x'). \quad (7.17)$$

Тогда преобразованный метрический тензор будет равен

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} \xi^\alpha_{,\mu} - g_{\beta\mu} \xi^\beta_{,\nu}. \quad (7.18)$$

Аналогично

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\nu} \xi^\alpha_{,\mu} - \delta_{\beta\mu} \xi^\beta_{,\nu}, \quad (7.19)$$

$$\varphi'_{\mu^\alpha} = \delta^{\alpha\nu} (\varphi_{\mu\nu} - \delta_{\beta\nu} \xi^\beta_{,\mu} - \delta_{\beta\mu} \xi^\beta_{,\nu} + \delta_{\mu\nu} \xi^\gamma_{,\gamma}) \quad (7.20)$$

и

$$\varphi'_{\mu^\alpha, \alpha} = \varphi_{\mu^\alpha, \alpha} - \delta^{\rho\sigma} \xi_{\mu, \rho\sigma}. \quad (7.21)$$

Если координатные условия (7.11) не удовлетворяются, мы имеем

$$\varphi_{\mu^\alpha, \alpha} \neq 0. \quad (7.22)$$

Из (7.21) следует, что соотношение

$$\varphi'_{\mu^\alpha, \alpha} = 0 \quad (7.23)$$

может быть получено теперь бесконечно малым преобразованием координат, коль скоро

$$\square \xi_\mu = \varphi_{\mu^\alpha, \alpha}. \quad (7.24)$$

Если, с другой стороны,  $\varphi_{\mu^\alpha, \alpha} = 0$ , то мы можем производить произвольные преобразования координат, оставляющие это условие в силе, если наши функции  $\xi_\mu$  будут удовлетворять однородному волновому уравнению, соответствующему (7.24).

Вернемся к уравнениям (7.12). В пустом пространстве они описывают волновые поля, причем

$$\square \varphi_{\mu^\nu} = 0. \quad (7.25)$$

Интересно определить, какое число независимых компонент  $h_{\mu\nu}$  или  $\varphi_{\mu\nu}$  необходимо для описания решения (7.25), имеющего вид плоской волны. Однако, как выяснится, удобнее рассмотреть сначала случай локально плоского возмущения произвольной амплитуды, а затем уже применить полученные выводы к случаю слабого поля.

## 2. Тензор Римана в случае локально плоской волны произвольно большой амплитуды

Рассмотрим гравитационную волну, обладающую равными нулю пространственными производными в направлениях, нормальных к направлению ее распространения. Такую волну можно поэтому назвать локально плоской. В этом случае мы покажем, что в любой заданной точке все компоненты тензора Римана могут быть выражены через производные трех компонент  $g_{\mu\nu}$ , описывающих интервалы на плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Введем геодезическую систему координат, такую, чтобы в данной точке пространства—времени символы Кристоффеля обратились в нуль, и метрика совпала бы с лоренцевой. Тензор Римана примет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta, \beta\gamma} + g_{\beta\gamma, \alpha\delta} - g_{\alpha\gamma, \beta\delta} - g_{\beta\delta, \alpha\gamma}). \quad (7.26)$$

Выберем в качестве направления распространения волны ось  $x^1$ . Тогда частные производные от  $g_{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu, \alpha}$  по  $x^2$  и  $x^3$  будут равны нулю. Рассмотрение (7.26) показывает, что компоненты  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  можно разбить на три группы:

$$\begin{aligned} R_{2020} &= \frac{1}{2} g_{22,00}, & R_{1220} &= \frac{1}{2} g_{22,10}, \\ R_{2030} &= \frac{1}{2} g_{23,00}, & R_{1230} &= \frac{1}{2} g_{23,10}, \\ R_{3030} &= \frac{1}{2} g_{33,00}, & R_{1320} &= \frac{1}{2} g_{23,10}, \\ R_{1212} &= -\frac{1}{2} g_{22,11}, & R_{1330} &= \frac{1}{2} g_{33,10}, \\ R_{1213} &= -\frac{1}{2} g_{23,11}, & R_{1313} &= -\frac{1}{2} g_{33,11}; \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} R_{1223} &= 0, & R_{2323} &= 0, \\ R_{1323} &= 0, & R_{2320} &= 0, \\ R_{1023} &= 0, & R_{2330} &= 0; \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{1030} &= -\frac{1}{2} g_{13,00} + \frac{1}{2} g_{30,10}, & R_{1020} &= -\frac{1}{2} g_{12,00} + \frac{1}{2} g_{20,10}, \\ R_{1310} &= -\frac{1}{2} g_{30,11} + \frac{1}{2} g_{13,10}, & R_{1210} &= -\frac{1}{2} g_{20,11} + \frac{1}{2} g_{12,10}, \\ R_{1010} &= -\frac{1}{2} g_{11,00} + g_{10,10} - \frac{1}{2} g_{00,11}. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$



В случае вакуума  $R_{\mu\nu} = 0$  и для данной точки при использовании лоренцовой метрики совместно с (7.27) — (7.29) получаем

$$\begin{aligned}
 R_{12} = R_{1020} = 0, & \quad R_{00} = R_{3030} + R_{2020} + R_{1010} = 0, \\
 R_{20} = R_{1210} = 0, & \quad R_{10} = R_{1220} + R_{1330} = 0, \\
 R_{11} = R_{1010} - R_{1313} - R_{1212} = 0, & \quad R_{13} = R_{1030} = 0, \quad (7.30) \\
 R_{22} = R_{2020} - R_{1212} = 0, & \quad R_{23} = R_{2030} - R_{1213} = 0, \\
 R_{33} = R_{3030} - R_{1313} = 0, & \quad R_{30} = R_{1310} = 0.
 \end{aligned}$$

Из этих уравнений, согласно которым компоненты  $R_{12}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{13}$  и  $R_{30}$  равны нулю, следует обращение в нуль первых четырех значений тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , данных в (7.29). Уравнения же для  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{33}$  и  $R_{00}$  в совокупности приводят к равенству нулю последней величины ( $R_{1010}$ ) в (7.29). Отсюда следует, что единственные отличные от нуля компоненты тензора Римана представлены десятью величинами (7.27), полностью выражающимися через  $g_{22}$ ,  $g_{23}$  и  $g_{33}$ . Уравнения (7.20) для  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{33}$  и  $R_{00}$  приводят также к соотношению

$$g_{22,00} + g_{33,00} = 0. \quad (7.31)$$

Из (7.31) следует, что интересующие нас вторые производные двух компонент метрики  $g_{22}$  и  $g_{33}$  не являются независимыми. В приближении слабого поля выражение (7.26) справедливо во всем пространстве. Тогда в силу (7.31) тензор Римана может быть выражен через  $h_{22}$ ,  $h_{33}$  и  $h_{23}$  во всех точках. Поэтому мы заключаем, что возможно такое преобразование координат, посредством которого можно „оттрансформировать“ все компоненты  $h_{\mu\nu}$ , кроме „поперечных“. Это можно проделать относительно просто с помощью бесконечно малых преобразований координат, удовлетворяющих уравнениям (7.24). В следующей главе мы покажем, что относительные смещения тесно расположенных свободных частиц, заполняющих область, в которой распространяется волна, происходят в направлениях, перпендикулярных (поперечных) к направлению распространения волны.

### 3. Приближенное вычисление объемных интегралов для источников

Вернемся к рассмотрению интегральной формы решения для слабого поля (7.13). На некоторой степени приближения все компоненты такого решения могут быть выражены через  $T_{00}$ . Тензор энергии — импульса — натяжений в первом приближении удовлетворяет законам сохранения

$$T_{0k, k} - T_{00, 0} = 0, \quad (7.32)$$

$$T_{jk, k} - T_{j0, 0} = 0. \quad (7.33)$$

Умножая (7.33) на  $x^l$  и интегрируя по частям во всем пространстве (опуская обращающиеся в нуль на бесконечности поверхностные интегралы), мы можем записать это выражение в симметричном виде

$$\int T_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \left[ \int (T_{i0} x^j + T_{j0} x^i) d^3x \right]_{,0}. \quad (7.34)$$

Умножая (7.32) на  $x^l x^j$ , интегрируя по всему пространству и вновь опуская равные нулю поверхностные интегралы, получаем

$$\left[ \int T_{00} x^l x^j d^3x \right]_{,0} = \int (T_{i0} x^j + T_{j0} x^i) d^3x. \quad (7.35)$$

На основании (7.34) и (7.35) можно записать

$$\int T_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \left[ \int T_{00} x^l x^j d^3x \right]_{,0,0}. \quad (7.36)$$

Использование (7.36) облегчает некоторые вычисления, в которых удобнее рассматривать распределение массы — энергии, чем распределение натяжений<sup>1)</sup>. Мы пренебрегли в соотношении (7.36) эффектами запаздывания, поэтому оно теряет силу в областях, где имеются источники, размеры которых велики по сравнению с длиной излучаемой волны.

В случае же источника, локализованного в малой по сравнению с длиной волны области, выражение (7.36) позволяет вычислить все компоненты  $\varphi_\mu^\nu$  с пространственными

<sup>1)</sup> Отсюда следует квадрупольный характер гравитационного излучения. — *Прим. ред.*

индексами в первом неисчезающем приближении. При этом использование координатных условий позволяет получить и остальные компоненты. В некоторых случаях этот метод оказывается проще, чем непосредственное использование интеграла (7.13).

В случае точечной частицы необходимо найти значение интегралов в пределе, при стремлении объема к нулю, с учетом того факта, что вследствие явления запаздывания в различные моменты времени необходимо брать разные элементы объема. Более прямой путь состоит в том, чтобы, исходя из известного поля покоящейся частицы, обобщить затем это решение на случай движущейся частицы, как это делается в электродинамике. Покоящаяся частица массы  $m$  порождает поле с потенциалом

$$\varphi_{00}(\mathbf{r}) = \frac{4Gm}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

В линейном приближении мы можем заключить, что искомое обобщение для движущейся частицы должно иметь вид

$$\varphi_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \frac{4Gm U'_{\mu} U'_{\nu}}{c^2 U'_{\alpha} (r'^{\alpha} - r^{\alpha})}, \quad (7.13a)$$

где  $U'_{\mu}$  — четырехмерная скорость нашей частицы,  $m$  — ее масса покоя, и

$$\begin{aligned} r'^{\alpha} - r^{\alpha} &= \{(r'^i - r^i), \quad c(t' - t), \\ t' &= t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \end{aligned}$$

Можно переписать (7.13a) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4Gm v'_i v'_j}{c^4 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2} \left(1 - \frac{v'_i (r^i - r'^i)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)}}, \\ \varphi_{0i}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-4Gm v'_i}{c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2} \left(1 - \frac{v'_i (r^i - r'^i)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)}}, \quad (7.13b) \\ \varphi_{00}(\mathbf{r}, t) &= \frac{4Gm}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2} \left(1 - \frac{v'_i (r^i - r'^i)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)}}. \end{aligned}$$

Здесь  $v_i'$  — обычная трехмерная скорость рассматриваемой частицы.

#### 4. Поток и плотность энергии в приближении слабого поля

Ковариантная дивергенция тензора энергии — импульса — натяжений равна нулю в силу уравнений поля и тождеств Бианки. С помощью (3.79) это можно выразить в форме

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{; \nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (T_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{; \nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \mu} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (7.37)$$

Псевдотензорная плотность энергии — импульса — натяжений  $t_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g}$  связана с плотностью тензора энергии — импульса — натяжений соотношением

$$(T_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{; \nu} + (t_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{; \nu} = 0. \quad (7.38)$$

Величину  $t_{\mu}{}^{\nu}$  можно вычислить с помощью выражений, полученных в гл. 6, однако в случае слабого поля можно, непосредственно сравнивая (7.37) и (7.38), записать

$$(t_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{; \nu} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \mu} T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \approx -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta, \mu} T^{\alpha\beta}. \quad (7.39)$$

Вид равенства (7.39) наводит на мысль рассмотреть (7.12), умножив его на  $h^{\alpha\beta}{}_{; \mu}$ :

$$h^{\alpha\beta}{}_{; \mu} \square \varphi_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} h^{\alpha\beta}{}_{; \mu} T_{\alpha\beta}. \quad (7.40)$$

Используя (7.10) и (7.39), получаем отсюда

$$h^{\alpha\beta}{}_{; \mu} \left[ h_{\alpha\beta, \nu}{}^{; \nu} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} h_{, \nu}{}^{; \nu} \right] = \frac{32\pi G}{c^4} (t_{\mu}{}^{\nu} \sqrt{-g})_{; \nu}. \quad (7.41)$$

Можно написать тождество

$$\begin{aligned} & h^{\alpha\beta}{}_{; \mu} \left[ h_{\alpha\beta, \nu}{}^{; \nu} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} h_{, \nu}{}^{; \nu} \right] = \\ & = \left[ h^{\alpha\beta}{}_{; \mu} h_{\alpha\beta, \nu}{}^{; \nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} h_{\alpha\beta, \rho} h^{\alpha\beta, \rho} - \frac{1}{2} h_{, \mu} h^{, \nu} + \frac{1}{4} h_{, \rho} h^{, \rho} \partial_{\mu}{}^{\nu} \right]_{; \nu}; \end{aligned} \quad (7.42)$$

сопоставляя его с (7.14), получаем

$$t_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g} = \frac{c^4}{64\pi G} \left[ 2h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta}{}^{\prime\nu} - h_{,\mu} h^{\prime\nu} + \right. \\ \left. + \delta_{\mu}^{\nu} \left( \frac{1}{2} h_{,\rho} h^{\prime\rho} - h_{\alpha\beta,\rho} h^{\alpha\beta,\rho} \right) \right]. \quad (7.43)$$

Свертывание (7.10) дает

$$\varphi_{\alpha}^{\alpha} = -h_{\alpha}^{\alpha}. \quad (7.44)$$

Новое выражение псевдотензорной плотности можно получить, используя (7.44) и (7.10):

$$t_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g} = \frac{c^4}{64\pi G} \left[ 2\varphi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \varphi_{\alpha\beta}{}^{\prime\nu} - \varphi_{,\mu} \varphi^{\prime\nu} + \right. \\ \left. + \delta_{\mu}^{\nu} \left( \frac{1}{2} \varphi_{,\rho} \varphi^{\prime\rho} - \varphi_{\alpha\beta,\rho} \varphi^{\alpha\beta,\rho} \right) \right]. \quad (7.45)$$

## 5. Линейный квадрупольный осциллятор для масс

Рассмотрим теперь линейный квадрупольный осциллятор, образованный массами и расположенный в начале прямоугольной системы координат. Пусть движение масс совершается вдоль оси  $x^3$ . Пусть максимальное значение зависящей от времени части момента инерции равно  $I$ . Решения (7.12) можно записать при помощи (7.36) в виде

$$\varphi_{33} = \frac{2\omega^2 GI}{c^4 r} \cos \frac{\omega}{c} (x^0 - r). \quad (7.46)$$

Колебания в направлении оси  $x^3$  могут привести к появлению лишь компонент  $\varphi_{33}$ ,  $\varphi_{30}$  и  $\varphi_{00}$ . Для вычисления компонент  $\varphi_{30}$  и  $\varphi_{00}$  можно использовать координатные условия  $\varphi_{\mu}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$ , если они имеют место. Если плотность энергии в окрестности источников не настолько велика, чтобы пространство было существенно искривленным, то закон сохранения  $T_{\mu}^{\nu}{}_{,\nu} = 0$  в лоренцовой метрике справедлив с достаточной степенью точности. Если источники сконцентрированы в малой области, так что эффекты запаздывания несущественны, то из (7.12) следует, что координатные условия действительно выполняются. Тогда можно записать

$$\varphi_{3,3}^3 + \varphi_{3,0}^0 = 0 \quad (7.47)$$

и

$$\varphi_{0,3}^3 + \varphi_{0,0}^0 = 0. \quad (7.48)$$

Поместим наблюдателя на радиусе, составляющем угол  $\theta$  с осью  $x^3$ . Тогда из (7.46) — (7.48) получим

$$\varphi_{00} = \cos^2 \theta \varphi_{33}, \quad \varphi_{03} = -\cos \theta \varphi_{33}. \quad (7.49)$$

Величины  $\varphi_{00}$  и  $\varphi_{03}$  можно было бы найти непосредственно из (7.12) или (7.13а), однако это потребовало бы тщательного рассмотрения эффектов запаздывания и энергии в различных частях осциллятора, где проявляются упругие силы.

Излучаемую мощность можно вычислить следующим образом. Нас интересует величина

$$c \frac{\partial}{\partial x^0} \int T_0^0 \sqrt{-g} d^3x, \quad (7.50)$$

которая при учете законов сохранения может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & -c \frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{-g} T_0^0 d^3x - c \int \sqrt{-g} T_0^i dS_i = \\ & = c \frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{-g} t_0^0 d^3x + c \int \sqrt{-g} t_0^i dS_i. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Второй и четвертый интегралы берутся по замкнутой (двумерной) поверхности. Предполагается, что источник расположен в окрестности начала координат, и если замкнутая поверхность интегрирования удалена от этого источника, то второй интеграл в (7.51) обратится в нуль ввиду того, что вне источника  $T_0^i$  равен нулю. Третий интеграл будет периодически изменяться во времени, а последний определяет равномерное убывание энергии источника. Используя (7.46), (7.45) и (7.49), получаем [4, 5] выражение для средней во времени мощности излучения  $P$ :

$$P = \frac{GI^2 \omega^6}{15c^5}. \quad (7.52)$$

## 6. Излучение вращающегося стержня

Исторически первой из рассмотренных проблем гравитационного излучения была задача об излучении вращающегося стержня [2, 6], к которой мы сейчас и обратимся. Пусть стержень содержит в единице длины массу  $\sigma$  и вращается в плоскости  $xu$  с угловой скоростью  $\omega$ . В начальный момент

$t = 0$  стержень ориентирован вдоль оси  $x$ . Используя вновь (7.36) и (7.13), получаем

$$\varphi_{11} = \frac{2G}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} \int_{\text{зип.}} \sigma r^2 \cos^2 \frac{\omega x^0}{c} dr = \frac{4GI_m \omega^2}{c^4 r} \cos \frac{2\omega}{c} (x^0 - r), \quad (7.53)$$

$$\varphi_{22} = \frac{2G}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} \int_{\text{зип.}} \sigma r^2 \sin^2 \frac{\omega x^0}{c} dr = \frac{4GI_m \omega^2}{c^4 r} \cos \frac{2\omega}{c} (x^0 - r), \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= \frac{2G}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} \int_{\text{зип.}} \sigma r^2 \sin \frac{\omega x^0}{c} \cos \frac{\omega x^0}{c} dr = \\ &= \frac{4GI_m \omega^2}{c^4 r} \sin \frac{2\omega}{c} (x^0 - r). \end{aligned} \quad (7.55)$$

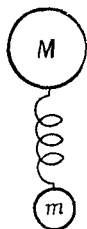
В выражениях (7.53) — (7.55) через  $I_m$  обозначен момент инерции стержня. Используем координатные условия (7.11) для вычисления  $\varphi_{00}$ ,  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$ . Тогда из (7.45) излученная мощность равна

$$P = \frac{32GI_m^2 \omega^6}{5c^5}. \quad (7.56)$$

## 7. Дальнейшие замечания о решениях для слабого поля

Интересно отметить, что выражения (7.52) и (7.56) можно получить, просто предполагая, что гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света, и следуя эвристическим соображениям<sup>1)</sup>, использованным при расчете излучения ускоренно движущегося заряда.

Из выражения (7.36) следует, что квадрупольный порядок является низшим порядком мультипольного излучения. Это видно также из того факта, что дипольный момент колеблющейся изолированной системы равен нулю вследствие закона сохранения импульса. Рассмотрим, например, большую и малую массы, связанные между собой пружиной (фиг. 10). Пусть эта система колеблется. Если обозначить смещения малой и большой масс соответственно



Фиг. 10.

<sup>1)</sup> См., например, [7].

через  $x_m$  и  $x_M$ . то из закона сохранения импульса следует, что

$$m\dot{x}_m + M\dot{x}_M = 0 \quad (7.57)$$

и

$$m\ddot{x}_m + M\ddot{x}_M = 0. \quad (7.58)$$

Можно было бы ожидать, что левая часть выражения (7.58) даст дипольный вклад в излучение ускоренной массы, однако он равен нулю вследствие (7.57).

Боннор [5] вычислил потерю энергии квадрупольным осциллятором во втором приближении и обнаружил, что она равна излученной энергии, даваемой в первом приближении (7.52).

## 8. Точное решение для цилиндрических волн

Эйнштейн и Розен [8, 9] получили некоторые точные решения уравнений общей теории относительности в виде цилиндрических волн. Они брали метрику

$$-ds^2 = e^{2\gamma-2\psi}(d\rho^2 - c^2 dt^2) + \rho^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 + e^{2\psi} dz^2, \quad (7.59)$$

где функции  $\gamma$  и  $\psi$  зависят только от  $\rho$  и  $t$ . Матрицу, определяемую выражением (7.59), можно подставить в уравнения для свободного пространства

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (7.60)$$

откуда следуют (точные) уравнения, которым должны удовлетворять  $\psi$  и  $\gamma$ ;

$$\psi_{,\rho,\rho} + \frac{1}{\rho} \psi_{,\rho} - c^{-2} \psi_{,t,t} = 0, \quad (7.61)$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho [(\psi_{,\rho})^2 + c^{-2} (\psi_{,t})^2], \quad (7.62)$$

$$\gamma_{,t} = \frac{2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t}}{c}. \quad (7.63)$$

Уравнение (7.61) представляет собой линейное волновое уравнение в цилиндрических координатах. Решение (7.61), описывающее расходящуюся волну, имеет вид

$$\psi = A \left[ J_0 \left( \frac{\omega\rho}{c} \right) \cos \omega t + N_0 \left( \frac{\omega\rho}{c} \right) \sin \omega t \right]. \quad (7.64)$$



Используя (7.62) и (7.63), получаем теперь

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{A^2 \omega \rho}{2c} \left\{ J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) J_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) + N_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) N_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) + \right. \\ & + \frac{\omega \rho}{c} \left[ \left( J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right)^2 + \left( J_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right)^2 + \left( N_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right)^2 + \left( N_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right)^2 \right] + \\ & + \left[ J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) J_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) - N_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) N_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right] \cos 2\omega t + \\ & \left. + \left[ J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) N_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) + N_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) J_0' \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \right] \sin 2\omega t \right\} - \frac{2}{\pi} A^2 \omega t. \quad (7.65) \end{aligned}$$

Штрих означает дифференцирование по  $\omega\rho/c$ . Последнее слагаемое в (7.65) линейно растет со временем. Первоначально предполагалось, что оно отражает кумулятивное влияние на метрику со стороны непрерывного излучения энергии. Розен [10] выступил против такого истолкования, основываясь на том, что при излучении энергии цилиндрической системой вблизи начала координат потеря энергии сделала бы невозможной периодичность во времени функции  $\psi$ , задаваемой в форме (7.64). Присутствие в решении (7.65) функции  $N_0$  приводит к сингулярности на оси симметрии. Мардер заметил, что невозможно сшить решение для свободного пространства (7.65) и решение вблизи начала координат в области, содержащей массу, физически приемлемым образом, так как в этой области плотность неизбежно изменит знак. Он считает, что связанные с (7.65) трудности вызываются включением поля на неограниченно долгий срок.

Большой интерес представляет случай импульса излучения. Линейность уравнения (7.61) позволяет нам пользоваться интегралом Фурье. Здесь мы кратко изложим работу Вебера и Уилера [11]. Фурье-представление функции  $\psi$  мы выберем в виде

$$\psi(\omega) = \frac{2}{c} B e^{-(a\omega/c)} J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right), \quad (7.66)$$

который позволяет непосредственно производить интегрирование, необходимое для построения  $\psi(t)$  и  $\gamma(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2}{c} B \int_0^{\infty} e^{-(a\omega/c)} J_0 \left( \frac{\omega \rho}{c} \right) \cos \omega t \, d\omega = \\ &= B \left[ ((a - ict)^2 + \rho^2)^{-1/2} + ((a + ict)^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]. \quad (7.67) \end{aligned}$$

При интегрировании (7.62) и (7.63) получим

$$\gamma = \frac{1}{2} B^2 \{ a^{-2} - \rho^2 [(a - tct)^2 + \rho^2]^{-2} - \rho^2 [(a + tct)^2 + \rho^2]^{-2} - a^{-2} (c^2 t^2 + a^2 - \rho^2) [c^4 t^4 + 2c^2 t^2 (a^2 - \rho^2) + (a^2 + \rho^2)^2]^{-1/2} \}. \quad (7.68)$$

Из уравнения (7.67) следует, что при отрицательных значениях  $t$  „импульс“ сходится в направлении к оси  $z$ . Он вновь расходится от нее при положительных значениях  $t$ . Таким образом, мы имеем „симметричное во времени“ решение уравнений Эйнштейна.

Для вычисления „плотности энергии“ воспользуемся выражением (6.32)

$$\sqrt{-g} \tau_{\mu}^{\nu} = \left[ -2g^{\nu\lambda} \frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\lambda, \rho}} \right]_{, \rho} \quad (7.69)$$

При использовании (7.59) и (6.39) непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{00, 0}} = 0, \quad (7.70)$$

$$\frac{\partial (\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g^{00, 1}} = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00} \left( g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \sqrt{-g} \frac{c^4}{16\pi G}.$$

Отсюда (7.69) в случае  $\tau_0^0 \sqrt{-g}$  принимает вид

$$\tau_0^0 \sqrt{-g} = \frac{c^4}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( -1 + 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (7.71)$$

Результат (7.71) справедлив для *любой* метрики вида (7.59) вне зависимости от наличия или отсутствия негравитационной энергии. Обращение в нуль плотности энергии повсюду [уравнение (7.71)] подтверждается также, если для  $\tau_{\mu}^{\nu}$  использовать выражения Ландау и Лифшица (6.58) и (6.60) [12]. Использование тензора Мёллера — Мицкевича (6.62) и (6.65) приводит к до некоторой степени аналогичному результату. В случае метрики (7.59) непосредственное вычисление дает

$$\Lambda_0^0 \sqrt{-g} = \frac{c^4}{4\pi G} \left\{ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \rho^2 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] \right\}_{, \rho}. \quad (7.72)$$

Хотя это выражение и не равно тождественно нулю, однако интегральная величина энергии на единицу длины вдоль оси

$$\int \Lambda_0^0 \sqrt{-g} \, d\rho \, d\varphi = \frac{c^4}{2G} \left| \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \rho^2 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] \right|_{t=0}^{\infty} \quad (7.73)$$

для (7.67) и (7.68) обращается в нуль. Для волнового решения в виде импульса величина (7.72) в некоторых местах положительна, а в других — отрицательна. Отметим, что импульс (7.67) и (7.68) при  $t=0$  описывает пространство, асимптотически плоское при больших  $\rho$ , но не являющееся „евклидовым“, так как, согласно (7.68), на больших расстояниях выполняется  $\gamma \rightarrow B^2 a^{-2}$ . Поэтому для больших значений  $\rho$  при  $t=0$  метрика будет „конической“.

Недавно Розен [13] вычислил  $\tau_0^0$  и  $\tau_0^1$  для цилиндрических решений в „декартовой“ системе координат и обнаружил, что эти величины конечны и имеют смысл. Его вывод не противоречит заключению Мёллера о величине плотности энергии, так как для перехода от цилиндрической системы к декартовым координатам Розена, по-видимому, необходимо преобразование, включающее время. Величина же Мёллера является единственной, инвариантной при чисто пространственных преобразованиях. В цилиндрической системе координат нельзя гарантировать, что „энергия“ всегда будет положительно определенной. Если допустить для нее отрицательные значения, то обращение в нуль  $\tau_0^0$  может означать только, что поглощение энергии такой волны делает энергию этой волны отрицательной. Нижняя граница этой энергии гарантировала бы тогда устойчивость.

## 9. Взаимодействие частицы с цилиндрическими гравитационными волнами

Вычисление компонент тензора Римана для метрики (7.59) показывает, что в случае цилиндрических волн не все эти компоненты равны нулю, так что такие волны должны быть реальными. В этом разделе, анализируя движение первоначально покоившейся частицы, взаимодействующей с цилиндрическим импульсом, мы покажем, что цилиндрические волны несут энергию. Запишем уравнение геодезической для координаты  $\rho$

и будем его последовательно интегрировать, рассматривая  $\psi$  как величину первого, а  $\gamma$  — как величину второго порядка. Пусть

$$\rho = \rho_{(0)} + \rho_{(1)} + \rho_{(2)} + \dots \quad (7.74)$$

Из метрики (7.59) следует, что

$$c \frac{dt}{ds} = 1 + \psi - \gamma + \frac{\psi^2}{2} + \dots + \frac{(d\rho/ds)^2}{2} + \dots \quad (7.75)$$

Эти соотношения приводят к уравнению

$$\frac{d^2 \rho_{(1)}}{dt^2} = c^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -Bc^2 \rho_{(0)} \left\{ [(a - ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{-3/2} + \right. \\ \left. + [(a + ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{-3/2} \right\} \quad (7.76)$$

для первого порядка и к уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \rho_{(2)}}{dt^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d\rho_{(1)}}{dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{\rho_{(0)}} - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_{\rho_{(0)}} + \rho_{(1)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_{(0)}} \quad (7.77)$$

для второго порядка. Получая эти уравнения, мы приписали во внимание соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_{\rho_{(0)}} + \rho_{(1)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_{(0)}}.$$

Интегрирование (7.76) с граничным условием  $d\rho/dt = 0$  при  $t = -\infty$  дает

$$\frac{d\rho_{(1)}}{dt} = \frac{icB}{\rho_{(0)}} \left[ \frac{a - ict}{[(a - ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{1/2}} - \frac{a + ict}{[(a + ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{1/2}} \right]. \quad (7.78)$$

Изменение  $\rho$  при переходе от  $t = -\infty$  к  $t = 0$  можно выразить как

$$\Delta \rho = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{t'} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) dt' dt = \frac{2B}{\rho_{(0)}} [(\rho_{(0)}^2 + a^2)^{1/2} - a] \rightarrow 2B \quad (7.79)$$

для больших  $\rho$ . Величина расстояния от оси при  $t = 0$  и больших  $\rho$  равна

$$\int g_{11}^{1/2} d\rho = \int_0^{\rho_0 + \Delta \rho} e^{+\gamma - \psi} d\rho \approx \rho_{(0)} + 2B - 2B \ln \frac{2\rho_{(0)}}{a}. \quad (7.80)$$

Полученные выражения (7.78) — (7.80) с точностью до первого порядка показывают, что первоначально покоившаяся частица в момент встречи с волной приходит в движение. Изменение координаты  $\rho$  к моменту максимального схождения волны равно  $+2B$ , однако изменение расстояния в этот момент составляет  $2B - 2B \ln(2\rho_{(0)}/a)$ . По мере обратного схождения нашей волны эти движения повторяются в обратном порядке (в данном приближении), так что при  $t = +\infty$  частица вновь оказывается в состоянии покоя на своем прежнем месте. Однако можно представить себе случай, когда наша частица связана с другой частицей, расположенной вдали от нее, при помощи некоторого механизма, приводящего к необратимости<sup>1)</sup>. Тогда их относительное движение приведет к поглощению энергии волны даже в первом приближении.

Чтобы рассмотреть второе приближение, необходимо проинтегрировать (7.77); это приведет к появлению двадцати двух интегралов. Нам нужно найти значение скорости при  $t \rightarrow +\infty$ . Как легко показать, отличными от нуля в этом случае окажутся лишь три интеграла (интегрирование проводится по контуру на комплексной плоскости), и мы получим в результате

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho_{(2)}}{dt}\right)_{t \rightarrow +\infty} = & -\frac{4B^2}{\rho_{(0)}} (a^2 + \rho_{(0)}^2)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{[(a + ict)^2 + \rho_{(0)}^2] \times \\ & \times [(a - ict)^2 + \rho_{(0)}^2]\}^{-3/2} \cdot c^2 dt + \\ & + \frac{12a^2 B^2}{\rho_{(0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{[(a + ict)^2 + \rho_{(0)}^2] [(a - ict)^2 + \rho_{(0)}^2]\}^{-3/2} \cdot c^4 t^2 dt + \\ & + 6\rho_{(0)} B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [(a - ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{1/2} [(a + ict)^2 + \rho_{(0)}^2]^{-5/2} \cdot c^2 dt. \quad (7.81) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> В следующей главе мы покажем, что энергия всегда может быть поглощена из системы, в которой фурье-образ  $R_{l_0 j_0}$  в локальной лоренцевой системе координат с осями, направленными вдоль геодезических, отличен от нуля.

Эти интегралы можно выразить через

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - z \sin^2 \theta]^{1/2}}, \quad z = \frac{\rho_{(0)}^2}{a^2 + \rho_{(0)}^2}, \quad (7.82)$$

так как

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\rho}{c dt} \right)_{t \rightarrow +\infty} = \\ & = B^2 F \left[ \frac{-4}{\rho_{(0)} (a^2 + \rho_{(0)}^2)^{1/2}} + \frac{5\rho_{(0)}}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{3/2}} + \frac{3\rho_{(0)} (5a^2 + \rho_{(0)}^2)}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{5/2}} \right] \\ & + B^2 \frac{dF}{dz} \left[ \frac{4(a^2 - \rho_{(0)}^2)}{\rho_{(0)} (a^2 + \rho_{(0)}^2)^{3/2}} + \frac{12a^2}{\rho_{(0)} (a^2 + \rho_{(0)}^2)^{5/2}} - \right. \\ & \frac{8(a^2 - \rho_{(0)}^2)\rho_{(0)}}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{5/2}} - \frac{9\rho_{(0)}(5a^4 + 6a^2\rho_{(0)}^2 + \rho_{(0)}^4)}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{7/2}} - \\ & \left. - \frac{12\rho_{(0)}(5a^2 + \rho_{(0)}^2)(a^2 - \rho_{(0)}^2)}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{7/2}} - 3\rho_{(0)}(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{-3/2} \right] + \\ & + B^2 \frac{d^2F}{dz^2} \left[ \frac{\rho_{(0)}(a^2 + \rho_{(0)}^2)^3(a^2 - \rho_{(0)}^2)^2}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{13/2}} + \right. \\ & + \frac{3\rho_{(0)}(5a^4 + 6a^2\rho_{(0)}^2 + \rho_{(0)}^4)(a^2 - \rho_{(0)}^2)}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{9/2}} + \\ & \left. + \frac{3\rho_{(0)}(5a^2 + \rho_{(0)}^2)(a^2 - \rho_{(0)}^2)^2}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{9/2}} + \frac{\rho_{(0)}(a^2 - \rho_{(0)}^2)^2}{(a^2 + \rho_{(0)}^2)^{5/2}} \right]. \quad (7.83) \end{aligned}$$

Это громоздкое выражение сводится в предельных случаях больших и малых  $\rho_{(0)}$  при  $t \rightarrow \infty$  к

$$\frac{d\rho_{(2)}}{dt} \rightarrow -\frac{2\pi B^2 c \rho_{(0)}}{a^3} \quad \left( \frac{\rho_{(0)}}{a} \ll 1 \right) \quad (7.84)$$

и

$$\frac{d\rho_{(2)}}{dt} \rightarrow -\frac{2B^2 c}{a^2} \quad \left( \frac{a}{\rho_{(0)}} \ll 1 \right). \quad (7.85)$$

Выражения (7.84) и (7.85) показывают, что после прохождения волны, когда внутреннее пространство снова стано-

вится плоским, частица сохраняет остаточную скорость <sup>1)</sup> относительно центральной оси. Эта ось играет существенную роль в нашей задаче, так как пробная частица может быть помещена на ней; в этом случае она, согласно (7.79), не приобретает остаточного движения. Поэтому наблюдение частицы, обладающей радиальной координатой  $\rho$ , предполагает наблюдение относительного движения пары частиц.

Заклучения, подобные изложенным здесь, были независимо получены Мардером [1]. Он продолжил решение в виде импульса внутрь цилиндрической массы, являющейся излучателем. Оказалось, что масса цилиндра уменьшилась после излучения импульса.

## 10. Точные решения для плоских волн <sup>2)</sup>

Плоские гравитационные волны рассматривались рядом авторов. Тауб [15] и Мак-Витти [16] показали, что неполяризованных плоских волн не существует. Робинсону и позднее

<sup>1)</sup> Такая скорость дает по прошествии бесконечного времени бесконечное смещение. Однако это обстоятельство не сказывается на справедливости нашего разложения в ряд, которое производится по степеням  $B/a$ .

<sup>2)</sup> Эти волны оказываются не плоскими, так как при распространении в направлении оси  $x$  отклонение пространства от плоского зависит от  $y$  и  $z$ . Бонди называет их плоскими ввиду того, что они обладают той же степенью симметрии, что и плоские электромагнитные волны. Типы метрик такого рода допускают группу движений с пятью параметрами.

Мы приведем здесь поучительную трактовку этих решений, данную Бошнором [14]. Рассмотрим метрику

$$-ds^2 = A d\xi^2 + B dy^2 + C dz^2 - 2b dy dz - D d\tau^2.$$

Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $b$  и  $D$  являются функциями только  $\xi - \tau$ .

Выберем такие координаты, чтобы  $A = D$ ; тогда, полагая  $\xi \rightarrow \tau - x$ ,  $\eta \rightarrow \tau + x$ , получаем

$$-ds^2 = -dx d\tau + B dy^2 + C dz^2 - 2b dy dz.$$

Здесь  $B$ ,  $C$  и  $b$  зависят только от  $x$ .

Для такой метрики одно из уравнений поля в вакууме имеет вид

$$R_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{2\chi} \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$

где  $\chi = BC - b^2$ . Другие уравнения поля в вакууме выполняются независимо от вида  $B$ ,  $C$  и  $b$ . Таким образом, для трех неизвестных функций мы имеем лишь одно уравнение. Следовательно, две

Бонди удалось показать [17, 18], что уравнения поля допускают существование „плоских“ волновых зон конечной протяженности между двумя областями плоского пространства времени. Они исходили из метрики, первоначально предложенной Розеном:

$$ds^2 = e^{2\Omega} (d\tau^2 - dz^2) - u^2 (e^{2\beta} d\eta^2 + e^{-2\beta} d\xi^2), \quad (7.86)$$

где  $u = \tau - \xi$ . Функции  $\beta$  и  $\Omega$  зависят лишь от  $u$ , причем  $2\Omega_{,u} = u(\beta_{,u})^2$ . Эта метрика удовлетворяет уравнениям поля в вакууме  $R_{\mu\nu} = 0$ . Вообще говоря, она описывает искривленное пространство, но, если удовлетворяется соотношение

$$u\beta_{,u,u} + 2\beta_{,u} = u^2(\beta_{,u})^3, \quad (7.87)$$

то все компоненты  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  обращаются в нуль и пространство становится плоским. Если произвести преобразование координат

$$u = \tau - \xi = ct - x, \quad e^{2\Omega} (\tau + \xi) = ct + x - u^{-1} (y^2 + z^2), \\ \eta e^\beta = y, \quad \xi e^{-\beta} = z$$

из них можно выбрать произвольно. Пусть  $b = 0$ ,  $B = p^2$  и  $C = q^2$ . Тогда уравнение для  $R_{11}$  примет вид

$$\frac{1}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0.$$

Возьмем в качестве частного решения этого уравнения  $p = \sin nx$ ,  $q = \operatorname{sh} nx$ , где  $n$  — вещественная константа. Это решение будет иметь особенности на гиперповерхностях  $x = m\pi/n$ ,  $x = \pm\infty$ , где  $m$  — целое число.

