

А. П. ЯКИМАХА

**ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ
КВАНТОВЫЕ
ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ
ЭФФЕКТЫ** В ДВУМЕРНЫХ
ИНВЕРСИОННЫХ
СЛОЯХ МДП-
ТРАНЗИСТОРОВ

Киев
„Выща школа”
1989

ББК 32.852
Я 45

УДК 537.86:621.382.3

Высокотемпературные квантовые гальваномагнитные эффекты в двумерных инверсионных слоях МДП-транзисторов/А. Л. Якимаха. – К.: Выща шк., 1989. – 91 с. – ISBN 5-11-002309-3.

Рассмотрены квантовые процессы, обусловленные протеканием стационарного электрического тока через двумерную систему на поверхности полупроводника, имеющие место при комнатных температурах. Разработанная микроскопическая теория замкнутых двумерных объектов позволяет объяснить недавно обнаруженные явления квантового эффекта Холла и квантового эффекта поля. Результаты теоретических исследований иллюстрируются многочисленными экспериментальными данными, полученными на серийных полупроводниковых приборах.

Для специалистов по физике твердого тела и разработчиков полупроводниковых приборов, студентов старших курсов университетов, специализирующихся по теоретической физике.

Табл. 14. Ил. 10. Библиогр.: 39 назв.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук *В. Н. Шабура* (Институт теоретической физики АН УССР)

Издание осуществлено за счет средств автора

Редакция литературы по математике и физике
Редактор *Г. Г. Рубан*

Я 1604110000-243
М 211(04)-89 БЗ-39-18-88

ISBN 5-11-002309-3

© А. Л. Якимаха, 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная монография представляет собой первую попытку описания удивительного явления природы – квантового эффекта поля, обнаруженного в двумерной системе электронного газа на поверхности кремния при комнатных температурах.

Кооперативный характер данного эффекта позволяет воспользоваться известным математическим аппаратом, разработанным для квантового эффекта Холла и низкотемпературной сверхпроводимости. Повышение температурного диапазона находит естественное объяснение при использовании идеи квантованных магнитных потоков (индуцированных магнитных зарядов).

Предполагается, что читатель знаком с основами квантовой механики (в копенгагенской трактовке), физики полупроводников и полупроводниковых приборов.

В гл. 1 приводятся основные экспериментальные факты и простейшая микроскопическая модель эффекта, основанная на подходе Ландау – Лафлина. В гл. 2 рассмотрены особенности двумерных систем электронного газа в кремнии. В гл. 3 излагается квазимикроскопический альтернативный подход автора, позволяющий с единых позиций рассмотреть квантовые эффекты Холла и поля. Гл. 4 посвящена микроскопической теории ферми-систем, основанной на подходе Н. Н. Боголюбова. Здесь приведена попытка теоретического описания таких разнородных процессов, как проводимость полупроводников, металлов и сверхпроводимость.

Цель настоящей книги – привлечь внимание специалистов по физике твердого тела к данной области исследований, поскольку, по мнению автора, имеются реальные шансы для выяснения физического механизма высокотемпературной сверхпроводимости.

Глава 1. КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ПОЛЯ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в физике твердого тела возникает проблема решения задачи „кошки Шредингера”, поставленной в 1935 г. [1]. Сущность последней заключается в возможности теоретического описания средствами квантовой механики (пригодными для микроскопических квантовых систем) физических объектов мезо- и макроскопических масштабов. По крайней мере до начала 80-х годов считалось, что проявление естественной квантовой когерентности в макроскопических объектах возможно только в сверхпроводниках при гелиевых температурах (см., например, квантовые интерферометры – СКВИДы [2]). Но последние опыты Уэбба и др. [3] по наблюдению эффекта Ааронова – Бома в мезоскопических несверхпроводящих металлических кольцах показывают, что квантовые интерференционные явления ныне вступают в область разупорядоченных нормальных металлов и полупроводников (длина фазовой когерентности 10^{-6} м при температуре порядка $T \sim 1\text{К}$).

Кроме того, фазовую когерентность в макроскопической области можно создать искусственным образом, путем формирования индуцированной или композитной одномерной сверхрешетки (СР), впервые теоретически предложенной М. В. Келдышем в 1962 г. [4]. Период СР обычно выбирают порядка ~ 1000 нм (мезоскопический масштаб), а ее длина вдоль оси может составлять величину порядка 10^{-3} м (макроскопический масштаб). При этом используется нормальный, а не сверхпроводящий, полупроводник с туннельным механизмом проводимости вдоль оси СР, что обеспечивает нормальную работу последней при комнатных температурах. Следует отметить, что имеются все предпосылки практической реализации СР с потенциалом, периодически изменяющимся вдоль двух перпендикулярных осей [5]. Такие СР будут обладать свойствами сверхатомов, характеристики которых можно изменять инженерными методами.

Еще одним объектом для наблюдения квантовой когерентности в макроскопических твердотельных образцах являются инверсионные слои МДП-транзисторов, помещенные в сильные поперечные магнитные поля $B = (5 \div 20)$ Тл. К. фон Клитцинг в 1980 г. [6] обнаружил квантовый эффект Холла (КЭХ) в таких системах, заключающийся в квантовании холловской проводимости по закону

$$\sigma_{xy} = ie^2/h, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где e – заряд электрона; h – постоянная Планка. Наиболее изящное микроскопическое объяснение КЭХ было предложено Лафлином [7]. Оно базируется на теории Ландау [8], описывающей квантованное движение электрически заряженных частиц в магнитном поле. Ширина энергетической щели между уровнями Ландау в рамках подхода [6; 7] равна

$$\Delta W = \hbar \omega_{CH} \approx \hbar eV/m \approx 1,58 \text{ мэВ}, \quad (1)$$

где ω_{CH} – циклотронная частота; m – масса электрона (в общем случае нужно учитывать эффективную массу); $V = 10$ Тл. Поэтому на величину температуры, при которой устойчиво может наблюдаться КЭХ, налагается условие

$$T_{max}(КЭХ) < \Delta W/k \approx 13,43 \text{ К},$$

где k – постоянная Больцмана. Таким образом, КЭХ также принадлежит гелиевой области температур. Отметим, что вопрос о физических причинах фазовой когерентности в теории Лафлина [7] при макроскопических масштабах длины ленты $L = 4 \cdot 10^{-4}$ м (это длина канала МДП-транзистора [6]) не выяснен до конца. При наличии ненулевого изменения магнитного потока $\Delta \Phi$ через поверхность, ограниченную лентой Лафлина, изменение энергии равно [7]

$$\Delta W_H = e \mathcal{E} \Delta \Phi / LB, \quad (2)$$

где \mathcal{E} – напряженность электрического поля вдоль ленты.

Тогда при минимальном изменении магнитного потока $\Delta \Phi = \hbar/e$, равному кванту, изменение энергии смещения (2) равно энергетической щели между уровнями Ландау, т. е. (1). Это позволяет вычислить величину напряженности электрического поля

$$\mathcal{E} \geq eLB^2/2\pi m \approx 1,12 \cdot 10^9 \text{ В/м}, \quad (3)$$

при $L = 4 \cdot 10^{-4}$ м и $B = 10$ Тл [6]. Такое огромное значение электрического поля вдоль канала МДП-транзистора не может быть обусловлено приложенным напряжением к электродам истока и стока. В данном случае пришлось бы использовать $V_{ds} \approx 448000$ В, что, очевидно, привело бы к разрушению исследуемого МДП-транзистора. Напряженность электрического поля (3) можно сравнить с величиной периодического потенциала порядка ширины запрещенной зоны, изменяющегося на межатомном расстоянии в твердом теле:

$$\mathcal{E}_{gap} = \varphi_{gap}/a \approx 2,228 \cdot 10^9 \text{ В/м}, \quad (4)$$

где $\varphi_{gap} = 1,21$ В – ширина запрещенной зоны, $a = 5,431 \cdot 10^{-10}$ м – постоянная решетки для кремния.

Таблица 1. Основные соотношения между электрическими и магнитными величинами при гальваномагнитных явлениях

Физическая величина	Поле	
	электрическое	магнитное
Заряд	$\min[\Delta Q] = e,$ Кл	$\min[\Delta \Phi] = h/e,$ Дж·с/Кл
Сила тока	$I_E = \Delta Q / \Delta t,$ Кл/с = А	$I_M = \Delta \Phi / \Delta t,$ Дж/Кл = В
Сопротивление	$R_E = I_M / I_E = \Delta \Phi / \Delta Q,$ Ом	$R_M = I_E / I_M = \Delta Q / \Delta \Phi,$ Ом ⁻¹
Напряжение	$V_E = R_E I_E,$ В = Дж/Кл	$V_M = R_M I_M,$ Кл/с = А

Таким образом, появление КЭХ в МДП-транзисторе приводит автоматически к появлению индуцированной СР вдоль канала, в которой „периодическое микроскопическое поле \mathcal{E} ” может быть очень большим, тогда как постоянное макроскопическое и внешнее электрическое поле E будут малы.

Из вышесказанного следует, что все естественные проявления фазовой когерентности в макроскопических масштабах принадлежат к области гелиевых температур и, следовательно, являются экзотическими эффектами. Но для физической инженерии более предпочтительны физические эффекты, проявляющиеся при комнатных температурах. Потенциальная возможность повышения температуры макроскопических квантовых явлений заключается в использовании квазичастиц с магнитным зарядом μ („монополь Дирака” [9]), вместо электрически заряженных частиц, в качестве носителей тока в твердом теле.

В сильных электрических полях движение магнитных зарядов также будет квантованным. Ширину щели между уровнями энергии можно оценить из выражения, аналогичного (1)

$$\Delta W_E = \hbar \omega_{CE} \geq \epsilon_0 \hbar^2 E / 2\pi e m \approx 5,896 \cdot 10^{-2} \text{ эВ},$$

где $E = E_{\text{бар}}$; $\omega_{CE} = \mu E \epsilon_0 / m$ – циклическая частота; $\mu = \hbar/e$ – квант магнитного заряда. Верхний предел температуры для наблюдения расщепления энергетических уровней магнитных зарядов

$$T_{\text{max}}(\mu) \leq \Delta W_E / k \approx 683,9 \text{ К},$$

откуда следует, что квантованные движения магнитных зарядов вполне наблюдаемы при комнатных температурах (вопрос о существовании магнитных зарядов рассмотрим в п. 3.6, гл. 3).

Приведем основные соотношения и размерности электрических и магнитных физических величин (табл. 1), которые сопровождают гальваномангнитные явления. Как видно из таблицы, в системе СИ токи и напряжения магнитных и электрических явлений являются взаимодополняющими физическими величинами.

1. 1. Решение уравнения Шредингера. Рассмотрим движение частицы с магнитным зарядом μ в электрическом поперечном и магнитном продольном полях

$$\vec{D} = \{D_x, 0, 0\},$$

$$\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$$

и определим уровни энергии с помощью стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = W\psi. \quad (5)$$

Векторный потенциал \vec{C} однородного электрического поля \vec{D} выберем не в форме $\vec{D} = \epsilon_0 \text{rot } \vec{C}$, а применим калибровку Ландау, использованную ранее для магнитного поля в [8]

$$\vec{C} = \{0, zD_x, 0\}.$$

Тогда оператор Гамильтона принимает вид (влиянием спина пренебрегаем)

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_y + \mu z D_x)^2 + \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + \mu z H_z. \quad (6)$$

Учитывая двумерный (2M-) характер движения частицы с магнитным зарядом в плоскости (y, z) , волновую функцию уравнения Шредингера (5) с гамильтонианом (6) будем искать в виде

$$\psi_k(y, z) = \exp(i ky) \cdot \Phi_k(z). \quad (7)$$

Собственные числа оператора \hat{p}_y на ортогональной системе волновых функций (7) имеют вид

$$\hat{p}_y \psi_k = -i \hbar \nabla_y \psi_k = \hbar k,$$

в сокращенное уравнение Шредингера (5) с учетом (7) удобно представить так:

$$\hat{\mathcal{H}}_k \Phi_k(z) = W_k \Phi_k(z), \quad (8)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \frac{\hbar \omega_{CE}}{2} \left\{ -l_E^2 \nabla_z^2 + \left(kl_E + \frac{z}{l_E} \right)^2 + \frac{2\mu z H_z}{\hbar \omega_{CE}} \right\}. \quad (9)$$

Но $Z_k = -k l_E^2$, а k принимает значения, кратные $2\pi/L_y$. Поэтому в интервале $[0, L_z]$ имеем

$$\eta_k = L_z / \Delta z_k = L_z / (\Delta k l_E^2) = L_z L_y / 2\pi l_E^2 \quad (14)$$

величин k (т. е. импульсов $p_y = \hbar k$). Тогда число вырожденных состояний на единицу площади

$$\zeta = 1/2 \pi l_E^2 = \mu D_x / h.$$

Запишем плотность магнитного тока в y -направлении для n -вырожденных состояний Ландау

$$\begin{aligned} j_{My} &= -\mu n \langle N_k | (p_y + \mu D_x z) / m | N_k \rangle = \\ &= -\mu n \hbar^{-1} dW_{N_k} / dk = \mu n v_E. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что V_E равно (11), а $n = \zeta$, для всех заполненных уровней Ландау до j -го включительно магнитную проводимость y -компоненты представим в форме

$$\sigma_{yz}^M = j \cdot \zeta \cdot \mu / D_x = j \cdot \mu^2 / h. \quad (16)$$

Поскольку квант магнитного заряда равен $\mu = \hbar/e$, то это уравнение можно переписать так:

$$\sigma_{yz}^M = j \cdot h / e^2,$$

т. е. магнитная проводимость кратна целому значению квантов холловского сопротивления $R_H = h/e^2 = 25\,812,82 \text{ Ом}$.

Формально выражения (15) и (16) учитывают перенос магнитных зарядов вдоль оси y . Но так как η_k из уравнения (14) можно представить в виде

$$\eta_k = S / 2\pi l_E^2 = \mu D_x S / h = q_0 / e,$$

где $q_0 = \hbar/\mu = e$ — квант электрического потока, в $q = D_x S$ — электрический поток, то параллельно η_k магнитным зарядам должен происходить перенос η_k^* электрических зарядов (т. е. индуцированных электрических зарядов, так как они выражаются через электрический поток). К сожалению, в рамках подхода Ландау более подробно исследовать перенос индуцированных электрических зарядов довольно трудно. В этом отношении более продуктивным является подход Лафлина [7].

1.2. Подход Лафлина для магнитных зарядов. Данный подход является наиболее изящным доказательством существования квантования магнитного сопротивления на микроскопическом уровне. Рассмотрим $2M$ -металлическую ленту, замкнутую в петлю длиной L , в которой протекает ток I_M (рис. 1). Внешнее электрическое поле \vec{D} направлено перпендикулярно к поверхности ленты. Задача состоит в нахождении соотношения между наведенным

Но $Z_k = -k l_E^2$, а k принимает значения, кратные $2\pi/L_y$. Поэтому в интервале $[0, L_z]$ имеем

$$\eta_k = L_z / \Delta Z_k = L_z / (\Delta k l_E^2) = L_z L_y / 2\pi l_E^2 \quad (14)$$

величин k (т. е. импульсов $p_y = \hbar k$). Тогда число вырожденных состояний на единицу площади

$$\xi = 1/2 \pi l_E^2 = \mu D_x / \hbar.$$

Запишем плотность магнитного тока в y -направлении для n -вырожденных состояний Ландау

$$\begin{aligned} j_{My} &= -\mu n \langle N_k | (p_y + \mu D_x z) / m | N_k \rangle = \\ &= -\mu n \hbar^{-1} dW_{N_k} / dk = \mu n v_E. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что V_E равно (11), а $n = \xi$, для всех заполненных уровней Ландау до j -го включительно магнитную проводимость yZ -компоненты представим в форме

$$\sigma_{yz}^M = j \cdot \xi \cdot \mu / D_x = j \cdot \mu^2 / \hbar. \quad (16)$$

Поскольку квант магнитного заряда равен $\mu = \hbar/e$, то это уравнение можно переписать так:

$$\sigma_{yz}^M = j \cdot \hbar / e^2,$$

т. е. магнитная проводимость кратна целому значению квантов холловского сопротивления $R_H = \hbar/e^2 = 25\,812,82$ Ом.

Формально выражения (15) и (16) учитывают перенос магнитных зарядов вдоль оси y . Но так как η_k из уравнения (14) можно представить в виде

$$\eta_k = S / 2\pi l_E^2 = \mu D_x S / \hbar = q / e,$$

где $q_0 = \hbar/\mu = e$ – квант электрического потока, а $q = D_x S$ – электрический поток, то параллельно η_k магнитным зарядам должен происходить перенос η_k^* электрических зарядов (т. е. индуцированных электрических зарядов, так как они выражаются через электрический поток). К сожалению, в рамках подхода Ландау более подробно исследовать перенос индуцированных электрических зарядов довольно трудно. В этом отношении более продуктивным является подход Лафлина [7].

1.2. Подход Лафлина для магнитных зарядов. Данный подход является наиболее изящным доказательством существования квантования магнитного сопротивления на микроскопическом уровне. Рассмотрим $2M$ -металлическую ленту, замкнутую в петлю длиной L , в которой протекает ток I_M (рис. 1). Внешнее электрическое поле \vec{D} направлено перпендикулярно к поверхности ленты. Задача состоит в нахождении соотношения между наведенным

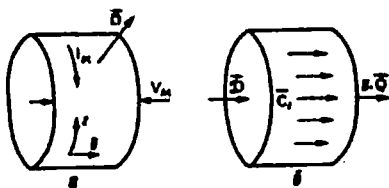


Рис. 1. Замкнутая лента Лафлина [7] для магнитного кольцевого тока.

поперечным магнитным током J_M и разностью магнитных потенциалов V_M на краях ленты. Поперечный магнитный ток через ленту равен адиабатической производной от полной энергии магнитных зарядов U по электрическому потоку Q через замкнутую петлю

$$J_M = \partial U / \partial Q.$$

Электрический поток, наводящийся круговым магнитным током, равен

$$\vec{Q} = \pi R^2 \vec{\mathcal{D}}, \quad (17)$$

где $R = L/2\pi$ - радиус круговой петли; $\vec{\mathcal{D}}$ - электрическая индукция через поверхность $\mathcal{S} = \pi R^2$, ограниченную кольцом, вектор которой равен

$$\vec{\mathcal{D}} = [\vec{I}_M \cdot \vec{R}] \epsilon_0 / 2R^2. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), находим значение модуля электрического потока

$$Q = \epsilon_0 L I_M / 4. \quad (19)$$

При постоянном значении длины кольца Лафлина $L = \text{const}$ изменение электрического потока (19) равно

$$\Delta Q = L \Delta C, \quad (20)$$

где $\Delta C = \epsilon_0 \Delta I_M / 4$ - изменение векторного электрического потенциала. Подставляя (20) в калибровку Ландау [8], можно учесть изменение ΔC :

$$C \rightarrow Z D_x + \Delta C = Z D_x + \Delta Q / L.$$

Гамильтониан системы с возмущением (20) запишем в форме

$$\hat{\mathcal{H}}^{Q+\Delta Q} = \frac{\hbar \omega_{CE}}{2} \left\{ -l_E^2 \nabla_z^2 + \left(\frac{Z + \Delta Q / D_x L}{l_E} + k l_E \right)^2 + \frac{2\mu H_z l_E}{\hbar \omega_{CE}} \left[(Z + \Delta Q / D_x L) / l_E \right] \right\}.$$

Тогда уравнение Шредингера с возмущением (20) имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_x^{Q+\Delta Q} \Psi^{Q+\Delta Q}(y, z) = W^{Q+\Delta Q} \Psi^{Q+\Delta Q}(y, z). \quad (21)$$

Изменение электрического потока ΔQ влияет на (21) двояко: в первом случае изменение ΔQ меняет только фазу волновой функции

$$\psi^{Q+\Delta Q}(y, z) = \psi^Q(y, z) \exp(ik\Delta z) = \psi^Q(y, z) \exp\left[2\pi i \cdot \frac{\Delta Q}{e} \cdot \frac{z_k}{L}\right] \quad (22)$$

при постоянном значении энергии

$$W^{Q+\Delta Q} = W^Q. \quad (23)$$

Здесь использовано предположение, что квант электрического потока равен $Q_0 = e$, т. е. заряду электрона. Решение (22), (23) соответствует локализованному состоянию, в котором при $z_k = L$ для исключения влияния электрического потока при $\Delta Q \neq 0$ необходимо выполнить условие

$$\Delta Q/e = \text{integer}.$$

Во втором случае изменение ΔQ поглощается частью волновой функции, принадлежащей гармоническому осциллятору

$$\psi^{Q+\Delta Q} = \exp(iky) \Phi_N\left(z - z_k + \frac{V_E}{\omega_{CE}} + \frac{\Delta Q}{D_x L}\right). \quad (24)$$

Для свободных магнитных зарядов смещение энергии запишем в виде

$$\Delta W(\Delta Q) = W^{Q+\Delta Q} - W^Q = \mu H_z \frac{\Delta Q}{D_x L}. \quad (25)$$

Решение (24), (25) уравнения Шредингера (21) соответствует делокализованным состояниям. Из выражения (25) следует, что щель между уровнями Ландау для магнитных зарядов сдвигается в направлении электрического поля \mathcal{E} (см. (17) и рис. 1). Если электрический поток увеличивается точно на целое число i квантов $\Delta Q = ie$, то j -й уровень Ландау сдвигается на величину энергетической щели и совпадает с невозмущенным $(j+1)$ -м уровнем Ландау:

$$\Delta W = \mu H_z ie / LD_x = \omega_{CE} \hbar.$$

Одновременно происходит перенос j -магнитных зарядов (в отсутствии спинового вырождения) с одного края ленты Лафлина на другой в магнитном поле

$$h_y = \Delta V_M / L_y = H_z \cdot i / j. \quad (26)$$

Здесь учтено, что $\Delta V_M = \Delta W / \mu$, а $j = L_z L_y / 2\pi l_E^2$. Магнитное напряжение V_M на краях ленты Лафлина в j раз меньше значения ΔV_M , поэтому поперечный магнитный ток в направлении оси y

$$J_M = \frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{\mu \Delta V_M}{ie} = (j/i) \cdot (h/e^2) \cdot V_M. \quad (27)$$

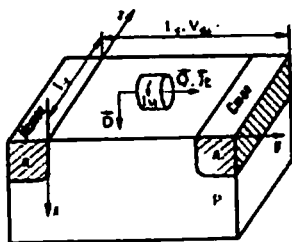


Рис. 2. Схематическое изображение поперечного сечения n -канального МДП-транзистора.

Используя взаимосвязь между магнитными и электрическими величинами

$$J_M/V_M = V_E/J_E, \quad (28)$$

выражение (27) перепишем в виде

$$J_E = (i/j) \cdot (e^2/h) V_E, \quad (29)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots$, значения которых находятся опытным путем при измерении тока стока МДП-транзистора, и поэтому формула (29) в концентрированной форме описывает квантовый эффект поля (КЭП).

В выражениях (26)–(29) использованы прописные буквы для обозначения физических величин, чтобы указать на индуцированный (т. е. наведенный внешними причинами) характер этих величин. Данный подход позволяет вместо решения задачи о наблюдаемости свободных магнитных зарядов в виде монополей Дирака [9] (последние экспериментально не обнаружены) решать задачу о взаимодействии квантов магнитного потока ($\mu = h/e$; $h/2e$), независимо от способа их получения, с электромагнитным полем, а также изучать последствия подобных взаимодействий.

1.3. Условия наблюдения КЭП. Сущность классического эффекта поля (ЭП) заключается во влиянии внешнего поперечного электрического поля \vec{D} на продольное электрическое сопротивление R_y (вдоль ускоряющего электрического поля) полупроводника. Внешние источники магнитного поля здесь отсутствуют. Наиболее известный полупроводниковый прибор, работа которого основана на ЭП, – это МДП-транзистор (идея последнего была запатентована в 1930 г. Лиленфельдом [10]). Упрощенный чертеж поперечного сечения МДП-транзистора с индуцированным n -каналом представлен на рис. 2. Электроны, инжектированные истоком, движутся в направлении стока под воздействием приложенного электрического напряжения V_{ds} , создавая при этом генеративную часть электрического тока стока I_E . Последний, в свою очередь, создает циркуляцию магнитного поля \vec{B} (I_E), наличие которой эквивалентно существованию замкнутого магнитного тока I_M в подходе Лаффлина

$$I_M = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = x_{in} L_y \left(\frac{\Delta B}{\Delta t} \right),$$

где $\Phi = x_{in} L_y \cdot B$ – магнитный поток через продольное сечение канала МДП-транзистора; x_{in} – толщина канала. Таким образом, в МДП-транзисторах нет необходимости в искусственном создании замкнутого тока магнитных зарядов, поскольку он создается естественным образом с помощью замкнутого магнитного потока.

Изменение индуцированного электрического заряда (20), в следо-
вательно, и электрической индукции (17) вдоль канала МДП-тран-
зистора вызывает дополнительный (омический) электрический ток
(29). Тогда суммарный ток стока в КЭП запишем в виде

$$I_{E\Sigma} = I_E + J_E = I_E + (i/j) \cdot R_H^{-1} V_{ds}.$$

Из вышесказанного следует, что дифференциальное омическое
сопротивление R_i индуцированного канала в режиме КЭП полно-
стью обусловлено электромагнитными эффектами

$$R_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta Q} = (j/i) R_H, \quad (30)$$

независимо от реального существования монополей Дирака
в твердом теле. Данный подход не противоречит ГОСТ 8.417-81
(СТ СЭВ 1052-78) „Единицы физических величин” при определе-
нии вебера: „Вебер равен магнитному потоку, при убывании кото-
рого до нуля в сцепленной с ним электрической цепи сопротивле-
нием 1 Ом через поперечное сечение проводника проходит коли-
чество электричества 1 Кл”. Данное определение вебера получено
по формуле

$$\Delta Q = \Delta \Phi / R,$$

где ΔQ – заряд (электрический поток), протекающий по замкнутой
цепи при изменении на $\Delta \Phi$ магнитного потока через поверхность,
ограниченную цепью [11].

Необходимым условием для наблюдения КЭП в МДП-транзис-
торах является создание поперечного электрического поля, рав-
ного (4), т. е. чтобы на межатомном расстоянии было падение
напряжения не меньше ширины запрещенной зоны в полупровод-
нике. Это условие легко выполняется в режиме сверхсильной
инверсии поверхности полупроводника МДП-транзистора.

Наличие изменения электрического потока ΔQ вдоль канала
МДП-транзистора приводит к изменению энергии уровней в виде
(25), поэтому при $\min\{\Delta Q\} = e$ и $\Delta W_E = \hbar \omega_{CE}$ можно найти оценку
величины циркулярного поля в КЭП

$$B_z \geq \mu_0 L_z (\epsilon_0 \varphi_{gap} / a)^2 / 2 \pi e m = 353,4 \text{ Тл}, \quad (31)$$

где $L_z = 4 \cdot 10^{-4}$ м. Тогда достаточным условием для наблюдения
КЭП будет превышение магнитного потока через поперечное сече-
ние канала МДП-транзистора над единичным квантом, т. е.

$$\Phi / \mu \geq 1. \quad (32)$$

Подставляя в (32) значение $x_{in} = a_{Si} = 5,431 \cdot 10^{-10}$ м, $L_y =$
 $= 10^{-4}$ м и B_z из (31), находим

$$\Phi / \mu = a L_y B_z e / \hbar = 4640,$$

т. е. при типичных значениях L_z и L_y для серийно выпускаемых МДП-транзисторов магнитного потока вполне достаточно для целочисленного квантования.

1. 4. Макроскопическое моделирование МДП-транзисторов. Эффект поля на поверхности полупроводника подложки МДП-транзистора характеризуется тремя режимами работы. Упрощенно концентрацию эквивалентного заряда на поверхности полупроводника можно найти из условия квазистатического равновесия [12]

$$N_{AS} = p_s - n_s = N_A \left\{ 1 - \exp \left[\frac{2(\varphi_s - \varphi_f)}{\varphi_T} \right] \right\} \exp \left(- \frac{\varphi_s}{\varphi_T} \right); \quad (33)$$

здесь рассмотрен акцепторный полупроводник подложки p -типа. Грубая аппроксимация (33) позволяет качественно рассмотреть все три известных режима поверхности (обогащение, обеднение и инверсии) в зависимости от знака и плотности заряда носителей.

Обогащение. В этом режиме границы энергетических зон на поверхности полупроводника изгибаются в сторону увеличения потенциала Ферми φ_f (т. е. вверх). Это приводит к увеличению концентрации дырок, которая определяется из (33) при $\varphi_s < 0$:

$$N_{AS} \approx N_A \exp \left[|\varphi_s| / \varphi_T \right] \gg N_A. \quad (34)$$

Данный режим поверхности полупроводника используется в МДП-транзисторах с обогащением (со встроенными каналами). Отметим, что поверхность полупроводника здесь вырождена, и поэтому зависимость (34) носит качественный характер.

