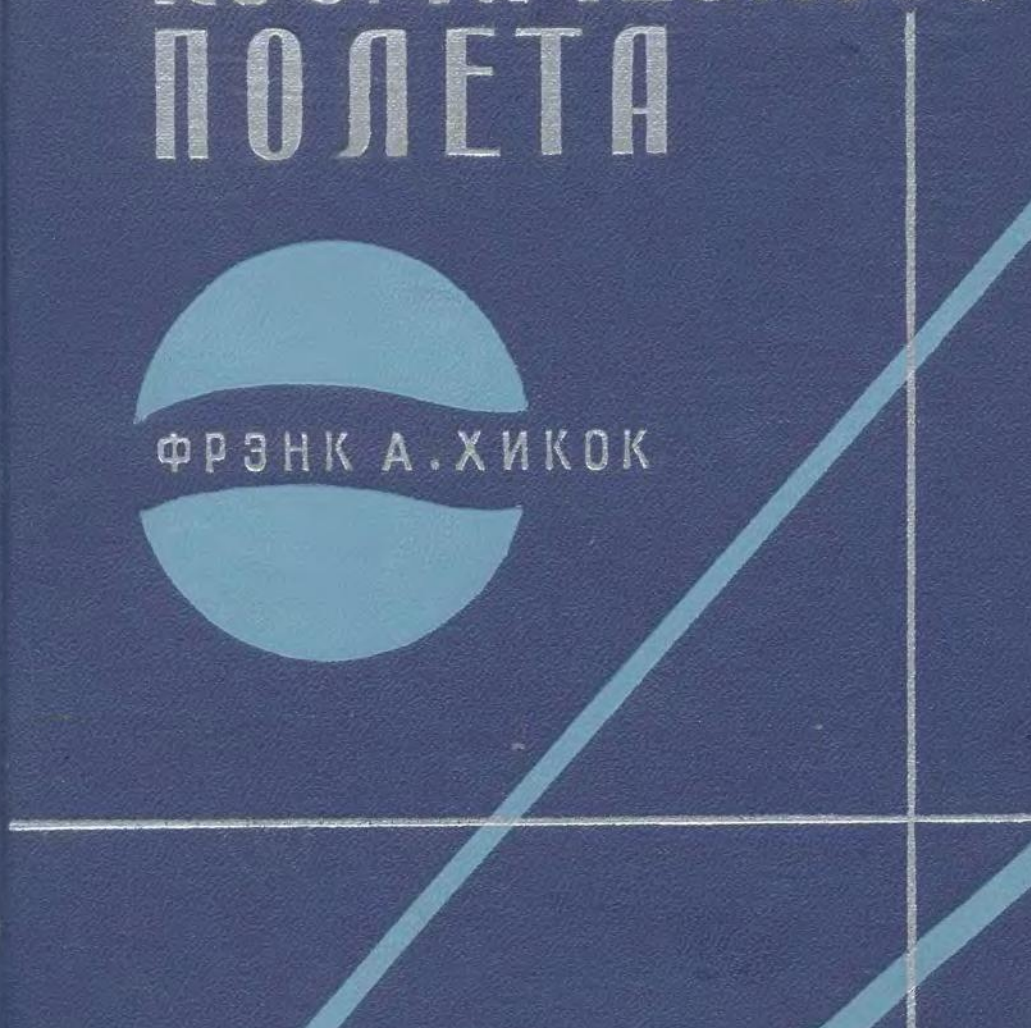


ГРАФИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА



ФРЭНК А. ХИКОК



FRANK A. HEACOCK

professor of graphics, emeritus, princeton university

GRAPHICS IN SPACE FLIGHT

digest of new graphic solutions

McGRAW-HILL BOOK COMPANY
new york san francisco toronto london

ФРЭНК А. ХИКОК

Заслуженный профессор графики (в отставке)
Принстонского университета

ГРАФИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

Краткое изложение новых графических решений

Перевод с английского инж. *Н. Н. Хлебниковой*
Под редакцией канд. техн. наук *И. И. Шунейко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1968

В книге обобщены и систематизированы опубликованные в периодической зарубежной печати работы по методам графического решения ряда задач космического полета.

Приведены методы анализа траекторий космических летательных аппаратов при помощи полярных диаграмм, сеток характеристик, астронавтических номограмм и годографа скорости.

Показано, как по номограммам определяется скорость, масса, среднее расстояние, период обращения и ускорение для любой орбитальной системы двух тел, а также, как решаются различные другие задачи.

Решению этих задач предпослано описание геометрии солнечной системы и объяснение основных законов небесной механики.

Применение графических методов пояснено на примерах расчета запуска на Луну автоматической станции, маневра при переходе с одной орбиты на другую и анализа характеристик ракеты-носителя.

Наглядность графических методов решения задач космического полета позволяет рекомендовать книгу студентам вузов, а также инженерам, которые могут использовать ее при расчетах траекторий.

Таблиц 4, иллюстраций 59, аннотированная библиография — 20 названий, предметный указатель — 275 терминов.

ПРЕДИСЛОВИЕ КООРДИНИРУЮЩЕГО РЕДАКТОРА

Настоящая монография относится к серии «Монографии по технической графике», публикуемой в настоящее время издательством Мак-Гроу Хилл Бук Компани. Серия этих «Монографий» создана в результате исследований по разработке содержания «Курса технической графики», которые субсидировались Национальным научным фондом в 1961—64 гг.

Задачи разработки «Курса технической графики» можно кратко сформулировать следующим образом.

1. Критически оценить цели и назначение графиков в техническом образовании.

2. Изучить и углубить материал этого курса, который обогащает общеобразовательные знания всех студентов, изучающих инженерные дисциплины.

3. Оценить значение графиков как важной составной части всей учебной программы по инженерным дисциплинам.

4. Подготовить информационный материал, который может быть использован преподавателями инженерных дисциплин в качестве пособия, откуда они смогут почерпнуть сведения для построения и углубления курсов по своим предметам.

Серия «Монографий» посвящена той части задач разработки «Курса технической графики», которая отражена в приведенных выше пунктах «2» и «4».

Исследования по разработке содержания «Курса технической графики» были задуманы и осуществляются под руководством профессора Детройтского университета Поля М. Рейнхарда. Общее руководство этими исследованиями осуществлялось Комитетом по разработке программ, в состав которого входят известные преподаватели инженерных дисциплин и инженеры-специалисты нашей страны.

Монографии этой серии призваны внести большой вклад в систему обучения графике, так как в них в легко доступной для всех студентов и преподавателей технических специальностей форме излагаются новые идеи в построении графиков и их применении.

Стив М. Слэйби, координирующий редактор, заведующий кафедрой графики и технического черчения Школы технических и прикладных наук Принстонского университета.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из драматических последствий внезапного наступления (шесть лет тому назад) космической эры явился коренной пересмотр содержания и методов обучения практически во всех областях знаний как в Соединенных Штатах Америки, так и в других странах. Пожалуй, никогда еще в нашей истории университетское образование не привлекало к себе такого пристального внимания со стороны общественности и специалистов. В области техники оцениваются и определяются новые перспективы дальнейшего развития американской и мировой промышленности.

Некоторые традиционные дисциплины целиком пересматриваются или выбрасываются совсем, в соответствии с их относительной ценностью; вводится много новых предметов — либо путем разработки новых курсов, либо путем переработки старых; идет рассмотрение и обсуждение сравнительной эффективности различных методов изложения технического материала.

Именно в связи с этим преподаватели инженерных дисциплин, имеющие дело с графиками, стремятся расширить область применения графических методов анализа.

Между тем, учебная программа по подготовке инженеров сегодня до предела заполнена научными курсами, которые раньше не считались необходимыми для инженера, курсами по высшей математике, а также курсами повышенного типа, считающимися важными в данный момент. Все это требует от студента более солидной подготовки и более напряженных занятий, чем когда-либо прежде. Это возбуждающее интеллект давление на студента все время возрастает и вряд ли станет меньше, так как оно является неизбежным отражением растущей технической сложности современного мира. Графические методы будут включены в эту разрабатываемую учебную программу лишь в том случае, если удастся показать, что они будут способствовать усвоению физических взаимосвязей или решению важных технических проблем.

В техническом образовании можно различить несколько направлений, определяющих роль графики.

Одним из них является открытие доступа студентам технических специальностей к изучению математики на более высоком уровне и заострение их внимания на математическом мышлении.

Несмотря на то, что математический анализ, без сомнения, наиболее эффективен, когда он оперирует самыми общими абстрактными понятиями, преподаватели графических методов считают, что многие сложные математические связи могут быть поняты более полно, если их представить в схематической (в виде диаграмм) или в геометрической форме, и что такое зрительное восприятие помогает выявлять связи, которые иначе могли бы ускользнуть от внимания.

Вторым направлением является более широкое использование электронно-вычислительной техники в решении сложных математических задач, хотя довольно очевидно, что характер такого решения нельзя полностью осознать до тех пор, пока цифровые результаты не будут представлены в соответствующей графической форме.

Можно также заметить, что современному студенту приходится сталкиваться со сложными явлениями, объяснение которых редко можно дать с помощью обычных методов, и его поощряют в использовании средств из арсенала разнообразных неортодоксальных методов. Расчеты и теория дифференциальных уравнений не всегда могут удовлетворить таким требованиям, а принципы аналитической геометрии или графическое решение дифференциальных уравнений в частных производных часто могут дать более прямые методы для решения таких задач. Примеры этого часто встречаются в периодической литературе; например, графическое построение сложных полей потока или графический анализ траекторий ионов в проекте ионной ракеты. Но студентам обычно предоставляют самим «открывать» эти способы.

И, наконец, хотя здесь еще нет четко обозначенной тенденции, можно упомянуть и о том, что преподавание проектирования в настоящее время находится в состоянии брожения. Хотя курс черчения для обучения технике черчения все еще остается в пределах программы обычной технической школы, все соглашается с тем, что проектирование является творческим умственным процессом, который выходит далеко за рамки техники черчения.

В ряду новых идей, получивших признание, находится включение проектирования в курс по конструированию систем; в других учебных заведениях преподавание проектирования приобрело форму конструкторского проекта, выполняемого на старших курсах, при работе над которым студент должен соединить в одной машине или системе многие принципы, усвоенные им при изучении отдельных специальных курсов. Какую бы форму ни приняло преподавание проектирования, графический анализ, вероятно, может играть в нем важную роль.

В этой книге сделана глубоко продуманная попытка показать, что графические методы могут быть с успехом использованы при решении современных задач, связанных с космическими полетами. То, что эти методы действительно имеют большое значение, явствует из того факта, что большая часть материала взята из периоди-

ческой литературы и отчетов, написанных за последние несколько лет инженерами, ответственными за создание некоторых важнейших ракетных и космических проектов. Эти методы были развиты, и результаты таких работ были опубликованы, потому что они оказались полезными.

Вряд ли можно предположить, что один автор или даже одна техническая кафедра, кафедра графики, будут в состоянии преподать или хотя бы представить себе то многообразие путей, по которым графические методы могут быть применены в технике. Так же, как прикладная математика является языком каждого преподавателя инженерных дисциплин в любой области, так и графика есть поистине язык каждого преподавателя в любой области знаний. Если графические методы предстоит использовать по-новому или в более широком плане, то инициатива должна исходить от заинтересованных в этом преподавателей. Книга проф. Ф. Хикока может послужить стимулом к развитию нового подхода к данному предмету.

Мартин Саммерфилд, профессор по авиационной технике Принстонского университета, вице-президент по издательской деятельности Американского института авиации и астронавтики.

Серия «Монографии по технической графике»

Координирующий редактор

Стив М. Слэйби — Принстонский университет

Редакционная коллегия:

Карсон Бак — Сиракузский университет

Стивен Кунс — Массачузетский технологический институт

Фрэнк Хикок — Принстонский университет

Мэттью Мак-Нири — Университет штата Мэйн

Ньюмен Холл — Комиссия по техническому образованию

Роберт Хэммонд — Военная академия США

Поль М. Рейнхард — Детройтский университет



ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена для того, чтобы предоставить материал, который поможет обогатить знания студентов технических специальностей. Цель ее издания состоит в том, чтобы стимулировать интерес преподавателей, студентов и исследователей к разработке новых графических методов для анализа и решения сложных проблем, связанных с космическими полетами.

После вывода первого спутника на орбиту вокруг Земли в октябре 1957 г. возник большой интерес к освоению космического пространства и был осуществлен целый ряд космических исследований. Технические журналы последних лет содержат огромное количество статей, посвященных проблемам космических полетов. Исследование полетов в космос основывается на изучении траекторий ракет и орбит спутников, которые могут быть изображены и интерпретированы с помощью графических методов.

В геометрии солнечной системы Земля движется вокруг Солнца в плоскости эклиптики, а орбита Земли представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится центр Солнца. Аналогично, орбита Луны вокруг Земли представляет собой плоский эллипс, в одном из фокусов которого находится Земля. Каждый искусственный спутник, обращающийся по орбите вокруг Земли, движется по аналогичной эллиптической траектории, положение, размеры и форму которой можно определить посредством графического анализа.

Вывод спутника на расчетную орбиту или достижение какой-либо цели в космосе требует точного расчета, вычерчивания графиков и управления траекторией ракеты по направлению, скорости и времени. Численные расчеты производятся вычислительными машинами, тогда как графический анализ подтверждает проектные расчеты и обеспечивает наглядную проверку и подтверждение правильности каждого шага рассматриваемого процесса.

Простейшие диаграммы, состоящие из окружностей и прямых линий, представляют все элементы траектории и образуют основу для простых графических построений при решении задач полета с непрерывной тягой, перехода на новую орбиту, межпланетных перелетов и встречи с другими спутниками.

В эскизном проектировании используются сетки характеристик для предварительного определения скорости, высоты, дальности, угла наклона траектории полета и перегрузки для активного и пассивного участков полета и для условий в конце активного участка.

По номограммам определяют скорость, массу, среднее расстояние, период и ускорение для любой орбитальной системы двух тел, и они дают возможность получить быстрые решения для многих задач на ранней стадии проектирования. Диаграммы годографа скорости позволяют интерпретировать характеристики траектории для целей их анализа и расчета.

В первых двух главах настоящей книги описана геометрия солнечной системы и объяснены основные принципы небесной механики. Остальные четыре главы содержат краткое изложение недавно опубликованных статей и технических отчетов о новых графических решениях задач, связанных с космическим полетом.

В приложении даны три типичных проекта в форме, удобной для графического решения студентами во время работы в аудиториях. Библиография с аннотациями поможет выбрать для чтения недавно опубликованные в технических журналах статьи, где описываются графические решения, с успехом применявшиеся при решении задач космического полета.

Настоящая книга была написана в качестве первой в серии монографий, описывающих новое применение графических методов, в порядке разработки содержания «Курса технической графики», которая субсидировалась Национальным научным фондом.

Автор выражает глубокую признательность проф. Стиву М. Слэйби за его сотрудничество. Автор благодарен проф. Мартину Саммерфилду за высказанные им ценные советы, а также выражает признательность Роберту В. Босма и Майклу П. Герарду за предоставленную ими возможность использовать в приложении их проекты для аудиторной работы студентов. Автор благодарит Роберта Ф. Уэстовера за его работу по графическому оформлению книги и госпожу Сюзанн Фишер за перепечатку материала на машинке и за корректуру.

Фрэнк А. Хикок,
Принстон, Нью-Джерси, май 1963 г.

Геометрия солнечной системы

ВВЕДЕНИЕ

Солнечная система состоит из Солнца, планет, движущихся вокруг него, спутников, движущихся вокруг планет, комет и метеоров. Основные планеты, в порядке их расстояний от Солнца, следующие: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон. У Меркурия и Венеры нет спутников, Земля имеет один спутник — Луну, Марс — два, Юпитер — двенадцать, Сатурн — девять, Уран — пять и Нептун — два спутника. Отдаленные небесные тела, светящиеся собственным светом, называются звездами. Наша ближайшая звезда — Солнце. Кометы, имеющие светящуюся голову и длинный туманный хвост, появляются на небе на короткое время, следуют по криволинейной траектории вокруг Солнца и затем удаляются в космическое пространство. Метеоры — это малые тела, движущиеся в космическом пространстве и невидимые до тех пор, пока они не войдут в атмосферу Земли, где ярко сгорают, как «вспыхивающие звезды».

НЕБЕСНАЯ СФЕРА

Когда мы смотрим на небо, удобно представить себе его в виде большой полой сферы с наблюдателем в центре этой сферы. Небесная сфера предполагается достаточно большой для того, чтобы вместить все небесные тела; она настолько огромна, что в сравнении с ней вся Земля представляется лишь точкой в центре этой сферы. Затем каждое небесное тело проектируется радиально на внутреннюю поверхность небесной сферы так, как это видно с Земли. Такое представление дает удовлетворительную основу для систем измерений, используемых при определении положения, направления, расстояния и движения планет и спутников. Во всех случаях на поверхности небесной сферы, вдоль ее большого круга, лежащего в плоскости, проходящей через центр сферы, откладывают видимое (или угловое) расстояние.

Для определения точек, расположенных на небесной сфере, используют обычно три определенные системы координат: горизонтную, экваториальную и эклиптическую. Для каждой из этих систем существует свой набор больших и малых кругов, образующих на небесной сфере сетку линий, подобных экватору, меридианам и параллелям в географической системе координат, которые служат в качестве линий отсчета при определении широты и долготы точек, находящихся на поверхности Земли.

ГОРИЗОНТНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Эта система связана с направлением силы тяжести в точке нахождения наблюдателя на поверхности Земли. Если линию отвеса в этой точке продолжить вверх, то она пройдет сквозь небесную сферу в точке, называемой *зенитом*. Та же линия отвеса, продолженная вниз, пройдет сквозь небесную сферу в противоположной точке, называемой *надиром*. Горизонтальная плоскость, расположенная на равном расстоянии от зенита и надира, пересекает небесную сферу по большому кругу, называемому *горизонтом*. Этот большой круг является главным кругом горизонтной системы координат, которая и получила свое название от слова «горизонт». Вертикальные круги — это большие круги, проходящие через зенит и надир под прямыми углами к горизонту. Вертикальный круг, проходящий на небесной сфере через север и юг и лежащий в плоскости, в которой находится наблюдатель, называется *небесным меридианом*. Первый вертикал — это вертикальный круг, расположенный под прямым углом к меридиану. Меридиан пересекает горизонт в точках севера и юга, а первый вертикал пересекает горизонт в точках запада и востока. Эти четыре точки на горизонте называются *странами света*. Малые круги небесной сферы, параллельные горизонту, называются *параллелями высоты*, кругами равной высоты, или *альмукуантаратами*.

В горизонтной системе координатами небесного тела являются его высота и азимут. *Высота* небесного тела — это его угловое возвышение над горизонтом, измеряемое по вертикальному кругу, проходящему через небесное тело. Дуга вертикального круга, дополняющая высоту до 90° , называется *зенитным расстоянием*. *Азимут* небесного тела — это угол, с вершиной в зените, между меридианом и вертикальным кругом, проходящим через небесное тело. Этот азимутальный угол измеряется вдоль горизонта, в западном направлении от точки юга до точки пересечения горизонта с вертикальным кругом, проходящим через небесное тело.

В верхней половине небесной сферы, показанной на рис. 1, нижний круг представляет собой горизонт с наблюдателем в его центре и зенитом, находящимся прямо над наблюдателем. Вертикальный

круг, проходящий через зенит и полюс, представляет собой меридиан, а первый вертикал расположен под прямым углом к нему. Высотой звезды в точке *A* является дуга *AB*, а азимутом звезды —

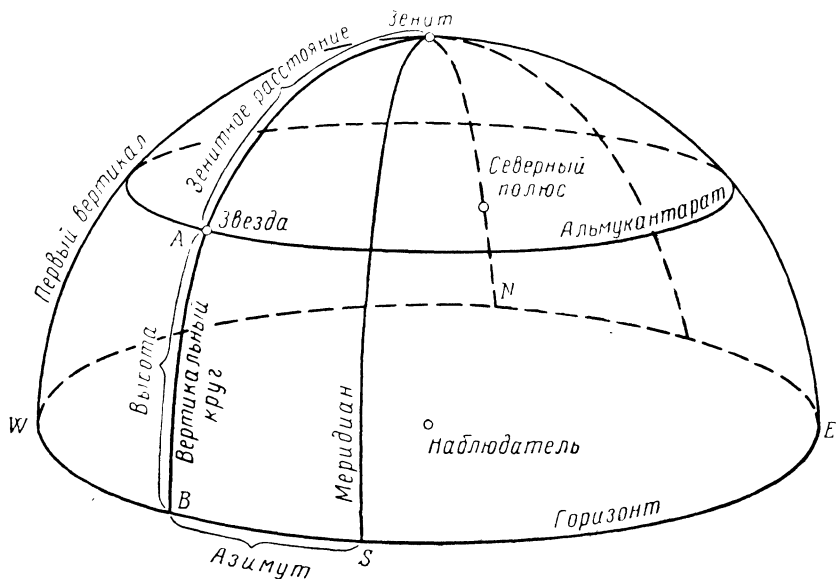


Рис. 1. Горизонтная система координат

дуга *SB*, измеренная в западном направлении от точки юга *S*. Зенитное расстояние звезды *A* и ее альмукантарат, параллельный горизонту, также показаны на рис. 1.

ЭКВАТОРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Вращение Земли вокруг собственной оси — полный оборот за сутки — называется суточным движением. Если продолжить ось вращения Земли в обоих направлениях, то она пройдет сквозь небесную сферу в двух полюсах, называемых полюсами мира, или полюсами вращения. Северный полюс — это точка, вокруг которой суточное движение звезд кажется видимым с Земли против часовой стрелки. Большой круг небесной сферы, находящийся на равном расстоянии от полюсов, называется небесным экватором. Это тот самый большой круг, по которому плоскость земного экватора пересекает небесную сферу. Малые круги небесной сферы, параллельные небесному экватору, называются небесными параллелями. Суточная дуга звезды совпадает с ее небесной параллелью.

Большие круги небесной сферы, проходящие через полюсы и перпендикулярные небесному экватору, называются часовыми

к р у г а м и. При вращении Земли вокруг собственной оси каждый часовой круг в свою очередь проходит через зенит наблюдателя и совпадает с небесным меридианом горизонтной системы координат. Таким образом, эти две системы имеют общий большой круг.

В экваториальной системе координатами небесного тела являются его склонение и часовой угол. Склонение звезды — это дуга ее часового круга, измеряемая к северу (+) или к югу (—) от небесного экватора. Часовой угол звезды в любой момент времени есть дуга небесного экватора, замеренная в западном направлении от небесного меридиана до часового круга, проведенного через звезду. Часовой угол определяется так же, как угол (с вершиной в полюсе) между небесным меридианом и часовым кругом, проведенным через звезду. Часовой угол обычно измеряется в часах, минутах и секундах времени. Так как угол, соответствующий 1 часу, составляет $1/24$ длины окружности (360°), то он эквивалентен 15° . Одна минута времени соответствует 15 дуговым минутам, одна секунда — 15 дуговым секундам. Например, $4 \text{ час } 2 \text{ мин } 3 \text{ сек} = 60^\circ 30' 45''$.

Так как часовой угол непрерывно изменяется со временем вследствие вращения Земли, то мы должны измерять его от точки, имеющей то же суточное вращение, что и Земля. Поэтому в качестве такой начальной точки отсчета используется (вместо меридиана) точка весеннего равноденствия, определяемая в следующем параграфе. Дуга небесного экватора между точкой весеннего равноденствия и часовым кругом звезды называется прямым восхождением звезды.

ЭКЛИПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Эклиптика — это большой круг, являющийся линией пересечения плоскости вращения Земли вокруг Солнца с небесной сферой. Она пересекает небесный экватор в двух противоположных точках под углом около $23^\circ,5$, называемым наклонением эклиптики. Точка, в которой эклиптика пересекает экватор в направлении с юга на север, называется точкой весеннего равноденствия, а другая точка пересечения называется точкой осеннего равноденствия. Точки на эклиптике, расположенные на равном расстоянии от двух точек равноденствий и на угловом расстоянии в 90° от каждой из них, называются точками летнего солнцестояния, когда Солнце имеет максимальное склонение, равное $+23^\circ,5$, и зимнего солнцестояния, когда склонение Солнца равно $-23^\circ,5$. Часовой круг, проходящий через точки равноденствий, называется колюром равноденствий, а часовой круг, проходящий через точки солнцестояний, — колюром солнцестояний.

С каждой стороны эклиптики и на угловом расстоянии в 90° от нее находятся северный и южный полюсы эклиптики, через

которые проходят большие круги, называемые вторичными по отношению к эклиптике. Малые круги на небесной сфере, параллельные эклиптике, называются астрономическими параллелями. Эклиптическая широта небесного тела есть дуга его вторичной эклиптики между небесным телом и эклипти-

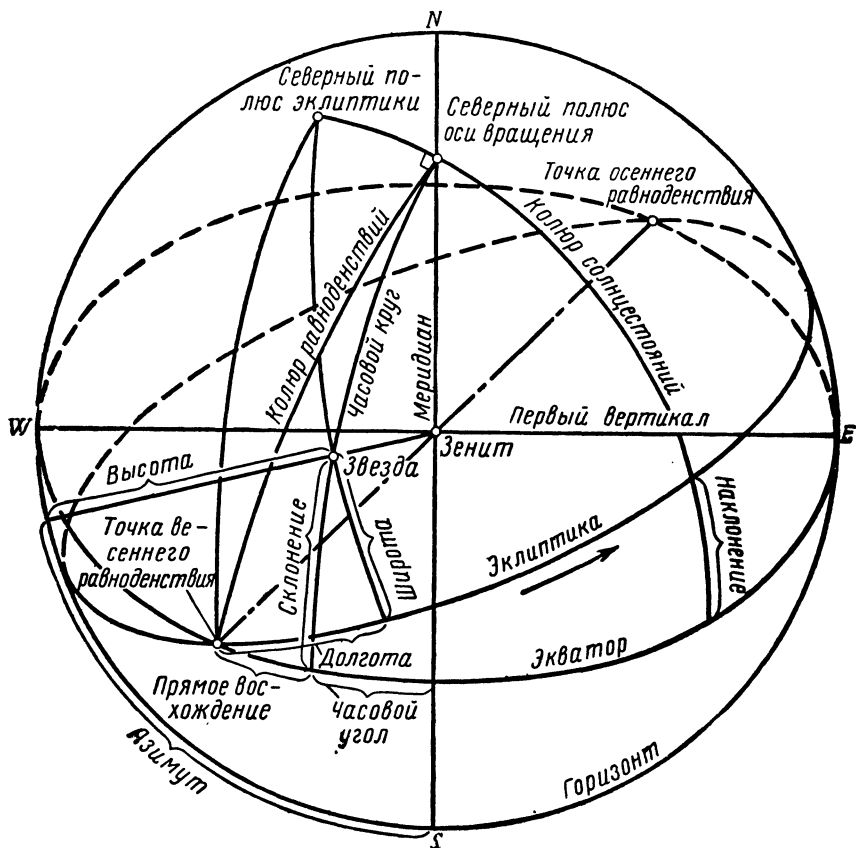


Рис. 2. Взаимосвязь координат в различных системах

кой — положительная, если небесное тело находится к северу от эклиптики, и отрицательная, если оно находится к югу от эклиптики. Эклиптическая долгота небесного тела есть дуга эклиптики, измеряемая в восточном направлении от точки весеннего равноденствия до вторичного по отношению к эклиптике круга.

На рис. 2 показан вид небесной сферы, как она представляется, если смотреть на нее вертикально вниз из точки, расположенной над зенитом. Этот вид сверху показывает взаимосвязь различных координат небесной сферы друг с другом. Здесь вертикальная линия визирования совпадает с направлением силы тяжести, ко-

торое проходит через наблюдателя и определяет зенит и надир, горизонт и альмукантараты, и все вертикальные круги. Один из вертикальных кругов — меридиан, проходящий через полюс вращения Земли и пересекающий горизонт в точках севера и юга, принят за начальный. Тогда две координаты небесного тела, измеренные дугами больших кругов на небесной сфере, будут его азимутом и высотой.

Направление оси Земли определяет полюсы вращения, экватор, часовые круги и все часовые углы. Координатами небесного тела относительно меридиана и экватора будут его часовой угол и склонение. Координатами небесного тела относительно точки весеннего равноденствия, которая соответствует гринвичскому меридиану на Земле, будут прямое восхождение и склонение небесного тела.

Плоскость орбиты Земли определяет эклиптику, по которой измеряется эклиптическая долгота небесного тела от точки весеннего равноденствия; эклиптическая широта измеряется от эклиптики по большому кругу, проходящему через небесное тело и полюс эклиптики. Эти координаты определяют положение небесного тела на небесной сфере.

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Так как время обычно измеряется продолжительностью движения, то за стандартную единицу принято время одного кажущегося оборота Солнца вокруг Земли. Когда Солнце достигает своей высшей точки в небе и его центр пересекает местный меридиан, на Земле — полдень; когда Солнце находится на половине пути до следующего полудня, на Земле — полночь. Время от полуночи до полудня принято обыкновенно называть временем до полудня, а время от полудня до полуночи — временем после полудня. Это истинное солнечное время есть время, показываемое солнечными часами. В любой момент это время соответствует часовому углу Солнца. Но кажущееся (видимое) движение Солнца неравномерно, и истинные солнечные сутки от полудня по солнечным часам до следующего полудня будут различными по длительности. Поэтому истинное солнечное время непригодно для научных целей.

Среднее солнечное время — это часовой угол воображаемого среднего Солнца, которое движется равномерно по небесному экватору и завершает полный оборот по эклиптике в точности за то же время, что и истинное Солнце. Когда центр среднего Солнца пересекает меридиан, наступает средний полдень. Средние солнечные сутки всегда имеют одну и ту же продолжительность, которая соответствует продолжительности средних истинных солнечных суток. Так как среднее солнечное время не изменяется, оно и есть то время, которое показывают обычные часы, и его используют во всех случаях, кроме некоторых астрономических измерений. Разность между средним временем

и истинным временем, которая никогда не бывает больше 16 минут, называется уравнением времени.

По международному соглашению гринвичский меридиан в Англии принято считать первым меридианом, от которого отсчитываются земная долгота и среднее солнечное время. Когда Солнце находится над гринвичским меридианом, считается полдень по гринвичскому времени. Соединенные Штаты Америки разделены на четыре пояса времени, каждый из которых имеет центральный меридиан; долгота этих меридианов расположена соответственно на 5, 6, 7 и 8 часов западнее гринвичского меридиана. Таким образом, в США имеются четыре времени, каждое из которых отличается одно от другого ровно на 1 час, называемые Восточным, Центральным, Горным и Тихоокеанским стандартными временами. В тот момент, когда по гринвичскому времени 10 часов, в Нью-Йорке 5 часов по Восточному стандартному времени, в Чикаго — 4 часа по Центральному стандартному времени, и так далее.

Сидерическое (звездное) время в любой момент есть часовой угол точки весеннего равноденствия. Сидерические (звездные) сутки, начинающиеся в момент пересечения меридиана точкой весеннего равноденствия, примерно на 4 минуты короче солнечных суток. Они разделены на 24 сидерических (звездных) часа, которые, в свою очередь, подразделяются на сидерические минуты и секунды, причем каждая из этих единиц времени пропорционально меньше соответствующих единиц солнечного времени. Сидерическое время используется исключительно в астрономических целях.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Возвращаясь к рис. 2, заметим, что часовой угол звезды равен сидерическому времени (часовой угол точки весеннего равноденствия) минус прямое восхождение звезды. Это важное соотношение между системами координат. Когда звезда находится на меридиане наблюдателя, ее прямое восхождение равно местному сидерическому времени.

Преобразование координат «Высота — Азимут» в координаты «Часовой угол — Склонение» требует решения сферического треугольника, называемого треугольником ZPS (рис. 3). Как показано на рис. 3, вершинами этого астрономического треугольника являются зенит, полюс и звезда. И углы и стороны треугольника измеряются в градусах; перечислим их:

угол Z — азимут звезды от точки севера;

угол P — часовой угол звезды;

угол S — параллактический угол;

сторона ZP — дополнительный угол к широте наблюдателя, равный $90^\circ - \Phi$;

сторона ZS — дополнительный угол к высоте звезды, равный $90^\circ - h$;

сторона PS — дополнительный угол к склонению звезды, равный $90^\circ - \delta$.

Часовой угол звезды будет отрицательным, если его измерять к востоку от меридиана. Если какие-либо три элемента треуголь-

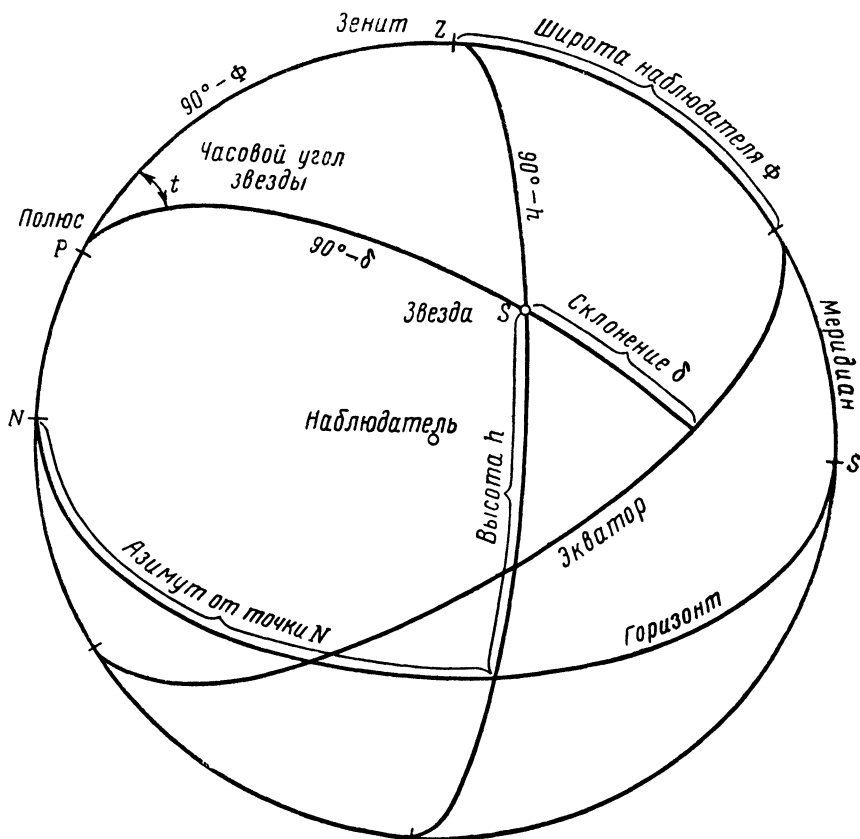


Рис. 3. Треугольник ZPS

ника ZPS известны, то три остальных элемента определяются методами сферической тригонометрии.

ЗЕМЛЯ И ЕЕ ОРБИТА

Земля — одна из девяти основных планет, движущихся вокруг Солнца. Земля — почти точная сфера, средний диаметр которой равен 12743 км, а длина окружности 40032 км. Так как диаметр в направлении полюсов на 43,4 км меньше, чем на экваторе, то Земля имеет форму сплюсненного сфероида. Масса Земли равна $5,975 \cdot 10^{21}$ тонн. Земля поворачивается вокруг своей оси за 24 си-

дерических часа и движется по своей орбите вокруг Солнца со средней скоростью 29,8 км/сек.

Орбита Земли представляет собой эллипс малого эксцентриситета с Солнцем в одном из его фокусов. По определению, эллипс — это плоская кривая; для точки, движущейся по эллипсу, сумма ее расстояний от двух фиксированных точек, называемых фокусами, всегда постоянна и равна большой оси эллипса. На рис. 4 представлен эллипс, имеющий намного больший эксцентриситет, чем орбита Земли, но наглядно иллюстрирующий ее основные свойства и соотношения.

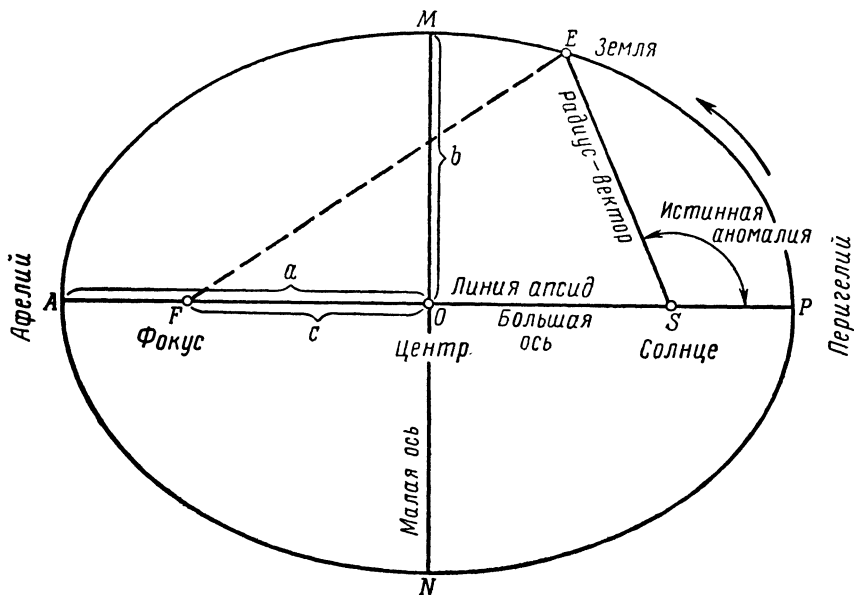


Рис. 4. Эллипс, изображающий орбиту Земли

На рис. 4 эллипс, изображающий орбиту Земли, имеет большую ось AP и малую ось MN , которые делят друг друга пополам, пересекаясь под прямым углом в центре O . Длина большой полуоси равна a , длина малой полуоси b . Фокусы эллипса — F и S (Солнце в одном из фокусов); расстояние от центра до фокуса равно c . Эксцентриситет эллипса равен отношению расстояния между фокусами к длине большой оси, т. е.

$$e = c/a = (\sqrt{a^2 - b^2})/a.$$

С приближением фокусов к центру эксцентриситет стремится к нулю, и эллипс приближается по форме к окружности. Орбита Земли имеет эксцентриситет 0,017.