Эти особенности можно устранить с помощью следующего преобразования:

$$x^0 = \tau + ny^2 \sin nx \cos nx + nz^2 \operatorname{sh} nx \operatorname{ch} nx, \\ x^1 = x, \\ x^2 = y \sin nx, \\ x^3 = z \operatorname{sh} nx,$$

после которого метрика принимает вид

$$-ds^2 = -dx^0 dx^1 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2 - n^2 dx^1{}^2 (x^2{}^2 - x^3{}^2).$$

Теперь особенности при  $x = m\pi/n$  отсутствуют. Особенности на бесконечности могут быть также устранены путем выбора нового начала координат.



при  $u > 0$ , то метрика (7.86) примет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \\ + 2\beta_{,u} \left[ (y dy - z dz)(c dt - dx) - (y^2 - z^2) \frac{(c dt - dx)^2}{ct - x} \right] - \\ - (\beta_{,u})^2 (c^2 t^2 - x^2)(c dt - dx)^2. \quad (7.88)$$

В случае  $\beta_{,u} = 0$  везде, кроме области конечных положительных значений  $u$ , между двумя областями плоского пространства существует область искривленного. Амплитуда волны определяется величиной  $\beta$ , представляющей собой произвольную функцию  $u$ .

Второй тип воли описывается метрикой

$$ds^2 = e^{2\Omega} (d\tau^2 - d\xi^2) - (\tau - \xi)^2 [\text{ch } 2\beta (d\eta^2 + d\zeta^2) + \\ + \text{sh } 2\beta \cos 2\theta (d\eta^2 - d\zeta^2) - 2 \text{sh } 2\beta \sin 2\theta d\eta d\zeta], \quad (7.89)$$

где величины  $\Omega$ ,  $\beta$  и  $\theta$  снова зависят от  $u = \tau - \xi$ , причем

$$2\Omega_{,u} = (\tau - \xi) [\beta_{,u}^2 + \theta_{,u}^2 \text{sh}^2 2\beta]. \quad (7.90)$$

Бонди отметил, что на границах могут удовлетворяться условия Лишнеровица, накладываемые на непрерывность  $g_{\mu\nu}$  и ее первых производных. (Эти условия будут приведены ниже в этой главе.)

## 11. Формулировка начальных значений в теории излучения<sup>1)</sup>

Другой подход к задаче о гравитационных волнах состоит в том, что уравнения поля можно рассматривать как способ задания условий, накладываемых на начальные значения<sup>1)</sup> потенциалов полей<sup>2)</sup>, позволяющий затем предсказать, какова будет последующая эволюция этих полей. Тогда исследование допустимых начальных значений отвечает на вопрос о виде возможных волновых решений [21, 22].

Хорошо известен аналогичный подход к уравнениям Максвелла. При отсутствии зарядов и токов уравнения

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{H}) = 0 \quad (7.91)$$

<sup>1)</sup> Такие исследования впервые были проделаны Лишнеровицем [19] и Фуре-Брюа [20].

<sup>2)</sup> Этот раздел представляет собой в известной мере резюме диссертации Д. Брилла (Принстонский университет, 1959).

образуют условия для  $E$  и  $H$ , скажем, при  $t=0$ . Тогда остальные уравнения

$$[\nabla \times E] = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad [\nabla \times H] = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (7.92)$$

описывают эволюцию поля во времени, оставляя условия (7.91) справедливыми в течение всего последующего процесса.

Рассматривая уравнения общей теории относительности, мы можем выбрать в качестве начальной поверхности пространственноподобную гиперповерхность  $x^0=0$ . Наши уравнения содержат вторые производные по времени, так что в качестве начальных значений следует взять величины  $g_{\mu\nu}$  и их первые производные по времени. С помощью свернутых тождеств Бианки запишем для тензора Эйнштейна

$$G_{\mu;0}{}^0 = -G_{\mu}{}^l{}_{;l} \quad (7.93)$$

и

$$G^{\mu 0}{}_{;0} = -G^{\mu l}{}_{;l}. \quad (7.94)$$

В уравнениях (7.93) и (7.94) справа отсутствуют производные по времени выше второго порядка, откуда следует, что  $G^{\mu 0}$  и  $G_{\mu}{}^0$  не могут включать производных по времени от  $g_{\mu\nu}$  выше первого порядка. Тензор энергии — импульса — натяжений производных от  $g_{\mu\nu}$  не содержит. Отсюда следует, таким образом, что четыре уравнения

$$R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} \quad (7.95)$$

или

$$R_0{}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_0{}^{\mu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_0{}^{\mu} \quad (7.96)$$

можно принять в качестве уравнений для начальных значений, а шесть уравнений

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij} \quad (7.97)$$

или

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (7.98)$$

являются уравнениями, описывающими эволюцию поля во времени.

Теперь можно показать, что если система (7.95) или (7.96) удовлетворяется в начальный момент, то любое решение, полученное интегрированием (7.97) или (7.98), будет удовлетворять уравнениям начальных значений (7.95) или (7.96) во все последующие моменты времени. Положим

$$X^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (7.99)$$

Поскольку ковариантная дивергенция от  $T^{\mu\nu}$  обращается в нуль, то, исходя из (7.94), можно записать

$$X^{\mu 0};_0 = -X^{\mu l};_l; \quad (7.100)$$

при  $\mu = k$  соотношение (7.100) принимает вид

$$\begin{aligned} X^{k0};_0 &= X^{k0};_0 + \Gamma^k_{\alpha 0} X^{\alpha 0} + \Gamma^0_{\alpha 0} X^{k\alpha} = \\ &= (X^{ki};_l + \Gamma^k_{\alpha l} X^{\alpha l} + \Gamma^l_{\alpha l} X^{\alpha k}), \end{aligned} \quad (7.101)$$

а при  $\mu = 0$  (7.100) дает

$$\begin{aligned} X^{00};_0 &= X^{00};_0 + \Gamma^0_{\alpha 0} X^{\alpha 0} + \Gamma^0_{\alpha 0} X^{0\alpha} = \\ &= -(X^{0i};_l + \Gamma^0_{\alpha l} X^{\alpha l} + \Gamma^l_{\alpha l} X^{\alpha 0}). \end{aligned} \quad (7.102)$$

Рассмотрим сначала выражение (7.101). При  $t = 0$  величина  $X^{\mu\nu}$  повсюду обращается в нуль, так что пространственные производные  $X^{ki};_l$  также равны нулю. Отсюда можно заключить, что в начальный момент времени величина  $X^{k0};_0$  равна нулю. Рассмотрим теперь (7.102). Так как  $X^{\mu\nu}$  и  $X^{0l};_l$  повсюду равны нулю в момент  $t = 0$ , то величина  $X^{0l};_l$  также равна нулю. Поэтому начальное значение  $X^{00};_0$  равно нулю. Возьмем теперь частную производную по времени от (7.101). Это даст возможность показать, что начальное значение  $X^{k0};_{00}$  также равно нулю. Дифференцируя по времени (7.102), обнаруживаем, что в начальный момент времени  $X^{0l};_0$  равен нулю, в силу чего  $X^{0i};_{0l}$  также равен нулю, а это в свою очередь гарантирует равенство нулю в начальный момент  $X^{00};_{00}$ . Продолжая дифференцирование, мы установим, что в начальный момент как величина  $X^{\mu 0}$ , так и все ее частные производные по времени равны нулю. Тогда разложение  $X^{\mu 0}$  в ряд Тейлора приводит к заключению, что величина  $X^{\mu 0}$  вообще равна нулю в любой момент времени.

## 12. Симметричное во времени решение с положительной энергией

Тензор  $T$  называют симметричным во времени, если

$$T_{\alpha\beta\dots\gamma^{\delta\dots}}(x^0, x^i) = (-1)^n T_{\alpha\beta\dots\gamma^{\delta\dots}}(-x^0, x^i), \quad (7.103)$$

где  $n$  представляет собой число повторений нуля среди индексов  $\alpha\beta\gamma\delta\dots$ .

Мы увидим, что введение такого свойства симметрии существенно облегчает решение системы (7.95) или (7.96). Для симметричного во времени решения величина  $ds^2$  одинакова для пар событий, характеризующихся одинаковыми дифференциалами координат и соответственно расположенных в моменты  $+x^0$  и  $-x^0$ , так что  $g_{t0} = 0$ . Все рассматриваемые тензоры в данном случае должны обладать аналогичным видом симметрии. Отсюда следует, что уравнения  $R^{0i} - \frac{1}{2}g^{0i}R = (8\pi G T^{0i}/c^4)$  удовлетворяются автоматически, так как  $R^{0i}$ ,  $g^{0i}$  и  $T^{0i}$  равны нулю. Соотношения, накладываемые на начальные значения, сводятся к одному уравнению

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0. \quad (7.104)$$

Уравнение (7.104) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} R_0^0 - \frac{1}{2}(R_0^0 + R_l^l) &= \frac{1}{2}[R_{t0}^{t0} - (R_{t0}^{t0} + R_{lk}^{lk})] = \\ &= -\frac{1}{2}R_{lk}^{lk} = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0. \end{aligned} \quad (7.105)$$

В системе с ортогональной временной координатой  $R_{lk}^{lk}$  сводится к  ${}^{(3)}R$  — скалярной кривизне, вычисляемой через трехмерную метрику. Это следует из равенства  $R_{lk}^{lk} = R_{ik\alpha\beta}g^{i\alpha}g^{k\beta}$ . Так как  $l$  и  $k$  — пространственные индексы, а  $g^{t0} = 0$ , то отсюда следует, что величина  $R_{lk}^{lk}$  составлена лишь из суммы пространственных производных от компонент метрики  $g_{ij}$  с пространственными индексами. Тогда уравнения для начальных значений принимают вид

$${}^{(3)}R + \frac{16\pi G}{c^4}T_0^0 = 0. \quad (7.106)$$

В вакууме в случае „чистых“ гравитационных волн (7.106) принимает вид

$${}^{(3)}R = 0. \quad (7.107)$$

Рассмотрим решения уравнения (7.107). Такие допустимые начальные значения позволяют выяснить важные характерные свойства полного решения. Брилл исследовал свойства решений следующим образом. Пусть  $g'_{\mu\nu}$  — искомая метрика, удовлетворяющая уравнению  ${}^{(3)}R' = 0$ . Пусть  $ds'^2$  получается из другой метрики ( $ds^2$ ) с помощью соотношения

$$ds'^2 = e^{2P} ds^2. \quad (7.108)$$

Обозначаемую без штриха метрику  $g_{\mu\nu}$  назовем основной метрикой. Величина  $P$  пусть будет функцией координат. Тогда преобразование (7.108) можно рассматривать как новый вид операции, при которой в противоположность использовавшимся ранее преобразованиям координат интервал *меняет* свое значение. В каждой точке дифференциал любого интервала изменится на множитель  $e^P$ . Отсюда следует, что форма малых треугольников или любых малых фигур вообще не изменится. По этой причине преобразования (7.108) называются конформными. Можно показать, что величина  $R'$  выражается через скалярную кривизну  $R$  (основной метрики) следующим образом [23]:

$$R' = e^{-2P} [R + (n-1)(2\Delta P + (n-2)(\nabla P)^2)]. \quad (7.109)$$

В (7.109) число  $n$  представляет собой число измерений пространства, а

$$\Delta P = g^{ij}P_{;i;j}, \quad (\nabla P)^2 = g^{ij}P_{;i}P_{;j}$$

В нашем случае мы имеем дело с  $R'$  для трехмерного пространства, так что  $n = 3$ . Удобно произвести подстановку

$$\Psi = e^{[(n-2)/2]P}. \quad (7.110)$$

Тогда при  $R' = 0$  равенства (7.109) и (7.108) примут вид

$$ds'^2 = \Psi^4 ds^2, \quad \Delta\Psi + \frac{1}{8} {}^{(3)}R\Psi = 0. \quad (7.111)$$

Подробное исследование уравнений (7.111) привело Брилла к заключению, что существуют решения (7.111), для которых величина  $\Psi$  регулярна и нигде не обращается в нуль<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Второе уравнение (7.111) имеет вид уравнения Шредингера в искривленном пространстве, для которого приведенное решение хорошо известно.

а соответствующая метрика асимптотически ведет себя как

$$ds'^2 \rightarrow \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + g_{00} c^2 dt^2. \quad (7.112)$$

Функцию  $\Psi$  можно асимптотически разложить в ряд  $A + B_l n^{-l}$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots$ . Исследование (7.111) показывает также, что первый не исчезающий член разложения  $R$  ведет себя как  $r^{-4}$ . Равенство (7.112) дает однозначный способ определения массы — энергии любой волны, которая допускает разложение по обратным степеням  $r$ , так что применимо равенство (7.112). Брилл обнаружил, что такая „шварцшильдовская“ масса является положительно определенной величиной в случае аксиально симметричных полей<sup>1)</sup>. Чтобы доказать это утверждение, следует разделить второе уравнение в (7.111) на  $\Psi$  и произвести интегрирование:

$$\int \frac{\Delta \psi}{\psi} \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x = \int_{\text{по поверхности}} \frac{\Delta \psi}{\psi} dS + \\ + \int_{\text{по объему}} \left(\frac{\nabla \psi}{\psi}\right)^2 \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x = -\frac{1}{8} {}^{(3)}R \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x. \quad (7.113)$$

Так как

$$\psi^4 \rightarrow 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} \quad \text{и} \quad \psi \rightarrow 1 + \frac{Gm}{2c^2 r},$$

то

$$\int \frac{\nabla \psi}{\psi} dS \rightarrow -\frac{2\pi Gm}{c^2}. \quad (7.114)$$

Из (7.113) и (7.114) следует, что

$$\frac{2\pi Gm}{c^2} = \int \left(\frac{\nabla \psi}{\psi}\right)^2 \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x + \frac{1}{8} \int {}^{(3)}R \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x. \quad (7.115)$$

В случае цилиндрической симметрии метрику можно записать в виде

$$ds'^2 = \psi^4 [e^{2q} (d\varphi^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] = \psi^4 ds^2. \quad (7.116)$$

<sup>1)</sup> Араки [22] показал, что в приближении слабого поля энергия является положительно определенной величиной вне зависимости от предположения об аксиальной симметрии.

Здесь величина  $q$  асимптотически убывает по крайней мере как  $1/r^2$ , где  $r^2 = \rho^2 + z^2$ . Как  $q$ , так  $\psi, \rho$  и  $q, \rho$  обращаются в нуль на оси  $z$ .

Для основной метрики [заключенной в (7.116) в скобки] величина интеграла  $\int {}^{(3)}R \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x$  может быть найдена непосредственно. Она стремится к нулю, если радиус большой сферы с центром в начале координат устремить к бесконечности. Отсюда следует, что массу (7.115) можно записать так:

$$m = \frac{c^2}{2\pi G} \int \left( \frac{\nabla\psi}{\psi} \right)^2 \sqrt{{}^{(3)}g} d^3x. \quad (7.117)$$

Так как величина  $\psi$  нигде не равна нулю, получаемая из (7.117) „шварцшильдовская“ масса имеет определенное значение и положительно определена для обладающих аксиальной симметрией локальных возмущений, сходящихся к оси при отрицательных  $t$  и расходящихся от нее при положительных  $t$ . Законы сохранения обеспечивают инвариантность  $m$  до и после момента временной симметрии. Более того, из (7.117) и (7.112) видно, что эта масса может быть равна нулю лишь в случае плоского пространства.

### 18. Условия дифференцируемости и непрерывности многообразий

До сравнительно недавнего времени, как правило, требовали, чтобы весь пространственно-временной континуум покрывался одной неособенной системой координат. Однако выяснилось, что такое ограничение не необходимо. Можно использовать более чем одну систему координат, если в области их перекрытия можно удовлетворить определенным условиям. Область, в которой используется одна из координатных систем, иногда называют координатным включением.

Лишнеровиц [19] детально исследовал условия, которые должны выполняться для того, чтобы решения уравнений гравитационного поля были единственными в случае  $T_{\mu\nu} = 0$ . Он потребовал, чтобы на пересечении двух координатных включений локальные координаты точки в одной системе координат были четырехкратно дифференцируемы по коор-

динатам другой системы и чтобы якобиан, построенный из таких производных, не был равен нулю. Первые и вторые частные производные должны быть непрерывны; третьи и четвертые частные производные должны быть по меньшей мере кусочно-непрерывны. Метрический тензор должен быть непрерывным, и его первые частные производные также должны быть непрерывны. Вторые и третьи частные производные метрического тензора должны быть по меньшей мере кусочно-непрерывны. Этим условиям метрический тензор должен удовлетворять повсюду.

#### 14. Шестимерная трактовка теории гравитационного излучения

Пирани [24] провел интересный анализ проблемы гравитационного излучения, основанный на работе Петрова [25] и обобщении идей, известных из теории электромагнитного излучения. В случае вакуума

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (7.118)$$

Рассмотрим сначала гравитационную волну, на фронте которой тензор Римана терпит разрыв. Предложенные Лишперовицем условия непрерывности, накладываемые на метрический тензор и его частные производные, обеспечивают единственность такого решения. Рассмотрим некоторую заданную точку в системе координат, такую, что тензор  $g_{\mu\nu}$  дает в этой точке лоренцову метрику, символы Кристоффеля обращаются в нуль и разрыв на волновом фронте движется в направлении оси  $x^1$ . Перейдем к новым координатам  $\xi$  и  $\zeta$  с помощью преобразования

$$\xi = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}, \quad (7.119)$$

$$\zeta = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}. \quad (7.120)$$

Линейный элемент в нашей точке принимает вид

$$ds^2 = 2 d\xi d\zeta - dx^2 - dx^3. \quad (7.121)$$



Поверхность разрыва определяется равенством  $d\xi = 0$ . Тогда тензор  $g_{\mu\nu}$  и его первые производные должны быть непрерывными, вследствие чего непрерывными должны быть и производные  $\partial^2 g_{\mu\nu} / \partial \xi^2 \partial \xi^r$ . Однако величины

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \xi^2} \quad (7.122)$$

не должны быть обязательно непрерывными. Исследование выражения для ковариантного тензора Римана  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , подобное проведенному в п. 2, показывает, что в этой специальной системе координат разрыв тензора Римана можно описать с помощью одних только величин  $\partial^2 g_{22} / \partial \xi^2$ ,  $\partial^2 g_{33} / \partial \xi^2$  и  $\partial^2 g_{23} / \partial \xi^2$ . Причем для этого достаточно всего двух переменных  $\sigma$  и  $\varphi$ , имеющих вид

$$\sigma = \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \xi^2} = - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \xi^2}, \quad \varphi = \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial \xi^2}. \quad (7.123)$$

Величину  $\varphi$  можно обратить в нуль путем соответствующего выбора осей на плоскости 2 3.

Шестимерный формализм оказывается удобным для классификации разрывов тензора Римана и в других целях. Мы снова выбираем координаты таким образом, чтобы шестимерное пространство имело псевдоевклидову метрику в заданной точке, причем

$$\delta_{AB} = (1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Физические компоненты заданного тензора в точке определяются через компоненты, измеренные наблюдателем, находящимся в локально лоренцовой системе. Если величины  $H_{\alpha\beta}$  являются физическими компонентами антисимметричного тензора, то соответствующий 6-вектор можно получить путем перенумерации индексов по правилу

$$\begin{array}{cccccc} \alpha\beta & 23 & 31 & 12 & 10 & 20 & 30 \\ A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad (7.124)$$

Физические компоненты тензора Римана  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  связываются с симметричным 6-тензором  $R_{AB}$  также с помощью приведенного правила, причем берутся пары индексов  $\alpha\beta$  и  $\gamma\delta$ . Тогда

скачок тензора Римана можно записать так:

$$\Delta R_{AB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & -\varphi & 0 & -\varphi & \sigma \\ 0 & -\varphi & \sigma & 0 & \sigma & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi & \sigma & 0 & \sigma & \varphi \\ 0 & \sigma & \varphi & 0 & \varphi & -\sigma \end{vmatrix}. \quad (7.125)$$

Этот вывод следует из условий Лишнеровица. Сравнение величины (7.125) с выражениями п. 2 показывает, чего следует ожидать, а именно, — если волна представляет собой разрыв в плоскости, движущейся в направлении оси  $x^1$ , то отличные от нуля компоненты тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  совпадают с записанными в (7.27).

Вспомним теперь некоторые свойства потока энергии в электродинамике с тем, чтобы обобщить их на случай гравитационного поля. Для покоящегося в лоренцевой системе наблюдателя вектор Пойнтинга равен  $T_{0i}$ , где  $T_{\mu\nu}$  — электромагнитный тензор энергии — импульса — натяжений. Рассмотрим аналог вектора Пойнтинга  $P_\rho$ . Ковариантное выражение для  $P_\rho$ , справедливое для наблюдателя, движущегося с четырехмерной скоростью  $U_\rho$ , можно записать в виде

$$P_\rho = (\delta_\rho^\mu - U_\rho U^\mu) T_{\mu\nu} U^\nu. \quad (7.126)$$

Наблюдатели, движущиеся со скоростью волны, не обнаруживают потока энергии, так что для них (7.126) равняется нулю. Это приводит к равенству

$$T_{\rho\nu} U^\nu = (T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu) U_\rho. \quad (7.127)$$

Из (7.127) следует, что наблюдатель, не обнаруживающий потока энергии, обладает скоростью  $U^\nu$ , представляющей собой собственный вектор электромагнитного тензора энергии  $T_{\rho\nu}$ . Если электромагнитное поле есть поле излучения, то тензор напряженности удовлетворяет соотношениям  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$  и  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} = 0$ . Такое поле называется нулевым. Исследование электромагнитного тензора энергии показывает, что если поле является нулевым, то  $T_{\mu\nu}$  имеет единственный нулевой собственный вектор  $\xi^\rho$ , соответствующий нулевому соб-

ственному значению. Таким образом, в электродинамике поле излучения представляет собой такое поле, которому соответствует тензор энергии — импульса — натяженный с нулевым собственным значением. Так как все четыре вектора скорости являются единичными, то отсюда следует, что вектор Поинтинга не может быть устранен с помощью преобразования координат типа оттранформирования.

Рассмотрим сходную ситуацию в случае гравитационного поля, определяя собственные бивекторы тензора Римана  $R_{\mu\nu}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} P^{\rho\sigma} &= \lambda P_{\mu\nu}, \\ R_{AB} P^B &= \lambda P_A. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Величина  $P_{\mu\nu}$  антисимметрична и записывается как  $a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$ . Единичные векторы  $a_\mu$  и  $b_\nu$  определяют двумерное пространство. Другие два пространственных измерения, полностью ортогональные двум первым, также определены через  $P_{\mu\nu}$ . Выражение „полностью ортогональные“ означает, что любой вектор первого двумерного пространства ортогонален любому вектору второго двумерного пространства. Пары двумерных пространств, соответствующие различным собственным бивекторам, могут пересекаться таким образом, что в каждой точке пересечения определяется 4-вектор, касательный к образуемой таким пересечением кривой. Эти 4-векторы называют главными векторами Римана. Если риманов главный вектор является нулевым, то говорят, следуя Пирани, что данное гравитационное поле есть поле излучения.

Петров [25] показал, что при соответствующей ориентации координатных осей, такой, что метрика в данной точке оказывается лоренцевой, тензор Римана может быть приведен к каноническому виду одного из следующих трех типов:

Тип I:

$$R_{AB} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & -\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \alpha_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^3 \beta_k &= 0. \end{aligned} \quad (7.129)$$

Тип II:

$$R_{AB} = \begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \sigma & 0 & 0 & \beta & \sigma \\ 0 & 0 & \alpha + \sigma & 0 & \sigma & \beta \\ -2\beta & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \sigma & 0 & \sigma - \alpha & 0 \\ 0 & \sigma & \beta & 0 & 0 & -\alpha - \sigma \end{vmatrix} \quad (7.130)$$

Тип III:

$$R_{AB} = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (7.131)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  представляют собой скалярные инварианты тензора Римана. Значение  $\sigma$  зависит от ориентации осей на плоскости<sup>1)</sup> 1 0.

Исследование этих типов полей показало, что тип I имеет один временноподобный и три пространственноподобных главных вектора; тип II — один нулевой главный вектор и два пространственноподобных. Тип III имеет лишь один главный вектор — нулевой. Таким образом, критерий Пирани сводится к тому, что гравитационное излучение имеет место, когда тензор Римана относится к типу II (нулевому) или к типу III, но не к типу I.

Если в каждой точке пространства, метрика которого является шварцшильдовской, ввести лоренцову систему координат с осями, параллельными исходным координатным осям,

<sup>1)</sup> Ввиду очевидной симметрии допустимо также использование  $3 \times 3$ -матриц. Обозначив верхнюю левую  $3 \times 3$ -матрицу через  $M$ , а верхнюю правую  $3 \times 3$ -матрицу через  $N$ , заметим, что основные свойства следуют из матрицы  $M + iN$ .

то в этом случае тензор Римана будет принадлежать к описанному выше типу I, с

$$-\frac{1}{2}\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{GM}{c^2 r^3}, \quad \beta_k = 0.$$

В случае метрики Эйнштейна — Розена аналогичное преобразование приводит к типу II, для которого

$$\sigma = \frac{1}{c} (\psi_{, \rho, t} + 5\psi_{, \rho} \psi_{, t} + \psi_{, t} \gamma_{, \rho} - 3\psi_{, \rho} \psi_{, t}).$$

Необходимо подчеркнуть, что при использовании классификационной схемы Петрова компоненты тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в каждой заданной точке следует вычислять в локально лоренцевой системе координат.

„Нормальной“ координатной системой называют такую конкретную систему, в которой в окрестности одной точки справедлива метрика Лоренца, первые производные  $g_{\mu\nu}$  равны нулю и вторые производные  $g_{\mu\nu}$  имеют специальный вид. В полюсе такой системы должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} x^\mu &= 0, \\ g_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= g_{\mu\nu, \rho} = 0, \\ g_{\mu\nu, \rho\sigma} &= \frac{1}{2} (R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (7.132)$$

Пирани вычислил среднее значение плотности канонического псевдотензора энергии — импульса — натяжений

$$t_\mu{}^\nu \sqrt{-g} = \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L}_G \sqrt{-g} - g_{\rho\sigma, \mu} \frac{\partial(\mathcal{L}_G \sqrt{-g})}{\partial g_{\rho\sigma, \nu}}$$

в окрестности точки системы, определяемой условиями (7.132). Это среднее значение определяется как

$$\langle \sqrt{-g} t_\mu{}^\nu \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ (4\pi r^4)^{-1} \int t_\mu{}^\nu \sqrt{-g} d^2S \right]. \quad (7.133)$$

Такое осреднение помогает обосновать приведенное здесь определение излучения. Величина  $t_\mu{}^\nu$  выражается через  $g_{\alpha\beta, \sigma}$ , поэтому она равна нулю в полюсе любой геодезической системы координат. Однако определенная нами средняя вели-

чина не обращается в нуль, так как может иметь место вклад со стороны вторых производных  $g_{\mu\nu}$ . К сожалению, это среднее значение не имеет размерности плотности энергии. Оно представляет собой подобную энергии конструкцию, характеризующую (см. гл. 8, п. 2) меру энергии, которой может оперировать наблюдатель, движущийся со скоростью  $U^y$ , при выполнении условий (7.132). Выполнения приводят к значению

$$\langle \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} \rangle = \frac{1}{27} (\delta_{\tau}^{\rho} \delta_{\mu}^{\nu} - 2\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\tau}^{\nu}) (U^{\tau} U^{\lambda} + g^{\lambda\tau}) \times \\ \times (R^{\tau\alpha\beta}_{\phantom{\tau\alpha\beta}\mu} + R^{\tau\beta\alpha}_{\phantom{\tau\beta\alpha}\mu}) R_{\tau\alpha\beta\lambda} \left( \frac{-c^4}{16\pi G} \right). \quad (7.134)$$

Если наблюдатель покоится, а тензор Римана относится к типу I, то

$$\langle \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} \rangle = \frac{1}{27} \left\{ 2 \left[ \sum_{x=1}^3 \alpha_x^2 (\delta_{\mu}^0 \delta_0^{\nu} + 2\delta_{\mu}^x \delta_x^{\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3\delta_{\mu}^{x+1} \delta_{x+1}^{\nu} + 3\delta_{\mu}^{x+2} \delta_{x+2}^{\nu}) \right] - 9\delta_{\mu}^{\nu} \sum_{x=1}^3 \alpha_x^2 \right\} \left( \frac{-c^4}{16\pi G} \right). \quad (7.135)$$

Для тензора Римана типа II

$$\langle \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu} \rangle = \\ = \frac{1}{27} [\alpha^2 (-42\delta_{\mu}^{\nu} + 16\delta_{\mu}^1 \delta_1^{\nu} + 22\delta_{\mu}^2 \delta_2^{\nu} + 22\delta_{\mu}^3 \delta_3^{\nu}) + 4\alpha\sigma (\delta_{\mu}^2 \delta_2^{\nu} - \\ - \delta_{\mu}^3 \delta_3^{\nu}) + 8\sigma^2 (\delta_{\mu}^0 + \delta_{\mu}^1) (\delta_0^{\nu} - \delta_1^{\nu})] \frac{-c^4}{16\pi G}. \quad (7.136)$$

## 15. Другие волновые решения из типа II Петрова

Тетрада, называемая иногда 4-репером, или тетраподом (quadruped, tetrapod, vierbein, four purple) представляет собой совокупность четырех единичных векторов, которые могут быть введены в любой точке и определяют локально лоренцову систему<sup>1)</sup>. Из этих векторов три пространственно-

<sup>1)</sup> Переход к локально лоренцовой системе координат  $x'^{\alpha}$  можно совершить с помощью преобразования  $dx'^{\alpha} = \lambda_{(\alpha)\mu} dx^{\mu}$  в случае, когда

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g^{\mu\nu} = \lambda_{(\alpha)\mu} \lambda_{(\beta)\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta}.$$

подобны и перпендикулярны друг другу, а также направлению времени, определяющему четвертый вектор. Векторы такой тетрады обычно записывают как  $\lambda_{(a)}^\mu$ , где  $\mu$  — векторный индекс, а  $(a)$  задает нумерацию этих векторов.

Перес нашел другой класс волновых решений уравнений  $R_{\mu\nu} = 0$ , обладающий меньшей симметрией, чем плоские и цилиндрические волны. Его метрика имеет вид

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2F(x, y, z + \tau)(dz + d\tau)^2 - d\tau^2. \quad (7.137)$$

Уравнения поля сводятся к следующей системе:

$$R_{zz} = R_{z\tau} = R_{\tau\tau} = F_{,xx} + F_{,yy} = 0,$$

и поэтому удовлетворяются, если  $F$  — гармоническая функция. Тетрада ортонормированных векторов вводится с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \lambda_{(0)}^\mu &= (1 + F, & 0, & 0, & -F), \\ \lambda_{(1)}^\mu &= (0, & \cos a, & \sin a, & 0), \\ \lambda_{(2)}^\mu &= (0, & -\sin a, & \cos a, & 0), \\ \lambda_{(3)}^\mu &= (F, & 0 & 0 & 1 - F), \end{aligned} \quad (7.138)$$

где  $\operatorname{tg} 2a = F_{,xy}/F_{,xx}$ . Отличные от нуля компоненты тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в системе отсчета нашей тетрады равны

$$\sigma = R_{\mu 1 \nu 1} = -R_{\mu 2 \nu 2} = \sqrt{F_{,xx}^2 + F_{,xy}^2} \quad (7.139)$$

при  $\mu$  и  $\nu$ , равных только 3 или 0. Поэтому данный класс метрик относится к типу II Петрова.

В случае

$$F = (x^2 - y^2) \sin(z + \tau), \quad \sigma = 2 \sin(z + \tau) \quad (7.140)$$

мы имеем плоскую волну. Решение в виде волнового пакета имеет вид

$$\begin{aligned} F &= xy(x^2 + y^2)^{-2} \exp\{[b^2 - (z + \tau)^2]^{-2}\} & \text{при } |z + \tau| < b, \\ F &= 0 & \text{при } |z + \tau| > b. \end{aligned} \quad (7.141)$$

Мы покажем теперь, что все представляющие физический интерес волновые решения уравнений  $R_{\mu\nu} = 0$  приближаются

к типу II. Любое представляющее физический интерес волновое решение, по-видимому, возникает в случае, когда имеет место локализованное распределение материи, и поэтому будет плоским на больших (но не в космологическом смысле больших) расстояниях. Отсюда следует, что к нему применим анализ, приведенный в п. 2 гл. 7. Подчеркиваем, что наше определение локально плоской волны предполагает  $g_{\mu\nu, \alpha i} = g_{\mu\nu, \alpha j} = 0$ , где индексы  $i$  и  $j$  соответствуют двум направлениям тетрады, перпендикулярным направлению распространения волны. Десять компонент тензора Римана (7.27) можно записать в каноническом виде, согласно правилу (7.124), как

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} g_{33, 11} & \frac{1}{2} g_{23, 11} & 0 & -\frac{1}{2} g_{23, 10} & -\frac{1}{2} g_{33, 10} \\ 0 & \frac{1}{2} g_{23, 11} & -\frac{1}{2} g_{22, 11} & 0 & \frac{1}{2} g_{22, 10} & \frac{1}{2} g_{23, 10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} g_{23, 10} & \frac{1}{2} g_{22, 10} & 0 & -\frac{1}{2} g_{22, 00} & -\frac{1}{2} g_{23, 00} \\ 0 & -\frac{1}{2} g_{33, 10} & \frac{1}{2} g_{23, 10} & 0 & -\frac{1}{2} g_{23, 00} & -\frac{1}{2} g_{33, 00} \end{pmatrix}. \quad (7.142)$$

Величины  $g_{23, 10}$  и  $g_{23, 00}$  можно устранить соответствующим выбором ориентации четверки векторов отсчета. Из (7.142) видно, что рассматриваемая метрика относится к типу II, причем  $\alpha = \beta = 0$ . Отсюда следует, что все представляющие физический интерес гравитационные волны на больших расстояниях обладают метрикой, стремящейся к нулевому типу II Петрова с  $\alpha = \beta = 0$ . Так как (7.142) строго справедливо безотносительно к степени приближения, то это значит, что мы строго показали принадлежность тензора Римана к нулевому типу II Петрова во всех точках, где гравитационная волна является локально плоской [26].

Робинсон и Траутман [27] дали несколько точных сферически симметричных решений, описывающих волны и соответствующих тензору Римана, снова стремящемуся к типу II



Петрова (случай нулевого поля) на больших расстояниях. Их метрика имеет вид

$$ds^2 = 2d\rho d\sigma + \left( K - 2H\rho - \frac{2m}{\rho} \right) d\sigma^2 - \\ - \rho^2 p^{-2} [(d\xi + q_{,\eta} d\sigma)^2 + (d\eta + q_{,\xi} d\sigma)^2].$$

Здесь функция  $m$  зависит только от  $\sigma$ , а  $p$  и  $q$  зависят от  $\sigma$ ,  $\xi$  и  $\eta$ . Величина  $H$  равна

$$H = p^{-1} p_{,\sigma} + p (p^{-1} q)_{,\xi\mu} - pq (p^{-1})_{,\xi\mu};$$

$K$  означает гауссову кривизну (см. гл. 3) на поверхности  $\rho = 1$ ,  $\sigma = \text{const}$ :

$$K = p^2 [(\ln p)_{,\xi\xi} + (\ln p)_{,\eta\eta}].$$

В случае такой метрики уравнения  $R_{\mu\nu} = 0$  сводятся к

$$q_{,\xi\xi} + q_{,\eta\eta} = 0, \quad K_{,\xi\xi} + K_{,\eta\eta} = 4p^{-2}(m_{,\sigma} - 3Hm).$$

Тензор Римана можно записать в виде

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \rho^{-3} D_{\mu\nu\alpha\beta} + \rho^{-2} \text{III}_{\mu\nu\alpha\beta} + \rho^{-1} N_{\mu\nu\alpha\beta},$$

где  $D$ , III и  $N$  суть тензоры соответственно типов I (вырожденный), III и II (нулевой). Они постоянны в ковариантном смысле на любом луче, на котором  $\sigma$ ,  $\xi$  и  $\eta$  постоянны.

Полученные решения относятся к вырожденному типу I, если  $m \neq 0$ , а  $K$  не зависит от  $\xi$  и  $\eta$ ; этот случай можно привести к случаю, когда  $m = 1$ ,  $p = \text{ch } \mu\xi$  и  $q = 0$ . Величина  $\mu$  — либо действительная, либо чисто мнимая постоянная. При действительных отличных от нуля  $\mu$  получается решение Шварцшильда.

При  $(K_{,\xi})^2 + (K_{,\eta})^2 \neq 0$  и  $R_{\mu\nu} = 0$  решения относятся к ненулевым полям типа II или к полям типа III, причем тип III имеет место при  $m = 0$ . Если же  $m = 0$  и  $K$  не зависит от  $\xi$  и  $\eta$ , то решение относится к типу II и будет нулевым, либо плоским, причем случай плоского пространства определяется условием

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left[ p^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) H \right] = 0.$$

Можно построить решения, периодические по  $\sigma$ . Если скорость источника меньше  $c$ , то на любом волновом фронте при отличных от нуля полях имеется по меньшей мере одна особенность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Marder L., Proc. Roy. Soc., A244, 524 (1958).
2. Einstein A., Sitzber, Preuss. Akad. Wiss., 1916, 688; 1918, 154.
3. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc., 173, 211 (1939).
4. Rosen N., Shamir H., Rev. Mod. Phys., 29, 429 (1957).
5. Bonnor W. B., Phil. Trans. Roy. Soc., Axxx, 994 (1954).
6. Eddington A. S., Proc. Roy. Soc., A102, 268 (1923).
- 7\*. Richtmyer, Kennard, Introduction to Modern Physics, 4th Ed. New York, 1947.
8. Einstein A., Rosen N., Journ. Franklin Inst., 223, 43 (1937).
9. Rosen N., Phys. Zs. Sowjetunion, 12, 366 (1937).
10. Rosen N., Bull. Res. Council Israel, 3, 328 (1953).
11. Weber J., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., 29, 3, 509 (1957). (См. перевод: НПГ, стр. 289.)
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1960, гл. XI.
13. Rosen N., Phys. Rev., 110, 1, 291 (1958).
14. Bonnor W. B., Ann. Inst. Henri Poincaré, 13, 146 (1957).
15. Taub A. H., Ann. d. Math., 53, 472 (1951).
16. McVittie G. C., Journ. Rat. Mech. a. Anal., 4, 201 (1955).
17. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I., Proc. Roy. Soc., A251, 519 (1959).
18. Bondi H., Nature, 179, 1072 (1957).
19. Lichnerowicz A., Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Paris, 1955.
20. Boardman J., Bergmann P. G., Phys. Rev., 115, 1318 (1959).
21. Foures-Bruhat Y., Journ. Rat. Mech. a. Anal., 5, 951 (1956).
22. Brill D., Диссертация, Принстонский университет, 1959.
23. Brill D., Ann. of Phys., 7, 466 (1959).
24. Araki H., Ann. of Phys., 7, 456 (1959).
25. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926. (См. перевод: Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, ИЛ, 1948.)