Обеднение. В этом режиме, его еще называют режимом со слабой инверсией, границы энергетических зон на поверхности изгибаются в сторону уменьшения потенциала Ферми φ_f (т. е. вниз). Поэтому концентрация дырок у поверхности ниже, чем в объеме полупроводника что приводит к обнажению связанного отрицательного заряда, обусловленного ионами легирующей примеси (область ОПЗ). Справедливо полное выражение (33) для концентрации. Определенный интерес представляют граничные случаи режима:

а) $\varphi_s = 0$, тогда $N_{AS} = N_A$, а $p_s = p_v = N_A \gg n_s$. Здесь выполняется условие плоских зон и концентрация дырок значительно превышает концентрацию электронов;

б) $\varphi_s = 2\varphi_f$, тогда $N_{AS} = -N_A$, а $p_s = N_A \exp(-2\varphi_f/\varphi_T)$ и $n_s = N_A$, т. е. тип проводимости поверхности здесь изменился на инверсный, т. е. противоположный типу проводимости в объеме полупроводника.

Инверсия. Данный режим еще называют сильной инверсией с $\varphi_s \geq 2\varphi_f$, поскольку инверсный тип проводимости уже наблюдался частично и в режиме обеднения. Концентрация свободных носителей определяется по формуле [12]

$$N_{AS} = -N_A \exp \left[(\varphi_s - 2\varphi_f) / \varphi_T \right] = n_s \gg p_s \cdot p_v, \quad (35)$$

причем концентрация неосновных носителей на поверхности (S) подложки значительно превышает концентрацию основных носителей в объеме V полупроводника. МДП-транзисторы, работающие в данном режиме, называют транзисторами с индуцированными каналами. Поскольку состояние поверхности в режиме сильной инверсии также вырожденное, то зависимость (35) носит качественный характер.

Представленный выше упрощенный подход вполне оправдан, так как использование стандартного уравнения Пуассона для нахождения распределения зарядов по глубине полупроводника только усложняет задачу (см. [13]), но не решает ее, поскольку на поверхности полупроводника образуется индуцированная сверхрешетка (ИСР), и использование известных распределений зарядов становится неприемлемым. Стандартное уравнение Пуассона можно использовать для нахождения распределения фиксированного заряда ионизированных атомов примеси в ОПЗ

$$\begin{cases} d^2\varphi(x)/dx^2 = -e(-N_A)/\epsilon_0\epsilon_s; \\ \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=x_{опз}} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_s, \quad \varphi|_{x=x_{опз}} = V_{bs}. \end{cases}$$

Решение этого упрощенного уравнения имеет вид

$$x = \pm \frac{\alpha_D}{\sqrt{\varphi_T}} \int d\varphi / (\varphi - V_{bs})^{1/2} =$$

$$= 2\alpha_D \varphi_T^{-1/2} \left\{ (\varphi_s - V_{bs})^{1/2} - [\varphi(x) - V_{bs}]^{1/2} \right\}, \quad (36)$$

где $\alpha_D = [\epsilon_0\epsilon_s\varphi_T/2e(-N_A)]^{1/2}$ - дебаевская длина экранирования в полупроводнике подложки. Максимальную глубину проникновения электростатического поля в полупроводнике $x_{опз}$ находим из (36), положив $\varphi(x) = 0$,

$$x_{опз} = [2\epsilon_0\epsilon_s(\varphi_s - V_{bs})/e(-N_A)]^{1/2},$$

а полный заряд ОПЗ при $\varphi_s = 2\varphi_T$ запишем в виде

$$Q_B = -e(-N_A)x_{опз} = -[2\epsilon_0\epsilon_s e(-N_A)(2\varphi_T - V_{bs})]^{1/2}. \quad (37)$$

Величину порогового напряжения V_T можно найти из закона сохранения всех электрических зарядов в МДП-структуре

$$V_T = V_g|_{\varphi_s=2\varphi_T} = \varphi_{MS} + 2\varphi_T - \frac{Q_{fs} + Q_{fso} + Q_B + Q_{ss}}{C_0}, \quad (38)$$

где φ_{MS} - контактная разность потенциалов металл-полупроводник; Q_{fs}, Q_{fso} - соответственно заряды быстрых и медленных поверхностных состояний; Q_{ss} - заряд на поверхности диэлектри-

ка затвора; C_0 – удельная емкость окисла МДП-структуры. Таким образом, пороговое напряжение (38) раздвигает режимы слабой и сильной инверсии приповерхностного слоя полупроводника подложки. Подставляя (37) в (38), находим выражение

$$V_T = V_{T0} + \gamma \left[(2\varphi_F - V_{bs})^{1/2} - (2\varphi_F)^{1/2} \right],$$

где $V_{T0} = \varphi_{MS} + 2\varphi_F + \gamma (2\varphi_F)^{1/2} - (Q_{SS} + Q_{FS} + Q_{FS0}) / C_0$,

$$\gamma = [2\epsilon_0 \epsilon_s e (-N_A) C_0^{-2}]^{1/2},$$

V_{bs} – напряжение подложка-исток, которое справедливо для МДП-транзисторов несмотря на простоту его получения.

Заметим, что в (38) было использовано предположение о малой величине инверсного заряда, т. е. $Q_I \ll Q_B, Q_{SS} \dots$. Но при нахождении тока стока МДП-транзистора необходима полная информация об этом заряде. Последняя может быть получена только из микроскопической теории, основанной на определенных статистических распределениях. В наиболее полной макроскопической модели Са [14] МДП-транзистора, работающего в режиме сильной инверсии, указанная трудность была обойдена с помощью зарядового приближения, где вместо неизвестной функции распределения концентрации зарядов $n(x)$ использован усредненный заряд в виде

$$\int_0^{x_{in}} e \mu n(x) dx \approx \mu^* Q_I(y), \quad (39)$$

где μ^* – усредненное значение подвижности электронов; $Q_I(y)$ – заряд инверсионного слоя на единицу площади; x_{in} – толщина инверсионного канала (не определяемая как в модели Са, так и в других моделях на ее основе). Упрощенное выражение для тока стока МДП-транзистора, работающего в режиме сильной инверсии на крутом участке стоковых характеристик, при $V_{ds} \leq V_T$, имеет вид [14]

$$I_{dsI} \approx K_y [(V_{gs} - V_T) V_{ds} - 0,5 V_{ds}^2],$$

а на пологом участке при $V_{ds} > V_T$

$$I_{dsI} \approx K_y (V_{gs} - V_T)^2 / 2,$$

где $K_y = \mu^* L_z C_0 / L_y$ – удельная крутизна МДП-транзистора.

Режим слабой инверсии наиболее полно освещен в работе Свенсона и Мейндла [15], где использовано потенциальное приближение

$$\varphi_s - \Phi_c - 2\varphi_F \approx [V_g - V_T(\Phi_c)] / m$$

и физически корректно введена величина m -фактора неидеальности индуцированного p - n перехода:

$$m = (C_0 + C_d + C_{fs}) / C_0,$$

где C_d – удельная емкость ОПЗ; C_{fs} – удельная емкость быстрых поверхностных состояний; $\Phi_c = \varphi_{fn} - \varphi_{fp}$ – разность квазиуровней Ферми. Упрощенное выражение для тока стока МДП-транзистора, работающего в режиме слабой инверсии на пологом участке характеристики по Свенсону и Мейндлу [15],

$$I_{dwl} \approx K_y (m \varphi_T)^2 \exp\left(\frac{V_{gs} - V_T}{m \varphi_T}\right),$$

где $\varphi_T = kT/e$ – температурный потенциал.

Основным недостатком обоих подходов [14; 15], а также других [13], основанных на подобных представлениях, является невозможность нахождения толщины индуцированного канала (x_{in}) и невозможность корректного введения конечного значения дифференциального сопротивления (R_i) на пологом участке стоковых характеристик. Отметим, что модель Са [14] рассматривает режим сильной инверсии при значениях поверхностного потенциала $\varphi_s \approx 2\varphi_f$. Известно, что серийно изготавливаемые МДП-транзисторы с индуцированными p -каналами работают в диапазоне напряжений затвор-исток $V_{gs} \approx (3 \div 30)$ В, и поэтому реально $\varphi_s \gg 2\varphi_f$. При этом не следует преувеличивать значение более корректного микроскопического подхода, основанного на самосогласованном решении уравнения Шредингера и Пуассона с использованием статистики Ферми – Дирака в ОПЗ полупроводника подложки [16; 17].

Проблема определения толщины инверсионного канала была снята простым предположением о том, что $x_{in} \approx \lambda_B$ (где λ_B – длина дебройлевской волны электрона или дырки). В то же время положительным следствием развития данного направления явились теоретическое предсказание и в дальнейшем экспериментальное обнаружение ряда размерных эффектов квантово-механической природы, обусловленных квантованием движения не только электронов и дырок, но и фононов, экситонов и т. д. [18]. В рамках данных подходов проблема дифференциального сопротивления индуцированного канала вообще не ставилась, хотя квантование поперечного сопротивления канала в сильных магнитных полях было предсказано почти за пять лет до их обнаружения [6; 7; 18].

Проблема дифференциального сопротивления для режима слабой инверсии МДП-транзистора с распределением Максвелла – Больцмана носителей заряда была решена на макроскопическом уровне автором в работах [12; 19–21]. В качестве основных постулатов здесь были использованы предположения: а) о диффузном

характере тока стока и б) по разбивке индуцированного канала на две области. В первой ($0 \leq x \leq x_{gen}$) градиент концентрации носителей тока ∇n является функцией, зависящей от положения квазиуровней Ферми, а во второй ($x_{gen} \leq x \leq x_{gen} + x_{dif}$) — градиент концентрации постоянный. Они упростили задачу нахождения интеграла (39), а следовательно, и тока стока. Упрощенное выражение для тока стока МДП-транзистора, работающего в режиме слабой инверсии на пологом участке стоковых характеристик, имеет вид [12; 21]

$$I_{dwl} \approx (I_0 + V_{ds}/R_0) \exp\left(\frac{V_{gs} - V_T}{m\varphi_T}\right),$$

$$I_0 \approx e \mathcal{D}(-N_A) L_z \chi_{gen} / L_y,$$

$$R_0 \approx m\varphi_T L_y [e L_z \mathcal{D}(-N_A) \chi_{dif}]^{-1},$$

где I_0, R_0 — соответственно тепловые ток и сопротивление МДП-транзистора, разделяющие режимы слабой и сильной инверсии при $V_{gs} = V_T$; \mathcal{D} — коэффициент диффузии. Особенностью этой макроскопической модели является наличие двух компонент тока стока: генеративной I_0 , протекающей через первую область индуцированного канала ($0 \leq x \leq x_{gen}$), и дифференциальной $\sim V_{ds}/R_0$, протекающей через вторую область индуцированного канала ($x_{gen} \leq x \leq x_{gen} + x_{dif}$).

Коэффициент усиления МДП-транзистора в этой модели равен

$$m_{iwl} = S_g R_i \approx (R_0 I_0 + V_{ds}) / m\varphi_T \approx \frac{x_{gen}}{x_{dif}}$$

при $R_0 I_0 \gg V_{ds}$. Здесь $S_g = \partial I_d / \partial V_{gs}$ — крутизна управления по затвору, а $R_i = \partial V_{ds} / \partial I_d$ — дифференциальное сопротивление. Таким образом, измерение коэффициента усиления МДП-транзистора при известной температуре окружающей среды позволяет находить отношения толщин индуцированных каналов на практике.

Представления данной модели можно распространить и на режим сильной инверсии. Используя дополнительное предположение о квадратичном распределении носителей

$$n_{sI} = (-N_A) \left[1 + \frac{\varphi_s - 2\varphi_T}{\varphi_T} \right]^2, \quad (40)$$

поскольку распределение Максвелла — Больцмана здесь не работает, можно получить следующее аналитическое выражение для тока стока на пологом участке стоковых характеристик:

$$I_{dsI} \approx \left\{ I_0 + 2 \frac{V_{ds}}{R_0} \frac{m\varphi_T}{V_{gs} - V_T} \right\} \left(\frac{V_{gs} - V_T}{m\varphi_T} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что и в этом режиме коэффициент усиления МДП-транзистора

$$\eta_{iSI} \approx \frac{I_0 R_0}{m \varphi_T} \approx \frac{x_{gen}}{x_{dif}}$$

отображает информацию об отношении толщин индуцированных каналов. Эксперименты показали естественные границы области существования режима сильной инверсии с квадратичными стоковыми характеристиками

$$2\varphi_f \leq \varphi_s \leq \varphi_{gap}, \quad (41)$$

где φ_{gap} — ширина запрещенной зоны в полупроводнике подложки.

При больших значениях поверхностного потенциала, т. е. при $\varphi_s > \varphi_{gap}$, наступает режим сверхсильной инверсии (практически ранее не отделяемый от сильной инверсии) с пинейными стоковыми характеристиками. Используя дополнительные предположения о линейном характере распределения носителей

$$n_{SSI} \approx (-N_A) \left(1 + \frac{\varphi_{gap} - 2\varphi_f}{\varphi_T}\right)^2 \left(1 + \frac{\varphi_s - 2\varphi_f}{\varphi_T}\right), \quad (42)$$

можно получить следующее аналитическое выражение для тока стока:

$$\begin{cases} I_{dSSI} \approx I_0^* (V_{gs} - V_T^*) / m \varphi_T + V_{ds} / R_0^*, \\ I_0^* \approx I_0 \left[(\varphi_{gap} - 2\varphi_f) / m \varphi_T \right]^2, \\ R_0^* \approx m \varphi_T R_0 / 2 (\varphi_{gap} - 2\varphi_f), \\ V_T^* \approx V_T + \varphi_{gap} - 2\varphi_f, \end{cases}$$

где I_0^* и R_0^* — соответственно термостабильные ток и сопротивление, разделяющие режимы сильной и сверхсильной инверсии при напряжении на затворе, равном $V_{gs} \approx V_T^*$ — термостабильному порогу. Замечательным следствием макроскопической модели для данного режима является постоянство дифференциального сопротивления

$$R_{iSSI}(V_{ds}) = R_0^* = \text{const}.$$

Предположения (40)–(42) являются чисто макроскопическими, вызванными к жизни необходимостью теоретического описания опытных данных и пока не достаточно обоснованными на микрокопическом уровне. Они являются косвенным следствием образования ИСП в приповерхностном слое полупроводника с осциллирующим потенциалом $\varphi(x)$. Напомним, что уравнение Пуассона предсказывает монотонное изменение $\varphi(x)$ с глубиной.

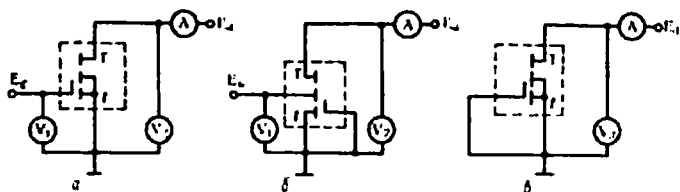


Рис. 3. Упрощенные электрические схемы измерения параметров МДП-транзисторов.

1. 5. Экспериментальные исследования серийных МДП-транзисторов. Исследования КЭП в основном проводились на серийно выпускаемых отечественной промышленностью МДП-транзисторах типов КП301Б и КП304А. Электрические схемы измерения параметров, работающих в различных режимах транзисторов, представлены на рис. 3. Здесь E_g, E_d — соответственно источники входного управляющего и выходного напряжений; V_1, V_2 — соответственно входной и выходной измерительные вольтметры (класс точности для V_1 не хуже $\leq 0,02$, а для V_2 — не хуже $\leq 0,1$); A — измеритель постоянного тока (лучше использовать стрелочный прибор с классом точности не хуже $\leq 0,5$ или электрометрический усилитель); t° — регулируемый термостат, внутри которого помещался исследуемый транзистор. Поскольку МДП-транзисторы имеют $p-n$ переходы истока и стока [13] для обеспечения монополярной проводимости, то их можно использовать и как биполярные приборы, с управлением со стороны вывода подложки [22; 23] (рис. 3, б) и просто как полупроводниковый диод (рис. 3, в).

Режим слабой инверсии с экспоненциальными характеристиками достаточно подробно исследован в работах [12; 21]. Поскольку саморазогрев МДП-транзисторов в диапазоне токов $10^{-11} - 10^{-5}$ А невелик, точность измерения выходных параметров полностью определяется погрешностью электрометрического усилителя ($\approx 1,0$). Интересным явлением с точки зрения квантовой механики оказалось квантование коэффициента усиления МДП-транзистора

$$M_{jw} \approx x_{gen}/x_{dif} \approx j/2\alpha, \quad j=1,2,\dots, \quad (43)$$

где α — постоянная тонкой структуры. Результаты теоретической обработки сотен измеренных характеристик МДП-транзисторов различных типов приведены в табл. 2.

Минимальное значение $j=1$ имеет место с достаточно высокой точностью у большинства МДП-транзисторов с индуцированными p -каналами, работающих в полевом режиме ($j=2, 3, \dots$ могут наблюдаться у биполярных транзисторов, а также у МДП-транзисторов, работающих в биполярном режиме).

Режим сильной инверсии МДП-транзисторов с квадратичными характеристиками получил наибольшее распространение в на-

стоящее время в технических приложениях [13]. В данном диапазоне токов стока 10^{-5} – 10^{-3} А весьма существенными являются процессы саморазогрева МДП-транзистора при комнатных температурах, которые ограничивают точность измерения выходного тока стока до уровней 1–5 %. Использование импульсных методов измерения не улучшает положения, поскольку точность измерения напряжения и токов здесь также не превышает значения ≤ 1 %. Самым главным и непредсказуемым с точки зрения традиционного макроскопического подхода [13; 14] было обнаружение того, что температуростабильная точка при $V_{GS} = V_T^*$ разделяет два режима работы МДП-транзистора с квадратичными и линейными зависимостями тока стока от управляющего напряжения на затворе. На рис. 4–6 представлены результаты измерений характеристик МДП- и биполярных транзисторов, измеренные при следующих постоянных значениях температуры: $T_1 = 293$ К, $T_2 = 368$ К, $T_3 = 418$ К, $T_4 = 453$ К и $T_5 = 503$ К. Точность поддержания температуры в термостате порядка ± 5 К. Поскольку диапазон исследованных температур был достаточно широк, то не удивительно было обнаружение критической температуры $T_C = (420 \pm 5)$ К, предсказываемой ранее для примесных полупроводников [24], и при которой резко изменялась зависимость выходного тока от входного напряжения. При температуре $T = T_C$ концентрация носителей в примесном полупроводнике (N_{np}) становится собственной, т. е.

$$p \approx N_{np} = n_i$$

Таблица 2. Результаты экспериментального определения коэффициента усиления МДП-транзистора в режиме слабой инверсии

Тип транзистора	$R_i, \text{ Ом}$	$I_d, \text{ А}$	m	$\frac{R_i I_d}{m \varphi_T}$
КП304А	$3,55 + 07$	1–07	2,07	69
	$3,50 + 08$	1–08		
	$3,50 + 09$	1–09		
КП301Б	$5,27 + 07$	1–07	2,62	81
	$5,18 + 08$	1–08		
	$5,30 + 09$	1–09		
К1КТ902	$4,27 + 07$	1–07	2,01	85
	$4,21 + 08$	1–08		
	$4,23 + 09$	1–09		
К1КТ901	$4,79 + 07$	1–07	2,37	82,5
	$4,86 + 08$	1–08		
	$4,83 + 09$	1–09		
К1КТ682Б	$4,52 + 07$	1–07	2,37	77
	$4,49 + 08$	1–08		
	$4,54 + 09$	1–09		

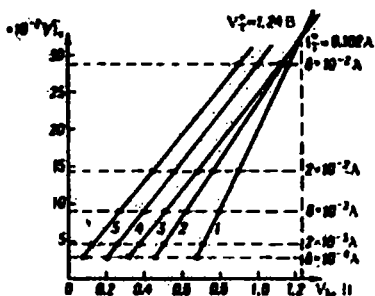


Рис. 4. Коллекторно-базовые характеристики биполярного транзистора КТ203 (прямое включение), измеренные при температурах: 1 – 20 °С; 2 – 95 °С; 3 – 145 °С; 4 – 180 °С и 5 – 230 °С.

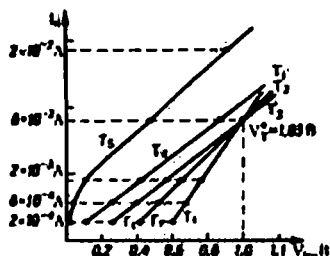


Рис. 5. Сток-подложки характеристики транзистора КП301Б (биполярный режим).

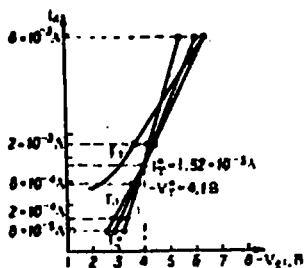


Рис. 6. Сток-затворные характеристики транзистора КП304А (полевой режим).

где p – концентрация дырок в полупроводнике подложки n -типа. Используя для собственной концентрации аппроксимацию вида

$$n_i \approx (8\pi mk/h^2)^{3/2} \cdot T^{3/2} \cdot \exp\left[-\frac{mc^2\alpha^2}{16\pi kT}\right] \approx 1,931728 \cdot 10^{16} \cdot T^{3/2} \cdot \exp\left[-\frac{6282,183}{T}\right], \text{ см}^{-3} \quad (44)$$

и подставляя в нее значение $T_c = 420 \text{ К}$, находим $n_i = 5,307 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Данное значение очень близко к величине

$$N_B = \lambda_B^{-3} = (\alpha^{5/2}/\lambda_0)^3 = 5,272198 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

где $2\lambda_B = \lambda_0/\alpha^{5/2}$ – дебройлевская длина волны частицы; λ_0 – комптоновская длина волны электрона; α – постоянная тонкой структуры. Таким образом, заряженные носители генеративной составляющей тока стока имеют характерный размер порядка длины волны де Бройля, что согласуется с экспериментальными данными для измерений коэффициента усиления (43). Полагая в выражении (44) $n_i = N_B$, можно итерационным путем найти более точное значение критической температуры

$$T_{c\text{th}} = 419,8336 \text{ К}; \quad (45)$$

здесь надо помнить, что оценка (45) получена исходя из моделирования области слабой инверсии с распределением Максвелла – Больцмана.

В табл. 3 приведены значения термостабильного тока I_T^* полевых и биполярных транзисторов. Полученные значения I_T^* делят

Таблица 3. Термостабильный ток транзисторов

Тип транзистора	I_T^*, A	V_T, B	$J \cdot I_{\infty}, A$
КП301Б, № 1	7,9-03	1,01	$8 \cdot I_2 \approx$ 8,433-03
КП301Б, № 22	1,94-02	1,02	$I_{3/2} \approx$ 1,234-02
КП301Б, № 13	1,21-02	1,00	$I_{3/2} =$ 1,234-02
КП304А, № 8	1,21-02	0,92	$I_{3/2} =$ 1,234-02
КП304А, № 23	1,99-02	1,05	$I_{3/2} =$ 1,234-02
КТ363Б, включение инверсное	8,25-02	1,18	$7 I_{3/2} =$ 8,638-02
КТ203, включение прямое	8,3-02	1,20	$7 I_{3/2} =$ 8,638-02
КТ203, включение инверсное	2,8-02	1,20	$2 I_1 =$ 2,889-01
КТ316, включение прямое	2,7-01	1,20	$2 I_1 \approx$ 2,869-01
КТ316, включение инверсное	3,0-01	1,20	$2 I_1 =$ 2,889-01

возможность говорить о квантованном характере термостабильного тока в виде

$$I_T^* \approx j I_{\alpha} = j I_e \alpha^{\alpha}; \quad j, \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (46)$$

где $I_e = e \cdot C / \lambda_0$ – максимальный квант тока дебройлевской частоты. Сравнительно невысокая точность совпадения измеренных значений I_T^* с (46) объясняется тем, что измерения тока проводят при достаточно больших значениях напряжения сток – исток ($V_{ds} = 10$ В), и поэтому необходимо учитывать также прирост тока стока за счет конечного значения дифференциального сопротивления R_i , равный

$$\Delta I = V_{ds} \cdot R_i, \quad (47)$$

что не всегда возможно при таком способе измерений.

Поскольку в биполярных транзисторах прирост тока (47) почти на порядок меньше, чем в МДП-транзисторах, то и результаты определения I_T^* для них оказались лучше (ср. табл. 3, строки 6–10). Поскольку $\lambda_B (\alpha = 1) = \lambda_0 / \alpha = 3,324917 \cdot 10^{-10}$ м практически совпадает с постоянной решетки для кремния, то данные I_T^* для биполярных транзисторов убедительно показывают наличие сильного электрического поля (порядка (4)), достаточного для проявления эффекта КЭП. Высокая точность совпадения температуростабильных токов с квантами (46) сохраняется и для p - n переходов, данные по которым приведены в табл. 4. Здесь наблюдался один квант тока $I_{3/2}$ и один квант $8 \cdot I_{3/2}$.

При $V_{gs} = V_T^*$ поверхностный потенциал φ_s становится равным ширине запрещенной зоны φ_{gap} в полупроводнике подложки. Как видно из рис. 4–6, для биполярных транзисторов и p - n переходов φ_s измеряется практически непосредственно

$$\varphi_{s \text{ exp}} \approx V_T^* \pm \Delta \varphi_{MS},$$

т. е. с точностью до контактной разности потенциалов металл–полупроводник. Но для МДП-транзисторов процесс измерения φ_s при $V_{gs} = V_T^*$ более сложный. Здесь кроме V_T^* необходимо измерять еще одно значение напряжения $V_{gs \min}$, при котором происходит насыщение тока стока снизу в режиме слабой инверсии МДП-транзистора. Тогда

$$\varphi_{gap} \approx |V_T^* - V_{gs \min}|.$$

Измеренные данные для токов утечки $I_{d \min}$ и напряжений V_T^* , $V_{gs \min}$ при $T = 293$ К приведены в табл. 5.

Режим сверхсильной инверсии при $\varphi_s > \varphi_{gap}$ является наиболее интересным и парадоксальным из всех режимов работы МДП-транзистора. Формально аналитическую зависимость для генеративной части стока можно аппроксимировать выражением

$$I_{SSI} = n_B \left\{ I_2 + I_{5/2} \left[1 + \frac{\varphi_{gap}}{2\varphi_T} \right] \left(\frac{V_{gs} - V_T^*}{\varphi_{gap}} \right) \right\}, \quad (48)$$

где $n_B = 1, 2, \dots$ - число дебройлевских пузырей, находящихся одновременно (параллельно, но не последовательно) в пределах столкновительной длины. Из (48) можно найти значение обратной крутизны сток-затворной характеристики МДП-транзистора при $n_B = 1$

$$S_{SSI}^{-1} = \frac{\partial V_{gs}}{\partial I_d} = \varphi_{gap} \left\{ I_{5/2} \left[1 + \frac{\varphi_{gap}}{2\varphi_T} \right] \right\}^{-1};$$

здесь использовано приближение $V_{gs} - V_T^* = \varphi_{gap} \approx U_0 \alpha^2$, где $U_0 = m_0 c^2 / 8\pi e = 20332,18$ В. Интересно отметить, что отношение

Таблица 4. Термостабильный ток p - n переходов

Тип транзистора	I_T^* , А	V_T^* , В	$\mathcal{J} \cdot I_{\mathcal{Z}}, \times 10^{-2}$ А
КП301Б, № 22 подложка-сток	1,33-02	1,09	$I_{3/2} = 1,234$
КП301Б, № 13 подложка-сток	1,25-02	1,02	"
КП301Б, № 13 подложка-исток	1,30-02	1,02	"
КП304А, № 43 подложка-исток	1,21-02	0,97	"
КП304А, № 43 подложка-сток	1,30-02	0,98	"
КП304А, № 8 подложка-сток	1,10-03	0,93	$I_2 = 0,1054$
КТ363Б база-эмиттер	9,80-02	1,20	$8 I_{3/2} = 9,872$
КТ363Б база-коллектор	9,61-02	1,20	"

Таблица 5. Ширина запрещенной зоны в полупроводнике подложки МДП-транзистора

Тип транзистора	I_{dmin} , А	I_T^* , А	V_{gsmin} , В	V_T^* , В	φ_{gap} , В
КП301Б, № 1	5-13	4,84-04	3,7	4,9	1,2
КП301Б, № 2	8-13	6,0-04	3,5	4,8	1,3
КП304А, № 1	4-12	1,5-03	2,8	4,1	1,3
КП304А, № 2	3-12	2,0-03	3,0	4,2	1,2

холловского кванта сопротивления R_H к величине обратной крутизны при критической температуре $T = T_C$ равно

$$R_H / S_{SSI}^{-1}(T_C) \approx \frac{25803,15 \text{ Ом}}{753,1552 \text{ Ом}} = 34,26006 \quad (49)$$

и очень близко значению постоянной тонкой структуры для магнитных зарядов [9]:

$$\beta = 1/4\alpha = 34,25901$$

(с погрешностью порядка ~ 30 ppm).