Перигелием называется точка орбиты Земли, ближайшая к Солнцу (точка P в конце большой оси). Наиболее удаленная от

Солнца точка A — на другом конце большой оси — называется афелием. Земля находится в перигелии около 1 января и в афелии — около 1 июля, совершая полный оборот по орбите за 365,25 суток.

Линия SE — кратчайшее расстояние от Солнца до Земли в любой точке ее орбиты — есть радиус-вектор, а угол PSE , измеряемый от перигелия в направлении движения Земли, называется истинной аномалией. Линия большой оси, продолженная в бесконечность за перигелий и афелий, называется линией апсид. Среднее значение расстояний от Солнца до Земли в перигелии и афелии называется средним расстоянием и равно длине большой полуоси. Среднее расстояние Земли от Солнца равно примерно $14,95 \cdot 10^7$ км. Эта очень важная цифра используется в качестве единицы астрономических расстояний.

СОЛНЦЕ

Солнце — это большая раскаленная звезда, центр солнечной системы, источник света, энергии и жизни на Земле. Диаметр Солнца равен $1,391 \cdot 10^6$ км, т. е. в 109 раз больше диаметра Земли; масса Солнца примерно в 332000 раз больше массы Земли. Солнце вращается вокруг своей оси в том же направлении, что и Земля, но, поскольку Солнце — это гигантский шар, состоящий из раскаленных газов, период его вращения (время одного полного оборота) изменяется от 25 сидерических суток на экваторе до примерно 34 суток — возле полюса. Ось вращения Солнца образует угол, равный 83° , с плоскостью эклиптики. Ось вращения Солнца, продолженная до небесной сферы, пройдет сквозь последнюю в точке между Полярной звездой и Вегой, имеющей прямое восхождение 19 часов и склонение $+64^\circ$.

ЛУНА

Наша ближайшая соседка на небе, Луна, является единственным спутником Земли; она обращается вокруг Земли и, в то же время, совершает вместе с ней ее годовое путешествие вокруг Солнца. Диаметр Луны равен 3480 км, а ее среднее расстояние от Земли равно 384400 км. Масса Луны составляет $1/81,5$ часть от массы Земли. Вращение Луны вокруг своей оси происходит точно за то же время и в том же направлении (с запада на восток), что и ее вращение вокруг Земли, и Луна постоянно обращена к Земле одной и той же стороной. Период обращения Луны вокруг своей оси и вокруг Земли равен $27\frac{1}{3}$ сидерических суток. Средняя скорость движения Луны равна 3680 км/час.

Кажущаяся траектория Луны на небесной сфере близка к большому кругу, пересекающему эклиптику под углом около 5° , который называется наклонением орбиты Луны. Точки пересечения называются узлами лунной орбиты. Восходящий

узел — это точка, в которой Луна пересекает эклиптику в направлении с юга на север; нисходящий узел — противоположная точка пересечения. Перигей — это точка орбиты Луны, ближайшая к Земле, а апогей — наиболее удаленная от Земли точка лунной орбиты. В перигее Луна находится на расстоянии 363300 км, а в апогее — на расстоянии 405500 км от Земли. Эксцентриситет эллиптической орбиты изменяется от 0,043 до 0,067 (среднее его значение равно 0,055).

Ось вращения Луны наклонена так, что плоскость ее экватора образует угол $6^{\circ},5$ с плоскостью ее орбиты и угол, равный $1^{\circ},5$, — с плоскостью эклиптики. Эти три плоскости имеют одну общую линию, называемую линией узлов. Плоскость эклиптики расположена между двумя другими плоскостями.

Хорошо известно, что Луна восходит и заходит каждый день позже, чем в предыдущий. Этот сдвиг по времени, составляющий в среднем около 51 мин, возникает вследствие кажущегося движения Луны относительно звезд в восточном направлении на 13° в сутки, в то время как относительное движение Солнца составляет только 1° . Таким образом, Луна догоняет и проходит Солнце около 13 раз в году. Это кажущееся положение Луны относительно Солнца определяет фазы Луны, изменяющиеся от серповидной Луны (новолуния) до полной Луны (полнолуния) и обратно до серповидной.

Элонгацией Луны называется разность долгот Луны и Солнца. Когда Луна и Солнце имеют одинаковую долготу, элонгация равна нулю, а о серповидной Луне в фазе новолуния говорят, что она находится в соединении. Когда разность долгот составляет 180° , полная Луна (в фазе полнолуния) находится в противостоянии. В обоих случаях — в соединении и в противостоянии — Луна, Земля и Солнце находятся почти на одной и той же прямой линии, и в этом случае говорят, что Луна в этот момент находится в сизигии. При элонгации, равной 90° (восточной или западной), Луна находится в квадратуре, показывая первую или последнюю свою четверть, в то время как ее половина, обращенная к Солнцу, освещена.

Долгое время на Луну смотрели как на хронометр для счета месяцев в году, но не всем известно, что существуют различные виды месяцев. Время, затрачиваемое Луной на один оборот относительно данного кажущегося положения ее на фоне звезд, называется сидерическим (звездным) месяцем, продолжительность которого в среднем равна 27,3 суток. Время движения Луны от одного новолуния до другого (интервал от одного соединения до другого соединения) называется синодическим месяцем. Это обычный месяц, имеющий среднюю продолжительность 29,5 суток. Дракони́ческим месяцем называется интервал времени между последовательными прибытиями Луны в один и тот же узел, его средняя продолжительность составляет 27,2 суток.

ОРБИТЫ ПЛАНЕТ

Эллиптическую орбиту планеты, обращающейся вокруг Солнца, и положение планеты на орбите в любой момент времени определяют следующие элементы орбиты планеты:

- 1) большая полуось a ;
- 2) эксцентриситет e ;
- 3) наклонение плоскости орбиты к плоскости эклиптики i ;
- 4) долгота восходящего узла Ω ;
- 5) угол от восходящего узла до перигелия ω ;

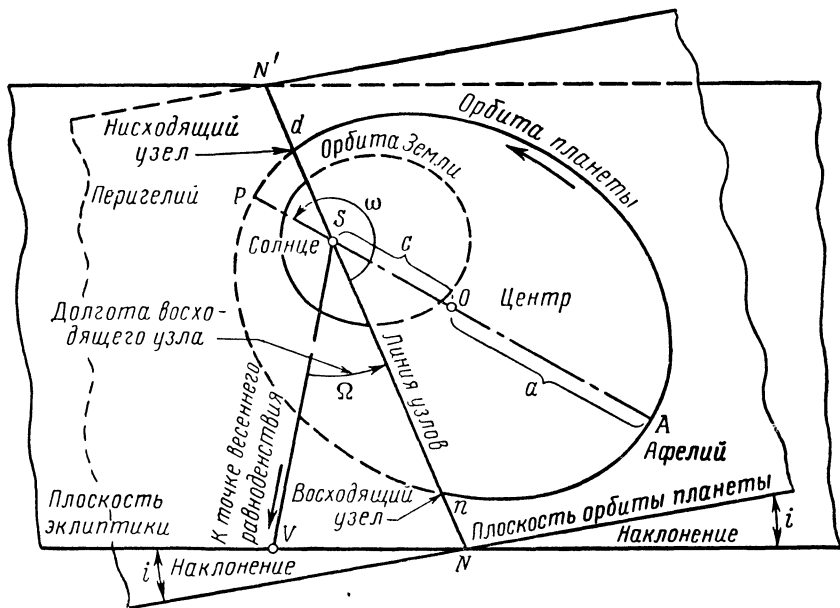


Рис. 5. Элементы орбиты планеты

6) сидерический (звездный) период обращения P или среднесуточная угловая скорость μ ;

7) эпоха E или время прохождения планеты через перигелий T .

Как показано на рис. 5, плоскость орбиты планеты пересекает плоскость эклиптики по линии узлов NN' , проходящей через центр Солнца S . В восходящем узле (точка n) планета переходит с южной стороны эклиптики на северную. Противоположная точка d называется нисходящим узлом. Угол i между двумя плоскостями называется наклонением плоскости орбиты планеты. Линия SV направлена от Солнца к точке весеннего равноденствия на небесной сфере. Угол Ω между этой линией и линией узлов, измеряемый от точки весеннего равноденствия в направлении движения Земли, называется долготой восходя-

щего узла. Положение и наклонение плоскости орбиты определяются углами i и Ω .

На рис. 5 орбита планеты представляет собой эллипс с центром в точке O , Солнцем, расположенным в фокусе S , и большой осью PA . Точка P является перигелием, а направление большой оси в плоскости орбиты определяется углом ω , лежащим между ли-

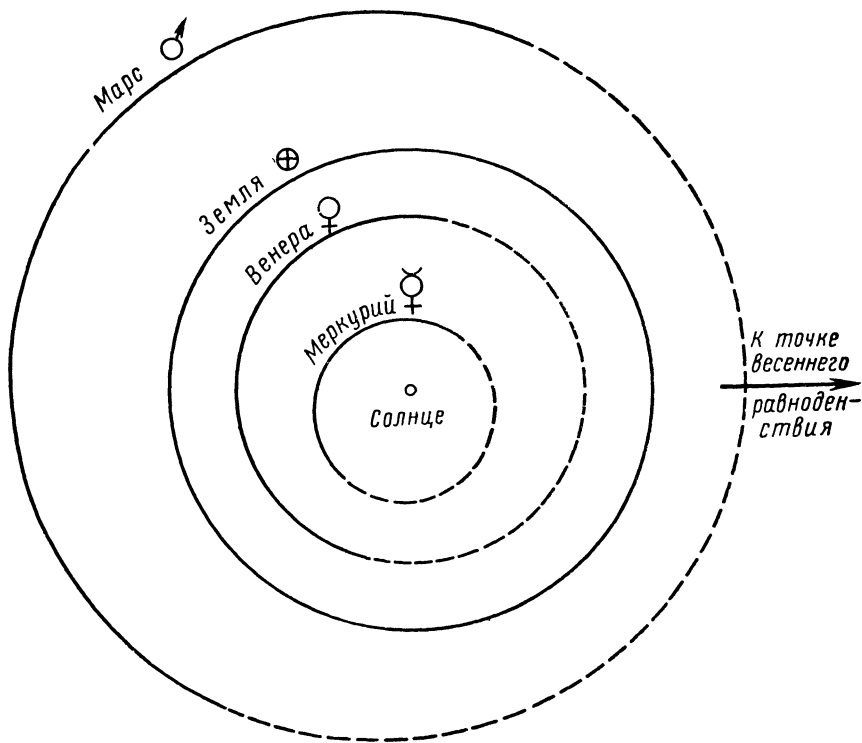


Рис. 6. Орбиты четырех внутренних планет солнечной системы

ниями SN и SP и измеряемым в восточном направлении, в сторону движения планеты. Обычно объединяют этот угол в плоскости орбиты с углом VSN в плоскости эклиптики. Сумма этих двух углов $\Omega + \omega$ называется долготой перигелия. Таким образом, угол ω ориентирует орбиту планеты в ее плоскости.

Размер орбиты определяется длиной большой полуоси a или средним расстоянием планеты от Солнца, которое может быть измерено в километрах; однако большая полуось орбиты Земли является предпочтительной единицей для измерения расстояний. Форма орбиты определяется эксцентриситетом e , который равен

отношению расстояния от Солнца до центра орбиты к длине большой полуоси: $e = c/a$.

Чтобы определить положение планеты на ее орбите в любой момент времени, необходимо установить начальную точку, называемую эпохой, и либо сидерический (звездный) период обращения P , либо среднесуточную угловую скорость μ , которая равна частному от деления 360° на число суток, содержащихся в периоде обращения P . Эпоха — это средняя долгота планеты, видимая с Солнца в некоторое установленное время, или же точно тот момент времени, когда планета проходит через перигелий. Положение планеты на ее орбите определяется длиной радиуса-вектора r , представляющего собой линию, проведенную от планеты до Солнца, и истинной аномалией, т. е. углом между радиусом-вектором и большой осью, измеряемым от перигелия в направлении движения планеты. Таким образом, величины P , μ , E и T определяют положение планеты в любой момент времени.

Элементы орбит четырех внутренних планет солнечной системы для 1961 г. представлены в прилагаемой таблице.

Таблица элементов орбит четырех внутренних планет солнечной системы для 1961 г.

Название планеты	Обозначение	Среднее расстояние a	Эксцентриситет e	Наклонение i°	Долгота восходящего узла Q°	Долгота перигелия ϖ°	Орбитальная долгота (январь 1961 г.), в градусах	Сидерический период обращения P , в сутках	Среднесуточная угловая скорость μ°
Меркурий	α	0,387	0,206	7,0	47,9	76,9	271,4	88	4,09
Венера	ν	0,723	0,007	3,4	76,3	131,0	39,1	225	1,60
Земля	\oplus	1,000	0,017	—	—	102,0	100,3	365	0,99
Марс	$\♂$	1,524	0,093	1,8	49,3	335,4	99,5	687	0,52

На рис. 6 показаны орбиты четырех планет, ближайших к Солнцу. Сплошные участки орбит находятся с северной стороны плоскости эклиптики, пунктирные участки — с южной. Среднее расстояние Меркурия от Солнца около 58 миллионов километров, Марс

са — около 228 миллионов километров. Марс и Юпитер значительно удалены друг от друга, и среднее расстояние между ними равно 777 миллионов километров. Орбиты пяти внешних планет — Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона — здесь не представлены из-за их большого расстояния от Земли. В космическом пространстве между орбитами Марса и Юпитера существует более тысячи малых тел, называемых астероидами, или малыми планетами, которые движутся вокруг Солнца по собственным орбитам. Наибольший астероид — Церера — имеет диаметр 785 км. Астероиды и кометы не рассматриваются в этой книге.

Силы и движение
в космическом
пространстве

Движение планет и спутников определяется некоторыми установленными законами.

ЗАКОНЫ КЕПЛера

Иоганн Кеплер (1571—1630 гг.), великий немецкий астроном, после многих лет исследований открыл следующие важные принципы, называемые законами Кеплера.

1. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор каждой планеты описывает равные площади в равные интервалы времени. Это называется законом площадей.

3. Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца; т. е.

$$t_1^2/t_2^2 = a_1^3/a_2^3,$$

где t_1 и t_2 — сидерические периоды обращения планет;

a_1 и a_2 — средние расстояния двух любых планет от Солнца.

Это называется гармоническим законом.

На рис. 7 показано, как закон площадей управляет неравномерной скоростью движения планеты по ее орбите, представляющей собой эллипс с Солнцем в одном из его фокусов (точка S). Когда планета движется от точки A к точке B за определенный период времени, скажем, за 10 суток, ее радиус-вектор описывает заштрихованную площадь ASB . В других положениях радиус-вектор описывает площади CSD и ESF , каждая из которых равна площади ASB . Тогда по закону площадей дуги CD и EF суть расстояния, которые планета проходит за 10 суток на разных участках ее орбиты. Таким образом, путь, проходимый планетой за данный ин-

тервал времени, становится короче по мере того, как увеличивается ее расстояние от Солнца. Наибольшей орбитальной скоростью планета обладает в перигелии и наименьшей — в афелии.

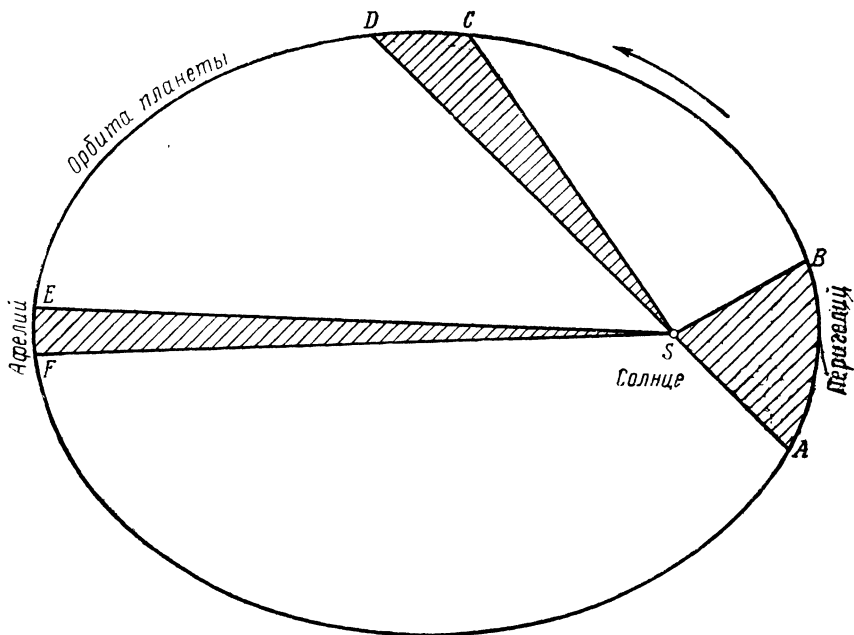


Рис. 7. Закон площадей

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Исаак Ньютон (1642—1727 гг.), великий английский математик и физик, установил следующие основные принципы движения, известные как законы Ньютона.

1. Каждое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на него силы не заставят его изменить это состояние.

2. Под действием силы движение тела изменяется следующим образом: изменение количества движения по времени пропорционально действующей силе, и это изменение происходит по направлению действия силы. (Количество движения равно произведению массы на скорость.)

3. Действие всегда равно противодействию, или, иначе, силы действия двух тел друг на друга всегда равны и противоположно направлены.

Ньютон сделал следующие важные выводы из законов Кеплера.

1. Из закона площадей: сила, которая определяет орбиту каждой планеты, направлена к Солнцу.

2. Из первого закона Кеплера: сила притяжения Солнца для любой данной планеты в различных точках ее орбиты изменяется обратно пропорционально квадрату радиуса-вектора.

3. Из гармонического закона: сила притяжения Солнца для любых планет прямо пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату их расстояний.

Из третьего закона Ньютона следует, что поскольку Солнце притягивает планеты, то и планеты должны притягивать Солнце с такой же силой. Кроме того, поскольку сила притяжения любой планеты Солнцем пропорциональна массе этой планеты, то и сила притяжения Солнца планетой должна быть пропорциональна массе Солнца. Эта взаимосвязь приводит к закону всемирного тяготения Ньютона: «Все материальные частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними», или

$$F = G \left(\frac{M_1 M_2}{d^2} \right),$$

где M_1 и M_2 — массы двух любых частиц;

d — расстояние между ними;

F — сила их взаимного притяжения;

G — гравитационная постоянная (сила притяжения единичных масс на единичном расстоянии).

В системе СГС (сантиметр — грамм — секунда) $G = 6,664 \cdot 10^{-8}$.

Гравитацию (тяготение) не следует путать с силой тяжести (весом). Гравитация — это всеобщее свойство притяжения какой-либо материальной точки другой материальной точкой, находящейся в любом месте. Сила тяжести на поверхности Земли есть равнодействующая силы притяжения Земли и центробежной силы инерции, вызываемой вращением Земли. Эта результирующая сила определяет вес тела в состоянии покоя или направление и скорость падения тела. Вес тела равен его массе, умноженной на ускорение силы тяжести, обозначаемое g и равное приблизительно $9,8 \text{ м/сек}^2$. Скорость свободно падающего тела, находящегося под действием одной лишь силы тяжести, увеличивается на $9,8 \text{ м/сек}$ за каждую секунду падения. Если падение тела начинается из состояния покоя, то в первую секунду тело пройдет расстояние, равное $4,9 \text{ м}$, в следующую секунду — $14,7 \text{ м}$, в третью секунду — $24,5 \text{ м}$ и так далее.

Принципы небесной механики основаны на ньютоновской проблеме двух тел.

Заданы положения и скорости в любой момент времени, а также массы двух сферических тел, на которые не действуют никакие силы, за исключением силы их взаимного гравитационного притя-

жения; требуется определить их орбиты и положения в любые последующие моменты времени.

Решение этой задачи дает следующие важные результаты:

1. На положение центра масс двух тел не влияет их взаимное притяжение; он остается в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения.

2. Два тела будут описывать вокруг их общего центра масс подобные орбиты; размер орбит будет обратно пропорционален

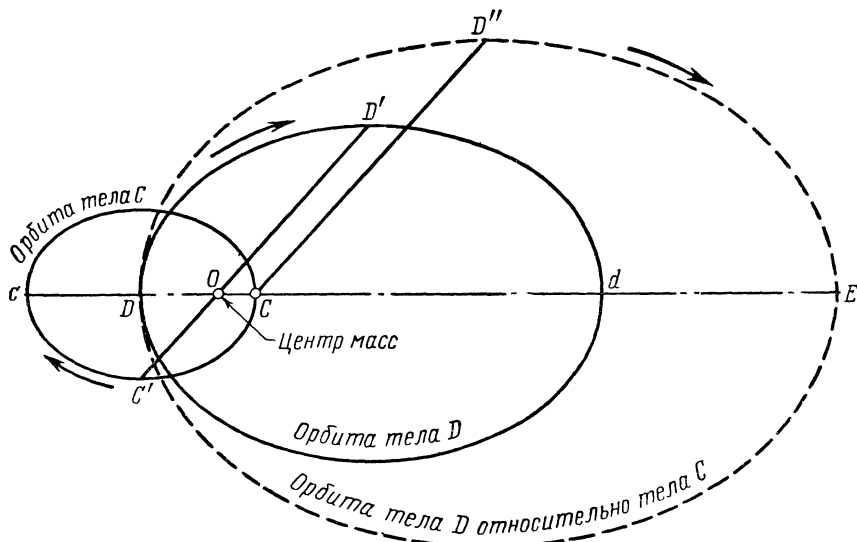


Рис. 8. Орбиты двух тел

массам тел: тело с большей массой опишет меньшую орбиту. Форма и размеры этих двух орбит будут определяться массами и скоростями двух тел.

На рис. 8 показаны орбиты двух тел — C и D, причем масса тела C в два раза больше массы тела D. Центр масс, точка O, является общим фокусом абсолютных орбит Cc и Dd двух тел; меньший эллипс является орбитой большего тела. Пунктирный эллипс — это орбита меньшего тела D относительно тела C. Этот эллипс, имеющий один фокус в точке C, представляет собой след движения точки D'' — фокального радиуса CD'', вращающегося вокруг точки C и остающегося параллельным и равным по длине линии C'OD', как показано на рис. 8.

Если массы двух тел значительно отличаются друг от друга, то центр масс будет почти совпадать с центром большего тела. В этом случае можно пренебречь центром масс и рассматривать только относительное движение малого тела вокруг центра большого, немного увеличив относительную орбиту путем сложения двух масс.

На рис. 9 показаны сравнительные свойства эллипса, параболы и гиперболы, которые имеют общий фокус в точке F . Они называются коническими сечениями, так как каждая из этих кривых может быть получена пересечением прямого кругового конуса плоскостью, имеющей определенный наклон. Эллипс —

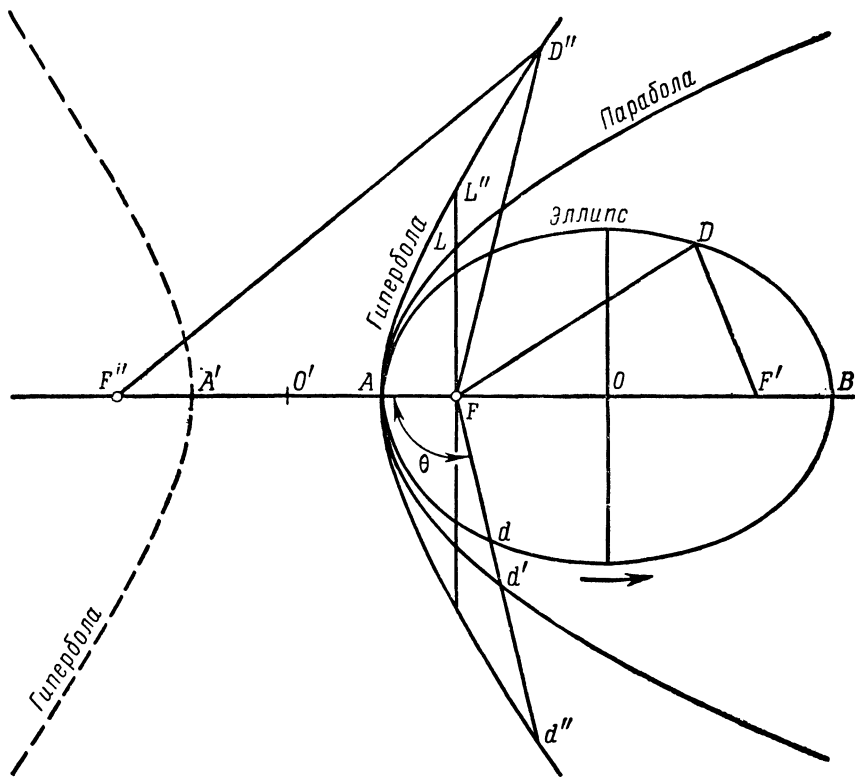


Рис. 9. Конические сечения с общим фокусом

это замкнутая кривая, геометрическое место точек (таких, как D), сумма расстояний которых DF и DF' от двух фиксированных точек равна длине большой оси AB .

Гипербола состоит из двух расходящихся незамкнутых ветвей, которые в бесконечности стремятся к прямым линиям, наклоненным под определенными углами. Для любой точки D'' на гиперболе разность расстояний $D''F$ и $D''F''$ равна большой оси AA' .

Парабола — незамкнутая кривая, но ее можно рассматривать как один конец эллипса, второй фокус которого находится в бесконечности, так что расстояние между его фокусами и длина его большой оси также равны бесконечности.

Эксцентриситет параболы точно равен единице. Для эллипса эксцентриситет представляет собой отношение FO/AO , которое меньше единицы, а для гиперболы — отношение FO'/AO' , которое больше единицы. Круг имеет нулевой эксцентриситет.

Хорда конического сечения, проходящая через фокус и перпендикулярная к большой оси, называется параметром. Половина длины параметра обозначается p . Истинная аномалия θ — есть угол Afd , измеряемый от перигелия A в направлении движения фокального радиуса Fd ; e — эксцентриситет; большая полуось a равна $p/(1-e^2)$, величина a — положительна для эллипса (AO на рис. 9) и отрицательна для гиперболы (AO'). Расстояние от любой точки D на коническом сечении до фокуса равно

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

СКОРОСТЬ ТЕЛ В КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Обратимся к рис. 8; скорость одного тела в любой точке его относительной орбиты, описываемой им вокруг другого тела, находящегося на расстоянии r от него, задается уравнением

$$V^2 = G(M_1 + M_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная;

a — большая полуось относительной орбиты.

Так как это уравнение выражает закон сохранения энергии, оно известно как уравнение энергии.

Если орбита параболическая, то $a = \infty$, и уравнение для параболической скорости U тела, находящегося на расстоянии r от другого тела, принимает вид

$$U^2 = 2G \frac{M_1 + M_2}{r}. \quad (2)$$

Сравнение скорости V с критической параболической скоростью U определяет форму орбиты, по которой будет двигаться тело. Если V меньше U , то величина a — положительна и орбита представляет собой эллипс; если V больше U , то величина a становится отрицательной и орбита представляет собой гиперболу. Если V и U приблизительно равны, то величина a будет иметь очень большое значение и орбита будет почти параболическая.

Параболическая скорость также называется скоростью освобождения, так как тело, движущееся по параболической или гиперболической орбите, никогда не возвращается обратно. Чтобы вычислить скорость освобождения у поверхности Земли, массой малого тела или ракеты пренебрегают и подставляют соответствующие величины в уравнение для параболической скорости

сти U . Таким образом была определена скорость освобождения от притяжения Земли (вторая космическая скорость), равная $11,2$ км/сек. Для Луны она составляет лишь $2,4$ км/сек.

Объединяя уравнения для V^2 и U^2 и исключая $G(M_1 + M_2)$, получим уравнение для определения среднего расстояния a большой полуоси эллиптической орбиты

$$a = \frac{r}{2} \frac{U^2}{U^2 - V^2}, \quad (3)$$

которое определяет размер орбиты.

Две из основных планет, Венера и Нептун, движутся вокруг Солнца по орбитам, близким к круговым. Так как для круговой орбиты a равно r , эти величины в последнем уравнении сокращаются, так что

$$\frac{U^2}{U^2 - V^2} = 2 \quad \text{и} \quad V = \sqrt{\frac{1}{2}} U = 0,707U.$$

Чтобы найти скорость тела на круговой орбите, надо умножить его параболическую скорость на $0,707$. На расстоянии, равном расстоянию Земли от Солнца, параболическая скорость Земли равна $42,1$ км/сек. Если бы орбита Земли была круговая, ее скорость равнялась бы $29,7$ км/сек. В действительности средняя скорость Земли на ее эллиптической орбите составляет $29,8$ км/сек.

Линейная скорость V движущегося тела есть скорость его движения, выраженная в единицах расстояния, проходимого за единицу времени, например в км/час или в м/сек. Угловая скорость ω — это число угловых единиц, которые радиус-вектор тела описывает за единицу времени; она измеряется в градусах в секунду или в радианах в секунду. Секториальная скорость — это число единиц площади, проходимых радиусом-вектором в единицу времени (например, км²/сек); эта скорость остается постоянной до тех пор, пока вдоль радиуса-вектора действует сила.

На рис. 10 показана часть криволинейной траектории тела, на которое действует сила, направленная вдоль радиуса-вектора, т. е. вдоль линии, соединяющей тело с фиксированной точкой O . Если дуга MN есть расстояние, проходимое в единицу времени, то MN — есть линейная скорость V , угол MON — угловая скорость ω , а площадь MNO — постоянная секториальная скорость A . Если считать, что MN — участок прямой линии направления движения KL , то сектор MNO становится треугольником с основанием MN и высотой h , которая равна по длине перпендикуляру, опущенному из точки O на KL . Площадь этого треугольника будет равна:

$$A = \frac{1}{2} Vh,$$

откуда

$$V = \frac{2A}{h}.$$

Если за основание треугольника принять MO , то высота этого треугольника, проведенная из точки N , будет равна $r_2 \sin \omega$, а его площадь $A = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \omega$. Для очень малого промежутка времени r_1 почти равно r_2 , а угол ω настолько мал, что он почти равен $\sin \omega$; тогда мы можем принять, что $r_1 r_2 = r^2$ и $A = \frac{1}{2} r^2 \omega$, и получим

$$\omega = \frac{2A}{r^2}.$$

Это приводит к следующим основным принципам, справедливым для всех случаев движения под действием центральной силы,

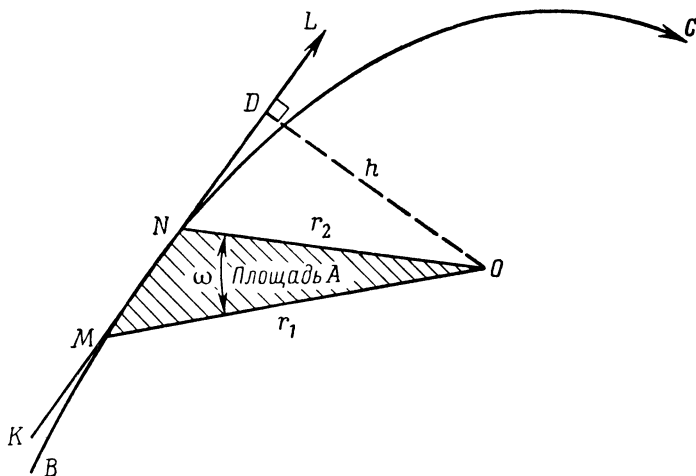


Рис. 10. Линейная, угловая и секториальная скорости

направленной прямо к центру или от него вдоль линии радиуса-вектора.

1. Линейная скорость изменяется обратно пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из центра на линию, определяющую направление движения.

2. Угловая скорость изменяется обратно пропорционально квадрату радиуса-вектора.

3. Секториальная скорость постоянна по всей орбите.

На рис. 11 представлена эллиптическая орбита планеты, движущейся вокруг Солнца (Солнце находится в одном из фокусов S орбиты). Когда планета находится в точке B — на конце малой оси, радиус-вектор r имеет ту же длину, что и большая полуось a . Подставляя a вместо r в уравнение (1), получим

$$V = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}}. \quad (4)$$

Обратимся к рис. 10: секториальная скорость $A = \frac{1}{2} Vh$, где высота h соответствует перпендикуляру SB' на рис. 11, опущенному из точки S на касательную к траектории движения в точке B . Но $SB' = OB = b$ — малой полуоси эллипса. Тогда

$$A = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}}. \quad (5)$$

Поскольку всю площадь эллипса πab радиус-вектор описывает за полный оборот со скоростью A , продолжительность сидерического периода

$$t = \frac{\pi ab}{A} = \frac{2\pi a^{3/2}}{G(M_1 + M_2)}. \quad (6)$$

Это согласуется с третьим законом Кеплера, согласно которому квадраты периодов t^2 пропорциональны кубам средних расстояний

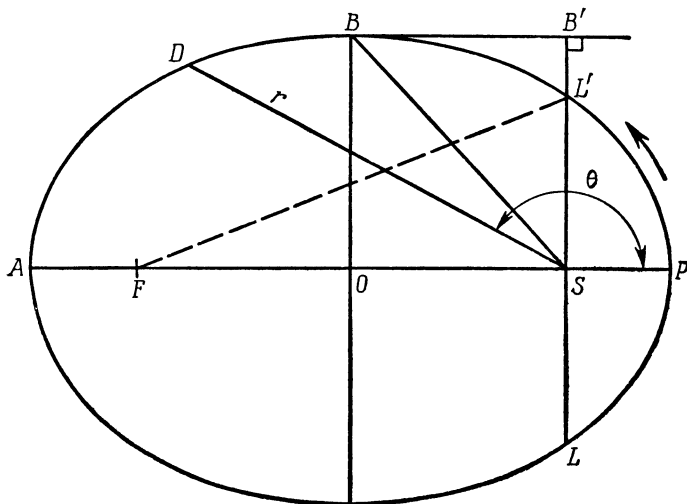


Рис. 11. Эллиптическая орбита планеты

a^3 . Уравнение (6) также показывает, что сидерический период одинаков для всех планет, эллиптические орбиты которых имеют одну и ту же длину большой оси, независимо от формы эллипса.

Существует важная связь между секториальной скоростью планеты и параметрами ее эллиптической орбиты. На рис. 11 $BS = a$, $BO = b$, $OF = OS = c$, $c/a = e$ (где e — эксцентриситет), $L'S = p$ (где p — параметр эллипса).

В прямоугольном треугольнике BOS

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a \sqrt{1 - e^2}.$$

В прямоугольном треугольнике FSL' , $FS=2c$ и $FL'=2a-p$;

$$p^2+4c^2=(2a-p)^2.$$

Подставляя ae вместо c , получим

$$p^2+4a^2e^2=4a^2-4ap-p^2;$$

сократив последнее уравнение на p^2 и разделив его на $4a$, получим

$$ae^2=a-p \text{ и } p=a(1-e^2).$$

Так как $b=a\sqrt{1-e^2}$, то

$$b^2=a^2(1-e^2) \text{ и } p=\frac{b^2}{a}.$$

Возвращаясь к уравнению (5), находим

$$A=\frac{1}{2} b \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{a}}=\frac{b}{2a^{1/2}} \sqrt{G(M_1+M_2)}.$$

Подставляя $p^{1/2}$ вместо $b/a^{1/2}$, получаем

$$A=\frac{1}{2} p^{1/2} \sqrt{G(M_1+M_2)}.$$

Это показывает, что секториальная скорость планеты пропорциональна корню квадратному из полупараметра ее орбиты. Все орбиты, имеющие одинаковый параметр, будь то эллиптические, параболические или гиперболические, будут иметь одинаковую секториальную скорость.

Эти принципы имеют важное значение для практического применения. Например, они показывают, как определить положение планеты или спутника на их орбитах в любой момент времени, и помогают определить их прямое восхождение и склонение по наблюдениям с Земли.

ВОЗМУЩЕНИЯ

В проблеме двух тел, рассмотренной Ньютоном, предполагаются идеальные условия, не существующие в реальном космическом пространстве. Помимо силы взаимного притяжения, с которой два тела действуют друг на друга, существует много гравитационных сил от воздействия других тел, расположенных достаточно близко для того, чтобы оказать возмущающее действие на движение системы двух тел. Если даже принимать во внимание только одно из этих тел, возмущающих движение системы, состоящей из двух тел, то возникает проблема трех тел, которая так сложна, что ставила в тупик математиков на протяжении веков.