26. Pirani F. A. E., Phys. Rev., 105, 1089 (1957). (См. перевод: НПГ, стр. 257.)
27. Петров А. З., Ученые записки Казанского университета 114, кн. 8, 55 (1954).
28. Peres A., Phys. Rev. Let., 3, 571 (1959).
29. Weber J., Zirou D., Nuovo cimento, 18, 191 (1960).
30. Robinson I., Trautman A., Phys. Rev. Let., 4, 431 (1960).
31. Stellmacher K. L., Math. Ann., 115, 136 (1937).
32. Stellmacher K. L., Math. Ann., 115, 740 (1938).

# Детектирование и генерация гравитационных волн<sup>1)</sup>

## 1. Детектирование

Рассмотрим систему масс, которые могут взаимодействовать между собой. Будем исходить из принципа наименьшего действия

$$\delta I = 0. \quad (8.1)$$

Функцию действия можно записать в виде

$$I = mc \int ds + W. \quad (8.2)$$

Здесь  $m$  — масса покоя, а  $W$  — часть функции действия, связанная с негравитационными силами, возникающими при движении данной массы относительно других, с которыми она взаимодействует. Согласно принципу виртуальной работы в качестве  $\delta W$  следует взять функцию

$$\delta W = \frac{1}{c} \int F_{\mu} \delta x^{\mu} ds. \quad (8.3)$$

Из равенства (8.3) видно, что величина  $F_{\mu}$  представляет собой четырехмерную силу. Следующие из (8.1) уравнения Эйлера — Лагранжа можно привести к виду

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = \frac{F^{\mu}}{mc^2}, \quad (8.4)$$

используя метод, примененный в п. 6 гл. 3.

<sup>1)</sup> Излагаемые в этой главе результаты были опубликованы в сообщениях автора [1], удостоенных премии Фонда гравитационных исследований в апреле 1958 и в апреле 1959 гг. По своему содержанию эта глава близка к статье [2] в *Physical Review*. Автор благодарен редакции *Physical Review* за разрешение на опубликование материала этой статьи.

Уравнения (8.4) записываются через четырехмерную скорость  $U^\mu = dx^\mu/ds$  в виде

$$\frac{\delta}{\delta s} \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{\delta U^\mu}{\delta s} = \frac{F^\mu}{mc^2}. \quad (8.5)$$

Символ  $\delta/\delta s$  означает ковариантное дифференцирование по  $s$ .

Следуя в принципиальных чертах методам Синга и Шильда, мы введем параметр  $v$  такой, чтобы мировая линия любого элемента массы соответствовала определенному значению  $v$ . Ковариантная производная уравнения (8.5) по  $v$  равна

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta v} \frac{F^\mu}{m}; \quad (8.6)$$

непосредственные вычисления приводят к равенству

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta s \delta v} = \frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\beta \frac{\partial x^\gamma}{\partial v}.$$

Используя это правило изменения порядка ковариантного дифференцирования, мы можем переписать (8.6) в виде

$$\frac{\delta^2 U^\mu}{\delta v \delta s} = \frac{\delta^2 U^\mu}{\delta s \delta v} - R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\beta \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta v} \frac{F^\mu}{m}. \quad (8.7)$$

Величина  $\partial x^\gamma/\partial v$  в (8.7) представляет собой единичный вектор, касательный к линиям  $v$ , а четырехмерная скорость  $U^\mu$  является единичным вектором, касательным к мировым линиям. Бесконечно малый вектор  $n^\gamma$ , определяемый равенством

$$n^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} dv, \quad (8.8)$$

соединяет точки соседних между собой мировых линий, такие, что для них значения  $s$  одинаковы, а значения параметра  $v$  отличаются на  $dv$ . Ковариантную производную от величины  $\partial x^\gamma/\partial v$  по  $s$  можно записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta s} \left( \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \right) = \frac{\delta}{\delta v} \left( \frac{\partial x^\gamma}{\delta s} \right) = \frac{\delta U^\gamma}{\delta v}. \quad (8.9)$$

На основании (8.6) — (8.9) имеем

$$\frac{\delta^2 n^\mu}{\delta s^2} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha n^\beta U^\gamma = \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta v} \frac{F^\mu}{m} dv. \quad (8.10)$$

Для невзаимодействующих частиц правая сторона равенства (8.10) равна нулю, и тогда

$$\frac{\delta^2 n^\mu}{\delta s^2} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha n^\beta U^\gamma = 0. \quad (8.10a)$$

Когда справедливо уравнение (8.10a), рассматриваемые частицы движутся вдоль геодезических. Уравнение (8.10a) следует называть уравнением геодезического отклонения.

## 2. Квадрупольный массовый детектор

Чтобы рассмотреть поведение принимающего устройства (детектора)<sup>1)</sup>, изображенного на фиг. 11, представим себе две мировые линии двух образующих детектор масс. Определим вектор  $n^\gamma$  как

$$n^\gamma = r^\gamma + \xi^\gamma, \quad (8.11)$$

где  $r^\gamma$  определяется из уравнения

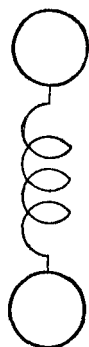
$$\frac{\delta r^\gamma}{\delta s} = 0 \quad (\text{для всех } s), \quad (8.12)$$

$$r^\gamma \rightarrow n^\gamma$$

в предельном случае большого внутреннего трения (большого затухания) и выполнения равенства  $R^\mu_{\alpha\beta\delta} = 0$  для всех компонент тензора Римана. Тогда уравнение (8.10) принимает вид

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\gamma (r^\beta + \xi^\beta) = \frac{1}{mc^2} f^\mu. \quad (8.13)$$

Здесь через  $f^\mu$  мы обозначили разности негравитационных сил взаимодействия для двух масс. В качестве  $f^\mu$  мы рассматриваем в данном случае совокупность возвращающей („упругой“) силы —  $k^\mu_\alpha \xi^\alpha$  и силы, обуславливающей затухание, —  $cD^\mu_\alpha (\delta \xi^\alpha / \delta s)$ . Тензоры  $k^\mu_\alpha$  и  $D^\mu_\alpha$  описывают



Фиг. 11.

<sup>1)</sup> До некоторой степени подобное этому устройство было независимо предложено Г. Бонди на конференции в Руайомоне в июне 1959 г.

свойства пружины. Теперь можно (8.13) записать в виде

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2} + \frac{D^\mu_\alpha}{cm} \frac{\delta \xi^\alpha}{\delta s} + \frac{k^\mu_\alpha}{mc^2} \xi^\alpha = - R^\mu_{\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\gamma (r^\beta + \xi^\beta). \quad (8.14)$$

Пусть время возрастает в направлении, касательном к мировой линии центра масс. Тогда наш осциллятор находится в состоянии свободного падения. Используя систему координат, в которой символы Кристоффеля равны нулю, можно уравнение (8.14) представить в приближенном виде (при  $\xi \ll r$ )<sup>1)</sup> следующим образом:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{dt^2} + \frac{D^\mu_\alpha}{m} \frac{d \xi^\alpha}{dt} + \frac{k^\mu_\alpha}{m} \xi^\alpha = - c^2 R^\mu_{0\alpha 0} r^\alpha. \quad (8.15)$$

Отсюда видно, что роль движущей силы для гармонического осциллятора выполняет тензор Римана. Измерение амплитуды смещения или поглощаемой мощности позволяет вычислить некоторые компоненты этого тензора<sup>2)</sup>.

Из уравнений (8.15) следует, что из гравитационного поля всегда можно получить энергию, если фурье-образ  $R_{i0j0}$  отличен от нуля в локально лоренцовой системе, движущейся

<sup>1)</sup> Если частицы свободны, второе и третье слагаемые в (8.15) обращаются в нуль. В п. 2 гл. 7 мы показали, что для локально плоской волны, распространяющейся в направлении оси  $x^1$ , величины  $R_{\mu 0 i 0}$  равны нулю. Отсюда и из (8.15) в этом случае следует, что если вектор, соединяющий две близко расположенные в пространстве свободные частицы, ориентирован в направлении распространения рассматриваемой волны, то относительные смещения частиц отсутствуют. В случае свободных частиц максимальное относительное смещение имеет место, когда частицы расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Этот вывод был опубликован в работе Пираны.

<sup>2)</sup> Пираны [3, 1] рассмотрел вопрос об измерении тензора Римана путем сравнения ускорений свободных пробных частиц. Однако полученные в данной главе результаты показывают, что практически должны использоваться взаимодействующие между собой частицы.

Исследуемая в п. 2 гл. 8 связь между разностью потенциалов, возникающей в пьезоэлектрическом кристалле, и величинами  $R_{i0j0}$  может послужить основой для обсуждения измерительных проблем в квантовой общей теории относительности. Необходим кристалл весьма малого объема, поскольку длина волны акустических резонансных колебаний на пять порядков меньше, чем длина соответствующей гравитационной волны.

вдоль геодезической линии. Эта геодезическая будет, следовательно, мировой линией центра масс нашего гармонического осциллятора.

Рассмотрим теперь падающие на детектор синусоидальные (случай приближения слабого поля) гравитационные волны. Пусть используется ортогональная сопутствующая система координат, в которой осциллятор ориентирован в направлении оси  $x^1$ . Представим себе, что тензоры  $k^\mu_\alpha$  и  $D^\mu_\alpha$  имеют лишь по одной компоненте:  $k^1_1 = k$  и  $D^1_1 = D$ . Произведя фурье-преобразование уравнений (8.15), получим

$$\xi^\mu(\omega) = \frac{mc^2 R^\mu_{0\alpha 0}(\omega) r^\alpha}{(\omega^2 m - i\omega D \delta^\mu_1 - k \delta^\mu_1)}. \quad (8.16)$$

Величина  $\xi^\mu(\omega)$  достигает максимума при резонансе, когда  $-\omega^2 m + k = 0$ . Полная диссипация энергии  $D = D_{\text{ex}} + D_{\text{in}}$  складывается из внешнего рассеяния  $D_{\text{ex}}$  и внутреннего поглощения  $D_{\text{in}}$ , обусловленного необратимыми процессами в антенне. Мощность, передаваемая вспомогательному аппарату с  $D_{\text{ex}}$ , равна

$$\frac{1}{2} \omega^2 D_{\text{ex}} \xi^2 = \frac{m^2 c^4 (R^\mu_{0\alpha 0} r^\alpha)^2 D_{\text{ex}}}{2(D_{\text{ex}} + D_{\text{in}})^2}. \quad (8.17)$$

Величина (8.17) становится максимальной при  $D_{\text{ex}} = D_{\text{in}}$ , и это максимальное значение  $P_M$  равно

$$P_M = \frac{m^2 c^4 (R^\mu_{0\alpha 0} r^\alpha)^2}{8D_{\text{in}}}. \quad (8.18)$$

Допустим теперь, что синусоидальные гравитационные волны излучаются массами линейного квадрупольного осциллятора. Из законов преобразования видно, что при малых скоростях значения величины  $R^\mu_{0\alpha 0}$  в системе отсчета, связанной с центром масс излучателя, с достаточной точностью совпадают с ее значениями в системе, связанной с центром масс детектора. Исходя из решения для линейного массового квадрупольного осциллятора (п. 5 гл. 7), было вычислено среднее квадратичное значение  $R^\mu_{0\alpha 0} r^\alpha$ , усредненное по всем возможным ориентациям приемника. Пусть для линейного массового квадрупольного осциллятора излучаемая через единичную поверхность на сфере радиуса  $r$  и усредненная



по этой сфере мощность будет  $t_{0r}$ . Тогда полная излученная мощность  $P$  будет равна

$$P = 4\pi r^2 t_{0r} = \frac{GI_0^2 \omega^6}{15\pi c^5}, \quad (8.19)$$

где  $I_0$  — амплитуда квадрупольного момента. Тогда выражение (8.19) и известные значения напряженностей поля приводят к следующему выражению для среднеквадратичного значения  $R_{0\alpha 0}^{\mu} r^{\alpha}$  в направлении, перпендикулярном оси излучателя:

$$[(R_{0\alpha 0}^{\mu} r^{\alpha})^2]_{\text{ср.}} = \frac{4\pi^2 \beta^2 |r|^2 G}{c^5} t_{0r}. \quad (8.20)$$

В выражении (8.20)  $\beta$  представляет собой волновой вектор гравитационной волны. Из (8.18) и (8.20) следует, что

$$P_M = \frac{\pi m^2 \beta^2 |r|^2 G}{2c D_{\text{in}}} t_{0r}. \quad (8.21)$$

Рассмотрим теперь влияние внутреннего поглощения  $D_{\text{in}}$ . Предположим сначала, что в самой антенне не происходит необратимых процессов, так что величина  $D_{\text{in}}$  обусловлена исключительно радиационным затуханием в детекторе. Известное решение для линейного массового квадрупольного осциллятора позволяет вычислить радиационное сопротивление детектора  $D_{\text{in}}$ :

$$D_{\text{in}} = \frac{2G\omega^4 m^2 |r|^2}{15c^5}. \quad (8.22)$$

Из (8.21) и (8.22) получаем

$$P_M \text{ (за счет только рад. затухания)} = \frac{15\lambda^2}{16\pi} t_{0r}. \quad (8.23)$$

Равенство (8.23) означает, что среднее поперечное сечение поглощения  $S_A$  для детектора, затухание которого обусловлено только его собственным вторичным излучением, равно

$$S_A = \frac{15\lambda^2}{16\pi}. \quad (8.24)$$

Из формулы (8.24) видно, что при этих условиях среднее поперечное сечение поглощения приблизительно равно квадрату длины волны и не зависит от гравитационной постоянной. К сожалению, практически внутреннее затухание невозможно свести к одному лишь вторичному излучению

ввиду того, что другие необратимые процессы, происходящие в антенне, на много порядков превышают радиационное затухание. Чтобы пояснить сказанное, вычислим коэффициент добротности, обозначаемый через  $Q$  и равный по определению

$$Q = \frac{\omega \cdot (\text{максимальная накопленная энергия})}{\text{рассеянная мощность}}.$$

Добротность, связанная с радиационным затуханием, обозначается через  $Q_R$  и равна

$$Q_R = \frac{15c^2}{2G\omega^3 m |r|^2}. \quad (8.25)$$

Для антенны, рассчитанной на  $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ , при разумном значении  $mr^2 = 10 \text{ г} \cdot \text{см}^2$  формула (8.25) дает  $Q_R \sim 10^{34}$ . Для реальной антенны можно ожидать значения  $Q \sim 10^6$ .

Следовательно, необходимо оперировать с системами, внутреннее затухание которых на много порядков больше, чем гравитационное радиационное затухание. При таких условиях средняя поглощаемая мощность будет зависеть от вида антенны. Для ориентации антенны, соответствующей максимуму приема, получим

$$[(R_{0\alpha}^{\mu} r^{\alpha})^2]_{\text{ср.}} = \frac{15\pi G \beta^2 |r|^2}{c^5} t_{\text{ор.}} \quad (8.26)$$

Из (8.26) и (8.18) следует, что величина  $P_A$  поглощенной мощности равна

$$P_A = \frac{15\pi G m^2 \beta^2 |r|^2}{8c D_{\text{ин}}} t_{\text{ор.}} = \frac{15\pi G m Q_{\text{ин}} \beta^2 |r|^2}{8\omega c} t_{\text{ор.}} \quad (8.27)$$

В формуле (8.27)  $Q_{\text{ин}}$  представляет собой добротность, связанную с внутренними необратимыми процессами, так что  $Q_{\text{ин}} = \omega m / D_{\text{ин}}$ . Следующее из (8.27) сечение  $S$  равно

$$S = \frac{15\pi G m Q_{\text{ин}} \beta^2 |r|^2}{8\omega c}. \quad (8.28)$$

Для непрерывного спектра излучения поглощаемая мощность равна

$$P_A = \frac{1}{t'} \int_{-t'/2}^{t'/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 c^4 D_{\text{ex}}(\omega) R_{020}^{\mu}(\omega) R_{030}^{\mu}(\omega') r^{\alpha} r^{\beta} e^{i(\omega - \omega')t}}{2(-\omega^2 m + i\omega D + k)(-\omega'^2 m - i\omega' D + k)} \times \\ \times d\omega d\omega' dt \approx \pi^2 G m c^{-1} \beta^2 |r|^2 t_{\text{ор.}}(\omega_0). \quad (8.29)$$

В (8.29)  $t_{0r}(\omega_0)$  представляет собой спектр мощности  $t_{0r}$  в окрестности резонансной частоты  $\omega_0$ .

Для дальнейшего анализа этих результатов нужно рассмотреть возбуждение сплошной среды гравитационной волной. Это необходимо для учета взаимодействия массы пружины с волной и для учета последствий конечности скорости распространения упругих сил по пружине.

### 3. Взаимодействие кристалла с гравитационной волной

Исходным пунктом в нашем анализе будет уравнение (8.10). Бесконечно малый вектор  $n^\mu$  соединяет некоторую точку отсчета в кристалле с ее соседней точкой. Будем считать, что масса  $m$  заключена в бесконечно малом объеме, окружающем эту соседнюю точку. В правую часть уравнения (8.10) теперь должны входить как упругие, так и диссипативные силы. Представим  $n^\mu$  в виде

$$n^\mu = r^\mu + \theta_a^\mu r^a, \quad (8.30)$$

причем  $r^\mu$  определяется из условий

$$\frac{\delta r^\mu}{\delta s} = 0 \quad (\text{для всех } s), \quad (8.31)$$

$$r^\mu \rightarrow n^\mu$$

в пределе большого внутреннего затухания и плоского пространства. Теперь уравнениям (8.10) можно придать вид

$$r^\mu \frac{\delta^2 \theta_{\mu\nu}}{\delta s^2} + r^\mu B \frac{\delta \theta_{\mu\nu}}{\delta s} + r^\mu Y^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \theta_{\mu\nu}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} +$$

$$+ R_{\nu\alpha\mu\beta} (r^\mu + \theta_\gamma^\mu r^\gamma) U^\alpha U^\beta = 0. \quad (8.32)$$

Мы будем полагать, что наш кристалл изотропен. Второе слагаемое характеризует здесь внутреннее затухание, а третье — упругие силы. Величины  $B$  и  $Y^{\alpha\beta}$  нормированы на единичную плотность массы. Вновь  $U^\alpha$  — единичный вектор, касательный к мировым линиям. Так как  $r^\mu$  выбирается произвольно, можно записать

$$\frac{\delta^2 \theta_{\mu\nu}}{\delta s^2} + B \frac{\delta \theta_{\mu\nu}}{\delta s} + Y^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \theta_{\mu\nu}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} + R_{\nu\alpha\mu\beta} U^\alpha U^\beta +$$

$$+ R_{\nu\alpha\gamma\beta} U^\alpha U^\beta \theta_\mu^\gamma = 0. \quad (8.33)$$

Четвертое слагаемое в (8.33), очевидно, симметрично по индексам  $\mu$  и  $\nu$ , последнее же слагаемое обычно можно опустить, так как оно на много порядков меньше четвертого. Поэтому можно написать следующие уравнения для тензора деформаций, представляющего собой симметричную часть  $\theta_{\mu\nu}$ :

$$\frac{\delta^2 \theta_{\alpha\gamma} \text{ (симм.)}}{\delta s^2} + B \frac{\delta \theta_{\mu\nu} \text{ (симм.)}}{\delta s} + \gamma^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \theta_{\mu\nu} \text{ (симм.)}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} \approx -R_{\nu\alpha\mu\gamma} U^\alpha U^\beta. \quad (8.33a)$$

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (8.33a), а именно возбуждение продольных акустических волн. Рассматривая волны, распространяющиеся в направлении оси  $x^1$  в ортогональной системе координат (в которой направление оси времени является касательным к мировой линии наблюдателя), получаем приближенно

$$y \frac{\partial^2 \theta}{\partial (x^1)^2} - \rho_M \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial t} = c^2 \rho_M R^1_{010}. \quad (8.34)$$

Здесь  $\rho_M$  — плотность массы,  $y$  — соответствующий модуль и  $b$  — постоянная, характеризующая затухание. Допустим, что происхождение величины  $R^1_{010}$  связано с падающими синусоидальными гравитационными волнами, так что

$$c^2 R^1_{010} = f e^{i(\omega t - \beta_k x^k)}. \quad (8.35)$$

В формуле (8.35) индекс  $k$  пробегает значения от 1 до 3. Обозначим через  $v_s$  скорость звука  $\sqrt{y/\rho_M}$ , а через  $\lambda_s$  длину звуковой волны; тогда  $k_s = 2\pi/\lambda_s$ ,  $\alpha = b/2y\rho_M v_s$  и  $\gamma = \alpha + ik_s$ . В этом случае решение (8.34) с достаточной точностью имеет вид

$$\theta = [A\gamma \operatorname{ch} \gamma x^1 - f\omega^{-2} e^{-i\beta_k x^k}] e^{i\omega t}. \quad (8.36)$$

Смещение точек относительно центра масс кристалла, обозначаемое через  $\xi$ , можно вычислить путем интегрирования (8.36) по  $x^1$ :

$$\xi = \left[ A \operatorname{sh} \gamma x^1 - \frac{f}{i\beta_1 \omega^2} (1 - e^{-i\beta_1 x^1}) \right] e^{i\omega t}. \quad (8.36a)$$

Используя граничное условие обращения  $\theta$  в нуль на краях кристалла, получаем

$$A \approx \frac{f \cos \beta_1 l}{\omega^2 \gamma (i\alpha l \sin k_s l + \cos k_s l)}. \quad (8.37)$$

В формуле (8.37) через  $l$  обозначена полудлина кристалла. Первое слагаемое в (8.36) описывает вклад со стороны акустических волн<sup>1)</sup>, второе же слагаемое даст значения деформаций, соответствующие случаю отсутствия каких бы то ни было внутренних сил. Выражение (8.37) необходимо модифицировать, если кристалл пьезоэлектрический.

Величина (8.37) становится максимальной при  $k_s l$ ; пропорциональных  $\pi/2$  с нечетным целым коэффициентом пропорциональности. Однако из знаменателя видно, что наибольшим является первый максимум, полная длина которого равна половине длины акустической волны. Система, образованная двумя массами и пружиной (см. фиг. 11), должна описываться уравнением вида (8.34), если расстояние между массами приближается к половине акустической длины волны. Ясно, что наибольшее значение, которое может принимать сечение (8.28), соответствует случаю, когда  $r$  равен половине длины акустической волны в пружине. Это — важное ограничение, так как скорость акустических волн приблизительно на пять порядков меньше, чем скорость света. Поэтому сечения (8.28) оказываются на десять порядков меньше, чем они были бы при распространении упругих сил в пружине со скоростью света. Существует ряд способов преодоления этого ограничения. Можно было бы передавать возвращающие силы с помощью электрических и магнитных полей, т. е. со скоростью света. Можно также использовать пьезоэлектрический эффект, при котором поляризационные заряды на краях

<sup>1)</sup> Анализ равенства (8.36а) показывает, что прибор, помещенный на поверхности Земли, ведет себя так, как если бы он находился в состоянии свободного падения. Ибо рассмотрим влияние гравитационных волн на внутренние движения Земли, применяя (8.36а) к случаю собственных видов колебаний самой Земли: первое слагаемое справа описывает акустические волны, прочие же члены дают движение в отсутствие взаимодействий. На основании (8.37) отношение этих слагаемых равно

$$\frac{\beta_1 \omega^2 A}{f} \approx \frac{\lambda_s}{\lambda \alpha l} = \frac{v_s}{c(\alpha l)}.$$

Отношение скорости звука к скорости света составляет около  $10^{-5}$  и намного меньше произведения длины и коэффициента поглощения звука в массе Земли, обозначаемого через  $\alpha$ . Эти соображения применимы лишь в случае гравитационных волн, длины которых сравнимы или короче радиуса Земли.

кристалла могли бы вызывать появление таких компонент натяжения, которые не меняют знака в каждый полупериод акустической волны.

В пьезоэлектрическом кристалле деформация вызывает электрическую поляризацию  $P_\mu$ , равную

$$P_\mu = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta}_\mu.$$

Здесь  $\mathcal{E}^{\alpha\beta}_\mu$  — тензор пьезоэлектрических натяжений. Электрическая поляризация приводит к появлению в кристалле электрического поля. Его суммарное значение дает разность потенциалов на границах, которая достаточно велика для того, чтобы ее можно было обнаружить с помощью радиоприемника, обладающего низким уровнем шумов. Измерение такой разности потенциалов дает при соответствующем подборе характеристик кристалла величины компонент тензора Римана  $R_{i0j0}$ .

Система натяжений существенно изменяется при использовании пьезоэлектрического кристалла. Тогда в уравнение (8.33) следует ввести новые слагаемые, зависящие от пьезоэлектрических постоянных. Мы рассмотрим здесь очень простой пример. Пусть возбуждается лишь одна продольная частота и волна распространяется в направлении оси  $x^1$  со скоростью звука. Пусть толщина кристалла в направлении оси  $x^2$  будет мала, а его поверхности, перпендикулярные оси  $x^2$ , покрыты проводящими обкладками. Законы пьезоэлектрической поляризации имеют вид [4]

$$\begin{aligned} -T &= bY_0 + \frac{DH}{4\pi}, \\ E &= \frac{D}{K} + H\theta. \end{aligned} \tag{8.38}$$

В формулах (8.38)  $T$  — натяжение,  $K$  — диэлектрическая постоянная,  $\theta$  — деформация,  $Y_0$  — модуль упругости,  $E$  — напряженность электрического поля и  $D$  — электрическая индукция. Предполагается, что  $D$  и  $E$  имеют только компоненты вдоль оси  $x^2$ . Пьезоэлектрическая постоянная  $H$  вызывает напряжение в разомкнутом контуре с деформацией. Из уравнений (8.38) и уравнений движения элементов массы

в кристалле следует, что справедливо волновое уравнение вида (8.34), причем

$$y = Y_0 - \frac{H^2 K}{4\pi}.$$

Так как поверхности кристалла, перпендикулярные оси  $x^2$ , покрыты проводящими обкладками, то  $\partial E / \partial x^1 = 0$ . На свободных концах кристалла  $T = 0$ . Если кристалл связан с некоторым внешним импедансом  $Z$ , то можно записать

$$-\int E dx^2 = (4\pi)^{-1} Z \frac{\partial}{\partial t} \int D dx^1 dx^3.$$

Волновое уравнение (8.34) при таких граничных условиях приводит к следующему результату:

$$0 = [A_1 \gamma \operatorname{ch} \gamma x^1 - f \omega^{-2} e^{-i\beta_k x^k}] e^{i\omega t}, \quad (8.36a)$$

где  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $f$  уже были определены ранее. Полученная формула совпадает с (8.36), однако теперь постоянная  $A_1$  выражается через длину  $l_1$  в направлении оси  $x^1$  и длины  $l_2$  и  $l_3$  в направлениях  $x^2$  и  $x^3$ , а также через емкость „зажатого“ кристалла  $C$  как

$$A_1 = \frac{f}{\beta_1 \omega^2} \left[ 8\pi^2 \beta_1 l_2 (1 + i\omega CZ) \left( Y_0 - \frac{H^2 K}{4\pi} \right) \frac{1}{2} \cos \beta_1 l_1 + \right. \\ \left. + iH^2 K^2 l_3 \omega Z \frac{1}{2} \sin \beta_1 l_1 \right] \cdot \left[ 8\pi^2 l_2 \left( Y_0 - \frac{H^2 K}{4\pi} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{2} \gamma \operatorname{ch} \gamma l_1 \right) (1 + i\omega CZ) + i\omega Z H^2 K^2 l_3 \frac{1}{2} \operatorname{sh} \gamma l_1 \right]^{-1}. \quad (8.39)$$

Тогда напряжение, возникающее на концах кристалла, включенного на нагрузку с импедансом  $Z$ , равно

$$V = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{i\omega Z H K l_3}{1 + i\omega CZ} \right) \left( A_1 \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh} \gamma l_1 \right) - \frac{f}{\beta_1 \omega^2} \frac{1}{2} \sin \beta_1 l_1 \right). \quad (8.40)$$

Законы электрических цепей теперь позволяют непосредственно рассчитать мощность, которую детектор может передать радиоприемнику. Для кристалла, имеющего характеристики, близкие к характеристикам обычного кристаллического кварца, на который падает синусоидальная гравита-

ционная волна, передаваемая приемнику, мощность будет приблизительно равна

$$P_A \approx 10^{-25} \omega^{-1} V Q_t t_{or} \text{ эрг/сек.} \quad (8.41)$$

В формуле (8.41) мы вновь обозначили через  $\omega$  угловую частоту, а через  $t_{or}$  — поток мощности падающей гравитационной волны в  $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Величина  $Q_t$  характеризует добротность кристалла и связанной с ним электрической цепи. Один кубометр кристалла при частоте  $\omega \sim 10^3$  обладает поперечным сечением поглощения  $\sim 10^{-14} \text{ см}^2$ . Эта величина соответствует идеальным кристаллам, работающим на усилителе без положительной обратной связи. Реальные кристаллы могут привести к сечениям, на три порядка меньшим. Для непрерывного спектра со спектральной функцией мощности  $t_{or}(\omega)$  поглощенная мощность равна

$$P_A \approx 10^{-25} V t_{or}(\omega_0) \text{ эрг/сек.} \quad (8.42)$$

Выражения (8.41) и (8.42) обеспечивают основу для обсуждения вопроса о чувствительности. В микроволновой спектроскопии известно, что можно отсеять все прозрачные эффекты, кроме случайных флуктуаций. Мы примем здесь такое же допущение. Случайные флуктуации частью имеют тепловое происхождение, частью же являются следствием процессов спонтанного излучения. Для синхронного обнаружения гравитационных волн мощность на выходе детектора должна превышать мощность шумов [5]  $P_{N1}$ , равную

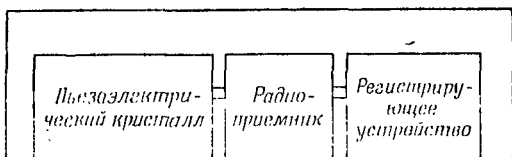
$$P_{N1} = \frac{N h \omega}{8 \tau_A (e^{h \omega / k T} - 1)},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура гравитационной антенны,  $N$  — коэффициент шумов приемника (для которого можно ожидать значения между 1 и 25) и  $\tau_A$  — время, по которому проводится осреднение. При исследовании излучения, имеющего непрерывный спектр, следует использовать другое выражение. В этом случае передаваемая детектором мощность должна быть больше величины

$$P_{N2} = \left( \frac{\pi^2 \omega}{64 \tau_A Q_t} \right)^{1/2} \frac{N h \omega}{e^{h \omega / k T} - 1}.$$



Планируются опыты по обнаружению межзвездного<sup>1)</sup> гравитационного излучения<sup>2)</sup> с помощью описанных здесь методов. При использовании перного метода в качестве блока вещества, образующего антенну, берется сама Земля. Падающие гравитационные волны возбуждают нормальные гармоники Земли (около одного колебания в час). Возможности этого метода ограничены относительной малостью  $Q$  Земли



Ф и г. 12.

и высоким уровнем шумов в ее ядре. Второй метод состоит в использовании прибора, изображенного на фиг. 12 и измеряющего деформации в кристалле. Запланированы поиски волн на частотах порядка  $10^3$  гц. Опыт использует враще-

<sup>1)</sup> Уилер [6] заметил, что плотность гравитационного излучения такого рода может достигать величины от  $10^{-29}$  до  $10^{-28}$  г · см<sup>-3</sup> ( $\sim 10^3$  эрг · см<sup>-2</sup> · сек<sup>-1</sup>) и все же не противоречить имеющимся данным о скорости расширения Вселенной. Вместе с М. Шварцшильдом (частное сообщение) он отметил впоследствии, что если бы это излучение освобождалось в результате тех же процессов, которые привели к неоднородному распределению вещества в форме галактик, то оно должно было бы характеризоваться в любой момент, в частности и в настоящее время, соответствующим масштабом длин, имеющим сейчас порядок  $10^{24}$  см (период колебания  $10^6$  лет). Этому соответствует

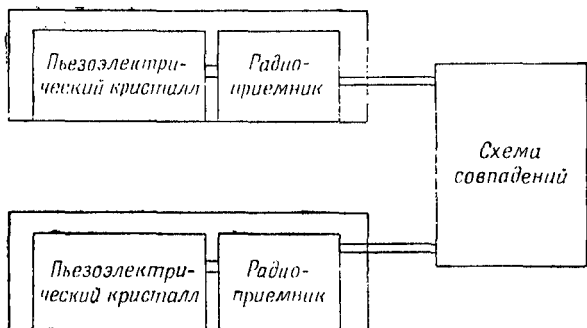
$$\left( \frac{\partial g_{\text{характ.}}}{\partial x} \right)^2 \sim \frac{\rho_M G}{c^2} \sim 0,2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2},$$

$$\delta g_{\text{характ.}} \sim 0,5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1} \cdot 10^{24} \text{ см} \sim 10^{-4}.$$

Эти величины не так уж малы, но они слишком медленно меняются, чтобы их можно было измерить известными методами.

<sup>2)</sup> Экспериментальная работа в этом направлении ведется сейчас Д. Зипсом и Л. Форвардом в сотрудничестве с автором. Чувствительность, достигаемая с помощью пьезоэлектрического эффекта, повышается при использовании кристалла с поперечником, на котором укладывается много длин акустических волн. При низких

ние установки вместе с Землей. Излучение, падающее в некотором определенном направлении, можно обнаружить по суточному изменению шумов на выходе усилителя. Изображенная на фиг. 13 установка не требует использования вращения. При наличии падающего на установку излучения между отсчетами на выходах будет существовать корреляция.



Ф и г. 13.

Никакие источники внутренних флуктуаций такой корреляции иметь не могут. В качестве низкочастотных усилителей можно будет использовать лазеры [7].

Применяемые приспособления не должны быть чувствительны к колебаниям земной коры. Д-р Зиной предложил остроумные акустические фильтры, снабженные усилителями, которые отмечают такие колебания и дают затем возможность исключить их.

#### 4. Вращательные эффекты, вызываемые гравитационным излучением

Дирак (в частном сообщении) высказал мысль, что астрономические аномалии могут быть связаны с гравитационным

частотах это не представляет ценности, так как тело размерами в половину акустической длины волны уже оказывается настолько большим, что не может быть реализовано в виде монокристалла. Наряду с исследованием на установках, изображенных на фиг. 12 и фиг. 13, рассматривается возбуждение гравитационной волной резонансных акустических колебаний в большом металлическом блоке.

излучением. Для обсуждения этого вопроса и изучения возможности обнаружить такие эффекты путем наблюдения вращательных эффектов мы вернемся к уравнению (8.5). Рассмотрим систему масс, расположенную вблизи начала пространственной системы координат, и обозначим через  $r^\mu$  бесконечно малый радиус-вектор одной из этих масс. Введем тензорную плотность Леви-Чивита  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ . Умножая (8.5) на  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta$ , получаем

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} + \\ + \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha\epsilon} U^\gamma U^\delta = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{F^\alpha}{mc^2}. \quad (8.43)$$

Здесь снова величина  $U^\delta$  — единичный вектор, касательный к мировым линиям, а во втором слагаемом в (8.43) использовано тождество  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} U^\alpha U^\beta = 0$ . Пусть на мировой линии начала координат символы Кристоффеля обращаются в нуль. Тогда уравнение (8.43) можно записать в виде

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} + \\ + \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha\epsilon}}{\partial x^\omega} U^\gamma U^\delta r^\omega. \quad (8.44)$$

В выбранных координатах  $R^{\alpha}_{\gamma\omega} = \partial \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha\epsilon} / \partial x^\omega$ , так что (8.44) можно переписать как

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} - \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\alpha}_{\gamma\omega\delta} U^\gamma U^\delta r^\omega. \quad (8.45)$$

Используя (8.43) и (8.45), получаем после суммирования по всем массам, входящим в систему:

$$\sum_{\text{по массам}} \frac{d}{ds} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} = \\ = \sum_{\text{по массам}} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\alpha}_{\gamma\omega\delta} U^\gamma U^\delta r^\omega r^\alpha - \sum_{\text{по массам}} \frac{\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\alpha F^\beta}{mc^2}. \quad (8.46)$$

Уравнение (8.46) представляет собой обобщенные соотношения, связывающего момент силы и изменение момента импульса во времени. Если негравитационные силы отсутствуют и вре-

менная ось направлена по касательной к мировой линии центра масс, то (8.46) принимает вид

$$\sum_{\text{по массам}} \frac{d}{ds} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} = \sum_{\text{по массам}} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\beta}_{0\omega 0} r^\alpha r^\omega. \quad (8.47)$$

Уравнение (8.47) можно использовать для расчета беспорядочных флуктуаций в течение периода вращения Земли, вызываемых падением на нее гравитационного излучения, имеющего непрерывный спектр. В этом случае непосредственное вычисление приводит к результату

$$\frac{(\overline{\Delta L})^2_{\text{ср. кв.}}}{L^2} = \frac{25\pi G}{\omega^2 c^3} t_{0r}. \quad (8.48)$$

Здесь  $(\overline{\Delta L})^2_{\text{ср. кв.}}$  — средняя квадратичная флуктуация момента импульса Земли,  $L$  — полный момент импульса и  $t_{0r}$  — полный поток гравитационной мощности в  $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ , причем предполагается, что его фурье-образ отличен от нуля лишь вблизи нулевой частоты. Если мы произвольно допустим, что все аномалии во вращении Земли вызваны падением на нее гравитационных волн, то отсюда следует, что величина  $t_{0r}$  равна  $5 \cdot 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Отсюда ясно, что вращение Земли не может быть с пользой применено в качестве „детектора“, пока не будет уменьшена величина необъясненной аномалии. Другие астрономические аномалии приводят к еще большим значениям потока гравитационных волн<sup>1)</sup>.

## 5. Генерирование гравитационных волн

Было бы весьма желательным добиться генерирования гравитационных волн с энергией, достаточной для их обнаружения в лаборатории. Тогда стали бы осуществимы многие важные эксперименты.

Величина мощности, излучаемой вращающимся стержнем, на основании формулы (7.56) равна

$$P_R = 1,73 \cdot 10^{-59} I_m^2 \omega^6 \text{ эрг/сек}. \quad (8.49)$$

<sup>1)</sup> Если считать последние их причиной. — Прим. ред.

