

Б.М.ЯВОРСКИЙ и А.А.ДЕТЛАФ

СПРАВОЧНИК  
ПО  
ФИЗИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ  
и  
СТУДЕНТОВ ВУЗОВ



Б.М.ЯВОРСКИЙ  
А.А.ДЕТЛАФ

СПРАВОЧНИК  
ПО  
ФИЗИКЕ

**Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ДЕТЛАФ**

# **СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ**

**ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ  
И СТУДЕНТОВ ВУЗОВ**

**ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,  
ПЕРЕРЕБОТАННОЕ**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

**Москва 1968**

## АННОТАЦИЯ

В справочнике даны определения основных физических понятий, кратко сформулированы физические законы и сущность описываемых ими явлений. В нем отражены все основные разделы классической и современной физики.

Математические знания, необходимые для пользования справочником, не превышают объема материала, приведенного в «Справочнике по математике для инженеров и учащихся втузов» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева.

Справочник рассчитан на инженерно-технических работников, студентов и аспирантов вузов и втузов, преподавателей высшей и средней школы. Он может быть использован также лицами, интересующимися физикой.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию .....	11
Предисловие к первому изданию .....	12

## О Т Д Е Л И

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

<b>Глава 1. Кинематика материальной точки и абсолютно твердого тела .....</b>	<b>13</b>
1. Предварительные понятия .....	13
2. Скорость .....	19
3. Ускорение .....	21
4. Поступательное и вращательное движения абсолютно твердого тела .....	23
5. Абсолютное, относительное и переносное движения .....	28
6. Некоторые случаи сложения движений твердого тела .....	30
<b>Глава 2. Динамика поступательного движения .....</b>	<b>32</b>
1. Первый закон Ньютона .....	32
2. Сила .....	34
3. Масса .....	36
4. Второй закон Ньютона .....	39
5. Третий закон Ньютона .....	41
6. Основной закон динамики поступательного движения .....	41
7. Закон сохранения количества движения .....	43
8. Движение тела переменной массы .....	44
9. Механический принцип относительности .....	45
10. Закон всемирного тяготения .....	47
11. Гравитационное поле .....	50
12. Внешнее трение .....	53
13. Движение в неинерциальных системах отсчета .....	55
<b>Глава 3. Работа и механическая энергия .....</b>	<b>57</b>
1. Энергия .....	57
2. Работа .....	58
3. Мощность .....	60
4. Силовая функция .....	61
5. Механическая энергия .....	63
6. Закон сохранения механической энергии .....	67
7. Удар .....	68
<b>Глава 4. Динамика вращательного движения .....</b>	<b>70</b>
1. Момент силы .....	70
2. Момент инерции .....	71
3. Момент количества движения .....	76

4. Основной закон динамики вращательного движения . . . . .	78
5. Закон сохранения момента количества движения . . . . .	79
6. Движение под действием центральных сил . . . . .	81
7. Гироскоп . . . . .	85
<b>Глава 5. Основы аналитической механики . . . . .</b>	<b>89</b>
1. Основные понятия и определения . . . . .	89
2. Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	92
3. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона . . . . .	94
4. Понятие о вариационных принципах механики . . . . .	98
5. Канонические преобразования . . . . .	102
6. Законы сохранения . . . . .	105
<b>Глава 6. Механические колебания . . . . .</b>	<b>109</b>
1. Основные понятия . . . . .	109
2. Малые колебания системы, имеющей одну степень свободы . . . . .	113
3. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы . . . . .	121
4. Колебания нелинейной системы, имеющей одну степень свободы . . . . .	133

## ОТДЕЛ II

## ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

<b>Глава 1. Основные понятия . . . . .</b>	<b>144</b>
<b>Глава 2. Законы идеальных газов . . . . .</b>	<b>150</b>
1. Идеальные газы . . . . .	150
2. Смеси идеальных газов . . . . .	152
<b>Глава 3. Первый закон термодинамики . . . . .</b>	<b>153</b>
1. Внутренняя энергия и энтальпия . . . . .	153
2. Работа и теплота . . . . .	156
3. Теплоемкость . . . . .	157
4. Первый закон термодинамики . . . . .	158
5. Простейшие термодинамические процессы идеальных газов . . . . .	162
<b>Глава 4. Второй и третий законы термодинамики . . . . .</b>	<b>166</b>
1. Обратимые и необратимые процессы . . . . .	166
2. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно . . . . .	167
3. Второй закон термодинамики . . . . .	173
4. Энтропия . . . . .	174
5. Основное соотношение термодинамики . . . . .	179
6. Характеристические функции и термодинамические потенциалы . . . . .	180
7. Основные дифференциальные уравнения термодинамики . . . . .	184
8. Диаграмма $s-T$ . . . . .	188
9. Многокомпонентные и многофазные системы. Условия термодинамического равновесия . . . . .	192
10. Химическое равновесие . . . . .	199
11. Третий закон термодинамики . . . . .	202
<b>Глава 5. Кинетическая теория газов . . . . .</b>	<b>204</b>
1. Основное уравнение кинетической теории газов . . . . .	204
2. Закон распределения молекул по скоростям Максвелла . . . . .	205
3. Средняя длина свободного пробега молекул . . . . .	208