Значит, ограничение температуры сверху, при которой еще может существовать металлическая фаза 2М-системы, определяется свойствами индуцированных электрических и магнитных зарядов. Положив $S_{SSI}^{-1} = \beta R_H$, можно найти уточненное значение для критической температуры в режиме сверхсильной инверсии

$$T_{C_{SSI}} = eU_0\alpha^2/2k [U_0\alpha/4R_H I_{5/2}^{-1}] = 420,0157 \text{ К.}$$

Экспериментальная проверка отношения (49), т. е. измерение коэффициента усиления на начальном участке сверхсильной инверсии, проводилась на серийных МДП-транзисторах типов КП304А и КП301Б. Полученные данные приведены в табл. 6. Измерения здесь проводились при температуре, близкой к критическому значению $T_{C_{exp}} = (418 \pm 5) \text{ К}$. Из таблицы следует, что в действительности вместо R_H нужно брать значение R_i^* типа (30). Тогда (49) можно переписать в уточненном виде

$$m_{SSI} = R_i^* S_{SSI} = R_H S_{SSI} \cdot j/i.$$

На опыте было получено три значения отношения целочисленных величин $(j/i)_{exp} = \beta/m_{exp} = 1/2; 1; 2$ с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Типичные функциональные зависимости обратной крутизны S^{-1} МДП-транзисторов с индуцированными p -каналами, работающих в режиме со сверхсильной инверсией, представлены на рис. 7; 8. Сток-затворные характеристики здесь измерялись при постоянной

Таблица 6. Коэффициент усиления МДП-транзистора в режиме со сверхсильной инверсией при критической температуре

Тип транзистора	$S_{SSI}^{-1}, \text{ Ом}$	$R_i, \text{ Ом}$	$R_i S_{SSI}$	β/RS
КП304, № 20	320	5450	17,03	2,01
КП304, № 10	375	12850	34,27	1,00
КП304, № 2	500	34400	68,80	0,498
КП301, № 16	750	25800	34,40	0,996
КП301, № 11	1030	34500	33,50	1,02
КП301, № 2	1030	34450	33,45	1,02
КП301, № 14	1500	52000	34,67	0,988

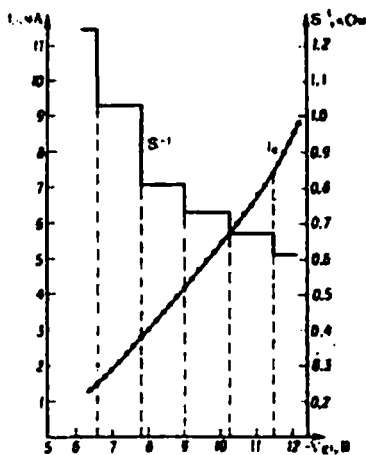
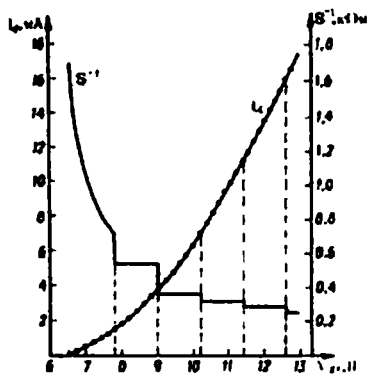


Рис. 7. Сток-затворные характеристики транзистора КР304А, измеренные в режиме сверхсильной инверсии при температуре $T = 418\text{ K}$ и напряжении сток-исток $V_{ds} = -11,0\text{ В}$.

Рис. 8. Сток-затворные характеристики КР301В, измеренные при $T = 418\text{ K}$ и $V_{ds} = -11,0\text{ В}$.

повышенной температуре $T = (418 \pm 5)\text{ K}$ и постоянном значении напряжения сток-исток ($V_{ds} = -11,0\text{ В}$). Из этих рисунков видно, что значение обратной крутизны не только постоянно в режиме сверхсильной инверсии, но и квантуется с периодом изменения напряжения затвор-исток, равным $V_{gs} = 1,20\text{ В}$, что практически совпадает со значением ширины запрещенной зоны в кремнии $\varphi_{gap}(0) = 1,21\text{ В}$. Наличие квантования обратной крутизны является экспериментальным подтверждением появления индуцированной сверхрешетки (вдоль оси x) в поверхностном слое полупроводника подложки (т. е. возникает как бы ряд параллельно включенных индуцированных каналов). Если бы температура в приповерхностном слое подложки была изотропной функцией (т. е. $\nabla T(x, y, z) = 0$), то квантование крутизны было бы трудно заметить, особенно при больших Π_B . Существование градиента температуры $dT/dx < 0$ в МДП-транзисторах обнаружения квантования S_{SSI}^{-1} . Кроме того, на начальном этапе $\Pi_B > 1$, и с ростом оно скачкообразно уменьшается до 1, что также облегчает обнаружение квантования S_{SSI}^{-1} .

Повышение точности нахождения Γ_T^* оказалось возможным (с учетом (47)) для МДП-транзисторов, работающих в режиме сверхсильной инверсии, в диапазоне изменения управляющих напряжений $\Delta V_{gs} = V_{gs} - V_T^* = (4 - 6)\varphi_{gap}$ (см. рис. 7; 8). Значения Γ_T^* , определенные по данному способу, представлены в табл. 7

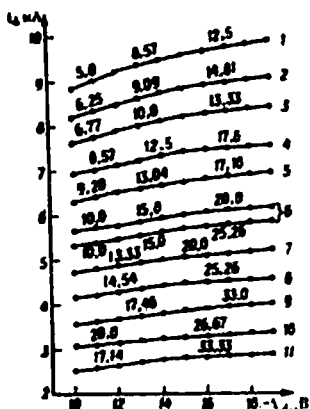


Рис. 9. Стоковые характеристики КП301Б, измеренные в режиме сверхсильной инверсии при температуре $T = 393$ К и напряжениях затвор-исток: 1 – 12,1 В; 2 – 11,6 В; 3 – 11,1 В; 4 – 10,6 В; 5 – 10,1 В; 6 – 9,6 В; 7 – 9,1 В; 8 – 8,6 В; 9 – 8,1 В; 10 – 7,6 В; 11 – 7,1 В; о – точки излома.

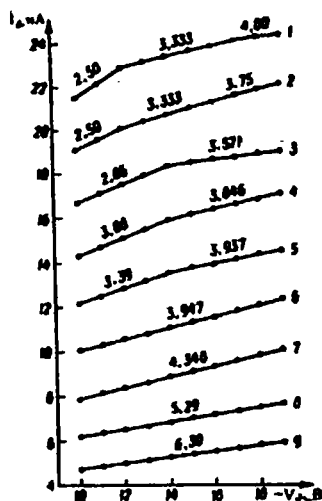


Рис. 10. Стоковые характеристики КП304А, измеренные в режиме сверхсильной инверсии при температуре $T = 393$ К и напряжениях затвор-исток: 1 – 10,6 В; 2 – 10,1 В; 3 – 9,6 В; 4 – 9,1 В; 5 – 8,6 В; 6 – 8,1 В; 7 – 7,6 В; 8 – 7,1 В и 9 – 6,6 В.

(в третьей колонке проведен учет вклада дифференциального сопротивления ΔI_R). Из табл. 7 видно, что при температурах $T \approx T_C$ температуростабильный ток МДП-транзисторов (с точностью до погрешности измерений) равен кванту тока I_2 (см. уравнение (46)) для МДП-транзисторов КП301Б и КП304А.

Типичные стоковые характеристики МДП-транзисторов, работающих при сверхсильной инверсии, представлены на рис. 9, 10.

Таблица 7. Определение термостабильного тока МДП-транзистора в режиме сверхсильной инверсии

Тип транзистора	I_T^* , мА	ΔI_R , мА	I_O^* , мА	V_T^* , В
КП301, № 14	1,3	0,2	1,1	5,40
КП301, № 11	1,3	0,2	1,1	5,70
КП301, № 2	1,5	0,3	1,2	6,60
КП301, № 16	1,8	0,6	1,2	6,20
КП304, № 2	1,3	0,2	1,1	7,80
КП304, № 10	2,2	1,1	1,1	5,10
КП304, № 20	2,8	1,6	1,2	6,00

Таблица 8. Дифференциальное сопротивление МДП-транзистора КП301Б в режиме сверхслабой инверсии

$-V_{gs}$, В	$R_{i\text{exp}} / R_{i\text{th}}, \text{КОМ}$											
	T = 368 К				T = 393 К				T = 418 К			
7,07	-	20,86 /20,65	33,33 /34,42	-	17,14 /17,21	33,33 /34,42	-	-	-	-	-	33,9 /34,42
7,57	-	21,0 /20,65	27,0 /25,81	-	20,0 /20,65	26,67 /25,81	-	-	-	20,0 /20,65	20,0 /20,65	25,57 /25,81
8,09	-	-	20,0 /20,65	-	17,46 /17,21	33,0 /34,42	-	-	-	17,15 /17,21	17,15 /17,21	25,08 /25,81
8,60	-	13,1 /12,91	20,83 /20,65	-	14,54 /14,75	25,26 /25,81	-	-	-	-	-	20,0 /20,65
9,10	-	12,5 /12,91	20,0 /20,65	-	13,33 /12,91	20,0 /20,65	-	-	-	13,33 /12,91	13,33 /12,91	17,46 /17,21
9,60	9,23 /9,386	15,38 /14,75	18,18 /17,21	10,0 /10,32	15,0 /14,75	17,39 /17,21	11,43 /11,47	15,0 /14,75	15,0 /14,75	15,0 /14,75	15,0 /14,75	17,86 /17,21
10,1	6,77 /6,883	12,5 /12,91	15,0 /14,75	9,20 /9,386	13,04 /12,91	17,18 /17,21	8,00 /7,942	13,33 /12,91	13,33 /12,91	13,33 /12,91	13,33 /12,91	17,8 /17,21
10,6	9,29 /9,386	10,3 /10,32	12,5 /12,91	8,57 /8,604	12,5 /12,91	17,6 /17,21	8,00 /7,942	10,9 /10,32	10,9 /10,32	10,9 /10,32	10,9 /10,32	16,9 /17,21
11,1	5,71 /5,736	8,57 /8,604	15,0 /14,75	6,77 /6,883	10,0 /10,32	13,33 /12,91	6,45 /5,453	10,7 /10,32	10,7 /10,32	10,7 /10,32	10,7 /10,32	14,8 /14,75

Таблица 9. Дифференциальное сопротивление МДП-транзистора КП304А в режиме сверхслабой инверсии

-V _{gs} , В	R _{iexp} /R _{i th} , кОм							
	T = 368 К		T = 393 К		T = 418 К			
6,6	-	5,696 /5,736	-	-	5,902 /6,073	-	-	6,207 /6,073
7,1	-	5,161 /5,162	-	4,706 /4,693	5,556 /5,434	-	-	5,161 /5,162
7,6	-	4,571 /4,489	-	-	4,848 /4,916	-	-	5,00 /4,916
8,1	-	3,636 /3,687	4,347 /4,302	3,774 /3,687	4,73 /4,693	-	-	4,444 /4,489
8,6	-	3,75 /3,687	4,167 /4,130	3,774 /3,687	4,237 /4,302	-	3,448 /3,441	4,237 /4,302
9,1	-	3,336 /3,330	4,167 /4,130	3,333 /3,330	4,444 /4,489	-	3,333 /3,330	4,167 /4,130
9,6	-	3,226 /3,226	4,166 /4,130	3,00 /3,036	4,167 /4,130	-	3,333 /3,330	4,31 /4,302
10,1	2,50 /2,518	3,75 /3,687	4,688 /4,693	3,333 /3,330	3,846 /3,824	-	3,077 /3,076	4,545 /4,489
10,6	2,50 /2,518	3,75 /3,687	4,688 /4,693	3,333 /3,330	3,75 /3,687	2,727 /2,717	2,857 /2,868	4,00 /3,971

Из этих рисунков видно, что ток стока при увеличении напряжения сток-исток изменяется не только линейно (это было уже известно для режимов слабой и сильной инверсий [12; 19–21]), но и изменяет свой наклон при определенных пороговых напряжениях. Данное обстоятельство упрощает расчет дифференциального сопротивления, а также повышает точность измерений. Значения дифференциального сопротивления R_i на рисунках указаны над каждой линейной областью характеристик (в единицах СИ – кОм). Для уменьшения вклада саморазогрева МДП-транзистора использовались повышенные значения температуры, близкие к критическому значению T_C . Безусловно, еще более высокую точность можно достичь при использовании компенсационного метода измерений с измеряемым и опорным (образцовым) МДП-транзисторами, выполненными на одной полупроводниковой подложке. Результаты расчета дифференциальных сопротивлений по стоковым характеристикам, измеренным при различных температурах и напряжениях затвор-исток, приведены в табл. 8 для транзистора КП301Б и табл. 9 – для транзистора КП304А. Данные теоретических вычислений R_i по формуле (30) для $j = 4$ приведены в таблицах под каждым значением измеренного сопротивления. Естественное объяснение для $j = 4$ вытекает из того, что для наблюдения КЭП, т. е. расщепления уровней энергии движения магнитного заряда в электрическом поле, необходимо наличие как минимум двух уровней, а учет спина и принципа Паули добавляет еще одну двойку. В то же время естественных ограничений на величину $i \geq 1$ нет, и количество индуцированных электрических зарядов может быть произвольным.

Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что в диапазоне температур до $T = T_C$ в МДП-транзисторах, работающих в режиме со сверхсильной инверсией, наблюдается КЭП, заключающийся в квантовании дифференциального сопротивления в форме (30) и напоминающий КЭХ. Поскольку сопротивление в КЭП измеряется на фоне достаточно большого генеративного тока, то точность наблюдения сопротивления в КЭП значительно ниже, чем в КЭХ.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

2.1. Энергия, температура и энтропия. Стандартное определение температуры в статистической физике, основывающееся на описании движения частицы в замкнутом трехмерном (3М-) ящике [25], с помощью уравнения Шредингера [26] наталкивается на определенные трудности для двумерной (2М-) системы, так как в этом случае предсказывается бесконечное значение температуры. В то же время практика показывает существование 2М-систем не только при больших температурах, но и при очень низких ($T = 0\text{K}$) в твердом теле [18]. Поскольку для твердого тела характерен двухчастичный механизм проводимости (например, частицы и дырки), то целесообразно рассмотреть двухчастичные движения в замкнутом 2М-ящике и найти его температуру.

Система стационарных уравнений Шредингера [26], описывающая двухчастичные движения в 2М-системе, имеет вид

$$-\frac{\hbar}{2m_j} \left[\frac{d^2\psi_j}{dy^2} + \frac{d^2\psi_j}{dz^2} \right] = W_j \psi_j, \quad (50)$$

где $j = 1, 2$ (частицы двух сортов); ψ_j – волновая функция

$$\psi_j = A_{0j} \exp [i(yk_{yj} + zk_{zj})];$$

m_j – масса j -й частицы; $\hbar = h/2\pi$; k_j – волновой вектор. Для ограниченного 2М-объема $\{0 \leq y \leq L; 0 \leq z \leq L\}$ нормировка волновой функции $\psi_j(0) = \psi_j(L) = 0$ налагает следующие ограничения на значения волновых векторов:

$$(k_{yj} + k_{zj})L = \pi(n_{yj} + n_{zj}) = \pi l, \quad (51)$$

где $l = n_{yj} + n_{zj} = 1, 2, \dots$

Получим общее решение системы уравнений (50)

$$W_j = W_{0j} \pi(n_{yj}^2 + n_{zj}^2), \quad (52)$$

$$W_{0j} = (\hbar/L)^2 (8\pi m_j)^{-1}. \quad (53)$$

Радиусы 2М-сфер двухчастичных состояний запишем в виде

$$R_j = (n_{yj}^2 + n_{zj}^2)^{1/2} = (W_j / \pi W_{0j})^{1/2},$$

а число состояний для каждой из частиц в интервале энергий от 0 до W_j составляет

$$\Phi_j = 2 \left[\frac{1}{4} (\pi R_j^2) \right] = W_j / 2 W_{0j} .$$

здесь учтено, что обе частицы принадлежат классу Ферми-частиц.

Полное число состояний частиц обоих сортов в 2М-системе имеет вид

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_1 \times \Phi_2 = W_1 W_2 / 4 W_{01} W_{02} . \quad (54)$$

В силу сложившейся традиции обычно рассматривают состояния (52) на квазинепрерывном участке, когда $W_j \gg W_{0j}$ [25]. Ниже рассмотрим противоположный случай, когда значения энергии (52) находятся вблизи основного состояния (53). При таком подходе возникает естественная нормировка выражения (54)

$$\Phi_{\Sigma} = 1 ,$$

приводящая к замкнутости двухчастичных состояний 2М-системы, запертой в 2М-ящике, а также к соотношению

$$W_j = 2 W_{0j} . \quad (55)$$

Последнее равенство означает, что полная энергия двухчастичных состояний $W(2)$ равна удвоенному значению энергии одночастичных состояний $W(1)$:

$$W_j(2) = 2 W_j(1) = 2 W_{0j} .$$

Число состояний в интервале энергий от W_j до $W_j + \delta W_j$ составляет

$$\Omega_j = \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dW_j} \cdot \delta W_j ,$$

а суммарное число двухчастичных состояний в интервале энергий от W_j до $W_j + \delta W_j$ —

$$\Omega_{\Sigma} = \Omega_1 \times \Omega_2 = \frac{W_1 W_2 \delta W_1 \delta W_2}{16 (W_{01} W_{02})^2} . \quad (56)$$

Будучи последовательным, необходимо и здесь применить нормировку замкнутости двухчастичных состояний 2М-системы

$$\Omega_{\Sigma} = 1 , \quad (57)$$

из которой с учетом (1.9) найдем соотношение

$$\delta W_j = 2 W_{0j} ,$$

т. е. минимальные порции энергии в основном состоянии также дискретные и определяются энергией этого состояния.

Значение (57) для Ω_{Σ} приводит к равенству нулю энтропии замкнутых двухчастичных состояний в 2М-ящике

$$S_{2M} = k \ln \Omega_{\Sigma} = 0 .$$

Последнее выражение предполагает, что сформированная указанным способом двухчастичная система представляет собой квантовый объект макроскопических размеров (L – параметр длины). В то же время температура здесь принимает дискретные значения

$$T_j = \frac{\Omega_\Sigma}{k} \cdot \left(\frac{\partial \Omega_\Sigma}{\partial E_j} \right)^{-1} = \frac{W_j}{k} = \left(\frac{h}{L} \right)^2 (8\pi k m_j)^{-1}, \quad (58)$$

причем температура двухчастичных состояний системы равна $T_j(2) = 2W_{0j}/k$, а одночастичных состояний двухчастичной системы – $T_j(1) = \frac{W_{0j}}{k}$ (здесь k – постоянная Больцмана). В заключение отметим, что необходимым условием для проявления макроскопических квантовых явлений является требование превышения кванта температуры (58) над значением температуры среды, окружающей 2М-ящик.

2.2. Плотность одночастичных состояний и концентрация частиц. Плотность одночастичных состояний $N_j(W_j)$ (где $j = 1, 2$ – частицы двух сортов) 2М-системы может быть выражена через полное число состояний в диапазоне энергий от W_j до $W_j + \delta W_j$ (см. выражение (56))

$$\Omega_\Sigma = \frac{W_1 W_2 \delta W_1 \delta W_2}{16(W_{01} W_{02})^2} = N_1(W_1) N_2(W_2) L^4 \delta W_1 \delta W_2.$$

Для случая $N_1 = N_2$ (всегда выполняется на практике), имеем

$$N_j = W_j / 4 W_{0j}^2 L^2.$$

Одночастичная концентрация носителей тока одного из сортов частиц в 2М-системе может быть представлена (для $W_j = 2W_{0j}$) в виде

$$n_j(W) = \int_w \delta(W - 2W_{0j}) N_j(W) \mathcal{F}(W) dW = \frac{\mathcal{F}(W)}{L^2},$$

где $\delta(W)$ – дельта-функция Дирака; $\mathcal{F}(W)$ – функция распределения. Из (1.19) следует, что 2М-плотность одночастичных состояний равна $N_{j2М}^* = L^{-2}$. Учет третьего измерения, которое, по существу, ограничивает толщину 2М-системы (L_x), приводит к значению трехмерной плотности

$$N_{j3М}^* = (L_x L^2)^{-1} |_{L_x=L} = L^{-3}.$$

Поскольку энергия замкнутого двухчастичного состояния связана с областью ограничения L выражением вида (53), то, задавая величину W_{0j} постоянной, найдем значение длины

$$L = \frac{h}{(8\pi m_j W_{0j})^{1/2}} = h(8\pi m_j k T_{0j})^{-1/2}, \quad (61)$$

где T_{0j} берем из (58). Как известно [27], выражение типа (61) выполняет роль тепловой волны де Бройля. Учитывая (61), трехмерную плотность состояний (60) выразим в форме

$$N_{j3M}^* = 8 \left[\frac{2\pi(m_j kT)}{h^2} \right]^{3/2},$$

которая практически совпадает с общепринятой (с точностью до числового коэффициента) для борновского приближения модели зонной структуры полупроводника.

Если в 2М-системе выполняется распределение Максвелла-Больцмана [27; 28]

$$\mathcal{F}(W) = \exp[(W - W_{\mathcal{F}})/kT],$$

где $W_{\mathcal{F}}$ - энергия Ферми, то концентрацию частиц (электронов и дырок) представим в виде

$$n = N_{3M}^* \exp[(W_{\mathcal{F}} - W_C)/kT],$$

$$p = N_{3M}^* \exp[(W_V - W_{\mathcal{F}})/kT],$$

где W_C, W_V - соответственно нижний уровень зоны проводимости и верхний уровень валентной зоны.

Особенностью 2М-системы частиц двух сортов является наличие только двух уровней энергий W_C и W_V (при отсутствии самой зонной структуры), причем разность этих энергий определяет ширину запрещенной зоны W_{gap} (энергетическую щель), которая равна энергии основного состояния одночастичных состояний:

$$W_{gap} = W_C - W_V = W_{0j}.$$

Ширина запрещенной зоны связана с собственной концентрацией 2М-системы соотношением

$$n_i = N_{3M}^* \exp(-W_{gap}/2kT). \quad (62)$$

Полагая $W_{gap} = W_{0j}(L_1 = \frac{\lambda_0}{\alpha}) = 1,082715$ эВ (где m_0 - масса электрона), находим общее выражение (44). Для частного случая, когда собственная концентрация равна $n_i = n_i(L_2 = \lambda_0/2\alpha^{5/2}) = 5,272198 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, трансцендентное уравнение (62) можно решить относительно температуры методом последовательных приближений T_C ($n_i = 5,272198 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$) = 419,8336 К. Найденное значение температуры T_C представляет собой не что иное как точку фазового перехода первого рода из состояния 2М-системы с примесной проводимостью в состояние с собственной проводимостью. Как было показано выше (см. гл. 1), температурные испытания МДП-транзисторов типов КП301Б и КП304А (т. е. измерения сток-затворных характеристик при различных значениях постоян-

ной температуры) показали, что при определенном значении температуры $T_{C\text{exp}}$ исчезает температуростабильная точка, при которой ток стока МДП-транзистора не зависит от температуры. При температурах $T \geq T_{C\text{exp}}$ характеристики эквидистантно смещаются вверх (вдоль токовой оси). Экспериментально измеренное значение температуры равно $T_C \approx (420 \pm 5) \text{K}$ (см. рис. 4–6).

2.3. Совместное решение уравнения Шредингера и Пуассона. Ранее отмечалось, что самосогласованное решение уравнения Пуассона и Шредингера при трехугольном приближении для потенциальной ямы [18] предполагает наличие дискретного спектра в разрешенных зонах приповерхностного слоя полупроводника. Однако данный подход не предсказывает появление периодического изменения электрического поля по глубине полупроводника (т. е. появление индуцированной сверхрешетки). Поэтому необходимо пересмотреть подход [18] с уточненным распределением зарядов по глубине полупроводника [29].

Рассмотрим частный случай трехмерной (3М-) ограниченной системы, у которой вдоль оси x имеется электрическое поле, постоянное по величине $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$ на участке $0 \leq x \leq L_x$. Поскольку вдоль остальных осей y, z электрического поля нет, то уравнение Пуассона можно записать в одномерном виде

$$-\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad (63)$$

где $\rho(x)$ – объемная плотность электрического заряда. Предположение о возможности появления квантовых явлений в области локализации ($0 \leq x \leq L_x$) дает возможность ввести длину полу волны равной $\lambda_x = L_x$ и волновой вектор $k_x = \pi/\lambda_x$. Тогда объемную плотность заряда $\rho(x)$ можно представить в виде периодической функции (имеющей комплексную форму)

$$\dot{\rho}(x) = \rho_0 \exp[i(xk_x + \varphi)], \quad (64)$$

где $\varphi = yk_y + zk_z$ – фаза плоской волны, в общем случае она может быть любой. Решение уравнения Пуассона (63) с учетом (64) будет также периодической комплексной функцией напряжения

$$\dot{U}(x) = U_0 \exp[i(xk_x + \varphi)]. \quad (65)$$

Тогда напряженность электрического поля, создаваемого периодическим зарядом (64), можно вычислить, дифференцируя (65)

$$\dot{E}_x = -\frac{dU(x)}{dx} = ik_x \dot{U}(x) = k_x U_0 \sin(xk_x + \varphi) - ik_x U_0 \cos(xk_x + \varphi). \quad (66)$$

Физический смысл может иметь только вещественная часть выражения (66), т. е. $E_x = \text{Re}\{\dot{E}_x\}$, поскольку она не изменяет своего знака ($E_x \geq 0$) на всем участке определения ($0 \leq xk_x \leq \pi$).

Подставляя решение (65) в уравнение (63), с учетом (64) находим условие взаимосвязи между постоянными вещественными параметрами

$$\rho_0 = \epsilon_0 k_x^2 U_0 = \sigma_0 k_x,$$

где σ_0 — поверхностная плотность электрического заряда, равная

$$\sigma_0 = \epsilon_0 k_x U_0 = \epsilon_0 \pi U_0 / L_x. \quad (67)$$

Если вдоль остальных двух осей наша система является замкнутой, т. е. в плоскости $\{y, z\}$ справедлива система уравнений Шредингера (50) для двухчастичного движения с параметром длины L (см. выражение (51) то, используя волновую функцию

$$\psi(x, y, z) = \rho_0 \exp[i(xk_x + yk_y + zk_z)],$$

можно найти оценку для полного напряжения в основном состоянии

$$U_{0\omega} = \frac{2W_{0\omega}}{e} = \frac{1}{4\pi m_0 e} \cdot \left(\frac{\hbar}{L}\right)^2. \quad (68)$$

Подставляя оценку (68) в формулу (67), находим поверхностную плотность заряда

$$\sigma_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{4e m_0 L_x L^2} = \frac{e \lambda_0}{8\alpha L_x L^2}; \quad (69)$$

здесь учтены соотношения $\epsilon_0 = e^2/2\alpha \hbar c$ и $\lambda_0 = \hbar/m_0 c$. Дальнейшее исследование выражения (69) невозможно без нормировки величины заряда (это можно сделать двумя способами). В первом случае индуцированный заряд ограниченной системы ищем в виде

$$q_{in} = L^2 \epsilon_0 E_x = \frac{\pi \epsilon_0 L^2 U_0}{L_x},$$

который с учетом (68) принимает максимальное значение

$$Q_{in} = \max_{L_x \rightarrow \lambda_0/2} \{q_{in}\} = e/4\alpha. \quad (70)$$

Во втором случае планковское значение электрического заряда находится из условия эквивалентности работы по перемещению заряда в электрическом поле и энергии излучения

$$A_k = L \cdot \mathcal{E}_k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_h^2}{L} = \frac{\hbar c}{L}. \quad (71)$$

Из (71) находим значение планковского заряда

$$Q_h = \sqrt{4\pi \epsilon_0 \hbar c} = e/\sqrt{\alpha}. \quad (72)$$

Учет нормировок (70) и (72) позволяет переписать выражение (69) в виде

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_0(Q_h) = Q_h \lambda_0 / 8\sqrt{\alpha} L_x L^2, \\ \sigma_0(Q_{in}) = Q_{in} \lambda_0 / 2 L_x L^2. \end{cases} \quad (73)$$

Поскольку в выражениях (73) есть постоянная тонкой структуры α и комптоновская длина волны электрона λ_0 , то целесообразно выразить через них величину параметра L_x

$$L_x = \begin{cases} L_x(Q_h) = \lambda_0 / 2\alpha^{\frac{1+\varkappa}{2}}, \\ L_x(Q_{in}) = \lambda_0 / 2\alpha^{\varkappa/2}, \end{cases} \quad (74)$$

$$(75)$$

где $\varkappa = 0, 1, 2, \dots$. Подставляя (74, 75) в (73), находим

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_0(Q_h) = Q_h \alpha^{\varkappa/2} / 4 L^2, \\ \sigma_0(Q_{in}) = Q_{in} \alpha^{\varkappa/2} / L^2. \end{cases} \quad (76)$$

Теперь сделаем оценку параметра длины L 2М-системы

$$L = \begin{cases} L(Q_h) = \lambda_0 / 2\alpha^{\varkappa/4}, \\ L(Q_{in}) = \lambda_0 / \alpha^{\varkappa/4}, \end{cases}$$

подставляя которую в (76), окончательно получаем

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_0(Q_h) = Q_h \alpha^{\varkappa} / \lambda_0^2, \\ \sigma_0(Q_{in}) = Q_{in} \alpha^{\varkappa} / \lambda_0^2. \end{cases}$$

Для примера в табл. 10 приведены расчетные значения параметра L_x из (74), энергии W_0 из (53) и температуры (58) для ограниченной 3М-системы с периодическим зарядом вдоль оси x .