При заданном значении момента инерции  $I_m$  можно увеличивать угловую частоту  $\omega$  до тех пор, пока стержень не разрушится. Если записать максимальное значение  $\omega$  через прочность на растяжение и результат выразить через модуль упругости и через напряжение, то получим формулу для длины  $l$ :

$$l = \lambda_s \sqrt{\frac{2\delta}{\pi}}. \quad (8.50)$$

В формуле (8.50) величина  $\delta$  характеризует максимально допустимое для данного материала напряжение, а  $\lambda_s$  — длину волны звука в стержне при разрушительной для него угловой частоте. Из (8.50) видно, что длина гравитационной волны, излучаемой стержнем, по меньшей мере в 1 000 000 раз превышает его собственную длину. Момент инерции стержня также ограничен значением, равным примерно

$$\frac{1}{12\pi^5} \cdot 10^{-3} \rho_M \lambda_s^5 \delta^{5/2}. \quad (8.51)$$

В выражении (8.51)  $\rho_M$  — снова плотность, и мы рассматриваем довольно тонкий стержень, длина которого на порядок меньше его поперечных размеров. Из (8.51) и (8.49) следует, что

$$P_R < 4 \cdot 10^{-63} \rho_M^2 v_s^{10} \delta^5 \omega^{-4}. \quad (8.52)$$

Из соотношения (8.52) видно, что, в противоположность напрашивающемуся на основании (8.49) выводу, при вращении большого стержня с низкой частотой может быть достигнута большая мощность излучения, чем при вращении малого стержня с высокой частотой. Так, стержень длиной 1 м может излучать около  $10^{-30}$  эрг/сек.

Уравнения поля подсказывают новый метод генерирования гравитационных волн. Источником гравитационного поля является тензор энергии — импульса — натяжений. В пьезоэлектрическом кристалле можно создавать зависящие от времени натяжения, прикладывая переменный электрический потенциал, что и вызывает излучение. Для рассмотрения этого случая вполне достаточно ограничиться приближением слабого поля, так как ожидаемые отклонения от лоренцо-

вой метрики составляют примерно  $1 : 10^{30}$ . Вспомним решения в случае слабого поля

$$\varphi_{\mu}^{\nu} = h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \approx \frac{4G}{c^4} \int \frac{(T_{\mu}^{\nu})_{\text{ret}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x'. \quad (8.53)$$

Чтобы применить (8.53) к задаче излучения волн кристаллом, мы прежде предположим, что используется акустический резонанс и возбуждаются одномерные волны сжатия. Тогда компоненты тензора  $T_{\mu}^{\nu}$  будут равны

$$T_0^0 \approx -\rho_M c^2 \left( 1 - \frac{V_p}{v_s} \cos \omega t \cos k_s x^3 \right) [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)], \quad (8.54)$$

$$T_0^3 \approx \rho_M V_p c \sin \omega t \sin k_s x^3 [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)], \quad (8.55)$$

$$T_3^3 \approx -\rho_M V_p v_s \cos \omega t \cos k_s x^3 [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)]. \quad (8.56)$$

В этих выражениях предполагается, что волны распространяются в направлении оси  $x^3$ ;  $V_p$  — скорость частицы,  $v_s$  — скорость звука и  $U$  — ступенчатая функция, определяемая соотношениями  $U(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $U(x) = 1$  при  $x > 0$ . Величина  $A_0$  представляет собой амплитуду колебаний на свободном конце. Подставляя эти выражения в (8.46) и используя эйнштейновский вид псевдотензора энергии — импульса — натяжений, можно вычислить полную излучаемую мощность. Максимальное значение  $A_0$  определяется максимально допустимым напряжением, еще не приводящим к разрушению стержня.

Для кварца при акустическом резонансе получим

$$P < \left[ \frac{16}{15} G \rho_M^2 S^2 v_s \left( \frac{v_s}{c} \right)^5 \cdot 10^{-6} \right]_{\omega} + \left[ \frac{\pi}{15} G \rho_M^2 S^2 n_{\lambda}^2 v_s \left( \frac{v_s}{c} \right)^5 \cdot 10^{-12} \right]_{2\omega}. \quad (8.57)$$

В соотношении (8.57)  $S$  означает площадь поперечного сечения; слагаемое с индексом  $\omega$  дает мощность излучения на основной частоте, второе же слагаемое дает мощность, излучаемую на частоте, удвоенной относительно основной. Резонатор должен иметь длину, кратную с коэффициентом  $n_{\lambda}$  полудлине акустической волны. Первое слагаемое в соотно-

шении (8.57), очевидно, не зависит от  $n_\lambda$ . Это обусловлено тем, что при  $n_\lambda > 1$  кристалл представляет собой по существу систему электрических квадрупольей, где каждый данный квадруполь сдвинут по фазе относительно своих соседей. Результирующая основная частота излучения приблизительно совпадает в этом случае с частотой отдельного квадруполя. Каждый участок длиной в половину волны обладает эквивалентным импульсом  $MA_0\lambda_s/2\pi$ , где  $M$  — масса отдельного полуволнового резонатора. Величины  $A_0$  и  $\lambda_s$  определяются равенствами (8.54) — (8.56). Если большое число отдельных резонаторов сосредоточено в области, линейные размеры которой меньше половины длины гравитационной волны, то излучаемая мощность будет пропорциональна квадрату полного числа кристаллов. Чтобы излучать на основной частоте  $10^{-15}$  эрг/сек, потребуется  $10^6$  кристаллов, каждый из которых должен быть толщиной в половину акустической длины волны и обладать поперечным сечением, равным  $50 \text{ см}^2$ . Для управления установкой потребовалось бы сложное устройство, регулирующее фазы.

Представляется более удобным подавлять акустические резонансные колебания и создавать с помощью пьезоэлектрического эффекта или электрострикции компоненты механических натяжений, которые не меняют знака каждый полупериод акустических колебаний. Чтобы убедиться в осуществимости этого способа, необходимо исследовать приведенное в литературе [8] решение для компоненты  $T_{11}$  натяжения в продольно колеблющемся кристалле, грани которого, перпендикулярные оси  $x^3$ , покрыты проводящими обкладками. Для простоты предположим, что толщина кристалла невелика и что он возбуждается под действием приложенного извне электрического поля, параллельного оси  $x^3$ . Тогда компонента  $T_{11}$  равна

$$T_{11} = d_{31}E_3 \frac{\sin \frac{\omega(L-x)}{v_s} + \sin \frac{\omega x}{v_s} - \sin \frac{\omega L}{v_s}}{\sin(\omega L/v_s)} \sin \omega t. \quad (8.58)$$

Здесь  $d_{1j}$  — тензор, связывающий натяжения с электрическим полем,  $E_3$  — электрическая напряженность в направлении оси  $x^3$  и  $L$  — полная длина. При резонансе  $L\omega/v_s = \pi$ , так что в (8.58) следует учесть потери, вводя в знаменатель гиперболическую функцию. Однако вне области резонанса,

например при  $L\omega/v_s = \pi/2$ , выражение (8.58) принимает вид

$$T_{11} = d_{31}E_3 \left( \cos \frac{\omega x}{v} + \sin \frac{\omega x}{v} - 1 \right) \sin \omega t. \quad (8.59)$$

Мы видим, что величина (8.59) содержит слагаемое —  $d_{31}E_3 \sin \omega t$ , не изменяющее своего знака через каждый полупериод акустических колебаний. Одиночный большой кристалл, возбуждаемый таким образом, даст тогда большой интеграл по объему от компонент натяжений. Излучаемую мощность можно полагать равной

$$P_R \approx \frac{GP_{\max}^2 \lambda^4 \pi^2}{120c^3}. \quad (8.60)$$

В соотношении (8.60)  $P_{\max}$  — эффективное растягивающее усилие в  $\text{дин/см}^2$ , а  $\lambda$  — снова длина гравитационной волны. Другой способ состоит в использовании электрострикции в твердом теле или в жидкости. В случае жидкости следует использовать область, сторона которой сравнима с половиной гравитационной длины волны. Тогда пространственные производные напряженности электрического поля возбудят электрострикционные натяжения. Излучаемая мощность имеет величину, близкую к (8.60).

Кристалл со стороной, равной 50 см, может излучать волны длиной 1 м. Кристалл, возбужденный до уровня, предельно близкого к точке разрушения, будет излучать  $10^{-13}$  эрг/сек, если принять величину  $P_{\max}$  соответственно опубликованному статическому значению. Это соответствует выходу 100 000 гравитон/сек. Одиночный кристаллический детектор рассмотренного выше типа позволяет обнаружить мощность порядка  $10^{-3}$  эрг/сек на указанных длинах волн. Таким образом, все еще существует большой разрыв между возможностями генерирования и возможностями приема в небольшой лаборатории. Сложные принимающие и генерирующие устройства позволяют уменьшить этот разрыв. В кристаллах, возбуждаемых вблизи предела разрушения, требовалось бы рассеивать большие электрические мощности — вероятно, до  $10^8$  вт на 50-сантиметровом кристалле. Расход мощности нетрудно было бы существенно снизить, если бы удалось работать в режимах низких темпе-



ратур. Можно также надеяться, что работа на высоких частотах при низких температурах обеспечит повышенные значения натяжений. Все эти вопросы нуждаются в детальном экспериментальном исследовании. Если приведенные выше численные значения не удастся изменить в благоприятную сторону, то для генерации и детектирования гравитационного излучения потребуются кристаллы со стороной, равной примерно 100 м, и громадные приемные системы.

## 6. Другие опыты с излучением

В вышеизложенном рассмотрении мы ограничивались случаем гравитонов весьма низких энергий. Автор проделал большое число расчетов с целью выяснения возможности экспериментировать с излучением при высоких энергиях. Результаты показывают, что положение не внушает надежд в области средних энергий, соответствующих атомным, молекулярным и ядерным переходам. Как мы видели, решения уравнений общей теории относительности в приближении слабого поля чрезвычайно похожи на решения, известные в электродинамике. Процессы излучения низшего порядка приводят в электродинамике к излучению, пропорциональному  $e^2$ , где  $e$  — заряд электрона. Электронные переходы, для которых правила отбора разрешают гравитационное излучение, можно было бы вычислить в низшем порядке с помощью выражений, аналогичных имеющимся в электродинамике, за исключением того, что вместо  $e^2$  следует подставить  $Gm^2$ , где  $m$  — масса электрона. Существуют и другие, менее существенные различия. Добавляется новый множитель порядка квадрата отношения боровского радиуса к длине волны, так как теперь низшему исчезающему порядку соответствует уже квадрупольное, а не дипольное излучение. Так как  $Gm^2/e^2 \approx 10^{-43}$ , то излучение гравитона по меньшей мере на сорок три порядка менее вероятно, чем излучение фотона. При очень высоких энергиях положение улучшается, так как масса в отличие от заряда возрастает. Для  $Gm^2/e^2 \approx 1$  требуются энергии порядка  $10^{30}$  эв. Так как даже  $10^{20}$  эв лежат за пределами достижимых в современных устройствах энергий, такого рода эксперименты не представляются многообещающими.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Weber J., Gravity Research Foundation prize essays, New Boston, New Hampshire, April, 1958, April, 1959.
2. Weber J., Phys. Rev., 117, 306 (1960). (См. перевод: НПГ, стр. 446.)
3. Pirani F. A. E., Acta Phys. Polonica, 15, 6, 389 (1956).
4. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters, Van Nostrand, New York, 1948, p. 202.
5. Dicke R. H., Rev. Sci. Instr., 17, 268 (1946).
6. Wheeler J. A., La Structure et l'Evolution de l' Universe, Editions Stoops, Brussels 1958, p. 112 (Одиннадцатый съезд Физического международного сольвеевского института).
7. Weber J., Rev. Mod. Phys., 31, 681 (1959).
8. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Applications to Ultrasonics, Van Nostrand, New York, 1950, p. 64;  
(См. перевод: Мэзон У., Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвукике, ИЛ, 1952.)
9. Pirani F. A. E., Proceedings of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics, 1957; ASTIA Document AD118180, p. 61.

---

## Избранные вопросы общей теории относительности

---

*Есть основания думать, что элементарные образования, из которых построены атомы, сдерживаются гравитационными силами.*

А. Эйнштейн

### 1. Единые теории поля

В этой заключительной главе мы дадим краткий обзор некоторых важных проблем общей теории относительности, весьма существенных с философской точки зрения и, возможно, открывающих новые перспективы в развитии теории элементарных частиц.

Успех геометризации теории гравитационного поля побудил Эйнштейна и других физиков обратиться к поискам путей геометризации электромагнетизма. Привлекательная возможность исключения сил путем рассмотрения движения частиц по геодезическим линиям исчезает, как только вводятся электрические силы. Это видно по уравнениям (4.54), в которые входит сила Лоренца.

Во время создания общей теории относительности считалось, что в природе существуют лишь силы гравитационного и электромагнитного происхождения, так что геометризация электромагнетизма привела бы к созданию единой теории, охватывающей все стороны физики. Уравнения поля связывают стоящие в их левой части геометрические величины с физическими величинами в правой части. Эйнштейн знал о нежелательности такого положения и понимал, что подобное использование электромагнитного тензора энергии — импульса — натяжений в лучшем случае является предварительным решением проблемы. Эйнштейн, кроме того, никогда не принимал постулатов квантовой механики. Он надеялся,

что полностью детерминистическое описание элементарных частиц и квантовых явлений может быть достигнуто на пути разработки единой теории поля [1, 2].

В электродинамике полной geometrization достигнуть не удалось. Конечно, теперь, когда теория должна описывать, кроме того, ядерные силы и процессы физики высоких энергий, поиски единой теории поля покажутся еще более непосильной задачей.

Любопытно, что общую теорию относительности уровня 1916 г. и классическую теорию электромагнетизма можно выразить с помощью одной лишь геометрической величины  $R_{\mu\nu}$ , не изменяя физического содержания теории. Эта частичная geometrization<sup>1)</sup> была произведена Рэйничем [3] в 1927 г. и недавно развита Уилером и Мизнером [4, 5]. Допустим, существуют лишь гравитация и электромагнетизм, а зарядов нет. Максвелловский тензор энергии — импульса — натяжений (4.15) удовлетворяет соотношениям<sup>2)</sup>

$$T_{\sigma}^{\sigma} = 0, \quad (9.1)$$

$$T_{(0)} > 0, \quad (9.2)$$

$$T_{\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}) \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (9.3)$$

<sup>1)</sup> Тензору Максвелла не дается геометрического истолкования. Его исключают из уравнений, выражая тензор энергии — импульса — натяжений Максвелла через  $R_{\mu\nu}$ .

<sup>2)</sup> Соотношения (9.1) и (9.2) непосредственно следуют из (4.15). Для вывода (9.3) и других уравнений этого параграфа очень полезно использовать следующие соотношения. Обобщенный дельта-символ Кронекера  $\delta_{\alpha\gamma}^{\mu\nu\sigma\tau}$  можно определить через плотность тензора Леви-Чивита следующим образом:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \delta_{\alpha\gamma}^{\mu\nu\sigma\tau} \dots \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\delta}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} & \delta_{\delta}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} & \delta_{\gamma}^{\sigma} & \delta_{\delta}^{\sigma} \\ \delta_{\alpha}^{\tau} & \delta_{\beta}^{\tau} & \delta_{\gamma}^{\tau} & \delta_{\delta}^{\tau} \end{vmatrix}.$$

Отсюда видно, что обобщенная кронекеровская дельта меняет знак при перестановке любой пары верхних, либо нижних индексов и обращается в нуль, если одно и то же значение индекса повторяется более одного раза в верхней, либо в нижней группе индексов.

Большинство авторов полагает  $\epsilon_{0123} = 1$  и  $\epsilon^{0123} = 1$ . Следует проявлять осторожность, используя в одном и том же расчете  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$

Записав уравнения гравитационного поля в виде

$$R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu}{}^{\nu},$$

суммируя по индексам и используя (9.1), получаем

$$R = 0, \quad (9.4)$$

так что уравнения поля примут вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (9.5)$$

Из равенств (9.3) и (9.5) следует, что

$$R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} \delta_{\alpha}{}^{\gamma} R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}. \quad (9.6)$$

Геометрические соотношения (9.4) и (9.6) справедливы для любого гравитационного поля, источником которого является поле Максвелла с дивергенцией напряженности, равной нулю. Гарантию того, что антисимметричный тензор, из

и  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Если мы определим тензор  $*F_{\mu\nu}$ , дуальный тензору  $F_{\mu\nu}$ , как

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (-g)^{1/2} F^{\alpha\beta},$$

то

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} \epsilon_{\lambda\kappa\alpha\beta} (-g)^{1/2} F^{\alpha\beta}.$$

Отсюда непосредственно видно, что при использовании  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  мы должны во избежание противоречий с приведенными выражениями положить

$$*F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (-g)^{-1/2} F_{\alpha\beta}.$$

Эти выражения позволяют установить следующее тождество, имеющее силу для любых двух антисимметричных тензоров в четырехмерном пространстве:

$$A^{\nu\alpha} B_{\mu\alpha} - *A_{\mu\alpha} *B^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}.$$

Полагая  $A = B$  и взяв в качестве  $A$  тензор электромагнитной напряженности, можно записать максвелловский тензор энергии — импульса — натяжений в виде

$$T_{\mu}{}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left[ *F_{\mu\kappa} *F^{\alpha\kappa} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}{}^{\alpha} F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa} \right].$$

Умножая это выражение на тензор  $T_{\alpha}{}^{\nu}$  в форме (4.15), получаем (9.3).

которого построен  $T_{\mu\nu}$  (и  $R_{\mu\nu}$ ), действительно удовлетворяет уравнениям Максвелла, даст новое дополнительное соотношение

$$\left[ \frac{\epsilon_{\beta\lambda\mu\nu} R^{\lambda\gamma}{}^{\mu} R_{\gamma}{}^{\nu} \sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}} \right]_{,\alpha} = \left[ \frac{\epsilon_{\alpha\lambda\mu\nu} R^{\lambda\gamma}{}^{\mu} R_{\gamma}{}^{\nu} \sqrt{-g}}{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}} \right]_{,\beta}. \quad (9.7)$$

Уравнения (9.4), (9.6) и (9.7) полностью описывают гравитацию и электромагнитное поле в отсутствие зарядов. Доказательство равенства (9.7) несколько громоздко; мы проводим его, следуя Мизнеру и Уилеру.

Нам понадобится тензор, дуальный тензору электромагнитной напряженности  $F^{\mu\nu}$  и определяемый здесь как

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (9.8)$$

Определим также операцию  $e^{*\alpha}$

$$e^{*\alpha} F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cos \alpha + *F_{\mu\nu} \sin \alpha. \quad (9.9)$$

Мы будем говорить, что преобразование (9.9) осуществляет поворот дуальности тензора  $F_{\mu\nu}$ <sup>1)</sup>. Определим также  $\xi_{\mu\nu}$  как тензор

$$\xi_{\mu\nu} = e^{-*\alpha} F_{\mu\nu}, \quad (9.10)$$

соответствующий повороту дуальности на угол  $-\alpha$ .

Посредством соответствующего выбора значения  $\alpha$  из  $F_{\mu\nu}$  можно получить тензор, обладающий более простыми свойствами. Рассмотрим инварианты

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_{\alpha\beta} \xi^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (F_{\alpha\beta} \cos \alpha - *F_{\alpha\beta} \sin \alpha)^2 = \\ &= \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} *F^{\alpha\beta} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (9.11a)$$

и

$$\frac{1}{2} \xi_{\alpha\beta} * \xi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} *F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \cos 2\alpha. \quad (9.11b)$$

<sup>1)</sup> Тензор, дуальный дуальному тензору, равен исходному тензору, взятому с обратным знаком, но той причине, что детерминант  $g$  отрицателен. Операция перехода к дуальному тензору соответствует повороту дуальности на угол  $\pi/2$ . Существенно отметить, что

$$*(e^{*\alpha} F_{\mu\nu}) = e^{*\alpha} *F_{\mu\nu}.$$

Кроме того, из предыдущего примечания вытекает равенство

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = - *F_{\alpha\beta} *F^{\alpha\beta}.$$

Вспомним, что величина (9.11а) равна  $H^2 - E^2$ , а величина (9.11б) равна  $2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$ , если обозначить через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электрическую и магнитную напряженности, соответствующие тензору  $\xi_{\alpha\beta}$  в лоренцовой системе отсчета. Выберем угол  $\alpha$  таким образом, чтобы величина (9.11б) обратилась в нуль. Тогда другой инвариант равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_{\alpha\beta} \xi^{\alpha\beta} &= \pm \left[ \left( \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} {}^*F^{\alpha\beta} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \pm \frac{c^4}{2G} \sqrt{R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}}. \quad (9.12) \end{aligned}$$

Ограничимся в дальнейшем условием, что угол  $\alpha$  берется в квадранте, соответствующем отрицательному знаку правой части равенства (9.12). Поле  $\xi_{\alpha\beta}$ , удовлетворяющее этим требованиям, называется предельным полем. Соответствующим выбором лоренцовой системы его можно превратить в чисто электрическое поле. Такое предельное поле удобно при проведении выкладок. До конца этого параграфа мы будем понимать под  $\xi_{\alpha\beta}$  предельное поле. Любое другое поле может быть получено из  $\xi_{\alpha\beta}$  посредством поворота дуальности и изменения масштаба. Используя формулу (4.15) для тензора энергии — импульса — натяжений поля Максвелла, можно показать, что все компоненты  $T_{\mu\nu}$  остаются неизменными при поворотах дуальности. Исходя из заданного вида тензора  $R_{\mu\nu}$ , обусловленного полем Максвелла, невозможно однозначно определить величину напряженности максвелловского поля, однако можно найти ее с точностью до постоянного множителя и операции поворота дуальности. Удобно записать уравнения Максвелла через  $\xi_{\mu\nu}$ , а затем добавить к ним другие выражения, квадратичные по  $\xi_{\mu\nu}$  и выражающие этот тензор через  $R_{\mu\nu}$ . Это приведет тогда к (9.7). Уравнения Максвелла принимают вид

$$0 = F^{\mu\nu}{}_{; \nu} = \left( \xi^{\mu\nu}{}_{; \nu} + {}^* \xi^{\mu\nu} \frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu} \right) \cos \alpha + \left( {}^* \xi^{\mu\nu}{}_{; \nu} - \xi^{\mu\nu} \frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu} \right) \sin \alpha, \quad (9.13a)$$

$$0 = {}^* F^{\mu\nu}{}_{; \nu} = \left( -\xi^{\mu\nu}{}_{; \nu} - {}^* \xi^{\mu\nu} \frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu} \right) \sin \alpha + \left( {}^* \xi^{\mu\nu}{}_{; \nu} - \xi^{\mu\nu} \frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu} \right) \cos \alpha. \quad (9.13б)$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} + {}^*\xi^{\mu\nu} \frac{\partial x}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (9.14a)$$

и

$${}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \xi^{\mu\nu} \frac{\partial x}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (9.146)$$

Тензор напряженности поля Максвелла удовлетворяет тождеству

$$F_{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} - {}^*F_{\mu\alpha} {}^*F^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (9.15)$$

Умножая (9.14a) на  ${}^*\xi_{\beta\mu}$ , а (9.146) на  $\xi_{\beta\mu}$  и используя (9.15), получаем

$$\frac{\partial x}{\partial x^{\beta}} = \frac{-2{}^*\xi_{\beta\mu} \xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \xi_{\beta\mu} {}^*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}}{\xi_{\gamma\delta} \xi^{\gamma\delta}}. \quad (9.16)$$

Задача заключается теперь в том, чтобы выразить тензор напряженности поля Максвелла через тензор Риччи и записать, таким образом, уравнения (9.16) в геометрических терминах.

Для удобства введем новый тензор четвертого ранга, построенный из тензора Риччи таким образом, чтобы он обладал свойствами симметрии тензора Римана. Новый тензор  $E_{\sigma\tau}{}^{\mu\nu}$  определяется как

$$E_{\sigma\tau}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\delta_{\tau}^{\mu} R_{\sigma}^{\nu} + \delta_{\sigma}^{\mu} R_{\tau}^{\nu} - \delta_{\sigma}^{\nu} R_{\tau}^{\mu} + \delta_{\tau}^{\nu} R_{\sigma}^{\mu}), \quad (9.17a)$$

причем

$$E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau} = \frac{1}{2} (R^{\delta\beta}{}_{;\gamma} - R^{\gamma\beta}{}_{;\delta}). \quad (9.176)$$

Рассматривая напряженность предельного максвелловского поля в лоренцовой системе координат, можно убедиться, что справедливо равенство

$$\frac{c^4}{G} E_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\xi_{\alpha\beta} \xi_{\gamma\delta} - {}^*\xi_{\alpha\beta} {}^*\xi_{\gamma\delta}. \quad (9.18a)$$

Это уравнение является тензорным; следовательно, оно справедливо в общем случае.

Можно также показать, что

$$\frac{c^4}{G} E_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\gamma\delta}{}_{\mu\nu} = (R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau})^{1/2} (-\xi_{\alpha\beta} \xi_{\mu\nu} + {}^*\xi_{\alpha\beta} {}^*\xi_{\mu\nu}). \quad (9.186)$$



Разрешая (9.18а) и (9.18б) относительно  $\xi_{\mu\nu}^{\xi_{\sigma\tau}}$ , получаем

$$\frac{G}{c^4} \xi_{\mu\nu}^{\xi_{\sigma\tau}} = -\frac{1}{2} E_{\mu\nu\sigma\tau} - \frac{1}{2} (R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta})^{-1/2} E_{\mu\nu\gamma\delta} E_{\sigma\tau}{}^{\gamma\delta}. \quad (9.19)$$

Определим теперь тензор  $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$  как

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} E_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} (\delta_{\alpha}{}^{\nu} R_{\beta}{}^{\mu} - \delta_{\beta}{}^{\nu} R_{\alpha}{}^{\mu}) \quad (9.20) \end{aligned}$$

и вычислим произведение  $F_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\gamma\delta\beta\tau}$ ;

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\gamma\delta\beta\tau} &= -\xi_{\mu\nu}^{\xi^{\mu\nu}} (*\xi_{\alpha\beta}^{\xi^{\beta\tau}}; \tau + \xi_{\alpha\beta} * \xi^{\beta\tau}; \tau) \left(\frac{G}{c^4}\right)^2 = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} (\delta_{\alpha}{}^{\nu} R_{\beta}{}^{\mu} - \delta_{\beta}{}^{\nu} R_{\alpha}{}^{\mu}) R^{\delta\beta}; \gamma = \frac{\sqrt{-g}}{2} \varepsilon_{\alpha\delta\gamma\mu} R^{\delta\beta}; \gamma R_{\beta}{}^{\mu}. \quad (9.21) \end{aligned}$$

Из уравнений (9.5) и выражения для тензора  $T_{\mu\nu}$  через  $F_{\mu\nu}$  следует соотношение (9.12)

$$-\frac{G}{c^4} \xi_{\alpha\beta}^{\xi^{\alpha\beta}} = \sqrt{R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}}.$$

Сравнивая (9.21) и (9.16), мы видим, что уравнения (9.16), полученные из уравнений Максвелла, можно переписать с помощью тензора Риччи в виде

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^{\beta}} = \varepsilon_{\beta\lambda\mu\nu} \frac{R^{\lambda\gamma}; \mu R_{\gamma}{}^{\nu}}{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}} \sqrt{-g}. \quad (9.22)$$

Так как величина, стоящая в (9.22) слева, есть градиент скаляра, то ротор от нее равен нулю. Отсюда следует соотношение (9.7)

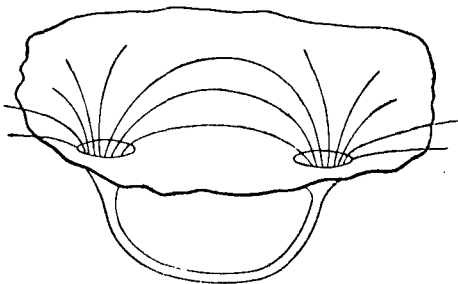
$$\alpha_{,\beta\gamma} = \alpha_{,\gamma\beta}.$$

Если тензор Риччи задан, то соответствующее поле Максвелла (с точностью до поворота дуальности) можно найти следующим образом. Будем использовать уравнения (9.22). Выбирая некоторую начальную точку отсчета, вычислим

$$\alpha(x) := \int_{\rho}^x \alpha_{,\mu} dx^{\mu} + \alpha_0.$$

Поскольку ротор от  $\alpha_{,\mu}$  равен нулю, это выражение не зависит от пути интегрирования; постоянная  $\alpha_0$  произвольна. Это

значение  $\alpha$  можно использовать далее для определения  $F_{\mu\nu} := e^{*\alpha} \xi_{\mu\nu}$ , так как величину  $\xi_{\mu\nu}$  можно вычислить в любой точке с помощью (9.19). Уравнения (9.22) теряют смысл в случае нулевого поля. Другая принципиальная трудность состоит в том, что допустимые значения геометрических величин на начальной гиперповерхности могут соответствовать более чем одному значению тензора Максвелла [6]. Эта неоднозначность, например, имеет место в случае локализации первоначальных максвелловских полей в двух отдельных областях. Поворот дуальности, производимый в одной из этих



Фиг. 14.

областей, приводит к изменению физической картины, но может не сказаться на геометрии в течение конечного промежутка времени.

Уилер отметил возможность описания зарядов, допустив существование многосвязных областей с неевклидовой топологией. Построенное из этих соображений схематическое изображение пары зарядов иллюстрируется фиг. 14. Такая теория эквивалентна теории в пространстве с евклидовой топологией, учитывающей существование зарядов. Мизнер отметил, что полное число силовых линий, проходящих через такую топологическую „ручку“, является интегралом движения.

Уилер рассмотрел также стабильные решения системы уравнений Максвелла и Эйнштейна. Его „геоны“ (гравитационно-электромагнитные образования) представляют собой объекты, имеющие массу и образованные полями, сдерживаемыми воедино собственным тяготением [7].

## 2. Уравнения движения

Как заметили в 1927 г. Эйнштейн и Громмер [8], уравнения движения системы масс уже содержатся в уравнениях гравитационного поля и поэтому не требуют отдельного постулирования, как в электродинамике. Бергманн отметил, что связи, накладываемые на возможные движения, являются следствием соотношений типа тождеств Бианки. При этом нелинейность приводит к законам движения типа законов Ньютона. Существует обширная литература, посвященная выводу уравнений движения и связи их с проблемой излучения и с законами сохранения. Мы хотели бы подчеркнуть, что в приведенных выше методах, предлагаемых для обнаружения и генерирования гравитационного излучения, используются как гравитационные, так и электрические силы. Поэтому выводы, основанные на рассмотрении уравнений движения и проблемы излучения только для гравитации, могут и не соответствовать результатам настоящей главы.

Следующий анализ уравнений движения принадлежит В. Фоку [9]. В нулевом приближении пространство считается плоским и используется метрика Лоренца. Тогда тензор энергии — импульса — натяжений можно взять в виде

$$T^{00} \approx \rho_M c^2, \quad T^{0i} \approx \rho_M c v^i \quad (9.23)$$

(латинские индексы пробегают пространственные значения). В этом приближении  $T^{0\mu};_{\mu} \approx T^{0\mu};_{\mu}$  и

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0. \quad (9.24)$$

Решения в случае слабого поля (7.13) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{00} &= \frac{4G}{c^4} \int \frac{(T'_{00})_{\text{зан.}} d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \varphi_{0i} &= \frac{4G}{c^4} \int \frac{(T'_{0i})_{\text{зан.}} d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \varphi_{jk} &= \frac{2G}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{(T'_{00})_{\text{зан.}} x'^j x'^k d^3x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

При малых скоростях ( $v/c \ll 1$ ) в этом приближении можно ограничиться лишь  $\varphi_{00}$  и  $\varphi_{0i}$ . Тогда из формул (7.2) и (7.10) следует, что

$$g_{00} \approx -1 + \frac{1}{2} \varphi_{00}, \quad g^{jk} \approx \delta^{jk}, \quad (9.26)$$

$$g_{0i} \approx \varphi_{0i}. \quad (9.27)$$

В следующем приближении мы должны принять во внимание закон  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Отсюда и из равенства (3.38) получим

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (9.28)$$

Это выражение мы перепишем как

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} + \Gamma^0_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} T^{0\alpha} = 0 \quad (9.29)$$

и

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^0} + \Gamma^i_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} T^{i\alpha} = 0. \quad (9.30)$$

Теперь мы покажем, что последнее соотношение представляет собой уравнения движения в ньютоновском приближении. Будем снова иметь в виду, что при малых скоростях  $T_{00} \gg T_{ij}$ . Учитывая это и сохраняя лишь члены первого порядка, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_M v^i) + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} - \frac{G \rho_M}{c^2} \nabla \int \frac{(T'_{00})_{\text{зан.}} d^3 x'}{|r - r'|} = 0, \quad (9.31)$$

где  $\rho_M$  — плотность массы вещества, измеренная в его локальной системе покоя. Первое слагаемое характеризует здесь инерцию, второе равно силе, действующей на единицу объема и обусловленной пространственными производными давления. Последнее слагаемое — градиент гравитационного потенциала.

Уравнение геодезической для частицы можно вывести, следуя Папапетру [10]. Пронтегрируем сначала соотношение  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  по всему трехмерному пространству, используя равенство (3.76). Поверхностные интегралы могут быть отброшены ввиду того, что наша частица локализована, и мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3 x = - \int \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^3 x. \quad (9.28A)$$

Проинтегрируем теперь по трехмерному объему произведения  $x^\gamma T^{\mu\nu}$ ;  $\nu = 0$ . Отбрасывая вновь поверхностные интегралы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} \int x^\gamma T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x &= \\ &= \int T^{\mu\gamma} \sqrt{-g} d^3x - \int x^\gamma \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^3x. \end{aligned} \quad (9.28Б)$$

Так как подынтегральные выражения здесь отличны от нуля лишь в малой области, целесообразно представить  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  в виде ряда

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = {}_0\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + {}_0\Gamma^\mu_{\alpha\beta, \sigma} \delta x^\sigma + \dots$$

Поставленный слева от величин индекс 0 указывает, что их следует брать в точке расположения частицы. Теперь следует учесть структуру частицы. Папастру определяет частицу типа единичного полюса как случай, когда из интегралов  $\int T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x$  лишь некоторые отличны от нуля. Для дипольной же частицы отличны от нуля по крайней мере некоторые из интегралов  $\int T^{\mu\nu} \delta x^\rho \sqrt{-g} d^3x$  и  $\int T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x$ . Обобщение этих соображений на случаи высших порядков мультипольности очевидно. Когда частица представляет собой „монополю“, то достаточно учесть лишь первый член в разложении  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ . Тогда соотношения (9.28А) и (9.28Б) дают

$$\frac{d}{dx^0} \int T^{\alpha 0} \sqrt{-g} d^3x + {}_0\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \int T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x = 0 \quad (9.28В)$$

и

$$\int T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^3x = \frac{dx^\alpha}{dx^0} \int T^{\beta 0} \sqrt{-g} d^3x. \quad (9.28Г)$$

Пусть в соотношении (9.28Г)  $\beta = 0$ ; это дает через четырехмерную скорость  $U^\alpha = U^0(dx^\alpha/dx^0)$

$$\int T^{\alpha 0} \sqrt{-g} d^3x = m \frac{dx^\alpha}{dx^0} = m_0 U^\alpha. \quad (9.28Д)$$

Положим массу покоя равной

$$m_0 = (U^0)^{-1} \int T^{00} \sqrt{-g} d^3x.$$

Подставляя (9.28Д) обратно в (9.28Г), получаем

$$\int T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^3x = \frac{1}{U_0} m_0 U^\alpha U^\beta. \quad (9.28E)$$

Теперь можно подставить (9.28E) в равенство (9.28В). Если учесть также соотношение (9.28Д), то мы придем к знакомому уравнению геодезической

$$\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0. \quad (9.31A)$$

Рассмотрение дальнейших членов разложения позволяет получить уравнения движения для частицы типа диполя. Ее спин определяется выражением

$$I^{\alpha\beta} = \int \delta x^\alpha T^{\beta 30} \sqrt{-g} d^3x - \int \delta x^\beta T^{\alpha 0} \sqrt{-g} d^3x,$$

и уравнения движения для  $I^{\alpha\beta}$  имеют вид

$$\frac{\delta I^{\alpha\beta}}{\delta s} + U^\alpha U^\beta \frac{\delta I^{\beta\gamma}}{\delta s} - U^\beta U^\gamma \frac{\delta I^{\alpha\gamma}}{\delta s} = 0. \quad (9.31B)$$

Здесь, как и в гл. 8, символ  $\delta/\delta s$  означает ковариантное дифференцирование по  $s$ .

Шифф [11] исследовал с помощью уравнений (9.31B) явление прецессии гироскопа, удерживаемого негравитационной силой связи  $F$ , в гравитационном поле Земли. В низшем порядке он пришел к выводу, что измеряемый сопутствующим наблюдателем вектор спина  $I^0$  должен удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dI^0}{dt} = & \left\{ \frac{1}{2mc^2} [F \times v] + \frac{3GM}{2c^2 r^3} [r \times v] + \right. \\ & \left. + \frac{GJ}{c^2 r^3} \left( 3(\omega \cdot r) \frac{r}{r^2} - \omega \right) \right\} \times I^0. \end{aligned} \quad (9.31B)$$

В уравнении (9.31B)  $v$  — скорость гироскопа,  $J$  — момент инерции Земли,  $\omega$  — ее угловая скорость вращения и  $r$  — радиальная координата. Первое слагаемое справа описывает, согласно специальной теории относительности, прецессию Томаса, второе и третье слагаемые дают общерелятивистский эффект. В случае гироскопа на поверхности Земли ожидается прецессия порядка  $10^{-8}$  радиан в день. Наблюдение таких эффектов в случае проведения экспериментов на Земле или

на искусственном спутнике дало бы новый способ проверки общей теории относительности. Довольно близкие методы предлагались (но не были опубликованы) Ферреллом [12] и позднее Пью [13].

Оказывается возможным вывести уравнения движения изолированных масс чисто геометрическим путем [14, 15], пользуясь лишь левой частью уравнений поля. Многие авторы получили высшие приближения уравнений движения, включающие эффекты излучения [16—18].