В солнечной системе эллиптическая орбита каждой планеты определяется огромной массой Солнца, которая более чем

в 1000 раз превышает массу Юпитера — самой большой планеты, и в 332000 раз превышает массу Земли. Но притяжение других планет вызывает отклонения от эллиптических траекторий движения вокруг Солнца, и эти изменения положения планеты и формы ее орбиты известны как возмущения. Постепенные изменения в одном направлении эксцентриситета, наклона и относительного положения орбит планет называются вековыми возмущениями, а медленные осциллирующие изменения положения планет на их орбитах (когда планеты убыстряют или замедляют свое движение или же отклоняются в поперечном направлении на небольшие расстояния от эллиптических орбит) называются периодическими возмущениями. Ни длины больших осей орбит, ни сидерические периоды планет не испытывают вековых возмущений. Вековые возмущения орбиты Земли следующие.

1. Линия апсид вращается непрерывно в восточном направлении и совершает один оборот за 108000 лет.

2. Эксцентриситет медленно уменьшается, и его уменьшение будет продолжаться 24000 лет, пока орбита не станет круговой, а затем эксцентриситет опять будет увеличиваться.

3. Наклонение плоскости орбиты, равное сейчас $23^{\circ}27'$, становится меньше, но это уменьшение происходит очень медленно. Через 15000 лет, когда наклонение станет равным $22^{\circ},5$, оно снова начнет увеличиваться.

Периодические возмущения Земли на ее орбите являются следствием ее взаимодействия с Луной и притяжения других планет. Масса Земли в 81,5 раза больше массы Луны, и центр масс системы Земля — Луна находится на расстоянии 4634 км от центра Земли по направлению к Луне. Это заставляет Землю слегка колебаться каждый месяц, так что ее центр уходит на несколько сотен километров вверх и вниз от плоскости эклиптики. Притяжение других планет отклоняет Землю вперед, назад или в стороны на расстояния, пропорциональные массе каждой возмущающей планеты и иногда равные нескольким тысячам километров.

Другой вид движения Земли, связанного с возмущениями, называется прецессией. Это медленное движение в западном направлении точек равноденствий, совершающих полный оборот за 25800 лет, вызываемое коническим вращением оси Земли. Вследствие сплюснутости Земли и притяжения Солнца и Луны ось Земли не сохраняет точно своего направления в космическом пространстве, а подобно оси вращающегося волчка, запущенного под некоторым углом, она совершает медленное коническое движение. Это приводит к круговому движению полюса мира вокруг полюса эклиптики. Прецессии не существовало бы, если бы Земля была сферической.

С прецессией связано небольшое движение полюса вращения Земли, называемое нутацией, которое вынуждает этот полюс совершать колебательное движение в направлении — поперемен-

но — к полюсу эклиптики и от него. Это волнообразное движение является результатом совместного воздействия прецессионного движения и незначительного изменения в наклонении оси, вызванного притяжением Солнца или Луны в определенных положениях относительно экватора.

Мощное притяжение Солнца вызывает возмущения Луны, которые намного больше, чем возмущения Земли. Важными вековыми возмущениями Луны являются: удлинение месяца почти на час, вызванное тем, что притяжение Солнца влияет на уменьшение притяжения Земли; регрессия узлов, выражающаяся в перемещении каждого узла в западном направлении по эклиптике за 19 лет; вращение линии апсид в восточном направлении. Вековое ускорение среднего движения Луны вызывается постепенным уменьшением эксцентриситета орбиты Земли. Периодические лунные возмущения включают эвекцию, вариацию, годовое уравнение и паралактическое неравенство, которые объяснены в книгах по теории Луны, важной ветви астрономии.

Так как различные виды возмущений вызывают лишь небольшие изменения в траекториях планет и спутников и не изменяют схемы солнечной системы, то обычно исследование начинают с точных эллиптических орбит, а затем, в качестве уточнения, добавляют предварительно вычисленные возмущения.

РАКЕТЫ И ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ

С тех пор как 4 октября 1957 г. на орбиту вокруг Земли был выведен первый искусственный спутник — «Спутник I», — интерес к космическим полетам значительно возрос, и уже совершены многие важные космические полеты. Первое требование — это достаточная тяга двигателей, способная обеспечить скорость, необходимую для выхода летательного аппарата в космическое пространство. Спутники Земли на орбитах малой высоты имеют орбитальную скорость около 8 км/сек , в то время как для полета к Луне или для межпланетного полета требуется скорость освобождения (вторая космическая скорость), равная $11,2 \text{ км/сек}$, позволяющая летательному аппарату выйти из поля тяготения Земли. Для этой цели разрабатываются различные типы многоступенчатых ракет. Другим существенным требованием является создание системы радиосвязи для управления движением космического аппарата, слежением за траекторией его полета в космическом пространстве и передачи полученных данных и телевизионных изображений на Землю.

Траектории баллистических ракет, искусственных спутников и космических зондов подчиняются основным законам движения Ньютона; на космические аппараты оказывают влияние тяга ракетных двигателей, аэродинамическая подъемная сила, аэродинамическое сопротивление и изменяющиеся гравитационные силы. После выгорания топлива, когда космический аппарат находится

на орбите вокруг Земли или вокруг Солнца, его траектория подчиняется законам Кеплера. При создании любого космического проекта необходимо полное исследование траектории полета, включая тщательное изучение характеристик траектории подъема, элементов орбиты и соотношений между ними, возмущений и маневров перехода. Все эти геометрические и динамические соотношения могут быть описаны и представлены с помощью графических методов. Точные проектировочные расчеты производятся на электронных вычислительных машинах, а графический анализ подтверждает правильность расчетов и обеспечивает наглядный контроль каждого шага этого процесса. В следующих главах описываются существенно новые графические решения важнейших задач, встречающихся при изучении космического полета.

Анализ траекторий с помощью полярных диаграмм

Графические методы успешно используются при анализе широкого круга задач, связанных с космическим полетом. Этот наглядный подход дает ясную картину всех рассматриваемых соотношений и облегчает понимание каждого этапа решения.

ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ

В 1959 г. А. С. Боксенбом опубликовал отчет* «Графический анализ траекторий», в котором описан простой, быстрый и практически применимый графический метод анализа траекторий, пригодный для множества различных вариантов проблемы двух тел.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Анализ траекторий в проблеме двух тел основывается на использовании диаграммы $X\dot{Y}$, составленной из кругов и прямых линий, на которой видны все свойства траектории. Траектории пассивного полета (полета по инерции) соответствуют на диаграмме кругам. Переход на новую орбиту с помощью импульса тяги (плоский или неплоский) строится на той же диаграмме. Рассматриваются построения для случаев непрерывной тяги и почти круговых орбит, оптимизация приращения скорости на активном участке траектории, межпланетные перелеты и проблемы встречи.

* А. С. Боксенбом, NASA-TN D-64, December, 1959. Аарон С. Боксенбом работает в Научно-исследовательском центре Льюиса Национального управления по авиации и исследованию космического пространства (НАСА), Кливленд, штат Огайо.

ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

Метод состоит в построении траекторий на графике с абсциссой X и ординатой Y , задаваемых следующими соотношениями:

$$X = \frac{hV_H}{GM} = \frac{h^2}{GMr} = \frac{r_L}{r};$$

$$Y = \frac{hV_R}{GM},$$

где h — момент количества движения, $h = rV_H$;

V_H — составляющая скорости в горизонтальной плоскости (нормальная к радиальному направлению);

G — гравитационная постоянная;

M — масса центрального тела;

r — радиальное расстояние до траектории;

r_L — фокальный полупараметр;

V_R — составляющая скорости в радиальном направлении.

Эта система координат применима к большому кругу задач, так как

1) каждой точке на любой траектории соответствует точка на графике; любая действительная траектория изображается на графике соответствующей кривой;

2) для любой траектории полета по инерции изображающая ее на графике кривая есть круг с центром в точке $X=1$, $Y=0$ и радиусом, равным эксцентриситету траектории;

3) множество других параметров траектории просто и прямо связаны с системой координат XY :

а) линии постоянного эксцентриситета e и истинной аномалии Φ образуют полярную систему координат с центром в точке $X=1$, $Y=0$;

б) линии постоянного отношения hV/GM (где V — скорость) и угла наклона траектории полета γ образуют другую полярную систему координат с центром в точке $X=0$, $Y=0$;

в) радиальное расстояние до траектории r связано с абсциссой X следующим соотношением: $X = h^2/GMr$;

г) линии постоянного соотношения $rV^2/GM = 2 + 2Er/GM$ (где E — энергия) образуют круги с центром в точке $X = rV^2/2GM$; $Y=0$, которые проходят через точку $X=0$, $Y=0$;

4) для траекторий активного полета существует простое построение на графике как для случая импульсной, так и для случая непрерывной тяги.

На рис. 12 для любой траектории полета с нулевой тягой показано геометрическое изображение эксцентриситета e и истинной аномалии Φ в плоскости XY с точкой отсчета Q ($X=1$; $Y=0$);

$$(X-1)^2 + Y^2 = \text{const} = e^2;$$

$$\cos \Phi = \frac{X-1}{e}.$$

Таким образом, параметры траектории e и Φ образуют на графике полярную систему координат с центром в точке Q (рис. 13). По определению, X и Y связаны соотношениями

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{hV}{GM}\right)^2$$

и

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Параметры hV/GM и γ образуют на графике другую полярную систему координат с центром в точке O . На рис. 14 эти две

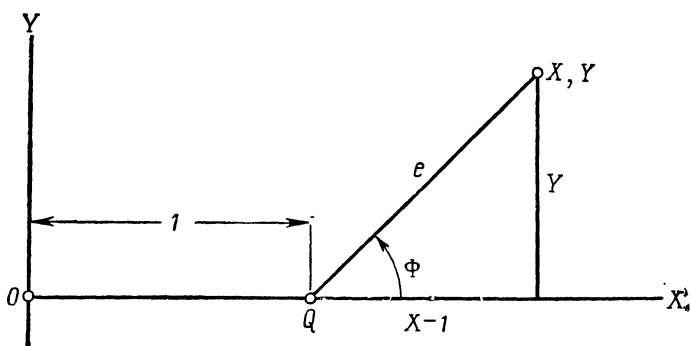


Рис. 12. Геометрическое изображение эксцентриситета e и истинной аномалии Φ в плоскости XU

системы координат совмещены, и они образуют основную диаграмму XU , используемую в этом методе. На другом рисунке, помещенном в отчете А. С. Боксенбома, приведена та же диаграмма с подробной сеткой линий — для удобства построений. Все параметры на диаграмме безразмерны.

На рис. 15 показано отображение на диаграмме XU положения точки на траектории. В верхней части рисунка точка I определяет мгновенное положение тела на действительной эллиптической орбите при отсутствии тяги. В нижней части рисунка показана соответствующая точка I в плоскости XU . Параметры траектории e и Φ являются полярными координатами относительно точки Q , а параметры hV/GM и γ — полярными координатами относительно точки O . Радиальное расстояние до траектории r определяется с помощью координаты X в нижней части рисунка, которая иллюстрирует связь между действительным положением точек на траектории и точками в полярной системе координат. Круг постоянного e , проходящий через точку I в нижней части рис. 15, изображает орбиту полета по инерции, начинающуюся в

точке 1 в верхней части рисунка. Истинная аномалия Φ также показана наглядно — на обеих частях рисунка она измеряется в направлении от перигея.

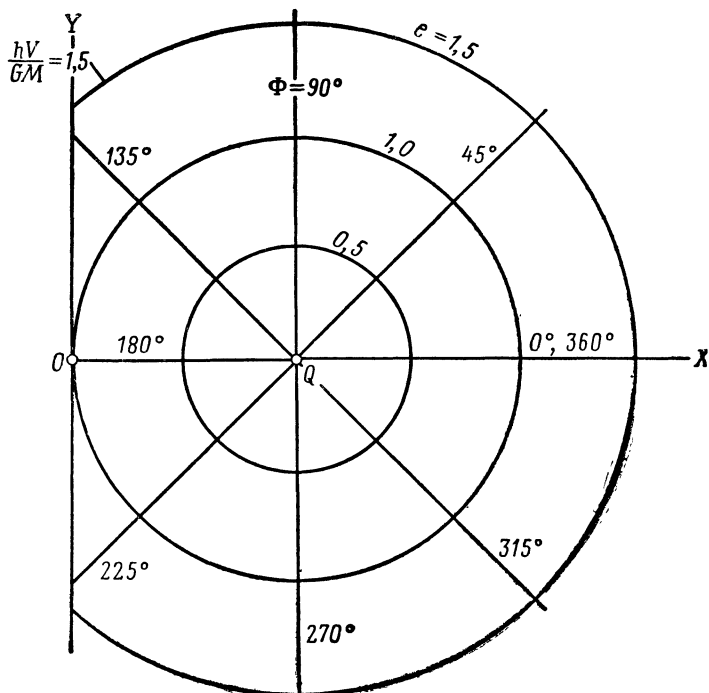


Рис. 13. Полярная система координат, образованная параметрами траектории e и Φ на плоскости XU
ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА ПО ИНЕРЦИИ

Так как эксцентриситет постоянен при нулевой тяге, то все траектории полета по инерции изображаются на диаграмме кругами. Круговые орбиты, имеющие нулевой эксцентриситет, соответствуют точке Q . Эллиптические орбиты полета по инерции с эксцентриситетом e , лежащим между нулем и единицей, соответствуют кругам с центром в точке Q , имеющим радиус от нуля до единицы. Параболическая орбита полета по инерции, имеющая эксцентриситет, равный единице, соответствует на диаграмме кругу с радиусом, равным единице. Гиперболические траектории полета по инерции, у которых эксцентриситет e больше единицы, соответствуют кругам с радиусами больше единицы. Так как эти круги не замкнуты, их пересечение с осью Y соответствует асимптотическому условию, при котором радиальное расстояние до траектории r приближается к бесконечности.

Движение на диаграмме, соответствующее движению по траектории полета по инерции, всегда направлено против часовой стрелки, и угол $1-Q-2$ равен $\theta_2-\theta_1$, как показано на рис. 16; этот угол описывается радиусом-вектором на траектории. Так как момент количества движения h к тому же постоянен, то радиальное

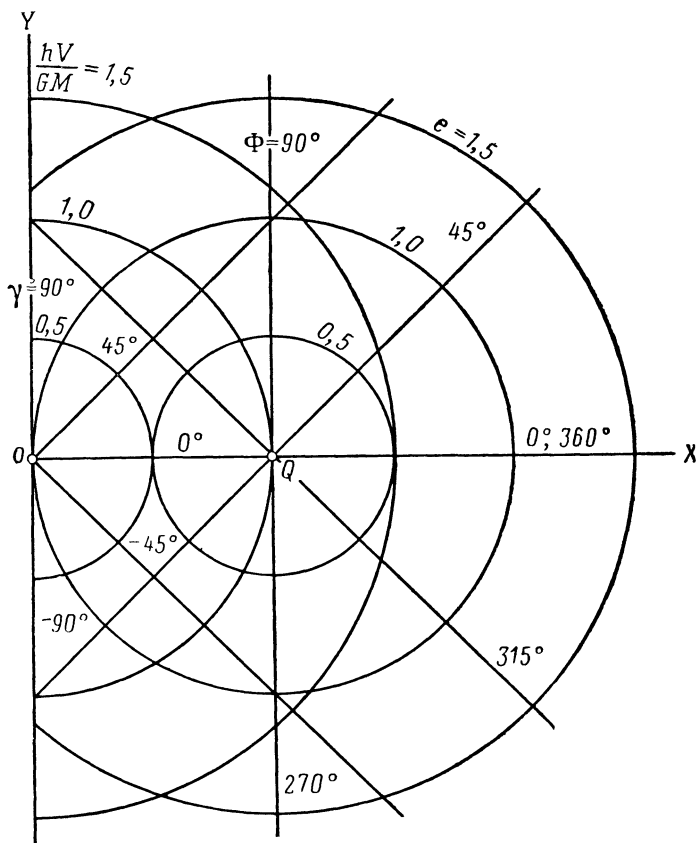


Рис. 14. Две полярные системы координат, образованные параметрами e , Φ и (hV/GM) , γ , совмещенные на плоскости XY

расстояние до траектории r будет обратно пропорционально X , т. е. $r_2/r_1 = X_1/X_2$. Также очевидно, что справа от точки Q вдоль оси X находится геометрическое место перигеев, а слева от точки Q — геометрическое место апогеев. На диаграмме радиальное расстояние R до точки O , соответствующей началу координат, равно hV/GM , а скорость по траектории пропорциональна R , или $V_2/V_1 = R_2/R_1$. Углы наклона траектории полета γ_1 и γ_2 показаны на графике, приведенном на рис. 16.

На рис. 17 показано, как определить условия в конце активного участка траектории полета, если спутник выводится на орбиту

с известным эксцентриситетом, например $e=0,25$, и с определенным углом наклона γ ; для $\gamma=10^\circ$ получаются два решения, определяемые пересечением круга в точках 1 и 2. На рис. 17 также показаны максимальный угол наклона траектории для эксцентриситета $e=0,25$ и случай, соответствующий невозможному для данного эксцентриситета углу наклона траектории.

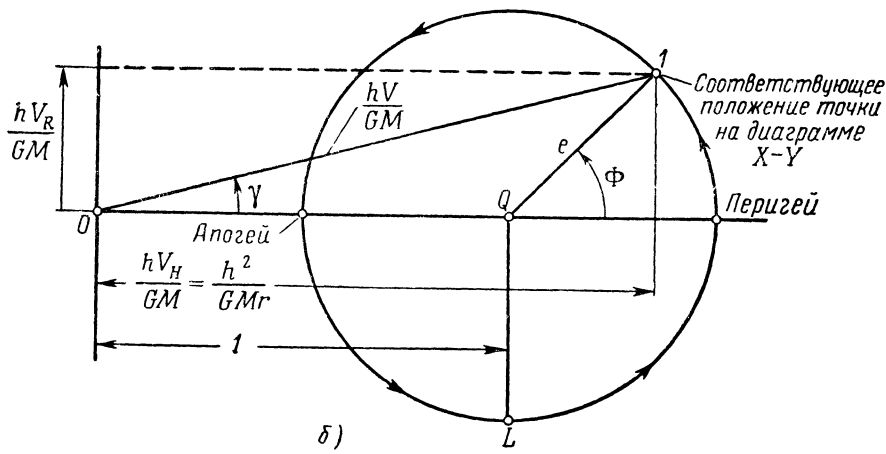
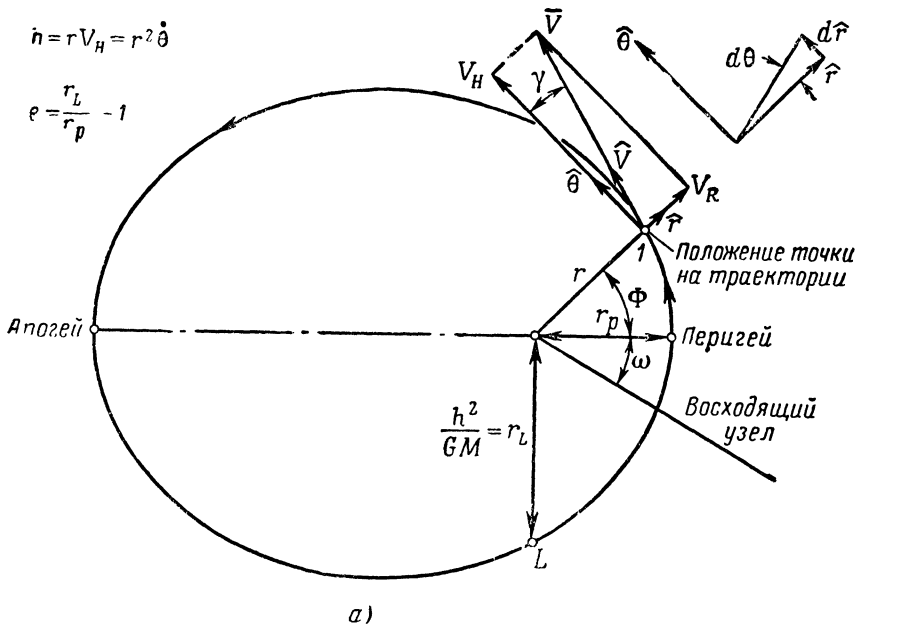


Рис. 15. Отображение параметров траектории в плоскости XY :

а—траектория в мгновенной плоскости \vec{r}, \vec{V} ; б—соответствующая диаграмма в плоскости XY

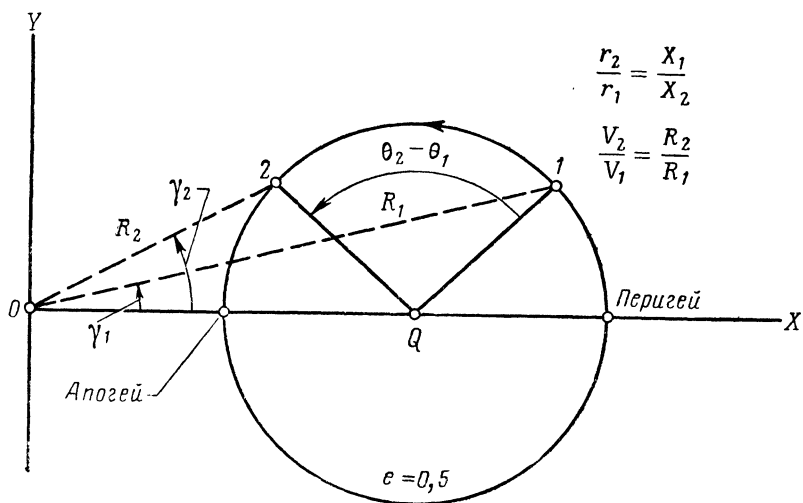


Рис. 16. Пример траектории полета по инерции

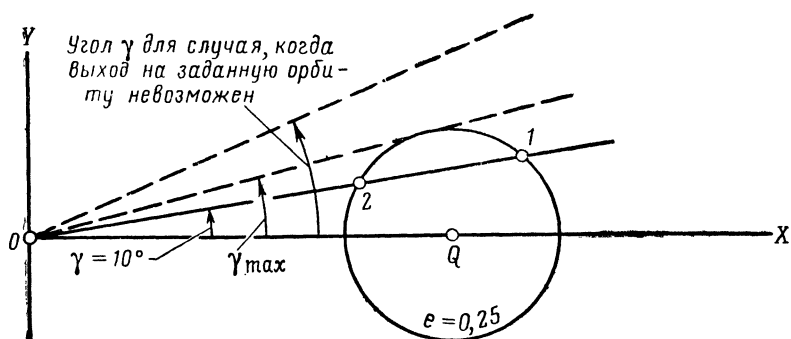


Рис. 17. Пример вывода спутника из орбиты с эксцентриситетом $e=0,25$ и углом $\gamma=10^\circ$ в конце активного участка траектории полета

ИМПУЛЬСНАЯ ТЯГА

Тяга приложена в плоскости движения. На графике, приведенном на рис. 18, точки 1 и 2 соответствуют условиям полета по траектории до и после приложения импульсной тяги. Так как масштабный коэффициент h/GM может быть переменным, то вектор между точками 1 и 2 не равен $\overline{\Delta V}$ и построение производится в два

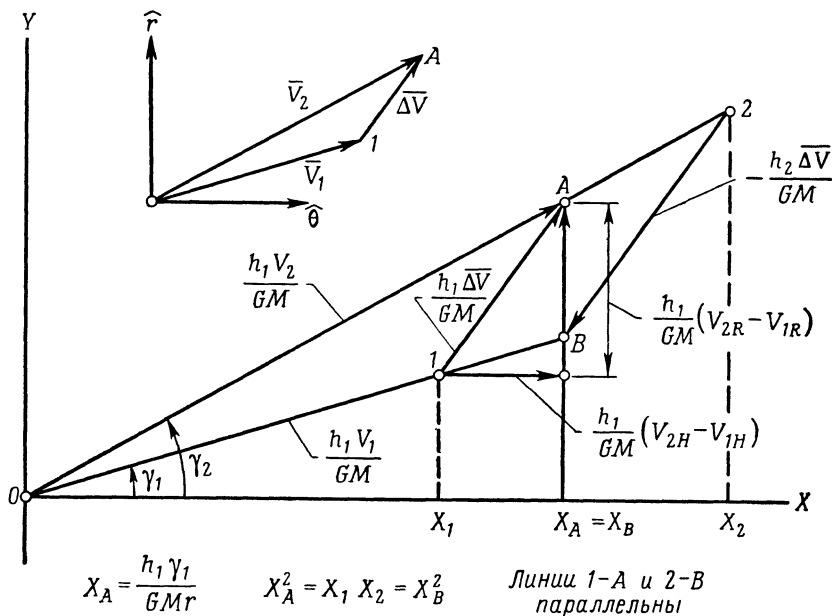


Рис. 18. Построение для случая импульсной тяги, приложенной в плоскости движения

этапа. Приложив вектор $h_1 \overline{\Delta V}/GM$ в точке 1, получаем промежуточную точку A, для которой

$$X_A = \frac{h_1 h_2}{GMr} \quad \text{и} \quad Y_A = \frac{h_1 V_{2R}}{GM};$$

кроме того,

$$\frac{Y_A}{X_A} = \text{tg } \gamma_2.$$

Три вектора в треугольнике $O-1-A$ находятся в реальной связи друг с другом и с фиксированными единичными векторами \hat{r} и $\hat{\theta}$, показанными в верхней части рис. 18.

Так как точки A и 2 расположены на одной линии, образующей с осью X угол γ_2 , и так как $X_A^2 = X_1 X_2$, то точка 2 может быть найдена, если заданы точка 1 и ΔV , или ΔV может быть найдено, если

заданы точки 1 и 2. Тогда точка 2 на графике является началом новой траектории полета по инерции, соответствующей кругу постоянного эксцентриситета e , на котором расположена точка 2.

Подобная процедура повторяется для обратно направленной импульсной тяги — от точки 2 к точке 1, — как показано на рис. 18. Первый шаг — вычитаем вектор $h_2 \Delta V/GM$, приложенный в точке 2, и получаем промежуточную точку B , для которой

$$X_B = \frac{h_1 h_2}{GM r} = X_A \quad \text{и} \quad Y_B = \frac{h_2 V_1 R}{GM};$$

кроме того,

$$\frac{Y_B}{X_B} = \operatorname{tg} \gamma_1.$$

Таким образом, точки B и 1 лежат на одной линии, образующей с осью X угол γ_1 , а точки A и B имеют одну и ту же абсциссу

$$X_B = X_A \quad \text{и} \quad X_B^2 = X_1 X_2.$$

Тот факт, что линии $1A$ и $2B$ параллельны, помогает графическому построению. После нахождения точки A и линии, образующей с осью X угол γ_2 , точка 2 может быть найдена без использования формулы $X_A^2 = X_1 X_2$, проведением из точки B линии, параллельной линии $1A$, до ее пересечения в точке 2 с линией, образующей с осью X угол γ_2 .

После приложения импульсной тяги на диаграмме определяется эксцентриситет траектории. Момент количества движения задается следующим соотношением:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{X_A}{X_1} = \frac{X_2}{X_A} = \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{1/2},$$

а вращение полярной оси орбиты определяется уравнением

$$\omega_2 - \omega_1 = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{угол } 2 - Q - 1;$$

ω — угол между восходящим узлом и перигеем.

Тяга приложена в плоскости движения; направление тяги изменено на противоположное. Если точка A на рис. 18 расположена слева от оси Y , это указывает на то, что направление движения изменилось на противоположное. В этом случае используется зеркальное отражение точки A справа от оси Y и построение выполняется так, как показано на рис. 18. Последующее движение по инерции на диаграмме все еще происходит против часовой стрелки, но угол θ будет описан радиусом-вектором в противоположном направлении и будут существовать два ΔV , соответствующие двум зеркальным отражениям точки A , в результате чего получим два типа траекторий.

Плоскость движения наклонена к плоскости XU . Для пространственной ориентации на рис. 19 использована обычная трехмерная геометрия и показана система координат, применяемая для того, чтобы связать положение космического аппарата в пространстве с плоскостью XU .

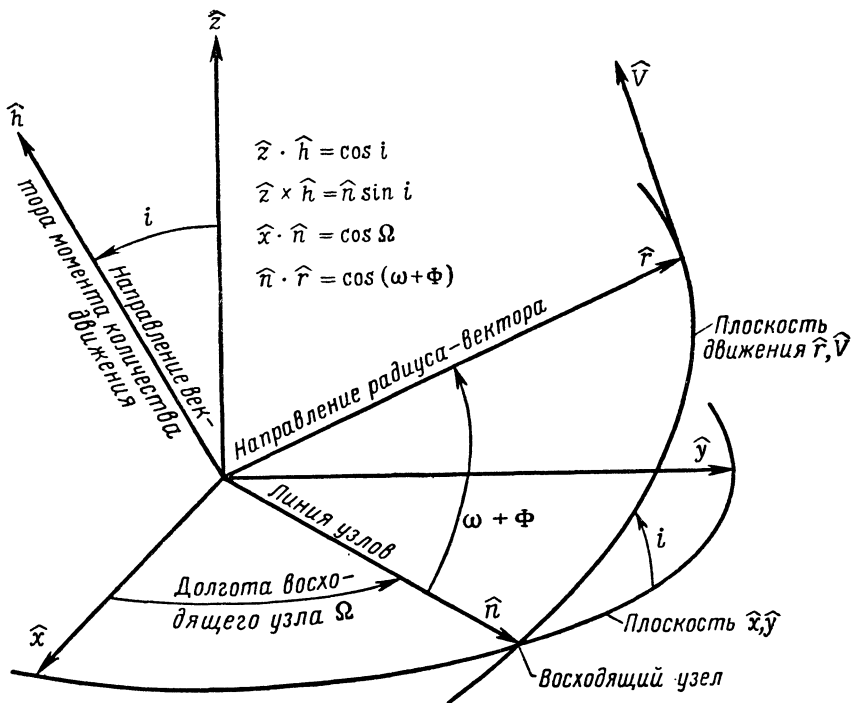


Рис. 19. Система координат, используемая для пространственной ориентации

Тяга приложена не в плоскости движения. Обратимся к рис. 18; если $\Delta \bar{V}$ расположено не в плоскости движения, показанное на рис. 18 построение все еще оказывается справедливым для членов $(V_{2R} - V_{1R})$ и $(V_{2H} - V_{1H})$. Хотя $(V_{2R} - V_{1R})$ все еще остается радиальной компонентой вектора $\Delta \bar{V}$, $(V_{2H} - V_{1H})$ уже не является компонентой вектора $\Delta \bar{V}$, и для получения этой компоненты требуется отдельное построение, показанное на диаграмме XU (рис. 20).

Единичные векторы $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{h}_1$ и \hat{h}_2 идентифицируют направления в этом построении, которое фактически представляет собой диаграмму скорости в горизонтальной плоскости. Векторная линия CD представляет собой полную горизонтальную компоненту им-

пульса, а векторная линия OD представляет собой V_{2H} в направлении $\hat{\theta}_2$. Линия OD , равная по длине X_A , поворачивается вокруг точки O до совпадения с осью X . Угол между двумя плоскостями

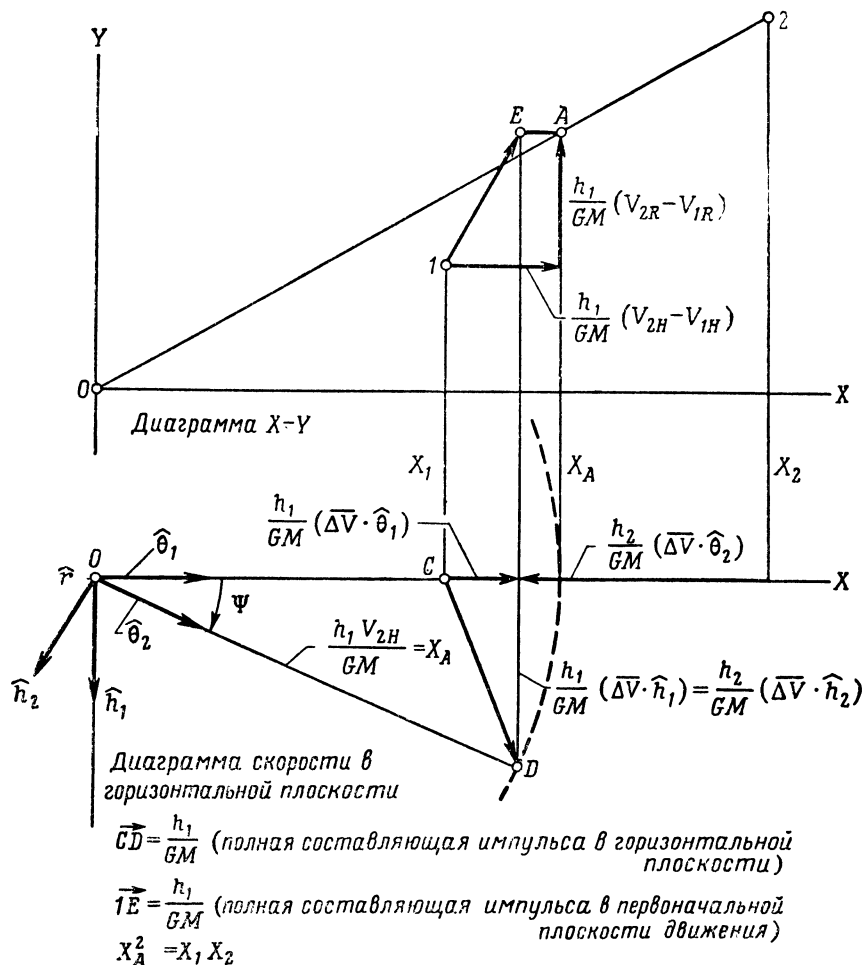


Рис. 20. Построение для случая импульсной тяги, приложенной не в плоскости движения

(до и после приложения тяги) равен ψ . Векторная линия $1E$ на диаграмме XU представляет собой полную компоненту импульса в первоначальной плоскости движения.

Тяга приложена не в плоскости движения; направление тяги изменено на противоположное. Если на рис. 20 точка E расположена

слева от оси Y , это указывает на то, что направление движения изменилось на противоположное. В этом случае используется зеркальное отражение точки E с правой стороны от оси Y и построение выполняется так, как показано на рисунке. Последующее движение по инерции все еще происходит против часовой стрелки, но характер изменения угла θ указывает на противоположное направление. Для значений ψ между 90° и 270° точка E лежит слева от оси Y , что соответствует противоположному направлению движения.

НЕПРЕРЫВНАЯ ТЯГА

Графическое изображение, использованное для импульсной тяги, может быть применено для аппроксимации непрерывной тяги, если представить полет с непрерывной тягой как серию последовательных движений с импульсной тягой и движений по инерции, начинающихся в данной точке I на диаграмме XU . Так как эта аппроксимация должна быть проведена относительно интеграла по времени от отношения тяги к массе, то аппроксимирующая кривая участков активного полета и полета по инерции для ступенчатой функции может быть вычерчена с горизонтальными ступеньками, характеризующими движение по инерции, и с вертикальными участками, равными по величине импульсам ΔV , причем в качестве шкалы абсцисс можно использовать или время или движение. Точная форма траектории полета с непрерывной тягой в плоскости XU задается дифференциальными уравнениями, которые справедливы для трехмерного движения в общем виде.

ОРБИТЫ, БЛИЗКИЕ К КРУГОВЫМ

Для эллиптических орбит, близких к круговым, эксцентриситет которых стремится к нулю, и соответствующие круги на диаграмме XU слишком малы, нужно увеличить масштаб диаграммы вокруг точки Q . В экстремальных случаях круги с центром в точке O становятся почти вертикальными линиями, а лучи из точки O — почти горизонтальными линиями, так что достаточно одной системы полярных координат. Горизонтальная шкала внизу преобразованной диаграммы XU дает обе величины — r и V_1 , а вертикальная шкала в правой части диаграммы дает угол наклона траектории γ . Радиальные линии и круги с центром в точке O вообще не включаются в диаграмму, а основные круги e заданы новыми значениями в диапазоне от 0,05 до 0,25, с соответствующими значениями на шкалах, расположенных с двух сторон диаграммы.

На аппроксимированной диаграмме XU , используемой при $e \rightarrow 0$, масштабный коэффициент h/GM заменяется новыми переменными: радиальным расстоянием r^* и аппроксимированной скоростью V^* , — когда истинная аномалия равна 90° , что соответствует средним условиям. Для импульсной тяги вектор от точки I до точки A равен $\overline{\Delta V}/V_1^*$, а точка 2 находится справа от точки A , так что

$x_1 + x_2 = 2x_A$. На диаграмме точка 2 является началом новой орбиты полета по инерции, соответствующей кругу постоянного e , на котором она лежит.

Новыми масштабными коэффициентами будут следующие:

$$x_2 - x_1 = \frac{r_2^* - r_1^*}{r} = 2 \frac{V_1^* - V_2^*}{V_1^*}.$$

Вращение полярной оси орбиты $\omega_2 - \omega_1$ определяется углом $2 - Q - I$, а скорость после приложения тяги будет равна

$$2 \frac{V_2 - V_1}{V_1^*} = x_2 - x_1.$$

Значение угла наклона траектории в точке 2 получается непосредственно из построения на диаграмме.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИАГРАММЫ ХУ

Уравнения для различных семейств кривых. В отчете приведены семь уравнений, которые могут быть представлены на диаграмме семействами кривых, в результате чего диаграммы становятся более удобными для решения задач определенного типа.