4. Явления переноса в газах . . . . .	209
5. Свойства разреженных газов . . . . .	215
<b>Глава 6. Элементы статистической физики . . . . .</b>	<b>217</b>
1. Введение . . . . .	217
2. Вероятность состояния системы. Средние значения физических величин . . . . .	218
3. Распределение Гиббса . . . . .	219
4. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы . . . . .	223
5. Распределение Максвелла—Больцмана . . . . .	223
6. Квантовая статистика . . . . .	224
7. Квантовые распределения Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака . . . . .	225
8. Вырождение газов, подчиняющихся квантовой статистике . . . . .	228
9. Теплоемкости одноатомных и двухатомных газов . . . . .	232
10. Статистический смысл второго начала термодинамики . . . . .	236
11. Флуктуации . . . . .	237
12. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов . . . . .	240
13. Электрические флуктуации в радиоаппаратуре . . . . .	242
14. Броуновское движение . . . . .	243
<b>Глава 7. Реальные газы и пары . . . . .</b>	<b>244</b>
1. Уравнения состояния реальных газов . . . . .	244
2. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах . . . . .	246
3. Дроселирование газов. Эффект Джоуля—Томсона . . . . .	249
4. Изотермы реальных газов. Пары. Критическое состояние вещества . . . . .	250
5. Сжижение газов . . . . .	252
<b>Глава 8. Жидкости . . . . .</b>	<b>253</b>
1. Общие свойства и строение жидкостей . . . . .	253
2. Свойства поверхностного слоя жидкости . . . . .	257
3. Смачивание. Капиллярные явления . . . . .	258
4. Испарение и кипение жидкостей . . . . .	260
5. Свойства разбавленных растворов . . . . .	262
6. Сверхтекучесть гелия . . . . .	264
<b>Глава 9. Кристаллические твердые тела . . . . .</b>	<b>266</b>
1. Общие свойства и строение твердых тел . . . . .	266
2. Тепловое расширение твердых тел . . . . .	270
3. Теплопроводность твердых тел . . . . .	271
4. Теплоемкость твердых тел . . . . .	275
5. Фазовые превращения твердых тел . . . . .	277
6. Адсорбция . . . . .	280
7. Упругие свойства твердых тел . . . . .	281
<b>Глава 10. Аморфные вещества . . . . .</b>	<b>286</b>
1. Общие свойства и строение аморфных веществ . . . . .	286
2. Вязко-упругие свойства аморфных веществ . . . . .	290
<b>Глава 11. Полимеры . . . . .</b>	<b>291</b>
1. Общие свойства и строение полимеров . . . . .	291
2. Конформационная статистика полимерных цепей . . . . .	296
3. Разбавленные растворы полимеров . . . . .	300
4. Кристалличность полимеров . . . . .	302
5. Механические свойства полимеров . . . . .	304

## ОТДЕЛ III

## ОСНОВЫ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

Глава 1. Гидроаэростатика	310
1. Введение	310
2. Гидроаэростатика	311
Глава 2. Гидроаэродинамика	314
1. Основные понятия	314
2. Уравнение неразрывности	317
3. Уравнение движения жидкости	318
4. Уравнение энергии	325
5. Элементы теории размерностей и теории подобия	328
6. Движение тел в жидкости. Пограничный слой	333
7. Движение жидкостей в трубах	337

## ОТДЕЛ IV

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Глава 1. Электростатика	341
1. Основные понятия. Закон Кулона	341
2. Электрическое поле. Напряженность поля	343
3. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса для потока смещения	348
4. Потенциал электростатического поля	350
5. Проводники в электростатическом поле	356
6. Емкость	359
7. Диэлектрики в электрическом поле	361
8. Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект	370
9. Энергия заряженного проводника и электрического поля	372
Глава 2. Постоянный электрический ток в металлах	375
1. Основные понятия и определения	375
2. Электронная теория проводимости	376
3. Законы постоянного тока	380
4. Правила Кирхгофа	383
Глава 3. Электрический ток в жидкостях и газах	386
1. Проводимость жидкостей. Электролитическая диссоциация	386
2. Законы электролиза	387
3. Атомность электричества	388
4. Закон Ома для тока в жидкостях	388
5. Электропроводность газов	389
6. Независимый газовый разряд	390
7. Самостоятельный газовый разряд	391
8. Понятие о плазме	396
Глава 4. Электрический ток в полупроводниках	400
1. Собственная проводимость полупроводников	400
2. Прямая проводимость полупроводников	401
3. Явление Холла в металлах и полупроводниках	403
Глава 5. Контактные, термоэлектрические и эмиссионные явления	405
1. Контактные явления в металлах. Законы Вольта	405
2. Контактные явления в полупроводниках	408