### 3. Принцип Маха

Принцип Маха утверждает, что свойство инерции полностью обусловлено взаимодействием материи. Таким образом, требуется приложить силу для того, чтобы сообщить некоторой частице ускорение относительно всей другой материи во Вселенной. В общей теории относительности по крайней мере часть центробежной силы вызывается взаимодействием. Рассмотрим пространственные компоненты уравнения геодезической линии, сохраняя члены порядка  $(v/c)^2$ :

$$-\frac{d^2x^i}{ds^2} = \Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^i_{j0} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^0}{ds} + \Gamma^i_{jk} \frac{v^j v^k}{c^2}$$

Здесь  $v$  — обычная трехмерная скорость частицы. С точностью до величин первого порядка по  $h_{\mu\nu}$  символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^i_{00} \approx -\frac{1}{2} h_{00,i} + h_{0i,0};$$

$$\Gamma^i_{j0} \approx \frac{1}{2} (h_{ij,0} + h_{i0,j} - h_{j0,i}),$$

$$\Gamma^i_{jk} \approx \frac{1}{2} (h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}).$$

Подставляя эти значения в уравнение геодезической, получаем

$$c^2 \frac{d^2x^i}{ds^2} = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \left[ \nabla_i \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial t} (c h_{0i}) \right] + c^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^j}{ds} [h_{j0,i} - h_{i0,j}] - c^2 h_{ij,0} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^0}{ds} - \Gamma^i_{jk} v^j v^k. \quad (9.32)$$

Используем уравнение (9.32) для исследования движения частицы внутри полой сферы радиусом  $R$  и с массой поля  $M$ . Пусть эта сфера вращается с угловой скоростью  $\omega$  по отно-

шению к наблюдателю, находящемуся внутри нее. Обозначим через  $R_S$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  сферические координаты элемента сферы, а через  $a$ ,  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  сферические координаты той точки внутри нее, где вычисляется величина поля. Через  $U^{\mu}$  обозначим четырехмерную скорость элемента сферы с точки зрения помещенного внутри нее наблюдателя. Компоненты этой скорости в прямоугольной системе координат равны

$$\begin{aligned} U^1 &= -\frac{\omega R_S \sin \theta \sin \varphi}{c \sqrt{1 - \omega^2 R_S^2 \sin^2 \theta / c^2}}, \\ U^2 &= \frac{\omega R_S \sin \theta \cos \varphi}{c \sqrt{1 - \omega^2 R_S^2 \sin^2 \theta / c^2}}, \\ U^3 &= 0, \\ U^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 R_S^2 \sin^2 \theta / c^2}}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Предположим, что механические натяжения в сфере малы, так что тензор энергии — импульса — натяжений приблизительно равен  $\rho_M c^2 U^{\mu} U^{\nu}$ . Тогда выражения (7.13) принимают вид

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{\rho_M U^{\mu} U^{\nu} d^3 x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (9.34)$$

Через  $\Phi_{\mu\nu}$  мы обозначили здесь величину  $h_{\mu\nu} - 1/2 \delta_{\mu\nu} h$ , так как  $\varphi$  уже означает координату. Имеет место равенство

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [a^2 + R_S^2 - 2aR_S (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0))]^{1/2}. \quad (9.35)$$

Величина  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  может быть разложена в ряд

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= \frac{1}{R_S} \left[ 1 - \frac{a^2}{2R_S^2} + \frac{a}{R_S} (\cos \theta \cos \theta_0 + \right. \\ &+ \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) + \frac{3a^2}{2R_S^2} (\sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ &\left. + \cos \theta \cos \theta_0)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Величина  $\rho_M$  теперь представляет собой плотность массы покоя элемента сферы, в то время как  $d^3 x'$  есть трехмерный элемент объема в системе покоя наблюдателя. Чтобы выразить результат через массу покоя сферы, заметим, что эле-



мент объема  $d^3x''$  в системе, в которой сфера покоится, связан с  $d^3x'$  соотношением

$$d^3x'' = \frac{d^3x'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (9.37)$$

Подставляя (9.37) в (9.34) и производя интегрирование, получаем с точностью до  $v^2/c^2$

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= \frac{4GM}{c^2 R_S} \left[ 1 + \frac{\omega^2 R^2 S}{3c^2} - \frac{2\omega^2 a^2}{15c^2} + \frac{\omega^2 a^2 \sin^2 \theta_0}{5c^2} \right], \\ \Phi_{11} &= \frac{4GM}{c^2 R_S} \left[ \frac{\omega^2 R^2 S}{3c^2} + \frac{\omega^2 a^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}{5c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{15c^2} \right], \\ \Phi_{22} &= \frac{4GM}{c^2 R_S} \left[ \frac{\omega^2 R^2 S}{3c^2} + \frac{\omega^2 a^2 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0}{5c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{15c^2} \right], \\ \Phi_{33} &= 0, \\ \Phi_{12} &= -\frac{4GM\omega^2 a^2 \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0}{5c^4 R_S}, \\ \Phi_{10} &= \frac{4GM\omega a \sin \theta_0 \sin \varphi_0}{3c^2 R_S}, \\ \Phi_{20} &= -\frac{4GM\omega a \sin \theta_0 \cos \varphi_0}{3c^2 R_S}, \\ \Phi_{30} &= \Phi_{23} = 0, \\ \Phi &= \Phi_{\mu}^{\mu} = -\frac{4GM}{c^2 R_S} \left[ 1 - \frac{\omega^2 R^2 S}{3c^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Отсюда можно определить величины  $h_{\mu\nu}$  как

$$h_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \Phi. \quad (9.39)$$

Из выражений (9.38) и (9.39) следует, что значение двух последних слагаемых в правой части уравнения (9.32) на порядок выше, чем  $(v/c)^2$ , и что в некоторых оставшихся членах можно отбросить множитель  $dx^0/ds$ . В таком случае уравнение геодезической принимает вид

$$c^2 \frac{d^2 x}{ds^2} = \nabla V - \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 \frac{d\mathbf{A}}{dt} + [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]], \quad (9.40)$$

где  $V = c^2 h_{00}/2$  и  $A_l = c h_{0l}$ . Полагая теперь  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  и записывая (9.40) в компонентах, получаем уравнения движения частицы внутри сферы

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{GM}{3c^2 R_S} \left[ \frac{4}{5} \omega^2 x - 8\omega \frac{dy}{dt} \right], \\ c^2 \frac{d^2 y}{ds^2} &= \frac{GM}{3c^2 R_S} \left[ \frac{4}{5} \omega^2 y + 8\omega \frac{dx}{dt} \right], \\ c^2 \frac{d^2 z}{ds^2} &= -\frac{8GM\omega^2 z}{15c^2 R_S}. \end{aligned} \quad (9.40a)$$

Из уравнений (9.40a) видно, что если тело покоится внутри вращающейся сферы, то мы будем наблюдать действие на тело некоторой центробежной силы. Вообще говоря, этот эффект будет малым — он равен умноженному на  $\sim GM/c^2 R_S$  значению, которое следовало бы в случае такого вращения относительно остальных масс Вселенной. Приведенный результат весьма давно получен Тиррингом.

Если сфера не вращается, но ей сообщено поступательное относительно находящейся внутри нее пробной частицы ускорение, направленное по оси  $x^1$ , то из (9.34) и (9.37) следует, что

$$h_{10} = \Phi_{10} = c A_1 = -\frac{4GMv_S}{c^3 R_S (1 - v_S^2/c^2)^{1/2}}. \quad (9.41)$$

Здесь  $v_S$  — скорость сферы. Тогда из (9.40) для частицы, покоящейся в некоторый момент внутри сферы, мы получим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{4GMa_S}{c^2 R_S (1 - v_S^2/c^2)^{1/2}} \left( 1 + \frac{(v_S \cdot v_S)}{c^2 (1 - v_S^2/c^2)} \right). \quad (9.40b)$$

В (9.40) через  $a_S$  обозначено ускорение нашей сферы.

Рассмотрим вместо сферы сплошное твердое тело массы  $M$ , придадим  $M$  ускорение относительно малой массы  $m$ . Если тело с массой  $m$  мгновенно покоится, то его ускорение можно вычислить с помощью уравнений (9.32) и потенциалов

(7.13а). Если ограничиться слагаемыми порядка  $v/c$ , то ускорение тела  $m$  равно

$$c^2 \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} = \nabla \frac{GM}{R_M} \left( 1 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_M)}{cR_M} \right) + \\ + \frac{4GM}{c^2 R_M} \left( 1 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_M)}{cR_M} \right) \mathbf{a} + \frac{4GM}{c^2} \left( \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_M)}{cR_M^2} \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (9.40в)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  — соответственно скорость и ускорение массы  $M$ , а  $\mathbf{R}_M$  — радиус-вектор от  $m$  до  $M$ . Уравнение (9.40в) содержит члены, зависящие от направления ускорения относительно радиус-вектора, соединяющего  $m$  и  $M$ . Они равны приблизительно величине изотропного эффекта ускорения, умноженной на  $v/c$ .

Рассматривая (9.40), мы можем заключить, что слагаемое  $\nabla V$  включает центробежную силу, связанную с относительным вращением, а член  $(dx^0/ds)^2 (d\mathbf{A}/dt)$  описывает силы, обусловленные относительной скоростью и относительным ускорением. Член  $[\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]]$  приводит к корнолисову ускорению. В случае вращающейся сферы величина  $[\nabla \times \mathbf{A}]$  дает внутреннее поле, аналогичное магнитному полю внутри вращающейся заряженной сферы. Из этих рассуждений видно, что для Вселенной как целого  $GM/c^2 R \approx 1$ , если справедлив принцип Маха.

Приведенная трактовка показывает, что интегральные эффекты, согласно общей теории относительности, по крайней мере до некоторой степени зависят от взаимодействия материи. Однако это не удовлетворяет требованиям принципа Маха, так как в отсутствие всякой материи, кроме пробной частицы, эффекты инерции все еще сохраняются. Специальная теория относительности представляет собой предельный класс решений, когда не накладывается никаких граничных условий. Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы инерция проявлялась как локальное свойство пространства и все члены, находящиеся в правой части уравнений (9.40), были устранены. Из уравнения типа (8.13) очевидно, что инерция, безусловно, изотропна<sup>1)</sup> вследствие

<sup>1)</sup> Коккони и Саллигер [19, 20] рассмотрели влияние анизотропности инертных свойств на структуру спектральных линий. В случае ядерного  $\gamma$ -излучения в кристаллах атомное магнитное поле приводит к расщеплению энергетического уровня ядра на  $(2J+1)$

формы тензора энергии — импульса — натяжений для частиц со скалярным типом массы покоя. По этим причинам эксперимент Хьюза, Робинсона и Бельтран-Лопеса [22] может рассматриваться как хорошее подтверждение современной формулировки общей теории относительности, а не сильного варианта принципа Маха.

Эйнштейн [23] и позднее Уилер исследовали вопрос о возможности толкования принципа Маха не как следствия уравнений поля, а как требования, накладываемого на граничные условия. Если система „изолированная“, то следует ввести требование, чтобы на больших расстояниях метрика должным образом переходила в метрику остальной части Вселенной. Удовлетворение таких граничных условий означало бы введение взаимодействия материи остальной части Вселенной с массой „изолированной“ системы. Осуществление такой программы могло бы дать соотношения, связывающие

---

равноотстоящих компоненты. При анизотропии инертных свойств  $\Delta M$  каждая компонента будет сдвинута на величину  $(\Delta M/M) TP_2$ , где  $T$  — средняя кинетическая энергия пуклона, а  $P_2$  — коэффициент, величина которого зависит от  $J$ , от магнитного квантового числа и ориентации магнитного поля относительно направления на галактический центр. При наблюдениях эффекта Мессбауэра сравниваются частоты переходов в поглотителе и излучателе. При включении относительного движения количество отсчетов становится функцией относительной скорости источника и поглотителя. Резонанс наступает по мере перекрытия линий, если правила отбора допускают возбуждение квантом со сдвинутой частотой. Тогда число наблюдаемых пиков изменится, если произойдет изменение относительного расположения зеемановских компонент и если атомные поля будут ориентированы в одном направлении. Если в излучателе и поглотителе атомные магнитные поля ориентированы случайным образом, то анизотропия инерции приведет к уширению линий. Эксперимент с использованием эффекта Мессбауэра не подтверждает этих соображений [21].

Недавно Хьюзом, Робинсоном и Бельтран-Лопесом [22] был произведен изящный и намного более чувствительный опыт по проверке анизотропии инертных свойств. Эти авторы измеряли частоту ядерного магнитного резонанса  $Li^7$  в растворе  $LiCl$  в течение 12 час. Вращение Земли изменило ориентацию установки относительно нашей Галактики. Этот метод обладает чрезвычайной чувствительностью ввиду большой величины кинетической энергии, связанной с  $P_{1/2}$ -состоянием протона в ядерном потенциале, и огромной степенью точности, с которой может быть измерена абсолютная величина магнитной ядерной резонансной частоты. Из полученного отрицательного результата следует, что  $\Delta M/M < 10^{-20}$ .

инертные свойства с конфигурацией материи в удаленных областях Вселенной.

Другой подход к принципу Маха был предложен Дике и Снама [24].

#### 4. Замечания относительно космологии

Уравнения общей теории относительности имеют решения, с помощью которых представляется возможным описать Вселенную в целом и ее эволюцию. Этот вопрос был уже давно рассмотрен Эйнштейном, который заключил, что уравнения гравитации не допускают статического решения для Вселенной, если в них не ввести дополнительный „космологический“ член  $\lambda g_{\mu\nu}$ . Позднее Фридман показал, что существуют нестатические решения, удовлетворяющие уравнениям без добавления космологического члена. Открытие красного смещения спектральных линий, возрастающего с расстоянием, подкрепляет предположение о нестатическом характере Вселенной, находящейся с этой точки зрения в настоящее время в фазе расширения.

Вселенная, кривизна которой положительна, была бы замкнутой, конечной, но неограниченной. Такая возможность весьма привлекательна. Были предложены и другие космологические модели, из которых мы упомянем модели Бонди, Голда и Хойла. Здесь мы ограничимся рассмотрением решения Фридмана [25].

Делается предположение о том, что Вселенная пространственно изотропна. Наблюдения подтверждают, что плотность звезд представляется одинаковой во всех направлениях. Этому соответствует метрика

$$- ds^2 = dt^2 - dx^0{}^2, \quad (9.42)$$

где

$$dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \mathcal{S}^2 a^2 (dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2). \quad (9.43)$$

Вследствие симметрии можно ожидать, что характер зависимости  $g_{ij}$  от пространственных координат не меняется со временем, так что  $g_{ij}$  можно представить в виде произведения функции  $\mathcal{S}$ , зависящей лишь от времени  $x^0$ , и функции  $a$ , зависящей от  $x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2 = r^2$ . Здесь  $x^1, x^2, x^3$  и величина  $r^2$  — безразмерные числа. Нам нужно выразить

$g_{ij}$  через инвариант кривизны этого пространства. Возьмем искривленное пространство и введем в некоторой заданной точке два вектора  $A^\mu$  и  $B^\mu$ . Тогда величина  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta$  будет инвариантом. Другой скаляр равен  $(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta$ , причем тензор  $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$  был выбран из тех соображений, что его свойства симметрии совпадали с соответствующими свойствами тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Величина  $K_R$ , определяемая как

$$K_R = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta}, \quad (9.44)$$

также является скаляром. Можно непосредственно проверить, что  $K_R$  не изменяется, если вместо  $A$  и  $B$  взять их любую линейную комбинацию. Эта величина  $K_R$  называется римановой кривизной. В изотропном пространстве риманова кривизна  $K_R$  не должна также зависеть и от выбора направленных векторов  $A^\mu$  и  $B^\mu$ , так что в заданной точке величина  $K_R$  имеет одно и то же значение при произвольных  $A^\mu$  и  $B^\mu$ . Таким образом, согласно (9.44), тензор Римана в изотропном пространстве будет равен

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (9.45)$$

Мы будем использовать выражение (9.45) для трехмерного пространства. Компоненту  $R_{1213}$  можно вычислить как из (9.45), так и из (3.48). На основании равенства (9.45) она равна нулю, так что можно записать

$$R_{1213} = -\frac{g_{11,23}}{2} + \frac{3}{4}g^{11}[g_{32,2}g_{11,3}] = 0. \quad (9.46)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что  $g_{11} = g_{22} = g_{33}$ . Теперь перейдем к координате  $r$  с помощью равенства  $\partial/\partial x^i = (\partial r/\partial x^i)(\partial/\partial r)$ . Из выражений (9.43) и (9.46) получим

$$2\left(\frac{da}{dr}\right)^2 + \frac{a}{r}\frac{da}{dr} - a\frac{d^2a}{dr^2} = 0. \quad (9.47)$$

Сравнивая выражения (3.48) и (9.45), можно также получить запись компонент  $R_{1331}$ ,  $R_{1221}$  и  $R_{2332}$ . Взяв их комбинацию и исключив с помощью уравнения (9.47) член  $d^2a/dr^2$ , получим

$$g^2 K_R a^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dr}\right)^2 + \frac{2}{ar}\frac{da}{dr} = 0. \quad (9.48)$$

Уравнения (9.47) и (9.48) выражают условия, накладываемые на  $a$  и  $\mathcal{S}$  требованием изотропности пространства.

Решения этих уравнений имеют вид

$$a = \frac{c_1}{c_2 + c_3 r^2}, \quad K_R = \frac{4c_2 c_3}{\mathcal{S}^2 c_1^2}. \quad (9.49)$$

Эквивалентное описание можно получить при следующем выборе постоянных:

$$a = \frac{1}{1 + \alpha r^2}, \quad K_R = \frac{4\alpha}{\mathcal{S}^2}. \quad (9.50)$$

Тогда метрика примет вид

$$-ds^2 = \frac{\mathcal{S}^2}{(1 + \alpha r^2)^2} (dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2) - dx^0{}^2 \quad (9.51)$$

или

$$-ds^2 = \frac{\mathcal{S}^2}{(1 + \alpha r^2)^2} (dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2) - dx^0{}^2, \quad (9.52)$$

причем мы снова отмечаем, что величина  $\mathcal{S}$  имеет размерность длины, а  $r$  безразмерна. „Радиус“  $\mathcal{R}$  определяется выражением

$$\mathcal{R} = \mathcal{S} \int_0^{\infty} \frac{dr}{1 + \alpha r^2}. \quad (9.53)$$

При  $\alpha > 0$  получим

$$\mathcal{R} = \frac{\pi \mathcal{S}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (9.54)$$

Из выражения (9.54) видно, что множитель  $\alpha$  зависит от нашего выбора единицы длины. Когда применяется (9.54), можно использовать координаты, соответствующие значению  $\alpha = 1$ . Используя равенство (9.45), получаем для трехмерной скалярной кривизны

$${}^3R_{IJ} = 2K_R g_{IJ}, \quad (9.55)$$

$${}^3R = 6K_R = 24\alpha \mathcal{S} \quad (9.56)$$

Из выражений (9.54) и (9.56) видно, что в случае  $\alpha = 1$  мы имеем дело с конечной неограниченной Вселенной, обладающей положительной кривизной. При  $\alpha = 0$  мы получим „евклидово“ открытое пространство, а при отрицательных  $\alpha$  — открытое искривленное пространство с отрицательной

кривизной. Теперь предположим, что тензор энергии — импульса — втяжений может быть в хорошем приближении выбран с единственной отличной от нуля компонентой  $T_{00} = \rho_M c^2$ . Тогда уравнения поля принимают вид

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3 \left[ 4\alpha + \left( \frac{d\mathcal{S}}{dx^0} \right)^2 \right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} = \frac{8\pi}{c^2} G \rho_M, \quad (9.57)$$

$$R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = \left[ 4\alpha + \left( \frac{d\mathcal{S}}{dx^0} \right)^2 + 2\mathcal{S} \frac{d^2\mathcal{S}}{dx^{0^2}} \right] \frac{1}{\mathcal{S}^2} = 0, \quad (9.58)$$

а выражения для  $R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R$  и для  $R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R$  тождественно совпадают с последним.

Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$\frac{d^2\mathcal{S}}{dx^{0^2}} + \frac{4\pi\mathcal{S}\rho_M G}{3c^2} = 0. \quad (9.59)$$

Ввиду положительности как величины  $\rho_M$ , так и  $\mathcal{S}$  из (9.59) следует, что функция  $\mathcal{S}$  не может иметь минимумов и точек перегиба, а также не может не зависеть от времени. В „евклидовом“ пространстве  $\alpha = 0$ , и из уравнения (9.57) получаем

$$\left( \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{d\mathcal{S}}{dx^0} \right)^3 = \frac{8\pi G \rho_M}{3c^2}. \quad (9.60)$$

Для  $\alpha \neq 0$  уравнения (9.58) и (9.59) дают

$$\left( \frac{d\mathcal{S}}{dx^0} \right)^2 = \frac{8\pi\mathcal{S}^2\rho_M G}{3c^2} - 4\alpha. \quad (9.61)$$

Уравнение (9.58) предполагает, что давление равно нулю. Полная масса  $M$  в любой момент времени определяется равенством

$$M = \rho_M \int_0^\infty \left( \frac{\mathcal{S}}{1 + ar^2} \right)^3 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (9.62)$$

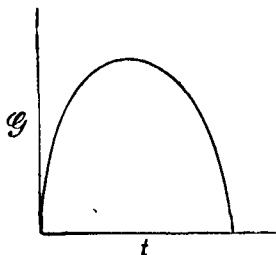
Если полная масса сохраняется, то величина  $\mathcal{S}^3 \rho_M$  должна быть постоянной во времени. Поэтому мы можем принять  $(8\pi/3c^2) G \mathcal{S}^3 \rho_M = \mathcal{S}_0$ , где  $\mathcal{S}_0$  — положительная постоянная; тогда получим

$$\left( \frac{d\mathcal{S}}{dx^0} \right)^2 = \frac{\mathcal{S}_0 - 4\alpha\mathcal{S}}{\mathcal{S}}. \quad (9.63)$$



При  $\alpha = +1$  мы имеем случай замкнутой Вселенной, для которой зависимость  $\mathcal{G}$  от времени изображена на фиг. 15. При  $\alpha = -1$  функция  $\mathcal{G}$  монотонно возрастает.

Возможность реализации наиболее привлекательного случая  $\alpha = +1$  может быть исследована, с помощью уравнений (9.60) и (9.61). Величину



Фиг. 15.

$$\frac{1}{\mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{dx^0}$$

можно вычислить, исходя из астрономических данных о скорости расширения Вселенной, а плотность  $\rho_M$  можно также получить из наблюдений. Если выполняется неравенство

$$\left( \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{dx^0} \right)^2 < \frac{8\pi G \rho_M}{3c^2},$$

то допустимы положительные значения  $\alpha$ . В настоящее время астрономические наблюдения дают для величины  $\rho_M$  слишком малые значения, чтобы можно было получить положительную постоянную  $\alpha$ . Уилер и Иваненко отметили, что не следует отказываться от идеи о замкнутой Вселенной с положительной кривизной до тех пор, пока мы не достигнем уверенности в том, что наши познания относительно  $\rho_M$  достаточно достоверны для исключения этого случая. Обнаружение других, еще не известных носителей энергии может привести к существенному увеличению оценки величины плотности массы — энергии по сравнению с данными наблюдений, использующих лишь видимый свет.

## 5. Гамильтонова формулировка [26—34]

Все изложение велось до настоящего момента в лагранжевой форме. Было показано, что из функций (6.4) и (6.10) следуют уравнения поля, а выражение (6.10) позволило написать уравнения Лагранжа в форме (6.14).

В квантовой теории с наибольшим успехом используется гамильтонова формулировка. Лагранжиан  $L$  является в механике функцией координат  $q_i$  и скоростей  $\dot{q}_i$ . Гамильтониан

же является функцией координат и импульсов и определяется следующим образом:

$$H = p_i \dot{q}_i - L. \quad (9.64)$$

Импульсы  $p_i$  определяются равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (9.65)$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \quad (9.66)$$

Закон изменения какой-либо другой динамической переменной, например  $b$ , записывается в виде

$$\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial b}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = [b, H]. \quad (9.67)$$

В уравнении (9.67) выражение  $[b, H]$ , называемое скобками Пуассона, определяется как

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k}.$$

Использование такого „канонического“ формализма становится возможным в том случае, когда величины  $p$  и  $q$  являются независимыми переменными в следующем смысле. Не должно существовать связей, т. е. не должно быть предписанных априори соотношений, связывающих их друг с другом<sup>1)</sup>. Мы видели, что в общей теории относительности

<sup>1)</sup> В лагранжевом формализме такого рода требование соответствует возможности выражения  $\ddot{q}_i$  через  $q_j$  и  $\dot{q}_j$ . Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

можно записать в виде

$$\ddot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Последняя система уравнений может быть разрешена относительно  $\ddot{q}_i$  лишь в том случае, если детерминант, составленный из  $\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$ , отличен от нуля. Если же он обращается в нуль, то необходимо использовать процедуру, в основном эквивалентную излагаемой здесь.

существуют различные типы связей. Некоторые из них описываются выражением (7.96) в форме системы уравнений, которым должны удовлетворять начальные значения полей, а также их значения во все последующие моменты времени. Термин „связь“ используется также для выражения факта существования некоторой степени произвола в теории, например, группы калибровочных преобразований в электродинамике или некоторых свойств ковариантности. Здесь мы будем весьма близко следовать ходу мыслей Дирака [28, 33].

При построении гамильтоновой формы теории связи могут появиться как только с помощью уравнений (9.65) будут введены импульсы. Может оказаться, что переменные  $p$  не являются независимыми функциями скоростей  $\dot{q}$ . Допустим, что существует некоторое число вытекающих из (9.65) соотношений, которые мы запишем в виде

$$\varphi_m(p, q) = 0. \quad (9.68)$$

Дирак называет все уравнения связей и уравнения, выполняющиеся вследствие наличия связей, слабыми уравнениями и записывает их как

$$f_m(p, q) \approx 0.$$

Мы используем метод „лагранжевых“ множителей. Из принципа действия  $\delta I = 0$ , записываемого для вывода уравнений движения, мы прежде всего получим

$$\delta I = \int \delta L dt = \int \left[ \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt. \quad (9.69)$$

Введем теперь лагранжевы множители  $u_m$ . Добавим величину

$$- u_m \delta \varphi_m = - u_m \left[ \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i} \delta p_i \right] \quad (9.70)$$

к подынтегральному выражению (9.69) и приравняем сумму к нулю. Если рассматриваются вариации, обращающиеся в нуль на концах пути интегрирования, то уравнения движения получают в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} - u_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Множители  $u_m$  являются функциями переменных  $p$  и  $q$ . Производная во времени от любой динамической переменной, например от  $A$ , дается<sup>1)</sup> равенством

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial A}{\partial p_l} \dot{p}_l = [A, H] + u_m [\dot{A}, \varphi_m]. \quad (9.72)$$

Некоторые из функций  $\varphi_m$  описывают действительно произвольные стороны задачи. В этом случае различному выбору произвольных функций соответствует тождественная физическая конфигурация. Дирак назвал такие „связи“ связями первого класса и развил систематический метод их исключения. Другие типы связей могут представлять действительные ограничения, накладываемые, например, на допустимые начальные значения. Метод Дирака учитывает также и их. Так как величины  $\varphi_m$  все время равны нулю, то из равенства (9.72) при подстановке  $A = \varphi_m'$  следует:

$$[\varphi_m', H] + u_m [\varphi_m', \varphi_m] = 0. \quad (9.73)$$

Если уравнения (9.73) разрешимы относительно  $u_m$ , то тем самым решена и наша задача. Если же нет, то уравнения (9.73) могут привести к добавочным соотношениям между величинами  $p_l$  и  $q_l$  типа

$$\chi_m(q, p) \approx 0. \quad (9.74)$$

Мы вновь можем написать

$$[\chi_k, H] + u_m [\chi_k, \varphi_m] = 0. \quad (9.75)$$

Эти выражения можно использовать для нахождения  $u_m$  и получить

$$u_m = U_m(q, p). \quad (9.76)$$

Рассмотрение (9.73) и (9.75) показывает, что к выражению (9.76) может быть добавлено любое решение уравнений

$$V_m [\varphi_m', \varphi_m] \approx 0, \quad V_m [\chi_k, \varphi_m] \approx 0. \quad (9.77)$$

Поэтому искомое общее решение равно

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \quad (9.78)$$

<sup>1)</sup> Не следует применять уравнения связей при вычислении скобок Пуассона; иными словами, в этом случае величины  $p$  и  $q$  рассматриваются как независимые.

где величины  $V_{am}$  представляют собой систему независимых решений уравнений (9.77).

Здесь в качестве коэффициентов  $v_a$  берутся произвольные функции времени. С помощью соотношений (9.78) можно исключить  $u_m$ , вводя в качестве переменных  $v_a$ . Число их вместе с общим числом независимых величин  $p_i$  и  $q_i$  может оказаться меньше, чем исходное число переменных  $p$  и  $q$ . Из соотношений (9.78) и (9.72) следуют обобщенные уравнения движения

$$\dot{A} = [A, H'] + v_a [A, \varphi_a], \quad (9.79)$$

в которых

$$H' = H + U_m \varphi_m, \quad \varphi_a = V_{am} \varphi_m. \quad (9.80)$$

Формально мы относим связь к первому классу, если скобки Пуассона от нее с гамильтонианом и со всеми  $\chi_k$  и  $\varphi_m$  равны нулю. Все прочие связи относятся ко второму классу. Другие авторы называли уравнения для  $\varphi_m$  уравнениями первичных связей, а уравнения  $\chi_k$  уравнениями вторичных связей.

Из уравнений (9.73) видно, что скобки Пуассона для  $\varphi_a$  и  $H'$  равны нулю. Кроме того,

$$[H', H] \approx U_m [\varphi_m', H] \approx 0. \quad (9.81)$$

Равенство нулю выражения (9.81) можно получить как следствие уравнений (9.77) и (9.78) после умножения уравнений (9.73) на  $U_m'$ . С помощью уравнений (9.73), (9.75) и (9.78) можно показать также равенство нулю скобок Пуассона с  $H'$  для  $\chi_k$  и  $\varphi_m$ . Поэтому величина  $H'$  относится к первому классу. Скобки Пуассона для  $\varphi_a$  с  $\varphi_m$  и  $\chi_k$  обращаются в нуль вследствие уравнений (9.77). Скобки Пуассона для  $\varphi_a$  с  $H$  равны нулю вследствие обращения в нуль соответствующих скобок с  $H'$ . Поэтому величины  $\varphi_a$  относятся к первому классу.

Мы видим, что уравнение (9.79) построено из функций первого класса  $H'$  и  $\varphi_a$ . Коэффициенты  $v_a$  произвольны и не ограничены выполнением уравнений движения. Можно видеть, что число произвольных функций времени  $v_a$  в общих решениях равно числу независимых величин первого класса  $\varphi$ . Дирак заметил, что практически мы знаем, какие произвольные функции содержатся в общем решении, так как

это вытекает из свойств инвариантности функции действия. Это позволяет узнавать функции первого класса, не вычисляя скобок Пуассона. Как мы увидим далее, ответ на этот вопрос может потребоваться раньше, чем станет известен гамильтониан.

В случае поля все пространство можно представить себе разделенным на ячейки. Тогда выражения (9.65) сохраняют силу, однако величины  $\dot{q}_i$  варьируются при этом лишь в данной ячейке объема  $\Delta\tau$ . Наш гамильтониан в этом случае равен

$$H = \sum_{\text{по ячейкам}} \left( \frac{\partial L_F}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_F \right) \Delta\tau. \quad (9.64A)$$

Плотность импульса задается равенством

$$\pi_i = \frac{\partial L_F}{\partial \dot{q}_i}. \quad (9.65A)$$

Полагая, что индекс  $i$  при суммировании пробегает значения, соответствующие всем переменным, можно записать

$$H = \int (\pi_i \dot{q}_i - L_F) d^3x \quad (9.64B)$$

и ввести величину плотности гамильтониана  $\mathcal{H}$  с помощью соотношения

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{q}_i - L_F. \quad (9.64B)$$

Из (9.64B) следует (суммирование по индексу  $j$  от 1 до 3):

$$\begin{aligned} \delta H &= S \left( \pi_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta \pi_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L_F}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_{i,j}} \delta q_{i,j} \right) d^3x = \\ &= \int \left( \dot{q}_i \delta \pi_i - \frac{\partial L_F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial L_F}{\partial q_{i,j}} \delta q_i \right) d^3x. \end{aligned} \quad (9.64Г)$$

В крайнем правом выражении в (9.64Г) отброшен поверхностный интеграл. Используя уравнения поля (4.8), можно свести выражение (9.64Г) к

$$\delta H = \int (\dot{q}_i \delta \pi_i - \pi_i \delta q_i) d^3x. \quad (9.64Д)$$

Из (9.64Д) видно, что величина  $\mathcal{H}$  является функцией  $q_i$  и  $\pi_i$ , так что можно записать

$$\begin{aligned} \delta H &= \int \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i,j}} \delta q_{i,j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} \delta \pi_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{i,j}} \delta \pi_{i,j} \right) d^3x = \\ &= \int \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i,j}} \right) \delta q_i + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{i,j}} \right) \delta \pi_i \right] d^3x. \end{aligned} \quad (9.64E)$$

В крайнем правом выражении в (9.64E) мы вновь отбросили интегралы по поверхности. Сравнивая в равенствах (9.64Д) и (9.64E) коэффициенты при  $\delta q_i$  и  $\delta \pi_i$ , получаем уравнения поля

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{i,j}}, \\ \dot{\pi}_i &= - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i,j}} \right). \end{aligned} \quad (9.66A)$$

Чтобы получить производную по времени от некоторой величины  $E$ , заданной в виде интеграла по трехмерному объему от плотности  $\mathcal{E}$ , мы запишем

$$\dot{E} = \int \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_{i,j}} \dot{q}_{i,j} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_{i,j}} \dot{\pi}_{i,j} \right) d^3x. \quad (9.67A)$$

Если величины  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  зависят от высших производных  $q_i$  и  $\pi_i$ , то эти производные также должны быть включены в выражения (9.67A), (9.64E) и (9.66A). Используя теперь (9.66A) в выражении (9.67A), а также отбрасывая слагаемые, имеющие вид поверхностных интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \int \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_{i,j}} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{i,j}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_{i,j}} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i,j}} \right) \right] d^3x = \\ &= [E, H] = \int \left[ \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\delta H}{\delta \pi_i} - \frac{\delta E}{\delta \pi_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] d^3x. \end{aligned} \quad (9.67B)$$

Это выражение определяет скобки Пуассона для полей. Обозначения функциональных производных, использованные в нижнем правом выражении, применяются рядом авторов.

Если величина  $E$  не задана в виде интеграла по объему от плотности, то ее можно непосредственно свести к такому виду, используя  $\delta$ -функцию.

Если имеются связи, наложенные на  $q_i$  и  $\pi_i$ , то можно последовать методу, который нас привел к выражениям (9.71). В результате в правой части равенства для  $\dot{q}_i$  добавляется слагаемое

$$u_m \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \pi_{i,j}} \right),$$

а в правой части равенства для  $\dot{\pi}_i$  — слагаемое

$$- u_m \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_{i,j}} \right)$$

[см. выражения (9.66А)]. Тогда уравнения движения (9.67В) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{E} = \int \left\{ \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_{i,j}} \right) \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_{i,j}} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_m \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \pi_{i,j}} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi_{i,j}} \right) \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_{i,j}} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_m \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_{i,j}} \right) \right] \right\} d^3x, \quad (9.67B) \end{aligned}$$

а уравнениям (9.79) соответствует

$$\dot{E} = [E, H'] + \int \dot{q}_a [E, \varphi_a] d^3x. \quad (9.79A)$$

В общей теории относительности роль переменных поля играют величины, необходимые для описания геометрии трехмерного пространства в любой данный момент. Тогда история поля складывается из последовательности искривленных трехмерных пространств. Поэтому целесообразно построить такой канонический формализм, чтобы число необходимых переменных ограничивалось лишь шестью компонентами  $q_{ij}$  и их каноническими импульсами.



Рассмотрим теперь плотность гравитационной функции Лагранжа <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G \sqrt{-g} &= g^{\mu\nu} (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \sqrt{-g} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-g} g_{\mu\nu, \rho} g_{\alpha\beta, \sigma} [(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) g^{\rho\sigma} + \\ &\quad + 2(g^{\mu\alpha} g^{\beta\rho} - g^{\mu\rho} g^{\alpha\beta}) g^{\nu\sigma}]. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Соответствующая функция Лагранжа равна  $\int \mathcal{L}_G \sqrt{-g} d^3x$ . Переменными поля являются здесь  $g_{\mu\nu}$ ; роль скоростей играют величины  $g_{\mu\nu, 0}$ . Производные  $g_{\mu\nu, i}$  являются функциями лишь  $g_{\mu\nu}$  и не зависят от скоростей  $g_{\mu\nu, 0}$ . Импульсы  $\pi^{\mu\nu}$ , канонически сопряженные переменным  $g_{\mu\nu}$ , определяются согласно соотношению

$$\int \delta L_G \sqrt{-g} d^3x = \int \pi^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu, 0} d^3x. \quad (9.83)$$

Как показал анализ, величина  $\mathcal{L}_G \sqrt{-g}$  не содержит членов, квадратичных по  $g_{\mu 0, 0}$ . Отсюда следует, что компоненты  $\pi^{\mu 0}$  будут функциями от  $g_{\alpha\nu}$  и  $g_{\alpha\nu, i}$ ; мы обозначим их через  $f^\mu$ :

$$\pi^{\mu 0} \approx f^\mu(g_{\alpha\nu}, g_{\alpha\nu, i}). \quad (9.84)$$

Выражения для  $f^\mu$  представляют собой соотношения связей. Теперь можно показать, что уравнения движения никоим образом не ограничивают значений  $g_{\mu 0, 0}$  и что поэтому связи (9.84) относятся к „первому классу“. При бесконечно малых преобразованиях координат

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + b^\mu$$

метрика преобразуется как

$$g_{\mu\nu}(x) - g'_{\mu\nu}(x') = \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} b^\rho_{, \nu} + g_{\nu\rho} b^\rho_{, \mu}. \quad (9.85)$$

Пусть  $b^\rho = 1/2(x^0 - c)^2 \beta^\rho(x^i)$ , где  $\beta^\rho(x^i)$  — произвольные функции. Тогда на гиперплоскости  $x^0 = c$

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= 0, & \delta g_{\mu\nu, 0} &= (g_{\mu\rho} \delta_{\nu}^0 + g_{\nu\rho} \delta_{\mu}^0) \beta^\rho, \\ \delta g_{ij, 0} &= 0, & \delta g_{\mu 0, 0} &= \beta_\mu + \delta_\mu^0 \beta_0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> В этом пункте мы используем систему единиц, в которой  $16\pi G/c^4 = 1$ .

Поскольку  $\beta$  произвольно, то ясно, что произвольное изменение величин  $g_{\mu 0, 0}$  не сказывается на  $g_{\mu\nu}$  или на  $g_{ij, 0}$ .

Представляется удобным (следуя замечаниям В. Баргмана) принимать во внимание, что некоторые переменные четырехмерного многообразия не меняют своей величины на заданной пространственноподобной поверхности при преобразованиях координат, не затрагивающих значений координат на этой пространственноподобной поверхности. Такие переменные называются „внутренними“<sup>1)</sup>. Говоря точнее, если производится преобразование координат

$$x'^{\mu} = F^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3),$$

причем функции  $F^{\mu}$  удовлетворяют условиям

$$F^0(c, x^1, x^2, x^3) = c',$$

$$F^i(c, x^1, x^2, x^3) = x^i,$$

то значения переменных, являющихся внутренними, не изменяются. Таким образом, величины  $g_{ij}$  — внутренние переменные. Компоненты же  $g_{00}$  и  $g_{0i}$  не являются внутренними и могут быть произвольно изменены путем выбора функции  $F^0$  или отдельных координат.

Можно ожидать, что внутренние переменные поля сыграют основную роль в гамильтоновой формулировке общей теории относительности.

Мы будем использовать здесь выражения для скобок Пуассона в виде (9.67Б). Тогда

$$[g'_{\alpha\beta}, \pi^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu}) \delta_3(x' - x),$$

где через  $g'_{\alpha\beta}$  обозначена величина тензора  $g_{\alpha\beta}$  при  $x_0 = c, x'^1, x'^2, x'^3$ .

Дирак указал, что из вида величины  $\mathcal{L}_G$  следует возможность такого ее преобразования, при котором обращаются в нуль  $f^{\alpha}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu, i})$ , а уравнения движения не изменяются. Это преобразование состоит в добавлении выражения

$$\Delta \mathcal{L}_G \sqrt{-g} = \left[ (\sqrt{-g} g^{00})_{,0} \frac{g^{i0}}{g^{00}} \right]_{,i} - \left[ (\sqrt{-g} g^{00})_{,i} \frac{g^{i0}}{g^{00}} \right]_{,0} \quad (9.86)$$

<sup>1)</sup> Соответствующий английский термин „intrinsic“. — Прим. перев.