Линии времени. Для решения задач, которые включают в себя время, на диаграмме ХУ наносится семейство кривых, описываемое уравнением $(G^2 M^2 / h^3) (t - t_p) = K = \text{const}$, в котором t — время, а t_p — время прохождения перигея.

На рис. 21 линии постоянных K расположены симметрично относительно оси X . При движении от перигея к апогею над осью X величина $K = (G^2 M^2 / h^3) (t - t_p)$ определяет время, прошедшее с момента последнего пересечения перигея, а $K = (G^2 M^2 / h^3) (t_p - t)$ определяет время, потребное для достижения следующего пересечения перигея. Справа от точки Q вдоль оси X величина $K = 0$. Вдоль оси X между точками O и Q величина $K = \pi(1 - e^2)^{-3/2}$, что определяет полупериод. Используя эти кривые времени, легко получить время любого периода полета по инерции и изменение момента прохождения перигея за счет импульса тяги. На действительной диаграмме ХУ вычерчено большее количество кривых времени с малыми промежутками между ними для большей точности расчета.

ПЕРЕХОД НА НОВУЮ ОРБИТУ

Если требуется совершить переход из точки $1a$ (рис. 22) на орбите 1 на новую орбиту, имеющую параметры e_2 и h_2 , то абсцисса X_2 определяется из соотношения $X_{2a}/X_{1a} = h_2^2/h_1^2$ и линия X_2 пересекает круг e_2 в точке $2a$. Построение, показанное на рис. 18, определяет точку Aa и соответствующее значение $\overline{\Delta V}$.

Вращение полярной оси $\omega_2 - \omega_1$ характеризуется углом $2a - Q - 1a$, который изменяется при изменении положения точки 1

вдоль круга e_1 . Если требуется, чтобы полярная ось не вращалась, точки Q , 2 и 1 должны лежать на одной прямой. Это может быть линия $Q-2b-1b$, удовлетворяющая соотношению $X_{2b}/X_{1b} = h_2^2/h_1^2$. Точка Ab и потребный импульс скорости $\overline{\Delta V}$ для перехода на орби-

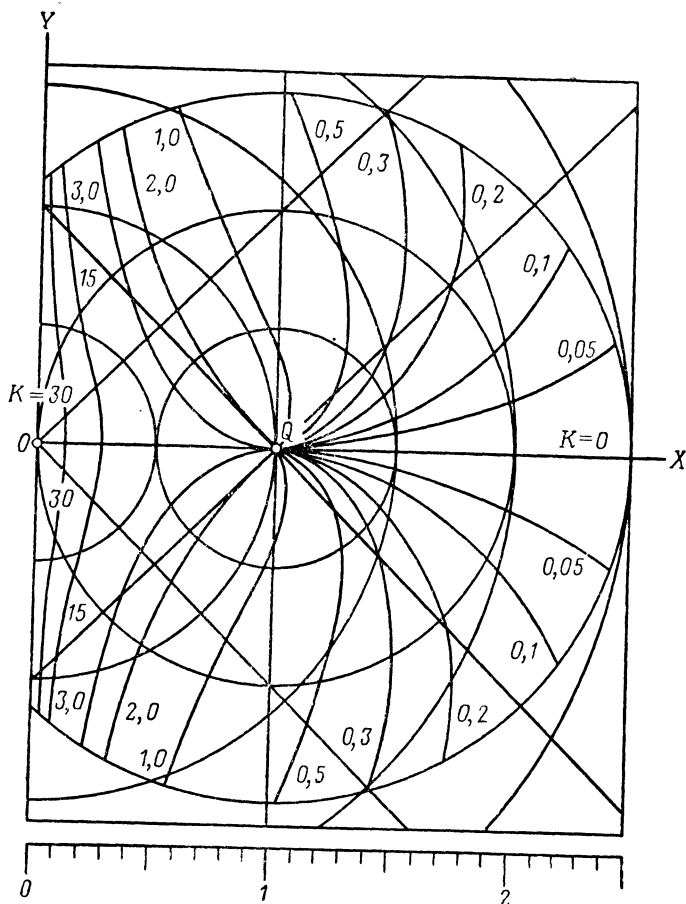


Рис. 21. Линии времени на диаграмме. Линии постоянного $K = (G^2 M^2 / h^3) (t - t_p)$

ту с параметрами e_2 , h_2 , $\omega_2 = \omega_1$ показаны на рис. 22. Это построение также определяет точное положение космического аппарата вдоль орбиты 1 , в котором надо приложить импульс тяги, чтобы сохранить угол $\omega_2 = \omega_1$.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ СКОРОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ ТЯГИ

Случай 1. Если требуется включить двигатель, т. е. приложить импульс тяги в заданной точке на орбите 1 (например, в точке 1

на рис. 23) так, чтобы последующая траектория имела фиксированный перигей p , то для решения этой задачи следует найти оптимальное приращение скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги. От каждой точки возможного перигея p на новой орбите (на рис. 23 указано пять таких точек вдоль оси X справа от точки Q) проводится круг постоянного e в обратном направлении — к начальной точке 2, которая определяется соотношением $X_p/X_2 = r_1/r_{p,2}$. Кривая, образо-

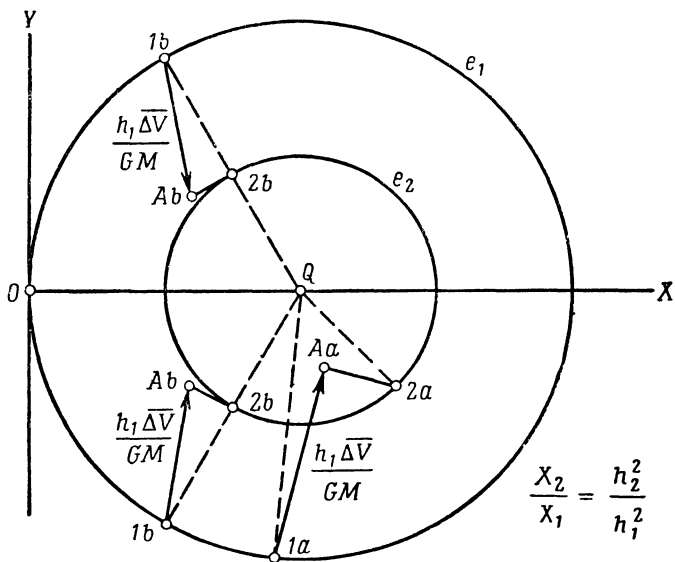


Рис. 22. Примеры перехода на новые орбиты

ванная этими пятью точками 2, есть линия постоянного отношения r/r_p , или $r_p/r = X/(1+e)$; это уравнение является одним из семи уравнений, упомянутых ранее, дающее полезные семейства кривых на диаграмме XU . Кривая соответствующих точек A определяется путем нахождения каждой из этих точек так, как это объяснено в начале раздела «Импульсная тяга» и показано на рис. 18. Тогда минимальное приращение скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги есть кратчайшее расстояние от точки I до кривой, составленной из точек A . На рис. 23 оптимальной траекторией является сплошная линия $I-A-2-p$.

Случай 2. Если требуется включить двигатель, т. е. приложить импульс тяги в заданной точке на орбите 1 (например, в точке I на рис. 24) так, чтобы угол наклона новой орбиты был $\gamma = \gamma^*$, когда радиальное расстояние $r = r^*$, надо, чтобы конечная точка E лежала на прямой линии, выходящей из точки O , наклон которой определяется углом γ^* , как показано на рисунке. От каждой возможной точки E проводится круг постоянного e в обратном направлении—

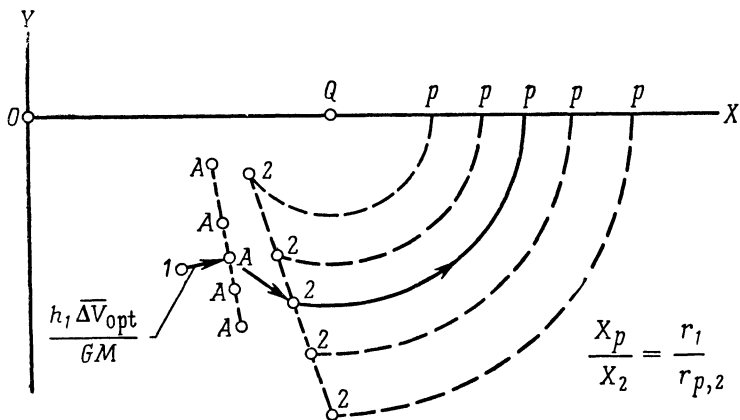


Рис. 23. Пример определения оптимального $\overline{\Delta V}$, случай 1. Импульс тяги приложен в заданной точке на орбите 1 так, чтобы фиксировать положение перигея орбиты 2 в точке $r_{p,2}$

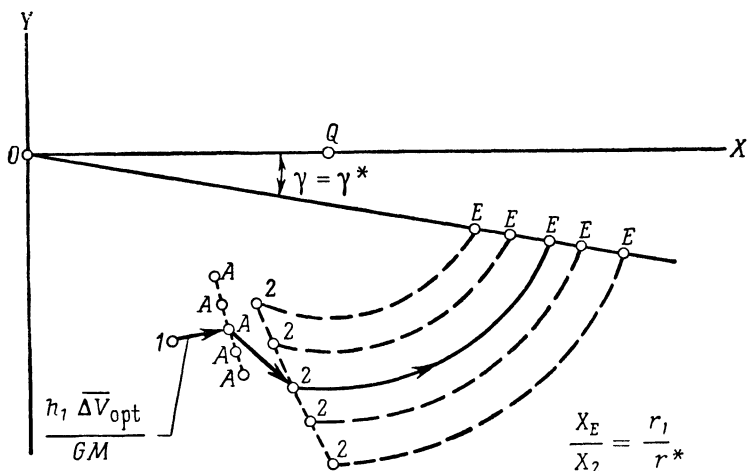
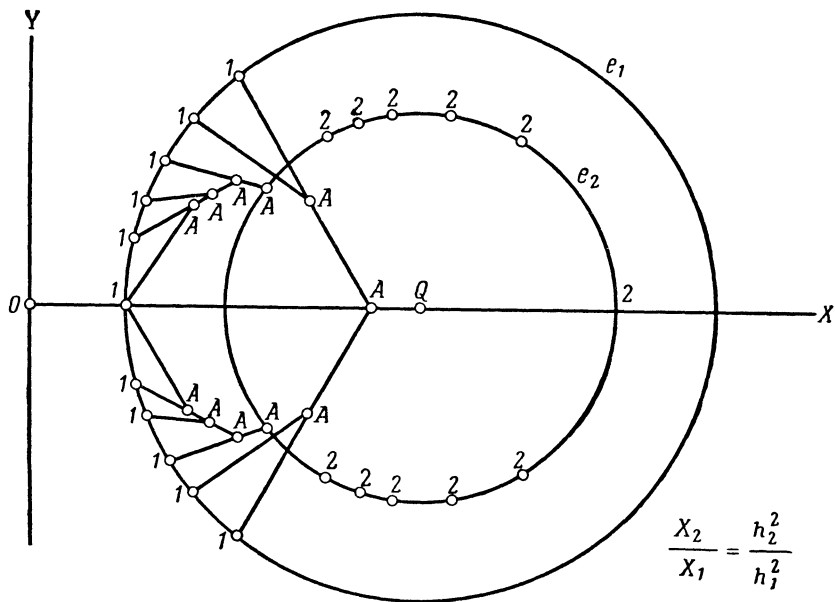


Рис. 24. Пример определения оптимального $\overline{\Delta V}$, случай 2. Импульс тяги приложен в заданной точке на орбите 1 так, чтобы угол наклона новой орбиты $\gamma = \gamma^*$, когда $r = r^*$

к начальной точке 2, которая определяется из соотношения $X_E/X_2=r_1/r^*$. Кривая соответствующих точек А определяется так же, как и в предыдущем случае. Тогда минимальное приращение скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги есть расстояние 1—А, а оптимальная траектория будет соответствовать сплошной линии 1—А—2—Е на рис. 24. Если угол наклона траектории $\gamma^*=0$, точка Е становится перигеем орбиты 2, как и в случае 1.



$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Рис. 25. Пример определения оптимального $\overline{\Delta V}$, случай 3. Импульс тяги приложен в любой точке на орбите так, чтобы изменить параметры орбиты с e_1, h_1 на e_2, h_2

Случай 3. Если нужно лишь изменить параметры орбиты — эксцентриситет и момент количества движения — от e_1, h_1 до e_2, h_2 , то положение точки включения двигателя, т. е. приложения импульса тяги вдоль орбиты 1, определяется требованием минимального приращения скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги.

На рис. 25 начальная точка 1 лежит на круге e_1 и для каждой возможной точки 1 величина X_2 определяется из соотношения $X_2/X_1=h_2^2/h_1^2$. Тогда линия X_2 пересекает круг e_2 в соответствующей точке 2. Промежуточные точки А и приращения скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги определяются как и в предыдущих случаях. Минимальное значение $\overline{\Delta V}$ находится подбором.

Другие случаи. Многие другие задачи оптимизации, включающие параметры $\omega, h, e; r, \Phi; V, \gamma, V_H, V_R$, а также время, могут быть решены графически на диаграмме XY.

МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Для расчета траекторий в проблеме двух тел внутри сферы действия планеты пренебрегают притяжением Солнца; вне этой сферы пренебрегают притяжением планеты. На границе между этими двумя областями

$$\bar{V}_{C,A} = \bar{V}_A + \bar{V}_{h,A},$$

где $\bar{V}_{C,A}$ — скорость космического аппарата относительно Солнца в сфере действия планеты A ;

\bar{V}_A — скорость планеты A относительно Солнца;

$\bar{V}_{h,A}$ — скорость космического аппарата относительно планеты A в сфере действия планеты A ; это гиперболическая скорость, действующая подобно импульсу скорости $\Delta \bar{V}$ от действия тяги, прибавленному к скорости планеты \bar{V}_A .

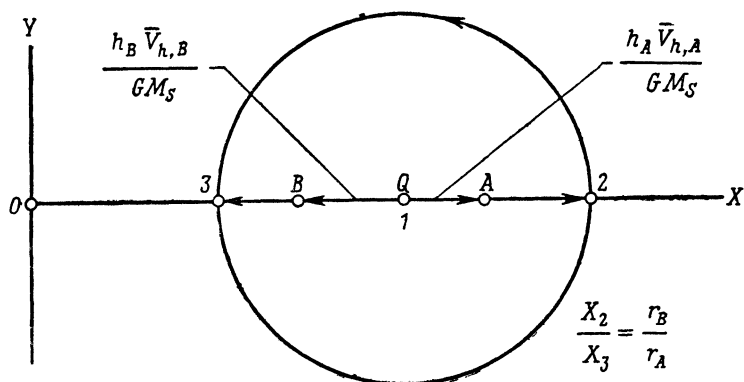


Рис. 26. Пример межпланетного перелета. Гиперболические скорости, необходимые для орбит перехода с минимальной затратой энергии

На рис. 26 представлена диаграмма XU для орбит перехода с минимальной затратой энергии между планетами A и B , которые движутся по круговым орбитам относительно Солнца. Начиная от точки 1 ($e=0$), которая представляет собой орбиту планеты A , тангенциально прикладывается гиперболическая скорость $\bar{V}_{h,A}$ подобно импульсу скорости $\Delta \bar{V}$ от действия тяги. Затем следует траектория $2-3$, которая является орбитой полета по инерции относительно Солнца, где $X_2/X_3 = r_B/r_A$. Отрицательная гиперболическая скорость у планеты B соответствует более медленному движению космического аппарата по сравнению с планетой B . На обратном пути космический аппарат движется от точки 1 до точки 3 , совершает полет по инерции по полукругу, расположенному ниже оси X , от точки 3 до точки 2 , и так далее.

Потребные приращения скорости $\overline{\Delta V}$ от действия тяги вблизи планет A и B определяются гиперболическими скоростями $\overline{V}_{h,A}$ и $\overline{V}_{h,B}$. На рис. 27 показано графическое построение для случая старта космического аппарата с круговой орбиты спутника, а для достижения гиперболической скорости $\overline{V}_{h,A}$ ему сообщается тангенциальное приращение скорости $\overline{\Delta V}$. На диаграмме XY точки 1 и 2 представляют собой положения аппарата до и после приложения тяги, а дуга 2—3 — участок полета по инерции. Точка 3, где эта

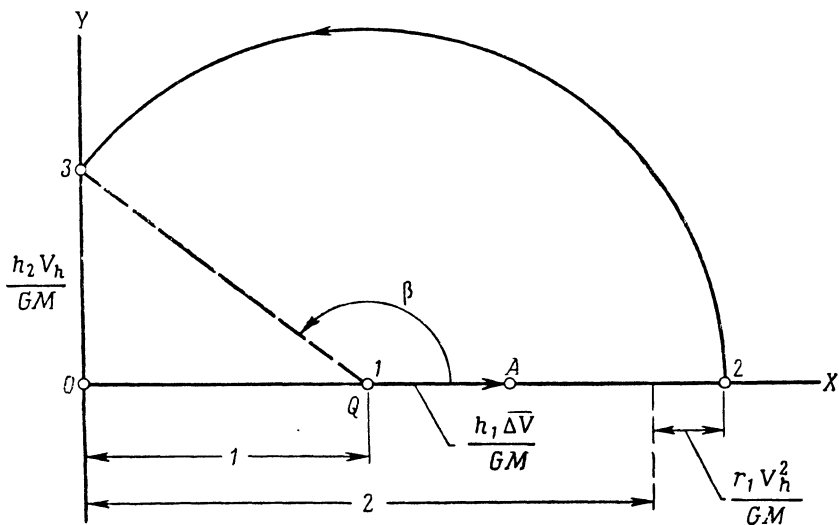


Рис. 27. Пример межпланетного перелета. Тангенциальный импульс тяги, потребный для ухода с круговой орбиты спутника 1 с заданной гиперболической скоростью V_h

дуга пересекает ось Y , соответствует условиям полета с гиперболической скоростью.

Эта задача может быть легко решена путем использования кругов постоянного отношения rV^2/GM с центром в точке $(rV^2/GM, 0)$, радиусом $rV^2/2GM$, проходящих через точку $(0, 0)$ — одного из семейств кривых, упомянутых в начале раздела «Дополнительные кривые для диаграммы XY ». Другое упрощенное решение, когда $\gamma_2=0$, дается уравнением

$$X_2 = rV_2^2/GM = 2 + rV_{h,A}^2/GM,$$

из которого определяется потребное приращение скорости $\overline{\Delta V}$. Угловое направление движения космического аппарата, покинувшего планету A , показывает угол β , приведенный на рис. 27.

ПРОБЛЕМЫ ВСТРЕЧИ

Геометрия орбиты на плоскости. Ниже приводятся два условия, определяющие пересечение двух компланарных орбит:

$$1) \omega_1 + \Phi_1 = \omega_2 + \Phi_2;$$

$$2) r_1 = r_2.$$

$$1. \text{ Угол } (2-Q-1) = \omega_2 - \omega_1$$

$$2. \frac{X_2}{X_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

3. Точки $0, 1b$ и $2b$ лежат на одной прямой

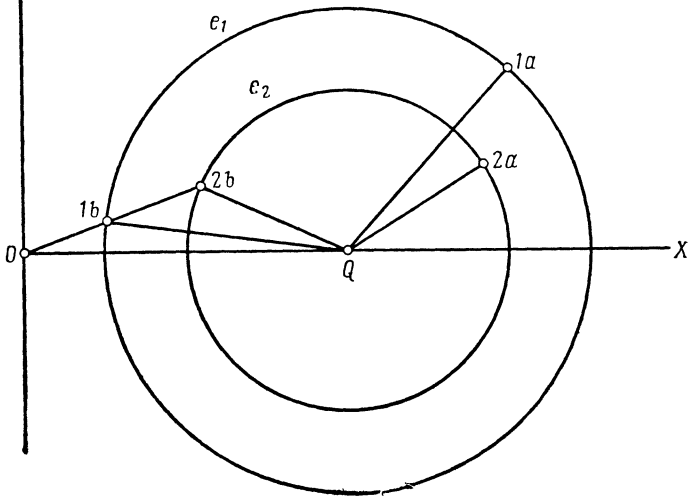


Рис. 28. Условия пересечения и касания двух орбит. Точки $1a$ и $2a$ — условия на орбитах 1 и 2 при пересечении; точки $1b$ и $2b$ — условия на орбитах 1 и 2 при касании

На рис. 28 точки $1a$ и $2a$ на диаграмме XU соответствуют условиям на орбитах 1 и 2 при их пересечении; тогда получим:

$$1) \text{ угол } 2a-Q-1a = \omega_2 - \omega_1;$$

$$2) X_{2a}/X_{1a} = h_2^2/h_1^2.$$

Третье условие, определяющее касание двух орбит, будет:

$$3) \gamma_1 = \gamma_2.$$

На диаграмме XU , представленной на рис. 28, точки $1b$ и $2b$ представляют условия на орбитах 1 и 2 при их касании, так что:

$$1) \text{ угол } 2b-Q-1b = \omega_2 - \omega_1;$$

$$2) X_{2b}/X_{1b} = h_2^2/h_1^2;$$

3) точки $0; 1b$ и $2b$ лежат на одной прямой.

В задачах, имеющих целью определение пересечения и касания орбит, удобно использовать двуплечий углемер, центр которого совмещен с точкой Q , а его плечи разведены на угол $\omega_2 - \omega_1$. Вращая углемер с таким раствором до тех пор, пока X_2/X_1 не станет равным h_2^2/h_1^2 , мы определим условия в точке пересечения двух орбит, а если точки 0 ; 1 и 2 окажутся на одной прямой, то это будет означать, что орбиты касаются друг друга в этой точке.

ОРБИТА ПЕРЕХОДА, КАСАТЕЛЬНАЯ К НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ ОРБИТАМ

На рис. 29 показано построение для маневра встречи, осуществление которого требует два приращения тангенциальной скорости; параметры начальной орбиты — e_1 , h_1 , ω_1 , параметры орбиты перехода — e_2 , h_2 , ω_2 и параметры конечной орбиты — e_3 , h_3 , ω_3 .

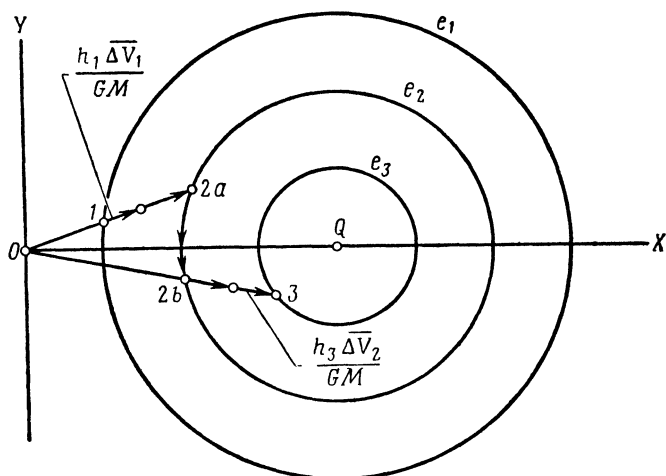


Рис. 29. Пример построения для маневра встречи, когда орбита перехода 2 касательна и к начальной орбите 1 и к конечной орбите 3

Условия касания следующие:

- 1) угол $2a - Q - 1 = \omega_2 - \omega_1$;
- 2) $X_{2a}/X_1 = h_2^2/h_1^2$;
- 3) точки 0 ; 1 и $2a$ лежат на одной прямой;
- 4) угол $3 - Q - 2b = \omega_3 - \omega_2$;
- 5) $X_3/X_{2b} = h_3^2/h_2^2$;
- 6) точки 0 ; $2b$ и 3 лежат на одной прямой.

В этом случае h_2 и ω_2 можно не принимать во внимание. Объединяя условия (1) с (4) и (2) с (5), мы получим лишь четыре необходимых условия:

- 1) угол $2a - Q - 1 +$ угол $3 - Q - 2b = \omega_3 - \omega_1$;
- 2) $(X_{2a}X_3)/(X_1X_{2b}) = h_3^2/h_1^2$;
- 3) точки 0; 1 и $2a$ лежат на одной прямой;
- 4) точки 0; $2b$ и 3 лежат на одной прямой.

Решение находится методом проб и ошибок. Выбираем пробную точку $2a$; прямая линия $0-1-2a$ дает угол $3-Q-2b$ по условию

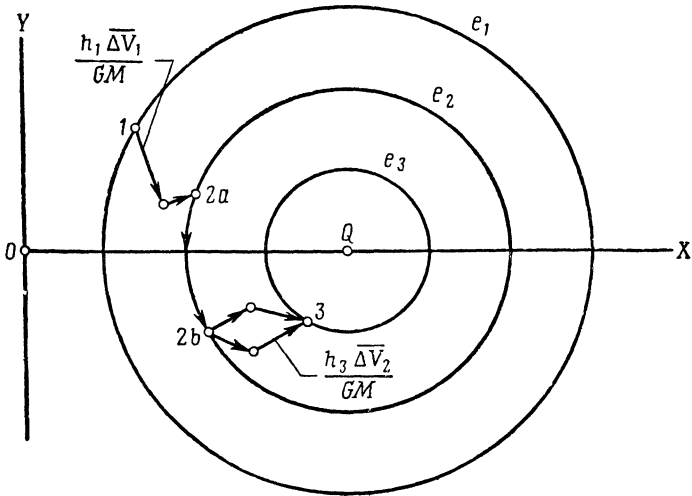


Рис. 30. Пример построения для маневра встречи, когда параметры орбиты e_1 , h_1 , ω_1 изменяются до значений e_3 , h_3 , ω_3 с помощью двух импульсов тяги $\overline{\Delta V}$ таким образом, чтобы полное приращение скорости ΔV было минимальным.

(1) и, кроме того, X_3/X_{2b} по условию (2). Двуплечий угломер с центром, совмещенным с точкой Q , и углом раствора, равным углу $3-Q-2b$, вращаем до тех пор, пока точки 0; $2b$ и 3 не расположатся на одной прямой [условие (4)] и пока X_3/X_{2b} не будет удовлетворять условию (2). Если эти условия не выполняются, то берется другая пробная точка $2a$ и все построения проводятся до тех пор, пока решение не будет удовлетворять всем условиям. Тогда два искоемых приращения тангенциальной скорости ΔV определяются, как показано на рис. 29.

Орбита перехода с минимальным ΔV (рис. 30). Если космический аппарат необходимо перевести с начальной орбиты e_1 , h_1 , ω_1 на конечную орбиту e_3 , h_3 , ω_3 , используя два приращения скорости ΔV ,

сумма которых минимальна, решение должно удовлетворять двум условиям:

$$1) \text{ угол } 2a - Q - 1 + \text{ угол } 3 - Q - 2b = \omega_3 - \omega_1;$$

$$2) (X_{2a}X_3)/(X_1X_{2b}) = h_3^2/h_1^2.$$

Чтобы определить оптимальные положения точек 1 и $2a$, где требуется приложение минимального ΔV , применяют метод проб и ошибок. Выбирая любые пробные точки 1 и $2a$, определяем угол $3 - Q - 2b$ по условию (1) и X_3/X_{2b} по условию (2). Двуплечий угломер с центром, совмещенным с точкой Q , и углом раствора, равным углу $3 - Q - 2b$, вращаем до тех пор, пока точки 3 и $2b$ не будут удовлетворять условию (2), обеспечивая соответствующее значение X_3/X_{2b} . Затем определяем суммарную величину ΔV для этой пробы, как показано на рис. 30. Повторяем процесс, выбирая различные точки $2a$, до тех пор, пока не получим минимального значения ΔV . Затем берем различные точки 1 и повторяем ту же процедуру до тех пор, пока суммарное значение ΔV не будет минимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены дифференциальные уравнения движения в плоскости XU , показывающие хорошее согласование между любой действительной траекторией и соответствующей ей кривой на диаграмме XU . Эти уравнения представлены в координатах графического метода, использованного в отчете, для основной кинематики, кинематики в плоскости XU и трехмерной кинематики; они включают полную систему дифференциальных уравнений движения для общего случая и для центрального гравитационного поля, подчиняющегося закону обратной пропорциональности силы притяжения квадрату расстояния.

В своем отчете А. С. Боксенбом дает отличный графический метод анализа траекторий и показывает, что его можно успешно применять при решении широкого класса задач, связанных с космическими полетами.

Анализ траекторий
с использованием сеток
характеристик

**ПРЕДЛАГАЕМОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
КЕПЛЕРОВОЙ ДИАГРАММЫ**

Траектория тела, движущегося в космическом пространстве без тяги и при отсутствии сил, действующих на него, за исключением силы притяжения центрального тела, представляет собой коническое сечение, описываемое законами Кеплера, которые основаны на законах сохранения момента количества движения и сохранения энергии. Отношение кинетической энергии тела к его потенциальной энергии определяет вид этой орбиты: эллиптическая, параболическая, гиперболическая или круговая.

В статье, опубликованной в 1959 г.*, Р. Л. Зон описывает усовершенствование и использование кеплеровой диаграммы, с помощью которой можно определить тип орбиты и быстро рассчитать характеристики орбитального движения тела.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Сетка характеристик, называемая кеплеровой диаграммой, состоит из семейства кривых, представляющих в относительном виде интегральные уравнения движения, и построена для определения типа орбиты, а также для расчета скорости, времени, угла наклона траектории и углового перемещения тела, движущегося по траектории. Эта диаграмма определяет основные формы орбиты — круговую, эллиптическую, параболическую и гиперболическую — с указанием углов апогея и перигея. На различных примерах показано, как определять скорость, которая должна быть приложена в апогее для достижения первой космической скорости, необходи-

* R. L. Sohn, A Proposed Kepler Diagram, ARS J. 29: 51—54, January 1959.

Роберт Л. Зон — штатный инженер Исследовательской лаборатории космической техники, Редондо Бич, штат Калифорния.

мые условия в конце активного участка траектории для получения потребной высоты орбиты спутника, дальность баллистических ракет, условия входа в атмосферу и остаточные скорости.

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ

Движение тела в космическом пространстве может быть выражено параметром λ , равным удвоенному отношению кинетической энергии тела к его потенциальной энергии. Параметры орбиты описываются шестью уравнениями, составленными в относительных величинах; тогда семейства кривых на сетке характеристик становятся независимыми от энергии тела и действительных размеров его орбиты.

На рис. 31 показана основная сетка такой усовершенствованной кеплеровой диаграммы. Здесь семейства кривых постоянного эксцентриситета e нанесены на диаграмму, связывающую отношение радиусов r_p/r с параметром λ :

$$\lambda = 2 - \frac{1 - e}{(r_p/r)},$$

где r — орбитальный радиус произвольной точки траектории;
 r_p — радиус в перигее.

Верхняя линия диаграммы есть линия перигеев, где угол θ равен 180° , а угол наклона траектории полета β равен 90° . θ — орбитальный центральный угол между орбитальным радиусом и большой осью, а β — угол между орбитальным радиусом r и касательной к орбите в точке, к которой проведен радиус r . На этой линии в точке C , где $\lambda = 1$, эксцентриситет равен нулю и орбита будет круговой. От точки C кривая апогеев CO , вдоль которой $\theta = 0^\circ$ и $\beta = 90^\circ$, продолжается до точки O в нижнем левом углу диаграммы. На этой линии орбиты спутников имеют диапазон эксцентриситетов от 0 до 0,2. Эксцентриситет орбиты Луны равен 0,0549. На линии апогеев также показаны диапазоны эксцентриситетов для траекторий межконтинентальных баллистических ракет и для траекторий баллистических ракет средней дальности. Вертикальная линия, проходящая через значение $\lambda = 2$ и эксцентриситет которой $e = 1$, представляет собой параболическую траекторию второй космической скорости. Все эллиптические орбиты лежат слева от этой линии, а гиперболические траектории — справа от нее, как показано на диаграмме. Таким образом, величина λ определяет тип орбиты или траектории, а каждое значение e соответствует определенной конкретной орбите.

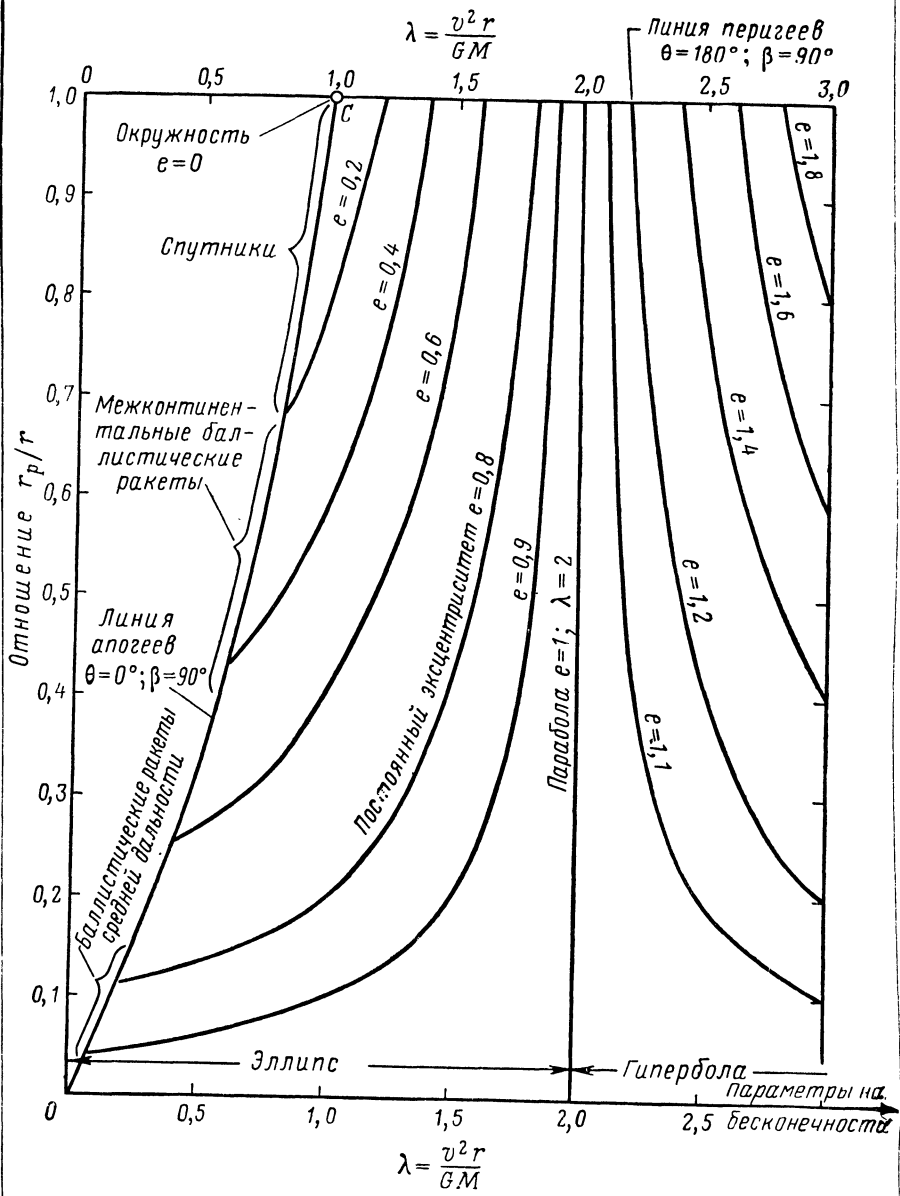


Рис. 31. Основное изображение эксцентриситета орбиты.

На рис. 32 показано семейство кривых для ряда значений θ , β , v/v_p и t/T ,

где v/v_p — отношение скорости в произвольной точке на орбите к скорости в перигее;

t/T — отношение длительности полета ($t=0$ в перигее) к периоду T ; $T=2\pi \frac{r_p^{3/2}}{\sqrt{GM}}$.

Линии постоянного эксцентриситета на этом рисунке не приведены, чтобы не затемнять картину. Кривые θ сходятся в точке C , а кривые β — в точке O . Так как скорость, радиус и угол наклона траектории обычно известны, то орбита может быть определена интерполяцией как точка на диаграмме.

КЕПЛЕРОВА ДИАГРАММА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Обратимся теперь к рис. 33, который включает в себя основные кривые для эксцентриситета e ; орбита тела отыскивается вдоль кривой постоянного эксцентриситета, проходящей через кривые скорости, времени, углового перемещения и угла наклона траектории, которые описывают движение тела во всех точках.

Ниже приведены пять примеров, иллюстрирующих решение задач с помощью кеплеровой диаграммы.

1. Чтобы определить дополнительную скорость в апогее, необходимую для достижения первой космической скорости, используем кривые λ и β для того, чтобы определить расположение орбиты, а затем прослеживаем ее вдоль кривой постоянного e до линии апогея, чтобы определить величину λ .

Так как $\lambda=1$ для круговой орбиты, потребное увеличение скорости составляет $1/\sqrt{\lambda}$.