3. Термоэлектрические явления в металлах и полупроводниках	416
4. Эмиссионные явления в металлах	421
Глава 6. Магнитное поле постоянного тока	425
1. Магнитное поле. Закон Ампера	425
2. Закон Био—Савара—Лапласа	427
3. Простейшие магнитные поля токов	430
4. Действие магнитного поля на проводники с токами. Взаимодействие проводников	435
5. Закон полного тока. Магнитные цепи	437
6. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле	441
Глава 7. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	442
1. Сила Лоренца	442
2. Удельный заряд частиц. Масс-спектрография	444
3. Ускорители заряженных частиц	445
4. Основы электронной оптики	448
Глава 8. Электромагнитная индукция	454
1. Основной закон электромагнитной индукции	454
2. Вихревые индукционные токи	456
3. Явление самоиндукции. Трансформатор	457
4. Взаимная индукция. Трансформатор	461
5. Энергия магнитного поля электрического тока	462
Глава 9. Магнитные свойства вещества	464
1. Магнитные моменты электронов и атомов	464
2. Классификация магнетиков	467
3. Диамагнетизм	469
4. Парамагнетизм	470
5. Магнитное поле в магнетиках	472
6. Ферромагнетизм	474
7. Сверхпроводимость	479
Глава 10. Электромагнитные колебания	488
1. Колебательный контур	483
2. Вынужденные электромагнитные колебания	485
3. Электроны и полупроводниковые выпрямители и усилители	490
Глава 11. Основы электродинамики неподвижных сред	497
1. Общая характеристика теории Максвелла	497
2. Первое уравнение Максвелла	498
3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла	499
4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	500
5. Решение уравнений Максвелла методом записывающих потенциалов	502
6. Законы сохранения в электромагнитном поле	504
7. Основные положения электронной теории. Система уравнений Лоренца	506
8. Усреднение уравнений микрополя	507
Глава 12. Основы магнитной гидродинамики	510
1. Уравнения магнитной гидродинамики	510
2. Магнитогиродинамические волны	514
3. Разрывы и ударные волны	516

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 13. Основы специальной теории относительности</b> . . . . .	<b>519</b>
1. Принцип относительности Эйнштейна . . . . .	519
2. Интервалы . . . . .	520
3. Преобразования Лоренца и их следствия . . . . .	523
4. Преобразование скорости . . . . .	525
5. Четырехмерные скорость и ускорение . . . . .	525
6. Релятивистская динамика . . . . .	526
7. Понятие о преобразованиях Лоренца для электромагнитного поля . . . . .	529
8. Излучение Вавилова—Черенкова . . . . .	531
9. Явление Доплера в оптике . . . . .	532

## ОТДЕЛ V ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

<b>Глава 1. Основы акустики</b> . . . . .	<b>534</b>
1. Введение . . . . .	534
2. Скорость распространения звуковых волн . . . . .	535
3. Волновое уравнение . . . . .	536
4. Продольные синусоидальные волны . . . . .	539
5. Энергия акустических волн . . . . .	543
6. Отражение и преломление продольных акустических волн (в отсутствие дифракционных явлений) . . . . .	545
7. Стоячие волны . . . . .	549
8. Явление Доплера . . . . .	552
9. Поглощение и рассеяние звуковых волн . . . . .	553
10. Элементы физиологической акустики . . . . .	554
11. Ультразвук . . . . .	556
12. Ударные волны в газах . . . . .	559
<b>Глава 2. Электромагнитные волны</b> . . . . .	<b>563</b>
1. Общая характеристика . . . . .	563
2. Излучение электромагнитных волн . . . . .	570
3. Радиосвязь, телевидение, радиолокация и радиоастрономия . . . . .	579
<b>Глава 3. Прохождение света через границу двух сред</b> . . . . .	<b>583</b>
1. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом . . . . .	583
2. Отражение и преломление света диэлектриками . . . . .	585
3. Поляризация света при отражении и преломлении . . . . .	591
4. Основы металлооптики . . . . .	592
<b>Глава 4. Интерференция света</b> . . . . .	<b>595</b>
1. Когерентные волны . . . . .	595
2. Оптическая длина пути . . . . .	600
3. Интерференция в тонких пленках . . . . .	601
<b>Глава 5. Дифракция света</b> . . . . .	<b>604</b>
1. Принцип Гюйгенса—Френеля . . . . .	604
2. Графическое сложение амплитуд вторичных волн . . . . .	607
3. Дифракция Френеля . . . . .	609
4. Дифракция Фраунгофера . . . . .	613
5. Дифракционные явления на многомерных структурах . . . . .	620
6. Дифракция радиоволн . . . . .	623
<b>Глава 6. Геометрическая оптика</b> . . . . .	<b>624</b>
1. Основные положения . . . . .	624
2. Плоское зеркало. Плоскопараллельная пластинка. Призма . . . . .	626