к величине  $\mathcal{L}_0 \sqrt{-g}$ . Интеграл  $\int \Delta \mathcal{L}_0 \sqrt{-g} d^4x$  можно записать в виде поверхностного, откуда следует, что он не будет влиять на справедливость уравнений движения. Новая плотность лагранжиана  $\mathcal{L}_0^* \sqrt{-g}$  после довольно громоздких преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^* \sqrt{-g} = & \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{g^{00}} (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \{ -4\Gamma_{rs}^0 \Gamma_{ab}^0 + \right. \\ & + [g_{rs, u} g^{u0} - (g_{ra, s} + g_{sa, r}) g^{a0}] [g_{ab, v} g^{v0} - (g_{a\beta, b} + g_{b\beta, a}) g^{\beta 0}] + \\ & + g_{\mu\nu, i} g_{\alpha\beta, j} \{ (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) g^{ij} + \\ & \left. + 2(g^{\mu\alpha} g^{\beta i} - g^{\mu i} g^{\alpha\beta}) g^{\nu j} \} \right] \sqrt{-g}, \quad (9.87) \end{aligned}$$

где

$$e^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{g^{00}}. \quad (9.88)$$

Прозводя операции, указанные в (9.83), с использованием функции  $\mathcal{L}^*$  вместо  $\mathcal{L}$ , получаем

$$\delta \mathcal{L}_0^* \sqrt{-g} = (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \Gamma_{ab}^0 \delta g_{rs, 0} \sqrt{-g}. \quad (9.89)$$

Отсюда значения для импульсов  $\pi^{rs}$  равны

$$\pi^{rs} = (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \Gamma_{ab}^0 \sqrt{-g}. \quad (9.90)$$

Последнее равенство эквивалентно соотношению

$$\Gamma_{ab}^0 \sqrt{-g} = \left( g_{ra} g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs} g_{ab} \right) \pi^{rs}. \quad (9.91)$$

Рассмотрим теперь гиперплоскость  $x^0 = c$  и некоторую внутреннюю переменную полей  $\eta$ , которая зависит от  $g_{rs}$  и от возможно присутствующих потенциалов негравитационных полей. Сместим поверхность  $x^0 = c$  таким образом, чтобы каждая точка  $x^\mu$  перешла в  $x^\mu + a^\mu$ , где величины  $a^\mu$  малы и зависят лишь от  $x^i$ . Тогда

$$\delta \eta = \int \xi_\mu a^\mu d^3x, \quad (9.92)$$

причем  $\xi_\mu$  представляют собой функции  $x^i$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x^0} = \int \xi_0 d^3x. \quad (9.93)$$

Введем единичный вектор  $l^\mu$ , нормальный гиперплоскости  $x^0 = c$ :

$$l_l = l^\mu g_{\mu l}, \quad l^\mu l_\mu = -1, \quad (9.94)$$

откуда следует конкретное значение  $l^\mu$ :

$$l^\mu = g^{\mu 0} (-g^{00})^{-1/2}. \quad (9.95)$$

Определим величину  $\xi_L$  с помощью соотношений

$$-\xi_L = l^\mu \xi_\mu = g^{\mu 0} (-g^{00})^{-1/2} \xi_\mu \quad (9.96)$$

и

$$\xi_0 = (-g^{00})^{-1/2} \xi_L - \frac{g^{l0} \xi_l}{g^{00}}. \quad (9.97)$$

Соотношение (9.88) позволяет записать

$$e^{rs} g_{sa} = e^{r\mu} g_{\mu a} = \delta_a^r - \frac{g^{r0} \delta_a^0}{g^{00}}, \quad (9.98)$$

$$e^{rs} g_{sa} = \delta_a^r, \quad (9.99)$$

$$e^{rs} g_{s0} = -\frac{g^{r0}}{g^{00}}. \quad (9.100)$$

При учете этих соотношений мы получим из равенства (9.97)

$$\xi_0 = (-g^{00})^{-1/2} \xi_L + g_{r0} e^{rs} \xi_s, \quad (9.101)$$

а равенство (9.93) приобретает вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial x^0} = \int [(-g^{00})^{-1/2} \xi_L + g_{r0} e^{rs} \xi_s] d^3x. \quad (9.102)$$

Нам требуется, чтобы выполнялось равенство  $\partial \eta / \partial x^0 = [\eta, H]$ . Это можно осуществить, записав для гамильтониана следующее соотношение:

$$H = \int [(-g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_L + g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_s] d^3x \quad (9.103)$$

при

$$[\eta, \mathcal{H}_L] = \xi_L, \quad [\eta, e^{rs} \mathcal{H}_s] = e^{rs} \xi_s.$$

Величины  $\mathcal{H}_L$  и  $\mathcal{H}_s$  содержат члены, зависящие как от гравитационного, так и от других полей и вещества, причем только от их внутренних переменных. Из стандартного определения гамильтониана получим в случае гравитационного поля

$$H_G = \int (\pi^{rs} g_{rs,0} - \mathcal{L}_G^* \sqrt{-g}) d^3x, \quad (9.104)$$

где  $H_G$  — гравитационный гамильтониан. Используя выражения (9.87) и (9.90), можно представить гамильтониан (9.104) как

$$\begin{aligned}
 H_G = & \int \pi^{rs} \left( g_{rs,0} + \frac{\Gamma^0_{rs}}{g^{00}} \right) d^3x + \frac{1}{4} \int \sqrt{-g} \{ (e^{rs} e^{ab} - e^{ra} e^{sb}) \times \\
 & \times [g_{rs,u} g^{u0} - (g_{ra,s} + g_{sa,r}) g^{a0}] \times \\
 & \times \frac{1}{g^{00}} [g^{v0} g_{ab,v} - (g_{a\beta,b} + g_{b\beta,a}) g^{\alpha 0}] - \\
 & - g_{\mu\nu, l} g_{\alpha\beta, j} [(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) g^{lj} - 2 (g^{\mu l} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta l}) g^{\nu j}] \} d^3x.
 \end{aligned} \tag{9.105}$$

Первый интеграл в правой части равенства (9.105) можно с помощью выражений (9.91), (3.29) и (9.100) переписать как

$$\begin{aligned}
 & \int \pi^{rs} \left( g_{rs,0} + \frac{\Gamma^0_{rs}}{g^{00}} \right) d^3x = \\
 & = \int \left\{ (-g^{00})^{-1} (-g)^{-1/2} \left( g_{ra} g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs} g_{ab} \right) \pi^{rs} \pi^{ab} + \right. \\
 & \quad \left. + g_{u0} e^{uv} [\pi^{rs} g_{rs,v} - 2 (\pi^{rs} g_{rv})_{,s}] \right\} d^3x. \tag{9.106}
 \end{aligned}$$

Дирак предложил метод исключения скоростей и приведения оставшейся части выражения (9.105) к каноническому виду (9.103). Исследование второго подынтегрального выражения в (9.105) показывает, что оно не может дать никакого вклада вида  $g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_s$ , где величина  $\mathcal{H}_s$  является функцией лишь  $g_{rs}$  и  $g_{rs,j}$ . Поэтому нужно вычислить только вклад в  $(-g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_L$ . Так как величина  $\mathcal{H}_L$  зависит лишь от внутренних переменных  $g_{rs}$  и  $g_{rs,j}$ , она может быть вычислена в предположении  $g_{l0} = 0$ . Детерминант  $g$  можно представить через  ${}^3g$  (детерминант  $g_{rs}$ ) как  $g g^{00} = {}^3g$ . Отбрасывая интеграл по поверхности, получаем

$$\begin{aligned}
 H = & \int \left[ (-g^{00})^{-1/2} \left\{ ({}^3g)^{-1/2} \left( g_{ra} g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs} g_{ab} \right) \pi^{rs} \pi^{ab} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{4} ({}^3g)^{1/2} g_{rs,u} g_{ab,v} [(e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) e^{uv} + \\
 & + 2 (e^{ru} e^{ab} - e^{ra} e^{bu}) e^{sv}] + \\
 & \left. \left. + [({}^3g)^{1/2} g_{rs,u} (e^{rs} e^{uv} - e^{ru} e^{sv})]_{,v} + \mathcal{H}_{ML} \right\} + \right. \\
 & \left. + g_{m0} e^{mv} [\pi^{rs} g_{rs,v} - 2 (\pi^{rs} g_{rv})_{,s} + \mathcal{H}_{Mv}] \right] d^3x, \tag{9.107}
 \end{aligned}$$

где величины  $\mathcal{H}_{ML}$  и  $\mathcal{H}_{Mv}$  представляют собой части гамильтониана негравитационных полей и вещества, соответствующие составляющим  $\mathcal{H}_L$  и  $\mathcal{H}_s$  в выражении (9.103). Таким образом, остается лишь шесть степеней свободы, соответствующих компонентам  $g_{ij}$ , так как  $\pi^{00}$  обращаются в нуль вследствие видоизменения  $\mathcal{L}_G$ , которое подбиралось именно так, чтобы величины (9.84) обратились в нуль. Также соотношения (9.103) вместе с требованием  $[\pi^{00}, H] = 0$  приводят к обращению в нуль величин  $\mathcal{H}_L$  и  $\mathcal{H}_s$  вследствие наложенных связей.

В приближении слабого поля гамильтониан с точностью до членов порядка  $(h_{\mu\nu})^2$  включительно можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \int \left( \pi^{rs} \pi^{rs} - \frac{1}{2} \pi^{rr} \pi^{ss} + \frac{1}{4} g_{rs, u} g_{rs, u} - \frac{1}{4} g_{rr, u} g_{ss, u} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} g_{rs, r} g_{uu, s} - \frac{1}{2} g_{rs, u} g_{ru, s} + \mathcal{H}_{ML} \right) d^3x - \\
 & - \int [(-g_{00})^{-1/2} - 1] (g_{rs, rs} - g_{rr, ss} - \mathcal{H}_{ML}) d^3x - \\
 & - \int g_{r0} (2\pi^{rs}_{,s} - \mathcal{H}_{Mr}) d^3x. \quad (9.107a)
 \end{aligned}$$

Интеграл действия для частицы с массой покоя  $m$  равен

$$I = -m \int ds = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dT} \frac{dy^\nu}{dT}} dT,$$

где  $y^\mu$  — координаты частицы. Тогда

$$L_p = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dT} \frac{dy^\nu}{dT}}.$$

Величина  $dy^0/dT = 1$  не является динамической переменной. Импульс  $P_r$  дается формулой

$$P_r = m g_{\mu r} \frac{dy^\mu}{dT} \left( -g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial T} \frac{\partial y^\beta}{\partial T} \right)^{-1/2}.$$

Частица обуславливает вклад в гамильтониан, равный

$$H_M = P_r \dot{y}^r - L_M.$$

Эту величину можно записать в виде

$$H_M = -g_{s0} e^{rs} P_r + (-g^{00})^{-1/2} (m^2 + e^{rs} P_r P_s)^{1/2}.$$

Из выражения (9.103) следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ML} &= (m^2 + e^{rs} P_r P_s)^{1/2} \delta_3(x \cdots y), \\ \mathcal{H}_{Mr} &= -P_r \delta_3(x \cdots y).\end{aligned}$$

Другой подход к гамильтоновой формулировке общей теории относительности был развит Арновиттом, Дезером и Мизнером. Их результаты состоят в следующем<sup>1)</sup>.

Была получена каноническая формулировка общей теории относительности, в которой фигурируют лишь две пары взаимно сопряженных переменных, не подверженных связям. В интеграле действия

$$I = \int \sqrt{-g} R d^4x$$

полынтегральное выражение в первом порядке записывается как

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} R &= -g_{ij} \pi^{ij}{}_{,0} + (-{}^3g g^{00})^{-1/2} \left( {}^3g {}^3R + \frac{1}{2} \pi^2 - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) + \\ &+ 2g_{0i} \pi^{ij}{}_{,1j} - 2 \left\{ ({}^3g)^{1/2} [(-g^{00})^{-1/2}]_{,i} + \left( \pi_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \pi \right) g_{0m} e^{mj} \right\}^{11},\end{aligned}\tag{9.108}$$

где

$$\pi^{ij} = \sqrt{-g} (\Gamma^0{}_{im} - g_{im} \Gamma^0{}_{nq} e^{nq}) e^{ij} e^{mj},$$

причем  $e^{ij}$  — матрица, обратная  $g_{ij}$ ; величина  ${}^3R$  построена при использовании лишь  $g_{ij}$ ;  $\pi$  есть след  $\pi_i^i$ , а чертой обозначается ковариантная производная относительно метрики  $g_{ij}$ . Варьирование этой функции действия позволяет получить все обычные уравнения гравитационного поля Эйнштейна в форме Палатини. При варьировании на границах мы приходим к генерирующей функции

$$G = \int (-g_{ij} \delta \pi^{ij} + T^0{}_{\mu}{}' \delta x^{\mu}) d^3x,$$

где члены, содержащие тензор энергии — импульса — натяжений  $\int d^3x T^0{}_{\mu}{}' \delta x^{\mu}$ , обращаются в нуль в силу уравнений

<sup>1)</sup> Эта часть с незначительными изменениями является по существу перепечаткой письма Арновитта, Дезера и Мизнера [35] в редакцию журнала *Nuovo simento*. Перепечатано с разрешения авторов и журнала.

связей  $G_0^{\mu\nu} = R_0^{\mu\nu} - 1/2 \delta_0^{\mu\nu} R = 0$  [в свою очередь получаемых при варьировании выражения (9.108) по  $(-g^{(0)})^{1/2} g_{0i}$ ].

Разложим теперь величины  $g_{ij}$  и  $\pi^{ij}$  на взаимно ортогональные составляющие, пользуясь общей схемой

$$f_{ij} = f_{ij}{}^{TT} + \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} f^T - \frac{1}{\Delta} f^T{}_{,ij} \right) + f_{i,j} + f_{j,i}, \quad (9.109)$$

где  $1/\Delta$  — обратный оператор Лапласа плоского пространства при надлежащем образом подобранных граничных условиях, и, кроме того,

$$f^T = f_{ii} - \frac{1}{\Delta} f_{ij,ij}, \quad (9.109a)$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta} \left( f_{ij,j} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} f_{kj,kj} \right); \quad (9.109b)$$

величина же  $f_{ij}{}^{TT}$  описывает поперечно-поперечную часть поля  $f_{ij}$ , след которой равен нулю:

$$f_{ij}{}^{TT}{}_{,j} = 0, \quad f_{ii}{}^{TT} = 0.$$

Такое разложение имеет смысл лишь при наложении системы координатных условий. Мы выберем следующие:

$$g_{ij,j} = 0, \quad \pi^{ii}{}_{,jj} - \pi^{ij}{}_{,ij} = 0. \quad (9.110)$$

При этом общая ковариантность теории сохраняется, так как наложение этих координатных условий эквивалентно использованию определенных инвариантных функционалов от метрики в качестве независимых переменных вместо координат<sup>1)</sup>. Условия (9.110) означают, что выбраны функ-

<sup>1)</sup> Так условия де Дондера  $(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,;\nu} = 0$ , представляющиеся, как хорошо известно, на первый взгляд нековариантными, эквивалентны ковариантному требованию, что в качестве координат  $x^\alpha$  следует взять четыре линейно независимые скалярные функции  $h^\alpha$ , причем  $h^\alpha{}_{;\mu}{}^{;\mu} = 0$ . Такая эквивалентность координатных условий и ковариантных соотношений имеет место и в данном случае, а также, конечно, и при любом другом выборе координат, не зависящем от величин  $x^\mu$ , соответствующих какой-то исходной системе.



ционалы <sup>1)</sup>

$$t = -\frac{1}{2\Delta} \pi^T, \quad x^i = g_i. \quad (9.111)$$

Они обеспечивают асимптотически плоский характер пространства.

Вводя в генерирующую функцию разложение на ортогональные составляющие, получим после нескольких интегрирований по частям

$$G = \int \left\{ \pi^{iJT} \delta g_{ij}^{TT} + g^T{}_{,ii} \delta \left[ -\frac{1}{2\Delta} \pi^T \right] - 2\pi^{ij}{}_{,j} \delta g_i \right\} d^3x, \quad (9.112)$$

так как в интеграле действия вариация  $\delta$  и дифференцирование по времени коммутируют с операцией разложения по ортогональным составляющим. Здесь величины  $g^T{}_{,ii}$  и  $\pi^{ij}{}_{,j}$  можно выразить через  $g_{ij}^{TT}$  и  $\pi^{iJT}$ , решая четыре уравнения для связей <sup>2)</sup>  $G_\mu^0 = 0$  относительно этих величин. Таким образом, мы видим, что генерирующая функция (9.112) имеет стандартный канонический вид  $G = p \delta q - H \delta t$  с добавлением членов, содержащих импульсы  $T_i^0$ , и характерных для теории поля:

$$G = \int \left( \pi^{iJT} \delta g_{ij}^{TT} - \mathcal{H} \delta t + T_i^0 \delta x^i \right) d^3x. \quad (9.112a)$$

Так как в выражениях для  $g_{ij}$  и  $\pi^{ij}$  координаты  $x^i$  и  $t$  явно не фигурируют, они не войдут явно и в уравнения  $G_\mu^0 = 0$ . Дальнейшие вычисления показывают, что они не появляются

<sup>1)</sup> Чтобы связать (9.110) и (9.111), на оператор  $1/\Delta$ , разумеется, были наложены соответствующие граничные условия. Простой способ придать этому оператору явно несингулярный вид состоит в том, что выражения (9.111) переписываются в виде  $te^{-\alpha r} = -(1/2\Delta) \pi^T$ ,  $x^i e^{-\alpha r} = g_i$ , а в дальнейшем, по окончании расчета, берутся предельные выражения при  $\alpha \rightarrow 0$ .

<sup>2)</sup> Тот факт, что уравнения  $G_\mu^0 = 0$  имеют решения по крайней мере в виде рядов теории возмущений для  $g^T{}_{,ii}$  и  $\pi^{ij}{}_{,j}$ , можно легко проверить; также может быть проверено и выполнение указанных координатных условий в таком разложении. Таким образом, гамильтониан может быть представлен в виде бесконечного разложения в ряд по степеням канонических переменных, начиная с гамильтониана  $\mathcal{H}$  линеаризованной теории.

также и в решениях для  $g^T{}_{,il}$  и  $\pi^{ij}{}_{,j}$ . Таким образом, величины

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -g^T{}_{,il}(g_{ij}{}^{TT}, \pi^{ijTT}), \\ \frac{1}{2}T_i^0 &= -\pi^{ij}{}_{,j}(g_{rs}{}^{TT}, \pi^{rsTT})\end{aligned}\quad (9.113)$$

не зависят явно от координат. Этот факт независимости от координат позволяет нам вывести обычные законы сохранения. Из выражения (9.112а) и из того, что действие, соответствующее выражению (9.108), приводится к виду

$$I = \int \left\{ \pi^{ijTT}(g_{ij}{}^{TT})_{,0} - \mathcal{H}(g_{ij}{}^{TT}, \pi^{ijTT}) \right\} d^4x, \quad (9.108a)$$

следует, что названными двумя независимыми парами канонических переменных являются  $g_{ij}{}^{TT}$  и  $\pi^{ijTT}$ . Поэтому эти величины удовлетворяют простым соотношениям для скобок Пуассона

$$[g_{mn}{}^{TT}(\mathbf{r}), \pi^{ijTT}(\mathbf{r}')] = \delta^{ij}{}_{mn}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{TT}, \quad (9.114)$$

где поперечно-поперечная  $\delta$ -функция  $\delta^{ij}{}_{mn}{}^{TT}$  с нулевым следом определяется как в линейной теории и, конечно, не зависит от метрики [36].

Энергия поля  $E$  определяется как численное значение гамильтониана для данного решения уравнений движения. Таким образом, при оценке величины

$$E = - \int g^T{}_{,il} d^3x \quad (9.115)$$

компоненты  $g^T{}_{,il}$  не требуется выражать через канонические переменные, так что  $E$  можно представить в виде интеграла по поверхности (хотя сам гамильтониан и не приводится к такому виду). Из выражения (9.109а) следует, что

$$E = - \int g^T{}_{,i} dS_i = - \int (g_{j\ell, i} - g_{ij, j}) dS_i, \quad (9.116)$$

где  $dS_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} dx^j dx^k$  — бесконечно удаленный элемент двумерной поверхности в прямоугольных координатах. Здесь было принято, что метрика асимптотически приближается к метрике плоского пространства, а координаты становятся декартовыми прямоугольными на пространственной бесконечности. Преобразования координат, при которых эти граничные условия сохраняются, можно точно рассмотреть в ли-

неаризованной теории, где величина  $g^T$  является координатным скаляром [36]. Таким образом, нет необходимости для оценки энергии приводить метрику к канонической системе координат. Равным образом нет необходимости использовать прямоугольные координаты, производя обычные тензорные преобразования в плоском пространстве к требуемой (например, сферической) системе. Фактически это определение равносильно утверждению о том, что величину энергии замкнутой системы можно найти из коэффициента, стоящего при члене  $1/r$  в асимптотическом разложении  $g^T$ . Эта величина совпадает также с гравитационной массой системы, действующей на удаленную пробную частицу (в силу граничных условий). Постоянство энергии обеспечивает независимость этого коэффициента от времени. Выражение (9.116) не изменяется при добавлении точечной частицы, взаимодействующей с гравитационным полем; в этом случае величина  $E$  описывает полную энергию системы, включая энергию связи. В простейшем случае метрики Шварцшильда энергия, разумеется, совпадает с параметром, характеризующим массу.

Желательно, чтобы выражения для энергии и импульса замкнутой системы содержали только величины, необходимые для описания состояния системы в данный момент времени. В общей теории относительности такими переменными в отсутствие каких-либо координатных условий являются величины  $g_{ij}$  и  $\pi^{ij}$ ; величины  $g_{0\mu}$  уже не могут служить для нашей цели, так как они выражают характер изменения выбора координат в последующие моменты. Этому условию удовлетворяет выражение (9.115) для энергии. Рассуждения, подобные только что приведенным, справедливы и в отношении полного импульса гравитирующей системы, когда снова величина  $\pi^l$  при асимптотическом удалении переходит в координатный скаляр. Примером задачи начальных условий, в которой величины  $g_{0\mu}$  не определены, является пространственная метрика для „проблемы многих тел“ Лишнеровица [37]:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 + \sum \frac{\alpha_n}{2|r - a_n|} \right), \quad (9.117a)$$

$$\pi^{ij} = 0. \quad (9.117b)$$

Здесь из уравнения (9.116) однозначно следует значение  $\sum \alpha_n$  для энергии.

Этот формализм позволяет нам также сформулировать критерии существования гравитационного излучения, полностью соответствующие подобным критериям в электродинамике. Так условием уходящего на бесконечность излучения является существование там вектора Пойнтинга. Поток энергии сквозь бесконечно удаленный элемент поверхности  $dS_i$  равен

$$T_i^0 dS_i = -2\pi^{ij}{}_{,j} dS_i, \quad (9.118)$$

где правая часть вновь может быть вычислена в любой асимптотически декартовой прямоугольной системе координат. В более общей формулировке критерий существования гравитационных волн в какой-либо точке состоит в наличии в этой точке (в канонической системе координат) отличных от нуля величин  $g_{ij}{}^{TT}$  и  $\pi^{ijTT}$ . Иначе говоря, это означает, что в такой точке имеет место возбуждение гравитационного поля, отразившееся в поведении одной из его канонических переменных (которые не зависят от переменных источника). Это утверждение совпадает с определением волны в теории электромагнетизма, требующим существования канонических переменных электромагнитного поля  $A_i^T$  или  $E_i^T$ . В случае, когда полное отсутствие волн очевидно, а именно для решения Шварцшильда, можно убедиться, что в канонической системе величины  $g_{ij}{}^{TT}$  и  $\pi^{ijTT}$  повсюду равны нулю, чем и оправдано отношение к этому решению как „решению для одной частицы“. При рассмотрении приведенных выше начальных условий „проблемы многих тел“ аналогичный вывод не был получен.

## 6. Замечания о квантовании общей теории относительности

Как было отмечено Ландау, Клейном и Паули, квантованная общая теория относительности должна рассматриваться в теории элементарных частиц высоких энергий. В квантовой электродинамике был предложен импульс обрезания  $P$ , для которого

$$\ln \frac{P^2}{m^2 c^2} \approx \frac{1}{\alpha}. \quad (9.119)$$

Здесь  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры, а  $m$  — масса покоя электрона. Выражение (9.119) было получено Челленом

и Паули как следствие требования математической непротиворечивости теории. Ландау заметил, что для энергий, соответствующих импульсу обрезания, гравитационное взаимодействие уже достигает порядка величины кулоновского взаимодействия. Иными словами, по мере роста энергии возрастает масса и сила гравитационного взаимодействия. В то же время электрический заряд не изменяется.

Принципы квантовой теории хорошо разработаны. В этих принципах отражена „зернистая“ структура природы и факт взаимодействия между измерительными приборами и исследуемыми системами. Как заметил Бергманн, неквантованная общая теория относительности не может существовать рядом с квантовой теорией без противоречий. Гравитационное поле описывается метрическим тензором; в этом смысле оно является наиболее фундаментальным физическим полем. Его квантование может оказать глубокое воздействие на наше понимание пространства и времени, особенно в рамках малых масштабов (высоких энергий).

Любопытно, что из величин  $\hbar$ ,  $G$  и  $c$  можно построить величину, имеющую размерность длины:

$$L = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см.} \quad (9.120)$$

Эта величина слишком мала для того, чтобы быть непосредственно связанной с известными в настоящее время размерами элементарных частиц. Если <sup>1)</sup> обратиться к фейнмановской теории квантования, то следует записать для волновой функции поля выражение

$$\psi_{\text{посл.}} = \int K_E(c, c') \psi_{\text{пред.}}(c') dc',$$

ядро которого равно,

$$K_E = \sum_H e^{iI_H/\hbar}, \quad (9.121)$$

причем  $\sum_H$  символизирует сумму по всем историям поля. Для гравитационного поля можно записать

$$e^{iI_H/\hbar} = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int \frac{c^3}{16\pi G} R \sqrt{-g} d^4x \right]_H. \quad (9.122)$$

<sup>1)</sup> Приводимые рассуждения следуют замечаниям Дж. А. Уилера.

Фейнмановская сумма в принципе должна включать всевозможные метрики и топологии как допустимые истории, если они совместны с лоренцовой сигнатурой. Так как

$$R \sim \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2,$$

то из выражения (9.122) следует, что при рассмотрении четырехмерной пространственновременной области с линейными размерами  $L$  следует ожидать квантовых флуктуаций порядка

$$\langle (\Delta g_{\mu\nu})^2 \rangle \sim \frac{\hbar G}{c^3 L^2}. \quad (9.123)$$

Можно было бы также рассчитывать на устранение трудностей квантовой теории поля [38]. В ней используется ряд функций, имеющих особенность на световом конусе. Рассмотрим две точки, лежащие на световом конусе в плоском пространстве. Переходя к искривленному пространству, мы обнаружим, что вторая точка уже не лежит более на световом конусе. Производя фейнмановское суммирование по всем метрикам, вероятно, можно ликвидировать трудности, связанные со свойствами функций на световом конусе. К сожалению, это означает, что любая попытка квантования, исходящая из линейного приближения плоского пространства, будет неизбежно сама содержать все эти расхождения. Для их устранения может оказаться необходимым с самого начала ввести квантование нелинейной теории.

## 7. Спиноры в общей теории относительности

Здесь мы коротко рассмотрим формализм, использованный Баргманом<sup>1)</sup> для описания спинорных полей в общей теории относительности. Вводится поле  $\gamma$ -матриц, удовлетворяющее антикоммутационному закону

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I, \quad (9.124)$$

где  $I$  — единичная матрица. Компоненты матриц  $\gamma$  предполагаются непрерывными функциями координат, преобразую-

<sup>1)</sup> Здесь мы следуем Л. Бриллю и Дж. А. Уилеру [39]. См. также работы В. А. Фока и Д. Иваненко [40—42].

щимися при преобразованиях координат как компоненты вектора. При спином преобразовании

$$(\text{Спинор})_{\text{нов.}} = S^{-1} (\text{Спинор})_{\text{стар.}} \quad (9.125)$$

матрицы  $\gamma$  преобразуются по закону

$$(\gamma_\alpha)_{\text{нов.}} = S^{-1} (\gamma_\alpha)_{\text{стар.}} S. \quad (9.126)$$

Проще использовать вещественное представление матриц  $\gamma$  и спиновые преобразования  $S$ , матричные элементы которых также действительны.

Дальнейший формализм строится для того, чтобы обеспечить тензорные законы преобразования для тензоров, спиновые преобразования (9.125) для спиноров, а для спинтензоров при спином преобразовании закон

$$(T_{\mu\nu})_{\text{нов.}} = S^{-1} (T_{\mu\nu})_{\text{стар.}} S. \quad (9.127)$$

Для ковариантного дифференцирования вводятся дополнительные  $4 \times 4$ -матрицы  $\Gamma_\alpha$ . На основании закона (9.124) эти матрицы  $\Gamma_\alpha$  определяются с точностью до величины, пропорциональной единичной матрице, согласно соотношению

$$\gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \gamma_\alpha - \Gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \Gamma_\nu = 0. \quad (9.128)$$

Ковариантная производная по  $x^\mu$  от величины, обладающей спиновыми трансформационными свойствами, записывается с помощью символа  $\nabla_\mu$  и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (AB) &= (\nabla_\mu A) B + A (\nabla_\mu B), \\ \nabla_\mu (A^*) &= (\nabla_\mu A)^*, \\ \nabla_\mu \gamma_\nu &= 0. \end{aligned} \quad (9.129)$$

Здесь звездочка означает транспонированную комплексно сопряженную величину. Можно использовать и линейные приближения  $\gamma$ -матриц, известные из специальной теории относительности. Мы обозначим их через  $\tilde{\gamma}_\mu$  и запишем

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu + \tilde{\gamma}_\nu \tilde{\gamma}_\mu &= 2\delta_{\mu\nu} I, \\ \tilde{\gamma}_\mu^* &= \tilde{\gamma}_\mu, \quad \tilde{\gamma}_0^* = -\tilde{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (9.130)$$

Часто используется локальный ортогональный репер (Vierbein, тетрапод). В каждой точке вводится локально лоренцова метрика с помощью соотношений

$$dx^\mu = a^\mu_\nu d\tilde{x}^\nu, \quad d\tilde{x}^\mu = b^\mu_\nu dx^\nu. \quad (9.131)$$

Здесь  $\tilde{x}^\nu$  — координаты, соответствующие лоренцовой метрике, а  $x^\nu$  — общий случай координат.

Система матриц  $\gamma$ , удовлетворяющих закону (9.124), имеет вид

$$\gamma_\mu = b_\mu^\nu \tilde{\gamma}_\nu. \quad (9.132)$$

Решение уравнения (9.128) для  $\Gamma_\mu$  приводит к выражению

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{\partial b_\nu^\beta}{\partial x^\mu} \right) a^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \right] S^{\alpha\nu} + a_\mu I. \quad (9.133)$$

Здесь  $a_\mu$  произвольны, а  $S^{\mu\nu} = 1/2 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ . При использовании формализма локальных реперов преобразование подобия спиноров соответствует лоренцову преобразованию репера.

Ковариантная производная спинора  $\psi$  имеет вид

$$\nabla_{\mu\alpha} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\alpha} \psi. \quad (9.134)$$

Ковариантная производная спинтензора  $F_{\mu\nu}$  равна

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu;\alpha} + F_{\mu\nu} \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha F_{\mu\nu}. \quad (9.135)$$

Зарядовое сопряжение по Паули мы обозначим индексом  $^\dagger$  и определим эту операцию как

$$\psi^\dagger = \psi^* \beta, \quad (9.136)$$

где  $\beta$  — эрмитова матрица, которая выбирается таким образом, чтобы матрицы  $i\beta\gamma^\nu$  были также эрмитовы. В формализме локальных реперов  $\beta = i\tilde{\gamma}^0$ . Вещественные величины, подобные плотности тока, можно записать в виде

$$J^\mu = \psi^\dagger i\gamma^\mu \psi. \quad (9.137)$$

В общей теории относительности уравнение Дирака принимает вид

$$\gamma^\sigma \nabla_\sigma \psi + \mu \psi = 0, \quad (9.138)$$



причем произвольное значение следа матриц  $\Gamma_\mu$  подбирается таким образом, чтобы было учтено присутствие четырехмерного электромагнитного потенциала. Уравнение (9.138) можно получить из следующего вариационного принципа:

$$\delta \int [\psi^\dagger \gamma^\alpha (\nabla_\alpha \psi) + \mu \psi^\dagger \psi] \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (9.139)$$

где величины  $\psi^\dagger$  и  $\psi$  варьируются независимо друг от друга.

При помощи этих соотношений можно обосновать утверждение о том, что атом представляет своего рода естественные часы. Вдоль мировой линии атома можно ввести лоренцову систему отсчета. Тогда для атома будет справедливо приближение уравнения (9.138) в плоском пространстве, так как масштабы атома слишком малы для того, чтобы внутренние движения его частиц испытывали влияние тензора Римана. При сравнении излучения такого атома с излучением атома, находящегося на большом расстоянии, производится такое преобразование координат, что изменяется лишь временная координата, причем для атомов, расположенных в различных точках, используются одни и те же временные координаты. Тогда из (9.124) следует, что  $\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 \sqrt{-g^{00}}$ . Энергия ассоциируется с оператором  $\tilde{\gamma}^0 \partial / \partial x^0$ , так что энергетические уровни принимают значения  $E^n = E^{n0} \sqrt{-g_{00}}$  в согласии с формулой для красного смещения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kurşunoglu B., Proceedings of the Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics, 1957; ASTIA Document AD118180; WADC Techn. Rep., 57—216.
2. Hlavaty V., Geometry of Einstein's Unified Field Theory, Groningen, Netherlands, 1957.
3. Rainich G. Y., Trans. Am. Math. Soc., 27, 106 (1925).
4. Misner C. W., Wheeler J. A., Ann. of Phys., 2, 6, 525 (1957).
5. Wheeler J. A., Ann. of Phys., 216, 604 (1957).
6. Witten L., Phys. Rev., 120, 635 (1960).
7. Wheeler J. A., Phys. Rev., 97, 511 (1955).
8. Einstein A., Grommer J., Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 6, 235 (1927).

9. Фок В. А., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 3, 325 (1957).
10. Papapetrou A., *Proc. Roy. Soc.*, A209, 248 (1951).
11. Schiff L. I., *Phys. Rev. Let.*, **4**, 215 (1960).
12. Ferreil R. A., Gravity Research Foundation Essay, New Boston, New Hampshire, April 1, 1959.
13. Pugh R. A., Weapons Systems Evaluation Group Memorandum 11, November 12, 1959.
14. Einstein A., Infeld L., Hoffmann, *Ann. d. Math.*, **39**, 65 (1938).
15. Infeld L., *Acta Phys. Polonia*, **13**, 187 (1954).
16. Goldberg J. N., *Phys. Rev.*, **89**, 263 (1953).
17. Scheidegger A. E., *Phys. Rev.*, **99**, 1883 (1955).
18. Infeld L., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 398 (1957).
19. Cocconi G., Salpeter E. E., *Nuovo cimento*, **10**, 646 (1958).
20. Cocconi G., Salpeter E. E., *Phys. Rev. Let.*, **4**, 176 (1960). (См. перевод: НПГ, стр. 484.)
21. Sherwin, Frauenfelder, Garwin, Luscher, Margulies, Peacock, *Phys. Rev. Let.*, **4**, 399 (1960).
22. Hughes, Robinson, Beltran-Lopez, *Phys. Rev. Let.*, **4**, 342 (1960).
23. Einstein A., *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, 1950. (См. перевод: Эйнштейн А., *Сущность теории относительности*, ИЛ, 1955.)
24. Sciama D. W., *Monthly Notices*, **113**, 34 (1953).
25. Фридман А., *Zs. f. Phys.*, **10**, 377 (1922).
26. Anderson J. L., Bergmann P. G., *Phys. Rev.*, **83**, 1018 (1951).
27. Dirac P. A., *Canad. Journ. Math.*, **2**, 129 (1950).
28. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, A246, 326 (1958). (См. перевод: НПГ, стр. 128.)
29. Bergmann P. G., Penfield R., Schiller R., Zatzkis H., *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950).
30. Pirani F. A. E., Schild A., *Phys. Rev.*, **79**, 986 (1950).
31. Pirani F. A. E., Schild A., Skinner R., *Phys. Rev.*, **87**, 452 (1952).
32. Bergmann P. G., *Helv. Phys. Acta, Suppl.*, IV, 79 (1956).
33. Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc.*, A246, 333 (1958). (См. перевод: НПГ, стр. 139.)
34. Dirac P. A. M., *Phys. Rev.*, **114**, 924 (1959).
35. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., *Nuovo cimento*, XV, 487 (1960).
36. Arnowitt R., Deser S., *Phys. Rev.*, **113**, 745 (1959).

37. Lichnerowicz A., Journ. Math. Pure a. Appl., 9, 37 (1944).
38. Deser S., Rev. Mod. Phys., 29, 417 (1957).
39. Brill D., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., 29, 465 (1957).
40. Иваненко Д., Изв. АН СССР (1929).
41. Фок В., Иваненко Д., Compt. rend., 188 (1929).
42. Фок В., Иваненко Д., Zs. f. Phys., 59, 718 (1929).
43. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Phys. Rev., 116, 1322 (1959).
44. Robertson H. P., Proc. Natl. Acad. Sci., U. S., 15, 822 (1929).
45. См. статьи в Rev. Mod. Phys., 29, 5 (1957).
46. Witten L., Phys. Rev., 115, 1, 206 (1959).
47. Bondi H., Cosmology, Cambridge, 1952.
48. Halpern O., Heller G., Phys. Rev., 48, 434 (1935).
49. Thirring H., Phys. Zs., 19, 33 (1918); 22, 29 (1921).
50. Jordan P., Jubilee of Relativity Theory, Helvetica Physica Acta, Suppl., IV, 157 (1956).
51. Heckmann O., Schücking E., Jubilee of Relativity Theory, Helvetica Physica Acta, Suppl., IV, 114 (1956).
52. Klein O., Jubilee of Relativity Theory, Helvetica Physica Acta, Suppl. IV, 58, 147 (1956).
53. Lemaître G. E., Monthly Notices, 91, 490 (1931).
54. Ландау Л. Д., в сборнике Niels Bohr and the Development of Physics, ed. by W. Pauli, 1955. (См. перевод в сборнике: „Нильс Бор и развитие физики“, ИЛ, 1958.)
55. Klein O., в сборнике Niels Bohr and the Development of Physics, ed. by W. Pauli, 1955. (См. перевод в сборнике: „Нильс Бор и развитие физики“, ИЛ, 1958.)
56. Navas P., Phys. Rev., 113, 732 (1960).