2. Чтобы определить условия в конце активного участка траектории для достижения заданной высоты в апогее, используем λ и любое пробное значение r_p/r для того, чтобы определить расположение орбиты. Прослеживаем ее вдоль кривой постоянного e до линии апогея и читаем значение r_p/r_a (где r_a — орбитальный радиус в апогее); тогда $r/r_a = (r_p/r_a)/(r_p/r)$. Повторяем этот процесс до тех пор, пока желаемое значение r_a не будет найдено, а затем читаем потребный угол наклона траектории полета β на диаграмме.

3. Чтобы найти дальность полета баллистической ракеты, используем кривые λ и β для определения положения орбиты ракеты в конце активного участка; прослеживаем ее вдоль кривой постоянного e до линии апогея, а затем обратно — до высоты попадания в цель. Читаем прямо с диаграммы полное угловое перемещение θ , покрываемое за время полета от конца активного участка траектории до цели, и умножая это изменение углового перемещения на радиус поверхности, определяем дальность полета.

4. Чтобы определить условия входа в атмосферу, используем кривые λ и β в конце активного участка траектории для установ-

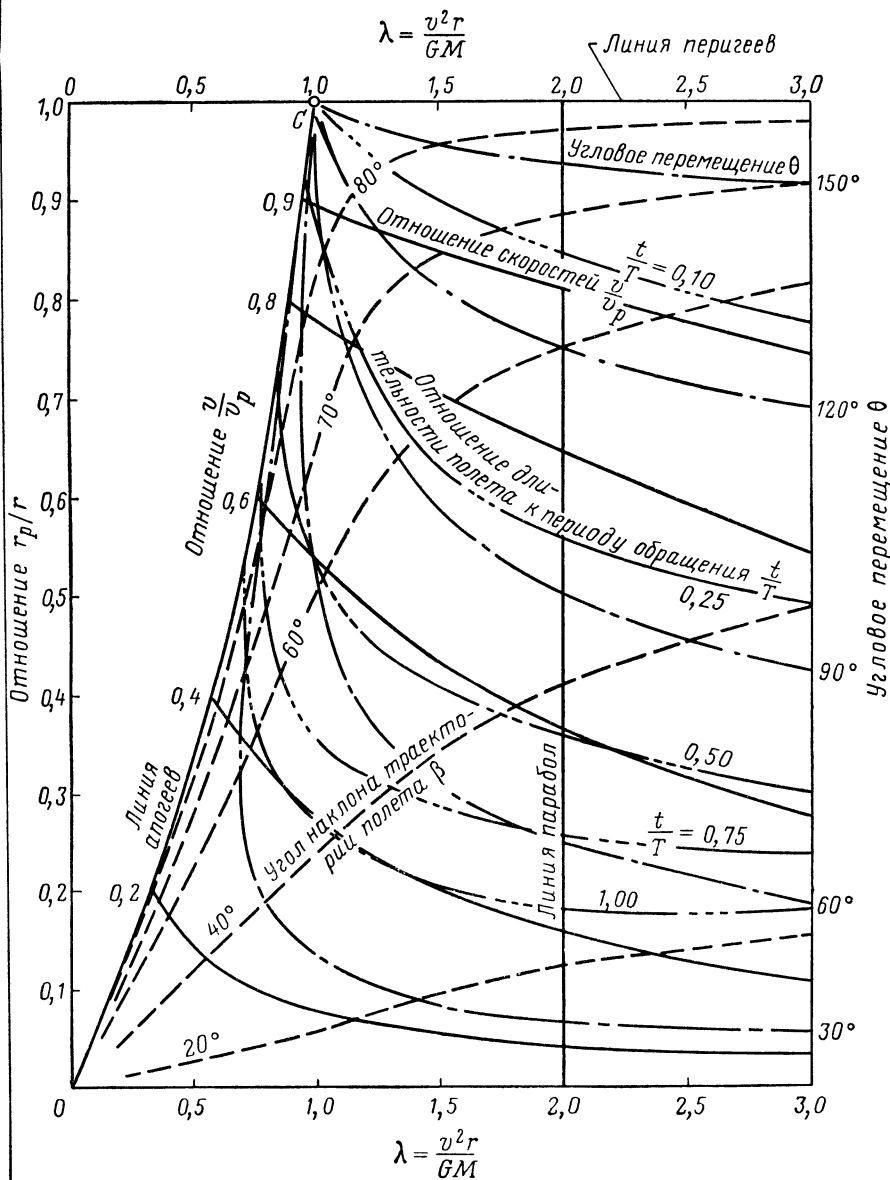


Рис. 32. Семейства кривых v/v_p , θ , β и t/T

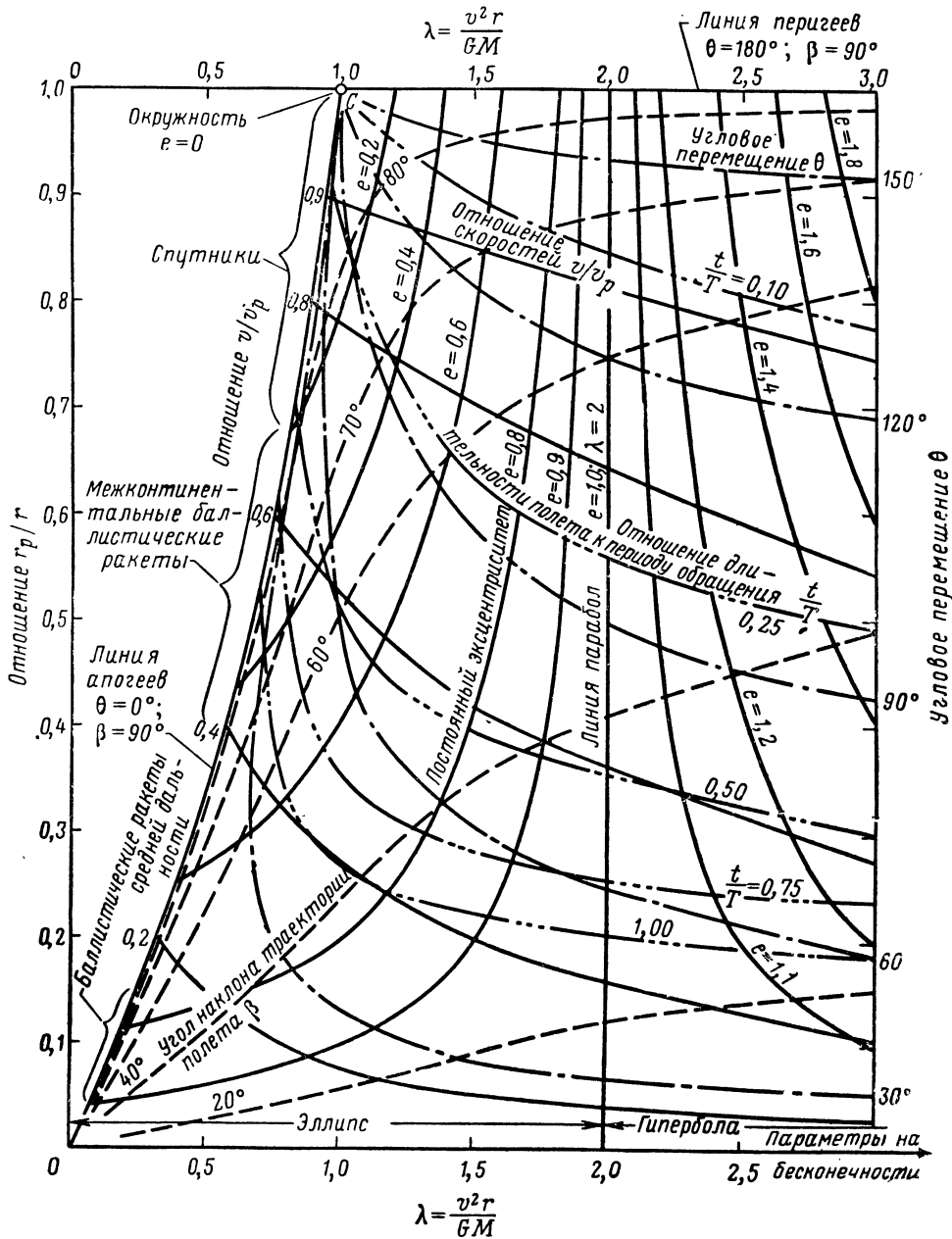


Рис. 33. Полная кеплерова диаграмма

ления орбиты; прослеживаем ее вдоль кривой постоянного e до апогея и обратно — до потребной высоты входа в атмосферу; читаем новый угол наклона траектории полета β и новую скорость прямо на диаграмме.

5. Чтобы определить остаточную скорость v_r тела после того, как оно освободится от действия поля гравитационной силы, используем уравнение $(v_r/v)^2 = 1 - 2/\lambda$. Остаточный угол наклона траектории $\beta_r = 0$, а остаточное угловое перемещение $\theta_r = \arccos(1/e)$.

ПОСТРОЕНИЕ ОРБИТЫ

Для построения действительной орбиты в определенном масштабе определяем значение большой полуоси a из уравнений

$$a = \frac{r}{2 - \lambda} = \frac{r_p}{1 - e} \quad \text{— для эллипса}$$

или

$$a = \frac{r}{\lambda - 2} = \frac{r_p}{e - 1} \quad \text{— для гиперболы,}$$

и орбитальный радиус r из уравнения

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta},$$

где p — фокальный полупараметр — определяется следующими уравнениями:

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{— для эллипса;}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{— для гиперболы.}$$

Графический анализ движения тела вдоль траектории с помощью такой кеплеровой диаграммы дает полезное приближение к решению многих задач космического полета и обеспечивает лучшее понимание основных соотношений.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ И ТРАЕКТОРИИ

В стадии предварительного проектирования и разработки задач, связанных с космическими полетами, важно, чтобы конструкторы изучили существенные аспекты эффективных приближенных решений для того, чтобы добиться достоверного понимания всех элементов, способствующих осуществлению общей идеи проекта. Для этой цели фирмой Локхид были подготовлены три тома справочника * сеток характеристик для использования их при решении

* R. J. Pollak and D. H. Landauer, Trajectory Design Charts, LMSD-450735, Lockheed Missile and Space Div., Sunnyvale, Calif., January, 1959; R. J., Pollak, Vehicle-Performance Tradeoffs, LMSD-480022, Lockheed, December, 1959; R. J. Pollak, Trajectory Optimization, LMSD-480788, Lockheed, January, 1960. Ричард Дж. Поллак — ученый-исследователь фирмы Локхид миссайл энд спейс, Саннивейл, штат Калифорния.

многих вопросов предварительного проектирования и расчета траекторий.

В статье *, опубликованной в 1962 г., Р. Дж. Поллак, автор этого справочника, описывает основы метода, дает наиболее важные характеристики и показывает пригодность обобщенных решений для различных задач, связанных с расчетом траекторий.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Семейства кривых на сетках характеристик, представляющие собой безразмерные траектории и безразмерные коэффициенты чувствительности траектории, использованы при решении задач предварительного расчета траекторий любых баллистических ракет. Графики для расчета траекторий включают в себя скорость, высоту, дальность, угол наклона траектории полета и перегрузки для активного, пассивного полета и условий в конце активного участка траектории. Уравнения движения обобщены функциями параметров ракеты.

ОБОБЩЕННЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Обратимся к первому тому справочника по расчету траекторий для определения характеристик и окружающих условий; решения даны для участка активного полета с гравитационным поворотом, при постоянной тяге и постоянной ориентации. Кривые на других сетках характеристик показывают профиль траектории при постоянных тангаже, ориентации и соотношениях активного и пассивного участков траектории полета, а также при постоянных условиях в апогее. Таким образом, можно графически вычислить приближенно характеристики ракеты, если известны начальная тяговооруженность (отношение тяги двигателя к весу ракеты), относительный вес топлива, удельный импульс I_{sp} в пустоте и угол наклона траектории полета ракеты.

Сетка характеристик, представленная на рис. 34, показывает возможные значения угла наклона траектории на участке активного полета с гравитационным поворотом. Так как угол наклона траектории меняется со временем, кривые на этой диаграмме связывают угол наклона траектории с безразмерным временем, значения которого изменяются от нуля до его конечного значения в конце активного участка траектории и равны частному от деления веса израсходованного топлива в любой момент времени на начальный вес ракеты. Эти кривые начинаются на ординате от точки, соответствующей вертикальному подъему ($\gamma=90^\circ$), и достигают значения, соответствующего условию в конце активного участка полета и зависящего от начальной осевой перегрузки и относительного веса топлива ступени ракеты. Сплошные кривые соответствуют

* R. J. Pollak, Rapid Determination of the Reactions between the Ballistic Rocket and its Trajectory, ARS J., 32: 42—51, January, 1962.

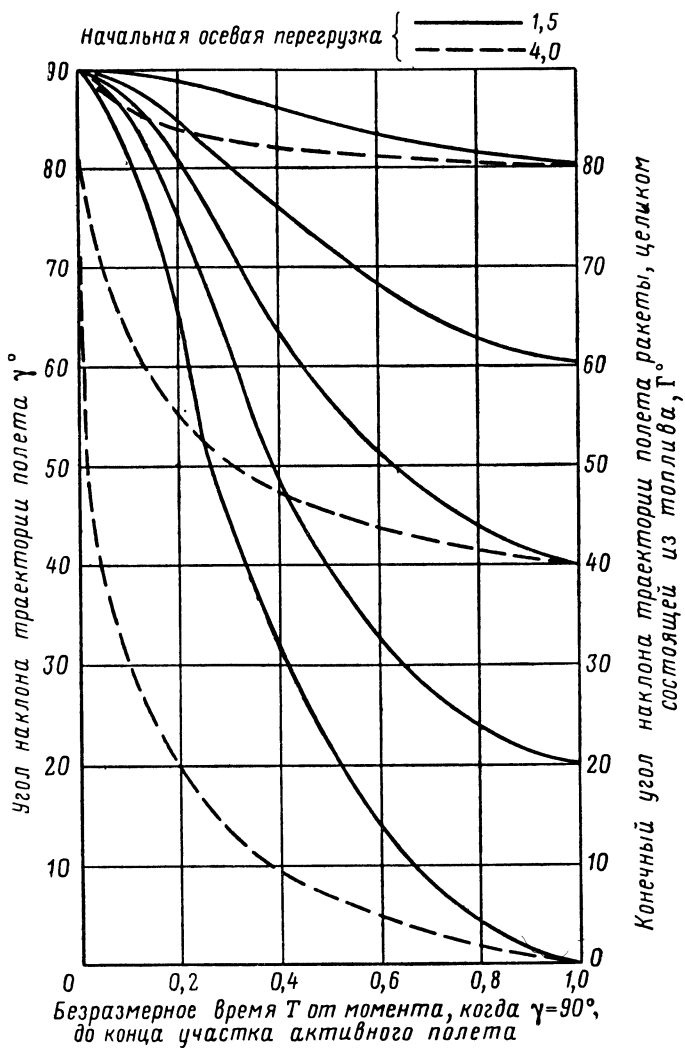


Рис. 34. Угол наклона траектории на участке активного полета с гравитационным поворотом

начальной перегрузке 1,5, а пунктирные кривые — перегрузке 4,0. Сравнение сплошных и пунктирных кривых показывает влияние величины начальной осевой перегрузки на характер изменения траектории полета во времени: при бóльших перегрузках происходит более быстрое выгорание топлива. Для ракеты, целиком состоящей из топлива (точка, обозначенная единицей на шкале времени), диаграмма дает конечный угол наклона траектории, равный Γ . Углы наклона траекторий баллистических ракет лежат в диапазоне от 20° до 40° . По этой диаграмме инженер-расчетчик выбирает угол наклона траектории Γ , а по нему устанавливает изменение по времени всех других параметров траектории.

Полулогарифмическая диаграмма, приведенная на рис. 35, дает кривые безразмерной скорости в функции времени. Построенные кривые отличаются друг от друга величиной начальной перегрузки и значением Γ . Промежуточные кривые для значения Γ от 0° до 80° не нанесены на график, чтобы не затемнять картину. Отмечая на шкале времени относительный вес топлива, определяем по соответствующей кривой скорость в конце активного участка полета. Чтобы превратить безразмерную скорость в размерную и выразить ее в метрах в секунду, следует умножить ее на переводной множитель gI_{sp} .

На рис. 36 показаны профили траекторий в координатах «безразмерная высота — безразмерная дальность» на участке активного полета с гравитационным поворотом. Для бóльших значений Γ высота увеличивается, а дальность становится меньше. Пунктирные кривые, соответствующие начальному значению перегрузки, равному 4,0, показывают, что уменьшение времени выгорания топлива вследствие увеличения перегрузки приводит к уменьшению покрываемого ракетой расстояния. Изменение скорости и высоты по времени также используют для приближенного расчета аэродинамических нагрузок и аэродинамического нагрева.

Статья Р. Дж. Поллака содержит много и других полезных диаграмм, аналогичных представленным на рис. 34, 35 и 36.

ОБОБЩЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ТРАЕКТОРИИ

По диаграммам второго тома справочника определяют наивыгоднейшую траекторию для конкретной ракеты и наивыгоднейшую ракету для конкретной траектории. Выбранная траектория должна удовлетворять требованиям, учитывающим такие факторы, как характеристики ракеты, аэродинамические нагрузки, управляемость, аэродинамический нагрев и угол обзора управляющего радиолокатора. Эффективным методом является выбор пробной траектории, расчет влияния малых отклонений от нее, а затем максимизация дальности надлежащим выбором угла тангажа второй ступени. Диаграммы дают возможность рассчитать чувствитель-

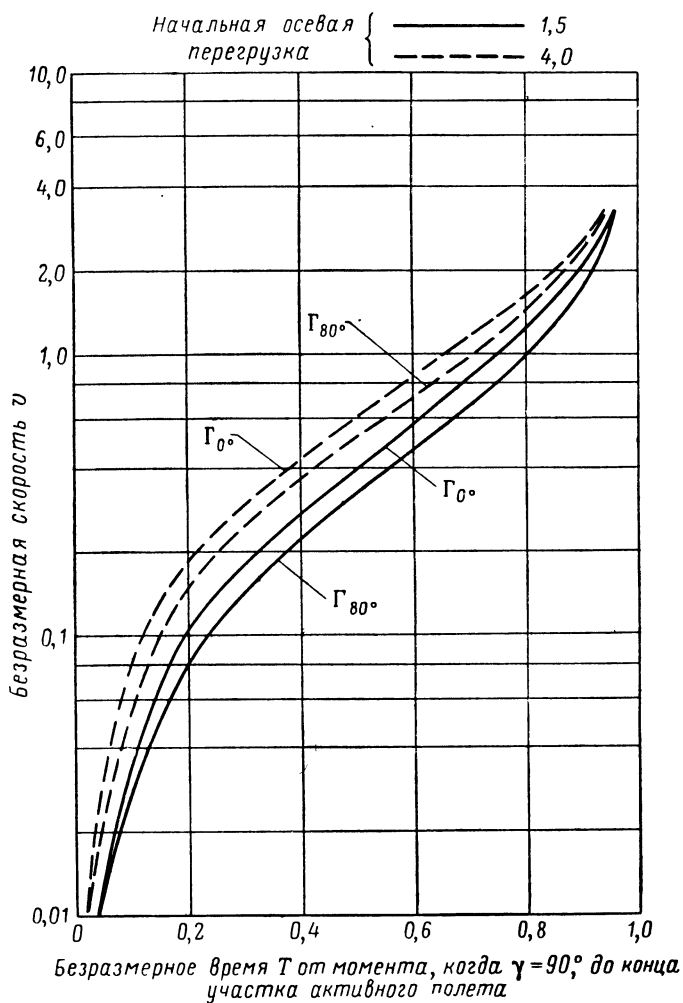


Рис. 35. Скорость на участке активного полета с гравитационным поворотом

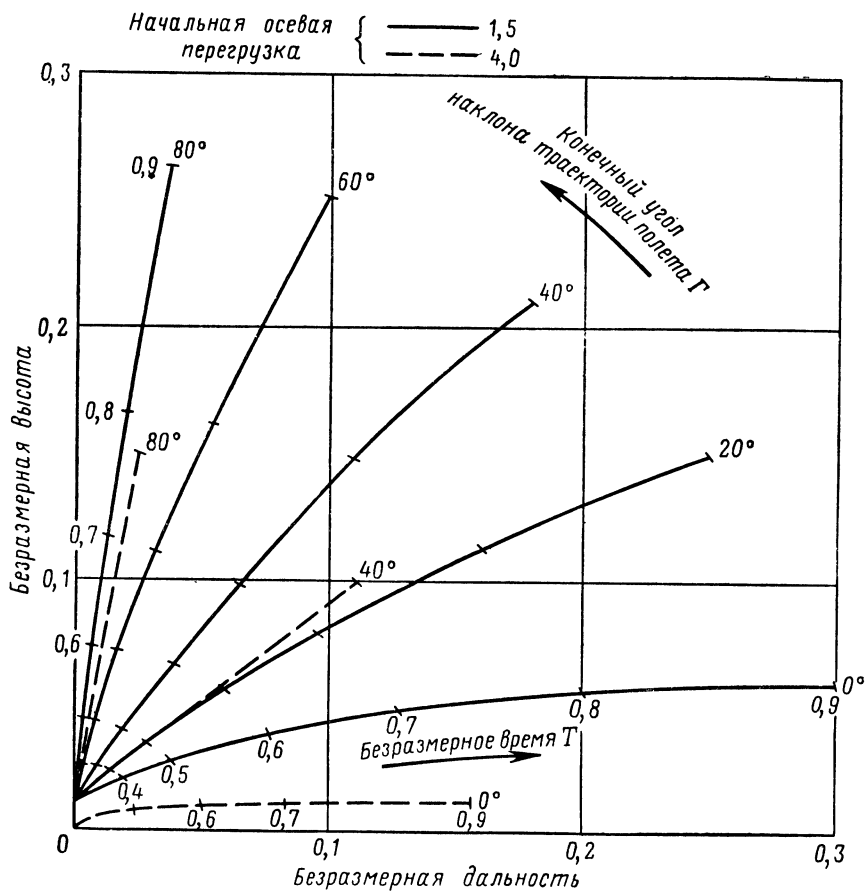


Рис. 36. Графики, связывающие высоту и дальность на участке активного полета с гравитационным поворотом

ность траектории к малым отклонениям и показывают, как эти отклонения влияют на характеристики, аэродинамические нагрузки и нагрев.

ОБОБЩЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКЕТЫ

В третьем томе справочника содержатся диаграммы коэффициентов, или соотношений замены, которые показывают связь между изменениями скорости, высоты и дальности полета по траектории и единичными изменениями удельного импульса, времени работы двигателя, тяги, инертного веса или веса топлива. Эти коэффициенты используются для:

1) оценки предварительных проектов в отношении характеристик ракеты или ее стоимости;

2) оценки неопределенности и допусков в параметрах, используемых при проектировании ракеты;

3) оценки отклонений от известного проекта.

Коэффициенты выводятся аналитически — путем сохранения одного из параметров ракеты постоянным и изменением других параметров таким образом, чтобы они удовлетворяли изменяющимся условиям. Все коэффициенты построены в виде безразмерных диаграмм, а для того чтобы сделать соответствующие величины размерными, используется тот же переводной множитель gI_{sp} .

Статья Р. Дж. Поллака показывает большое значение безразмерных диаграмм при проектировании для получения приближенных решений различных задач, связанных с расчетом траекторий.

Расчетные диаграммы и номограммы

Некоторые виды расчетных диаграмм и номограмм используются для получения приближенных решений на стадии предварительного расчета траекторий космического полета.

РАСЧЕТНАЯ ДИАГРАММА ХАРАКТЕРИСТИК ОРБИТЫ

В 1959 г. Г. Г. Лютьен и М. Л. Рэйми опубликовали статью *, в которой дана удобная для расчета диаграмма, разработанная ими для использования при сравнительном анализе и предварительном изучении характеристик орбит.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Объединенные круговая диаграмма и сетка характеристик дают приближенные значения следующих характеристик орбиты:

- 1) мгновенной скорости относительно Земли;
- 2) мгновенной высоты над поверхностью Земли;
- 3) эксцентриситета;
- 4) мгновенного угла наклона траектории полета;
- 5) периода;
- 6) мгновенного времени с момента прохождения перигея;
- 7) мгновенного углового смещения от перигея.

Даны пять определяющих уравнений, и на примере решения пробной задачи с помощью вычисления по шагам показано определение характеристик орбиты.

* Н. Н. Luetjen and M. L. Ramey. Orbit Relationships, Space/Aeron. 31: 122—123, 125, 129, 134, 138, March, 1959. Г. Г. Лютьен — руководитель проекта «Джемини» фирмы Макдоннел, мыс Кеннеди, Кокоа Бич, штат Флорида; М. Л. Рэйми — руководитель Отдела конструкций фирмы Макдоннел Эйркрафт, Сент-Луис, штат Миссури.

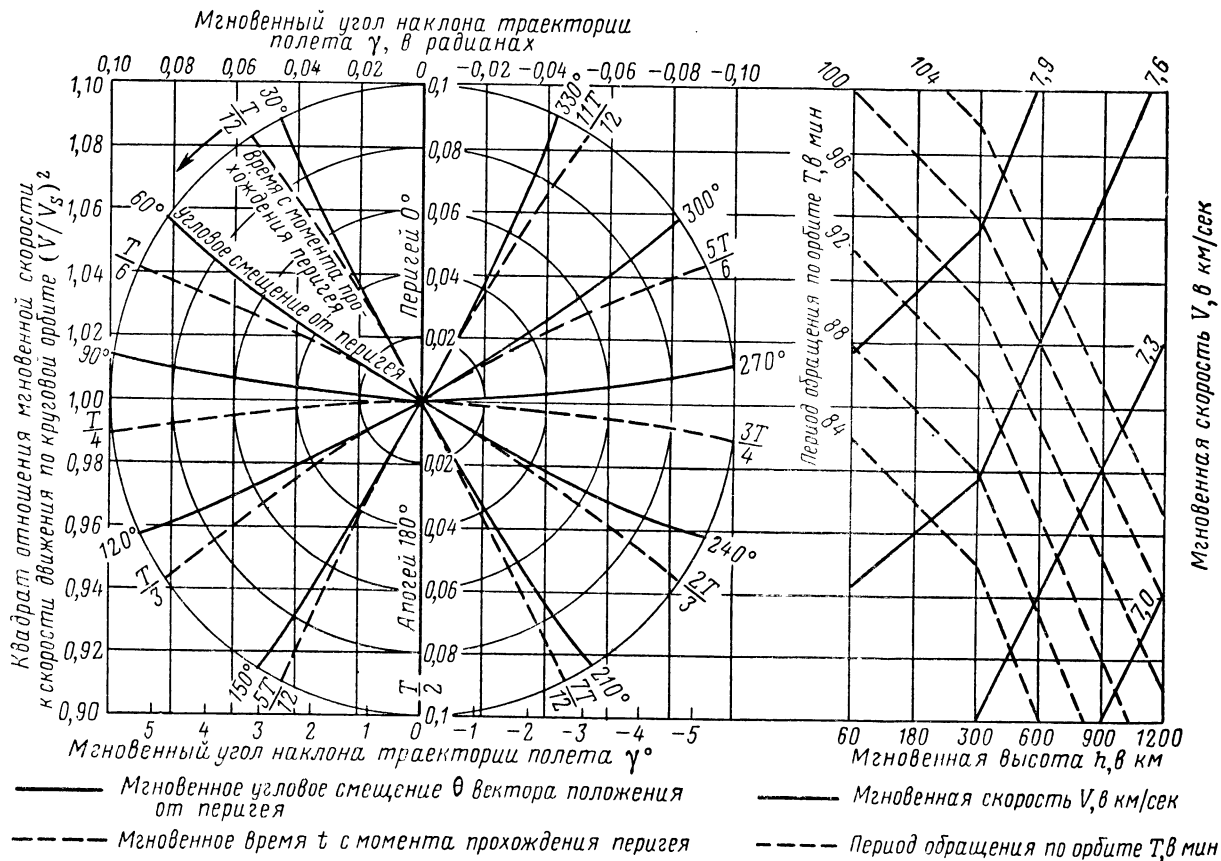


Рис. 37. Диаграмма для расчета характеристик орбиты

ОПИСАНИЕ ДИАГРАММЫ

Построена расчетная диаграмма для орбит малого эксцентриситета (от нуля до 0,1) при условии пренебрежения аэродинамическими силами и в предположении, что Земля — невращающаяся сфера. Эксцентриситет орбиты Луны равен 0,0549. Концентрические круги на рис. 37 — это кривые постоянного эксцентриситета.

Общая ордината для всей диаграммы есть квадрат отношения мгновенной скорости V к скорости движения по круговой орбите V_s . Абсцисса левой части диаграммы есть мгновенный угол наклона траектории полета γ , выраженный в радианах на верхней шкале и в градусах — на нижней шкале. Абсцисса правой части диаграммы — мгновенная высота h , выраженная в километрах. Масштаб этой шкалы, начиная с 300 км, уменьшен для того, чтобы включить большие значения апогея.

Даны уравнения для определения других параметров: мгновенной скорости V , периода обращения по орбите T , эксцентриситета e (не более 0,1), мгновенного времени с момента прохождения перигея t ($t=r\Phi/2\pi$) и мгновенного углового смещения θ от перигея.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Как пример, иллюстрирующий использование этого метода, решается типичная задача прямо на диаграмме и каждый шаг описывается подробно. Даны значения в конце активного участка: высота $h=183$ км, скорость $V=8$ км/сек, угол наклона траектории полета $\gamma=2^\circ$. Требуется определить остальные характеристики орбиты.

Этот удобный и полезный метод графического вычисления дает удовлетворительные результаты в стадии предварительного расчета характеристик орбит.

ОРБИТАЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ

Номограммы часто используются для предварительных расчетов на ранней стадии исследований космического полета.

АСТРОНАВТИЧЕСКАЯ НОМОГРАММА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Параллельная номограмма связывает скорость, массу, среднее расстояние, период и ускорение любой орбитальной системы двух тел. Она дает численные значения параметров орбит планет вокруг Солнца, орбит спутников вокруг их планет и орбит искусственных спутников Земли. Для двойных звезд шкалы дают величину общей массы, наибольшее расстояние между компонентами, относитель-

ную скорость и относительное ускорение на концах малой оси эллиптической орбиты.

В статье, опубликованной в 1960 г. *, Рой К. Спенсер описывает номограмму, на которой наглядно представлена взаимосвязь большинства небесных тел в солнечной системе в соответствии с их массой, расстоянием, периодом обращения по орбите, скоростью и ускорением. Номограмма включает Солнце, Землю и восемь других планет, самый большой астероид — Цереру, Луну, четыре спутника Юпитера, два спутника Марса, по одному спутнику Сатурна, Нептуна и Урана и три искусственных спутника на орбите вокруг Земли.

ОПИСАНИЕ НОМОГРАММЫ

Номограмма имеет пять вертикальных шкал, которые представляют собой слева направо: среднюю орбитальную скорость в километрах в секунду; массу центрального тела относительно массы Солнца, принятой за единицу; среднее расстояние от центрального тела в километрах или астрономических единицах, *астр. ед.* (*астр. ед.* — расстояние от Земли до Солнца, равное $14,95 \cdot 10^7$ км); период обращения по орбите в годах, сутках, часах или минутах; среднее ускорение по направлению к центральному телу в сантиметрах в секунду за секунду (*см/сек²*). На рис. 38 показана основная структура номограммы, упрощенная тем, что на ней не указаны некоторые планеты и большинство их спутников.

ПРИМЕНЕНИЕ НОМОГРАММЫ

Для примера возьмем планету Венера, которая обращается по орбите вокруг Солнца за 225 суток. Прямая линия, проведенная через Солнце на шкале масс и цифру 225 на шкале периодов обращения, пересекает шкалу скоростей в точке 35 км/сек, шкалу расстояний — в точке $0,72$ *астр. ед.* и шкалу ускорений — в точке $1,2$ см/сек². Точно так же прямые линии, проведенные через точку, изображающую Солнце, определяют характеристики орбит других планет и астероида Церера, а соответствующие линии, проведенные через точки, изображающие Землю и пять других планет, дают значения характеристик орбит для их спутников.

Преимущество логарифмической шкалы — возможность приспособить ее к широкому диапазону значений — особенно ясно видно на шкале масс, которая охватывает сильно отличающиеся друг от друга по величине массы: Солнца, самой большой планеты Юпитер, Земли и Луны. Масса Солнца в 1000 раз больше массы Юпи-

* R. C. Spenser, *Astronautic Chart*, Proc. IRE, 48: 528—531, April, 1960. Рой К. Спенсер — руководитель Отдела исследования антенн в Отделении фирмы Рэдио Корпорейшн оф Америка по исследованию ракет и наземных радиолокационных устройств, Мурстоун, штат Нью-Джерси.

тера, в 332 000 раз больше массы Земли и в 27 миллионов раз больше массы Луны. Поэтому такая шкала дает возможность сразу представить картину их относительных размеров. Заметим, что

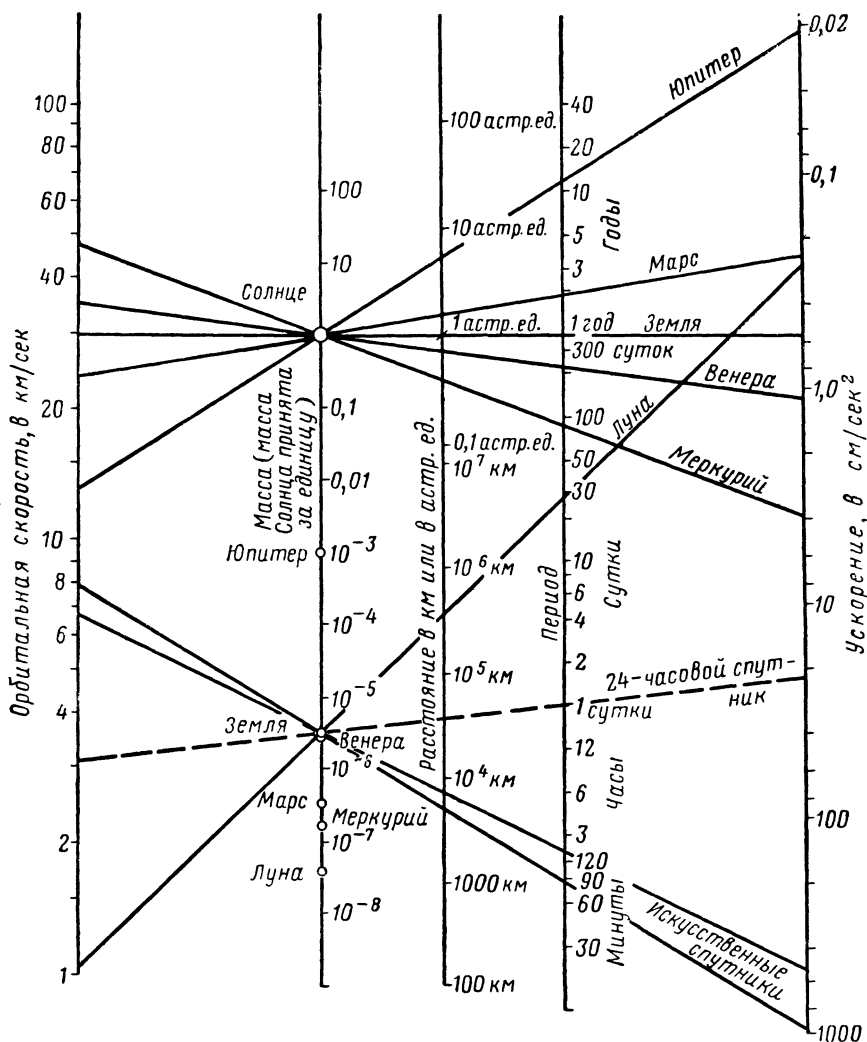


Рис. 38. Астронавтическая номограмма

масса Венеры немного меньше массы Земли, а ее диаметр примерно на 640 км меньше, в то время как Марс обладает массой, равной около одной десятой массы Земли.

ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ

Две линии, проходящие через точку, изображающую Землю на шкале масс, ограничивают область орбит первых искусственных спутников, имевших период обращения около 100 мин.

Пунктирная линия показывает орбиту предполагаемого 24-часового спутника, который будет казаться неподвижным на небе над экватором. Заметим, что период обращения Луны равен $27\frac{1}{3}$ суток, а ее среднее расстояние от Земли равно 385 000 км. Орбита ракеты, запущенной в сторону Луны, представляла бы собой узкий эллипс, изображаемый линией, проведенной от Земли через точку, находящуюся на половине расстояния до Луны.

Диаграмма может быть использована для определения периода обращения по орбите и орбитальной скорости разведывательного спутника, движущегося вокруг Луны на любой желаемой высоте над ее поверхностью.

Другие виды использования номограммы включают в себя нахождение характеристик орбит для искусственных спутников, движущихся вокруг планет на минимальной высоте, для естественных спутников, а также для орбит двойных звезд или любой орбитальной системы двух тел. Шкала ускорений может быть использована вместе с линиями спутников, запущенных на орбиты минимальной высоты для определения приближенных значений силы тяжести на поверхности планет.

ДРУГИЕ НОМОГРАММЫ

В 1962 г. И. Йенсен, Д. Таунсенд, Ю. Корк и Д. Крафт опубликовали обширное графическое руководство*, содержащее множество номограмм, используемых для приближенных решений широкого класса задач орбитальных полетов.