## ОГЛАВЛЕНИЕ

3. Преломление и отражение на сферической поверхности . . . . .	627
4. Тонкие линзы . . . . .	630
5. Центрированные оптические системы . . . . .	633
6. Основные оптические приборы . . . . .	636
7. Погрешности оптических систем . . . . .	641
8. Разрешающая способность оптических приборов . . . . .	646
9. Основы фотометрии . . . . .	649
<b>Глава 7. Поляризация света</b> . . . . .	<b>652</b>
1. Способы получения поляризованного света . . . . .	652
2. Элементы кристаллооптики . . . . .	653
3. Двойное лучепреломление . . . . .	659
4. Искусственное двойное лучепреломление . . . . .	662
5. Анализ поляризованного света. Эллиптическая и круговая поляризация света . . . . .	664
6. Интерференция поляризованных лучей . . . . .	667
7. Вращение плоскости поляризации . . . . .	671
<b>Глава 8. Молекулярная оптика</b> . . . . .	<b>673</b>
1. Дисперсия света . . . . .	673
2. Спектральный анализ . . . . .	677
3. Поглощение света . . . . .	682
4. Рассеяние света . . . . .	684
<b>Глава 9. Тепловое излучение</b> . . . . .	<b>689</b>
1. Тепловое излучение . . . . .	689
2. Законы излучения абсолютно черного тела . . . . .	692
3. Понятие об оптической пирометрии . . . . .	696
<b>Глава 10. Действия света</b> . . . . .	<b>698</b>
1. Фотоэлектрический эффект . . . . .	698
2. Эффект Комптона . . . . .	702
3. Давление света . . . . .	705
4. Химические действия света . . . . .	706
<b>Глава 11. Люминесценция</b> . . . . .	<b>709</b>
1. Классификация процессов люминесценции и их протекание . . . . .	709
2. Закономерности люминесценции . . . . .	712

## ОТДЕЛ VI

### АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

<b>Глава 1. Элементы нерелятивистской квантовой механики</b> . . . . .	<b>715</b>
1. Волновые свойства частиц. Волновая функция . . . . .	715
2. Уравнение Шредингера . . . . .	718
3. Соотношение неопределенностей Гейзенберга . . . . .	719
4. Простейшие задачи квантовой механики . . . . .	721
5. Квантовые переходы . . . . .	740
<b>Глава 2. Атом</b> . . . . .	<b>745</b>
1. Атомы и ионы с одним валентным электроном . . . . .	745
2. Многоэлектронные атомы . . . . .	753
3. Векторная модель атома . . . . .	758
4. Эффект Зеемана и явления резонанса . . . . .	761
5. Эффект Штарка в водородоподобных системах . . . . .	768
6. Принцип Паули. Периодическая система элементов . . . . .	769
7. Рентгеновские лучи . . . . .	776

<b>Глава 3. Молекула</b> .....	<b>779</b>
1. Ионные молекулы .....	779
2. Атомные молекулы .....	782
3. Электронные спектры молекул .....	786
4. Колебательные спектры молекул .....	791
5. Вращательные спектры молекул .....	793
6. Электронно-колебательные спектры молекул .....	797
7. Вращательно-колебательные спектры молекул .....	798
8. Комбинационные спектры молекул .....	800
9. Сплошные и диффузные спектры молекул .....	801
10. Молекулярная спектроскопия .....	803
11. Ионизация атомов и молекул .....	804
<b>Глава 4. Атомное ядро</b> .....	<b>808</b>
1. Состав и размеры атомных ядер .....	806
2. Энергия связи ядер. Ядерные силы .....	808
3. Магнитные и электрические свойства ядер .....	812
4. Модели ядра .....	815
5. Радиоактивность .....	818
6. Альфа-распад .....	825
7. Бета-распад .....	827
8. Гамма-излучение .....	833
9. Прохождение заряженных частиц и гамма-излучения через вещество .....	838
10. Методы наблюдения и регистрации ионизирующих частиц и квантов излучения .....	849
<b>Глава 5. Ядерные реакции</b> .....	<b>852</b>
1. Основные понятия .....	852
2. Общая классификация ядерных реакций .....	855
3. Физические основы ядерной энергетики .....	859
<b>Глава 6. Элементарные частицы</b> .....	<b>865</b>
1. Основные сведения об элементарных частицах .....	865
2. Понятие о симметриях сильных взаимодействий .....	874
3. Частицы и поля .....	882
4. Космические лучи .....	887
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	
<b>Приложение I. Единицы измерения и размерности физических величин в различных системах единиц</b> .....	<b>892</b>
1. Единицы измерения механических величин .....	892
2. Единицы измерения тепловых величин .....	899
3. Единицы измерения электрических и магнитных величин .....	899
4. Единицы измерения уровня звукового давления .....	909
5. Единицы измерения световых величин .....	909
6. Некоторые единицы измерения в атомной и ядерной физике .....	910
<b>Приложение II. Универсальные физические постоянные</b> .....	<b>910</b>
<b>Предметный указатель</b> .....	<b>914</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание «Справочника по физике» существенно переработано по сравнению с предыдущими изданиями. Отделы V и VI, посвященные волновым процессам, оптике, атомной и ядерной физике, практически написаны заново. Весьма значительно переработан также отдел IV — «Электричество и магнетизм». Многие главы этих отделов расширены и дополнены. В справочнике последовательно применяются система СИ и гауссова система единиц. Исключение составляет глава 12 отдела IV («Основы магнитной гидродинамики»), которую авторы, к сожалению, не имели возможности переработать в данном издании.