---

## Упражнения

---

*Просто старательно выполняйте упражнения; тогда вы уясните себе, что вы уже поняли и что еще нет.*

А. Зоммерфельд

(В. Гейзенбергу)

1. Рассмотреть ковариантные и контрвариантные компоненты вектора на плоскости, на которой использованы косоугольные координаты.
2. Вывести выражения (3.30) и (3.31) для законов преобразования символов Кристоффеля первого и второго родов.
3. Показать, что число независимых компонент тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в  $N$ -мерном пространстве равно  $(N^2/12)(N^2 - 1)$ .
4. Рассмотреть вопрос о вложении искривленного  $N$ -мерного пространства в плоское пространство большего числа измерений.
5. Вывести выражение (3.48) для тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .
6. Построить систему координат на торе и вычислить в ней все компоненты величин  $g_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  и  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .
7. Найти, чему равно произведение  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ .
8. Контрвариантный вектор подвергается параллельному переносу вдоль малой окружности на сфере. В точке  $\theta = \pi/4$ ,  $\varphi = 0$  компоненты этого вектора равны  $A^{\theta} = 0$  и  $A^{\varphi} = 2$ . Вдоль пути переноса вектора  $\theta = \text{const}$ . Вычислить значения компонент  $A^{\theta}$  и  $A^{\varphi}$  как функций от  $\varphi$  на малой окружности.
9. Наблюдатель, покоящийся в равномерно ускоренной системе, измеряет время с помощью синхронизованных часов, покоящихся в инерциальной системе, по отношению к которой он движется ускоренно. Вычислить  $g_{\mu\nu}$  для ускоренно движущегося наблюдателя.

10. Произвести преобразования, приводящие к выражению (4.15).
11. Вывести выражение (5.6).
12. Вывести равенство (5.13а), исходя из четырехмерного потенциала, имеющего компоненты  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$  и  $A_0 = f(r)$ .
13. Записать точную формулу для красного смещения (5.21) в виде разложения в ряд и сравнить результат с рядом, полученным из релятивистского доплер-эффекта при выводе принципа эквивалентности (гл. 1). До какого порядка по гравитационному потенциалу согласуются между собой эти разложения? Приводит ли это к противоречию между общей теорией относительности и принципом эквивалентности?
14. Вывести выражения (9.1), (9.2) и (9.3).
15. Показать, что из выражения (9.44) следует одно и то же значение  $K$  при образовании любых линейных комбинаций векторов  $A$  и  $B$ .
16. Пусть задан лагранжиан

$$L = \dot{q}_0^2 - q_0^2 + b_1 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2 + b_3 \dot{q}_3 + \dot{q}_4,$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  — функции переменных  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ .  
Получить уравнения движения.

17. Произвести преобразования, приводящие к выражениям (9.87), (9.91), (9.95), (9.106) и (9.107).
18. На спутнике помещены естественные часы, показания которых сравниваются с показаниями тождественных им часов, покоящихся на поверхности Земли. Показать, что при сравнении протекших интервалов по истечении заданного промежутка координатного времени мы обнаружим<sup>1)</sup>

$$\frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} = \frac{GM}{2c^2 r} \left( \frac{1 - 2h/r}{1 + h/r} - \frac{3\omega^2}{4\pi G \rho_M} \right),$$

где  $s_1$  — интервал, измеренный часами на поверхности Земли,  $s_2$  — интервал, измеренный часами на спутнике,  $h$  — высота принятой за круговую орбиты спутника над поверхностью Земли,  $M$  — масса Земли,  $\rho_M$  — средняя

<sup>1)</sup> См. также Singer, Phys. Rev., 104, 11 (1956).

плотность Земли,  $r$  и  $\omega$  — соответственно радиус и угловая скорость вращения Земли.

19. Найти в выражении (9.107) слагаемые, составляющие трехмерную скалярную кривизну.
20. Рассмотреть<sup>1)</sup> теории тяготения, использующие частицы спинов 0 и 1, и объяснить причину их несостоятельности.

---

<sup>1)</sup> См. также S. N. Gupta, Rev. Mod. Phys., 29, 334 (1957).

## Высший предел для межзвездного гравитационного излучения

---

*Дж. Вебер, Р. Л. Форвард, Д. Зипой, С. Смит и Х. Бениофф*<sup>1)</sup>

Влияние гравитационного излучения на упругое тело было исследовано ранее [1]. Изменяющаяся во времени компонента тензора Римана ( $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ ), связанная с гравитационным полем, действует в качестве движущей силы в волновом уравнении для напряжения или смещения. Было предложено [1] использовать в качестве детектора гравитационного излучения собственные колебания Земли или какой-либо массы внутри лаборатории. В настоящее время в Мэрилендском университете проводятся эксперименты по измерению межзвездного гравитационного излучения на частотах в тысячи герц.

Исходя из теоретических соображений, мы ожидаем, что спектр шумов межзвездного гравитационного излучения будет иметь максимум на очень низких частотах. Следовательно, наиболее выгодно будет использовать детектор с предельно низкой возможной частотой ответа. Наибольшей массой, доступной для эксперимента, является сама Земля. Различные теоретические виды колебаний для Земли были известны с 1882 г. Однако до самого последнего времени [2] не были известны приборы с достаточно большим периодом колебаний для измерения частот и амплитуд колебаний Земли.

Используемые здесь данные были получены с помощью сейсмографа В. Бениоффа № 32<sup>o</sup> в Изабелле (Калифорния). Амплитуды напряжений в земной коре были проанализированы, исходя из этих данных, в сейсмологической лабора-

---

<sup>1)</sup> J. Weber, R. L. Jorward, D. Zipoy, C. Smith, H. Benioff, Upper Limit for Interstellar Gravitational Radiation, Nature, 189, 473 (1961).

тории Калифорнийского Технологического института при помощи вычислительной техники, предоставленной фирмой Сандиа корпорейшн. Измерения, проведенные после недавнего землетрясения в Чили, были достаточны, чтобы отождествить различные типы колебаний и определить их ширины и частоты. Данные, полученные на изабельском сейсмографе в течение спокойного периода, не дают пиков на частотах различных видов колебаний; следовательно, напряжения, наблюдаемые прибором, представляют собой внешние шумы, лежащие выше уровня действительных напряжений, создаваемых рассматриваемыми видами колебаний в течение спокойного периода. Эти данные, таким образом, полезны только для установления приблизительной верхней границы эффектов гравитационного излучения. По этой причине точный анализ влияния тензора Римана на различные типы колебаний хотя и возможен, но ценность его весьма невелика. С целью вычисления верхнего предела мы используем уравнения, полученные Вебером для величин напряжений, вызванных тензором Римана в продольно колеблющемся стержне [1].

Натяжения в упругом теле при резонансе связаны с римановым тензором соотношением

$$\varepsilon(\omega) \approx \frac{2c^2 Q}{\omega^2 \pi} R_{10j0}(\omega), \quad (1)$$

где  $\varepsilon(\omega)$  и  $R_{10j0}(\omega)$  — компоненты Фурье соответственно натяжений и тензора Римана,  $\omega$  — угловая частота,  $c$  — скорость света и  $Q$  — отношение частоты к резонансной полуширине. Возводя в квадрат (1) и интегрируя по всем частотам, мы получаем для среднеквадратичного натяжения, связанного с данной гармоникой:

$$\overline{\varepsilon(t)^2} \approx \frac{4c^4 Q}{\pi^2 \omega^3} R^2_{10j0}(\omega) = \frac{60GQ}{c^3 \omega} t_{0r}(\omega). \quad (2)$$

В уравнении (2)  $R^2_{10j0}(\omega)$  — спектр интенсивности тензора Римана,  $G$  — постоянная тяготения, а  $t_{0r}(\omega)$  — спектр падающего потока гравитационной энергии в предположении, что излучатели покоятся относительно Земли.

В табл. 1 приведены результаты, полученные для ряда частот сейсмологической лабораторией, а также верхние границы для тензора Римана и для потока энергии. Данные напряжений были округлены, так как наблюдаемые флук-



туации хаотичны и не коррелируют с собственными частотами колебаний Земли.

Таблица 1

Основной вид колебаний	Период, мин	Q (оценочное)	Напряжение (среднее) [2]	$R_{i0j0}^2$ $\text{см}^{-4} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$	$t_{0g}^{(0)}$ , $\text{вт} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$
$S_2$	54,0	400	$80 \cdot 10^{-25}$	$< 0,5 \cdot 10^{-75}$	$< 20$
$S_4$	25,8	350	20	2	20
$S_6$	16,0	300	8	3	10
$S_8$	11,81	250	4	5	10
$S_{10}$	9,66	210	2,5	7	10
$S_{14}$	7,47	180	1,2	10	10
$S_{20}$	5,78	160	1	20	10
$S_{30}$	4,37	120	0,6	30	10
$S_{38}$	3,66	100	0,6	60	10

Эта таблица показывает, что спектр энергии тензора Римана для падающего гравитационного излучения не может превышать значения  $\approx 10^{-75} \text{ см}^{-4} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  в области частот 1 гц/час. Числа для потока энергии очень велики [20  $\text{вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ ], но не имеют особого смысла. Энергия, связанная с данным тензором Римана, зависит от системы отсчета, в которой она определена. Мы предполагали излучатель покоящимся. Расчеты, проведенные в системе, связанной с центром массы Земли, и усредненные затем по объему Земли, дали бы на десять порядков меньший поток энергии. Это происходит потому, что Земля свободно падает, а поток энергии всегда исчезает в полюсе геодезической координатной системы. Другое предположение заключается в том, что под воздействием тензора Римана Земля ведет себя, как упругое тело. Если бы Земля вела себя как жидкость, то поверхностные напряжения для данного тензора Римана были бы на много порядков меньше, и предельные значения в нашей таблице — соответственно больше.

Данные по напряжениям Земли позволяют вычислить только спектр интенсивности тензора Римана. Другие эффекты, типа флуктуаций периода вращения Земли, дают возможность найти оценку общего потока.

Эта работа частично поддерживалась Национальным научным фондом.

Физический факультет,  
Университет Мэриленда,  
Колледж-Парк, Мэриленд.  
Сейсмологическая лаборатория  
Калифорнийского технологического института,  
Пасадена, Калифорния

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Weber J., Phys. Rev., 117, 1, 306 (1960). (См. перевод: НПГ, стр. 446.)
2. Benioff H., Press F., Smith S., Journ. Geophys. Res. (в печати).

## Гравитационные волны

---

Г. Бонди<sup>1)</sup>

Экспериментальное изучение гравитационных волн ставит весьма сложные проблемы главным образом вследствие чрезвычайной слабости гравитационных полей; волны могут стать заметными только в случае очень массивных тел, движущихся с большими ускорениями. Хотя в настоящее время возможности наблюдения гравитационных волн и отсутствуют, можно все же сделать некоторые заключения относительно их основных свойств.

Эта статья посвящена связи теории гравитации со всеми остальными областями физики и обзору некоторых путей развития этой теории за последние годы.

Гравитационные волны не только непривычны, даже по названию, но явно весьма трудны для наблюдения. Несмотря на это, их изучению уделяется заметное внимание и это изучение является весьма поучительным, так как с ним связано большое число областей физики. Они занимают среднее положение между физикой явлений огромного масштаба и квантовой теорией, между теорией гравитации и проблемами изучения электромагнитных и других волн, между чистой математикой и физикой. Настоящее исследование посвящено гравитационным полям быстро движущихся тел. Гравитационные силы незначительны, пока тела, создающие их, не велики по массе, а для таких массивных тел высокие ускорения практически неизвестны — отсюда и экспериментальная „непривлекательность“ этой задачи. Исследователь неизбежно сталкивается с математическими вопросами, требующими при-

---

<sup>1)</sup> Bondi H., Gravitational Waves, Endeavour, XX, 79, 121—130 (July, 1961).

менения наиболее совершенной современной теории гравитации, именно общей теории относительности Эйнштейна; значительная доля трудностей рассматриваемой проблемы возникает вследствие математической сложности этой теории. Чтобы выяснить, почему эта теория пользуется доверием, достаточным для оправдания усилий, затраченных на исследование гравитационных волн, необходимо углубиться в историю физики и рассмотреть основания теории. Так как наш вопрос переплетается со многими областями физики, то прежде чем проблема гравитационных волн сможет быть сформулирована, необходимо надлежащим образом провести достаточно детальный обзор ряда аспектов этих областей.

## 1. Ньютоновская механика

Хорошо известно, что три закона Ньютона дали механике твердую базу и обеспечили известный период ее быстрого развития. Однако истинный смысл этого вклада не всегда отчетливо понимается. Напомним, что Ньютон связал силу с ускорением, тогда как раньше считалось, что она связана со скоростью. В чем состояла столь большая ценность этого, по существу нового, определения силы, в котором ускорение заменило скорость? Причину можно ясно увидеть, наблюдая движение Земли. Рассматривая силу, вызывающую это движение, в предположении, что она связана именно со скоростью, как считали в доньютоновскую эпоху, причину движения следовало искать в направлении этой скорости. Но смотреть в направлении скорости Земли бесполезно; иногда можно увидеть одну какую-нибудь незначительную звезду, иногда другую, а иногда и совсем ничего.

Если, однако, взглянуть в направлении ускорения Земли, то там окажется Солнце, и этот-то, наиболее важный объект, совершенно естественно считать своего рода причиной орбитального движения Земли. Выражаясь несколько иначе, ньютоновское определение силы позволяет связать наблюдаемую кинематическую величину — ускорение Земли, с чем-то таким, что можно наблюдать оптически, именно с направлением на Солнце. Характерная черта любой удачной научной гипотезы состоит как раз в том, что она объединяет два прежде не связанных между собой типа наблюдения, что

и достигнуто в данном случае. Долговременный успех ньютоновской механики именно в этом и состоял. Более того, мы сталкиваемся здесь с идеей, к которой будем неоднократно возвращаться в этой статье, а именно с идеей принципиального единства физики. Физику нельзя подразделить на некоторое число совершенно не связанных разделов, например механику, оптику, учение о теплоте; все эти области связаны друг с другом множеством способов и много исключительно важных общих физических понятий было бы потеряно, если бы человеческий разум не уловил эти связи. Нельзя иметь один тип физики для механики, а другой — для другой области; механика никогда бы не была построена без оптических наблюдений, и не существует такой вещи, как чисто механический эксперимент. Любой вопрос всегда касается более чем одной области физики и, как мы только что заметили, самое основание механики зависит от единства механических и оптических наблюдений.

Следующий пункт, на который должно быть обращено внимание, это характер системы отсчета, относительно которой измеряется ускорение. Сила в механике Ньютона рассматривается как нечто реальное, имеющее истинный физический смысл. Второй закон Ньютона предполагает, следовательно, что ускорение столь же истинно. Но ускорение есть мера изменения скорости и скорость — мера изменения положения; а положение, скорость и ускорение — все некоторым образом относительно. Состояние движения измеряющей системы определяет, какие именно значения каждой из этих переменных получатся при их измерении.

Таким образом, если ускорение — физическая реальность, нечто такое, что может быть отождествлено с действительной физической переменной, именно силой, то приемлемыми при физических наблюдениях окажутся только такие системы отсчета, которые дают для ускорения правильное значение. Если мы имеем такую систему отсчета и берем другую, движущуюся относительно первой без ускорения, т. е. с постоянной скоростью в фиксированном направлении, то скорости, измеренные во второй системе, будут отличаться от скоростей, измеренных в первой, но ускорения, измеренные в каждой из них, будут совпадать. Вторая система будет, следовательно, приемлема в качестве стандартной системы отсчета совершенно так же, как и первая.

Таким образом, в механике Ньютона отсутствуют выделенные системы отсчета, отсутствует какой-либо стандарт покоя для Вселенной в широком смысле и существует множество систем отсчета, каждая из которых находится в относительном неускоренном движении. Всякая такая система отсчета называется инерциальной, и ускорения, наблюдаемые из инерциальной системы, связаны с силами согласно второму закону Ньютона.

Итак, в ньютоновской механике существует резкое различие между двумя типами систем отсчета, а именно инерциальными и неинерциальными; только силы, измеренные в инерциальных системах, считаются действительными. При измерениях в ускоренной системе отсчета, т. е. в неинерциальной, возникают фиктивные силы. Наиболее известная из них — центробежная сила, которая появляется, когда мы имеем дело с вращающейся системой координат; существует также ряд других сил подобного типа.

Так как выяснено, что силы оказываются в любой инерциальной системе отсчета одними и теми же, то все инерциальные системы с точки зрения механики совершенно эквивалентны. Следовательно, можно установить принцип относительности Ньютона:

1. Существует резкое различие между инерциальными и неинерциальными системами.

2. Любые две инерциальные системы движутся без ускорения друг относительно друга.

3. Любые две инерциальные системы совершенно эквивалентны в механическом смысле и отличить одну от другой с помощью любого критерия, основанного на внутреннем механическом эксперименте невозможно.

Смысл последнего пункта заключается в том, что если, например, мы находимся в плавно движущемся самолете и проводим в нем эксперимент, то он даст в точности тот же результат, как если бы он был выполнен в наземной лаборатории. Так как физических эффектов скорости не существует, а существуют только эффекты ускорения, то невозможно обнаружить скорость любого объекта с помощью внутреннего эксперимента. Скорость есть величина не абсолютная, но чисто относительная, тогда как ускорение абсолютно.

В дополнение к этим основным принципам можно установить простые математические правила преобразования,

связывающие измерения, сделанные в одной системе отсчета, с измерениями, сделанными в другой, когда это потребуется, т. е. когда объект измерения находится вне этих обеих систем. При таких преобразованиях ускорение, естественно, сохраняется, так же как и время, которое в ньютоновской физике считается величиной универсальной и абсолютной.

## 2. Электромагнетизм и специальная теория относительности

В механике Ньютона скорость никогда не рассматривалась как нечто фундаментальное; действительно, она в определенном смысле произвольна. В любом поле сил, в любой мыслимой физической ситуации, можно приступить к рассмотрению явления в данный момент, произвольно задавая положения и скорости всех частиц. Их последующее поведение определится законами механики. Однако в других областях физики, особенно в области электромагнетизма и связанных с нею областях оптики, существует некая фундаментальная по значению скорость, а именно скорость света. Это не только скорость всех многочисленных типов электромагнитных волн и вакууме; она также входит в основные уравнения электромагнетизма. Если исходить из принципов ньютоновского релятивизма, то окажется, что эта фундаментальная величина — скорость света — должна быть независима от инерциальной системы отсчета, в которой она наблюдается. Принятие этого факта и, следовательно, утверждение принципа относительности Ньютона для электромагнитного случая известно как специальная теория относительности. На революционном характере этой теории постоянно делается ударение, однако часто упускают из виду, что содержащееся в ней подтверждение применимости ньютоновских идей не только к механике, но и к электромагнетизму есть просто подтверждение ньютоновского принципа релятивизма для всей физики. Таким образом, эта теория в некотором смысле глубоко консервативна; принципы, которые, как было установлено, имеют силу в механике, утверждаются как справедливые для всей физики. Специальная теория относительности неизбежно следует из самого утверждения, что единство физики — ее внутренняя основа, ибо было бы нетерпимым, если бы все инерциальные системы, эквивалентные с механической точки

зрения, были бы различимы с помощью оптических измерений. Сейчас кажется почти невероятным, что возможность такого неравноправия между механикой и электромагнетизмом считалась сама собой разумеющейся в XIX столетии; в то время было нелегко решить, что важнее — универсальная справедливость ньютоновского принципа относительности или абсолютный характер времени, о котором мы упоминали выше.

Простой математический расчет показывает, что скорость света не может быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета, если сохранить предположение об универсальном характере времени. Необходимо отказаться от метафизической идеи об абсолютности времени и рассматривать время в физическом смысле, как то, что можно измерять часами. В современной науке становится все более и более понятным, что беспредметно говорить о каких-либо величинах, пока не установлен способ их измерения. Антинаучно считать время единым, вечно текущим, загадочно неизменным. Мы не можем также допускать, что в некотором неясном смысле время, измеренное часами в одной системе отсчета, равно времени, измеренному в другой. Единственное, что можно утверждать, принимая принцип относительности Ньютона, называемый в применении ко всей физике специальным принципом относительности Эйнштейна — это эквивалентность всех инерциальных систем. Итак, необходимо установить новые законы преобразований, основная черта которых заключается в том, что время связывается с пространством. Это свойство обычно понимается как четырехмерная природа пространства — времени. Хотя эту фразу иногда считают звучащей таинственно, идея ее совершенно ясна. Под трехмерной природой пространства подразумевается, что для определения положения тела необходимо сделать три независимых измерения, но их можно смешать при вращении координат. Эти измерения не являются в каком бы то ни было смысле абсолютными, хотя они позволяют определить величины, такие, как расстояние между двумя точками тела, не зависящие от того, под каким углом зрения их рассматривают. Под четырехмерной природой пространства — времени мы понимаем тот факт, что скорость наблюдателя может привести к смешиванию временного интервала с пространственной протяженностью объекта как



раз в таком же смысле. Существенное обстоятельство заключается в замечательной сходимости этого явления с тем, что происходит при вращении трех пространственных координат, и так же, как некоторые величины, например расстояние между двумя точками тела, не зависят от того, как мы их рассматриваем, так и некоторые типы измерений, относящиеся к интервалу, не зависят от состояния движения наблюдателя. Нет необходимости обращаться здесь к бесчисленному множеству экспериментальных проверок специальной теории относительности или к ее хорошо известным достижениям, как, например, к установлению связи массы и энергии. Было бы, однако, полезно рассмотреть ее алгебраические возможности, вытекающие прямо из четырехмерной природы пространства времени. Существует несколько простых алгебраических структур, соответствующих пространству — времени, и этот факт обеспечивает возможность делать весьма важные заключения. Мы знаем, что в обычном пространстве трех измерений возможность изменения положения наблюдателя уменьшает число допустимых физических законов.

Можно, например, сказать, что сила, действующая на движущуюся положительно заряженную частицу со стороны магнитного поля, составляет правую тройку со скоростью частицы и с направлением магнитного поля. Но нельзя сказать, что сила всегда направлена вправо от частицы, ибо такое утверждение имело бы различный смысл для разных наблюдателей.

Представим себе теперь тот период развития физики, когда были хорошо известны законы распространения света, что позволяло, в принципе, построить специальную теорию относительности, но когда законы электромагнетизма были еще известны очень мало, а понимание электромагнитной природы света вообще отсутствовало.

Предположим, в частности, что магнетизм был совершенно неизвестен и что были открыты только два простейших закона электростатики. Было известно, во-первых, что линии электрического поля создаются только электрическими зарядами, и это справедливо независимо от того, движутся они или нет. Во-вторых, что электрическое поле консервативно (т. е. что если переместить заряд по замкнутому пути, то полная работа электрического поля будет равна нулю), но только когда оно не меняется во времени. Как подобная

ситуация будет выглядеть с точки зрения релятивизма? В теории относительности у нас есть пространство четырех измерений и, следовательно, любая направленная величина (вектор) должна иметь четыре компонента, которые можно до некоторой степени преобразовать одну в другую посредством изменения скорости наблюдателя. Так в механике импульс представляет собой три пространственные компоненты такого рода, а энергия есть временная компонента. Во всех применениях специальной теории относительности оказывается, что временная компонента вектора связана с его пространственными компонентами.

Однако закон сохранения зарядов и свойств электрических силовых линий не подходит под эту схему. Он не только подразумевает именно три пространственные компоненты электрического поля, но его справедливость, даже когда заряды движутся, совершенно исключает существование временной компоненты. Из этого следует, что электрическое поле не может иметь такую же простую алгебраическую структуру, какую образуют импульс и энергия частицы. Следовательно, необходимо обратиться к какой-то более сложной величине, а следующим по сложности после вектора является тензор.

В четырех измерениях тензор имеет шестнадцать компонент; однако число этих компонент может быть уменьшено из соображений симметрии. В особенно простом случае антисимметричного тензора число компонент уменьшается до шести, три из них образуют одну группу и три — другую, каждая группа преобразуется в другую через движение. Три компоненты первой группы могут быть отождествлены с тремя пространственными компонентами электрического поля и с математической точки зрения не могут иметь связанной с ними временной компоненты. Эти три компоненты антисимметричного тензора образуют наиболее простой набор с подобными свойствами. С ними связаны три другие компоненты и поскольку они появляются вследствие существования скорости, то наш релятивист может заключить, что так же, как покоящийся электрический заряд порождает электрическое поле, так и движущийся электрический заряд (электрический ток) должен порождать какой-то другой тип поля. Эту величину мы называем магнитным полем, и релятивист должен был прийти к выводу о его существовании из простых соображений

симметрии. Более того, тот факт, что электростатическое поле консервативно, дает ему возможность сделать еще шаг вперед в установлении структуры электромагнитного поля, ибо он мог бы усмотреть возможность образования полного поля из четырехмерного вектор-потенциала. Затем, связав поле, полную структуру которого он смог установить из релятивистских соображений, с источниками поля (покоящиеся и движущиеся заряды), он приходит к полному набору уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле. Из этих уравнений он может затем заключить, что изменения электромагнитного поля будут излучаться и распространяться со скоростью света. Для завершения своей системы уравнений он должен будет ввести предположение о причинности, состоящее в том, что информация об изменениях в системе передается во времени вперед, а не назад. Для него не составит труда установить, что свет представляет собой одну из форм этих электромагнитных возмущений, свойства распространения которых он целиком получил из принципа относительности и из наиболее элементарных законов электростатического поля.

Здесь, видимо, целесообразно коротко обсудить вопрос о том, что математик понимает под волнами. Он не обязательно имеет в виду периодический синусоидальный процесс; он имеет в виду просто нечто, способное распространяться. Таким образом, одна из существенных особенностей волны заключается в их способности переносить информацию. Именно через посредство волны приемник получает информацию о том, что происходит у передатчика. Изменения состояния передатчика распространяются в виде волны; идея информации (новостей) неразрывно связана с идеей волны, и это главное для их понимания. Вторая характерная особенность волны — это перенос ими энергии. Существует много форм передачи энергии, и будет полезно представить себе сначала способ, которым энергия от силовой станции передается потребителю по проводам. Здесь важно, что количество энергии, даваемое станцией, целиком зависит от того, сколько ее использует потребитель (если отвлечься от потерь при передаче, которые малы и в принципе могут быть сделаны пренебрежимыми). Однако в случае распространения волны имеет место совершенно другая ситуация. Радиопередатчик излучает энергию в пространство совершенно независимо от числа и располо-

жения приемников. Количество испускаемой энергии совершенно не зависит от того, включают люди свои приемники или нет. Это удивительное свойство радиации в ряде отношений даже трудно понять, ибо что же происходит с испущенной энергией? Похоже на то, что она поглощается пространством на больших расстояниях. Существуют веские причины полагать, что вся система функционирует только потому, что все излучение полностью поглощается (пусть на очень больших расстояниях) и, более того, что это тесно связано со строением нашей Вселенной, которая расширяется. Следовательно, здесь могут быть установлены две существенные характеристики волн, именно что энергия испускается независимо от существования и расположения приемников и что волны могут переносить информацию.

### 3. Гравитация

Гравитация отличается от всех других видов сил тем свойством, открытым Галилеем, что все тела падают с одинаковым ускорением. Гравитационная сила пропорциональна массе тела, так что ускорение тела не зависит от массы. Все значение этого замечательного факта мы обсудим немного позже, здесь же можно сказать, что когда Ньютон формулировал свою теорию гравитации, он просто принял за аксиому, что гравитационная сила, действующая на тело, пропорциональна массе. Более того, он принял консервативный характер гравитационных сил и закон обратной пропорциональности силы квадрату расстояния. Наконец, он допустил, что свойство материи порождать гравитацию, быть источником гравитационного поля, также заключается в его массе, — результат, безусловно, следующий из его третьего закона о действии и противодействии. На базе этой ньютоновской формулировки гравитационной теории было сделано огромное количество работ. Солнечная система дала широкое поле приложений для применения ньютоновской теории гравитации и для проверки ее в мельчайших деталях в течение больших периодов времени.

Шестьдесят лет назад можно было утверждать, что ньютоновская теория гравитации является наиболее разумной и твердо установленной во всей физике. Затем совершенно неожиданно была выдвинута новая теория гравитации, общая

теория относительности Эйнштейна, и вера в абсолютную справедливость теории Ньютона после незначительного сопротивления рухнула. Как же случилось, что столь хорошо обоснованная теория была отброшена и заменена другой, самая большая заслуга которой заключалась в том, что она дала те же результаты, что и прежняя? Немногочисленные и незначительные пункты, в которых эти теории расходились, были даже не особенно твердо установлены экспериментально, и все-таки основная концепция теории Ньютона была сочтена бездально несостоятельной, и современные работы базируются именно на общей теории относительности.

Существуют две причины этого заката ньютоновской картины мира, первая из которых лежит просто в специальной теории относительности. Выше уже было показано, как основные понятия оптики и электромагнитной теории вынудили нас отказаться от ньютоновской идеи о едином равномерно текущем времени и трехмерном пространстве и заметить ее идеей четырехмерного пространства — времени.

Ньютоновская гравитация не приспособлена к четырехмерному пространству — времени; она не имеет соответствующей алгебраической структуры. Это не было ясно раньше просто вследствие того, что все наши знания о гравитации получены из наблюдений довольно медленно движущихся тел, а для таких тел почти не существует разницы между пространством и временем Ньютона, с одной стороны, и пространством — временем специальной теории относительности — с другой. Тем не менее полное признание специальной теории относительности само по себе утверждает тот факт, что теория Ньютона не соответствует рамкам современной физики и, следовательно, должна быть отброшена. Выбор теперь сильно ограничен, ибо число простых релятивистских теорий мало; на этой стадии впервые возникают предположения о существовании гравитационных волн. Мы видели, как простые законы электростатики, в том числе и закон обратной пропорциональности силы квадрату расстояния, неизбежно приводят в рамках пространства — времени специальной теории относительности к понятию электромагнитных волн. Стоит только решить, что гравитационная теория также должна быть релятивистской, как возникнет предположение, что здесь события должны развиваться аналогичным образом, т. е. коль скоро статическое гравитационное поле правильно описывается

законом обратной пропорциональности силы квадрату расстояния, гравитационное поле быстро движущихся тел должно дать начало гравитационным волнам.

Вторая причина для отказа от ньютоновской теории — принцип Галилея — помогает определить, какая из нескольких возможных релятивистских теорий гравитации должна быть принята. В теории Ньютона тот факт, что гравитационная сила пропорциональна массе тела, на которое она действует, имеет не большее значение, чем, скажем, тот факт, что электростатическая сила пропорциональна заряду подвергающегося воздействию тела. Однако эта видимая ассоциация массы с гравитационным полем довольно поверхностна.

Тела могут иметь любой заряд, который мы захотим им сообщить, масса же тела — его неотъемлемое свойство. Не существует такой вещи, как тело без массы, тел же без заряда — сколько угодно. Это непосредственно касается первого закона Ньютона, основы ньютоновской механики, утверждающего, что тело, на которое не действуют силы, движется по прямой линии с постоянной скоростью. Каковы возможности проверить этот закон? Допустим, мы решили осуществить такой эксперимент, наблюдая движение подходящего тела. Чтобы проверить первый закон, необходимо убрать все силы, действующие на тело. Следовательно, прежде всего физик убедится, что тело не подвержено связям, затем, что между телом и окружающей средой нет трения. После этого он выяснит, что тело лишено заряда, так что электрические силы отсутствуют, и т. д. Таким образом, он может устранить все силы, действующие на тело, или вернее все силы с единственным исключением — гравитацией. Он не сможет избавить тело от его массы, ибо ее отделить от тела не легче, чем человека от его собственной тени.

Ньютон думал, что сможет обойти эту трудность, указав, что подвергаемое испытанию тело должно быть достаточно удалено от всех других тел, но это едва ли помогло бы делу. Проблема не только в том, что в каждой точке должно существовать равномерное прямолинейное движение, предписываемое первым законам Ньютона, но, как теперь стало хорошо известно, Вселенная везде заполнена материей, так что достаточно изолированной области вообще нигде не существует. Мы должны, следовательно, заключить, что предложение Ньютона не реально. Основная предпосылка его заключается

в том, что если тело движется равномерно, то нет оснований искать вызывающие движение силы. Их надо искать только, когда движение тела отклоняется от равномерного. Однако эта аргументация отпадает, если пример Ньютона не реализуем и не доступен для проверки. Единственный выход заключается в том, чтобы принять за стандарт равномерного движения движение под влиянием гравитационного поля, другими словами, отвергнуть само понятие гравитации как силы.

Сила есть нечто, заставляющее материю отклоняться от ее равномерного движения, равномерно же движение по инерции под влиянием гравитации. Гравитация и инерция стали сейчас в некотором смысле едины; они образуют рельсы, по которым движется тело в отсутствие сил. Правда, чтобы включить в себя все сложные гравитационные явления, новое понятие инерциального движения должно быть бесконечно более сложным, чем движение по прямой линии с постоянной скоростью, как в примере Ньютона. Тем не менее, мы достигли гораздо более удовлетворительного положения вещей, ибо теперь должным образом учтен тот факт, что под влиянием гравитации все тела движутся одинаково и осуществимо новое стандартное (инерциальное) движение.

Что остается от гравитационного поля, когда оно рассматривается как исходная точка для определения стандарта инерционного движения? Единственное свойство, которое мы можем теперь обнаружить, это его неоднородность, т. е. тот факт, что две соседние частицы падают не точно одинаковым образом, так как гравитационное поле меняется от точки к точке. Изучение относительного ускорения соседних частиц теперь служит для описания гравитационного поля, что и может быть непосредственно осуществлено в релятивистской форме. Более того, форма релятивистской теории гравитации теперь установлена: она должна быть такой, чтобы гравитация позволяла воспроизвести те же эффекты, что и инерция, поскольку они рассматриваются как единое свойство.

Напомним, что при использовании неинерциальных систем отсчета в ньютоновской теории появляются фиктивные силы, такие, как, например, центробежная. Отсюда следует, что описание гравитационного поля должно соответствовать сложности движений, обусловленной использованием произвольных систем отсчета и учетом фиктивных сил инерции, при этом

возникающих. Оказывается, что на такой основе гравитация описывается симметричным тензором в пространстве — времени, т. е. величиной, имеющей десять независимых компонент. На самом деле этот тензор имеет особое значение; по существу он описывает саму природу пространства — времени. Пространство, естественно, измеряется при помощи свободно движущихся частиц или световых лучей, которые представляют собой предельную форму свободно движущихся частиц. Следовательно, новое основное инерциальное движение служит для описания самого пространства — времени. Оно измеряется не через понятие прямых линий, проходимых с постоянной скоростью, а в терминах свободного движения материи.

Высказанные положения составляют основу общей теории относительности Эйнштейна, и можно видеть, какой огромной убедительной силой она обладает. Ее основанием является тот факт, что все тела падают одинаково быстро, а также что подверженность воздействию гравитации есть неотъемлемое свойство материи. Эта теория родилась сразу в рамках понятия пространства — времени и, следовательно, соответствует идеям электромагнетизма и специальной теории относительности; но она, таким образом, является естественным преемником теории Ньютона. В последней уравнения, определяющие способ, которым материя порождает гравитационное поле, состоят из определенной линейной комбинации относительных ускорений соседних частиц — «лапласиана», приравненного к плотности материи. Подобный путь в общей теории относительности приводит к так называемым уравнениям поля, в которых вновь используются линейные комбинации коэффициентов, определяющих относительные ускорения соседних частиц, приравненные к величинам, описывающим материальное содержание пространства. Возможно, это не единственный путь, но аргументация настолько убедительна, что трудно сомневаться в бесспорных преимуществах общей теории относительности как релятивистской формулировки гравитации, принимающей, кроме того, во внимание тот факт, что все тела падают одинаково быстро. Более того, можно без особых трудностей показать, что для медленно движущихся тел общая теория относительности дает почти те же результаты, что и теория Ньютона; расхождения чрезвычайно малы. Одно из них относится к крайне малому изменению движения планеты Меркурий, где теория Ньютона не вполне соответ-



ствовала фактам, тогда как общая теория относительности дала точный результат. Два других расхождения связаны с вопросами распространения света. Одно из них можно усмотреть, исходя из самых фундаментальных принципов, но трудно наблюдать экспериментально, хотя совсем недавно это и удалось<sup>1)</sup>. Другое расхождение касается действия гравитации на световой луч, и здесь результаты наблюдения вновь прекрасно согласуются с теорией относительности, которая предсказывает этот очень слабый эффект.

Подводя итоги, скажем, что мы вынуждены отвергнуть ньютоновскую гравитацию ввиду ее перерелятивистского характера. При попытке сформулировать релятивистскую теорию гравитации мы лицом к лицу сталкиваемся с необходимостью учитывать факт одинаково быстрого падения всех тел, что затем приводит почти неизбежно к теории Эйнштейна. С экспериментальной точки зрения эта теория идет дальше ньютоновской, хотя и не особенно далеко. Однако суть вышесказанного заключается в том, что мы вынуждены принять общую теорию относительности скорее на основании выводов, вытекающих из других областей физики, чем исходя из ее согласия с небольшим числом экспериментальных наблюдений как раз в тех деталях, где имеются расхождения между теориями Ньютона и Эйнштейна. нас приводит к новой теории принцип единства физики, который требует, чтобы гравитация, с одной стороны, и электромагнетизм и оптика — с другой, не принадлежали к разным типам пространства времени.

#### 4. Квантовая теория

Мы здесь лишь кратко остановимся на тех важных успехах, которые были достигнуты за последние пять — десять лет в понимании структуры атомов и ядер, а также поведения внутриатомных частиц. Хорошо известно, что область физики, трактующая эти вопросы, значительно отличается от физики больших (макроскопических) тел, ибо в принципе здесь уже нельзя более пренебрегать влиянием прибора наблюдения на наблюдаемый объект.

---

<sup>1)</sup> Имеются в виду опыты Паунда и Крэншоу по сдвигу частот  $\gamma$ -лучей в поле тяготения. — *Прим. ред.*

Имея дело с самыми маленькими физическими объектами, нельзя прибегнуть к орудиям исследования, более тонким, чем сами объекты. Это вводит неопределенности и неточности, которые формулирует и описывает квантовая теория. Первым шагом этой теории было квантование механики (квантовая механика), а первое применение она нашла при анализе движения электрона в поле заряженного ядра. Это поле является электромагнитным, но эффекты его заметны только как электростатические. Согласно фундаментальным положениям квантовой теории, само электростатическое поле не нуждается в квантовании главным образом потому, что оно неспособно передавать информацию; оно рассматривается просто как облако, окружающее центральное ядро. На этой ранней стадии развития теории рассматривалась неопределенность, возникающая из ограничения наблюдаемости при воздействии сил на тела. Только при рассмотрении реакций тел на воздействие известных сил учитывалась неопределенность, обусловленная ограничениями возможностей наблюдения.

Квантовая механика в самом строгом смысле слова достаточна для описания основных особенностей атомных структур, так как рассматриваемое в этом случае поле является электростатическим, подчиняющимся закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, и не нуждается в квантовании. Квантование было принято только позднее в случае поля электромагнитного излучения, где оно привело к серьезным усложнениям и трудностям, которые не были преодолены вплоть до самого недавнего времени.