На рис. 39 показаны различные типы номограмм, которые представлены в этой книге. Эти номограммы обеспечивают удобный в обращении и эффективный способ предварительного расчета, обычно с точностью до третьего знака, для следующих орбитальных задач:

1. Установление связи между положением на орбите, эксцентриситетом орбиты и временем, прошедшим с момента прохождения перигея.
2. Определение эксцентриситета.
3. Определение радиусов в апогее и перигее.
4. Определение центрального угла от перигея.

* J. Jensen, G. Townsend, J. Kork, and D. Kraft, „Design Guide to Orbital Flight“, McGraw Hill Book Company, New-York, 1962. Йорген Йенсен — руководитель Отдела перспективных программ; Джордж Таунсенд — технический директор Управления механики полета; Юрий Корк — главный инженер Управления механики полета; Дональд Крафт — инженер Управления механики полета. Все они — сотрудники фирмы Мартин Мариетта, Балтимор, штат Мэриленд.

5. Определение эксцентрисической аномалии как функции центрального угла от перигея и эксцентриситета или отношения радиусов.

6. Определение местного угла наклона траектории полета.

7. Установление связи между радиусом, эксцентриситетом и центральным углом от перигея на эллиптической орбите.

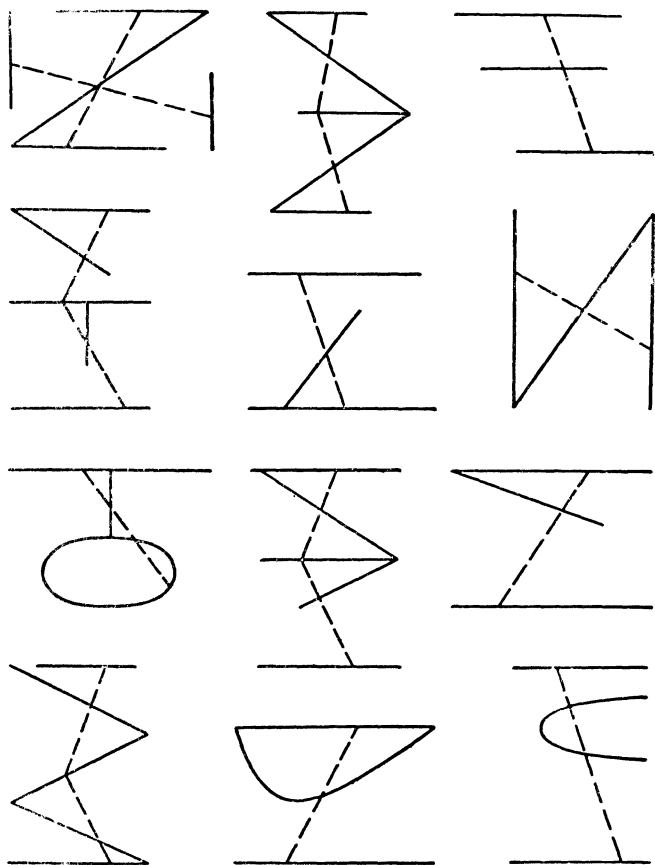


Рис. 39. Типы номограмм, используемых при расчетах орбит

8. Определение полупараметра как функции радиуса, скорости и угла наклона траектории полета.

9. Определение скорости вековой регрессии как функции наклонения орбиты и полупараметра.

10. Определение скорости вековой прецессии как функции наклонения орбиты и полупараметра.

11. Решение теоремы косинусов.

12. Решение теоремы синусов.

13. Определение характеристик UDMH (несимметричного диметилгидразина) и IRFNA (красной дымящей азотной кислоты с присадками) в вакууме.

14. Определение приращения скорости как функции отношения масс и удельного импульса.

15. Определение отношения импульса скорости, который можно получить от ракетной ступени, к идеальному импульсу (когда пренебрегают конечным временем горения).

16. Определение равновесной температуры спутника при различных свойствах его обшивки, различных характеристиках орбиты и альбедо (отражательной способности) Земли, а также при различных внутренних источниках тепла.

Кроме номограмм, эта книга содержит много графических решений уравнений, расчетных диаграмм различного рода, полезных геометрических диаграмм и сотни сеток характеристик для анализа, сравнения и расчетов при изучении задач орбитального полета.

Диаграммы годографа скорости

При изучении космического полета очень важна графическая интерпретация скорости. Для этой цели имеется полезная и эффективная полярная диаграмма скорости по траектории, называемая *годографом*.

ГОДОГРАФ И ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

В статье, опубликованной в 1961 г.*, Э. В. Поль описывает построение и способ использования *годографа* — нового графического метода для быстрого определения географического положения, высоты и скорости баллистических ракет. Предполагается, что траектория полета представляет собой кеплеровский эллипс, а Земля сферическая.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Круговая полярная диаграмма скорости по траектории является основой для построения треугольника, предназначенного для определения скорости, угла наклона траектории, угла до апогея, дальности, высоты и времени до и после момента прохождения апогея для баллистической ракеты в любой момент вдоль ее траектории. Эта диаграмма, которую легко вычертить, пригодна для любой траектории.

* E. W. Paul, The Hodograph and Ballistic Missile Trajectory Problems, Aerospace Eng., 20: 24—25, 70—72, February, 1961. Эрвин В. Поль — научный сотрудник Группы технологии вычислительных машин и систем обработки данных при Отделении Эйр Арм фирмы Вестингауз Электрик, Балтимор, штат Мэриленд.

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ

На рис. 40 показана эллиптическая траектория баллистической ракеты, запущенной с поверхности Земли, и соответствующий годограф скорости по траектории. Чтобы построить диаграмму, начинаем с заданных значений скорости V_0 , угла наклона траектории полета γ_0 и вектора положения r_0 . Радиус годографического круга

$$\varrho = \mu/H,$$

где μ — гравитационная постоянная,

$$\mu = gr_e^2;$$

g — гравитационное ускорение на поверхности Земли;

r_e — радиус Земли;

H — постоянный момент количества движения,

$$H = r_0 V_0 \gamma_0.$$

Теперь нарисуем полукруг MP с диаметром d , удовлетворяющим уравнению

$$d^2 = \left(\frac{\mu}{H}\right)^2 - \frac{\mu}{a},$$

где a — большая полуось эллипса траектории:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{V_0^2}{\mu}.$$

Точка P — полюс, из которого проводятся векторы скорости после построения треугольника MPK , для определения следующих величин:

1) угла в апогее Φ , скорости V и угла наклона траектории γ , соответствующих заданной высоте h ;

2) общей горизонтальной дальности $R = 2r_e \Phi_R$;

3) высоты h , соответствующей заданному углу до апогея Φ ;

4) высоты h , соответствующей заданной скорости V ;

5) угла до апогея Φ , скорости V и высоты h , соответствующих заданному углу наклона траектории γ ;

6) времени t , потребного для достижения ракетой апогея из заданного положения, или времени, прошедшего с момента прохождения апогея до заданного положения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ДИАГРАММЕ

Чтобы решить шесть перечисленных задач, поступаем следующим образом.

1. На рис. 41 показано, как построить треугольник MPK для заданной высоты h . Заметим, что точка S делит радиус круга ϱ на две части: $SK = V \cos \gamma$ и $MS = \varrho - V \cos \gamma$; так как $H = rV \cos \gamma$,

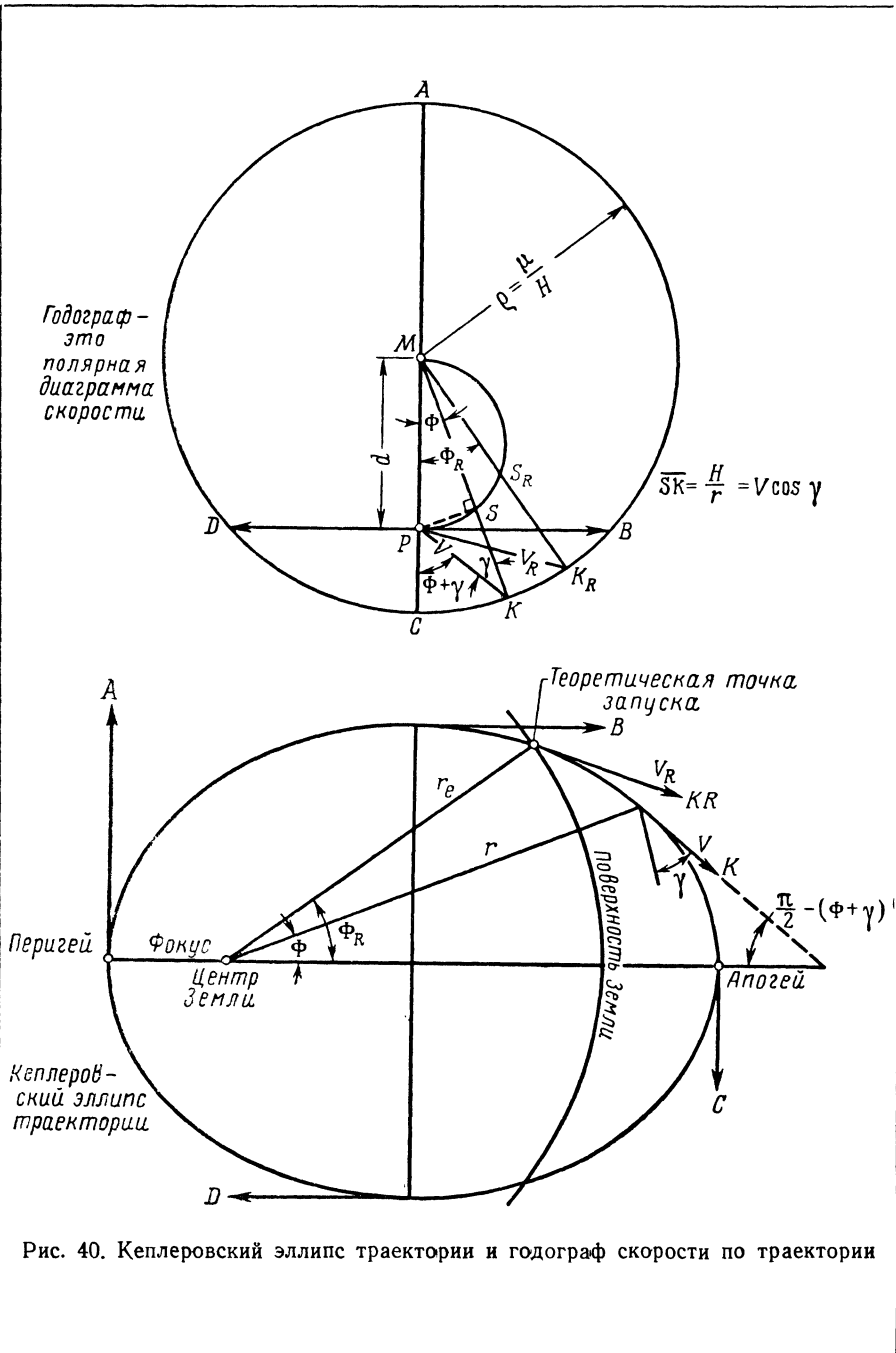


Рис. 40. Кеплеровский эллипс траектории и годограф скорости по траектории

то $SK = H/r$. Находим значение вектора положения r из уравнения $r = h + r_e$ и откладываем величину H/r , чтобы получить точку T . Из точки M , как из центра, радиусом MT проводим дугу TS , чтобы определить точку S на полуокружности MP . Продолжая линию MS до точки K на географическом круге, получаем треугольник MPK . Сторона PK дает скорость V , угол MKP дает угол γ , а угол PMK — угол Φ .

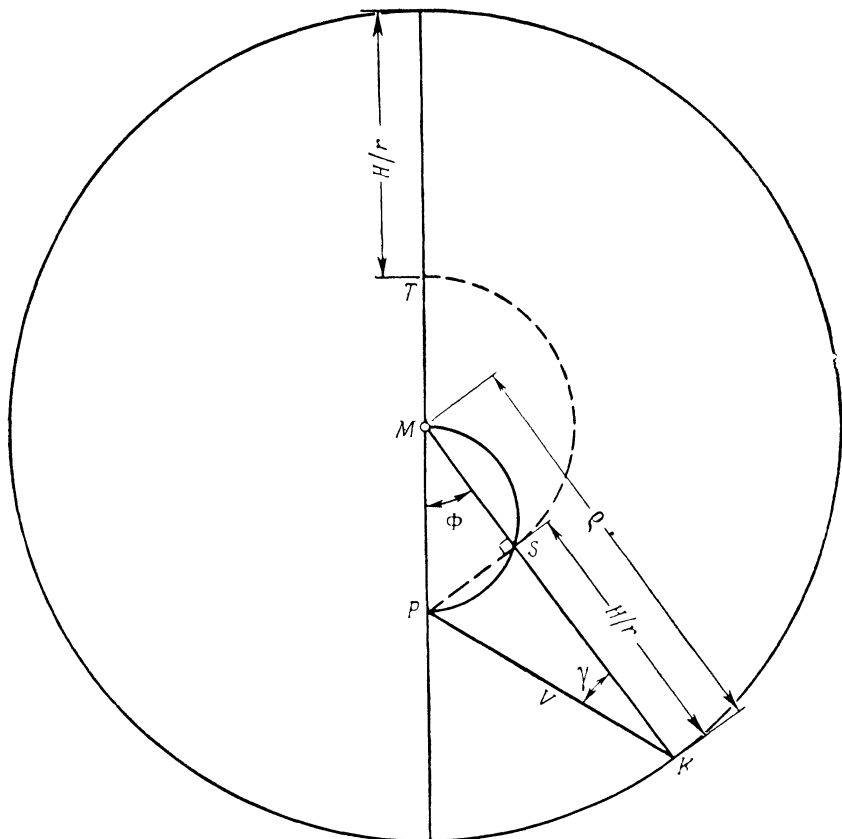


Рис. 41. Построение треугольника MPK для заданной высоты h

2. В этой задаче $h=0$ и $r=r_e$. Находим точки T и S так же, как и в задаче 1, но в этом случае точка S становится точкой S_R (показанной на рис. 40) и получается треугольник MPK_R (см. рис. 40). Тогда угловая дальность есть Φ_R , а общая горизонтальная дальность $R=2r_e\Phi_R$.

3. Строим треугольник MPK с заданным углом Φ и находим SK , как показано на рис. 41.

Потребную высоту вычисляем по уравнению

$$h = r_e - \frac{1}{H/r} = r_e \frac{S_{RK} R}{SK} - 1.$$

4. Из точки P , как из центра, заданным радиусом V проводим дугу до пересечения с кругом годографа в точке K . Достраиваем

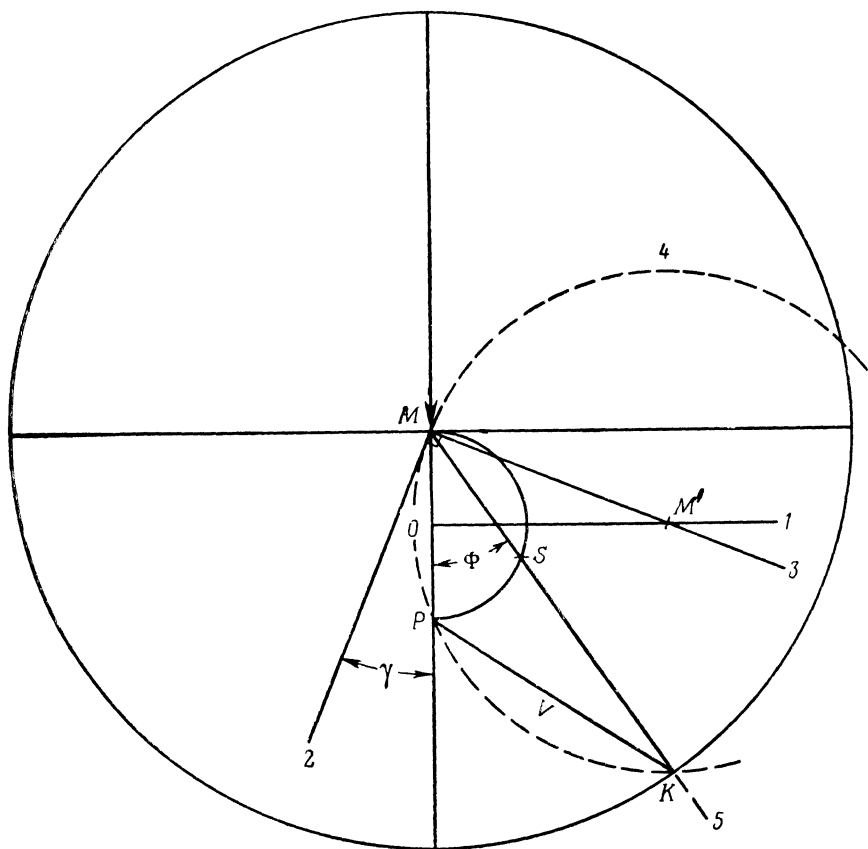


Рис. 42. Построение треугольника MPK для заданного угла наклона траектории γ

треугольник MPK и определяем высоту h по r_e и SK так же, как в задаче 3.

5. На рис. 42 показано построение треугольника MPK при заданном угле наклона траектории γ . Проводим линии и пунктирные дуги в порядке, указанном пятью цифрами (1—5). Точка O является центром полуокружности MP . Это построение определяет положение точки K . Потребный угол Φ и скорость V определяются

по диаграмме, а необходимая высота h рассчитывается так же, как в задаче 3.

6. На рис. 43 для определения времени полета к апогею или от него используются вспомогательные линии PD и PW . Уравнение

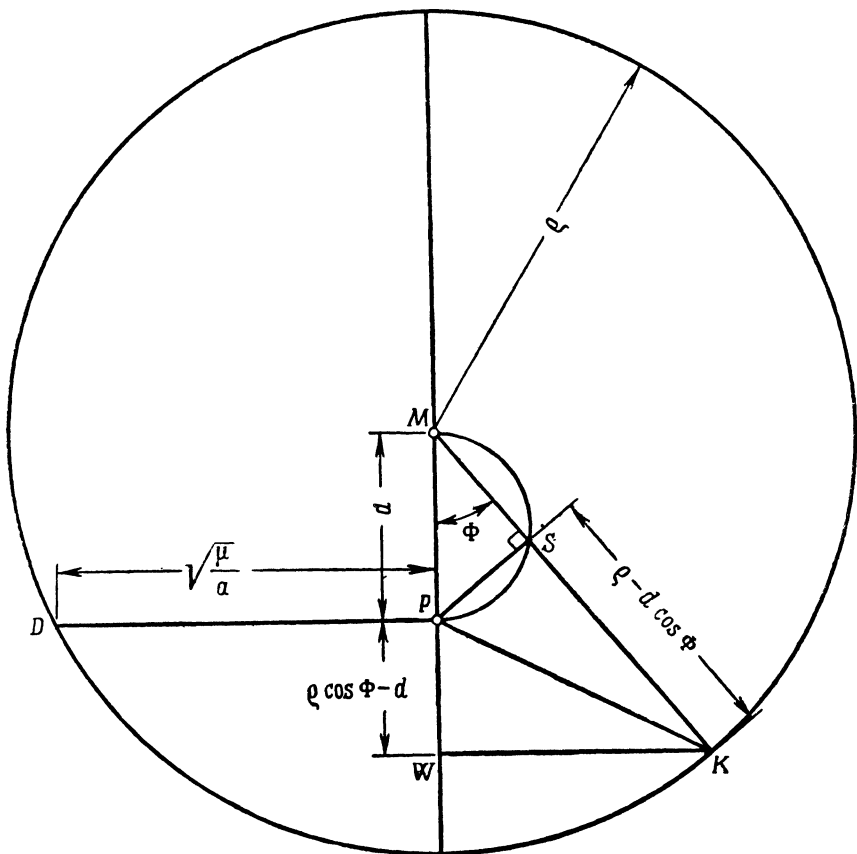


Рис. 43. Треугольник MPK с вспомогательными линиями PD и PW для определения времени полета

Кеплера для определения продолжительности полета имеет следующий вид:

$$t = \frac{1}{n}(E + e \sin E),$$

где t — время, необходимое для перехода ракеты из некоторого мгновенного положения в положение апогея;

n — средняя угловая скорость;

E — эксцентрисическая аномалия;

e — эксцентриситет траектории.

Значения n , E и e получены из годографа с помощью следующих уравнений:

$$n = \frac{(PD)^3}{\mu}; \quad \cos E = \frac{PW}{SK}; \quad e = \frac{d}{q}.$$

Численные результаты с точностью, даваемой логарифмической линейкой, обычно приемлемы.

Годограф используется при решении задач для определения траекторий с минимальной затратой энергии для дальностей 11 000, 9000 и 7000 км. Таблица дает математические формулы для параметров годографа q и d и момента количества движения H в функции начальных значений в соответствии с:

- 1) мгновенными значениями скорости, угла наклона траектории полета и высоты;
- 2) дальностью и углом наклона траектории полета в теоретической точке старта;
- 3) дальностью траектории с минимальной затратой энергии.

ПОЛЯРНЫЙ ГОДОГРАФ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ

В 1961 г. С. П. Альтман и Дж. С. Пистинер опубликовали статью*, где описано построение модифицированного полярного годографа для траекторий баллистических ракет, который упрощает применение диаграммы при анализе и построении траекторий.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Траектория баллистической ракеты по существу представляет собой эллиптическую орбиту, пересекающую поверхность Земли в точках запуска и падения ракеты. Полярный годограф, модифицированный посредством преобразования поверхности Земли в прямую линию, дает возможность получить все характеристики траектории, необходимые для их анализа и построения. Годограф для траектории с минимальной затратой энергии есть круговой сегмент ниже горизонтальной линии диаграммы.

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯРНОГО ГОДОГРАФА

На рис. 44 показана траектория баллистической ракеты, представляющая собой эллиптическую орбиту, в одном из фокусов которой находится центр Земли, и пересекающая поверхность Земли

* S. P. Altman and J. S. Pistiner, Polar Hodograph for Ballistic Missile Trajectories, ARS J., 31:1592—1594, November, 1961. Сэмюэль П. Альтман — руководитель Отдела анализа систем и их перспективного развития в Центре космической техники фирмы Джeneral Электрик, Филадельфия, штат Пенсильвания; Джозеф С. Пистинер — главный инженер Отдела по навигации и управлению космическими аппаратами фирмы Юнайтед Эйркрафт, Фармингтон, штат Коннектикут.

в точках запуска и падения ракеты. Соответствующий полярный годограф, который дает скорость в любой точке этой орбиты, показан на рис. 45. Этот тип годографа отличается от полярного годографа, описанного Э. В. Полем в последней работе, так как в нем не используются полуокружность MP и треугольник MPK .

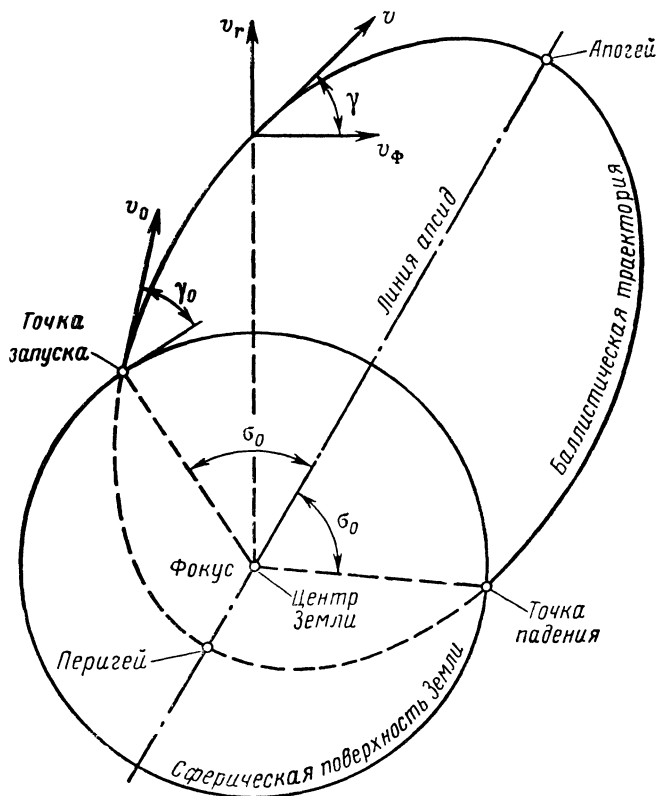


Рис. 44. Траектория баллистической ракеты относительно Земли

На рис. 45 система координат состоит из горизонтальной оси, представляющей радиальную скорость V_r , и вертикальной оси, представляющей нормальную скорость V_ϕ . Центр круга годографа расположен на расстоянии C от начала, которое является параметром орбитальной скорости, выраженным в величинах ее нормальной компоненты; радиус этого круга R — параметр орбитальной скорости, выраженный в величинах его радиальной компоненты.

Уравнение круга годографа имеет вид

$$R^2 = v_r^2 + (v_\Phi - C)^2,$$

где v_r и v_Φ — компоненты линейной скорости.

На рис. 45:

Φ — истинная аномалия положения ракеты на орбите;
 σ — половина общей угловой дальности;

γ — угол наклона траектории полета, определяющий
 угол между осью V_Φ и скоростью v .

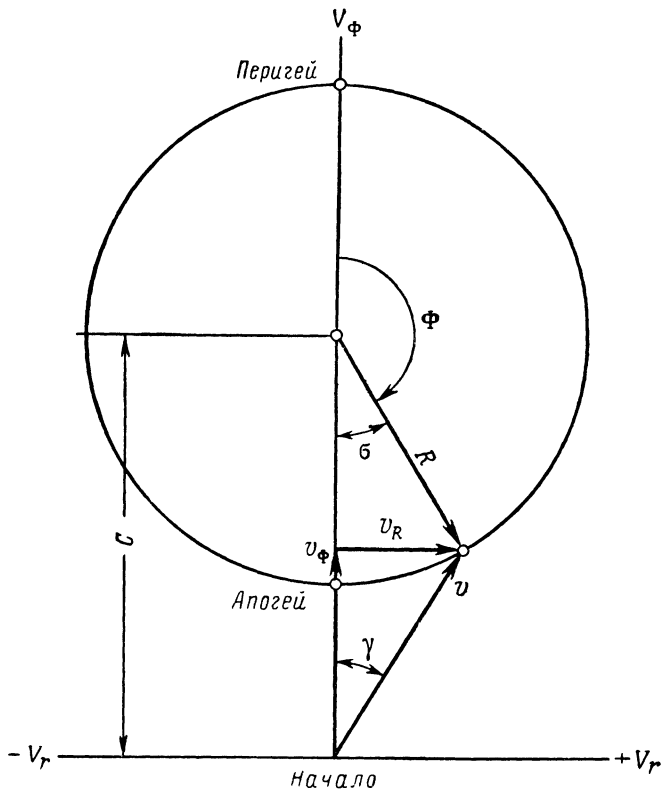


Рис. 45. Полярный годограф орбиты

Согласно рис. 45 имеем:

$$v_r = R \sin \Phi; \quad (1)$$

$$v_\Phi = C + R \cos \Phi; \quad (2)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\Phi^2 = C^2 + R^2 + 2CR \cos \Phi.$$

Эксцентриситет и большая полуось эллипса определяются соответственно уравнениями

$$e = \frac{R}{C};$$

$$a = \frac{\mu}{C^2 + R^2}, \quad (3)$$

где μ — гравитационная постоянная.

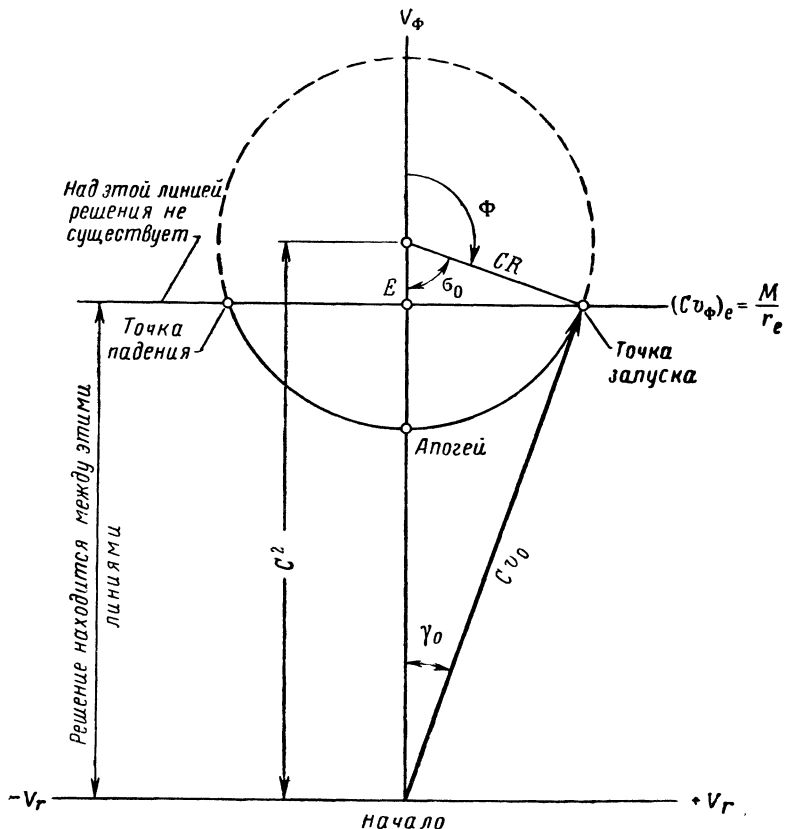


Рис. 46. Модифицированный полярный годограф траектории баллистической ракеты

Умножая уравнения (1) и (2) на C , получаем уравнения

$$Cv_r = CR \sin \Phi;$$

$$Cv_\phi = C^2 + CR \cos \Phi,$$

которые описывают модифицированный полярный годограф (рис. 46).

На этом рисунке угловые соотношения постоянны, а прямая, параллельная оси V_r , представляет собой величину $Cv_\phi = \mu/R$. Точка E представляет годограф круговой орбиты на поверхности Земли, где r_e — орбитальная высота, а горизонтальная линия, проходящая через точку E и определяемая уравнением $(Cv_\phi)_e = \mu/r_e$, есть геометрическое место всех точек, в которых траектория пересекает поверхность Земли.

ТРАЕКТОРИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

Рис. 46 показывает, что все траектории баллистических ракет представляются дугой круга годографа от точки запуска через апогей на оси V_ϕ до точки падения и что все решения находятся ниже горизонтальной линии, проходящей через точку E . Если скорость запуска v_0 и угол наклона траектории полета при запуске γ_0 заданы, то выбираем приемлемую длину для Cv_0 и масштаб для v_0 ; проводим линию Cv_0 из начала к точке запуска и используем величину C^2 для определения положения центра круга годографа. Радиус этого круга есть расстояние до точки запуска. Для любой заданной точки на траектории баллистической ракеты этот модифицированный полярный годограф дает значения σ , γ , Cv_ϕ и Cv_r , что обеспечивает возможность простого расчета v , v_ϕ , v_r , r и времени полета.

ТРАЕКТОРИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ЗАТРАТОЙ ЭНЕРГИИ

На рис. 47 показан модифицированный полярный годограф для одной баллистической траектории, которая требует минимальной скорости запуска v_0 при заданной угловой дальности. Чтобы построить этот годограф, используем уравнение

$$C^2 = \frac{\mu}{r_e \sin \sigma_0}. \quad (4)$$

Радиус круга определяется по уравнению

$$CR = \frac{\cos \sigma_0}{1 + \sin \sigma_0} C^2.$$

Из точки A под углом σ_0 к линии $(Cv_\phi)_e$ проводим линию AB до точки B на оси V_r . Из тригонометрических соотношений и уравнения (4) получаем

$$AB = C^2$$

и используем это равенство для определения положения центра круга. Проводим радиус под углом σ_0 к оси V_Φ до пересечения с

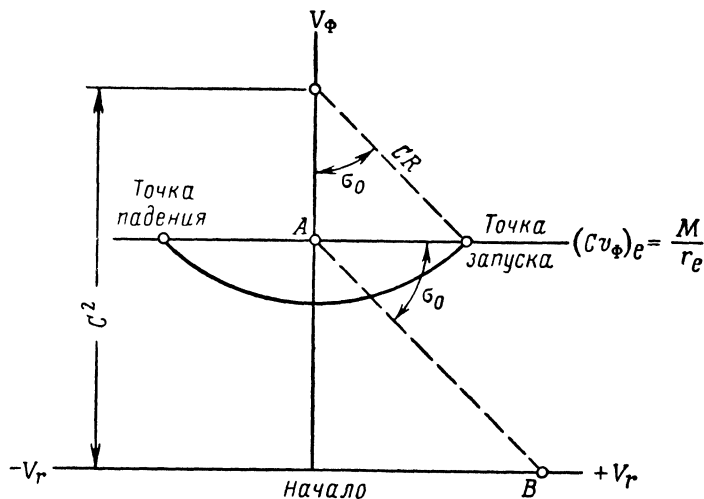


Рис. 47. Модифицированный полярный годограф траектории с минимальной затратой энергии

линией $(Cv_\Phi)_e$ в точке запуска; радиусом CR проводим дугу до точки падения. Этот круговой сегмент и есть годограф траектории с минимальной затратой энергии.

ГОДОГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕХОДОМ С ОДНОЙ ОРБИТЫ НА ДРУГУЮ

В статье*, опубликованной в 1961 г., С. П. Альтман и Дж. С. Пистинер дают описание использования модифицированных полярных годографов для графического анализа задач, связанных с переходом с одной орбиты на другую.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Полярные годографы эллиптической орбиты в координатах «радиальная компонента скорости — нормальная компонента скорости» используются для графического построения компланарной орбиты перехода между двумя произвольно выбранными точками на начальной и конечной орбитах. Решения с использованием годографа дают полные характеристики орбиты перехода, включая углы наклона траектории полета между векторами скорости в точках перехода и требуемые приращения скорости.

S. P. Altman and J. S. Pistiner, Hodograph Analysis of the Orbital Transfer Problem for Coplanar, Nonaligned Elliptical Orbits, ARS J., 31:1217—1225, September, 1961.

ПОСТРОЕНИЕ ГОДОГРАФА ПЕРЕХОДА

Когда космический аппарат достигает определенной точки I на его начальной орбите A , к нему прикладывается импульс тяги, который изменяет вектор скорости и заставляет космический аппарат двигаться по орбите перехода T . Когда космический аппарат достигает точки 2 , второе изменение скорости выводит его на конечную орбиту B . Хотя эти импульсы тяги прикладываются за короткий промежуток времени, предполагается, что каждое изменение скорости мгновенно и что вдоль орбиты перехода T не действует никакая сила.

Так как каждую эллиптическую орбиту описывает пара годографических параметров и так как скорости представляются графически, то переход с одной орбиты на другую посредством мгновенных изменений скорости легко получить графическим построением.

Для удобства направление вектора скорости на годографе выбирается таким же, как и его направление на эллиптической орбите в пространстве. На рис. 48 представлен орбитальный годограф в прямолинейных координатах, которые сохраняют направление линейной скорости в пространстве и ось \dot{x} которых параллельна линии апсид орбиты, а ось \dot{y} перпендикулярна к ней. \dot{x} представляет собой компоненту линейной скорости, параллельную линии апсид, а \dot{y} — компоненту скорости, перпендикулярную к линии апсид орбиты. Модифицированный годограф, представленный на рис. 49, поддерживает заданное направление вектора скорости и сохраняет произведение Cv_Φ , графически удовлетворяющее уравнениям

$$Cv_r = CR \cdot \sin \Phi$$

и

$$Cv_\Phi = C^2 + CR \cdot \cos \Phi,$$

справедливым для верхнего круга с радиусом CR и центром, расположенным на оси V_Φ на расстоянии C^2 от начала.

Здесь C — параметр скорости на орбите (расстояние центра годографа);

R — параметр скорости на орбите (радиус круга годографа);

v_r — радиальная компонента линейной скорости;

v_Φ — нормальная компонента линейной скорости;

Φ — истинная аномалия космического аппарата на орбите.

Для начальной и переходной орбит, линии апсид которых совпадают, на рис. 50 показаны модифицированные годографы, удовлетворяющие всем условиям мгновенного изменения скорости в точке перехода I . Заметим, что параллельные линии Φ_{A1} и Φ_{T1} , которые представляют собой радиальные линии между центрами космического аппарата и центрального тела, пересекают соответствующие им круги в точках, лежащих на линии Cv_Φ .