Некоторые главы других отделов также подверглись значительной переработке, например глава 5 отдела I — «Основы аналитической механики», главы 10 и 11 отдела II — «Аморфные вещества» и «Полимеры» и др.

В остальное содержание справочника внесены изменения, устраняющие недочеты, замеченные в предыдущих изданиях.

В работе над четвертым изданием авторам оказали большую помощь читатели, приславшие или устно сообщившие свои замечания и пожелания. Всем им авторы приносят свою глубокую благодарность. Авторы выражают надежду, что и на данное издание получат отзывы, которые помогут им в дальнейшей работе над справочником.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В предлагаемом справочнике по классической и современной физике даны определения физических понятий, кратко сформулированы физические законы и закономерности и приведены необходимые разъяснения.

Справочник рассчитан на достаточно широкий круг читателей: инженерно-технических работников, не специализирующихся в какой-либо области физики, студентов и аспирантов вузов и втузов, преподавателей высшей и средней школы. Он может быть также использован лицами, интересующимися физикой.

Математические знания, необходимые для пользования справочником, не превышают объема материала, приведенного в «Справочнике по математике для инженеров и учащихся втузов» И. П. Брошштейна и К. А. Семендяева. Это в известной мере ограничило уровень изложения тех вопросов, где требуется знание тензоров, операционного исчисления и т. д. В связи с этим в справочнике опущены вопросы, связанные с тензорным характером некоторых физических величин, а также ряд других вопросов.

Ограниченный объем справочника не позволил включить в него экспериментальные методы исследований, описание опытов и приборов и другой экспериментальный материал.

Главы 10 и 11 отдела II написаны Т. Н. Хазановичем; § 4 главы 6 отдела I написан Я. Г. Паповко.

Авторы выражают глубокую благодарность редактору книги К. П. Гурову за весьма ценные советы и указания.

## ГЛАВА I КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 1. Предварительные понятия

1° *Механикой* называется наука о простейшей форме движения материи — *механическом движении*, которое состоит в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени. *Телами* называются макроскопические системы, состоящие из очень большого числа молекул или атомов, так что размеры этих систем во много раз больше межмолекулярных расстояний. В *классической ньютоновской механике* рассматриваются движения тел, происходящие со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме. Исследование движений тел, скорости которых соизмеримы со скоростью света, является предметом *релятивистской механики*, основанной на теории относительности (стр. 526). Специфические особенности движения микрочастиц рассматриваются в *квантовой (волновой) механике* (стр. 715). *Микрочастицами* называются частицы, массы покоя (стр. 526) которых соизмеримы с массами покоя атомов или меньше их.

2° Вопросы внутреннего строения тел, природы и закономерностей их взаимодействий выходят за рамки механики, составляя содержание других разделов физики. В зависимости от свойств тел и постановки задачи в классической механике используются различные приближенные модели реальных тел: материальная точка, абсолютно твердое тело и др.

3° *Материальной точкой* называется тело, размеры и форма которого несущественны в рассматриваемой задаче. Например, изучая движение планет вокруг Солнца, их можно считать материальными точками, так как размеры планет во много раз меньше их расстояний до Солнца.



*Системой материальных точек* или тел (механической системой) называется мысленно выделенная совокупность материальных точек или тел, которые в общем случае взаимодействуют как друг с другом, так и с телами, не включенными в состав этой системы.

4° *Абсолютно твердым телом* называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого постоянно. Иначе говоря, размеры и форма абсолютно твердого тела не изменяются при его движении. Всякое твердое тело можно мысленно разбить на достаточно большое число элементарных частей так, чтобы размеры каждой из них были много меньше размеров всего тела. Поэтому абсолютно твердое тело часто рассматривают как систему материальных точек, жестко связанных друг с другом.

5° Классическая механика состоит из трех основных отделов: статики, кинематики и динамики. В *статике* исследуются законы сложения сил и условия равновесия твердых, жидких и газообразных тел. В *кинематике* изучается механическое движение тел вне связи с определяющим его взаимодействием между телами. В *динамике* рассматривается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение.