Таблица 10. Расчетные значения квантов расстояний, энергии и температуры

\varkappa	$2L_x(Q_h), \text{ м}$	$W_{0\varkappa}, \text{ эВ}$	$T_{0\varkappa}, \text{ К}$
0	2,840295 - 11	1,483710 + 02	1,721771 + 06
1	3,324917 - 10	1,082715 - 00	1,256436 + 04
2	3,892227 - 09	7,900953 - 03	9,168661 + 01
3	4,556334 - 08	5,765603 - 05	6,690693 - 01
4	5,333754 - 07	4,207363 - 07	4,882433 - 03

В этой таблице использована естественная форма записи десятичной дроби в виде $m \cdot 10^n$, где m - мантисса, а n - порядок числа, причем основание 10 опущено.

Глава 3. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ КВАЗИМИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

3. 1. Волновая функция и модернизированное псевдоуравнение Шредингера для разностных аргументов. В настоящее время общепризнана копенгагенская трактовка (1927 г.) волновой функции $\Psi(\vec{r}, t)$ и уравнения Шредингера [30]

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \hat{\mathcal{H}} \Psi(\vec{r}, t),$$

где квадрат модуля волновой функции $|\Psi(\vec{r}, t) \Psi^*(\vec{r}, t)| = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ рассматривается как вероятность нахождения частицы в определенной точке (\vec{r}, t) четырехмерного пространства-времени $\{x, y, z, t\}$, а уравнение Шредингера [30] описывает состояние квантованного движения одной частицы в этом пространстве. Несмотря на достаточно условный характер данных предположений [31] вот уже 60 лет данный подход используется в нерелятивистской квантовой механике. Но в последнее время появился ряд экспериментальных фактов таких, как квантованный эффект Холла (особенно дробный [6; 32]), а также явление высокотемпературной сверхпроводимости [33], которые не вписываются в рамки указанных представлений. Ниже мы попытаемся с максимальной возможной математической строгостью ввести понятие волновой функции, уравнения Шредингера, а также их физической интерпретации.

Возьмем для простоты произвольное 2М-пространство-время $\{x, t\}$ (использование одномерного координатного пространства вместо трехмерного не меняет общих положений), в котором пространственная координата x и время t являются независимыми величинами, т. е.

$$x \neq f(t), \quad t \neq f(x).$$

Взаимосвязь между координатами x и временем t можно ввести с помощью фазовой функции $\varphi(x, t)$ (пока неизвестной).

Поскольку фазовая функция непрерывна при изменении своих аргументов x и t , то разностное уравнение, получаемое из разложения ее в ряд Тейлора [34], принимает вид

$$\Delta\varphi(x, t) = \varphi(x + \Delta x, t + \Delta t) - \varphi(x, t) = \frac{d\varphi}{dx} \Delta x + \frac{d\varphi}{dt} \Delta t.$$

Представим произвольное комплексное число ξ в виде

$$\xi(x, t) = A \exp[i\varphi(x, t)], \quad (77)$$

а при небольшом приросте аргументов –

$$\xi(x + \Delta x, t + \Delta t) = A \exp[i\varphi(x + \Delta x, t + \Delta t)]. \quad (78)$$

Введем формально волновую нормированную функцию как отношение величин (78) и (77)

$$\begin{aligned} \psi[(\Delta x), (\Delta t)] &= \xi(x + \Delta x, t + \Delta t) / \xi(x, t) = \\ &= \exp[i\Delta\varphi(x, t)] = \exp\left\{i\left[\frac{d\varphi}{dx}(\Delta x) + \frac{d\varphi}{dt}(\Delta t)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (79)$$

У полученной волновой функции аргументы (Δx) и (Δt) – разностные величины, а не непрерывные x и t . Таким образом, уже во введении волновой функции заключен квантовый характер (но не непрерывный) изменения аргументов x и t . Для стационарных пространственно-временных квантованных движений положим

$$d\varphi/dt = \pi/T_x = \omega(x); \quad d\varphi/dx = \pi/L_x = k(x), \quad (80)$$

где ω_x – частота; k_x – волновое число; L_x – размер координаты полупериода квантованных колебаний; T_x – длительность полупериода квантованных колебаний.

С учетом (80) нормированную волновую функцию (79) запишем в виде

$$\Psi[(\Delta x), (\Delta t)] = \exp\{i[k_x(\Delta x) + \omega_x(\Delta t)]\}. \quad (81)$$

Поскольку модуль комплексной величины (81) равен единице, то введенная волновая функция не противоречит пока общепризнанной вероятностной трактовке Макса Борна [26] (с заменой $x \rightarrow (\Delta x)$ и $t \rightarrow (\Delta t)$).

Условие однозначности представления комплексного числа в форме Эйлера [34] налагает ограничение на величину его фазы ($\varphi \leq 2\pi$), которое применительно к волновой функции (81) принимает значение

$$k_x(\Delta x) + \omega_x(\Delta t) \leq 2\pi. \quad (82)$$

Умножая обе части соотношения (82) на постоянную Планка ($\hbar = h/2\pi$) и полагая примерное равенство обоих членов в левой части, получаем

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \leq h/2, \quad (83)$$

$$W(\omega_x) \cdot (\Delta t) \leq h/2, \quad (84)$$

где $(\Delta p_x) = \hbar k_x$, а $W(\omega_x) = \hbar \omega_x$, которые напоминают известные соотношения неопределенностей Гейзенберга [31].

Формально операцию дифференцирования волновой функции (81) по разностному аргументу (Δx) можно ввести по аналогии с дифференцированием по непрерывным аргументам x

$$\frac{\partial \psi[(\Delta x)]}{\partial (\Delta x)} = \lim_{\Delta(\Delta x) \rightarrow 0} \frac{\psi[(\Delta x) + \Delta(\Delta x)] - \psi[(\Delta x)]}{\Delta(\Delta x)} = ik_x \psi[(\Delta x)] \quad (85)$$

здесь учтена независимость приростов аргументов (Δx) и (Δt) друг от друга. Последняя производная позволяет сформировать квантовый оператор разностного импульса

$$(\Delta \hat{p}_x) = -i\hbar \partial / \partial (\Delta x), \quad (86)$$

воздействие которого на волновую функцию (81) дает

$$(\Delta \hat{p}_x) \psi[(\Delta x), (\Delta t)] = \hbar k_x \psi[(\Delta x), (\Delta t)].$$

Модуль оператора импульса имеет вид средней величины

$$(\Delta p_x) = \hbar k_x |_{k_x = \text{const}} = \int_0^{L_x} \int_0^{T_x} \psi^* (\Delta \hat{p}_x) \psi d(\Delta x) d(\Delta t), \quad (87)$$

определенной на ортонормированной системе волновых функций типа (81), поскольку

$$\int_0^{L_x} \int_0^{T_x} \psi^*[(\Delta x), (\Delta t)] \psi[(\Delta x), (\Delta t)] d(\Delta t) d(\Delta x) = 1.$$

Вторая производная волновой функции (81) по приросту координаты (Δx) , с учетом (85), принимает значение

$$\frac{\partial^2 \psi[(\Delta x)]}{\partial (\Delta x)^2} = ik_x \lim_{\Delta(\Delta x) \rightarrow 0} \frac{\psi[(\Delta x) + \Delta(\Delta x)] - \psi[(\Delta x)]}{\Delta(\Delta x)} = -k_x^2 \psi[(\Delta x)],$$

которое позволяет сформировать квантовый энергетический оператор

$$\hat{\mathcal{H}}_k = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial (\Delta x)^2}. \quad (88)$$

Нетрудно заметить, что аналогичный результат дает и двукратное воздействие оператора разностного импульса (86) (с учетом сопряженной к нему величины), т. е.

$$\hat{\mathcal{H}}_k = -(\Delta \hat{p}_x) \cdot (\Delta \hat{p}_x^*) / 2m.$$

Воздействие последнего оператора на волновую функцию (81) дает собственное значение для энергии

$$\hat{\mathcal{H}}_k \psi[(\Delta x), (\Delta t)] = \frac{(\hbar k_x)^2}{2m} \psi[(\Delta x), (\Delta t)] = W(k_x) \psi,$$

где $W(k_x) = (\hbar k_x)^2 / 2m$ - собственное значение оператора (88) или среднее значение энергии в замкнутом интервале $\{[0, L_x], [0, T_x]\}$

$$W(k_x) = \int_0^{L_x} \int_0^{T_x} \psi^* \hat{\mathcal{H}}_k \psi d(\Delta t) d(\Delta x). \quad (89)$$

Аналогично можно найти первую производную волновой функции (81) по приросту времени (Δt)

$$\frac{\partial \Psi[(\Delta t)]}{\partial (\Delta t)} = \lim_{\Delta(\Delta t) \rightarrow 0} \frac{\Psi[(\Delta t) + \Delta(\Delta t)] - \Psi[(\Delta t)]}{\Delta(\Delta t)} = i\omega_x \Psi[(\Delta t)],$$

которая позволяет сформировать квантованный частотный энергетический оператор (де Бройль [31] был близок к данному подходу)

$$\hat{\mathcal{H}}_\omega = -i\hbar \partial / \partial (\Delta t), \quad (90)$$

воздействие которого на волновую функцию (81) дает

$$\hat{\mathcal{H}}_\omega \Psi[(\Delta x), (\Delta t)] = \hbar \omega_x \Psi[(\Delta x), (\Delta t)] = W(\omega_x) \Psi,$$

где $W(\omega_x) = \hbar \omega_x$ — собственное значение оператора (90) или среднее значение энергии колебаний в замкнутом пространстве $\{[0, L_x], [0, T_x]\}$

$$W(\omega_x) = \int_0^{L_x} \int_0^{T_x} \Psi^* \hat{\mathcal{H}}_\omega \Psi d(\Delta t) d(\Delta x). \quad (91)$$

Условие равенства волновой энергии (89) и колебательной энергии (91) типа

$$W(k_x) = W(\omega_x) \quad (92)$$

позволяет получить операторное уравнение

$$\hat{\mathcal{H}}_\omega \Psi[(\Delta x), (\Delta t)] = \hat{\mathcal{H}}_k \Psi[(\Delta x), (\Delta t)], \quad (93)$$

которое напоминает волновое уравнение Шредингера [26]. Из условия (92) найдем значение частоты

$$\omega_x = \hbar k_x^2 / 2m,$$

с помощью которого находим значение групповой скорости

$$v_{2px} = \omega_x / k_x = \hbar k_x / 2m. \quad (94)$$

Зная групповую скорость (94), можно найти энергию, переносимую волновым колебательным движением в виде

$$W(v_x) = m v_{2px}^2 / 2 = (\hbar k_x)^2 / 8m,$$

которая в четыре раза меньше волновой (89) и колебательной (91) энергий. Это означает, что только с помощью групповой скорости (94) можно выделить энергию одночастичного состояния четырехчастичной системы, описываемой волновой функцией и уравнениями (92) и (93).

Зная величину группового импульса

$$p_{2px} = m v_{2px} = \hbar k_x / 2m,$$

можно найти его взаимосвязь со средним значением разностного импульса

$$p_{z\rho x} = (\Delta p_x) / 2 .$$

откуда следует, что разностный импульс (87) описывает не одночастичные, а двухчастичные состояния частиц одного сорта, но с различными спинами.

3.2. Псевдоквантовые уравнения Максвелла для разностных аргументов. Кроме комплексных скаляров в квантовой механике можно использовать и векторные величины, задавая их с помощью скалярного или векторного поля. Например, вектор электрической индукции можно задать скалярным комплексным полем

$$\dot{U}_g = U_{g0} \Psi = U_{g0} \exp\{i[(\vec{k}, (\Delta \vec{r})) + \omega(\Delta t)]\} ,$$

где U_{g0} – вещественная разность потенциалов на границах области $\{(\Delta \vec{r})\}$, удовлетворяющей (83), в виде

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}_g = \varepsilon_0 \dot{\vec{\mathcal{E}}}_g = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \dot{U}_g = -\varepsilon_0 i \dot{U}_g \vec{k} , \quad (95)$$

где $\dot{\vec{\mathcal{E}}}_g$ – вектор комплексной электрической индукции, а $\dot{\vec{\mathcal{E}}}_g$ – вектор комплексной напряженности электрического поля.

Операцию дифференцирования по пространственным переменным комплексного вектора (95) будем проводить с помощью разностного вещественного оператора

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial(\Delta x)} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial(\Delta y)} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial(\Delta z)} \vec{k} . \quad (96)$$

Тогда скалярное произведение оператора (96) и вектора (95) будет определять величину комплексного заряда \dot{Q}_{ge} градиентного поля

$$\dot{Q}_{ge} = (\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{E}}}_g) = \varepsilon_0 k^2 \dot{U}_g , \quad (97)$$

а векторное произведение – величину магнитного тока электрической индукции скалярного поля

$$\dot{\vec{\mathcal{J}}}_{\varepsilon g} = [\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{E}}}_g] \varepsilon_0^{-1} = -[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] \dot{U}_g = 0 .$$

Операция дифференцирования комплексного вектора (95) по разностному времени (Δt) проводится аналогично (85)

$$\frac{\partial \dot{\vec{\mathcal{E}}}_g}{\partial(\Delta t)} = \varepsilon_0 \omega \dot{U}_g \vec{k} = \dot{\vec{\mathcal{J}}}_{\varepsilon t g} . \quad (98)$$

Величина $\dot{\vec{\mathcal{J}}}_{\varepsilon t g}$ имеет размерность электрического тока электрической индукции скалярного поля.

Кроме того, вектор электрической индукции можно задать с помощью векторного комплексного поля

$$\vec{U}_r = \vec{U}_{r0} \Psi = \vec{U}_{r0} \exp\{i[(\vec{k}, (\Delta \vec{r})) + \omega(\Delta t)]\} , \quad (99)$$

тогда роторный вектор электрического поля будет

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}_r = \varepsilon_0 \dot{\vec{\mathcal{E}}}_r = \varepsilon_0 \text{rot } \dot{\vec{U}}_r . \quad (100)$$

Скалярное произведение оператора (96) и роторного вектора (100)

$$\dot{Q}_{er} = (\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{E}}}_r) = -\varepsilon_0 ([\vec{\nabla}, \vec{\nabla}], \dot{\vec{U}}_r) = 0 \quad (101)$$

дает нулевое значение [34] электрического заряда векторного поля (99), а векторное произведение определяет магнитный ток электрической индукции векторного поля

$$\dot{\vec{J}}_{er} = [\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{E}}}_r] \varepsilon_0^{-1} = \text{rot } \dot{\vec{E}}_r . \quad (102)$$

Скалярная производная по разностному времени (Δt) роторного вектора (100) определяет электрический ток электрической индукции векторного поля

$$\dot{\vec{J}}_{etr} = \frac{\partial \dot{\vec{\mathcal{E}}}_r}{\partial (\Delta t)} = \varepsilon_0 \text{rot} \left[\frac{\partial \dot{\vec{U}}_r}{\partial (\Delta t)} \right] .$$

Аналогично можно ввести вектор магнитного поля с помощью скалярного комплексного поля

$$\dot{A}_g = A_{g0} \exp \{ i [(\vec{k}, (\Delta \vec{r})) + \omega (\Delta t)] \} , \quad (103)$$

где A_{g0} — вещественная разность магнитных потенциалов на границах области $\{ (\Delta \vec{r}) \}$, удовлетворяющей (83),

$$\dot{\vec{\mathcal{B}}}_g = \mu_0 \dot{\vec{\mathcal{H}}}_g = -\mu_0 \vec{\nabla} \dot{A}_g = -\mu_0 (i \dot{A}_g) \vec{k} . \quad (104)$$

Тогда скалярное произведение оператора (96) и вектора (104) будет определять величину комплексного магнитного заряда градиентного поля

$$\dot{M}_{ge} = (\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{B}}}_g) = \mu_0 k^2 \dot{A}_g , \quad (105)$$

где μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость, а векторное произведение будет определять величину электрического тока магнитной индукции скалярного поля

$$\dot{\vec{J}}_{ng} = [\vec{\nabla}, \dot{\vec{\mathcal{B}}}_g] \mu_0^{-1} = -[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] \dot{A}_g = 0 . \quad (106)$$

Скалярная производная вектора (104) по разностному времени (Δt) определяет магнитный ток магнитной индукции скалярного поля

$$\dot{\vec{J}}_{ntg} = \partial \dot{\vec{\mathcal{B}}}_g / \partial (\Delta t) = \mu_0 \omega \dot{A}_g \vec{k} . \quad (107)$$

Кроме того, вектор магнитного поля можно задать с помощью векторного комплексного поля

$$\dot{\vec{A}}_r = \vec{A}_{r0} \exp \{ i [(\vec{k}, (\Delta \vec{r})) + \omega (\Delta t)] \} , \quad (108)$$

тогда роторный вектор магнитного поля запишем в виде

$$\vec{B}_r = \mu_0 \vec{H}_r = \mu_0 \text{rot } \vec{A}_r. \quad (109)$$

Скалярное произведение оператора (96) и роторного вектора (109)

$$\dot{M}_{er} = (\vec{\nabla}, \vec{B}_r) = -\mu_0 ([\vec{\nabla}, \vec{\nabla}], \vec{A}) = 0 \quad (110)$$

дает нулевое значение [34] магнитного заряда векторного поля (108), а векторное произведение определяет электрический ток магнитной индукции векторного поля

$$\vec{j}_{Hr} = [\vec{\nabla}, \vec{B}_r] \mu_0^{-1} = \text{rot } \vec{H}_r.$$

Скалярная производная по разности времени (Δt) роторного вектора (109) определяет магнитный ток магнитной индукции векторного поля

$$\vec{j}_{Hr} = \frac{\partial \vec{B}_r}{\partial(\Delta t)} = \mu_0 \text{rot} \left[\frac{\partial \vec{A}_r}{\partial(\Delta t)} \right].$$

Обобщим полученные выше результаты. Из (97) и (101) следует, что суммарный электрический заряд описывается выражением

$$\dot{Q}_{e\Sigma} = (\vec{\nabla}, (\vec{\dot{D}}_g + \vec{\dot{D}}_r)) = \varepsilon_0 \nabla^2 \dot{U}_g = \dot{Q}_{eg}, \quad (111)$$

которое аналогично первому уравнению Максвелла [35]. Суммарный магнитный заряд, как следует из выражений (105) и (110), равен

$$\dot{M}_{e\Sigma} = (\vec{\nabla}, (\vec{B}_g + \vec{B}_r)) = \mu_0 \nabla^2 \dot{A}_g = \dot{M}_{eg}. \quad (112)$$

Данное выражение аналогично второму уравнению Максвелла [35].

Запишем „закон сохранения“ электрического тока

$$[\vec{\nabla}, (\vec{H}_g + \vec{H}_r)] = \partial(\vec{D}_g + \vec{D}_r) / \partial(\Delta t),$$

из которого, с учетом (106) и (98), находим соотношение

$$\vec{j}_{Hr} = \text{rot } \vec{H}_r = \vec{j}_{eHg} + \frac{\partial}{\partial(\Delta t)} \vec{D}_r, \quad (113)$$

эквивалентное четвертому уравнению Максвелла [35].

Запишем „закон сохранения“ магнитного тока

$$[\vec{\nabla}, (\vec{E}_g + \vec{E}_r)] = \partial(\vec{B}_g + \vec{B}_r) / \partial(\Delta t),$$

из которого, с учетом (102) и (107), находим соотношение

$$\text{rot } \vec{E}_r = \vec{j}_{Htg} + \partial \vec{B}_r / \partial(\Delta t), \quad (114)$$

эквивалентное третьему уравнению Максвелла.

Полученная система квантовых уравнений (111), (112) и (113), (114) является аналогом классических уравнений электродинамики Максвелла [35], но не сводится к ним в вещественной области. На это указывают не только знак перед членом $\partial \vec{B}_r / \partial(\Delta t)$ в уравнении (114), но и наличие отличных от нуля магнитных заря-

дов и токов. Ее можно рассматривать как удобный алгоритм для нахождения амплитуд комплексных векторов электрического и магнитного полей при бреховских колебаниях в двумерных электронных системах, помещенных в сильные внешние (как правило, градиентные) вещественные электрические и магнитные поля [36]. Комплексный характер величин \vec{E} и \vec{H} позволяет получить бреховские колебания практически без электромагнитного излучения во внешнюю среду, чего нельзя сказать о классической системе уравнений Максвелла, где колебательный характер механического движения зарядов всегда сопровождается электромагнитным излучением.

3.3. Псевдоквантовая электродинамика. Рассмотрим два простейших случая применения квантовых уравнений Максвелла для локализованных электрических и магнитных зарядов. Разностная динамика локализованного движения электрических зарядов может быть записана в виде системы квантовых уравнений

$$\dot{\vec{J}}_{\varepsilon t g} = \partial \vec{\mathcal{M}}_g / \partial (\Delta t), \quad (115)$$

$$\dot{\rho}_g = (\vec{\nabla}, \vec{\mathcal{M}}_g), \quad (116)$$

где $\vec{J}_{\varepsilon t g} = \vec{J}_{\varepsilon g_0} \Psi$ — комплексный вектор плотности электрического тока, проходящего через площадку $S_k = (\pi/k)^2$, электрической индукции скалярного поля напряжений $\vec{U}_g = U_{g_0} \Psi$ и локализованного в объеме $V_k = (\pi/k)^3$; $\rho_g = \rho_{g_0} \Psi$ — объемная плотность комплексного электрического заряда, локализованного в области $V_k = (\pi/k)^3$. Произведя в (115), (116) операции дифференцирования, получим систему локализованных вещественных уравнений

$$\vec{J}_{\varepsilon g_0} = \varepsilon_0 \omega \vec{k} U_{g_0}, \quad (117)$$

$$\rho_{g_0} = \varepsilon_0 k^2 U_{g_0}. \quad (118)$$

В дальнейшем для простоты изложения будем полагать отличной от нуля только компоненту y электрического тока, для которой выполняется условие непрерывности. Остальные компоненты тока равны нулю $\vec{J}_{\varepsilon g_0} = \{0, J_{\varepsilon g_0}, 0\}$ за пределами области локализации. Учитывая соотношение $\varepsilon_0 = e^2 / 2 \alpha m_0 c^2 \lambda_0$, вещественные уравнения (117), (118) перепишем в виде

$$I_{\varepsilon g_0} = J_{\varepsilon g_0} (\pi/k)^2 = \frac{\pi e^2 \omega}{2 \alpha m_0 c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right) U_{g_0}, \quad (119)$$

$$Q_{g_0} = \rho_{g_0} (\pi/k)^3 = \frac{\pi^2 e^2}{2 \alpha m_0 c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right) U_{g_0}; \quad (120)$$

здесь учтено, что $k = \pi/\lambda$ (λ — длина волны). Дальнейший анализ выражений (119), (120) проведем с некоторым уточнением идей де Бройля. Как известно [26], одним из основных положений корпус-

кулярно-волнового дуализма частиц является предположение об эквивалентности массы частицы и энергии волновых колебаний

$$W(m_0) = m_0 c^2 = \frac{h m_0 c \cdot c}{h} = \frac{h c}{\lambda_0} = h \nu_0 = W(\nu_0). \quad (121)$$

Нетрудно заметить, что подобным соотношением можно связать не только массу, но и магнитный заряд ($M_0 = h/e$)

$$W(\nu_0) = h \nu_0 = \frac{h}{e} \cdot e \nu_0 = M_0 I_{\varepsilon_0},$$

где $I_{\varepsilon_0} = e \nu_0$ — единичный квант электрического тока (максимальное значение). Для произвольного значения частоты колебаний $\nu = c/\lambda \leq \nu_0$ кванты тока можно представить в виде

$$I_{\varepsilon_0} = e \nu = e \omega / 2\pi. \quad (122)$$

Подставляя значение (122) в уравнение Максвелла (119), находим выражение для квантов напряжений

$$U_{g_0}(I) = \frac{\alpha m_0 c^2}{e \pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right). \quad (123)$$

Полученное выражение для квантов напряжений (123) совместимо со вторым квантовым уравнением Максвелла (120). Подставляя в (120) вместо U_{g_0} значения из (123), находим

$$Q_{g_0} = \frac{\pi^2 e^2}{2\alpha m_0 c^2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{2\alpha m_0 c^2}{\pi^2 e} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} = e, \quad (124)$$

постоянное значение электрического индуцированного заряда, равное заряду электрона.

Для сравнения можно указать, что выражение для квантов напряжений, полученное из уравнения Шредингера для замкнутой 2M-системы (см. гл. 2, формула (53)),

$$U_{g_0}(W) = \frac{m_0 c^2}{8\pi e} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2, \quad (125)$$

приводит к появлению индуцированных электрических зарядов $Q_g(W) = \pi e \lambda_0 / 4\alpha \lambda$, отличных от заряда электрона.

Как было показано ранее в гл. 2 (формула (75)), совместимость уравнения Пуассона с уравнением Шредингера возможна при выполнении условия квантования длин волн в виде

$$\lambda = \lambda_0 \alpha^{-x/2}, \quad x = 1, 2, \dots \quad (126)$$

Тогда, подставляя значение (126) в выражения (122), (123) и (125), находим:

$$I_{\varepsilon_x} = (ec/\lambda_0) \alpha^{x/2} = 19.79649 \cdot \alpha^{x/2}, \text{ А},$$

$$U_{\alpha}(I) = (m_0 c^2 / e \pi^2) \alpha^{1+\alpha/2} = 51775,48 \alpha^{1+\alpha/2}, \text{ В.}$$

$$U_{\alpha}(W) = (m_0 c^2 / 8 \pi e) \alpha^{\alpha} = 20332,18 \alpha^{\alpha}, \text{ В.}$$

Кванты тока и напряжения для первых $\alpha = 1 - 5$ приведены в табл. 11.

Аналогично разностная динамика локализованного движения магнитных зарядов может быть записана в виде системы квантовых уравнений Максвелла

$$\dot{\vec{j}}_{\text{нт}g} = \partial \vec{\mathcal{B}}_g / \partial (\Delta t), \quad (127)$$

$$\dot{\mu}_g = (\vec{\nabla}, \vec{\mathcal{B}}_g), \quad (128)$$

где $\vec{j}_{\text{нт}g} = \vec{j}_{\text{нт}g_0} \Psi$ - комплексный вектор плотности магнитного тока, проходящего через площадку $S_k = (\pi/k)^2$, магнитной индукции скалярного поля потенциалов $A_g = A_{g_0} \Psi$, локализованного в области $V_k = (\pi/k)^3$; $\mu_g = \mu_{g_0} \Psi$ - объемная плотность комплексного заряда, локализованного в области $V_k = (\pi/k)^3$. Произведя в (127), (128) операции дифференцирования, получим систему локализованных вещественных уравнений

$$\vec{j}_{\text{нт}g_0} = \mu_0 \omega k A_{g_0}, \quad (129)$$

$$\mu_{g_0} = \mu_0 k^2 A_{g_0}. \quad (130)$$

Учитывая соотношение

$$\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1} = 2\alpha h / c e^2,$$

уравнения (129), (130) перепишем в виде

$$I_{\text{нт}g_0} = j_{\text{нт}g_0} (\pi/k)^2 = \frac{\pi^2 \mu_0 \omega}{k} \cdot A_{g_0}, \quad (131)$$

$$M_{g_0} = \mu_{g_0} (\pi/k)^3 = (\pi^3 \mu_0 / k) A_{g_0}. \quad (132)$$

Здесь, как и раньше, нас будет интересовать компонента тока вдоль направления выполнения условия непрерывности (напри-

Таблица 11. Расчетные значения квантов электрических токов и напряжений

α	$I_{\epsilon\alpha}, \text{ А}$	$U_{\alpha}(I), \text{ В}$	$U_{\alpha}(W), \text{ В}$
1	1,691106 - 00	3,227542 + 01	1,483710 + 02
2	1,444620 - 01	2,757113 + 00	1,082715 + 00
3	1,234059 - 02	2,355251 - 01	7,900953 - 03
4	1,054189 - 03	2,011962 - 02	5,765602 - 05
5	9,005368 - 05	1,718709 - 03	4,207362 - 07

мер, вдоль оси y). Колебательную энергию можно также представить в виде другого соотношения де Бройля

$$W(\nu_0) = h\nu_0 = e \cdot \frac{h\nu_0}{e} = eI_{H_0} ,$$

где $I_{H_0} = h\nu_0/e$ - единичный квант магнитного тока (его максимальное значение). Для произвольного значения частоты колебаний $\nu \leq \nu_0$ кванты магнитного тока представим в виде

$$I_{H_0} = \frac{h}{e} \cdot \nu = \frac{h\omega}{2\pi e} . \quad (133)$$

Подставляя значение (133) в уравнение Максвелла (131), находим выражение для квантов скалярных магнитных потенциалов

$$A_{g_0}(I) = \frac{m_0 c^2}{(2\pi)^2 \alpha (h/e)} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} . \quad (134)$$

Полученное выражение для магнитных потенциалов (134) совместимо со вторым уравнением Максвелла (132). Подставляя в (132) вместо A_{g_0} его значение из (134), находим

$$M_{g_0} = \frac{2\pi^2 \alpha h \lambda}{c e^2} \cdot \frac{2 m_0 c^2}{(2\pi)^2 \alpha (h/e)} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{h}{e} ,$$

постоянное значение магнитного индуцированного заряда.