На рис. 51 показаны начальная и переходная орбиты, линии апсид которых не совпадают, а пересекаются в общем фокусе двух

эллипсов, образуя друг с другом угол $\alpha = \psi_T - \psi_A$. ψ — это линия апсид орбиты в перигее. Начальная и переходная орбиты пересекаются в точке I , как показано на рис. 51. Центры соответствующих кругов годографа лежат на линиях ψ_A и ψ_T , которые образуют угол α в начале годографа. Располагаем линию Cv_Φ на одинако-

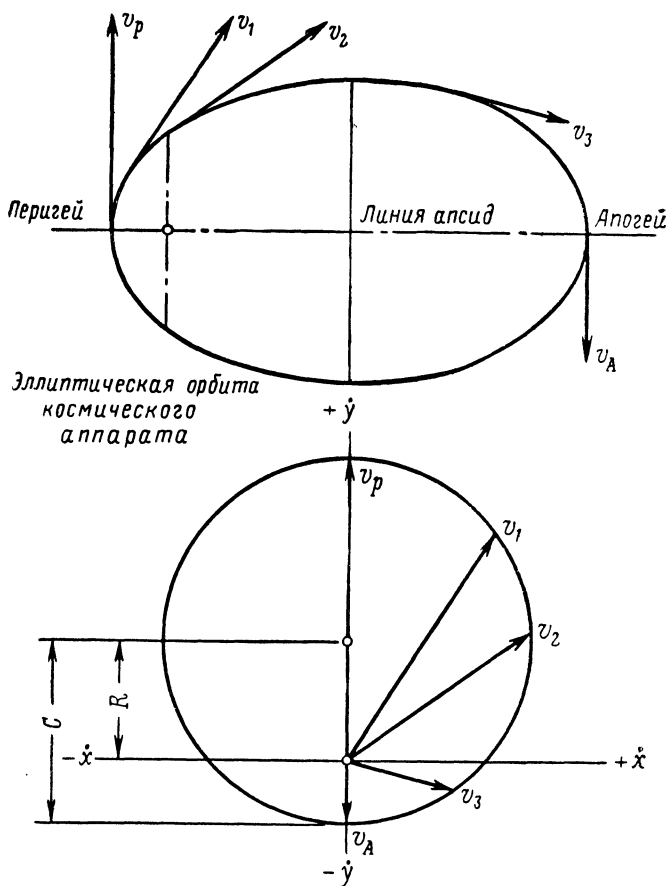


Рис. 48. Орбитальный годограф в прямолинейных координатах

вом расстоянии от начала для обоих годографов и проводим ее перпендикулярно линии ψ . Проводим две параллельные линии Φ , пересекающие соответствующие круги годографа в точках на линии Cv_Φ .

На рис. 52 это построение годографа упрощено вращением линии ψ_A вокруг начала годографа вместе с кругом $C_A R_A$ и линией Cv_Φ до тех пор, пока линия ψ_A не совпадет с линией ψ_T на оси V_Φ .

Здесь две линии $Cv\Phi$ совпадают, а линия Φ_{A1} пересекает линию Φ_{T1} , образуя с ней угол α .

На рис. 53 показано построение полного годографа для начальной, переходной и конечной орбит. Заметим, что сумма углов α и η ,

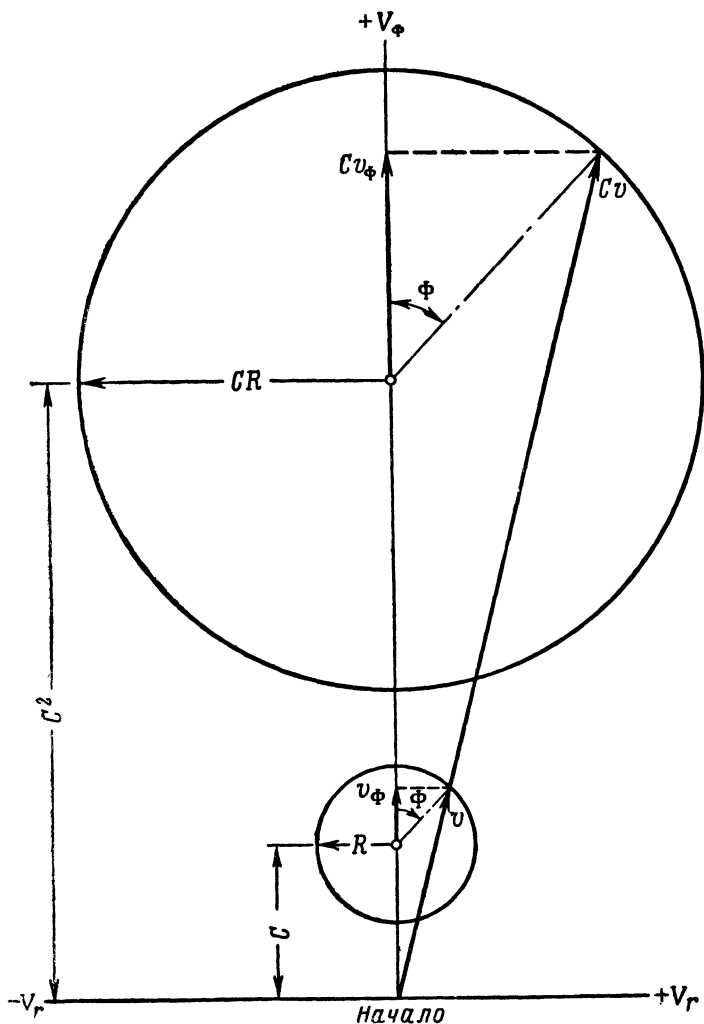


Рис. 49. Модифицированный годограф, сохраняющий заданное направление вектора скорости в пространстве

образованных пересекающимися линиями Φ для точек перехода 1 и 2, должна удовлетворять уравнению

$$\alpha + \eta = \psi_B - \psi_A.$$

Если угол α выбран, то можно определить значение η , и наоборот.

На рис. 54 показано построение годографа для определения потребного изменения скорости в данной точке перехода. Для точки I находим начальную орбитальную скорость v_{A1} делением $C_A v_{A1}$ на

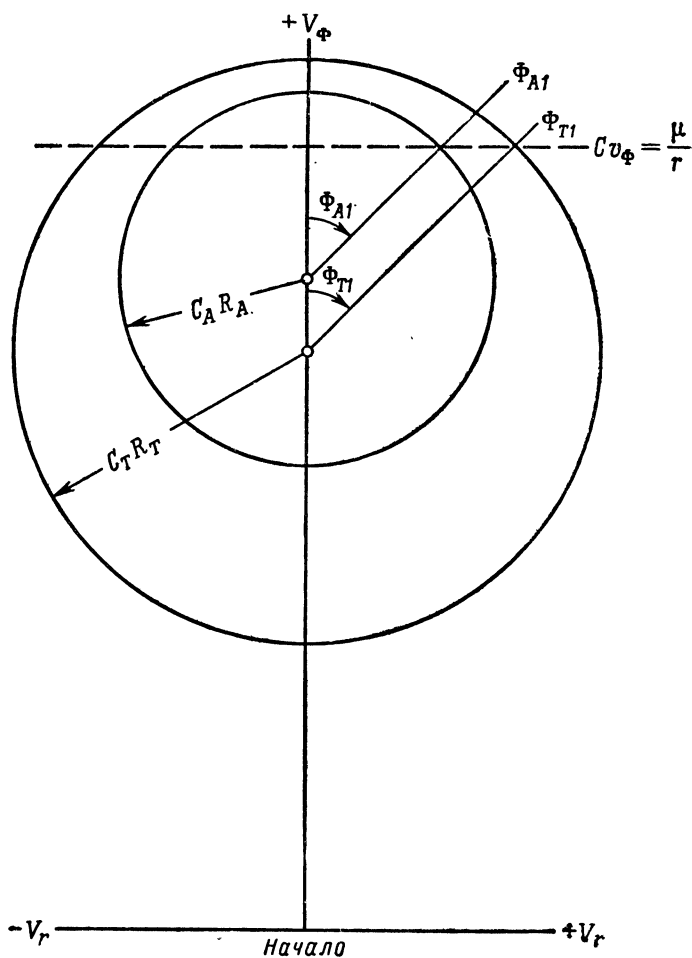


Рис. 50. Модифицированные годографы для двух орбит, линии апсид которых совпадают

подходящее значение C_A ; подобным же образом находим скорость v_{T1} на орбите перехода. Затем строим векторный треугольник и получаем полное изменение скорости в точке перехода I по вектору Δv_I , как показано на рис. 54.

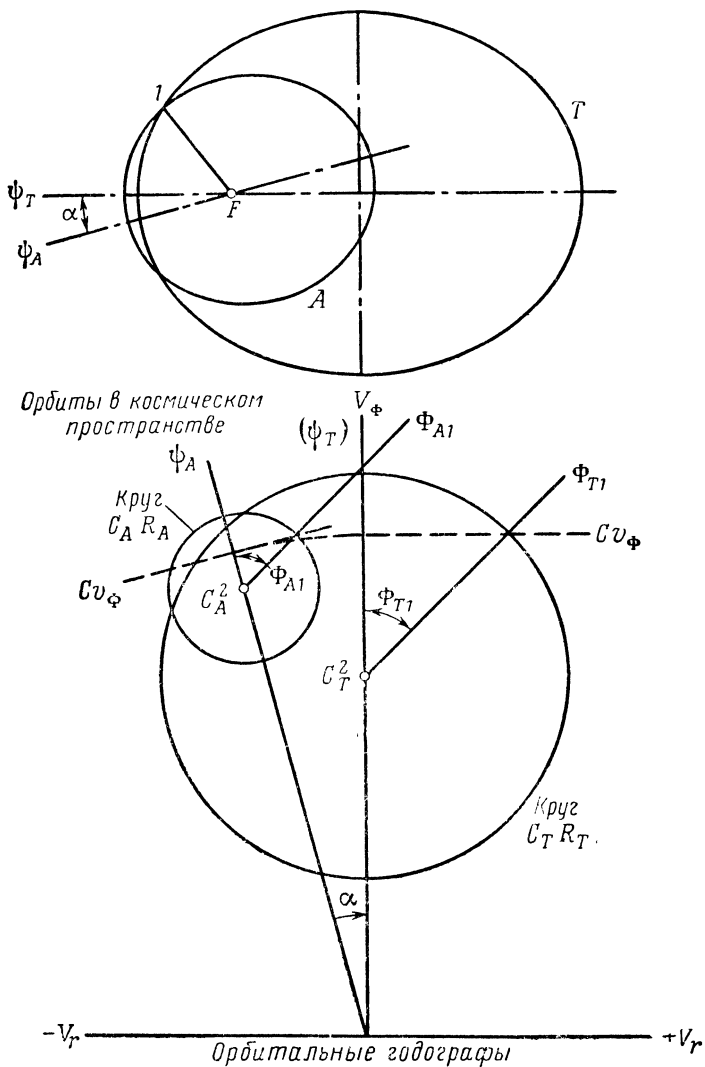


Рис. 51. Построение годографов для двух орбит, линии апсид которых не совпадают

ПРИМЕНЕНИЕ

При расчете орбит перехода годографический анализ траекторий находит полезное применение в следующих случаях:

- 1) переход между заданными точками;
- 2) переход с произвольным углом наклона траектории;
- 3) переход Хомана.

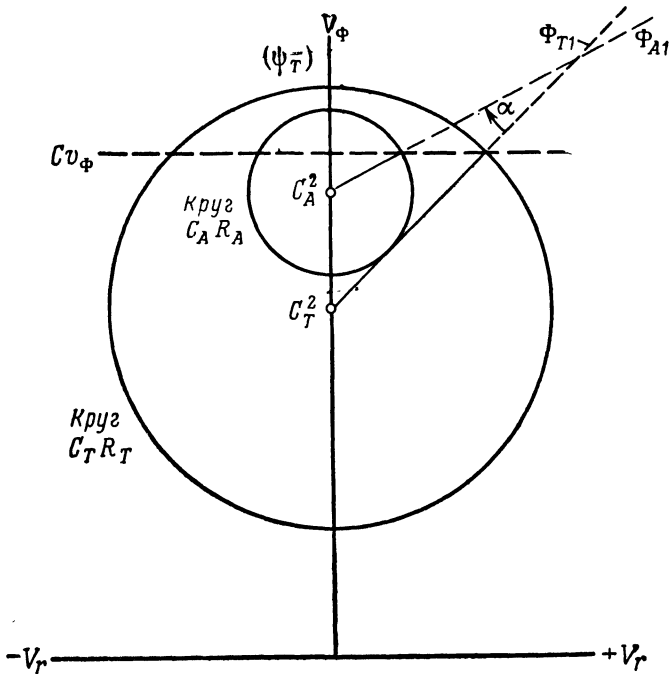


Рис. 52. Конечный годограф для двух орбит, линии апсид которых не совпадают

Для перехода между заданными точками начальная и конечная орбиты заданы, а точки перехода произвольно фиксированы. Выбор орбиты перехода зависит от того, какой из перечисленных ниже параметров является управляющим:

- 1) время перехода;
- 2) углы пересечения орбит в точках перехода;
- 3) общее изменение скорости, потребное для перехода.

Когда начальная и конечная орбиты заданы, ограничения, налагаемые на управление положением космического аппарата в пространстве, могут потребовать точно установленного угла наклона траектории в одной из точек перехода, которая определяет орбиту перехода.

Хомановские полуэллиптические орбиты перехода требуют касания орбиты перехода с начальной и конечной орбитами. Если обе эти орбиты эллиптические, то их линии апсид должны совпадать, а точки касания переходной орбиты будут лежать на противоположных концах их больших осей. В этом случае возможны два эллипса перехода Хомана. Конструкция годографа состоит из пере-

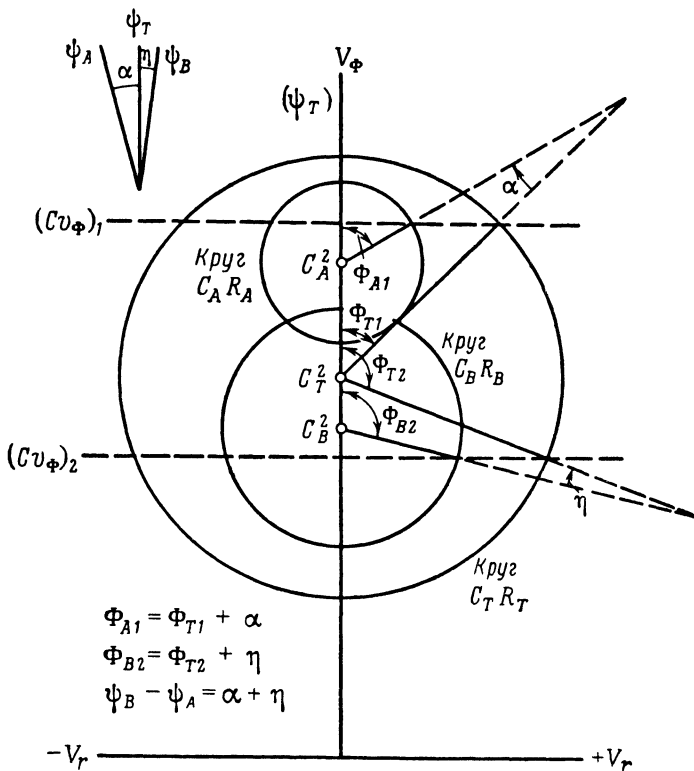


Рис. 53. Годограф для задачи полного перехода между заданными точками

крывающих друг друга кругов для начальной и конечной орбит, с одним кругом годографа перехода, расположенным внутри обоих обычных орбитальных кругов и касательным к ним; второй круг годографа перехода находится вне обоих обычных орбитальных кругов и касателен к ним. Все центры кругов и точки касания лежат на оси V_Φ годографа.

Анализ задач, связанных с переходом с одной орбиты на другую, с помощью годографической интерпретации дает удовлетворительные решения и способствует полному пониманию всех рассматриваемых взаимосвязей.

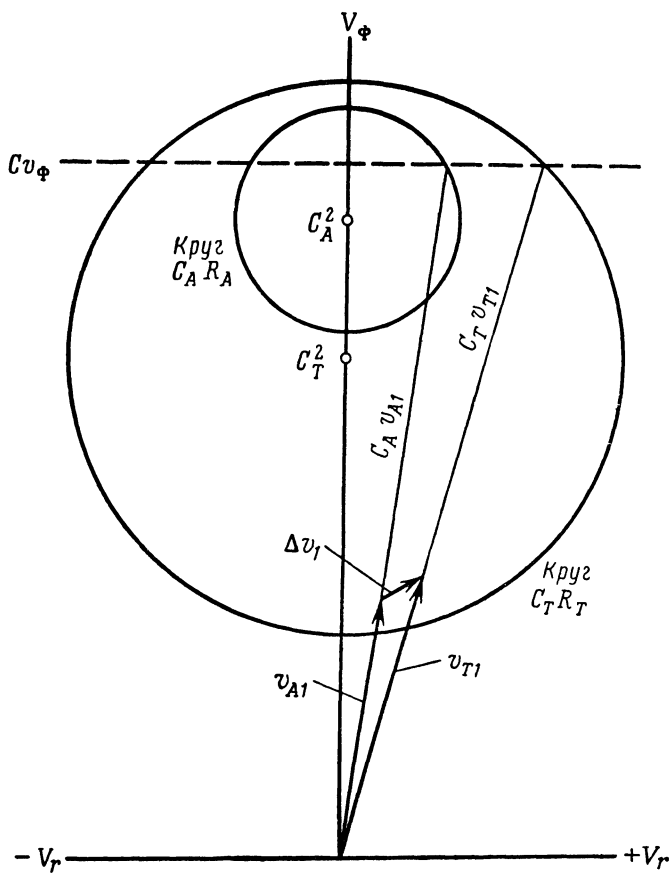


Рис. 54. Определение потребного изменения скорости в точке перехода

Библиография

с аннотациями

1. Malina, F. J., and Martin Summerfield, Problem of Escape from the Earth by Rocket, J. Aerospace Sci., 14: 471—480, August, 1947. (Ф. Дж. Малина и М. Саммерфилд, Задача о выходе ракеты из сферы притяжения Земли.)

Выводятся фундаментальные уравнения прямолинейного движения ракеты и исследуется влияние следующих расчетных параметров:

- 1) эффективной скорости истечения струи;
- 2) отношения массы топлива к начальной массе ракеты;
- 3) времени активного полета;
- 4) отношения начальной массы к максимальной площади поперечного сечения;
- 5) коэффициента аэродинамического сопротивления, отнесенного к этой площади.

Семейства кривых на сетках характеристик показывают параметры одноступенчатых и многоступенчатых ракет с постоянной тягой и постоянным ускорением.

2. Herrick, S., and R. M. L. Baker, Jr., Orbits, Aviation Age, 28: 70—71, 73—77, March, 1958. (С. Геррик и Р. М. Л. Бейкер, Орбиты.)

Диаграммы показывают орбиты для полетов к Марсу и Венере, траектории полета космического аппарата в виде конических сечений и смещение плоскости орбиты относительно некоторой опорной орбиты для определения возмущений в рамках проблемы движения двух тел. Обсуждение включает влияние трех типов сил, три основных метода для расчета возмущений и орбиты спутников с учетом действующих возмущений.

3. Callahan, F. P., Jr., Planetary Orbit Chart, J. Appl. Phys., 30: 444—445, March, 1959. (Ф. П. Каллаген, Диаграмма орбиты планеты.)

Построение и использование диаграммы $x-y$, на которой вся эллиптическая орбита может быть нанесена по заданным начальным параметрам и скорости в каждой точке орбиты. Высота апоцентра и перигея может быть получена прямо с диаграммы без построения всей орбиты.

4. Edelbaum, T. N., Some Extensions of the Hohmann Transfer Maneuver, ARS J., 29: 864—865, November, 1959. (Т. Н. Эдельбаум, Некоторое развитие маневра перехода Хохмана.)

Семейства кривых на безразмерных сетках характеристик показывают экономию в характеристической скорости при переходе между отдаленными круговыми орбитами, при переходе с орбиты Земли на разные расстояния в окосолнечное пространство и при гиперболическом уходе в бесконечность с помощью трехимпульсного маневра.

5. Mickelwait, A. B., Lunar Trajectories, ARS J., 29: 905—914, December, 1959. (А. Б. Микельвайт, Траектории полета к Луне.)

Для анализа пространственных траекторий полета к Луне с целью посадки на Луну и выхода спутника на орбиту вокруг Луны используются сетки характеристик, показывающие связь характеристик траектории космического аппарата с положением Луны в момент встречи, а также диаграмма, показывающая изменение векторного параметра встречи вследствие ошибок в конце активного участка и коррекции на среднем участке траектории.

6. Greenwood, S. W., Solar Probes, J. Roy. Aeron. Soc., 64: 102—103, February, 1960. (С. В. Гринвуд, Ракеты, запущенные в сторону Солнца.)

Диаграмма сравнивает орбиты вокруг Солнца. По диаграмме $x-y$ определяется скорость, потребная космическому аппарату для выхода на эллиптическую орбиту вокруг Солнца. Обсуждение включает проблемы прямого падения на Солнце, полетов вне орбиты Земли и ухода из солнечной системы.

7. Rider, L., Ascent from Inner Circular to Outer Coplanar Elliptic Orbits, ARS J., 30: 254—258, March, 1960. (Л. Райдер, Выход с внутренней круговой на внешние компланарные эллиптические орбиты.)

При анализе общих энергетических требований с целью определения наиболее экономичного перехода исследуется семейство кривых на безразмерной сетке характеристик, показывающее изменение характеристической скорости с изменением точки приложения второго импульса и орбитального периода. Для двухимпульсного перехода графический метод позволяет выбрать определенную траекторию перехода. Анализ показывает, что наиболее экономичным является вывод на конечную орбиту в ее апогее.

8. Baerz, A. V., Graphical Derivation of the Inverse-Square

Law of Gravitation from an Elliptic Orbit and Kepler's Law of Areas, Am. J. Phys., 28: 254—259, March, 1960. (А. В. Баец, Графическая интерпретация закона гравитации квадрату расстояния и кеплерова закона площадей на примере эллиптической орбиты.)

Графическое построение, в котором используются тангенциальные и радиальные векторы на эллипсе, показывает, что радиус-вектор описывает равные площади в равные промежутки времени и подтверждает закон обратной пропорциональности гравитации квадрату расстояния.

9. Pistiner, J. S., Some Characteristics of the Planar Satellite Orbit, ARS J., 30: 275—277, March, 1960. (Дж. С. Пистинер, Некоторые характеристики плоской орбиты спутника.)

Семейства кривых на диаграммах x — y вносят ясность в понимание важных орбитальных характеристик спутников путем представления истинной аномалии в качестве функции времени, а радиального и нормального ускорений в качестве функций истинной аномалии и эксцентриситета. Построена простая диаграмма орбитальной энергии, которая используется для определения эллиптических орбит, удельная энергия и эксцентриситет которых заданы.

10. Bonomo, P. J., Curves for Rapid Determination of Orbital Transfer Requirements, ARS J., 30: 371—372, 421, April, 1960. (П. Дж. Бонемо, Кривые для быстрого определения необходимых условий перехода с одной орбиты на другую.)

Безразмерные кривые скорости в функции отношений радиусов определяют минимальную потребную энергию для перехода с одной орбиты на другую в поле центральной силы. Кривые универсальны и могут быть применены к любой планете как к первичному источнику гравитации. Четыре примера показывают, как используются кривые для перехода с орбиты полета вокруг Земли на орбиты полета вокруг Луны, Марса и Венеры.

11. Greenwood, S. W., Probing Interplanetary Space, J. Roy. Aeron. Soc., 64: 299—301, May, 1960. (С. В. Гринвуд, Исследование межпланетного пространства с помощью космических зондов.)

Диаграмма показывает орбиту перехода для искусственного спутника Солнца. Диаграммы x — y дают период вращения поверхности Солнца на различных широтах, радиус орбиты, обеспечивающий стационарное наблюдение на различных широтах, и время перехода для полетов к внешним планетам. Обсуждение включает требования к характеристикам спутника, время перелета и геометрические свойства Галактики.

12. Tempelman, W., Graphical Approach to the Determination of the Eccentricity and the Perigee Angle, J. Aerospace Sci., 27: 630—631, August, 1960. (У. Темпельман, Графический подход к определению эксцентриситета и угла перигея.)

Векторное построение на диаграмме $x-y$ радиальной компоненты скорости в функции ее горизонтальной компоненты дает возможность определить эксцентриситет и угол перигея в проблеме двух тел для заданных начальных значений скорости и угла. Поясняются четыре специальных случая.

13. Mickelwait A. B., *Orbit Mechanics Holds Key to Space Flight, Space/Aeron.*, 34: 58—61, August, 1960. (А. Б. Микельвайт, Орбитальная механика — ключевая проблема космического полета.)

Диаграммы иллюстрируют геометрию эллиптической орбиты спутника и показывают влияние неучтенных переменных на космические траектории путем сравнения ранее рассчитанной траектории с траекторией, уточненной по данным полета. Приложения орбитальной механики к расчетам и построению траекторий включают модель с одним центральным телом, дополнительные силовые центры и две группы метрических методов вычисления орбит.

14. Gammal, A. A., *Predicting the Performance of Re-entry Bodies, Aerospace Eng.*, 34: 55—58, September, 1960. (А. А. Гаммал, Предварительный расчет характеристик входа в атмосферу.)

Даны сетки характеристик для предварительного расчета условий входа в атмосферу при проектировании ракет и спутников. Диаграммы показывают изменение скоростного напора, изменение удельного теплового потока в точке полного торможения, изменение по времени: высоты, скорости, отрицательного ускорения (торможения), удельного теплового потока в точке полного торможения, суммарной перегрузки при торможении и общего количества тепла, подводенного в точке полного торможения, а также равновесной температуры стенки в точке полного торможения.

15. Patterson, G. B., *Graphical Method for Prediction of Time in Sunlight for a Circular Orbit, ARS J.*, 31: 441—442, March, 1961. (Дж. Б. Паттерсон, Графический метод предвычисления времени нахождения в зоне, освещенной Солнцем, для круговой орбиты.)

Для орбиты с фиксированными высотой и наклоном к экватору и с осью X , расположенной в экваториальной плоскости, нанесен в виде контурной карты процент времени нахождения в зоне, освещенной Солнцем, в функции угла между осью X и линией Земля—Солнце и угла между осью X и восходящим узлом орбиты. Прямые линии узлов на прозрачном транспаранте смещаются для того, чтобы предсказать, как изменяется время нахождения в зоне, освещенной Солнцем, вследствие орбитальной прецессии и движения Земли вокруг Солнца, а также показать, как влияет на это время момент запуска ракеты.

16. Straly, W. H., *Phasing Technique in Rendezvous, ARS J.*, 32: 620—626, April, 1962. (У. Г. Стрэли, Фазовые методы расчета встречи на орбите.)

Фазовые методы позволяют успешно выполнять встречу на орбите с большими допусками во времени старта, с малой затратой энергии и большим запасом времени для сближения (или стыковки). 90°-ная секторная диаграмма определяет продолжительность самого большого из возможных периодов, наиболее удобных для запуска, когда известны широта места запуска, наклон орбиты цели и угол маневрирования при запуске. Сетки характеристик дают скорости, потребные для фазового маневра на высоких и низких орбитах, и интервалы времени между моментами прохождения места старта через плоскость орбиты.

17. Cunningham, F. G., Calculation of the Eclipse Factor for Elliptical Satellite Orbits, ARS J., 32: 1399—1400, September, 1962. (Ф. Дж. Каннингем, Вычисление коэффициента затмения спутника, находящегося на эллиптической орбите.)

Геометрическим построением определяется доля орбитального периода, в течение которого спутник находится в тени Земли. Найдены точки, где орбита входит в прямой круговой цилиндр, представляющий собой полную тень Земли, и где она выходит из него.

18. Bender, D. F., Optimum Coplanar Two-impulse Transfers between Elliptic Orbits, Aerospace Eng., 21: 44—52, October, 1962. (Д. Ф. Бендер, Оптимальные компланарные двухимпульсные переходы между эллиптическими орбитами.)

Семейства кривых зависимости импульса от точки схода на шести диаграммах показывают соотношения 180°-ного перехода, котангенциального перехода и оптимального перехода с одной орбиты на другую для различных типов орбит. Сравнение проводится как для орбит с равным, так и для орбит с различным эксцентриситетом и показывает случаи как пересекающихся, так и не пересекающихся эллиптических орбит.

19. Cronin J. L., Jr., and R. E. Schwartz, Invariant Two-body Velocity Components, J. Aerospace Sci., 29: 1384—1385, November, 1962. (Дж. Л. Кронин и Р. Е. Шварц, Инвариантные компоненты скорости в проблеме двух тел.)

Принцип небесной механики, согласно которому вектор скорости в любой точке орбиты может быть разложен на две компоненты постоянной величины, одна из которых будет перпендикулярна к радиусу-вектору, а вторая — перпендикулярна к линии апсид, прилагается к расчету маневра, в котором добавляется угловое приращение скорости. Может быть использовано применительно к механике орбитальных полетов и к космической навигации.

20. Alouette, G. A., Payload vs. Orbital Altitude and Thrust, Space/Aeron., 38:82, November, 1962. (Дж. А. Алуэтт, Зависимость полезной нагрузки от высоты орбиты и от тяги.)

Диаграммы с логарифмическими осями, связывающие полезную нагрузку с высотой орбиты, представлены в виде функций начальной тяги при начальной тяговооруженности 1, 3 для обычных двух-

и трехступенчатых ракет-носителей, в которых используются обычные химические топлива во всех ступенях, и для перспективных двух- и трехступенчатых ракет-носителей, в которых используются обычные топлива для первых ступеней и жидкие водород и кислород — в верхних ступенях. В таблице приведены значения тяги для девяти ракет-носителей США.

Задачи для графического решения

Ниже представлены задачи для студентов, пригодные для решения в аудитории.

1. ЗАПУСК НА ЛУНУ АВТОМАТИЧЕСКОЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ СТАНЦИИ РЕЙНДЖЕР *

ВВЕДЕНИЕ

Лунная автоматическая научно-исследовательская станция типа Рейнджер запущена для осуществления мягкой посадки на Луну с целью исследования поверхности Луны. Используя принципы небесной механики и информацию, полученную с помощью радиолокаторов, нужно определить, будет ли совершена посадка на Луну, и приблизительное время полета к Луне.

Чтобы решить эту задачу, необходимо определить траектории движения Луны и автоматической станции Рейнджер и определить положение каждой из них на своей траектории в любой момент времени. Астрономические наблюдения обеспечивают необходимые данные относительно орбиты Луны и ее орбитального положения в любой момент времени. Радиолокационные наблюдения положения автоматической станции Рейнджер в начальной фазе ее восходящей траектории позволяют определить всю траекторию ее полета. Ньютоновская проблема двух тел показывает, что если массы двух тел сильно отличаются друг от друга, то орбита меньшего тела представляет собой коническое сечение, в одном из фокусов которого находится центр масс большего тела (см. орбиту тела D относительно тела C , показанную на рис. 8). Из проективной геометрии также известно, что только одна кривая конического сече-

* Задача составлена Робертом В. Босма, ассистентом профессора графики Принстонского университета, и используется на первом курсе обучения графике.

ния может быть проведена через пять заданных точек, лежащих в одной плоскости, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. На этой основе, пользуясь необходимыми данными радиолокационных наблюдений, можно построить полную траекторию полета автоматической станции Рейнджер.

Вскоре после запуска, в момент пересечения плоскости орбиты движения Луны вокруг Земли траекторией автоматической станции Рейнджер, эта последняя выводится на свою орбиту, лежащую в плоскости орбиты Луны. Эта точка вывода на орбиту, положение и время прохождения которой отмечаются радиолокатором, является начальной точкой орбиты автоматической станции Рейнджер, и время в этой точке принимается за нулевое (т. е. за начало отсчета времени). В этой начальной точке истинная аномалия автоматической станции Рейнджер θ_R равна 75° , а истинная аномалия Луны θ_M равна 130° . Истинная аномалия — это угол, с вершиной в фокусе, между радиальным направлением и направлением на перигей. Уравнение, связывающее орбитальную скорость массы с радиальным расстоянием массы от Земли, имеет следующий вид:

$$V^2 = V_1^2 + 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right),$$

где V — орбитальная скорость автоматической станции Рейнджер в любой точке орбиты;

V_1 — начальная орбитальная скорость автоматической станции Рейнджер (в точке вывода на орбиту);

G — гравитационная постоянная;

M — масса Земли;

R — радиальное расстояние автоматической станции Рейнджер от центра масс Земли;

R_1 — радиальное расстояние до точки вывода на орбиту.

На рис. 55 представлена кривая этого уравнения для радиальных расстояний, соответствующих этой задаче. Радиальные расстояния даны в тысячах километрах, а скорость — в тысячах километров в час.

Начальная орбитальная скорость автоматической станции Рейнджер, сообщенная ей ракетой-носителем, проверяется радиолокатором. Необходимо преобразовать данные, приведенные в виде кривой на рис. 55, в информацию, связывающую радиальное расстояние автоматической станции Рейнджер от Земли со временем ее вывода на орбиту.

Если кривую, приведенную на рис. 55, перестроить в виде зависимости величины, обратной орбитальной скорости, от радиального расстояния до Земли и затем проинтегрировать ее графически, то результирующая интегральная кривая даст зависимость радиального расстояния от времени. Зная положение Луны и траекторию полета автоматической станции Рейнджер, можно предсказать успех или неудачу посадки на Луну.

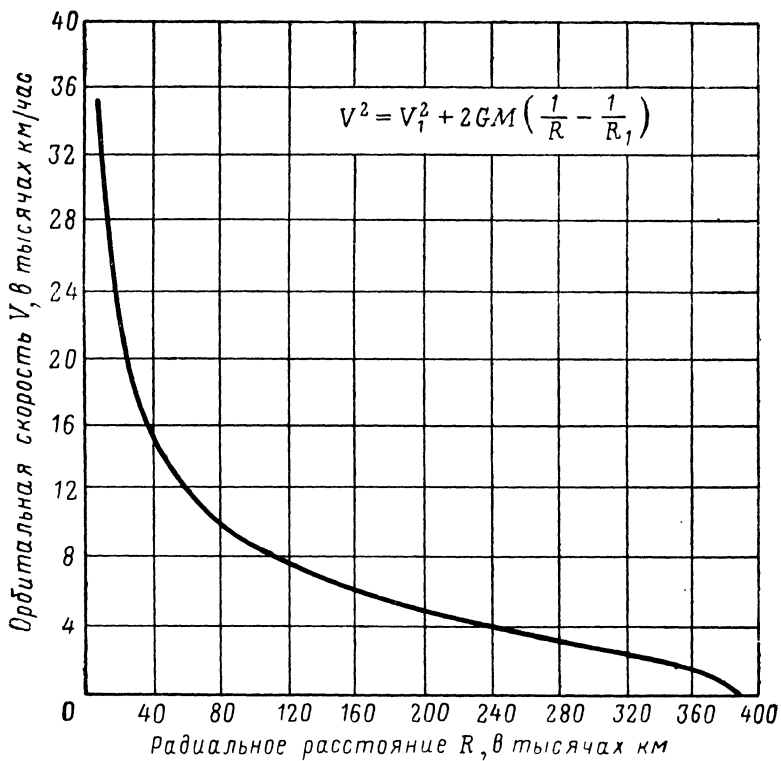


Рис. 55. Зависимость орбитальной скорости от радиального расстояния до Земли

ИЗВЕСТНЫЕ ДАННЫЕ

Данные астрономических наблюдений положения Луны и радиолокационных наблюдений положения автоматической станции Рейнджер преобразуются в полярные координаты с началом в центре Земли.

Данные радиолокационных наблюдений положения автоматической станции Рейнджер		Данные астрономических наблюдений положения Луны	
Истинная аномалия θ_R град	Радиус R тысячи км	Истинная аномалия θ_M град	Радиус R тысячи км
75	10,4	130	200
155	104,4	135	195
165	194,7	140	190
		145	185
		150	180
		155	175
		160	170
		165	165
			376,8
			373,3
			370,1
			367,4
			365,2
			363,6
			362,5
			362,2

Средний радиус Земли — 6371,2 км

Радиус Луны — 1736,7 км

Средняя скорость движения Луны по ее орбите — 3680 км/час

В точке вывода автоматической станции на орбиту (время 0,0 час)

истинная аномалия θ_R для автоматической станции Рейнджер равна 75°;
истинная аномалия θ_M для Луны равна 130°.

ТРЕБУЕТСЯ:

1) построить кривую зависимости величины, обратной орбитальной скорости, от радиального расстояния;

2) проинтегрировать ее графически для получения кривой зависимости радиального расстояния от времени;

3) построить полную траекторию полета автоматической станции Рейнджер и орбиту Луны и определить, будет ли автоматическая станция:

а) посажена на Луну;

б) захвачена Луной и станет спутником Луны;

в) пролетит мимо Луны;

4) если окажется, что будут осуществлены посадка или захват, определить время, прошедшее с момента вывода автоматической станции на орбиту.

Для того чтобы автоматическая станция Рейнджер была захвачена Луной и стала ее спутником, должно выполняться следующее условие:

$$r_m \leq \frac{64,5}{V_t^2},$$

где r_m — радиус от центра Луны до автоматической станции, в тысячах километров;

V_t — скорость автоматической станции, касательная к орбите спутника Луны в ближайшей точке прохождения, в тысячах километров в час.

Если выполняется это равенство, то автоматическая станция Рейнджер будет находиться на орбите спутника Луны бесконечно долго; если же выполняется неравенство, то автоматическая станция со временем сядет на Луну; но если $r_m > 64,5/V_t^2$, то она выйдет на орбиту спутника Солнца.

Показать соответствующее положение Луны в момент времени $t=0$, а также в моменты, когда автоматическая станция Рейнджер совершит посадку на Луну или пересечет ее орбиту. Возьмите в качестве масштаба расстояний при построении $1 \text{ см} = 12\,500 \text{ км}$.