6° *Системой отсчета* называется реальное или условное абсолютно твердое тело, по отношению к которому рассматривается движение исследуемого тела. С системой отсчета жестко связывают какую-либо систему координат, так что положение каждой точки движущегося тела относительно системы отсчета можно однозначно определить

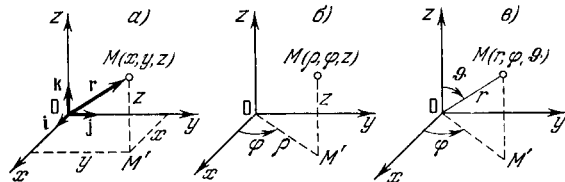


Рис. I.1.1.

тремя координатами этой точки. Кроме того, система отсчета должна быть хронометризована, т. е. снабжена «часами», с помощью которых однозначно (с точностью до произвольного постоянного слагаемого, зависящего

от выбора начала отсчета времени) определяются моменты времени, соответствующие различным положениям в пространстве движущегося тела. В механике в основном применяются следующие системы координат: правая декартова прямоугольная (рис. I.1.1, а), цилиндрическая (рис. I.1.1, б) и сферическая (рис. I.1.1, в). Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и обратно имеют вид:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho \cos \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z, \quad z = z,$$

а от декартовых координат к сферическим и обратно:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad z = r \cos \theta.$$

7° Движение материальной точки полностью задано, если указан однозначный закон изменения во времени  $t$  ее пространственных координат  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  (декартовых, цилиндрических или каких-либо других):

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Эти уравнения эквивалентны одному векторному уравнению:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий начало координат с движущейся точкой  $M$  ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ). Если прямоугольные декартовы координаты точки  $M$  равны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — единичные векторы (орты), совпадающие с положительными направлениями соответственно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , а векторы  $x\mathbf{i}$ ,  $y\mathbf{j}$  и  $z\mathbf{k}$  — составляющие (компоненты) вектора  $\mathbf{r}$  вдоль этих осей.

Обозначения в механике производных по времени от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  и координат  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  движущейся

Точки:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \text{и т. д.},$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad \ddot{q}_i = \frac{d^2q_i}{dt^2} \quad \text{и т. д.}$$

8° *Траекторией* называется линия, описываемая движущейся точкой в пространстве. Уравнения  $q_i = q_i(t)$ , где  $i = 1, 2, 3$ , выражают *уравнение траектории в параметрической форме*. Решая их совместно и исключая из них параметр  $t$ , можно найти связь между координатами точек пространства, через которые проходит траектория:

$$F_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad F_2(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

При  $m = p$ . Движение точки удовлетворяет условиям:  $x = a \sin \omega t$ ,  $y = b \cos \omega t$ ,  $z = c \sin \omega t$ , где  $a, b$  и  $c$  — отличные от нуля постоянные, а  $\omega \neq 0$ . Исключая время  $t$ , находим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{c} z.$$

Траектория точки — линия пересечения этих двух поверхностей.

9° Геометрическая форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Например, если по отношению к диску, равномерно вращающемуся вокруг неподвижной оси, материальная точка равномерно движется вдоль одного из его радиусов, то по отношению к оси траектория этой точки представляет собой спираль Архимеда. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное движения* точки. Движение точки называется *плоским*, если все участки ее траектории лежат в одной плоскости. Обычно эту плоскость принимают за координатную плоскость  $z = 0$ , тогда плоское движение точки полностью определяется зависимостями от времени двух ее декартовых координат  $x$  и  $y$  или полярных координат  $\rho$  и  $\varphi$ .

10° *Длиной пути*  $s$  называется сумма длин всех участков траектории, пройденных точкой за рассматриваемый промежуток времени от  $t_0$  до  $t$ . Если уравнения движения (стр. 15) заданы в декартовых прямоугольных координатах, то

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt;$$

в цилиндрических координатах

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} dt;$$

в сферических координатах

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi} \sin \theta)^2} dt.$$

Положение движущейся точки в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_0$  называется ее *начальным положением*. В силу произвольности начала отсчета времени обычно полагают  $t_0 = 0$ . Длина пути, пройденного точкой из начального положения, является скалярной функцией времени:  $s = s(t)$ .

11° Механическую систему называют *свободной*, если все входящие в нее материальные точки или тела могут занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости. В противном случае систему называют *несвободной*.

*Связями (механическими связями)* называют ограничения, наложенные на положение или движение рассматриваемой механической системы в пространстве. Связи называют *внутренними*, если они не мешают системе свободно перемещаться после того, как она внезапно отвердеет. Все остальные связи называют *внешними*. Системы, подчиненные одним только внутренним связям, являются свободными.

Связь называют *удерживающей (неосвобождаемой или двухсторонней)*, если соотношения между координатами и скоростями точек системы, обусловленные этой связью, выражаются аналитически в форме уравнения вида

$$\Phi(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) = 0,$$

где  $t$  — время,  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -й точки системы

$$(i = 1, 2, \dots, n), \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}.$$

Указанное соотношение называют *уравнением связи*. Примером удерживающих связей могут служить внутренние связи, обуславливающие неизменность расстояний между точками абсолютно твердого тела.