## 5. Гравитационные волны

Тот факт, что существует предел точности, который невозможно преодолеть при одновременном определении положения и импульса частицы, представляет собой фундаментальное требование квантовой теории. Гравитационное поле, создаваемое некоторым телом, становится заметным, только когда масса тела очень велика. С другой стороны, гравитационные эффекты аддитивны, т. е. половина массы вызывает половину гравитационного эффекта целой массы.

Если последовательно применять это правило (а доказательств, что этого нельзя делать, не существует), то

должны существовать гравитационные поля, обусловленные даже внутриатомными частицами, такими, как протон, нейтрон или даже электрон. Конечно, эти гравитационные поля невероятно слабы, ибо малы массы частиц, и они целиком перекрываются электрическими полями, которые гораздо сильнее (примерно в  $10^{39}$  раз). Тем не менее, если в принципе невозможно одновременно измерить положение и импульс частицы, должно быть также невозможно найти эти величины даже с помощью фактически точного измерения гравитационного поля. Гравитационное поле, следовательно, также должно быть проквантовано для согласования с остальной физикой. В этом требовании вновь проявляется принцип единства физики, хотя, поскольку дело касается реального измерения, мы, конечно, очень далеки от возможности проверить необходимость квантования. Логически это, тем не менее, никак не отражается на необходимости квантования гравитационного поля, которое следует осуществить, чтобы гарантировать применимость одних и тех же ограничений возможности наблюдения мельчайших частиц как в случае гравитационных, так и в случае всех других экспериментов. Однако необходимость в выполнении этой трудной операции отпадает, если гравитационное поле представляет собой лишь облако вокруг частицы.

Как в квантовой теории нет необходимости квантовать электростатическое поле точечной частицы, подчиняющееся закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, так, по-видимому, и в случае гравитационного поля не возникло бы необходимости в его квантовании, если бы оно было чисто продольным, подчиняющимся закону обратных квадратов. Если, однако, существует поле излучения в случае гравитации, то его так же необходимо квантовать, как и поле электромагнитного излучения. Таким образом, мы с двух разных сторон приходим к вопросу о том, существуют ли гравитационные волны: исходя из аналогии с электромагнетизмом, где применение релятивистских принципов ведет от статических понятий к волновым полям, и из квантовой теории, требующей квантования гравитационного поля, если существуют гравитационные волны.

Наконец, существует просто естественное любопытство. Мы имеем удовлетворительную теорию гравитационного поля — теорию Эйнштейна уже сорок лет. В течение этого времени

было известно, что говорит эта теория о гравитационном поле быстро движущихся частиц, пусть даже это поле нельзя практически наблюдать в природе по причине, которая оказывается в конце концов совершенно случайной, а именно из-за отсутствия достаточно быстро ускоряющихся объектов с большой массой. Таким образом, требование единства физики вызывает интерес к проблеме существования таких волн, хотя их экспериментального обнаружения вряд ли можно ожидать в течение еще какого-то времени.

После того как задача поставлена, кажется несколько неожиданным, что так трудно получить ответ, однако причины этого в большой мере обусловлены математической стороной дела. Уравнения общей теории относительности, за исключением простейших частных случаев, исключительно сложны и трудны для расшифровки. Более того, их структура обладает некоторой специфической физической особенностью. Вследствие объединения инерции и гравитации они допускают использование любой системы отсчета, а выбрать систему отсчета, никак не нарушая свойства гибкости пространства — времени, являющегося столь существенной особенностью теории, далеко не так просто. Использовался ряд приближенных методов, из которых по крайней мере некоторые довольно спорны. Однако в этой области за последние годы достигнут заметный прогресс и получен ряд результатов.

Во-первых, как можно генерировать гравитационные волны? Простейшая идея, которая приходит на ум, связана с распространением гравитационных изменений; она может дать формулировку вопроса. Например, если Солнце неожиданно прекратит свое существование, как скоро после этого Земля покинет свою орбиту? Однако этот вопрос не имеет смысла. В законы гравитации входит и закон сохранения материи, поэтому в рамках гравитационной теории Солнце не может исчезнуть. Далее можно задать вопрос, что произойдет, если Солнце, вместо того, чтобы исчезнуть, неожиданно сдвинется под прямым углом к плоскости земной орбиты. Сколько времени пройдет, прежде чем следствия этого обнаружат себя? Вновь вопрос лишен смысла, так как законы гравитации утверждают и сохранение импульса, следовательно, Солнце не может сдвинуться в сторону. Существуют, однако, гравитационные изменения, которые допустимы. Солнце могло

бы вдруг превратиться в продолговатый или сплюснутый эллипсоид и такое изменение, несомненно, повлияло бы на земную орбиту.

Солнце могло бы разорваться на две половины, разлетающиеся в противоположных направлениях. Все это вполне мыслимые возможности, и любая теория должна, по крайней мере в принципе, ясно указывать, что в таком случае произойдет.

Оказывается, что скорость распространения гравитационной информации равна скорости света; поскольку это заложено в структуре пространства — времени, то результат ни в какой мере не является неожиданным. Поскольку в физике передача информации неразрывно связана с передачей энергии, хотя и не существует простого правила, определяющего количество энергии, которое требуется для передачи данного количества информации.

Исследуя поставленный выше вопрос, релятивист берет тело, окруженное пустым пространством, и спрашивает, как изменения формы тела повлияют на его массу. Изменения формы предполагают изменение гравитационного поля и, таким образом, с необходимостью вызывают также распространение информации. Но наиболее удобная мера энергии тела — это его масса, т. е., грубо говоря, вопрос заключается в том, будет ли тело излучать массу при изменении своей формы.

Чтобы сформулировать этот вопрос точно, недостаточно потребовать, чтобы пространство, окружающее тело, было пустым, что в теории поля означает отсутствие не только корпускулярной материи, но и всех полей, кроме гравитационного. Однако если существуют гравитационные волны, переносящие энергию, то эти волны могут не только породиться телом и покинуть его, но также приходиться извне с больших расстояний к этому телу и, таким образом, передавать ему энергию. Чтобы исключить эти приходящие волны, к требованию пустоты пространства необходимо добавить „условие исходящего излучения“. Это условие тесно связано с выполнением принципа причинности, именно с тем, что эффекты изменения формы должны проявляться только после того, как изменение уже произошло. Условие исходящего излучения также исключает существование падающих волн, специально подобранных в соответствии с изменениями формы тела, которые можно рассматривать как волны, вызванные

самими изменениями формы, но распространяющиеся назад во времени. Таким образом, это условие исключает не только неограниченный приток энергии, но и нарушения наших понятий причинности. Формулировка удобных условий этого типа является нелегким делом, и надо считать весьма отрядным, что в последнее время была доказана эквивалентность трех различных формулировок, но крайней мере для особо важного случая.

Связанный с предыдущим вопрос касается происхождения информации, распространяемой уходящими волнами. Как случается, что изолированное тело изменяет форму, особенно когда оно было изолировано так долго, что окружающее его гравитационное поле не содержит следов воспоминаний того, что имел место процесс помещения тела в данную точку? Заметим, что изменения должны быть в некотором роде неожиданными, так чтобы волны действительно перенесли информацию. Простейшее устройство можно представить себе в виде бомбы замедленного действия с очень медленно горящим запалом, который в достаточной мере несовершенен, чтобы момент его срабатывания нельзя было предсказать. Таким способом можно удовлетворить всем условиям рассматриваемой задачи.

Математические результаты решения пока еще удручающе неполны. Не доказана даже возможность добиться большего, чем разработать некоторые приближенные методы, достоверность которых не всегда бесспорна. Один из этих методов крайне длинен и громоздок, а применимость его ограничена специальным случаем. В другом методе, столь же громоздком, существуют некоторые сомнения относительно однозначности формулировки условий, которым необходимо удовлетворить на больших расстояниях. Третий, самый короткий из трех, ограничивается исключительно случаем поля, удаленного от источника. В этом последнем методе серьезные затруднения при удовлетворении всем условиям на больших расстояниях от источника отсутствуют, но он не позволяет определить, какой тип движения источника данное поле порождает.

Тем не менее некоторые ответы были однозначно установлены и можно сформулировать по крайней мере несколько дальнейших вопросов. Так, например, установлено, что если некоторая система, находившаяся вначале в покое, претерпевает какие-то изменения формы и затем в конце концов

снова становится статической, то ее масса в конечном состоянии меньше, чем в начальном, на величину, пропорциональную квадрату изменения поля и просуммированную по всему периоду изменения. На начальное и конечное состояния накладывается требование статичности ввиду того, что только статические поля до конца поняты и допускают однозначное определение массы систем. Таким образом, было установлено, что система может излучать часть своей массы, хотя это только всего лишь сопутствующий эффект второго порядка при изменении формы, а не основная причина излучения, как это оказалось бы в гипотетическом случае исчезновения Солнца.

По структуре гравитационные волны должны быть полностью поперечными. Таким образом, если волна конечной длительности встречается со скоплением частиц, которые до этого покоились друг относительно друга, то после прохождения волны не возникнет относительного движения частиц вдоль направления распространения волны. В перпендикулярном направлении частицы будут расходиться; в другом, составляющем прямые углы с первым и с направлением распространения волны, они будут сближаться друг с другом. На больших расстояниях от источника ограниченный отрезок волны является почти плоским, и плоские гравитационные волны хорошо изучены. Несмотря на сложность описывающих их уравнений, они распространяются без изменения формы, или без дисперсии. В этом они сходны с электромагнитными волнами (которые, однако, подчиняются правилам линейной суперпозиции, тогда как этого нельзя сказать относительно гравитационных волн, описываемых нелинейными уравнениями) и отличаются от звуковых волн, которые образуют ударные волны. Постоянство формы, несомненно, связано с поперечной природой волн.

Можно, кроме того, обдумать, хотя бы в принципе, конструкцию приемника гравитационных волн. Вообразим себе две массивные сферы, которые могут скользить по крепкому стержню, но скрепленные с помощью пружины на некотором расстоянии друг от друга. Если волна приходит под прямым углом к стержню, то она заставит сферы двигаться относительно друг друга как частицы в рассмотренном выше скоплении. Это должно вызвать относительное движение между сферами и стержнем и, следовательно, нагревание трением.

Некоторая часть энергии волны превратится в тепло, которое является локализованной энергией, и таким образом будет зарегистрирован прием волны. Сам ответ приемной системы (на приход волны) вызывает вторичное излучение, и, следовательно, одним приемником из данной волны может быть поглощено лишь ограниченное количество энергии. Чтобы это количество энергии оказалось наибольшим из возможных, движение сфер не должно быть ни слишком большим, ни слишком малым, и, следовательно, понятия импеданса и согласования становятся применимыми к случаю гравитации аналогично тому, как это было в случае электромагнетизма.

Гравитационное поле на больших расстояниях от источника может меняться особыми широко различающимися способами, не вызывая, тем не менее, излучения; это обстоятельство наводит на интереснейший вопрос. Ни одно из таких изменений не может начаться или кончиться без появления излучения. Какие же типы движения источников могут быть причиной подобных изменений, не вызывающих излучения? Современные методы дают весьма мало указаний, однако каждое из двух следующих противоречащих друг другу рассуждений по-своему убедительно.

Согласно одному из них, отсутствие излучения, несмотря на движение источника, обусловлено отсутствием ускорения частиц, составляющих источник. Это согласуется как с соображениями электромагнитного излучения, так и с выводами первого порядка одного из приближенных методов, но ни один из этих аргументов не является решающим. Противоположное рассуждение подчеркивает, что отсутствие ускорения в теории гравитации не существенно, так как здесь естественные орбиты частиц — это не пути неускоренного движения, а траектории свободного падения под влиянием гравитации.

С этой точки зрения источником неизлучающих изменений, по-видимому, является пылевое облако, так как в нем каждая частица движется свободно. Но если пылевое облако не излучает, то представляется неправдоподобным, чтобы могло излучать пассивное твердое тело; в противоположность этому бомба замедленного действия, являющаяся моделью излучателя, в высшей степени активна. Или, с более магнетической точки зрения, соотношение, связывающее давление и плотность, не зависит от времени в пылевом облаке или в упругом твердом теле, но зависит от времени в бомбе



замедленного действия. Если в какой-либо форме имеет место внутреннее трение — неидеальная упругость, вязкость и т. д., то это соотношение зависит от направления времени, и происходящие процессы будут необратимыми. Поэтому большую привлекательность приобретает предположение, что одни лишь обратимые изменения источников поля на больших расстояниях порождают важный класс полей, зависящих от времени, но не являющихся полями излучения. Однако до сих пор эта догадка совершенно недоказана. Если это правильно, то Вселенная содержит значительно меньше гравитационного излучения, чем могло бы быть в противном случае. Солнечная система излучала бы около одного киловатта энергии на гравитационных волнах, порожденных всеми ускорениями, и лишь доли милливатта, если бы к излучению вели только необратимые процессы, такие, как трение морских приливов. Рассмотренный вопрос чрезвычайно увлекателен, но, по-видимому, не существует простого пути найти на него ответ.

Наконец, можно коротко остановиться на другой нерешенной проблеме, проблеме применимости принципа Гюйгенса к гравитационным волнам. Все уравнения волнового типа запрещают передачу любого возмущения со скоростью, превосходящей характеристическую, но только некоторые из них требуют, чтобы все возмущения обязательно распространялись именно с этой скоростью. Так, обычное уравнение звуковых волн малой амплитуды показывает, что в случае сферических и плоских звуковых волн все возмущение распространяется со скоростью звука; например, после прохождения короткого импульса среда снова целиком покоится. Однако в случае цилиндрических звуковых волн, в то время как частицы перед фронтом волны покоятся, за фронтом существует возмущение, так как часть энергии движется со скоростями, меньшими скорости звука. Таким образом, принцип Гюйгенса, согласно которому все возмущение распространяется с характеристической скоростью, выполняется для плоской и сферической звуковых волн, но не выполняется для цилиндрической. В случае гравитационных волн известно, что принцип Гюйгенса применим к плоским волнам и не применим к цилиндрическим, но физически наиболее важный случай сферических волн (излучение изолированной системы) по чисто математическим причинам совершенно неясен. Решение этой

проблемы прольет свет на много других неясностей в рассматриваемом вопросе.

Мы еще довольно далеки от действительного понимания гравитационных волн и еще дальше от их квантования; но некоторый прогресс достигнут и мы, таким образом, уже ближе к возможности доказать полное единство физики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., „Meaning of Relativity“, 3th ed., Princeton, 1950.
2. Einstein A., „Principle of Relativity“, 5th ed., London, 1954.
3. Russel B., „A. B. C. of Relativity“, London, 1958.
4. Coulson C. A., „Waves“, 7th ed., Edinburgh, 1955.
5. Ландау Л. Д., Румер Г. Б., „Что такое относительность“, М., 1959.

---

## Именной указатель

---

- Андерсон (Anderson J. L.) 227  
Араки (Araki H.) 143, 155  
Арновитт (Arnowitt R.) 216, 227, 228
- Баргман** (Bargmann V.) 211  
Белифанте (Belinfante F.) 82  
Бель (Bel L.) 115, 116  
Бельтран-Лопес (Beltran-Lopez) 197, 227  
Бениофф (Benjoff H.) 232, 235  
Бергманн (Bergmann P. G.) 113, 115, 116, 155, 188, 223, 227  
Бойль (Boyl) 90  
Бонди (Bondi H.) 28, 29, 35, 136, 137, 155, 159, 198, 228, 236  
Боннор (Bonnor W. B.) 129, 136, 155  
Бордман (Boardman J.) 155  
Брим (Brehme R. W.) 35  
Брвэлл (Brill D.) 138, 142, 143, 155, 223, 228
- Вебер** (Weber J.) 130, 155, 156, 179, 233, 235  
Виттен (Witten L.) 226, 228
- Гайзенберг (Heisenberg W.) 229  
Гайтлер (Heitler W.) 116  
Гальперн (Halpern O.) 228  
Гарвин (Garwin) 227  
Гаусс (Gauss C. F.) 42  
Гекманн (Heckmann O.) 228  
Геллер (Heller G.) 228  
Гильберт (Hilbert D.) 74, 75, 82  
Главатый (Hlavaty V.) 226
- Голд (Gold T.) 35, 198  
Голдберг (Goldberg J. N.) 116, 227  
Гоффман (Hoffmann B.) 227  
Громмер (Grommer J.) 188, 226  
Гупта (Gupta S. N.) 231
- Дарвин (Darwin C. G.) 39, 41  
ДеВитт (DeWitt B. S.) 35  
Девонс (Devons) 90  
Дике (Dicke R. H.) 28, 34, 41, 179, 198  
Дирак (Dirac P. A. M.) 114, 171, 204, 214, 227  
Дракв (Drukey D. I.) 35  
Дэзер (Deser S.) 216, 227, 228
- Зацкве (Zatskis H.) 227  
Зеeman (Zeehan P.) 34  
Зельманов А. Л. 113, 116  
Зипой (Zirou D.) 156, 170, 171  
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 229
- Иваненко Д. 35, 202, 223, 228  
Инфельд (Infeld L.) 227
- Йордан** (Jordan P.) 228
- Кеннард (Kennard) 155  
Клейн (Klein O.) 221, 228  
Коккони (Cocconi G.) 196, 227  
Комар (Komar A.) 114, 116

- Коулсон (Coulson C. A.) 259  
 Кречмав (Kretschmann E.) 41  
 Крэвшоу (Cranshaw) 90, 91, 97, 250  
 Куршунюглу (Kurşunoglu B.) 226
- Лайонс** (Lyons H.) 97  
 Ландау Л. Д. 109, 111, 116, 155, 221, 228, 259  
 Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 68  
 Леметр (Lemaître G. E.) 228  
 Лифшиц Е. М. 109, 111, 116, 155  
 Личнеровиц (Lichnerowicz A.) 138, 144, 155, 220, 228  
 Лусер (Luscher) 227
- Мак-Витти** (McVittie C. C.) 136, 155  
 Маргулис (Margulies) 226, 227  
 Мардер (Marder L.) 130, 136, 155  
 Маршалл (Marshall W.) 97  
 Мах (Mach E.) 74, 82  
 Мёллер (Møller C.) 41, 106, 109, 111, 113, 114, 116  
 Мёссбауэр (Mössbauer R. J.) 89, 97  
 Мизнер (Misner C. W.) 181, 216, 226, 227, 228  
 Минковскый (Minkowski H.) 36, 41  
 Мицкевич Н. В. 19, 109, 116  
 Мэзон (Mason W. P.) 179
- Ньютон** (Newton J.) 25
- Палатини** (Palatini A.) 82  
 Паранегру (Parapetrou A.) 189, 227  
 Паули (Pauli W.) 87, 119, 155, 221  
 Паунд (Pound R. V.) 90, 91, 97, 250  
 Пенфилд (Penfield R.) 227  
 Перес (Peres A.) 152, 156  
 Петров А. З. 145, 148, 156  
 Пикок (Peacock) 227
- Пирани (Pirani F. A. E.) 145, 155, 156, 179, 227  
 Пресс (Press F.) 235  
 Пью (Pugh R. A.) 227
- Рассел** (Russel B.) 259  
 Ребка (Rebka G. A.) 90, 91, 97  
 Рихтмайер (Richtmyer) 155  
 Робертсон (Robertson H. P.) 86, 228  
 Робинсон (Robinson I.) 115, 136, 153, 155, 156  
 Робинсон (Robinson H.) 197, 227  
 Розен (Rosen N.) 41, 129, 132, 137, 155  
 Розенфельд (Rosenfeld L.) 82  
 Рорлих (Rohrlich F.) 35  
 Румер Ю. Б. 259  
 Рэйнич (Rainich G. Y.) 181, 226
- Салпигер** (Salpeter E. E.) 196, 227  
 Саузернс (Southern L.) 28, 34  
 Сиам (Sciama D. W.) 198, 227  
 Синг (Synge J. L.) 68, 158  
 Сингер (Singer S. F.) 97, 230  
 Сквиннер (Skinner R.) 227  
 Смит (Smith C.) 232  
 Спейн (Spain B.) 68
- Тауб** (Taub A. H.) 136, 155  
 Тирринг (Thirring H.) 195, 228  
 Томсон (Thomson R.) 116  
 Трамплер (Trumpler R. J.) 97  
 Траутман (Trautman A.) 156
- Уайтхэд** (Whitehead) 91, 97  
 Уилер (Wheeler J. A.) 130, 155, 170, 179, 181, 197, 223, 226, 228  
 Уилкинсон (Wilkinson) 90
- Ферми** (Fermi E.) 68  
**Феррелл** (Ferrell R. A.) 227

- Финкельштейн (Finkelstein D.) 86, 97  
 Фирц (Fierz M.) 119, 155  
 Флетчер (Fletcher J. G.) 116  
 Фок В. А. 188, 223, 227, 228  
 Форвард (Forward R. L.) 170, 232  
 Фрауэнфельдер (Frauenfelder) 227  
 Фрейд (Freud P. von) 116  
 Фридман А. А. 198, 227  
 Фултон (Fulton T.) 35  
 Фуре-Брюа (Foures-Bruhat Y.) 138, 155
- Хавас** (Havas P.) 228  
 Хойл (Hoyle) 198  
 Хьюз (Hughes V.) 197, 227
- Челлен** (Källen G.) 221
- Шайдеггер** (Scheidegger A. E.) 227  
 Шамир (Schamir H.) 155
- Шварцшильд** (Schwarzschild K.) 97  
**Шварцшильд** (Schwarzschild M.) 170  
 Шервин (Sherwin C. W.) 3, 35, 227  
 Шиллер (Schiller R.) 116, 227  
 Шильд (Schild A.) 68, 158, 227  
 Шифф (Schiff L. J.) 29, 30, 35, 191, 227  
 Шиффер (Schiffer J. P.) 91, 97  
 Штелльмахер (Stellmacher K. L.) 156  
 Шюккинг (Schücking E.) 228
- Эддингтон** (Eddington A. S.) 155  
 Эйзенхарт (Eisenhart L. P.) 155  
 Эйнштейн (Einstein A.) 25, 30, 35, 36, 39, 40, 41, 69, 75, 82, 116, 117, 129, 155, 188, 197, 198, 226, 227, 259  
 Этвёш (Eötvös L. V.) 25, 28, 34
- Юлинг** (Uehling E. A.) 29, 35

## Предметный указатель

- Анизотропность инертных свойств 196  
Антинейтрон 30  
Атомные часы 33  
Аффинная связность 50
- Безя тензор 115  
Бианки тождества 58  
— — свернутые 60  
Боннора расчет потерь массы при излучении 129  
Боровский радиус 178
- Вариационный принцип для гравитационного поля 76  
Вектор ковариантный 44  
— — Нойдингга четырехмерный 147  
Внутренние переменные 211  
Волны гравитационные 117, 236, 251  
— —, взаимодействие с кристаллами 164, 167  
— —, вращательные эффекты 171  
— —, генерирование 173  
— —, детектирование 157  
— —, локально плоские 121  
— — —, классификация по Петрову 153  
— —, обнаружение по нормальным колебаниям Земли 170, 232  
— — плоские 136  
— —, сечение поглощения осциллятором 162, 163  
— — сферические 153  
— — цилиндрические 129
- Волны гравитационные цилиндрические, взаимодействие с частицей 132
- Гамильтониан гравитационного поля 214, 219  
— — слабого 215  
Гамильтонова формулировка 202  
— — общей теории относительности 211, 216  
Гаусса теорема 78  
Генерирующая функция 216  
Геодезические линии 40, 48, 60  
Геодезического отклонения уравнение 159  
Геоны 187  
Гравитационная постоянная 76  
Гравитационного поля гамильтониан 214, 219  
— — связи 209  
— — уравнения 71, 101  
Гравитационное излучение 178  
— — вращающегося стержня 127, 173  
— — кристалла 174  
— — межзвездное 232  
— — предел 232  
— — красное смещение 32, 87  
Гравитационный потенциал 32, 76  
Гравитация 245  
Гравитона спин и масса покоя 119
- Дебаевская температура 90  
Де Довдера условия 217

- Действие для частицы 81, 215  
 Действия функция 76  
 — — для гравитационного поля 76  
 — экстремум 71  
 Детерминанта разложение 64  
 Дивергенция ковариантная 63  
 Дипольная частица 190  
 Дирака уравнение 225  
 Дифференцирование ковариантное 47, 53  
 Дифференцируемость и непрерывность многообразий 144  
 Добротность гравитационной антенны 163  
 Дуальности поворот 183  
  
 Единицы 73, 76, 210  
 Единые теории поля 49, 180  
  
**Железо**  $Fe^{57}$ , эффект Мёссбауэра для него 89, 91  
  
**Законы преобразования** 43  
 — сохранения 70, 72, 98, 110  
 Зарядовое сопряжение 225  
 Заряженной частицы движение 34, 81  
  
**Излучение гравитационное** 178  
 — — вращающегося стержня 127, 173  
 — — квадрупольного осциллятора 126  
 — — кристалла 174  
 — —, критерий существования Пираши 148  
 — —, формулировка начальных значений 138  
 — —, — шестимерной задачи 145  
 Измерение длины 65  
 Импульсы канонические 208, 210, 216  
 Инвариант 45  
 Инвариантность хронометрическая 113  
  
 Индексные обозначения 36, 37, 43  
 Интервал 37  
 Искривленное пространство 38  
  
**Квантование в общей теории относительности** 221  
 Квантовая теория 251  
 Ковариантная дивергенция 63  
 — производная 53  
 — — спинора 225  
 — — спинтензора 225  
 Ковариантное дифференцирование 47  
 — — последовательность 56  
 Ковариантность 36  
 — общая 40  
 Комплексе 113  
 Контрвариантная производная 53  
 Координатные условия 75, 118, 217  
 Координаты геодезические 52  
 — — нормальные 150  
 — — изотропные 107  
 — — преобразования бесконечно малые 102  
 Кориолисово ускорение 196  
 Космология 198  
 Красное смещение, вызываемое эффектом «расширения» 198  
 — — гравитационное спектральных линий 32, 87, 226  
 — — для звезды 40 эридана 89  
 — — — спутника Сириуса 89  
 Кривизна 42  
 — риманова 199  
 — скалярная 59  
 Кривизны тензор 54  
 Кристалл, взаимодействие с гравитационной волной 164, 167  
 Кристоффеля символы, законы преобразования 51, 52  
 — — для метрики Шварцшильда 84  
 — — первого и второго рода 51  
 Кручение 16, 17, 49  
  
**Лагранжа форма уравнений гравитации** 101

- Лагранжиан максвелловского поля 79  
 Лагранжиана плотность 71, 100  
 -- — в электродинамике 79  
 -- — для гравитационного поля 76, 100  
 Ландау — Лифшица псевдотензор 111, 131  
 Леви-Чивита символ 63  
 — тензорная плотность 63, 172, 181, 182  
 Лишеровица условия 144, 145, 147  
 Лоренца калибровка 80  
 — метрика 37  
 — преобразования 37  
 — условие 80  
 Лоренцовы системы локальные 66, 67  
 Лэмбовский сдвиг 29
- Мазеры** 171  
 Максвелла уравнения 79  
 Масса виртуальных пар 29  
 — гравитационная 25, 26  
 -- — активная 28  
 -- — пассивная 28  
 -- гравитона 119  
 -- инертная 25, 26, 30  
 -- — позитрона 29  
 — радиоактивных материалов 28  
 Массы отрицательные 28  
 Маха принцип 192  
 Меркурий, поворот перигелия 95  
 Мёллера — Мицкевича псевдотензор 113, 131  
 Мёссбауэра эффект 89, 197  
 Метрика во вращающихся координатах 39  
 — вращающейся полый сферы 194  
 — заряженной частицы 87  
 — Лоренца 37  
 — Райснера — Нордстрёма 87  
 — шварцшильдовская 86  
 Метрики флуктуации 223  
 Метрический тензор 37, 38, 54, 62, 66, 67  
 Момент импульса, закон сохранения 72, 110
- Момент импульса, плотность, 72  
 Монополь 190
- Натяжений тензор** 72, 73, 79  
 Начальные значения, формулировка в теории излучения 138  
 Нордстрёма — Райснера решение для заряженной частицы 87  
 Нулевое поле 147, 187  
 Ньютона закон всемирного тяготения 69  
 Ньютонова механика 237
- Объем, элемент инвариантный** 64, 65  
 Орбиты планет 92  
 Особенность шварцшильдовская (сингулярность) 86  
 Осциллятор квадрупольный 126  
 -- — линейный, излучаемая мощность 127  
 — кварцевый 33  
 Отклонение лучей света 95  
 Относительность, частная теория 36
- Палатини форма** 216  
 Парадокс часов 39  
 Параллельный перенос 47, 54  
 — — бесконечно малый 49  
 — — вдоль кривой 48  
 Переменные внутренние 211  
 Перигелий, поворот 95  
 Петрова классификация тензора Римана 14, 150  
 — решения II типа 12, 14, 151  
 Плоские волновые решения точные 136  
 Плотность момента импульса 72  
 — тензорная 45  
 — — Леви-Чивита 63, 172, 181, 182  
 — — аффинная 110  
 Поверхности искривленные 42  
 Пойтинга четырехмерный вектор 147



- Полное геодезической системы координат 52  
 Поляризация вакуума 29  
 Потенциал гравитационный 32, 76  
 — движущейся частицы 124  
 — электромагнитный 79  
 — Юкавы 119  
 Предельное поле 184  
 Преобразования тензоров 43  
 Предельная Томаса 191  
 Принцип эквивалентности 7, 12, 16, 21--25, 30, 33, 39  
 Производная ковариантная 53  
 — контрвариантная 53  
 — функциональная 208  
 Пространство искривленное 38  
 — положительной, отрицательной и нулевой кривизны 200  
 Псевдотензор гравитационный симметричный 109, 111  
 — энергии — импульса — натяжений капонический 101  
 — — — — — Ландау — Лифшица 109, 111  
 — — — — — Мёллера — Мицкевича 16, 113, 131  
 Пуассона скобки 203, 205  
 — — для поля 208  
 — уравнение 69  
  
**Радиоактивные материалы, их масса и энергия 28**  
 Решения волновые, симметричные во времени 141  
 — точные, для волн плоских 136  
 — — — — — цилиндрических 129  
 — — — — — симметричные во времени 141  
 Римана тензор для локально плоской волны 153  
 — — — — — плоской гравитационной волны 153  
 — — скачки 147  
 — —, собственные бивекторы 148  
 Римана — Кристоффеля тензор 56, 58  
 Риманова геометрия 42  
  
 Свертка тензора 59  
 Связи в гампльтоновой формулировке 204  
 — гравитационного поля 209  
 — первого класса 204, 206, 210  
 Сила на единицу массы 76  
 Система координат вращающаяся 39  
 — — — инерциальная 34, 38  
 — — — нормальная 150  
 — — — ускоренная 31, 38  
 Скаляр 45  
 Скобки Пуассона 203, 205  
 — — для поля 208  
 Слабое поле, поток энергии 125  
 — — —, решения 115, 117, 128  
 Событие, обозначения через координаты 41  
 Сохранение момента 72, 110  
 Сохранения законы 70, 98  
 Сохраняющиеся величины (дивергентная запись) 104  
 Спин гравитона 119  
 Спиноры в общей теории относительности 223  
 Спутник, применение для опыта с часами 89, 230  
 — Сирнуса, красное смещение 89  
 Суперпотенциалы 109  
 Сферический избыток 59  
  
**Тензор 43, 45, 243**  
 — антисимметричный 46  
 — дуальный 182, 183  
 —, ковариантная дивергенция 63  
 —, ковариантное дифференцирование 53  
 — кривизны 54  
 — метрический 37, 50  
 — Римана — Кристоффеля 56, 58  
 — Риччи 59, 185  
 — свертка 59  
 — свертывание 59  
 — симметричный 46  
 — энергии — импульса — натяжений 72, 75, 78  
 Тензорная плотность 45  
 — — аффинная 110

- Тензорная плотность Леви-Чивита 63, 115, 172, 181, 182  
Тензоров законы преобразования 43  
Тетрады (тетраподы) 17, 151, 225  
Тожества Бианки 58  
— — свернутые 60  
Топология евклидова и псевклидова 187
- Уравнения гравитационного поля 69, 101  
— движения 188  
— Максвелла 79  
Условие суммирования 37  
Условия координатные 75, 118, 217
- Фейнмановские суммы 222, 223  
Флуктуации квантовые 223
- Часов парадокс 39  
— синхронизация 38, 39  
Частица-диполь 190  
Частица с одним центром («монополь») 190  
Часы атомные 33  
— — цезиевые 68
- Шварцшильда внутреннее решение 87  
— метрика 70, 86  
— особенность 70, 86  
Шредингера уравнение 142
- Эйлера — Лагранжа уравнения для геодезической линии 61  
Эйнштейна тензор 60  
Эквивалентности принцип 25, 30, 33, 39  
Экспериментальная проверка общей теории относительности 83  
Эксцентриситет орбиты 94  
Электромагнетизма уравнения 79  
Электрона, масса 28  
Энергии — импульса — натяжной тензор 72, 75, 78  
— поток для слабого поля 125  
Энергия цилиндрических волн 131, 132
- Юкавы потенциал 119
- Якобиан 64

---

# Оглавление

---

Вступительная статья (Д. Д. Иваненко) . . . . .	5
1. Введение . . . . .	5
2. Энергия гравитационного поля . . . . .	8
3. Гравитационные волны . . . . .	9
4. Космология . . . . .	12
5. Спиноры и гравитация . . . . .	14
Литература . . . . .	18
Предисловие автора . . . . .	23
<b>Глава 1. Принцип эквивалентности . . . . .</b>	<b>25</b>
1. Эксперимент Эгвёша . . . . .	25
2. Отрицательные массы . . . . .	28
3. Эквивалентность различных систем отсчета . . . . .	30
4. Гравитационное красное смещение спектральных линий	32
5. Дальнейшие замечания относительно принципа экви-	
валентности . . . . .	33
Литература . . . . .	34
<b>Глава 2. Обобщение частной теории относительности . . . . .</b>	<b>36</b>
1. Идея ковариантности . . . . .	36
2. Метрический тензор . . . . .	37
3. Метрический тензор в искривленном пространстве и	
в ускоренных системах . . . . .	38
4. Общая ковариантность . . . . .	40
Литература . . . . .	41
<b>Глава 3. Риманова геометрия и тензорное исчисление . . . . .</b>	<b>42</b>
1. Понятие о кривизне . . . . .	42
2. Законы преобразования различных тензоров . . . . .	43
3. Параллельный перенос и ковариантное дифференци-	
рование . . . . .	47
4. Тензор кривизны . . . . .	54
5. Тождества Бианки . . . . .	58

6. Геодезические линии . . . . .	60
7. Вычислительные приемы . . . . .	62
8. Измерение длин . . . . .	65
9. Определение метрического тензора . . . . .	67
Л и т е р а т у р а . . . . .	68
<b>Глава 4. Уравнения поля в общей теории относительности и электродинамике . . . . .</b>	<b>69</b>
1. Уравнения гравитационного поля . . . . .	69
2. Вывод уравнений поля из вариационного принципа . . . . .	76
3. Уравнение Максвелла . . . . .	79
4. Движение заряженной частицы . . . . .	81
Л и т е р а т у р а . . . . .	82
<b>Глава 5. Экспериментальная проверка общей теории относительности . . . . .</b>	<b>83</b>
1. Решение Шварцшильда . . . . .	83
2. Гравитационное красное смещение . . . . .	87
3. Поправки к движению планет . . . . .	92
4. Отклонение света . . . . .	95
5. Заключительные замечания . . . . .	97
Л и т е р а т у р а . . . . .	97
<b>Глава 6. Законы сохранения . . . . .</b>	<b>98</b>
1. Канонический псевдотензор энергии — импульса — напряжений . . . . .	98
2. Другие законы сохранения . . . . .	108
3. Дальнейшие замечания о законах сохранения . . . . .	114
Л и т е р а т у р а . . . . .	116
<b>Глава 7. Гравитационные волны . . . . .</b>	<b>117</b>
1. Решения для слабого поля . . . . .	117
2. Тензор Римана в случае локально плоской волны произвольно большой амплитуды . . . . .	121
3. Приближенное вычисление объемных интегралов для источников . . . . .	123
4. Поток и плотность энергии в приближении слабого поля . . . . .	125
5. Линейный квадрупольный осциллятор для масс . . . . .	126
6. Излучение вращающегося стержня . . . . .	127
7. Дальнейшие замечания о решениях для слабого поля . . . . .	128

8. Точное решение для цилиндрических волн . . . . .	129
9. Взаимодействие частицы с цилиндрическими гравитационными волнами . . . . .	132
10. Точные решения для плоских волн . . . . .	136
11. Формулировка начальных значений в теории излучения	138
12. Симметричное во времени решение с положительной энергией . . . . .	141
13. Условия дифференцируемости и непрерывности многообразий . . . . .	144
14. Шестимерная трактовка теории гравитационного излучения . . . . .	145
15. Другие волновые решения из типа II Петрова . . . . .	151
Л и т е р а т у р а . . . . .	155

### **Глава 8. Детектирование и генерация гравитационных волн** 157

1. Детектирование . . . . .	157
2. Квадрупольный массовый детектор . . . . .	159
3. Взаимодействие кристалла с гравитационной волной .	164
4. Вращательные эффекты, вызываемые гравитационным излучением . . . . .	171
5. Генерирование гравитационных волн . . . . .	173
6. Другие опыты с излучением . . . . .	178
Л и т е р а т у р а . . . . .	179

### **Глава 9. Избранные вопросы общей теории относительности** 180

1. Единые теории поля . . . . .	180
2. Уравнения движения . . . . .	188
3. Принцип Маха . . . . .	192
4. Замечания относительно космологии . . . . .	198
5. Гамильтонова формулировка . . . . .	202
6. Замечания о квантовании общей теории относительности . . . . .	221
7. Спиноры в общей теории относительности . . . . .	223
Л и т е р а т у р а . . . . .	226

### **Упражнения** . . . . . 229

<b>Дополнение I. Высший предел для межзвездного гравитационного излучения (Дж. Вебер, Р. Л. Форвард, Д. Зипой, С. Смит и Х. Бениофф)</b> . . . . .	232
Л и т е р а т у р а . . . . .	235

---

<i>Дополнение II. Гравитационные волны (Г. Бонди)</i> . . . . .	236
1. Ньютоновская механика . . . . .	237
2. Электромагнетизм и специальная теория относительности . . . . .	240
3. Гравитация . . . . .	245
4. Квантовая теория . . . . .	250
5. Гравитационные волны . . . . .	251
Л и т е р а т у р а . . . . .	259
Именной указатель . . . . .	260
Предметный указатель . . . . .	263

*Дж. Вебер*

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ  
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ**

Редактор *В. Захаров*  
Художник *Л. Манилова*  
Художественный редактор  
*Е. И. Подмарькова*  
Технический редактор *Е. Потапенкова*  
Корректор *Р. Я. Пивик*

Сдано в производство 10/III 1962 г.  
Подписано к печати 21/IX 1962 г.  
Бумага  $84 \times 108^{1/32} = 4,3$  бум. л.  
13,9 печ. л. Уч.-изд. л. 11,9. Изд. № 2/0959.  
Цена 98 коп. Зак. 243

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой  
УПП Ленсовнархоза  
Ленинград, Измайловский пр., 29