Так же, как и для электрического заряда, выражение для магнитных напряжений в 2М-системе

$$A_{g_0}(W) = \frac{m_0 c^2}{8\pi (h/e)} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 , \quad (135)$$

полученное из уравнения Шредингера, приводит к появлению магнитных зарядов $M_g(W) = \frac{\pi\alpha}{4} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}$, меньших элементарного значения h/e .

Подставляя значение квантованных длин волн (126) в выражения (133) - (135), находим

$$I_{H\alpha} = (hc/e\lambda_0)\alpha^{\alpha/2} = 511003,4\alpha^{\alpha/2}, \text{ Дж/А} ,$$

$$A_{\alpha}(I) = \frac{m_0 c^2}{(2\pi)^2 (h/e)} \alpha^{-1 \cdot \alpha/2} = 0,5014506\alpha^{-1 \cdot \alpha/2}, \text{ Дж/Вδ},$$

$$A_{\alpha}(W) = \frac{m_0 c^2}{8\pi (h/e)} \alpha^{\alpha} = 0,7876772\alpha^{\alpha}, \text{ Дж/Вδ} ,$$

Таблица 12. Расчетные значения квантов магнитных токов и потенциалов

α'	$I_{H\alpha}$, Дж/А	$A_{\alpha}(\Gamma)$, Дж/Вб	$A_{\alpha}(W)$, Дж/Вб
1	4,365223 + 04	5,870100 + 00	5,747957 - 03
2	3,728971 + 03	5,014506 - 01	4,194485 - 05
3	3,185456 + 02	4,283618 - 02	3,060863 - 07
4	2,721161 + 01	3,659261 - 03	2,233619 - 09
5	2,324539 + 00	3,125906 - 04	1,629950 - 11

по которым можно составить табл. 12 первых ($\alpha = 1 - 5$) квантов магнитных величин.

Из сказанного следует, что квантовые уравнения Максвелла (115), (116) и (127), (128), в отличие от классических аналогов, которые описывают по заданным распределениям зарядов и токов распределения электромагнитных полей, описывают всего лишь взаимосвязь между квантованными величинами зарядов, токов и скалярными напряжениями. По этим уравнениям невозможно исследовать непрерывное движение какой-либо частицы или волны, поскольку само понятие положения такой частицы терлет физический смысл (здесь неопределенность положения частицы является заданной величиной). Таким образом, их можно рассматривать как удобные правила взаимосвязи между макроскопическими и микроскопическими величинами, которые при определенных внешних условиях могут выполняться, и тогда замкнутые квантовые объекты могут быть замечены во внешнем мире.

Наиболее перспективным 2М-объектом для исследований данного класса явлений является инверсионный слой МДП-транзистора (83), (84), который изготовлен из полупроводникового материала (кремния). В таких объектах квант тока $I_{\alpha} (\alpha = 4)$ проявляется как температуростабильная точка, а квант напряжения $U(w) (\alpha = 2)$ - как ширина запрещенной зоны полупроводника подложки.

3. 4. Квантовый эффект Холла. Упрощенное квазиклассическое рассмотрение задачи КЭХ средствами квантовой механики может быть основано на корпускулярно-волновом дуализме частиц, движущихся в сильных перекрестных электромагнитных полях. Формально переход от импульсов \vec{p} классической частицы к квазиимпульсам квантовой квазичастицы \vec{k} описывается соотношением де Бройля $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Уравнение движения дебройлевской частицы в электромагнитном поле ($\vec{E} = \{0, E_y, 0\}$, $\vec{B} = \{B_x, 0, 0\}$) описывается выражением

$$d\vec{p}/dt = \hbar d\vec{k}/dt = e\vec{E} + e[\vec{v}; \vec{B}], \quad (136)$$

которое можно переписать по компонентам в виде

$$\begin{cases} \hbar dk_y/dt = eE_y - ev_z B_x, \\ \hbar dk_z/dt = -ev_y B_x. \end{cases} \quad (137)$$

Для квадратичного закона дисперсии [36]

$$W = p^2/2m = (\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2 + \hbar^2 k_z^2)/2m \quad (138)$$

имеем значения скоростей $v_y = \hbar^{-1} \partial W / \partial k_y$ и $v_z = \hbar^{-1} \partial W / \partial k_z$,

подставляя которые в (137), находим

$$\begin{cases} \hbar dk_y/dt = eE_y + (eB_x/\hbar) \partial W / \partial k_z, \\ \hbar dk_z/dt = (-eB_x/\hbar) \partial W / \partial k_y. \end{cases} \quad (139)$$

$$\hbar dk_z/dt = (-eB_x/\hbar) \partial W / \partial k_y. \quad (140)$$

Уравнение (140) можно переписать [36] в виде

$$\hbar^2 (dk_z dk_y / dt) = -eB_x. \quad (141)$$

Интегрируя последнее, получаем

$$dA/dW = eB_x T_p = eB_x 2\pi / \omega_c.$$

Поскольку квазиимпульсная площадь равна $A = \pi(\hbar k)^2$, то частота

$$\omega_c = 2\pi eB_x \frac{dW}{dA} = \frac{eB_x}{m} \quad (142)$$

совпадает со значением циклотронной частоты, как и в классическом случае.

Кроме того, объединяя уравнения (139), (140) в одно,

$$\hbar (dk_y/dt) = eE_y/2,$$

и интегрируя его, получаем

$$mv_y = eE_y t/2.$$

Предполагая для скорости зависимость типа $v_y = y/t$, находим искомое значение для дрейфовой скорости электрического поля E_y

$$v_y = (eyE_y/2m)^{1/2}. \quad (143)$$

Если напряженность электрического поля E_y достаточно большая, то могут возникнуть квантово-механические осцилляции Зинера-Блоха [36], частота которых равна

$$\omega_y = eyE_y/\hbar. \quad (144)$$

Вторую компоненту скорости v_z также находим подстановкой (139) в (140). С учетом квадратичного закона дисперсии (138) имеем

$$\hbar(dk_z/dt) = -(eB_x/\hbar) \frac{\partial W}{\partial k_y} = eE_y + \frac{eB_x}{\hbar} \cdot \frac{\partial W}{\partial k_z},$$

откуда находим искомое значение скорости перемещения в магнитном поле

$$v_z = \hbar^{-1} \frac{\partial W}{\partial k_z} = -E_y/2B_x.$$

Таким образом, мы получили в квантовом случае два независимых колебательных движения, одно с циклотронной частотой ω_c (142), определяемой магнитным полем B_x , в второе – со штарковской частотой ω_y , определяемой электрическим полем E_y , а также линейное перемещение со скоростью v_z , т. е. перпендикулярное к напряженности электрического поля E_y и вызванное наличием магнитного поля $B_x \neq 0$ (следует отметить, что поскольку $v_y \neq 0$, то имеется линейное перемещение и вдоль оси y).

Размеры циклотронной орбиты квантовой частицы равны

$$r_c = v_y/\omega_c. \quad (145)$$

Значения частоты из (142) и скорости (143) с учетом (144) подставляем в (145) и находим

$$r_c = \lambda_0 (\omega_0/\omega_c) \cdot (\omega_y/\omega_0)^{1/2}, \quad (146)$$

где $\lambda_0^* = \hbar/2m_0c$ – комптоновская длина волны частицы, а $\omega_0 = c/\lambda_0^*$ – комптоновская частота.

Движение дебройлевской частицы в сильном магнитном поле приводит к появлению циклотронного тока I_c , который, в свою очередь, создает индуцированное магнитное поле, напряженность которого (предположение замкнутого кольца) равна

$$\mathcal{H}_{xc} = I_c/2r_c. \quad (147)$$

Тогда магнитный поток индуцированного поля, пересекающего площадку циклотронной орбиты (где площадь замкнутого кольца $S_c = \pi r_c^2$), будет

$$\Phi_{xc} = \mu_0 \mathcal{H}_{xc} S_c = \pi r_c \mu_0 I_c/2. \quad (148)$$

Индукцированное электрическое поле \mathcal{E}_{zc} , вызванное циклическим движением дебройлевской частицы, можем аппроксимировать выражением

$$\mathcal{U}_{zc} = I_c \mathcal{R}_{HE} = 2r_c \mathcal{E}_{zc}, \quad (149)$$

где \mathcal{R}_{HE} – электромагнитное сопротивление, препятствующее движению дебройлевской частицы; \mathcal{U}_{zc} – индуцированное напряжение. Из (149) легко находим величину напряженности индуцированного электрического поля

$$\mathcal{E}_{zC} = I_C R_{HE} / 2r_C .$$

Тогда поток электрической индукции через площадку $S_p = \pi r_p^2$ (r_p - радиус дебройлевской частицы, как правило, значительно больше комптоновской длины волны) можно записать

$$Q_{zC} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_{zC} S_p = \varepsilon_0 \pi r_p^2 I_C R_{HE} / 2r_C . \quad (150)$$

Вспользуемся выражением (30), определяющим электромагнитное сопротивление. Подставляя в (30) значения электрического (150) и магнитного (148) индуцированных потоков, находим

$$R_{HE} = \frac{\Phi_{xс}}{Q_{zC}} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{r_C}{r_p} = 2\alpha \cdot \frac{h}{e^2} \cdot \frac{r_C}{r_p} ; \quad (151)$$

здесь учтено, что $(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 1/c\varepsilon_0$, а также определение постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/2\varepsilon_0 c h$ в системе СИ. Подставляя в (151) значение r_C из (146), а также учитывая, что $r_p = 2c/\omega_p$, находим искомое выражение для электромагнитного сопротивления

$$R_{HE} = \alpha R_H \frac{(\omega_p/\omega_0)}{(\omega_c/\omega_0)} \cdot (\omega_y/\omega_0)^{1/2}, \quad (152)$$

где $R_H = h/e^2$ - квант холловского сопротивления [6].

Покажем, что индуцированное значение магнитной индукции из (147) можно представить через частоты

$$\mathcal{B}_{xс} = \mu_0 \mathcal{H}_{xс} = \mathcal{B}_0 (\omega_c/\omega_0)^2 \cdot (\omega_0/\omega_y)^{1/2}, \quad (153)$$

где $\mathcal{B}_0 = \mu_0 e \omega_0^2 / 2c = \alpha h / e \lambda_0^2 = 2,0506059 \cdot 10^7$ Тл - квант магнитной индукции. Поскольку совместное решение уравнения Шредингера и Пуассона налагает определенное ограничение на длину волны блоховских колебаний волновой функции дебройлевской частицы в виде $\lambda = \lambda_0^* \alpha^x$, $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$, то для частот можно взять следующие аппроксимации:

$$\omega_y = \omega_0 \alpha^{x_y}, \quad \omega_p = \omega_0 \alpha^{x_p}, \quad \omega_c = \omega_0 \alpha^{x_c}. \quad (154)$$

Подставляя значения частот (154) в выражения (146), (152) и (153), находим общие выражения для квантованных величин

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{HE} = R_H \alpha^{1+x_p-x_c+x_y/2}, \\ r_C = \lambda_0^* \alpha^{-x_c+x_y/2}, \\ \mathcal{B}_{xс} = \mathcal{B}_0 \alpha^{+2x_c-x_y/2}. \end{array} \right. \quad (155)$$

Данная система квантованных физических величин описывает два принципиально различных режима работы 2М-системы электронного газа. Для первого режима работы характерно выполнение условия

$$x_c = 1 + x_p + x_y/2,$$

применение которого к (155) дает

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{HE}^{(1)} = R_H, \end{array} \right. \quad (156)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_c^{(1)} = \lambda_0^* \alpha^{-1-x_p}, \end{array} \right. \quad (157)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{xc}^{(1)} = B_0 \alpha^{2+2x_p+x_y/2}. \end{array} \right. \quad (158)$$

Для второго режима работы характерно выполнение условия

$$x_y = 4x_c - 6. \quad (159)$$

Это условие не произвольно, а выбрано с учетом ограничений, налагаемых на величину магнитной индукции, выводящей 2М-систему на холловский режим

$$B_{0x} = B_0 \alpha^3 = 7,96852 \text{ Тл}.$$

Подставляя (159) в систему (155), находим

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{HE}^{(2)} = R_H \alpha^{x_p+x_c-2}, \end{array} \right. \quad (160)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_c^{(2)} = \lambda_0^* \alpha^{x_c-3}, \end{array} \right. \quad (161)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{xc}^{(2)} = B_0 \alpha^3. \end{array} \right. \quad (162)$$

Отношение квантованных физических величин в различных режимах работы 2М-системы имеет вид

$$\beta_R = R_{HE}^{(1)} / R_{HE}^{(2)} = r_c^{(1)} / r_c^{(2)} = \alpha^\eta,$$

$$\beta_B = B_{xc}^{(1)} / B_{xc}^{(2)} = \alpha^\xi.$$

Режим КЭХ 2М-системы требует выполнения соотношений

$$\eta = 2 - x_p - x_c \leq 0,$$

$$\xi = 2x_p + x_y/2 - 1 \geq 0.$$

Отметим, что $\xi = 0$ при $x_c = x_y/4 + 1/2$ (единственные значения: $x_p = 1$, в $x_y = 2$), а

$$\beta_R = \alpha^{1-x_c}.$$

Поскольку выражение (161) ограничивает диапазон изменений $x_c = 0, 1, 2, 3$, то $\beta_{Rmax} = \alpha^{-2}$, а $\beta_{Rmin} = \alpha$. Отношение величин $\gamma = \beta_{Rmin} / \beta_{Rmax} = \alpha^3 = 3,886 \cdot 10^{-7}$ при строгом неравенстве $\xi > 0$ приводит к $\gamma < \alpha^3$, что и подтверждено опытами фон Клитцинга [6].

Рассмотренные два режима работы достаточно легко интерпретировать. Так, например, первый режим описывает значение

поперечного кванта сопротивления $R_{zy} = R_{HE}^{(1)} = R_H$ с областью локализации (157) и значением вектора магнитной индукции (158). Тогда второй режим будет описывать значение продольного кванта сопротивления $R_{yy} = R_{HE}^{(2)}$ ($R_{HE}^{(2)} \rightarrow 0$ при $\omega_y \rightarrow 0$) с областью локализации (161) и вектором индукции внешнего магнитного поля $B_x > B_{xc}^{(2)}$ (здесь можно отметить, что $B_{xc}^{(1)} \ll B_x$).

Предположение о диффузном характере холловского сопротивления при постоянстве градиента концентрации позволяет найти суммарное значение поперечного сопротивления как последовательно-параллельное соединение найденных выше квантов сопротивления. Это означает, что вдоль оси Z может быть n_z последовательно включенных квантов сопротивления. Очевидно, что $R(n_z) = n_z R_H$, причем область локализации этих квантов $l(n_z) \ll L_z$. Вдоль оси y может быть n_y параллельно включенных комплексов $R(n_z)$, что означает суммарное сопротивление $R(n_z, n_y) = R_H n_z / n_y$ (здесь также $l(n_y) \ll L_y$). Определенное число n_x параллельно включенных комплексов $R(n_z, n_y)$ может быть и вдоль оси x (толщины 2М-системы). Тогда суммарное сопротивление поперечного холловского сопротивления на макро-скопическом уровне имеет вид

$$R_{\Sigma zy} = R_z(n_z, n_y, n_x) = R_H \cdot n_z / n_x n_y, \quad (163)$$

откуда при $n_z = 1$ имеем целочисленный КЭХ:

$$n_x n_y; n_x n_y - 1, \dots, 3, 2, 1,$$

а при $n_z = 2$ - подобный КЭХ:

$$\frac{n_x n_y}{2}; \frac{n_x n_y - 1}{2}; \dots, 3/2, 1, 1/2 \quad \text{при } n_z = 2,$$

$$\frac{n_x n_y}{3}; \frac{n_x n_y - 1}{3}; \dots, 1, 2/3, 1/3 \quad \text{при } n_z = 3.$$

Аналогично можно получить выражение для суммарного макро-скопического продольного сопротивления

$$R_{\Sigma yy} = R_y(n_y, n_z, n_x) = R_{HE}^{(2)} n_y / n_x n_z.$$

3.5. Квантовый эффект поля. Прежде чем рассматривать вопросы энергетических потерь при движении дебройлевского пузыря в 2М-системе, необходимо найти вещественные амплитуды комплексных векторов электромагнитного поля. Внешнее управляющее электрическое поле имеет компоненты $E_x, E_y = 0, E_z = 0$ и при больших его значениях приводит к появлению блоховских колебаний в приповерхностном слое полупроводника. Комплексный вектор электрической индукции блоховских колебаний с учетом (95) запишем в виде

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}_z = \{\dot{\mathcal{E}}_{rx}, 0, 0\}, \quad (164)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{rx} = \mathcal{E}_{rx0} \exp\{i[k_x(\Delta x) + \omega(\Delta t)]\}. \quad (165)$$

Связь между комплексными векторами электрической и магнитной индукции описывается квантовым уравнением Максвелла (113) при $\mathcal{J}_{\epsilon H} = 0$

$$\text{rot } \dot{\vec{\mathcal{H}}}_r = \partial \dot{\vec{\mathcal{E}}}/\partial(\Delta t), \quad (166)$$

которое можно с учетом (165) расписать по компонентам

$$(\text{rot } \dot{\vec{\mathcal{H}}}_r)_x = \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_{rz}}{\partial(\Delta y)} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_{ry}}{\partial(\Delta z)} = \epsilon_0 \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{rx}}{\partial(\Delta t)}, \quad (167)$$

$$(\text{rot } \dot{\vec{\mathcal{H}}}_r)_y = \partial \dot{\mathcal{H}}_{rx}/\partial(\Delta z) - \partial \dot{\mathcal{H}}_{rz}/\partial(\Delta x) = 0, \quad (168)$$

$$(\text{rot } \dot{\vec{\mathcal{H}}}_r)_z = \partial \dot{\mathcal{H}}_{ry}/\partial(\Delta x) - \partial \dot{\mathcal{H}}_{rx}/\partial(\Delta y) = 0. \quad (169)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай

$$\dot{\mathcal{H}}_{ry} = \dot{\mathcal{H}}_{rx} = 0, \quad (170)$$

который с учетом (165) ограничивает движение дебройлевского пузыря в 2M-системе только вдоль оси ζ . Перепишем роторные составляющие (170) индуцированного магнитного поля через векторное поле $\dot{\vec{A}}_r = \{\dot{A}_{rx}, \dot{A}_{ry}, \dot{A}_{rz}\}$

$$\dot{\mathcal{H}}_{rx} = \frac{\partial \dot{A}_{rz}}{\partial(\Delta y)} - \frac{\partial \dot{A}_{ry}}{\partial(\Delta z)}, \quad (171)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_{ry} = \partial \dot{A}_{rx}/\partial(\Delta z) - \partial \dot{A}_{rz}/\partial(\Delta x). \quad (172)$$

Учет в (171), (172) нулевого значения комплексных напряженностей магнитного поля (170) дает соотношение между компонентами векторного поля

$$\partial \dot{A}_{rz}/\partial(\Delta y) = \partial \dot{A}_{ry}/\partial(\Delta z); \quad \frac{\partial \dot{A}_{rx}}{\partial(\Delta z)} = \frac{\partial \dot{A}_{rz}}{\partial(\Delta x)}. \quad (173)$$

Система разностных дифференциальных уравнений первого порядка (173) эквивалента одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_{ry}}{\partial(\Delta x)\partial(\Delta z)} = \frac{\partial^2 \dot{A}_{rz}}{\partial(\Delta y)\partial(\Delta z)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial(\Delta z)} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{ry}}{\partial(\Delta x)} - \frac{\partial \dot{A}_{rx}}{\partial(\Delta y)} \right\} = \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_{rz}}{\partial(\Delta z)} = 0. \quad (174)$$

Из (174) следует, что при выполнении условий (164), (165) и (170) Z -компонента индуцированного магнитного поля будет иметь постоянное значение $\mathcal{H}_{rz}(\Delta Z) = \text{const}$ при изменении разностного параметра (ΔZ). Выполнение условия (170) в соотношении (168), (169) дает

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{rz}}{\partial(\Delta X)} = \frac{\partial \mathcal{H}_{rx}}{\partial(\Delta Z)} = 0, \quad (175)$$

откуда следует также независимость Z -компоненты магнитного поля от разностного параметра (ΔX) — $\mathcal{H}_{rz}(\Delta X) = \text{const}$. Объединяя следствия, вытекающие из соотношений (174) и (175), находим, что $\mathcal{H}_{rz}((\Delta X), (\Delta Z)) = \text{const}$. Поэтому Z -компонента индуцированного магнитного поля может быть представлена с учетом (103) в виде

$$\mathcal{H}_{rz} = \mathcal{H}_{rz0} \exp\{i[k_y(\Delta y) + \omega(\Delta t)]\}. \quad (176)$$

Подставляя в (167) значения (165) и (176), с учетом (171), (172) получаем вещественный эквивалент квантового уравнения Максвелла (166)

$$k_y \mathcal{H}_{rz0} = \epsilon_0 \omega \mathcal{E}_{rx0}, \quad (177)$$

который будет иметь физическое значение только при выполнении дополнительного условия

$$k_x(\Delta X) = k_y(\Delta y), \quad (178)$$

связывающего компоненты волнового вектора \vec{k} с разностями (ΔX) и (Δy) пространственных смещений.

Путем простых алгебраических преобразований из (177) находим вещественную амплитуду индуцированного магнитного поля, которую с учетом соотношения (178) можно записать в виде

$$\mathcal{H}_{rz0} = (\epsilon_0 \omega / k_y) \mathcal{E}_{rx0} = (\epsilon_0 \omega / k_x) [(\Delta y) / (\Delta X)] \mathcal{E}_{rx0}. \quad (179)$$

Разностные пространственные координаты и время позволяют ввести компоненты скоростей движений в индуцированном электромагнитном поле

$$\begin{cases} v_x = (\Delta X) / (\Delta t), \\ v_y = (\Delta y) / (\Delta t). \end{cases} \quad (180)$$

Предположение о том, что перенос энергии электромагнитного поля возможен только вдоль оси X (т. е. оси индуцированной сверхрешетки) дает возможность представить V_x через групповую скорость движения

$$V_x = V_{gp} = \omega / k_x. \quad (181)$$

Подставляя значения (180) и (181) в (179), находим искомое значение для Z -компоненты амплитуды индуцированного магнитного поля

$$\mathcal{H}_{rzo} = \varepsilon_0 v_y \mathcal{E}_{rx0} . \quad (182)$$

Отметим, что соотношение (182), по существу, является вещественным алгебраическим аналогом комплексного дифференциального уравнения Максвелла (166). Из (182) следует, что в вещественной области имеют физический смысл только амплитуды блоховских колебаний (если последние не ограничены размерами 2M-систем). Таким образом, появление по какой-либо причине индуцированной сверхрешетки на поверхности полупроводника с периодической индукцией (165) неизбежно приводит к появлению индуцированного магнитного поля.

Важным обстоятельством является то, что соотношение (182) справедливо в области значений (ΔX) , находящейся в дифференциальной части индуцированного канала 2M-системы МДП-транзистора

$$\chi_{gen} \leq (\Delta X) \leq \chi_{gen} + \chi_{dif} , \quad (183)$$

где электромагнитное поле настолько сильное, что вытесняет частицы или дырки в область $[0, \chi_{gen}]$.

Рассмотрим движения заряженного дебройлевского пузыря в генеративной части индуцированного канала при наличии внешнего продольного электрического поля $\vec{E}_1 = \{0, E_{y1}, 0\}$ и индуцированного магнитного поля $\mathcal{H}_{r0} = \{0, 0, \mathcal{H}_{rzo}\}$ (182), расположенного в дифференциальной части канала. Очевидно, что здесь будет справедливо известное соотношение де Бройля $\vec{p}_1 = \hbar \vec{k}_1$, вводящее дискретность движения дебройлевского пузыря. Уравнение движения последнего запишем по аналогии с (136) в векторном виде

$$d\vec{p}_1/dt_1 = \hbar d\vec{k}_1/dt_1 = e\vec{E}_1 + e[\vec{v}_1, \vec{B}_{r0}] .$$

Последнее уравнение перепишем по компонентам:

$$\begin{cases} \hbar dk_{x1}/dt_1 = e v_{y1} B_{rzo} , \\ \hbar dk_{y1}/dt_1 = e E_{y1} - e v_{x1} B_{rzo} ; \end{cases} \quad (184)$$

здесь индекс „1“ одновременно подчеркивает принадлежность физических величин к области значений (ΔX_1)

$$0 \leq (\Delta X)_1 \leq \chi_{gen} \quad (185)$$

и позволяет использовать для упрощения записи разностных величин в обычной форме, что не столь важно для области (185).

Предполагая справедливость квадратичного закона дисперсии в области (185)

$$W_1 = p_1^2/2m_0 = (k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + k_{z1}^2) \hbar^2/2m_0 , \quad (186)$$

где W_1 – энергия движения заряженного дебройлевского пузыря. Из уравнения (186) определяем значения компонентов скорости $v_{y1} = \hbar^{-1} \partial W_1 / \partial k_{y1}$ и $v_{x1} = \hbar^{-1} \partial W_1 / \partial k_{x1}$, подставляя которые в (184), находим

$$\left\{ \begin{aligned} \hbar dk_{x1} / dt_1 &= e \hbar^{-1} \beta_{r20} \partial W_1 / \partial k_{y1}, & (187) \\ \hbar dk_{y1} / dt_1 &= e E_{y1} - e \hbar^{-1} \beta_{r20} \partial W_1 / \partial k_{x1}. & (188) \end{aligned} \right.$$

Первое уравнение (187) перепишем по аналогии с (141) в виде

$$\hbar^2 dk_{x1} dk_{y1} / dt_1 dW_1 = e \beta_{r20}.$$

В результате интегрирования получаем

$$dA_1 / dW_1 = e \beta_{r20} T_p = e \beta_{r20} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}.$$

Поскольку квазиимпульсная площадь равна $A_1 = \pi(\hbar \vec{k}_1)^2$, то частота

$$\omega_c = 2\pi e \beta_{r20} \frac{dW_1}{dA_1} = \frac{e \beta_{r20}}{m_0}$$

совпадает со значением циклотронной частоты как в классическом случае. Кроме того, объединяя выражения (187), (188) в одно, находим

$$\hbar dk_1 / dt_1 = e E_{y1} / 2.$$

В результате интегрирования получаем

$$m_0 v_{y1} = e E_{y1} t_1 / 2.$$

Вспоминая, что в области (185) значения x_1 , y_1 и t_1 являются также разностными величинами, для которых, как и ранее (180), справедливо определение скорости

$$v_{y1} = y_1 / t_1,$$

находим искомое значение для скорости дрейфа вдоль электрического поля E_{y1} в области (185)

$$v_{y1} = (e y_1 E_{y1} / 2 m_0)^{1/2}. \quad (189)$$

Поскольку продольное электрическое поле E_{y1} также может быть достаточно сильным и приводить к финитному движению вдоль оси y , то в области (185) возможно появление колебаний Зинера-Блоха, частота которых записывается в виде

$$\omega_{y1} = e y_1 E_{y1} / \hbar.$$

Определяя комптоновскую частоту как $\omega_0 = c / \lambda_0^*$, перепишем скорость дрейфа (189)

$$v_{y1} = c (\omega_{y1} / \omega_0)^{1/2}. \quad (190)$$

Отметим немаловажное обстоятельство. Скорость дрейфа (190) определяется не только свойствами физической среды в области (185), но и должна быть согласована и со свойствами среды в области (183). Взаимосвязь между областями (183) и (185) выражается через равенство скоростей

$$v_{y1} = v_y, \quad (191)$$

описываемое выражением (190) и входящее в уравнение (182). Условие (191) позволяет нам подставить значение (190) в (182):

$$\mathcal{H}_{rzo} = \epsilon_0 c \mathcal{E}_{rx0} (\omega_{y1}/\omega_0)^{1/2}. \quad (192)$$

По определению, индуцированный магнитный поток, проходящий через площадку S_H , можно записать с учетом (192) в виде

$$\Phi_z = \mu_0 \mathcal{H}_{rzo} S_H = c^{-1} S_H \mathcal{E}_{rx0} (\omega_{y1}/\omega_0)^{1/2};$$

здесь использовано также соотношение $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$.