Связь называют *неудерживающей* (освобождаемой или односторонней), если ограничения, накладываемые ею на механическую систему, выражаются аналитически в виде неравенства

$$\Phi_1(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) \geq 0.$$

Такого рода связь осуществляется, например, при движении тела, подвешенного на гибкой нерастяжимой нити, а также при движении тела по горизонтальной плоскости.

Связи называют *стационарными* (склерономными), если соответствующие им уравнения связей<sup>1)</sup> не содержат явно времени. В противном случае связи называют *нестационарными* (реономными).

Связь называют *геометрической*, если она накладывает ограничения только на положения точек системы в пространстве и выражается аналитически в виде

$$f(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, t) = 0.$$

Связи называют *кинематическими*, если они накладывают ограничения не только на положения точек системы, но и на их скорости:

$$\varphi(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) = 0.$$

Связи называют *голономными*, если соответствующие им уравнения не содержат производных от координат точек системы или могут быть приведены к такому виду путем интегрирования. В противном случае связи называют *неголономными*. Примером неголономной связи может служить условие равенства нулю скорости точки касания шара, катящегося без скольжения по неподвижной шероховатой плоскости.

Механическую систему называют *голономной*, если она подчинена только голономным связям. Если в числе связей имеется хотя бы одна неголономная связь, то механическую систему называют *неголономной*.

<sup>1)</sup> В дальнейшем рассматриваются только удерживающие связи.

## 2. Скорость

<sup>1°</sup> *Скоростью* (или *мгновенной скоростью*) называется векторная величина  $\mathbf{v}$ , равная первой производной по времени от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  движущейся точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Скорость направлена по касательной к траектории в сторону движения точки и численно равна первой производной от длины пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Проекции скорости  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Отсюда

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

В цилиндрических координатах  $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$ ; в сферических координатах  $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$ .

<sup>2°</sup> В случае плоского движения, заданного в полярных координатах, скорость  $\mathbf{v}$  точки  $M(\rho, \varphi)$  можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — *радиальную скорость*  $\mathbf{v}_\rho$  и *тангенциальную скорость*  $\mathbf{v}_\varphi$  (рис. I.1.2):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\varphi,$$

причем

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho[\dot{\varphi}],$$

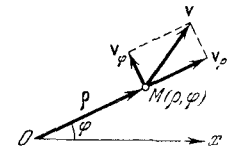


Рис. I.1.2.

где  $\rho$  — полярный радиус-вектор, проведенный из полюса  $O$  в точку  $M$ , а  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости движения точки таким образом, что из его конца вращение радиус-вектора  $\rho$  в сторону увеличения угла  $\varphi$  видно происходящим против часовой стрелки. Численные значения радиальной и тангенциальной скоростей точки равны алгебраическим значениям проекций ее скорости  $\mathbf{v}$  на направления радиус-вектора  $\rho$  и прямой, проведенной

перпендикулярно к  $\rho$  в сторону возрастания угла  $\varphi$ :

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}.$$

**Пример.** Движение точки задано уравнениями:  $x = at \cos bt$ ,  $y = at \sin bt$  и  $z = 0$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты. В полярных координатах уравнения движения точки будут:  $\rho = at$  и  $\varphi = bt$ . Следовательно,  $\dot{\rho} = a$ ,  $\dot{\varphi} = b$ ,

$$v_\rho = a, \quad v_\varphi = abt \quad \text{и} \quad v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = a\sqrt{1 + b^2 t^2}.$$

3° Движение точки называется *равномерным*, если численное значение ее скорости не зависит от времени ( $v = \text{const}$ ). Длина пути, пройденного равномерно движущейся точкой, является линейной функцией времени:

$$s = v(t - t_0).$$

4° *Средней скоростью* точки в промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется скалярная величина  $v_{\text{ср}}$ , равная отношению длины пути  $\Delta s$ , пройденного точкой за этот промежуток времени, к его продолжительности  $\Delta t$ :

$$v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  средняя скорость совпадает с численным значением  $v$  скорости точки в момент времени  $t$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t).$$

В случае равномерного движения  $v_{\text{ср}} = v$ .

*Вектором средней скорости* точки  $\mathbf{v}_{\text{ср}}$  в промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется отношение приращения  $\Delta \mathbf{r}$  радиус-вектора точки за этот промежуток времени к его продолжительности  $\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  вектор средней скорости совпадает с вектором скорости точки в момент времени  $t$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

При равномерном прямолинейном движении точки  $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \mathbf{v}$ . Модуль вектора  $\mathbf{v}_{\text{ср}}$  совпадает со средней ска-

лярной скоростью  $v_{\text{ср}}$  только в тех случаях, когда точка движется прямолинейно с неизменной по направлению скоростью  $\mathbf{v}$ . Во всех остальных случаях  $|v_{\text{ср}}| < v_{\text{ср}}$ .