НАХОЖДЕНИЕ НОВЫХ ТОЧЕК КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

На рис. 56 заданные точки 1, 2, 3, 4 и 5 определяют коническое сечение. Они могут быть использованы для вычерчивания конического сечения или могут быть выбраны на вычерченном коническом сечении. Построение, приведенное на рис. 56, показывает, как определить положение на коническом сечении дополнительной точки А. Через точки 1—2 и 4—5 проводят линии, пересекающиеся в точке Р. Через точки 2—3 проводят линию, которую называют «линией Y», а через точки 3—4 — линию, которую называют «линией X». Через точку Р проводят произвольную линию РО, пересекающую линии X и Y соответственно в точках x и y. Проводят линии 1—x и y—5, продолжая их до тех пор, пока они не пересекутся в искомой дополнительной точке А на коническом сечении.

Иногда при описанном выше способе построения линия РО может пересечь линию X или линию Y в точке, расположенной за пределами чертежного листа. Для проведения линии через заданную точку так, чтобы она проходила через недостижимую точку пересечения двух заданных линий, используем построение подобного треугольника. Построим треугольник с заданной точкой в одной из его вершин так, чтобы две другие его вершины лежали по одной на каждой из двух заданных линий. Возле края чертежного листа, по направлению к которому заданные линии сходятся, вычертим подобный треугольник, две вершины которого будут расположены

на двух заданных линиях и все три стороны которого будут параллельны соответствующим сторонам первого треугольника.

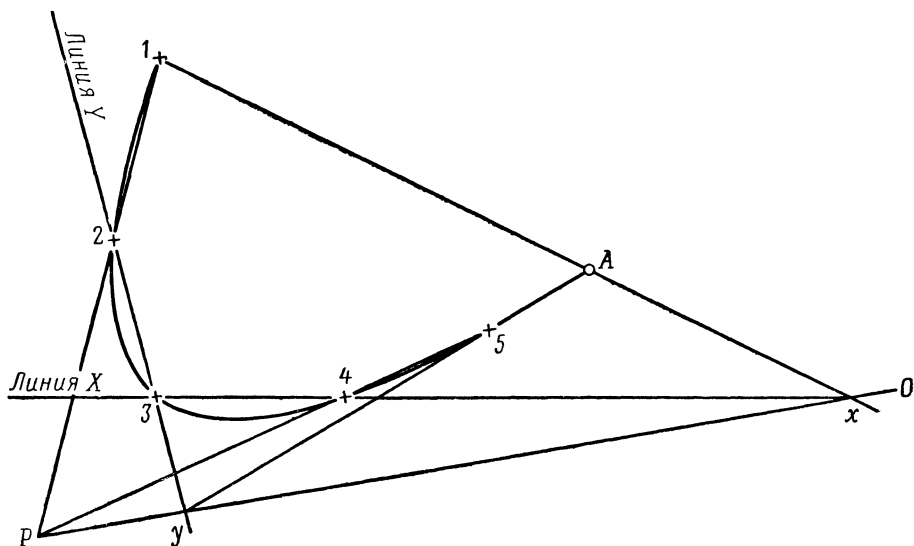


Рис. 56. Построение для определения новых точек конического сечения

Третья вершина этого треугольника будет лежать на искомой линии. Для обеспечения большей точности треугольники должны быть почти равносторонними.

2. МАНЕВР ПЕРЕХОДА С ОДНОЙ ОРБИТЫ НА ДРУГУЮ *

ВВЕДЕНИЕ

Этот космический полет включает в себя переход между заданными точками и маневр встречи. Спутник, движущийся по инерции по орбите ожидания вокруг Земли, должен быть переведен на конечную орбиту, чтобы осуществить попытку встречи с капсулой, движущейся по этой конечной орбите. Орбита ожидания и конечная орбита представляют собой эллипсы, а орбита перехода является частью эллипса. Все три орбиты лежат в одной плоскости, а центр Земли находится в одном из фокусов каждого эллипса. Орбита ожидания и конечная орбита известны, а точка вывода спутника на орбиту перехода и точка встречи на конечной орбите заданы. Чтобы облегчить слежение радиолокатором, перед началом маневра необходимо предварительно вычислить положение спутника и расстояние до него в любой момент времени в течение перехода.

* Р. В. Босма, там же (см. стр. 111).

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Большая ось $2a$ орбиты перехода может быть определена из уравнения

$$V^2 = 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a} \right),$$

где V — орбитальная скорость спутника в любой точке на орбите;
 G — гравитационная постоянная;
 M — масса Земли;
 R — радиальное расстояние спутника от центра масс Земли.

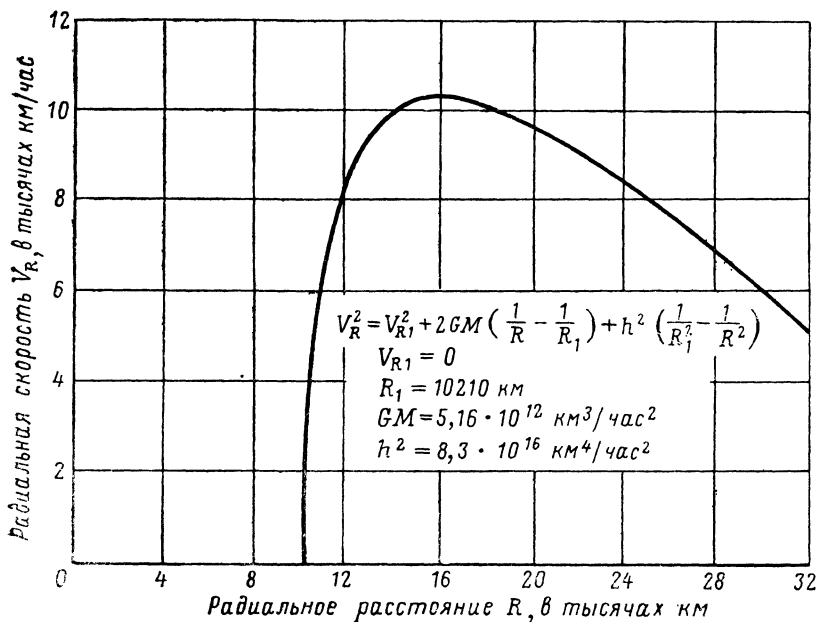


Рис. 57. Зависимость радиальной скорости от радиального расстояния до Земли

В этом случае V и R известны. Графическим построением определяем положение второго фокуса эллипса перехода. Теперь легко вычертить орбиту перехода, удовлетворяющую требуемым условиям, и определить положение всех точек на этой траектории.

Чтобы определить положение спутника на орбите перехода в любой заданный момент времени, используем рис. 57, графически

связывающий радиальную скорость V_R с радиальным расстоянием R в любой точке орбиты:

$$V_R^2 = V_{R1}^2 + 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) + h^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2} \right),$$

где V_{R1} — начальная скорость;

R_1 — начальный радиус;

h — момент количества движения.

Графическое интегрирование кривой зависимости величины, обратной радиальной скорости, от радиального расстояния даст зависимость радиального расстояния от времени. Если время, потребное для перехода с одной орбиты на другую, известно, то положение капсулы на конечной орбите можно установить таким образом, чтобы осуществить встречу спутника с капсулой в желаемой точке.

ИЗВЕСТНЫЕ ДАННЫЕ

1. Общие

Расстояние дается в тысячах километров, а скорость — в тысячах километров в час.

Масштаб: 1 см = 1270 км.

Средний радиус Земли = 6371,2 км.

Время в момент вывода на орбиту перехода = 0,0 час.

2. Орбита ожидания

Радиус в перигее $R_p = 8045$ км (левее центра Земли)

Радиус в апогее $R_a = 16\,100$ км.

Малая ось $2b = 22\,780$ км.

В точке вывода на орбиту перехода $\theta = 60^\circ$.

3. Орбита перехода

Скорость спутника в точке вывода на орбиту перехода $V = 27\,350$ км/час.

$GM = 5,16 \cdot 10^{12}$ км³/час².

4. Конечная орбита

Большая ось конечной орбиты образует с большой осью орбиты ожидания угол с вершиной в центре Земли, равный 30° , измеряемый против часовой стрелки. Угол θ равен нулю на большой оси конечной орбиты, слева от центра Земли. Положительные значения угла θ измеряются в направлении против часовой стрелки от нулевой линии отсчета. В таблице представлены параметры орбиты в полярных координатах с началом в центре Земли.

Таблица

Угол θ град		Радиус R км	Орбитальная скорость V км/час
150	210	34 218	16 472
155	205	33 578	16 644
160	200	33 060	16 787
165	195	32 670	16 901
170	190	32 397	16 984
175	185	32 235	17 035
	180	32 182	17 053

Встреча со спутником происходит при $\theta = 180^\circ$.

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Орбита ожидания

Постройте полную орбиту методом концентрических кругов. Спутник движется по инерции в направлении против часовой стрелки относительно Земли. Проверьте математически, что эллипс, построенный методом концентрических кругов, будет истинным.

2. Орбита перехода

Как показано на рис. 9, сумма расстояний DF и DF' от любой точки D на эллипсе до фокусов равна длине большой оси AB . Так как длина большой оси известна, определите положение второго фокуса графическим построением.

Определите два возможных положения этого фокуса и проведите большую ось эллипса перехода через новый фокус, что даст кратчайшую траекторию перехода к точке встречи. Используя метод концентрических кругов, постройте орбиту перехода от точки вывода до точки встречи.

Для оценки точности графического построения при определении положения второго фокуса примените математические уравнения, которые необходимы для того, чтобы найти расстояние между фокусами и угловое соотношение между новым фокусом переходной орбиты и центром Земли.

Расстояния, предвычисленные для облегчения радиолокационного слежения, должны измеряться от центра Земли до орбиты перехода. Отметьте радиальные расстояния до трех точек на орбите перехода для $\theta = 90^\circ$, 130° и 160° .

Используя эти три точки, вместе с точкой вывода и точкой встречи, определите положение трех новых точек на траектории перехода методом, показанным на рис. 56. Расположите новые точки так, чтобы каждая из них находилась примерно на половине расстояния между двумя заданными точками.

Определите время в часах, потребное для движения спутника от точки вывода до точки встречи. Отметьте на радиальных линиях, соответствующих $\theta = 90^\circ$, 130° и 160° , время прохождения спутником каждой из этих точек.

3. Конечная орбита

Постройте конечную орбиту по известным данным. Найдите способ, с помощью которого можно определить положение капсулы, движущейся по конечной орбите, в момент времени $t=0$. Используйте известные значения скорости; направление движения капсулы — против часовой стрелки относительно Земли. Представьте на рассмотрение напечатанный на машинке отчет, в котором проводится подробный анализ этой части проекта.

3. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ *

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается ракета-носитель типа «Атлас», которая должна вывести космическую капсулу на орбиту. Для определения условий отделения первой ступени ракеты-носителя необходимо знать высоту, скорость и ускорение в момент выключения двигателей первой ступени, а также изменение по времени этих параметров от старта до момента выключения двигателей. Должны быть известны также максимально достигнутая высота после выключения двигателей и время, необходимое для достижения этой высоты в случае, когда первая ступень не отделилась, а двигатели второй ступени не включились.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Используя второй закон Ньютона, строим диаграмму сил, действующих на ракету-носитель в полете при отсутствии сил аэродинамического сопротивления. Все силы вертикальны: непрерывная тяга F , полагаемая постоянной, действует вверх; сила полного веса W ракеты-носителя, включающего полезную нагрузку и топливо, направлена вниз. Влияние аэродинамического сопротивления, зависящего от скорости, высоты и плотности атмосферы, в этом случае незначительно, и оно не будет учитываться.

Согласно второму закону Ньютона в любой момент времени t сумма сил, действующих на тело, равна скорости изменения со

* Задача составлена Мишелем П. Жераром, инструктором графики Принстонского университета, для курсов обучения графике повышенного типа.

временем количества движения. Количество движения равно массе, умноженной на скорость:

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mv).$$

Принимая направление вверх за положительное, можно записать

$$\sum F = T - W = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}. \quad (1)$$

Правая сторона этого уравнения должна включать член dm/dt , так как масса ракеты уменьшается с расходом топлива. Ускорение силы тяжести g принимается постоянным. Тяга считается постоянной до момента выключения двигателей и равной нулю после их выключения.

Заданы следующие параметры:

ускорение силы тяжести $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$;

тяга $T = 157\,300 \text{ кг}$;

полный (начальный) вес $W_0 = 105\,000 \text{ кг}$;

продолжительность работы двигателей первой ступени $t_b = 140 \text{ сек}$;

секундный расход топлива $r = 545 \text{ кг/сек}$.

Для облегчения графического решения перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{m} - \frac{W}{m} - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt}, \quad (2)$$

где

$$W = W_0 - rt = mg.$$

Тогда

$$m = \frac{W_0 - rt}{g}$$

и

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{r}{g}.$$

В уравнении (2) члены T/m и W/m могут быть представлены графически в функции времени t :

$$\frac{T}{m} = \frac{Tg}{W_0 - rt} = A(t);$$

$$\frac{W}{m} = g = B(t).$$

Объединяя эти два уравнения, получим

$$A(t) - B(t) = \frac{Tg}{W_0 - rt} - g = D(t);$$

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{-r}{W_0 - rt} = -C(t).$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt} = D(t) + vC(t). \quad (3)$$

Если высоту обозначить h , то

$$v = \frac{dh}{dt},$$

а ускорение a будет равно:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dh}{dt} \right) = \frac{d^2h}{(dt)^2}.$$

Хотя уравнение (3) является уравнением второго порядка относительно h , оно является уравнением первого порядка относительно v , поэтому его решение будет уравнением первого порядка относительно h . Уравнение (3) может быть решено графически следующим образом.

Для каждого значения t принимаем некоторое значение a и интегрируем графически для получения соответствующего значения v . Подставляя это значение в уравнение (3), получаем новое значение a ; повторяем этот процесс до тех пор, пока новое значение a не будет отличаться от предыдущего. Затем переходим на следующий временной интервал. После проведения описанной выше операции для нескольких временных интервалов общая тенденция кривой ускорения станет очевидной и это позволит точнее выбирать первое приближение для оставшихся временных интервалов. Построив кривую для v , можно получить решение для h непосредственно графическим интегрированием.

После выключения двигателей $T=0$ и m будет постоянной, так что $dm/dt=0$.

Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{W}{m} = -g. \quad (4)$$

Кривая, изображающая это уравнение, может быть графически проинтегрирована дважды для определения кривых v и h после выключения двигателей.

Граничные условия для активного участка полета от момента старта до момента выключения двигателей задаются при $t=0$:

$$a_0 = \frac{Tg}{W_0} - g;$$

$$v_0 = 0;$$

$$h_0 = 0.$$

Граничные условия после момента выключения двигателей задаются при $t = t_b = 140$ сек:

$$a_b = -g;$$

$$\left. \begin{array}{l} v_b = v_{140}; \\ h_b = h_{140}. \end{array} \right\} \text{Получено из решения уравнения (3) при } t = 140 \text{ сек.}$$

ИЗВЕСТНЫЕ ДАННЫЕ

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{(dt)^2} = D(t) + vC(t). \quad (3a)$$

При $0 < t \leq 140$ сек будем иметь

$$D(t) = 9,81 \left(\frac{288,75}{192,50 - t} - 1 \right) \text{ м/сек}^2;$$

$$C(t) = \frac{1}{192,50 - t} \text{ сек}^{-1}.$$

При $t = 0$ получим

$$a = 4,905 \text{ м/сек}^2; v = 0; h = 0.$$

При $t > 140$ сек

$$a = -9,81 \text{ м/сек}^2.$$

При $t = 140$ сек

$$a = -9,81 \text{ м/сек}^2; v = v_{140}; h = h_{140}.$$

ТРЕБУЕТСЯ:

Решить графически уравнения (3a) и (4) при граничных условиях, указанных для a , v и h , и построить график зависимости каждого из них от времени t .

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ

Нанесите все кривые на чертежную бумагу размером 210×297 мм с вертикальной кромкой 297 мм. В качестве абсциссы на всех графиках отложите время t .

На пяти отдельных графиках поместите начало в точке (1; 1) и разметьте временную шкалу в масштабе $1 \text{ см} = 10 \text{ сек}$, от нуля до 140 сек. Обозначьте графики следующим образом: рис. 1А, 2А, 3А, 3В и 3С. Ординаты на этих графиках возьмите следующие:

Рис. 1А. Высота h , $1 \text{ см} = 10\,000 \text{ м}$, от 0 до 210 000 м.

Рис. 2А. Скорость v , $1 \text{ см} = 250 \text{ м/сек}$, от 0 до 5000 м/сек.

Рис. 3А. Ускорение a , $1 \text{ см} = 5 \text{ м/сек}^2$, от 0 до 130 м/сек².

Рис. 3В. Функции $D(t)$ и $vC(t)$, те же масштабы, что и на рис. 3А.

Рис. 3С. Функция $C(t)$, $1 \text{ см} = 0,001 \text{ сек}^{-1}$, от нуля до $0,0200 \text{ сек}^{-1}$.

На рис. 58 показан пример оформления рис. 2А, а на рис 59 — пример оформления рис. 3С.

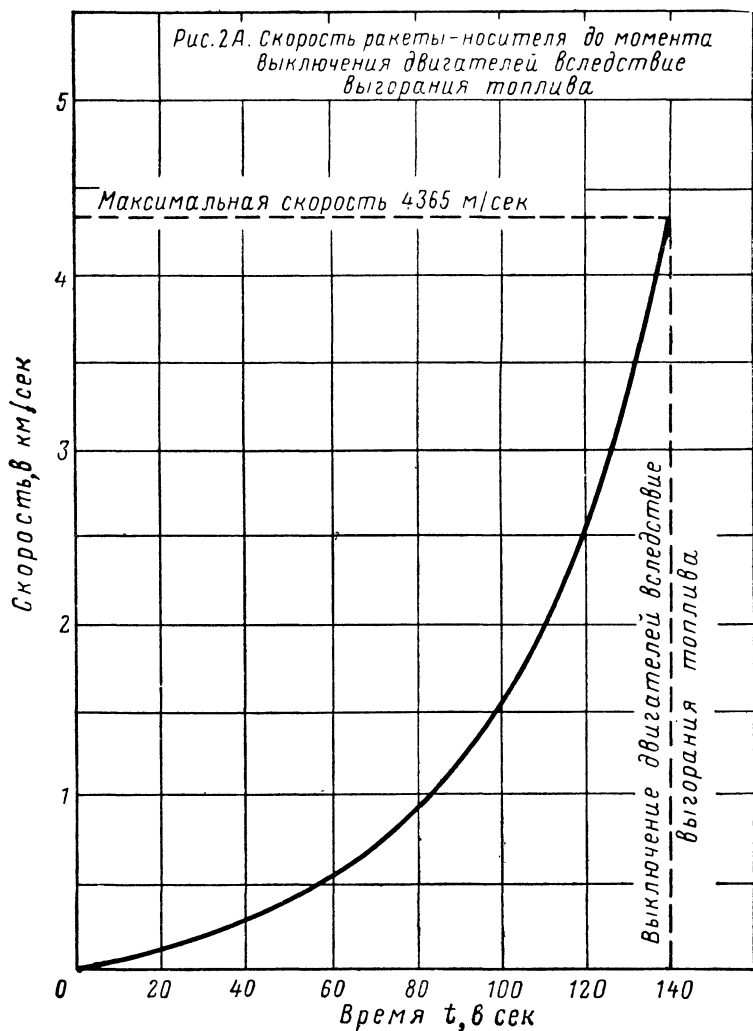


Рис. 58. График скорости ракеты-носителя до момента выключения двигателей вследствие выгорания топлива

На трех отдельных графиках поместите начало в точке $(\frac{1}{2}; 1)$ и разметьте временную шкалу в масштабе $1 \text{ см} = 40 \text{ сек}$, от нуля до 600 сек . Обозначьте эти графики так: рис. 1, 2 и 3.

Рис. 3С. — $C(t)$

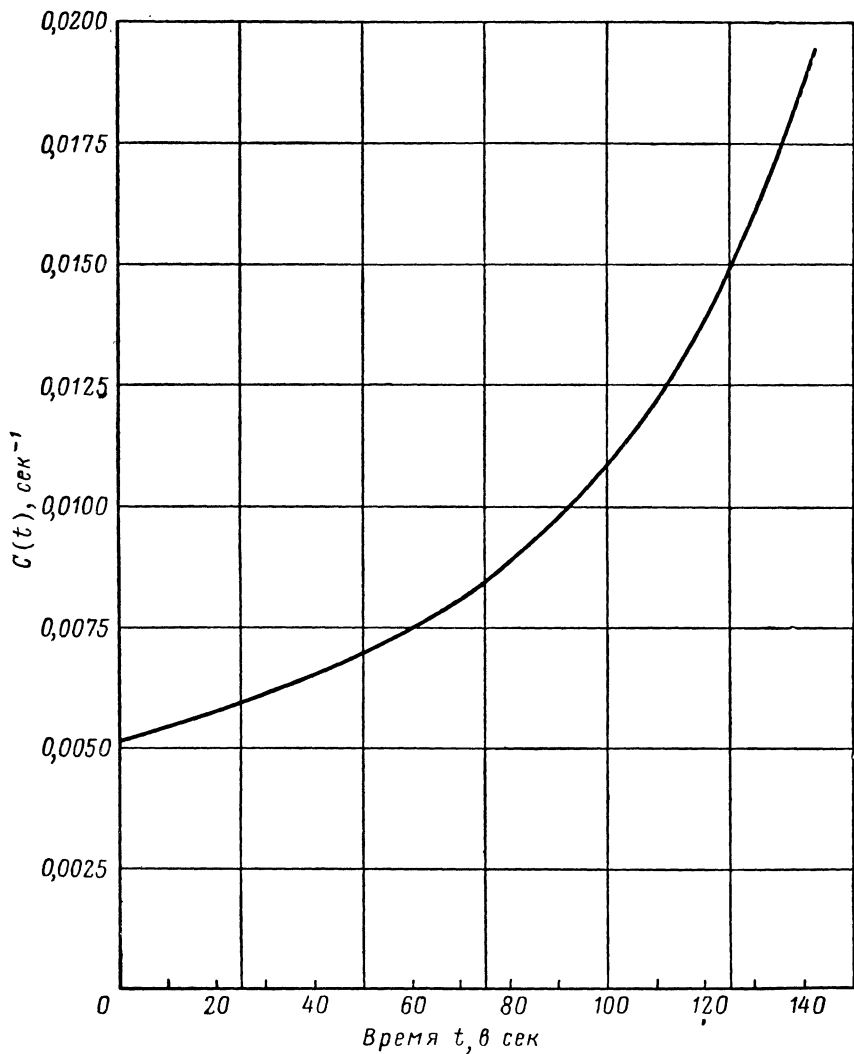


Рис. 59. График первого члена дифференциального уравнения движения

Ординаты на этих графиках возьмите следующие:

Рис. 1. Высота h , 1 см = 50 000 м, от 0 до 1 200 000 м.

Рис. 2. Скорость v , 1 см = 250 м/сек, от 0 до 5000 м/сек.

Рис. 3. Ускорение a , 1 см = 5 м/сек², от -9,81 до 130 м/сек².

Назовите рисунки так:

Рис. 1. Высота полета ракеты-носителя, 0—600 сек.

Рис. 1А. Высота полета ракеты-носителя до момента выключения двигателей вследствие выгорания топлива.

Рис. 2. Скорость ракеты-носителя, 0—600 сек.

Рис. 2А. Скорость ракеты-носителя до момента выключения двигателей вследствие выгорания топлива.

Рис. 3. Ускорение ракеты-носителя, 0—600 сек.

Рис. 3А. Ускорение ракеты-носителя до момента выключения двигателей вследствие выгорания топлива.

Рис. 3В. $D(t)$ и $vC(t)$.

Рис. 3С. $C(t)$.

Нанесите функцию $D(t)$ на рис. 3В и функцию $C(t)$ на рис. 3С, используя значения соответствующих величин, приведенные в таблице:

Таблица

t	$C(t)$	$D(t)$	t	$C(t)$	$D(t)$
0	0,0051	4,91	80	0,0088	15,37
10	0,0054	5,70	90	0,0097	17,84
20	0,0057	6,62	100	0,0108	20,80
30	0,0061	7,63	110	0,0121	24,52
40	0,0065	8,75	120	0,0137	29,25
50	0,0070	10,07	130	0,0160	35,53
60	0,0075	11,56	140	0,0190	44,16
70	0,0081	13,33			

Используя рис. 3А, 3В, 3С и 2А, постройте кривые изменения ускорения и скорости по принципу, изложенному на стр. 122—123. Проинтегрируйте графически кривую скорости, полученную на рис. 2А, для того чтобы построить кривую высоты на рис. 1А. Перестройте рисунки 1А, 2А и 3А в рисунки 1, 2 и 3 соответственно. На этих рисунках, используя уравнение (4), постройте кривые изменения ускорения, скорости и высоты от $t=140$ до $t=600$ сек.

Представьте на рассмотрение напечатанное на машинке краткое изложение вашего решения, приложив к нему все шесть графиков и указав наиболее существенные параметры траектории полета в критических точках.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азимут, 14
Альbedo Земли, 84
Альмукантарат, 14
Анализ траекторий, 41
Аномалия, истинная, 22, 26, 33
 эксцентрическая, 83
Апогей, 23
Астероид, 27
Астронавтическая номограмма, 79
Астрономическая параллель, 17
Афелий, 22
Аэродинамические нагрузки, 76

Б

Баллистическая ракета, 39
Баллистическая ракета средней дальности, 65
Большой круг, 13

В

Вариация, Луна, 39
Вековое ускорение, Луна, 39
Венера, 13, 26, 80
Вертикальный круг, 14
Вес, 30
Возмущения, 38
 вековые, 38
 Луны, 39
 периодические, 38
Восходящий узел, 22, 23, 24
Время перехода, 102, 118
Время полета, 90
 гринвичское, 19
 измерение, 18
 сидерическое (звездное), 19
 стандартное, 19
Вторичный по отношению к эклиптике круг, 17
Выводы Ньютона из законов Кеплера, 29
Высота, 14

Г

Гармонический закон, 28
Географическая система координат, 14
Гипербола, 32
Гиперболическая скорость, 58
Главный круг, 14
Годичное уравнение, Луна, 39
Годограф, 85
 модифицированный, 91
 перехода, 97
 полярный, 91
Годографический анализ, 96
Горизонт, 14
Горизонтная система координат, 14
Гравитационная постоянная, 30
Гравитация, 30
Гринвичский меридиан, 19
Гринвичское время, 19

Д

Дальность полета баллистической ракеты, 67, 85
Диаграмма расчетная, 77
Диаграмма сил, действующих на ракету в полете, при отсутствии сил аэродинамического сопротивления, 120
Дифференциальные уравнения движения, 63
Долгота, восходящего узла, 24, 25
перигелия, 25
Драконический месяц, 23

З

Запуск на Луну, Рейнджер, 111
Закон всемирного тяготения, 30
Закон площадей, 28
Законы Кеплера, 28
 выводы из законов Кеплера, 29
Законы Ньютона, 29
Звезды, 13
Земля, 20
 орбита, 21
Зенит, 14

Зенитное расстояние, 14
Зимнее солнцестояние, 16
Зонд космический, 39

И

Изменение направления тяги, 49, 51
Импульсная тяга, 48
 тяги приложена в плоскости движения, 48, 49
 тяги приложена не в плоскости движения, 50, 51
Искусственный спутник, 39, 82
Истинная аномалия, 22, 26, 33
Истинное солнечное время, 18

К

Квадратура, Луна, 23
Кеплерова диаграмма, 64
Кеплеров эллипс, 28, 36
Количество движения, 29
Колор, 16
 равноденствий, 16
 солнцестояний, 16
Комета, 13
Конечная орбита, 116, 118
Конические сечения, 32
 нахождение новых точек, 115
Космический зонд, 39
Красная дымящая азотная кислота с присадками (IRFNA), 84
Круги равной высоты, 14

Л

Летнее солнцестояние, 16
Линейная скорость, 34
Линии времени, 53
Линия апсид, 22
 вращение, 39
Линия узлов, 23
Луна, 22

М

Малые планеты, 27
Марс, 13, 26
Масса, 30
Масштабный коэффициент, 48
Межконтинентальная баллистическая ракета, 65
Межпланетные траектории, 58
Меридиан, 14
Меркурий, 13, 26
Метеор, 13
Минимальное приращение скорости, 62
Момент количества движения, 42

Н

Надир, 14
Наклонение, 22, 24
 орбиты, 83

Наклонение эклиптики, 16
Небесная механика, 30
Небесная параллель, 15
Небесная сфера, 13
Небесный меридиан, 14
Небесный экватор, 15
Нептун, 13
Непрерывная тяга, 52
Несимметричный диметилгидразин (UDMH), 84
Нисходящий узел, 23, 24
Номограмма, 79, 82
 астронавтическая, 79
 орбитальная, 79
Нутация, 38
Ньютоновская проблема двух тел, 30

О

Обобщенные коэффициенты ракеты, 76
Определение характеристик UDMH и IRFNA в вакууме, 84
Оптимальное приращение скорости, 54
Орбита, Земли, 21
 искусственных спутников, геометрия на плоскости, 60
 ожидания, 116, 118, 119
 перехода, 55, 61, 62, 102, 116, 118, 119
 планет, 24
 размер, 34
 расчетная диаграмма характеристик, 77
 спутников, 65
 форма, 33
 эллиптическая, 36
Орбита перехода с минимальной затратой энергии, 58
Орбиты, близкие к круговым, 52
Остаточная скорость, 70
Относительный вес топлива, 71

П

Парабола, 32
Параболическая скорость, 33
Параллактическое неравенство, Луна, 39
Параллель высоты, 14
Параметр конического сечения, 33
Первый вертикал, 14
Переход между заданными точками, 102
Переходная орбита, 55, 61, 62, 102, 116, 118, 119
 маневр, 116
Переход Хомана, 102, 103
Перигей, 23
Перигелий, 21, 25
Планеты, 13
Плоскость движения, 48
Плутон, 13
Полупараметр, 42
Полос эклиптики, 16

Полюсы мира (полюсы вращения), 15
Преобразование координат, 19
Прецессия, 38
 вековая, 83
Проблема двух тел, 30
Проблемы встречи, 60, 116
Противостояние, Луна, 23
Прямое восхождение, 16

Р

Радиус-вектор, 22, 26
Размер орбиты, 34
Ракета, 39
 взаимосвязь с траекторией, 70
Ракета-носитель типа «Атлас», 120
Расчетная диаграмма, 77
Регрессия узлов, Луна, 39
 вековая, 83
Рейнджер, запуск на Луну, 111

С

Сатурн, 13
Северный полюс, 15
Секториальная скорость, 34
Семейства кривых, 53
Сетка характеристик, 64
Сидерические (звездные) сутки, 19
Сидерический (звездный) месяц, 23
Сидерический (звездный) период, 26, 36
Сидерическое (звездное) время, 19
Сизигий, Луна, 23
Сила тяжести, 30
Синодический месяц, 23
Склонение, 16
Соединение, Луна, 23
Скорость,
 диаграммы годографа скорости, 85
 изменение скорости, потребное для перехода, 102
 импульс скорости, 84
 оптимальное приращение скорости, 54
 освобождения, 33
 ракеты-носителя, 120
 тел в космическом пространстве, 33
Солнечная система, 13
Солнце, 22
Солнцестояние, 16
Спутник, 13
 искусственный, 39, 82
 орбита, 65
Спутник I, 39
Стандартное время, 19
Страны света, 14
Среднее расстояние, 25
Среднее солнечное время, 18
Среднее Солнце, 18
Среднесуточная угловая скорость, 26

Средние солнечные сутки, 18
Средний полдень, 18
Суточная дуга, 15
Суточное движение, 15

Т

Теорема косинусов, 83
Теорема синусов, 83
Точка, весеннего равноденствия, 16
 осеннего равноденствия, 16
Точка, востока, 14
 запада, 14
 севера, 14
 юга, 14
Траектории полета по инерции, 44
Траектория баллистической ракеты, 65
Траектория обобщенная, 71
 коэффициенты чувствительности, обобщенные, 73
 межпланетная, 58
 профиль, 73, 75
Траектория с минимальной затратой энергии, 95
Треугольник *МПК*, 86
Треугольник *ZPS*, 19

У

Угловая скорость, 34
Угловое перемещение, 64
Угол наклона траектории полета, 71, 83
Узлы лунной орбиты, 22
Условия входа в атмосферу, 67
Условия в конце активного участка траектории, 67
Уравнение, времени, 19
 движения, 63, 64, 71
 энергии, 33
Уравнение Кеплера для определения продолжительности полета, 90
Уран, 13
Ускорение силы тяжести, 30
Участок активного полета с гравитационным поворотом, 71

Ф

Фазы Луны, 23
Фокальный полупараметр, 42
Форма орбиты, 33

Х

Характеристики ракеты-носителя, 120

Ц

Церера, 27
Центральная сила, 35
Центральный угол, 82

Ч

Часовой круг, 15, 16
Часовой угол, 16
Солнца, 18

Э

Эвекция, Луна, 39
Экваториальная система координат, 15
Эклиптика, 16
Эклиптическая долгота, 17

Эклиптическая система координат, 16
Эклиптическая широта, 17
Эксцентриситет, 21
Эллипс, 21
Кеплера, 28, 36
Элонгация, Луна, 23
Эпоха, 26

Ю

Юпитер, 13, 26, 80

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие координирующего редактора	5
Введение	7
Предисловие	11
Глава 1. Геометрия солнечной системы	13
Введение. Небесная сфера. Горизонтная система координат. Экваториальная система координат. Эклиптическая система координат. Изменение времени. Преобразование координат. Земля и ее орбита. Солнце. Луна. Орбиты планет.	
Глава 2. Силы и движение в космическом пространстве	28
Законы Кеплера. Законы Ньютона. Скорость тел в космическом пространстве. Возмущения. Ракеты и искусственные спутники.	
Глава 3. Анализ траекторий с помощью полярных диаграмм	41
Краткое изложение статьи А. С. Боксенбома «Графический анализ траекторий» (A. S. Voksenbom, Graphical Trajectory Analysis, NASA Report, 1959).	
Глава 4. Анализ траекторий с использованием сеток характеристик	64
Краткое изложение статьи Р. Л. Зона «Предлагаемое использование кеплеровой диаграммы» (R. L. Sohn, «A Proposed Kepler Diagram, ARS Journal, 1959). Краткое изложение статьи Р. Дж. Поллака «Быстрое определение взаимосвязи между характеристиками баллистической ракеты и ее траекторией» (R. J. Pollak, Rapid Determination of the Reactions between the Ballistic Rocket and its Trajectory», ARS Journal, 1962).	
Глава 5. Расчетные диаграммы и номограммы	77
Краткое изложение статьи Г. Г. Лютьена и М. Л. Рэйми «Характеристики орбиты» (H. H. Luetjen and M. L. Ramey, Orbit Relationships, Space/Aeronautics, 1959). Краткое изложение статьи Р. К. Спенсера «Астронавтическая номограмма» (R. C. Spencer, Astronautic chart, IRE Proceedings, 1960). Краткое изложение статьи И. Йенсена, Д. Таунсенда, Ю. Корка и Д. Крафта «Графическое руководство для расчета орбитального полета» (J. Jensen, G. Townsend, J. Kork and D. Kraft, Design Guide to Orbital Flight, McGraw-Hill, 1962).	
Глава 6. Диаграммы годографа скорости	85
Краткое изложение статьи Э. В. Поля «Годограф и проблемы расчета траекторий баллистических ракет» (E. W. Paul, The Hodograph and Ballistic Missile Trajectory Problems, Aerospace Engineering, 1961). Краткое изложение статьи С. П. Альтмана и Дж. С. Пистинера «Полярный годограф для траекторий баллистических ракет» (S. P. Altman	

and J. S. Pistiner, Polar Hodograph for Ballistic Missile Trajectories, ARS Journal, 1961). Краткое изложение статьи С. П. Альтмана и Дж. С. Пистинера «Годографический анализ задачи перехода с одной орбиты на другую для компланарных несоосных эллиптических орбит» (S. P. Altman and J. S. Pistiner, Hodograph Analysis of the Orbital Transfer Problem for Coplanar, Nonaligned Elliptical Orbits, ARS Journal, 1961).

Библиография с аннотациями	105
<i>Приложение. Задачи для графического решения</i>	111
1. Запуск на Луну автоматической научно-исследовательской станции Рейнджер	111
2. Маневр перехода с одной орбиты на другую	116
3. Анализ характеристик ракеты-носителя	120
Предметный указатель	127

Фрэнк А. Хикок

ГРАФИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

Издательский редактор *Н. З. Рябина*

Техн. редактор *В. И. Бугаева*

Художник *Н. Т. Дворников*

Корректор *А. И. Карамышкина*

Сдано в набор 13/XI 1967 г.

Формат 60×90^{1/16}

Бум. л. 4,125
Цена 75 коп.

Печ. л. 8,25

Бумага № 1

Тираж 2000 экз.

Подписано в печать 23/IV 1968 г.

Уч.-изд. л. 7,67

Зак. № 2666/2010

Тем. план 1968 г. № 153

Издательство «Машиностроение», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3.

Московская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Хохловский пер., 7

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
16	12 сверху	так же, как	также как
25	7 снизу	$\Omega + \omega$ равна π и называется	$\Omega + \omega$ называется
118	16 снизу	R_p — на 8045 км левее центра Земли	$R_p = 8045$ км (левее центра Земли)