Индуцированный электрический поток, проходящий через площадку S_E , по определению, равен

$$Q_x = \epsilon_0 \mathcal{E}_{rx0} S_E.$$

По существу, мы только теперь можем воспользоваться определением электромагнитного сопротивления (30) в системе СИ

$$R_{HE} = \Phi_z / Q_x = (c \epsilon_0)^{-1} \frac{S_H}{S_E} \cdot (\omega_{y1}/\omega_0)^{1/2}. \quad (193)$$

Используя определение постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/2c\epsilon_0\hbar$, а также полагая для элементарных площадок

$$S_H \approx \lambda_x \lambda_y; \quad S_E \approx \lambda_y \lambda_z,$$

где $\lambda_i = c/\omega_i$ — длины волн блоховских колебаний, перепишем выражение (193) в виде

$$R_{HE} = 2R_H \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_y}\right)^{1/2}. \quad (194)$$

Поскольку совместное решение уравнения Шредингера и Пуассона налагает определенные ограничения на длину волны блоховских колебаний волновой функции дебройлевской частицы $\lambda_x = \lambda_0 \alpha^{-x}$, $x = 0, 1/2, 1, \dots$, то выражение (194) перепишем

$$R_{HE} = 2R_H \alpha^{1+0.5x_y+x_z-x_x}, \quad (195)$$

а выражение для электрического напряжения (125) представим в виде

$$U_x = U_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_x}\right)^2 = U_0 \alpha^{2x_x}, \quad (196)$$

где $U_0 = m_0 c^2 / 8 \pi e = 20332,18$ В. Запишем кванты напряженности электрического поля в КЭП

$$\varepsilon_x = U_x / \lambda_{x_1} = \varepsilon_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{x_1}} \right)^3 = \varepsilon_0 \alpha^{3x_x}, \quad (197)$$

где $\varepsilon_0 = U_0 / \lambda_0^3 = 8,379882 \cdot 10^{15}$ В/м – квант электрического поля в КЭП. Квант магнитного поля можно получить из (192) с учетом (197) в виде

$$B_x = B_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{x_1}} \right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{x_y}} \right)^{1/2} = B_0 \alpha^{3x_x + x_y/2}, \quad (198)$$

где $B_0 = U_0 / c \lambda_0^2 = 27952275$ Тл.

Рассмотренная выше индуцированная сверхрешетка может находиться в двух различных режимах так же, как и при КЭХ. Для первого режима характерно выполнение условия

$$x_x = 1 + x_z + 0,5x_y. \quad (199)$$

Тогда выражения (195)–(198) можно переписать в такой форме:

$$\begin{cases} R_{HE}^{(1)} = 2R_H = 51625,64 \text{ Ом}, \\ U_x^{(1)} = U_0 \alpha^{2(1+x_z+0,5x_y)}, \\ \varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon_0 \alpha^{3(1+x_z+0,5x_y)}, \\ B_x^{(1)} = B_0 \alpha^{3(1+x_z)+2x_y}. \end{cases} \quad (200)$$

Полагая $x_z = 0$, а $x_y = 0, 1/2, 1$, из (200) можно получить набор значений квантов физических величин, которые можно измерять экспериментально в первом режиме КЭП (табл. 13).

Для второго режима характерно выполнение условия

$$x_x = 1. \quad (201)$$

Данное условие выбрано не произвольно, а с учетом ограничений, налагаемых на величину электрического напряжения и электрического поля, выводящих 2М-систему МДП-транзистора на режим КЭП,

$$U_x^{(2)} = U_0 \alpha^2 = 1,082715 \text{ В},$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = \varepsilon_0 \alpha^3 = 3,256368 \cdot 10^9 \text{ В/м}.$$

Таблица 13. Расчетные значения квантов энергии, напряженности электрического поля и магнитной индукции

x_y	$U_x^{(1)}, \text{ В}$	$\varepsilon_x^{(1)}, \text{ В/м}$	$B_x^{(1)}, \text{ Тл}$
0	1,082715 - 00	3,256368 + 09	1,086070 + 01
1/2	9,249047 - 02	8,1302411 + 07	7,926438 - 02
1	7,900956 - 03	2,029930 + 06	5,784200 - 04

Таблица 14. Расчетные значения квантов сопротивлений и индукции магнитного поля

α_y	$R_{HE}^{(2)}, \text{ Ом}$	$B_{\alpha}^{(2)}, \text{ Тл}$
0	$2R_H = 51625,64$	$B_0 \alpha^3 = 10,86207$
1/2	$2R_H \cdot \alpha^{1/2} = 15088,87$	$B_0 \alpha^{2.5} = 3,17471$
1	$2R_H \alpha^{1/2} = 4410,096$	$B_0 \alpha^{3.5} = 0,927888$

Подставляя (201) в (195) и (199), получим

$$\begin{cases} R_{HE}^{(2)} = 2R_H \alpha^{\alpha_z + \alpha_y/2}, \\ B_{\alpha}^{(2)} = B_0 \alpha^{3 + \alpha_y/2}. \end{cases} \quad (202)$$

Полагая $\alpha_z = 0$, а $\alpha_y = 0, 1/2, 1$, из (202) получаем набор значений квантов физических величин (табл. 14).

Отметим, что второй режим наблюдается в 2М-системе толщиной $\lambda_x = \lambda_0/\alpha$, тогда как первый режим имеет место для толщины порядка $\lambda_0/\alpha \leq \lambda_x \leq \lambda_0/\alpha^{3/2}$. Отсюда следует, что режим КЭП в МДП-структурах является типичным мезоскопическим квантовым явлением. Из табл. 13 и 14 следует, что величины магнитной индукции при КЭП находятся в диапазоне внешних полей, используемых при исследованиях КЭХ на узкоканальных МДП-транзисторах. Макроскопическое значение дифференциального сопротивления МДП-транзистора, работающего в режиме сверхсильной инверсии, также можно представить в виде последовательно-параллельного соединения квантов сопротивления

$$R_{\Sigma} = R_H n_y / n_x n_z,$$

который отличается от (163) обозначениями $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$

3.6. Магнитные заряды. По аналогии с законом Кулона для электрических зарядов, можно записать закон взаимодействия между одноименными магнитными зарядами μ

$$F_{\mu} = \mu^2 / 4\pi \mu_0 \lambda^2,$$

где F_{μ} - сила отталкивания (притяжения) магнитных зарядов, а λ - расстояние между зарядами. Роль постоянной тонкой структуры здесь выполняет величина

$$\beta = \mu^2 / 2\mu_0 hc = 1/4\alpha \quad (203)$$

при условии, что значение элементарного заряда $\mu = h/e$. Поскольку индуцированный электрический заряд можно представить в виде (см. выражение (150))

$$Q_{in} = 4\pi \lambda^2 \mathcal{E}_{in} = 4\pi \epsilon_0 U_{in}, \quad (204)$$

то при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, с учетом зависимости для U_{in} в форме (196) находим минимальное значение индуцированного электрического заряда

$$Q_0 = Q_{iп} / \lambda = \lambda_0 = e / 4\alpha = \beta e .$$

Из последнего выражения следует, что индуцированная сверхрешетка в МДП-структуре приводит к появлению индуцированных электрических зарядов, которые связаны с магнитными зарядами. Интересно отметить, что величину индуцированного магнитного заряда, по аналогии с (204), можно представить в виде

$$M_{iп} = 4\pi \lambda^2 \mathcal{B}_{iп} \Big|_{\lambda \rightarrow \lambda_0} = \frac{\hbar}{2e} = M_0 .$$

где значение для $\mathcal{B}_{iп}$ берем из (198). Таким образом, в КЭП отношение величин элементарного магнитного заряда к индуцированному значению равно двум, тогда как отношение индуцированного электрического заряда к его элементарному значению равно β .

4. 1. Основные положения микроскопической теории сверхпроводимости. В представлении чисел заполнения состояние системы определяется указанием числа частиц в каждом одночастичном состоянии. Оператор числа частиц в состоянии S равен [30]

$$\hat{n}_S = \hat{\alpha}_S^+ \hat{\alpha}_S, \quad (205)$$

где

$$\hat{\alpha}_S = (-1)^{\nu_S} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\alpha}_S^+ = (-1)^{\nu_S} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (206)$$

– соответственно операторы уничтожения и рождения числа частиц в состоянии S на единицу; $\nu_S = \sum_{i < S} n_i$ – число занятых состояний, предшествующих состоянию S . Знаковый множитель $(-1)^{\nu_S}$ в (206) равен 1 или -1 в зависимости от того, четно или нечетно число занятых состояний, предшествующих S . Для ферми-системы операторы (206) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\{\hat{\alpha}_S, \hat{\alpha}_S\} = \{\hat{\alpha}_S^+, \hat{\alpha}_S^+\} = 0, \quad \{\hat{\alpha}_S, \hat{\alpha}_S^+\} = \delta_{S_e}. \quad (207)$$

где $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\} = \hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}$ – антикоммутатор двух операторов. Действие операторов $\hat{\alpha}_S$ и $\hat{\alpha}_S^+$ на волновые функции $|\dots n_S \dots\rangle$, зависящие от числа частиц в каждом одночастичном состоянии, характеризуются равенствами

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_S |\dots n_S \dots\rangle = (-1)^{\nu_S} \sqrt{n_S} |\dots | - n_S \dots\rangle, \\ \hat{\alpha}_S^+ |\dots n_S \dots\rangle = (-1)^{\nu_S} \sqrt{1 - n_S} |\dots | + n_S \dots\rangle. \end{cases}$$

Если взаимодействие между ферми-частицами определяется парными силами, то оператор Гамильтона системы из N фермионов можно записать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}(\xi_1 \dots \xi_N) = \sum_{i=1}^N \hat{\mathcal{H}}(\xi_i) + \sum_{i < j} \hat{W}(\xi_i, \xi_j),$$

где $\hat{\mathcal{H}}(\xi_i)$ – одночастичные гамильтонианы; $\hat{W}(\xi_i, \xi_j)$ – энергетический оператор, учитывающий взаимодействие между i -й и j -й частицами. Переход к представлению вторичного квантования соответствует замене оператора $\hat{\mathcal{H}}(\xi_1 \dots \xi_N)$ оператором

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \hat{\Psi}^*(\xi) \hat{\mathcal{H}}(\xi) \hat{\Psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^*(\xi) \hat{\Psi}^*(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \hat{\Psi}(\xi') \hat{\Psi}(\xi) d\xi d\xi', \quad (208)$$

где операторы поля удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{\hat{\psi}(\xi), \hat{\psi}(\xi')\} = \{\hat{\psi}^+(\xi), \hat{\psi}^+(\xi')\} = 0,$$

$$\{\hat{\psi}(\xi), \hat{\psi}^+(\xi')\} = \delta(\xi - \xi').$$

Переход к представлению чисел заполнения состоит в разложении операторов поля $\hat{\psi}(\xi)$ по полной ортонормированной системе функций $\varphi_S(\xi)$. Если

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_S \hat{\alpha}_S \varphi_S(\xi), \quad (209)$$

то операторы $\hat{\alpha}_S$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (207). За ортонормированную систему функций $\varphi_S(\xi)$ удобно принять собственные функции оператора $\hat{\mathcal{H}}(\xi)$, удовлетворяющего стационарному уравнению Шредингера

$$\hat{\mathcal{H}}(\xi) \varphi_S(\xi) = \varepsilon_S \varphi_S(\xi).$$

Подставляя (209) в (208), находим оператор Гамильтона в представлении чисел заполнения

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_S \varepsilon_S \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_S + \frac{1}{2} \sum_{slpq} \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_l^* \hat{\alpha}_p \hat{\alpha}_q \langle sl | \hat{W} | pq \rangle, \quad (210)$$

где

$$\langle sl | \hat{W} | pq \rangle = \int \varphi_S^*(\xi) \varphi_l^*(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \varphi_p(\xi') \varphi_q(\xi) d\xi d\xi'. \quad (211)$$

Оператор суммарного числа частиц в системе определяется равенством

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^+(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi = \sum_S \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_S.$$

В ферми-системах, состоящих из устойчивых частиц, полное число частиц должно быть постоянным. Чтобы не вводить дополнительного условия $N = \text{const}$, введем химический потенциал μ . Добавляя в оператор (210) член $\mu \sum_S \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_S$, получим новый оператор

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_S (\varepsilon_S - \mu) \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_S + \frac{1}{2} \sum_{slpq} \hat{\alpha}_S^* \hat{\alpha}_l^* \hat{\alpha}_p \hat{\alpha}_q \langle sl | \hat{W} | pq \rangle. \quad (212)$$

В основном состоянии системы при отсутствии взаимодействия ($W = 0$) все одночастичные состояния с энергией $\varepsilon_S \leq \varepsilon_F$ заполнены, а состояния $\varepsilon_S > \varepsilon_F$ — свободны и химический потенциал $\mu = \varepsilon_F$, где ε_F — энергия Ферми.

Если ферми-система состоит из частиц со спином 1/2, а оператор $\hat{\mathcal{H}}(\xi)$ имеет собственные значения $\hbar^2 k^2 / 2m$, то одночастичные состояния определяются волновыми функциями

$$\varphi_S = \varphi_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \chi_{\sigma}. \quad (213)$$

где V - объем; χ_{σ} - спиновая функция; индекс σ принимает два значения $\pm 1/2$. Предположим, что взаимодействие между двумя фермионами зависит только от расстояния между ними и не зависит от ориентации спинов, т. е. для малого радиуса действия

$$\hat{W}(\xi, \xi') = \hat{W}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (214)$$

Тогда матричные элементы (211), входящие в (212), равны

$$\langle S_1' S_2' | \hat{W} | S_2 S_1 \rangle = - \frac{v(|\vec{k}_1' - \vec{k}_1|)}{V} \delta_{\sigma_2' \sigma_2} \delta_{\sigma_1' \sigma_1} \Delta(\vec{k}_2' - \vec{k}_2 + \vec{k}_1' - \vec{k}_1),$$

где функция Δ учитывает закон сохранения импульса

$$\Delta(\vec{k}_2' - \vec{k}_2 + \vec{k}_1' - \vec{k}_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{k}_2' + \vec{k}_1' = \vec{k}_2 + \vec{k}_1, \\ 0 & \text{при } \vec{k}_2' + \vec{k}_1' \neq \vec{k}_2 + \vec{k}_1. \end{cases}$$

а $v_{kk'}$ - действительные функции, зависящие от абсолютной величины вектора $\vec{k}_1' - \vec{k}_1$,

$$v_{kk'} = v(\vec{k}_1' - \vec{k}_1) = \frac{-4\pi}{|\vec{k}_1' - \vec{k}_1|} \int_0^{\infty} w(\rho) \rho \sin\{|\vec{k}_1' - \vec{k}_1| \rho\} d\rho \quad (216)$$

(здесь ρ - координата, вдоль которой направлено движение ферми-частиц). Отметим, что выражения (215) и (216) справедливы только при ортонормированности волновых функций (213) (это выполняется для периодических граничных условий $\psi_{\sigma}(\vec{r}^2)$). Тогда на протяжении ребра куба, объема V укладывается целое число волн де Бройля, т. е. для любой проекции импульса должно выполняться условие

$$k_i = 2\pi n_i / L, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

Данное условие аналогично квантованию энергии частицы в ограниченном ящике (см. гл. 2).

Учитывая (215) и (216), находим явное выражение оператора Гамильтона для случая, когда силы взаимодействия не зависят от спинов,

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{k\sigma} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \hat{\alpha}_{k\sigma}^+ \hat{\alpha}_{k\sigma} - \frac{1}{2V} \sum_{k_2, k_1 = k_2' + k_1'} v_{kk'} \times \hat{\alpha}_{k_1 \sigma_1}^+ \hat{\alpha}_{k_2 \sigma_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2 \sigma_2} \hat{\alpha}_{k_1 \sigma_1} \quad (217)$$

Во второй сумме суммирование выполняется по σ_1, σ_2 и по всем значениям k_1, k_2' , удовлетворяющим закону сохранения импульсов, указанному под суммой.

Для конечного радиуса взаимодействия, где доминируют взаимодействия между частицами с антипараллельными спинами ($\sigma_2 = -\sigma_1$), в (217) можно выделить члены, для которых $\vec{k}_2 + \vec{k}_1 = \vec{k}_2' + \vec{k}_1' = 0$,

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'.$$

$\hat{\mathcal{H}}'$ содержит все произведения четырех ферми-операторов, для которых $\vec{k}_2 + \vec{k}_1 = \vec{k}'_2 + \vec{k}'_1 \neq 0$, а

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{k_0} e(\vec{k}) \hat{\alpha}_{k_0}^+ \hat{\alpha}_{k_0} - \frac{1}{2V} \sum_{kk'0} v_{kk'} \times \hat{\alpha}_{k'0}^+ \hat{\alpha}_{-k'-0} \hat{\alpha}_{-k,-0} \hat{\alpha}_{k0} ;$$

здесь $e(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$; $v_{kk'}$ - фурье-представление энергии взаимодействия двух фермионов (216). Слагаемые, отличающиеся только значениями σ , дают одинаковый вклад в суммы оператора $\hat{\mathcal{H}}_0$, поэтому

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = 2 \sum_{k} e(\vec{k}) \hat{\alpha}_{k/2}^+ \hat{\alpha}_{k/2} - \frac{1}{V} \sum_{kk'} v_{kk'} \hat{\alpha}_{k'/2}^+ \hat{\alpha}_{-k'-1/2} \hat{\alpha}_{-k,-1/2} \hat{\alpha}_{k/2} . \quad (218)$$

Для исследования спектра собственных значений оператора (218) проведем канонические преобразования ферми-операторов, впервые предложенные Боголюбовым [37],

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{k/2} = u_k \hat{A}_{k0} + v_k \hat{A}_{k1} , \\ \hat{\alpha}_{-k,-1/2} = u_k \hat{A}_{k1} - v_k \hat{A}_{k0} . \end{cases} \quad (219)$$

Здесь u_k и v_k - вещественные функции, симметричные относительно преобразования $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ и удовлетворяющие условию

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 . \quad (220)$$

Выполнение условия (220) является достаточным для того, чтобы новые операторы \hat{A}_{k0} и \hat{A}_{k1} были ферми-операторами. Переходя с помощью преобразований (219) к новым ферми-операторам, преобразуем (218) к виду

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{W}_0 + \hat{\mathcal{H}}_0^0 + \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 , \quad (221)$$

где

$$\hat{W}_0 = 2 \sum_{k} e(\vec{k}) v_k^2 - \frac{1}{V} \sum_{kk'} v_{kk'} u_k v_k u_k v_k \quad (222)$$

- постоянное слагаемое, не зависящее от ферми-операторов и соответствующее энергии основного состояния;

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0^0 = & \sum_{k} \{ e(\vec{k}) (u_k^2 - v_k^2) + \\ & + \frac{2u_k v_k}{V} \sum_{k'} v_{kk'} u_k v_k \} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0} + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k1}) \end{aligned} \quad (223)$$

- диагональная часть оператора Гамильтона;

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \sum_{k} \{ 2e(\vec{k}) u_k v_k - \frac{1}{V} \sum_{k'} v_{kk'} u_k v_k (u_k^2 - v_k^2) \} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k0}) \quad (224)$$

- недиагональная часть оператора Гамильтона, содержащая произведения только двух ферми-операторов;

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{V} \sum_{kk'} v_{kk'} u_k v_{k'} u_k v_{k'} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1} + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k0})^2 \quad (225)$$

– оператор, содержащий произведения четырех новых ферми-операторов (нелинейный член).

4.2. Режим низкотемпературной сверхпроводимости ферми-системы. В стандартной теории Боголюбова [37] при возбуждениях с малой энергией вещественные функции u_k и v_k канонических преобразований (219) выбираются из условия равенства нулю недиагональной части оператора Гамильтона

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = 0,$$

добиться которого можно выполнением условия

$$2e(k)u_k v_k = \frac{1}{V} (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} v_{kk'} u_{k'} v_{k'}. \quad (226)$$

Введя обозначение

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} v_{kk'} u_{k'} v_{k'}, \quad (227)$$

из (226) и (220) можно выразить u_k и v_k через $e(k)$ и Δ_k .

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e(k)}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} \right]; \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e(k)}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} \right]. \quad (228)$$

Подставляя полученные решения в выражение для энергии основного состояния ферми-системы (222), находим

$$W_0 = \sum_k W_{k0} = \sum_k \left[e(k) - \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} + \frac{\Delta_k^2}{2\sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2}} \right].$$

Поскольку энергия W_0 зависит от квадрата величины энергии щели Δ_k , то она не зависит от знака последней, а ее величина всегда меньше нуля, что означает энергетическую выгодность рассматриваемого режима. Данный режим ферми-системы может появляться независимо от наличия внешнего возмущения, где под внешним возмущением подразумевается силовое воздействие, а не температурное.

Диагональную часть оператора Гамильтона в режиме низкотемпературной сверхпроводимости (НСП) находим подстановкой решения (228) в (223)

$$\hat{\mathcal{H}}_0^0 = \sum_k \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0} + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k1}).$$

Отсюда следует, что энергетическая функция этого оператора, отображающая спектр элементарных возбуждений, имеет вид

$$W_{k0}^0 = \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2}.$$

Каждому значению импульса $\hbar\vec{k}$ соответствуют два типа элементарных возбуждений системы фермионов, характеризующиеся собственными функциями новых операторов чисел заполнения,

$$\begin{cases} \hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0} |n_{k_0}\rangle = n_{k_0} |n_{k_0}\rangle, \\ \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1} |n_{k_1}\rangle = n_{k_1} |n_{k_1}\rangle. \end{cases}$$

Состояния $|n_{k_0}\rangle$ и $|n_{k_1}\rangle$ имеют соответственно энергии $n_{k_0} W_{k_0}^0$ и $n_{k_1} W_{k_0}^0$. Энергию $e(\vec{k})$ представим в виде

$$e(\vec{k}) = \varepsilon_k - \varepsilon_f = (k^2 - k_f^2) \hbar^2 / 2m,$$

где

$$\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m; \quad \varepsilon_f = \hbar^2 k_f^2 / 2m.$$

в k_f – квазиимпульс Ферми. Следует отметить, что в режиме НСП энергия Ферми в значительной мере превышает величину энергии щели $\langle |\varepsilon_f| \rangle \gg \Delta_k$.

Нелинейный член оператора Гамильтона в режиме НСП находим подстановкой решения (228) в (225)

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \sum_k \frac{\Delta_k^2}{2\sqrt{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2}} (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1})^2. \quad (229)$$

Энергетическая функция этого оператора имеет вид

$$W_{k_2} = \Delta_k^2 / 2\sqrt{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2}.$$

Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ в этом случае соответствует сложное многочастичное возбуждение, характеризующееся собственными функциями новых операторов чисел заполнения

$$(\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1})^2 |n_{k_0} n_{k_1}\rangle = (n_{k_0} + n_{k_1})^2 |n_{k_0} n_{k_1}\rangle. \quad (230)$$

Изменения многочастичных спектров, т. е. разность $e(\vec{k}) - W_{k_2}^0$ (или $e(\vec{k}) - W_{k_2}$), определяется величиной энергетической щели Δ_k , которая, в свою очередь, является корнем уравнения

$$\Delta_k = \sum_{k'} v_{kk'} \Delta_{k'} / \sqrt{e^2(\vec{k}') + \Delta_{k'}^2}. \quad (231)$$

Последнее уравнение имеет тривиальное решение: $\Delta_k = 0$, или $u_k v_k = 0$. Выберем это решение в виде

$$\begin{cases} u_k = 1, v_k = 0 & \text{при } e(\vec{k}) > 0, \end{cases} \quad (232)$$

$$\begin{cases} u_k = 0, v_k = 1 & \text{при } e(\vec{k}) < 0. \end{cases} \quad (233)$$

Чтобы определить физический смысл полученных решений, рассмотрим каноническое преобразование, обратное (219),

$$\begin{cases} \hat{A}_{k_0} = u_k \hat{\alpha}_k - v_k \hat{\alpha}_{-k}^+, \\ \hat{A}_{k_1} = u_k \hat{\alpha}_{-k} + v_k \hat{\alpha}_k^+. \end{cases} \quad (234)$$

При значениях (232) вне сферы Ферми операторы $\hat{A}_{k_0} = \hat{\alpha}_k$, $\hat{A}_{k_1} = \hat{\alpha}_{-k}$ уничтожают электроноподобные частицы, или рождают дырочноподобные частицы, соответственно определяющим максимальный импульс $\vec{p}_F = \hbar \vec{k}_F$ сферы Ферми. При значениях (233) внутри сферы Ферми эти операторы равны $\hat{A}_{k_0} = -\hat{\alpha}_{-k}^+$, $\hat{A}_{k_1} = \hat{\alpha}_k^+$ и поэтому они соответствуют рождению фермионов, или уничтожению дырочноподобных частиц в состояниях $(-\vec{k}, -1/2)$ и $(\vec{k}, 1/2)$. Таким образом, преобразования (234) эквивалентны переходу к дырочному представлению. Энергия новых одночастичных $W_{k_0}^0$ и многочастичных W_{k_2} состояний при этом всегда положительна.

Нетрудно заметить, что сумма произведений эрмитово сопряженных новых ферми-операторов, соответствующих чистым одночастичным состояниям, вне сферы Ферми составляет

$$\hat{A}_{k_0}^+(u_k) \hat{A}_{k_0}(u_k) + \hat{A}_{k_1}^+(u_k) \hat{A}_{k_1}(u_k) = \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_{-k},$$

т. е. она эквивалентна сумме произведений старых ферми-операторов, также соответствующих чистым одночастичным состояниям. В то же время внутри сферы Ферми указанная сумма

$$\hat{A}_{k_0}^+(v_k) \hat{A}_{k_0}(v_k) + \hat{A}_{k_1}^+(v_k) \hat{A}_{k_1}(v_k) = 2 - (\hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_{-k})$$

не совпадает с произведениями старых ферми-операторов.

Вклад каждого из состояний в режиме НСП можно определить нахождением отношения энергетических функций:

$$W_{k_0}/W_{k_2} = 2 \left[\frac{e(\vec{k})}{\Delta_k} \sqrt{1 + \frac{e^2(\vec{k})}{\Delta_k^2}} - \frac{e^2(\vec{k})}{\Delta_k^2} - 0.5 \right],$$

$$W_{k_0}^0/W_{k_2} = 2 \left[1 + e^2(\vec{k})/\Delta_k^2 \right].$$

При $e(\vec{k}) = +\Delta_k$ эти отношения равны $W_{k_0}/W_{k_2} = -0,1716$ и $W_{k_0}^0/W_{k_2} = 4$, а при $e(\vec{k}) = -\Delta_k$: $W_{k_0}/W_{k_2} = -5,828$ и $W_{k_0}^0/W_{k_2} = 4$. Грубая оценка для величины энергии Ферми $\epsilon_F \approx 10\Delta_k = e(\vec{k})$ приводит к следующим значениям отношений: $W_{k_0}/W_{k_2} = -1,00$ и $W_{k_0}^0/W_{k_2} = 202$. Таким образом, при малых энергиях возбуждения $e(\vec{k}) \sim \Delta_k$ влиянием нелинейной части оператора Гамильтона в режиме НСП пренебречь нельзя, но с ростом энергии возбуждения $|e(\vec{k})| \gg \Delta_k$ его роль уменьшается за пределами сферы Ферми.

Квазичастицы в режиме НСП являются сложными возбуждениями, которые одновременно обладают свойствами и электрона, и дырки, плавно переходящими от одного к другому при изменении энергии возбуждения $e(\vec{k})$. Заряд ячейки с импульсом $\hbar \vec{k}$ пропорционален величине

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 = e(k) / \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2}.$$

Число заполнения дырочноподобной частицы пропорционально вероятности того, что ячейка с квазиимпульсом \vec{k} свободна в основном состоянии, т. е.

$$f_p = v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - e(k) / \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} \right]. \quad (235)$$

Число заполнения электроподобной частицы также пропорционально тому, что ячейка с квазиимпульсом \vec{k} заполнена электроном

$$f_n = u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + e(k) / \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} \right]. \quad (236)$$

Из выражений (235) и (236) нетрудно видеть, что в режиме НСП значения функций u_k ; $v_k \approx 1$; 0 вполне достижимы, поскольку $|\varepsilon_{\vec{k}}| \gg \Delta_k$.

Зависимость величины энергетической щели (231) от температуры в первом приближении при НСП можно аппроксимировать выражением типа [38]

$$\Delta(T)_{LSC} = \Delta(0) \sqrt{1 - T/T_c},$$

из которого следует, что при температуре, равной критическому значению ($T = T_c$), энергетическая щель равна нулю, а энергетический спектр квазичастиц аналогичен спектру нормального металла.

4.3. Режим слабой инверсии ферми-системы. При исследовании методами вторичного квантования явления низкотемпературной сверхпроводимости величины безразмерных функций u_k и v_k находились из условия равенства нулю недиагональной части оператора Гамильтона. Рассмотрим режим ферми-системы, когда диагональная часть гамильтониана содержит смешанные состояния старых ферми-операторов и поэтому их исключение возможно при условии

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = 0.$$

Это условие эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} e(\vec{k})(u_k^2 - v_k^2) + 2u_k v_k \Delta_k = 0, \\ u_k^2 + v_k^2 = 1, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} \right], \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} \right]. \quad (237)$$

Энергетическая щель здесь определена так же, как и при НСП. Подставляя в выражение (227) значение (237), находим

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} v_{kk'} |e(k')| / \sqrt{e^2(k') + \Delta_k^2}. \quad (238)$$

Отметим, что поскольку $|e(k)| > 0$, то энергетическая щель всегда больше нуля.

Подставляя полученные решения в выражение энергии для основного состояния ферми-системы (222), находим

$$W_0 = \sum_k W_{k0} = \sum_k \left[e(k) - \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} + \frac{e(k) \Delta_k}{2\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} \right]. \quad (239)$$

Появление второго отрицательного члена в (239) будет объяснено ниже. Энергия основного состояния больше нуля при $e(k) > \Delta_k$. (т. е. рассматриваемое состояние при слабой инверсии является вынужденным), поскольку здесь энергия Ферми намного превышает величину энергетической щели ($|\varepsilon_f| \gg \Delta_k$).

Недиагональный член оператора Гамильтона в режиме слабой инверсии находим подстановкой решения (237) в (224)

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \sum_k \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k0} - 1), \quad (240)$$

откуда следует, что

$$W_{k1} = \sqrt{e^2(k) + \Delta_k^2} = \sqrt{(\varepsilon_k - \varepsilon_f)^2 + \Delta_k^2}.$$

Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ здесь соответствуют два типа смешанных элементарных возбуждений, характеризуемых собственными функциями новых операторов чисел заполнения

$$\begin{cases} \hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ |n_{k0} n_{k1}\rangle = \sqrt{(1-n_{k0})(1-n_{k1})} |(1+n_{k0})(1+n_{k1})\rangle, \\ \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k0} |n_{k0} n_{k1}\rangle = -\sqrt{n_{k0} n_{k1}} |(1-n_{k0})(1-n_{k1})\rangle. \end{cases} \quad (241)$$

Нелинейный член оператора Гамильтона в режиме слабой инверсии находим подстановкой решения (237) в (225)

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \sum_k \frac{\Delta_k e(k)}{2\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0} + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k1})^2.$$

Энергетическая функция этого оператора имеет вид

$$W_{k2} = \frac{\Delta_k e(k)}{2\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(k)}} = \frac{\Delta_k (\varepsilon_k - \varepsilon_f)}{2\sqrt{\Delta_k^2 + (\varepsilon_k - \varepsilon_f)^2}}.$$

Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ соответствует сложное многочастичное возбуждение, характеризуемое собственными функциями новых операторов чисел заполнения

$$(\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0} + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k1})^2 |n_{k0} n_{k1}\rangle = (n_{k0} + n_{k1})^2 |n_{k0} n_{k1}\rangle. \quad (242)$$

Изменение многочастичного спектра, т. е. разность $e(k) - W_{k1}$ (или $e(k) - W_{k2}$), определяется величиной энергетической щели

Δ_k , которая является корнем уравнения (238). Уравнение (238) имеет тривиальное решение $\Delta_k = 0$ или $e(\bar{k}) = 0$, при этом безразмерные функции (237) принимают значения $U_k = V_k = 1/\sqrt{2}$. Чтобы определить физический смысл полученных решений, рассмотрим канонические преобразования, обратные (219). Подставляя в (234) значения $U_k = V_k = 1/\sqrt{2}$, находим выражения для новых ферми-операторов в виде

$$\hat{A}_{k_0} = (\hat{\alpha}_k - \hat{\alpha}_{-k}^+) / \sqrt{2}; \quad \hat{A}_{k_1} = (\hat{\alpha}_{-k} + \hat{\alpha}_k^+) / \sqrt{2}.$$

Тогда смешанные произведения новых ферми-операторов можно представить в форме

$$\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1}^+ = \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_{-k}^+ + \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k^+ - \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_{-k}^+ - \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_k^+),$$

$$\hat{A}_{k_1} \hat{A}_{k_0} = \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{-k} \hat{\alpha}_k - \hat{\alpha}_{-k} \hat{\alpha}_{-k}^+ + \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k - \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_{-k}^+),$$

а их сумма

$$(\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1}^+ + \hat{A}_{k_1} \hat{A}_{k_0}) = \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_{-k} - 1 \quad (243)$$

будет вполне чистым одночастичным состоянием в представлении чисел заполнения старых операторов, если единицу из правой части (243) перенести в левую. Данное обстоятельство объясняет появление в операторной части недиагонального оператора (240), а также появление отрицательного слагаемого $-\sqrt{e^2(\bar{k}) + \Delta_k^2}$ в выражении (239) для энергии основного состояния.

Нетрудно заметить, что чистые одночастичные состояния новых ферми-операторов

$$(\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1}) = \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_k^+ + \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_{-k}$$

являются смешанными для старых ферми-операторов.

Вклад каждого из состояний в режиме слабой инверсии можно определить нахождением отношения энергетических функций:

$$W_{k_0}/W_{k_2} = 1 + 2 \left[\sqrt{1 + e^2(\bar{k})/\Delta_k^2} - e(\bar{k})/\Delta_k - \Delta_k/e(\bar{k}) \right],$$

$$W_{k_1}/W_{k_2} = 2 \left[e(\bar{k})/\Delta_k + \Delta_k/e(\bar{k}) \right].$$

При $e(\bar{k}) = +\Delta_k$ $W_{k_0}/W_{k_2} = -0,172$ и $W_{k_1}/W_{k_2} = 4$. Грубая оценка для $E_f = 10\Delta_k \approx e(\bar{k})$ приводит к значениям отношений $W_{k_0}/W_{k_2} = 0,8$ и $W_{k_1}/W_{k_2} = 20,2$.

Квазичастицы в режиме со слабой инверсией являются сложными возбуждениями, которые обладают одновременно свойствами и электрона, и дырки. Если двигаться по кривой спектра, то переход от электроподобного состояния к дырочноподобному происходит непрерывно [38] внутри длины когерентности. В общем случае заряд ячейки с импульсом $\hbar\bar{k}$ пропорционален величине

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 = -\Delta_k / \sqrt{\Delta_k^2 + e^2(\bar{k})}.$$

Число заполнения дырочноподобной частицы пропорционально вероятности того, что ячейка с квазиимпульсом \bar{k} свободна в основном состоянии, т. е. величине

$$f_p = v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(\bar{k})}} \right]. \quad (244)$$

Число заполнения дырочноподобного состояния пропорционально тому, что ячейка с квазиимпульсом \bar{k} заполнена электроном

$$f_n = u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\Delta_k}{\sqrt{\Delta_k^2 + e^2(\bar{k})}} \right]. \quad (245)$$

Из выражений (244) и (245) следует, что в режиме со слабой инверсией значения $u_k, v_k = 1; 0$ недостижимы и здесь нет чистых квантовых состояний с зарядом $q_k = \pm 1$.

Используя представление квазиимпульса \bar{k} через характерную длину l

$$k = \pi/l,$$

замечаем, что при $k=0$ последняя равна бесконечности ($l \rightarrow \infty$). Поскольку при слабой инверсии энергия квазичастиц равна величине энергетической щели (т. е. $e(\bar{k}) = \pm \Delta_k$), то

$$k = k_f \pm k_\Delta,$$

где

$$k_\Delta = \sqrt{k_f^2 - 2m\Delta_k/\hbar^2}$$

– максимальное разностное значение квазиимпульса в пределах энергетической щели. Таким образом, максимальные геометрические размеры сложного состояния составляют

$$l_m^* = \frac{\pi}{k_f - k_\Delta} = \frac{\pi}{k_f [1 - \sqrt{1 - 2m\Delta_k/k_f^2 \hbar^2}]}.$$

Последовательно соединенная цепочка рассматриваемых смешанных состояний вдоль линии электрического тока напоминает индуцированную сверхрешетку, период которой жестко связан с величиной энергетической щели, которая, в свою очередь, может регулироваться внешним возмущением.

Состояние слабой инверсии является дополнительным по отношению к НСП. Поскольку кинетическая энергия электроноподобных частиц здесь мала и последние находятся ниже уровня (нижнего) энергетической щели, дырочноподобные частицы находятся выше верхнего уровня энергетической щели. Зависимость величины последней от температуры при слабой инверсии может быть аппроксимирована выражением типа

$$\Delta_k(T, f\beta_{03})_{WT} = \Delta_k(2T_c, f\beta_{03}) \sqrt{T/T_c - 1},$$

где $f\beta_{03}$ – возмущающая сила, благодаря воздействию которой образуется режим слабой инверсии (например, на поверхности полупроводника при эффекте поля). Подчеркнем, что положительные значения энергетической щели принадлежат электроноподобным состояниям, находящимся выше верхнего уровня энергетической щели, а отрицательные значения энергетической щели – электроноподобным состояниям, находящимся ниже нижнего уровня энергетической щели (отсчет энергии здесь производится от уровня Ферми, поэтому и получаются „отрицательные“ значения для энергий).

Из сказанного следует, что режим слабой инверсии ферми-системы может существовать только при наличии внешнего возмущения (например, электрического поля в эффекте поля), благодаря которому при температурах выше критической может существовать кооперативное состояние смешанного типа с многочастичным взаимодействием.

4. 4. Режим сильной инверсии ферми-системы. При нахождении выражения (224) для \mathcal{H}_1 в общем разделе микроскопического подхода использовалась стандартная математическая операция переиндексации ($k \leftrightarrow k'$), приводящая к соотношению

$$\begin{aligned} & (u_k^2 u_k v_k - v_k^2 u_k v_{k'}) \hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \\ & + (u_k^2 u_k v_{k'} - v_k^2 u_k v_k) \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k0}^+ = \\ & = (u_k^2 - v_k^2) u_k v_{k'} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k0}^+). \end{aligned}$$

Формально, с точки зрения математики, операцию переиндексации можно провести иначе. Например, так:

$$u_k^2 u_k v_k - v_k^2 u_k v_{k'} = u_k^2 u_k v_{k'} - v_k^2 u_k v_k.$$

Последнее соотношение выполняется при

$$u_k v_k = u_k v_{k'}. \quad (246)$$

Учет соотношения (246) позволяет записать диагональный член оператора Гамильтона ферми-системы в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0^0 = \sum_k \{ & e(\vec{k}) (u_k^2 - v_k^2) + \frac{2}{V} \sum_{k'} v_{kk'} u_k^2 v_{k'}^2 \} \times \\ & \times (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0}^+ + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k1}^+). \end{aligned}$$

Условие равенства нулю диагональной части гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0^0 = 0$ эквивалентно решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} u_k^2 - v_k^2 = 2\Delta_k / e(\vec{k}), \\ u_k^2 + v_k^2 = 1, \end{cases} \quad (247)$$

где

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} v_{kk'} u_{k'}^2 v_{k'}^2 \quad (248)$$

– энергетическая щель в режиме сильной инверсии. Получим решение системы уравнений (247)

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2\Delta_k}{e(\vec{k})} \right]; \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2\Delta_k}{e(\vec{k})} \right]. \quad (249)$$

Подставляя значения безразмерных функций (249) в выражение (248), находим уравнение, определяющее энергетическую щель в режиме сильной инверсии

$$\Delta_k = \frac{1}{4V} \sum_{k'} v_{kk'} \left(1 - \frac{4\Delta_k^2}{e^2(\vec{k})} \right). \quad (250)$$

Имеем две области значений энергетической щели

$$\begin{cases} \Delta_k > 0 & \text{при } |e(\vec{k})| > 2|\Delta_k|, \\ \Delta_k < 0 & \text{при } |e(\vec{k})| < 2|\Delta_k|. \end{cases} \quad (251)$$

$$\quad (252)$$

Подставляя полученное решение (249) в выражение для энергии основного состояния ферми-системы (222), находим

$$W_0 = \sum_k W_{k0} = \sum_k [e(\vec{k}) + \Delta_k].$$

Энергия основного состояния больше нуля при $e(\vec{k}) \geq -\Delta_k$, и поэтому рассматриваемый режим сильной инверсии также является вынужденным. Здесь энергия Ферми является величиной одного порядка с величиной энергетической щели $|\Delta_k| \leq |\varepsilon_F|$.

Недиагональный член оператора Гамильтона в режиме сильной инверсии имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \sum_k \frac{e^2(\vec{k})}{\sqrt{e^2(\vec{k}) - 4\Delta_k^2}} (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k0}),$$

откуда энергетическая функция этого оператора

$$W_{k1} = e^2(\vec{k}) / \sqrt{e^2(\vec{k}) - 4\Delta_k^2}.$$

Отметим, что в области значений (251) функция W_{k1} является вещественной, а в области значений (252) – комплексной. Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar\vec{k} = \hbar(\vec{k}_\Sigma + \vec{k}_\Delta)$ соответствуют два типа смешанных состояний, характеризующиеся собственными функциями новых операторов чисел заполнения (см. выражение (241).

Нелинейный член оператора Гамильтона в режиме сильной инверсии находится подстановкой решения (249) в (225)

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \sum_k \Delta_k (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k0} + \hat{A}_{k1}^+ \hat{A}_{k1})^2. \quad (253)$$

Отсюда следует, что его энергетическая функция постоянна и равна величине энергетической щели $W_{k2} = \Delta_k$. Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ в этом случае соответствует сложное многочастичное возбуждение, характеризуемое собственными функциями новых операторов чисел заполнения (см. выражение (242)).

Изменение многочастичных спектров, т. е. разность $e(\vec{k}) - W_{k1}$ (или $e(\vec{k}) - W_{k1}$), определяется величиной энергетической щели Δ_k , которая определяется уравнением (250). Следовательно, последнее уравнение имеет тривиальное решение $\Delta_k = 0$ при $e(\vec{k}) = 4\Delta_k^2$. Тогда при $e(\vec{k}) = -2\Delta_k$ безразмерные функции принимают значения

$$U_k = 1 \text{ и } V_k = 0.$$

Подставляя их в выражения для обратных канонических преобразований (234), находим значения новых ферми-операторов: $\hat{A}_{k0}(U_k) = \hat{\alpha}_k$ и $\hat{A}_{k1}(U_k) = \hat{\alpha}_{-k}$. Сумма „смешанных“ произведений новых ферми-операторов в этой области

$$\hat{A}_{k0}^+(U_k) \hat{A}_{k1}^+(U_k) + \hat{A}_{k1}(U_k) \hat{A}_{k0}(U_k) = \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_{-k}^+ + \hat{\alpha}_{-k} \hat{\alpha}_k$$

совпадает с суммой „смешанных“ произведений старых операторов. Сумма „чистых“ произведений новых ферми-операторов, приводящих к одночастичным состояниям, равна

$$\hat{A}_{k0}^+(U_k) \hat{A}_{k0}(U_k) + \hat{A}_{k1}^+(U_k) \hat{A}_{k1}(U_k) = \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_{-k}.$$

т. е. совпадает со значением суммы чистых одночастичных состояний старых ферми-операторов.

При $e(\vec{k}) = +2\Delta_k$ безразмерные функции (249) принимают значения

$$U_k = 0 \text{ и } V_k = 1,$$

подставляя которые в выражения для обратных канонических преобразований (234), находим значения новых ферми-операторов: $\hat{A}_{k0}(V_k) = -\hat{\alpha}_{-k}^+$ и $\hat{A}_{k1}(V_k) = \hat{\alpha}_k^+$. Сумма „смешанных“ произведений имеет вид

$$\hat{A}_{k0}^+(V_k) \hat{A}_{k1}^+(V_k) + \hat{A}_{k1}(V_k) \hat{A}_{k0}(V_k) = -(\hat{\alpha}_{-k} \hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_{-k}^+),$$

т. е. она не совпадает с суммой произведений старых операторов, а сумма произведений „чистых“ состояний новых ферми-операторов

$$\hat{A}_{k0}^+(V_k) \hat{A}_{k0}(V_k) + \hat{A}_{k1}^+(V_k) \hat{A}_{k1}(V_k) = 2 - (\hat{\alpha}_{-k}^+ \hat{\alpha}_{-k} + \hat{\alpha}_k^+ \hat{\alpha}_k)$$

совпадает с точностью до знака со значениями суммы произведений старых ферми-операторов. Таким образом, с точки зрения физического смысла представляется предпочтительной область $e(\vec{k}) = -2|\Delta_k|$, где в наибольшей мере имеется эквивалентность между старыми и новыми ферми-операторами.

Вклад каждого из состояний в режиме сильной инверсии можно определить, вычислив отношения энергетических функций

$$W_{k_0}/W_{k_2} = 1 + e(\vec{k})/\Delta_k |e(\vec{k})| = 2\Delta_k = 3,$$

$$W_{k_1}/W_{k_2} = e^2(\vec{k})/\Delta_k \sqrt{e^2(\vec{k}) - 4\Delta_k^2} |e(\vec{k})| + 2\Delta_k \dots$$

Таким образом, влиянием нелинейной части (253) оператора гамильтона в режиме сильной инверсии можно пренебречь. Доминирующим здесь будет смешанное состояние новых ферми-операторов (недиагональный член гамильтониана), которое в представлении старых операторов является чистым одночастичным состоянием.

Квазичастицы в режиме сильной инверсии – сложные возбуждения, которые обладают свойствами и ии электрона, или дырки. Электрический заряд ячейки с импульсом $\hbar\vec{k}$ пропорционален величине

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 = -2\Delta_k/e(\vec{k}).$$

Число заполнения дырочноподобного состояния пропорционально

$$f_p = v_k^2 = \frac{1}{2}(1 + 2\Delta_k/e(\vec{k})), \quad (254)$$

а число заполнения электроподобного состояния пропорционально

$$f_n = u_k^2 = \frac{1}{2}(1 - 2\Delta_k/e(\vec{k})). \quad (255)$$

Из выражений (254) и (255) следует, что область значений $c|f_p|, |f_n| > 1$ исключается из рассмотрения, поскольку в ней функция W_{k_1} принимает комплексное значение.

Отметим, что проблемы конечной длины когерентности здесь не возникает, поскольку при $|\Delta_k| \sim |\epsilon_f|$ значение $k = 0$ находится в комплексной области значений функции W_{k_1} , которая исключается из рассмотрения. Зависимость величины энергетической щели от температуры в режиме сильной инверсии описывается выражением, аналогичным для режима слабой инверсии.

Из сказанного следует, что режим сильной инверсии ферми-системы может существовать только при наличии достаточно сильного внешнего возмущения (например, сильного поперечного электрического поля в эффекте поля), благодаря которому при температуре выше критической может существовать кооперативное смешанное одночастичное состояние. В координатном про-

странстве рассмотренные элементарные возбуждения представляют непрерывную цепь вдоль линии электрического тока, имеющую свойства индуцированной сверхрешетки.

4. 5. Режим сверхсильной инверсии ферми-системы. В режиме сверхсильной инверсии, как и в режиме сильной инверсии, используем условие (246) для взаимосвязи между штрихованными и нештрихованными произведениями безразмерных функций U_k и V_k . Определяя ширину энергетической щели в виде

$$\Delta_k = \frac{1}{V} \sum_{k'} \nu_{kk'},$$

находим аналитическое выражение для недиагональной части оператора Гамильтона

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \sum_k \{ 2e(\vec{k}) - (u_k^2 - v_k^2) \Delta_k \} u_k v_k (\hat{A}_{k0}^+ \hat{A}_{k1}^+ + \hat{A}_{k1} \hat{A}_{k0}).$$

Условие равенства нулю оператора $\hat{\mathcal{H}}_1 = 0$ эквивалентно решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2e(\vec{k}) - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) = 0, \\ u_k^2 + v_k^2 = 1, \end{cases}$$

которое имеет вид

$$u_k^2 = \frac{1}{2} [1 + 2e(\vec{k})/\Delta_k]; \quad v_k^2 = \frac{1}{2} [1 - 2e(\vec{k})/\Delta_k]. \quad (256)$$

Подставляя полученное решение в выражение для энергии основного состояния ферми-системы (222), находим

$$W_0 = \sum_k [e(\vec{k}) + \Delta_k/4 - e^2(\vec{k})/\Delta_k]. \quad (257)$$

Имеем две области значений энергии $e(\vec{k})$

$$\begin{cases} |e(\vec{k})| < 0,5 \Delta_k, \\ |e(\vec{k})| > 0,5 \Delta_k, \end{cases} \quad (258)$$

причем в первой области безразмерные функции U_k и V_k принимают вещественные значения, а во второй — комплексные. Поскольку энергия основного состояния (257) меньше нуля в диапазоне $e(\vec{k}) \in [-\Delta_k/2, \Delta_k(1-\sqrt{2})/2]$ и больше нуля в диапазоне энергий $e(\vec{k}) \in [\Delta_k(1-\sqrt{2})/2, \Delta_k/2]$, то данное вынужденное состояние ферми-системы является в основном энергетически не выгодным и должно поддерживаться с помощью внешней силы. Энергия Ферми также превышает значение энергетической щели.

Диагональный член оператора Гамильтона имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_0^o = \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}}/2) (\hat{A}_{\mathbf{k}0}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}0} + \hat{A}_{\mathbf{k}1}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}1}),$$

откуда следует, что энергетическая функция этого оператора не зависит от энергии возбуждения $e(\vec{k})$

$$W_{\mathbf{k}0}^o = \Delta_{\mathbf{k}}/2.$$

Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ соответствуют два типа чистых элементарных возбуждений

$$(\hat{A}_{\mathbf{k}0}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}0} + \hat{A}_{\mathbf{k}1}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}1}) |n_{\mathbf{k}0} n_{\mathbf{k}1}\rangle = (n_{\mathbf{k}0} + n_{\mathbf{k}1}) |n_{\mathbf{k}0} n_{\mathbf{k}1}\rangle.$$

Нелинейный член оператора Гамильтона в режиме сверхсильной инверсии находим, подставляя решения (256) в (225),

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(1 - \frac{4e^2(\vec{k})}{\Delta_{\mathbf{k}}^2} \right) \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{4} \right] (\hat{A}_{\mathbf{k}0}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}0} + \hat{A}_{\mathbf{k}1}^+ \hat{A}_{\mathbf{k}1})^2.$$

Энергетическая функция равна

$$W_{\mathbf{k}2} = \left[1 - \frac{4e^2(\vec{k})}{\Delta_{\mathbf{k}}^2} \right] \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{4}.$$

Каждому значению импульса $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ в этом случае соответствует, как и ранее, многочастичное возбуждение, характеризуемое собственными функциями новых операторов чисел заполнения (см. выражение (230)).

Для выяснения физического смысла новых ферми-операторов воспользуемся критерием вещественности (258) для энергии основного состояния (257). Тогда при $e(\vec{k}) = \Delta_{\mathbf{k}}/2$ безразмерные функции (256) принимают вид

$$u_{\mathbf{k}} = 1 \text{ и } v_{\mathbf{k}} = 0.$$

Подставив их в выражение для обратных канонических преобразований (234), находим значения новых ферми-операторов: $\hat{A}_{\mathbf{k}0}(u_{\mathbf{k}}) = \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}1}(u_{\mathbf{k}}) = \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}$ (т. е. они совпадают с таковыми для режима сильной инверсии при $e(\vec{k}) = -2\Delta_{\mathbf{k}}$).

Для случая $e(\vec{k}) = -\Delta_{\mathbf{k}}/2$ безразмерные функции (256) принимают значения

$$u_{\mathbf{k}} = 0 \text{ и } v_{\mathbf{k}} = 1.$$

Подставляя их в (234), находим операторы $\hat{A}_{\mathbf{k}0}(v_{\mathbf{k}}) = -\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^*$ и $\hat{A}_{\mathbf{k}1}(v_{\mathbf{k}}) = \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^*$ (т. е. они совпадают с таковыми для режима сильной инверсии при $e(\vec{k}) = 2\Delta_{\mathbf{k}}$).

Таким образом, с точки зрения физического смысла здесь представляется предпочтительной область $e(\vec{k}) \leq \Delta_{\mathbf{k}}/2$, где в наибольшей мере имеется эквивалентность между новыми и старыми ферми-операторами, а безразмерные функции (256) принимают вещественные значения.

Вклад каждого из состояний в режиме сверхсильной инверсии можно определить с помощью отношения энергетических функций

$$W_{k_0}/W_{k_2} = \frac{\Delta_k^2 + 4\Delta_k e(\vec{k}) - 4e^2(\vec{k})}{\Delta_k^2 - 4e^2(\vec{k})},$$

$$W_{k_0}^0/W_{k_2} = 2\Delta_k^2 / [\Delta_k^2 - 4e^2(\vec{k})].$$

Поскольку отношения $W_{k_0}/W_{k_2} = \pm\infty$ и $W_{k_0}^0/W_{k_2} = +\infty$ при $e(\vec{k}) = \pm\Delta_k/2$, а также $W_{k_0}/W_{k_2} = 1$ и $W_{k_0}^0/W_{k_2} = 2$ при $e(\vec{k}) = 0$, то влияние нелинейной части значительно меньше влияния диагональной части гамильтониана системы (т. е. чистые одночастичные состояния двух сортов являются предпочтительными).

Квазичастицы в режиме сверхсильной инверсии также являются сложными возбуждениями, которые обладают одновременно свойствами и электрона, и дырки, плавно переходящими от одного к другому при изменении энергии $e(\vec{k})$. Заряд ячейки с импульсом $\hbar\vec{k}$ пропорционален

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 = 2e(\vec{k})/\Delta_k.$$

Образование дырочноподобной частицы пропорционально

$$f_p = v_k^2 = \frac{1}{2} [1 - 2e(\vec{k})/\Delta_k], \quad (259)$$

а образование электроноподобной частицы пропорционально

$$f_n = u_k^2 = \frac{1}{2} [1 + 2e(\vec{k})/\Delta_k]. \quad (260)$$

Из выражений (259), (260) нетрудно заметить, что область значений с $|f_p|, |f_n| > 1$ и $|f_p|, |f_n| < 0$ исключается из рассмотрения, поскольку в ней безразмерные функции принимают комплексные значения.

4.6. Четырехчастичные взаимодействия в полупроводниках. В п. 4.3 – 4.5. были рассмотрены двухчастичные взаимодействия, приводящие к четырехквазичастичным состояниям (дебройлевским пузырям) в описании новыми ферми-операторами. Подобные состояния возникали в результате воздействия внешнего возмущения. Ниже будет рассмотрен частный случай четырехчастичного взаимодействия при отсутствии внешнего возмущения, приводящий в конечном счете к четырехквазичастичным состояниям, несколько напоминающим предыдущие случаи, но, в отличие от последних, представляющих собой бозе-конденсацию.

Рассмотрим частный случай, когда взаимодействие между двумя частицами i и j описывается комплексными гамильтонианами

$$\begin{cases} 2\hat{h}(\xi_i, \xi_j) = \hat{h}(\xi_i) + \hat{h}(\xi_j) + \hat{i} \hat{W}(\xi_i, \xi_j), \\ 2\hat{h}^*(\xi_i, \xi_j) = \hat{h}(\xi_i) + \hat{h}(\xi_j) - \hat{i} \hat{W}(\xi_i, \xi_j). \end{cases} \quad (261)$$

Это означает, что спаренные состояния, описываемые гамильтонианами (261), сами по себе физического смысла не имеют, тогда как их произведение

$${}^4\hat{h}^2 = {}^2\hat{h}^2\hat{h}^{\circ} = [{}^1\hat{h}(\xi_l) + {}^1\hat{h}(\xi_j)]^2 + \hat{W}^2(\xi_i, \xi_j) \quad (262)$$

вполне может иметь физический смысл квадрата энергии четырехчастичного состояния (в общем случае $i, j \neq l', j'$).

Введем операторы поля

$$\hat{\psi}_s(\xi) = \hat{\alpha}_s \varphi_s(\xi), \quad (263)$$

где $\varphi_s(\xi)$ — собственные функции одночастичных операторов ${}^1\hat{h}(\xi)$ стационарных уравнений Шредингера,

$${}^1\hat{h}(\xi) \varphi_s(\xi) = \varepsilon_s \varphi_s(\xi). \quad (264)$$

Операторы (261) можно представить и в таком виде

$${}^2\hat{h} = \int \hat{\psi}^+(\xi) {}^1\hat{h}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi + \\ + \frac{i}{2} \int \hat{\psi}^+(\xi) \hat{\psi}^+(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \hat{\psi}(\xi') \hat{\psi}(\xi) d\xi d\xi', \quad (265)$$

$${}^2\hat{h}^{\circ} = \int \hat{\psi}^+(\xi) {}^1\hat{h}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi - \\ - \frac{i}{2} \int \hat{\psi}^+(\xi) \hat{\psi}^+(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \hat{\psi}(\xi') \hat{\psi}(\xi) d\xi d\xi'. \quad (266)$$

Подставляя (263) и (264) в (265), (266), находим

$${}^2\hat{h}_{k_1} = \varepsilon_{k_1} \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \varepsilon_{-k_1} \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1} + \\ + \frac{i}{2} \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{k_1} \langle k_1'(-k_1') | \hat{W} | (-k_1)k_1 \rangle, \quad (267)$$

$${}^2\hat{h}_{k_2}^{\circ} = \varepsilon_{k_2} \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \varepsilon_{-k_2} \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2} - \\ - \frac{i}{2} \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{k_2} \langle k_2'(-k_2') | \hat{W} | (-k_2)k_2 \rangle. \quad (268)$$

Формально импульсы $\pm \hat{k}_1$ и $\pm \hat{k}_2$ описывают соответственно первую и вторую пары частиц до четырехчастичного взаимодействия, а импульсы $\pm \hat{k}_1'$ и $\pm \hat{k}_2'$ — после взаимодействия.

Поскольку произведения операторов

$$\alpha_s^+ \alpha_s = \int \hat{\psi}_s^+(\xi) \hat{\psi}_s(\xi) d\xi$$

описывают наличие s -й частицы, то для исключения использования закона сохранения числа взаимодействующих частиц в выражениях (267), (268) члены $\mu_k \hat{\alpha}_{\pm k}^+ \hat{\alpha}_{\pm k}$ ($\mu_k = \mu_{+k} = \mu_{-k}$ — химический потенциал двухчастичной ферми-системы)

$${}^2\hat{h}_{k_1} = (\varepsilon_{k_1} - \mu_{k_1}) (\hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{-k_1}) + \\ + \frac{\hat{i}}{2} \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{k_1} < k_1' (-k_1') | \hat{W} | (-k_1) k_1 \rangle,$$

$${}^2\hat{h}_{k_2} = (\varepsilon_{k_2} - \mu_{k_2}) (\hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{-k_2}) - \\ - \frac{\hat{i}}{2} \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{-k_1} < k_2' (-k_2') | \hat{W} | (-k_2) k_2 \rangle.$$

Если ферми-система состоит из частиц со спином 1/2, а операторы ${}^1\hat{h}(\xi)$ имеют собственные значения $\hbar^2 k^2/2m$, то одночастичные состояния определяются волновыми функциями типа (213). Если взаимодействие между двумя ферми-частицами зависит только от расстояния между ними, как представлено в (214), то матричные элементы запишем в виде

$$\langle k_1' (-k_1') | \hat{W} | (-k_1) k_1 \rangle = \int \varphi_{k_1}^*(\xi) \varphi_{-k_1}^*(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \varphi_{k_1}(\xi) \times \\ \times \varphi_{-k_1}(\xi') d\xi d\xi' = -\delta_{\alpha_1' \alpha_1} \nu(|\vec{k}_1' - \vec{k}_1|) / V, \quad (269)$$

$$\langle k_2' (-k_2') | \hat{W} | (-k_2) k_2 \rangle = \int \varphi_{k_2}^*(\xi) \varphi_{-k_2}^*(\xi') \hat{W}(\xi, \xi') \varphi_{-k_2}(\xi) \times \\ \times \varphi_{k_2}(\xi') d\xi d\xi' = -\delta_{\alpha_2' \alpha_2} \nu(|\vec{k}_2' - \vec{k}_2|) / V, \quad (270)$$

где $\nu_{kk'} = \nu(|\vec{k}' - \vec{k}|)$ — действительная функция, зависящая от абсолютной величины вектора $(\vec{k}' - \vec{k})$

$$\nu_{kk'} = -\frac{4\pi}{|\vec{k}' - \vec{k}|} \int_0^\infty w(\rho) \rho \sin\{|\vec{k}' - \vec{k}| \rho\} d\rho.$$

Учитывая (269), (270), перепишем в явном виде операторы Гамильтона для двухчастичных взаимодействий

$${}^2\hat{h}_1 = \left(\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} - \mu_{k_1} \right) (\hat{\alpha}_{k_1 \alpha_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1 \alpha_1} + \hat{\alpha}_{-k_1, -\alpha_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1, -\alpha_1}) - \\ - \frac{\hat{i}}{2V} \nu_{k_1 k_1'} \hat{\alpha}_{k_1 \alpha_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1', -\alpha_1'}^+ \hat{\alpha}_{-k_1, -\alpha_1} \hat{\alpha}_{k_1 \alpha_1}, \quad (271)$$

$${}^2\hat{h}_2 = \left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} - \mu_{k_2} \right) (\hat{\alpha}_{k_2 \alpha_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2 \alpha_2} + \hat{\alpha}_{-k_2, -\alpha_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2, -\alpha_2}) + \\ + \frac{\hat{i}}{2V} \nu_{k_2 k_2'} \hat{\alpha}_{k_2 \alpha_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2' \alpha_2'}^+ \hat{\alpha}_{-k_2, -\alpha_2} \hat{\alpha}_{k_2 \alpha_2}. \quad (272)$$

В дальнейшем воспользуемся таким обозначением для энергии:

$$e(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_k. \quad (273)$$

Поскольку для ферми-частиц $\sigma \rightarrow \pm 1/2$, то (271), (272) с учетом (273) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\hat{h}_1 &= e(\vec{k}_1) (\hat{\alpha}_{k_1, 1/2}^+ \hat{\alpha}_{k_1, 1/2} + \hat{\alpha}_{-k_1, -1/2}^* \hat{\alpha}_{-k_1, -1/2}) - \\ &- \frac{\hat{1}}{2V} \nu_{k_1, k_1'} \hat{\alpha}_{k_1', 1/2}^+ \hat{\alpha}_{-k_1', -1/2}^* \hat{\alpha}_{-k_1, -1/2} \hat{\alpha}_{k_1, 1/2}, \\ 2\hat{h}_2^* &= e(\vec{k}_2) (\hat{\alpha}_{k_2, 1/2}^+ \hat{\alpha}_{k_2, 1/2} + \hat{\alpha}_{-k_2, -1/2}^* \hat{\alpha}_{-k_2, -1/2}) + \\ &+ \frac{\hat{1}}{2V} \nu_{k_2, k_2'} \hat{\alpha}_{k_2', 1/2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2', -1/2}^* \hat{\alpha}_{-k_2, -1/2} \hat{\alpha}_{k_2, 1/2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем спиновые индексы $\pm 1/2$ опустим, но это не означает, что влиянием спина будем пренебрегать. Как упоминалось выше (см. (262)), выход в вещественную область обеспечивает учет четырехчастичного взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} 4\hat{h}^2 &= 2\hat{h}_1 2\hat{h}_2^* = e(\vec{k}_1) e(\vec{k}_2) (\hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\alpha}_{-k_1}^* \hat{\alpha}_{-k_1}) (\hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\alpha}_{-k_2}^* \hat{\alpha}_{-k_2}) + \\ &+ \frac{\nu_{k_1 k_1'} \nu_{k_2 k_2'}}{4V^2} \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1'}^* \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2'}^* \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{k_2} \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{k_1}. \end{aligned} \quad (274)$$

Это выражение описывает квадрат энергии четырехчастичного взаимодействия (т. е., по существу, только один пузырь де Бройля). Если таких пузырей много в ферми-системе, то бозе-конденсацию опишет следующее математическое выражение для суммарного квадрата гамильтонианов:

$$\begin{aligned} \hat{y} \hat{\ell}^2 &= \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} 2\hat{h}_{k_1} 2\hat{h}_{k_2}^* = \\ &= \sum_{k_1 k_2} e(\vec{k}_2) (\hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\alpha}_{-k_1}^* \hat{\alpha}_{-k_1}) (\hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\alpha}_{-k_2}^* \hat{\alpha}_{-k_2}) \times e(\vec{k}_1) + \\ &+ \frac{1}{4V^2} \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} \nu_{k_1 k_1'} \nu_{k_2 k_2'} \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1'}^* \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2'}^* \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{k_2} \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{k_1}. \end{aligned} \quad (275)$$

Для исследования спектра собственных значений оператора (275) проведем каноническое преобразование ферми-операторов Боголюбова

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{k_1, 1/2} = U_k \hat{A}_{k_0} + V_k \hat{A}_{k_1}^*, \\ \hat{\alpha}_{-k_1, -1/2} = U_k \hat{A}_{k_1} - V_k \hat{A}_{k_0}^*, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\alpha}_{k_2, 1/2} = U_k \hat{A}_{k_2} + V_k \hat{A}_{k_3}^*, \\ \hat{\alpha}_{-k_2, -1/2} = U_k \hat{A}_{k_3} - V_k \hat{A}_{k_2}^*, \end{cases} \quad (276)$$

где U_k и V_k — вещественные функции, симметричные относительно преобразования $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ и удовлетворяющие условию

$$U_k^2 + V_k^2 = 1, \quad (277)$$

причем здесь использованы предположения $U_{k_1} = U_{k_2}$ и $V_{k_1} = V_{k_2}$ (т. е. не различаются частицы из разных пар). Двухчастичные операторы из первой суммы (275) можно представить через новые ферми-операторы в виде

$$\hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1} = 2V_k^2 + (U_k^2 - V_k^2)(\hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0}) + 2U_k V_k (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_0}), \quad (278)$$

$$\hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2} = 2V_k^2 + (U_k^2 - V_k^2)(\hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2}) + 2U_k V_k (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_2}). \quad (279)$$

Тогда произведение двух двухчастичных операторов (278), (279) можно записать так:

$$\begin{aligned} & (\hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{k_1} + \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1}) \cdot (\hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{k_2} + \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2}) \approx \\ & = 4V_k^4 + (U_k^2 - V_k^2)^2 (\hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0}) (\hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2}) + \\ & + 4V_k^2 U_k^2 (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_0}) (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_2}), \end{aligned} \quad (280)$$

пренебрегая членами низших порядков ферми-операторов и используя предположение об идентичности квазичастиц, которые допускают переиндексацию $\hat{A}_{k_1} \leftrightarrow \hat{A}_{k_3}$ и $\hat{A}_{k_0} \leftrightarrow \hat{A}_{k_2}$. А это приводит к известному свойству ферми-операторов $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j\} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_j \hat{\alpha}_i = 0$. Аналогично можно представить произведения старых четырех ферми-операторов для первого

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}_{k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1}^+ \hat{\alpha}_{-k_1} \hat{\alpha}_{k_1} = U_k V_k U_{k'} V_{k'} - 2U_k V_k U_{k'} V_{k'} \times \\ & \times (\hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0}) + (U_k^2 - V_k^2) U_{k'} V_{k'} (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_0}) + \dots \end{aligned} \quad (281)$$

и второго

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}_{k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2}^+ \hat{\alpha}_{-k_2} \hat{\alpha}_{k_2} = U_k V_k U_{k'} V_{k'} - 2U_k V_k U_{k'} V_{k'} \times \\ & \times (\hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2}) + (U_k^2 - V_k^2) U_{k'} V_{k'} (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_3} + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_2}) + \dots \end{aligned} \quad (282)$$

двухчастичных взаимодействий.

Использование новых ферми-операторов позволяет представить суммарное значение квадратов гамильтонианов (275) с учетом (280)–(282)

$$\hat{\mathcal{H}}_0^2 = \hat{W}_0^2 + \hat{\mathcal{H}}_1^2 + \hat{\mathcal{H}}_2^2 + \hat{\mathcal{H}}_3^2, \quad (283)$$

где

$$\hat{W}_0^2 = 4 \sum_k e^2(k) V_k^4 + \frac{1}{V} \sum_{kk'} v_{kk'}^2 U_k^2 V_{k'}^2 U_k^2 V_k^2$$

– постоянное слагаемое, не зависящее от ферми-операторов и соответствующее квадрату энергии основного состояния;

$$\hat{\mathcal{H}}_1^2 = \sum_k \left[4e^2(\vec{k}) U_k^2 V_k^2 + \frac{1}{V^2} \sum_{k'} (U_k^2 - V_k^2)^2 v_{kk'}^2 U_{k'}^2 V_{k'}^2 \right] \times \\ \times (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_1}^+ + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_0}^+) (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_3}^+ + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_2}^+) \quad (284)$$

– недиагональная часть квадрата оператора Гамильтона четырехчастичного взаимодействия;

$$\hat{\mathcal{H}}_2^2 = \sum_k \left[e^2(\vec{k}) (U_k^2 - V_k^2)^2 + \frac{4U_k^2 V_k^2}{V^2} \sum_{k'} v_{kk'}^2 U_{k'}^2 V_{k'}^2 \right] \times \\ \times (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0}^+ + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1}^+) (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2}^+ + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3}^+) \quad (285)$$

– диагональная часть квадрата Гамильтона четырехчастичного взаимодействия. Здесь, как и в низкотемпературной теории сверхпроводимости пренебрегаем гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_3^2$, учитывающим произведения восьми новых ферми-операторов, а также остальными операторами, учитывающими низкие порядки произведений новых ферми-операторов.

Для обращения в нуль оператора (284) достаточно потребовать выполнения равенства

$$4e^2(\vec{k}) U_k^2 V_k^2 + (U_k^2 - V_k^2) \frac{1}{V} \sum_{k'} v_{kk'}^2 U_{k'}^2 V_{k'}^2 = 0. \quad (286)$$

Введем обозначение

$$\Delta_k^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{k'} v_{kk'}^2 U_{k'}^2 V_{k'}^2, \quad (287)$$

тогда из (286) и (277) выразим U_k и V_k через $e(\vec{k})$ и Δ_k

$$V_{k_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{e(\vec{k})}{\sqrt{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2}} \right]; \quad U_{k_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \mp \frac{e(\vec{k})}{\sqrt{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2}} \right]. \quad (288)$$

Подставляя (288) в (287), находим

$$\Delta_k^2 = \frac{1}{4V^2} \sum_{k'} v_{kk'}^2 \frac{\Delta_{k'}^2}{\Delta_{k'}^2 + e^2(\vec{k}')},$$

что указывает на достаточно сложный вид зависимости Δ_k от $e(\vec{k})$.

Подставляя (288) в (285), преобразуем диагональную часть оператора $\hat{\mathcal{H}}_2^2$ к виду

$$\hat{\mathcal{H}}_2^2 = \sum_k \frac{e^4(\vec{k}) + \Delta_k^4}{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2} (\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0}^+ + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1}^+) (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2}^+ + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3}^+).$$

Таким образом, в результате четырехчастичного взаимодействия между фермионами, спектр элементарных возбуждений определяется величиной

$$W(\vec{k}) = \pm \sqrt{\frac{e^4(\vec{k}) + \Delta_k^4}{e^2(\vec{k}) + \Delta_k^2}}. \quad (289)$$

При $e(\vec{k}) = 0$ и $e(\vec{k}) = \pm \Delta_k$ величина энергии возбуждения $W_k = \pm \Delta_k$. Каждому значению импульса $\hbar\vec{k}$ соответствует сложное возбуждение системы фермионов

$$(\hat{A}_{k_0}^+ \hat{A}_{k_0} + \hat{A}_{k_1}^+ \hat{A}_{k_1}) (\hat{A}_{k_2}^+ \hat{A}_{k_2} + \hat{A}_{k_3}^+ \hat{A}_{k_3}) |n_{k_0} n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3}\rangle =$$

$$= (n_{k_0} + n_{k_1})(n_{k_2} + n_{k_3}) |n_{k_0} n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3}\rangle$$

с энергией $W^2(\vec{k})(n_{k_0} + n_{k_1})(n_{k_2} + n_{k_3})$. Поскольку $\epsilon(\vec{k})$ можно выразить через ϵ_k в виде (273), то (289) перепишем так:

$$W(\vec{k}) = \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_k - \epsilon_{\vec{k}})^4 + \Delta_k^4}{(\epsilon_k - \epsilon_{\vec{k}})^2 + \Delta_k^2}}. \quad (290)$$

Тогда $W^2(0) = \Delta_k^2$ при $\epsilon_k = \epsilon_{\vec{k}}$, а при $\epsilon_k - \epsilon_{\vec{k}} \gg \Delta_k$ имеем $W^2(\vec{k}) \approx (\epsilon_k - \epsilon_{\vec{k}})^2$.

Из исследования видно, что уравнение (287) имеет тривиальное решение $\Delta_k = 0$, или $u_k^2 v_k^2 = 0$:

$$\begin{cases} u_{k_1} = 0, & v_{k_1} = 1, & \text{если } e(\vec{k}_1) > 0, \\ u_{k_2} = 1, & v_{k_1} = 0, & \text{если } e(\vec{k}_1) < 0; \end{cases} \quad (291)$$

$$\begin{cases} u_{k_2} = 1, & v_{k_2} = 0, & \text{если } e(\vec{k}_2) > 0, \\ u_{k_2} = 0, & v_{k_2} = 1, & \text{если } e(\vec{k}_2) < 0. \end{cases} \quad (292)$$

Рассмотрим канонические преобразования, обратные (276),

$$\begin{cases} \hat{A}_{k_0} = u_{k_1} \hat{\alpha}_{k_1} - v_{k_1} \hat{\alpha}_{-k_1}^+, \\ \hat{A}_{k_1} = u_{k_1} \hat{\alpha}_{-k_1} + v_{k_1} \hat{\alpha}_{k_1}^+, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{A}_{k_2} = u_{k_2} \hat{\alpha}_{k_2} - v_{k_2} \hat{\alpha}_{-k_2}^+, \\ \hat{A}_{k_3} = u_{k_2} \hat{\alpha}_{-k_2} + v_{k_2} \hat{\alpha}_{k_2}^+. \end{cases}$$

При значениях (291), (292) вне сферы Ферми ($e(\vec{k}) > 0$) операторы $\hat{A}_{k_0} = -\hat{\alpha}_{k_1}^+$, $\hat{A}_{k_1} = -\hat{\alpha}_{k_1}^+$ соответствуют рождению электроноподобных квазичастиц, или уничтожению дырочноподобных квазичастиц в состояниях $(-k_1, -1/2)$ и $(k_1, 1/2)$ а операторы $\hat{A}_{k_2} = \hat{\alpha}_{k_2}$, $\hat{A}_{k_3} = \hat{\alpha}_{-k_2}$ соответствуют уничтожению электроноподобных частиц, или рождению дырочноподобных частиц в состояниях $(k_2, 1/2)$ и $(-k_2, -1/2)$. При $e(\vec{k}) < 0$ операторы $\hat{A}_{k_0} = \hat{\alpha}_{k_1}$, $\hat{A}_{k_1} = \hat{\alpha}_{-k_1}$ соответствуют уничтожению электроноподобных частиц в состояниях $(k_1, 1/2)$ и $(-k_1, -1/2)$, а операторы $\hat{A}_{k_2} = -\hat{\alpha}_{-k_2}$, $\hat{A}_{k_3} = \hat{\alpha}_{k_2}^+$ соответствуют рождению электроноподобных частиц в состояниях $(-k_2, -1/2)$ и $(k_2, 1/2)$.

Спектр возбуждений (290) перепишем относительно ϵ_k :

$$\epsilon_k - \epsilon_{\vec{k}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{W_k^2 - \sqrt{W_k^4 - 4\Delta_k^2(\Delta_k^2 - W_k^2)}}. \quad (293)$$

Отметим, что уравнение (292) имеет вещественное значение только при $W_k = \pm \Delta_k$ и $W_k \rightarrow \infty$, а при $\infty > |W_k| > \Delta_k$ - комплексное. Дифференцируя выражение (293) по W_k , находим плотность состояний

$$\rho(W_k) = \pm \frac{N(0)W_k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \frac{W_k^2 + 2\Delta_k^2}{\sqrt{W_k^4 - 4\Delta_k^2(\Delta_k^2 - W_k^2)}}}{\sqrt{W_k^2 - \sqrt{W_k^4 - 4\Delta_k^2(\Delta_k^2 - W_k^2)}}},$$

откуда следует, что при $W_k = \pm \Delta_k$ она стремится к $\pm \infty$, а при $|W_k| \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$. Во всей остальной области энергий $\Delta_k < |W_k| < \infty$ плотность состояний также является комплексной величиной.

Длина когерентности Δx может быть оценена, как и для низкотемпературной сверхпроводимости (НСП), с помощью методики, предложенной в [38]. При $\varphi_k = U_{3/2} = 7,901 \cdot 10^{-3}$ В, а $\varphi_F = 0,2$ В значение Δx будет порядка

$$\Delta x \approx \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{4\pi \cdot 7,901 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(\frac{0,2 \cdot 10^{19} \cdot 10^{31}}{2 \cdot 1,6 \cdot 9,1} \right)^{1/2} \mu = 5,528 \cdot 10^9 \mu,$$

т. е. практически в ~ 10 раз превышает значение периода решетки для кремния. При этом характерное значение для критической температуры равно

$$T_c \approx T_{3/2} = 91,686611 \text{ К}.$$

Таким образом, представленный подход скорее всего описывает явление высокотемпературной сверхпроводимости (ВСП), открытое Беднорцом и Мюллером в 1986 г. [33]. Отличие почти в 1000 раз длины когерентности по сравнению с НСП позволяет смягчить требования к строгой периодичности решетки твердого тела (т. е. ВСП может наблюдаться в системах с ближним порядком кристаллической решетки - стекла и пористые керамики [39]). Другим отличием ВСП от НСП является наличие энергетической щели в зонной структуре, где находится общий уровень Ферми всей системы подобно полупроводниковым и диэлектрическим материалам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леггет А. Дж.* Шредингеровская кошка и ее лабораторные сородичи //УФН. – 1986. – Т. 148, вып. 4. – С. 671–688.
2. *Солитар Л.* Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. – М.: Мир, 1974. – 428 с.
3. *Шварцшильд Б.* Проявление эффекта Ааронова–Бома в проводимости колец из нормального металла//Физика за рубежом. Сер. А. – 1987. – С. 225–240.
4. *Келдыш Л. В.* О влиянии ультразвука на электронный спектр кристалла//Физика твердого тела. – 1962. – Т. 4, № 8. – С. 2265–2267.
5. *Андрюшин Е. А., Быков А. А.* От сверхрешеток к сверхатомам//УФН. – 1988. – Т. 154, вып. 1. – С. 123–132.
6. *Клитцинг фон К., Дорда Г., Пеллер М.* Новый метод очень точного определения постоянной тонкой структуры, основанный на измерении квантованного холловского сопротивления//Квантовый эффект Холла. – М.: Мир, 1986. – С. 10–17.
7. *Лафлин Р.* Квантованная двумерная холловская проводимость //Квантовый эффект Холла. – М.: Мир, 1986. – С. 160–164.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 702 с.
9. *Дирак П. А. М.* Квантованные сингулярности в электромагнитном поле. Монополю Дирака/Под ред. Болотовского Б. М. и др. – М.: Мир, 1970. – 331 с.
10. *Pat. 1745175 USA.* Method and apparatus for controlling electric current /J. E. Lilienfeld. – Publ. January 1930.
11. *Единицы физических величин: Сб. норм.-тех. документов.* – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 176 с.
12. *Якимаха А. Л.* Об уточнении статистической модели МДП-транзистора в микрорежиме//Радиотехника. – 1981. – Т. 36, № 10. – С. 9–15.
13. *Кобболд Р.* Теория и применение полевых транзисторов. – Л.: Энергия, 1975. – 304 с.
14. *Sah C. T.* Characteristics of the metal-oxide-semiconductor transistors //IEEE Trans. – 1964. – ED-11, N 7. – P. 324–345.
15. *Swanson R. M., Meindl J. D.* Ion-Implanted complementary MOS-transistor in low-voltage circuits//IEEE journal. – 1972. – SC-7, N 2. – P. 146–153.
16. *Пека Г. П.* Физические явления на поверхности полупроводников. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 214 с.
17. *Овсяк В. Н.* Электронные процессы в полупроводниках с областями пространственного заряда. – Новосибирск: Наука, 1984. – 253 с.
18. *Андо А., Стерн Ф., Фаулер А.* Электронные свойства двумерных систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
19. *Якимаха А. Л., Берзин Л. Ф.* Статическая модель МДП-транзистора в микрорежиме//Элементы, устройства и системы газового анализа: Тр. ВНИИАП, К., 1979. – С. 63–67.

20. Якимаха А. Л. Микро мощные инверторы на МДП-транзисторах//Радиотехника. – 1980. – Т. 35. № 1. – С. 21–25.
21. Якимаха А. Л. Исследование МДП-структур в микрорежимах и разработка на их основе импульсных и аналоговых схем для аналитического приборостроения. Дис. – канд. техн. наук. – К., 1981. – 226 с. – Машинопись.
22. Hart B. L., Barker R. W. First-order theory of MOSFET hybrid-mode operation//Int. J. Electron. – 1975. – 38, N 5. – P. 625–630.
23. Якимаха А. Л., Берзин Л. Ф. Микро мощная р-п-р-п МДП-структура на комплементарных МДП-транзисторах//Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 9. – С. 1941–1943.
24. Степаненко И. П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. – М.: Энергия, 1967. – 615 с.
25. Рейф Ф. Статистическая физика: Учеб. руководство/Пер. с англ.; Под ред. А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М.: Нвука, 1986. – 336 с.
26. Ансельм А. И. Очерки развития физической теории е первой трети ХХ века. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
27. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1977. – 672 с.
28. Исихара А. Статистическая физика. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
29. Хоффман Д. Эрвин Шредингер: Пер. с нем. – М.: Мир, 1987. – 96 с.
30. Давыдов А. С. Квантовая механика. – М.: Наука, 1973. – 703 с.
31. Бройль де Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики: Пер. с фр. – М.: Мир, 1986. – 344 с.
32. Дробное квантование в эффекте Холла/Г. Штермер, А. Чвнг, Д. Цум и др.//Квантовый эффект Холла. – М.: Мир, 1986. – 232 с.
33. Беднорц И. Г., Мюллер К. А. Оксиды перовскитного типа – новый подход к высокотемпературной сверхпроводимости//УФН. – 1988. – Т. 156, вып. 2. – С. 323–346.
34. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 718 с.
35. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика. Учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
36. Ридли Б. Квантовые процессы в полупроводниках. – М.: Мир, 1986. – 304 с.
37. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
38. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
39. Гинзбург В. Л. Высокотемпературная сверхпроводимость. Нвучное сообщение//Вестн. АН СССР. – 1987. – № 1. – С. 20–37.

Предисловие	3
Глава 1. КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ПОЛЯ	4
Введение	4
1. 1. Решение уравнения Шредингера	7
1. 2. Подход Лафлина для магнитных зарядов	9
1. 3. Условия наблюдения КЭП	12
1. 4. Макроскопическое моделирование МДП-транзисторов	14
1. 5. Экспериментальные исследования серийных МДП-транзисторов	20
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ	32
2. 1. Энергия, температура и энтропия	32
2. 2. Плотность одночастичных состояний и концентрация частиц	34
2. 3. Совместное решение уравнения Шредингера и Пуассона	36
Глава 3. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ КВАЗИМИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ	39
3. 1. Волновая функция и модернизированное псевдоуравнение Шредингера для разностных аргументов	39
3. 2. Псевдоквантовые уравнения Максвелла для разностных аргументов	43
3. 3. Псевдоквантовая электродинамика	46
3. 4. Квантовый эффект Холла	50
3. 5. Квантовый эффект поля	55
3. 6. Магнитные заряды	62
Глава 4. ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ ФЕРМИ-СИСТЕМ	64
4. 1. Основные положения микроскопической теории сверхпро- водимости	64
4. 2. Режим низкотемпературной сверхпроводимости ферми-системы	68
4. 3. Режим слабой инверсии ферми-системы	71
4. 4. Режим сильной инверсии ферми-системы	75
4. 5. Режим сверхсильной инверсии ферми-системы	79
4. 6. Четырехчастичные взаимодействия в полупроводниках	81
<i>Список использованной литературы</i>	89