5° *Секториальной (секторной) скоростью* точки по отношению к какому-либо полюсу называется скалярная величина  $\sigma$ , равная первой производной по времени от площади  $S$  поверхности, описываемой радиус-вектором этой точки, проведенным из полюса:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  — радиус-вектор и скорость точки, а  $r$  и  $v$  — модули этих векторов. Если движение точки происходит в плоскости, а полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат  $xOy$ , взятой на этой плоскости, то

$$\sigma = \frac{1}{2} (xv_y - yv_x) = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi},$$

где  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки.

### 3. Ускорение

1° *Ускорением* (или *мгновенным ускорением*) называется векторная величина  $\mathbf{w}$ , характеризующая быстроту изменения скорости движущейся точки и равная первой производной от скорости по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, проходящей через главную нормаль и касательную к траектории, и направлен в сторону вогнутости траектории.

Проекции  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  ускорения на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Отсюда

$$\mathbf{w} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{w}| = w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

В цилиндрических координатах

$$w = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}.$$

В сферических координатах

$$w = [(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - r\dot{\vartheta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + r\ddot{\varphi} \sin \vartheta + \\ + 2r\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)^2]^{1/2}.$$

2° В случае плоского движения, заданного в полярных координатах, ускорение  $\mathbf{w}$  точки  $M(\rho, \varphi)$  можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — *радиальное ускорение*  $\mathbf{w}_\rho$  и *трансверсальное ускорение*  $\mathbf{w}_\varphi$  (рис. 1.1.3):

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\rho + \mathbf{w}_\varphi,$$

причем

$$\mathbf{w}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \quad \mathbf{w}_\varphi = (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \left[ \mathbf{k} \frac{\rho}{\rho} \right],$$

где смысл векторов  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{k}$  такой же, как в формулах для  $\mathbf{v}_\rho$  и  $\mathbf{v}_\varphi$  (стр. 19). Численные значения радиального и трансверсального ускорений точки равны алгебраическим значениям проекций ее ускорения  $\mathbf{w}$  на направление соответственно полярного радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}$  и прямой, проведенной перпендикулярно к  $\boldsymbol{\rho}$  в сторону возрастания угла  $\varphi$ :

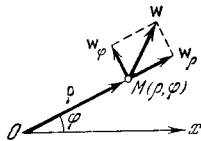


Рис. 1.1.3.

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}.$$

Пример. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями:  $\rho = a + bt$ ,  $\varphi = ct$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — постоянные коэффициенты;

$$\dot{\rho} = b, \quad \dot{\varphi} = c \quad \text{и} \quad \ddot{\rho} = \ddot{\varphi} = 0.$$

Следовательно,

$$w_\rho = -c^2(a + bt), \quad w_\varphi = 2bc$$

и

$$w = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2} = c \sqrt{c^2(a + bt)^2 + 4b^2}.$$

3° В соприкасающейся плоскости, проведенной в произвольной точке траектории, вектор ускорения  $\mathbf{w}$  можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\mathbf{w}_n$  и  $\mathbf{w}_\tau$ :  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_\tau$ .

Составляющая  $\mathbf{w}_n$ , направленная вдоль главной нормали к траектории, называется *нормальным ускорением*, а составляющая  $\mathbf{w}_\tau$ , направленная вдоль касательной

к траектории, называется *касательным ускорением*. Их численные значения равны:

$$w_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{и} \quad w_\tau = \dot{v},$$

так что

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \dot{v}^2},$$

где  $v$  — численное значение скорости, а  $R$  — радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение  $w_n$  всегда направлено к центру кривизны траектории.

4° Движение точки называется *ускоренным*, если численное значение ее скорости возрастает с течением времени, т. е.  $w_\tau > 0$ . Движение точки называется *замедленным*, если численное значение ее скорости убывает с течением времени, т. е.  $w_\tau < 0$ . В случае равномерного движения  $w_\tau = 0$ . При ускоренном движении вектор  $\mathbf{w}_\tau$  совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{v}$  скорости движения точки, а при замедленном он направлен в сторону, противоположную направлению вектора  $\mathbf{v}$ . Величины  $w_\tau$  и  $w_n$  характеризуют быстроту изменения соответственно численного значения и направления скорости движущейся точки. Движение, в котором численное значение касательного ускорения постоянно,  $w_\tau = \text{const}$ , называется *равнопеременным*.

5° Средним ускорением точки в промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется вектор  $\mathbf{w}_{cp}$ , равный отношению приращения  $\Delta \mathbf{v}$  скорости  $\mathbf{v}$  точки за этот промежуток времени к его продолжительности  $\Delta t$ :

$$\mathbf{w}_{cp}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  среднее ускорение совпадает с мгновенным ускорением в момент времени  $t$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{w}_{cp}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}(t).$$

#### 4. Поступательное и вращательное движения абсолютно твердого тела

1° *Поступательным* называется такое движение абсолютно твердого тела, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. Все точки тела, движущегося

поступательно, в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории полностью совмещаются при параллельном переносе. Поэтому кинематическое рассмотрение поступательного движения абсолютно твердого тела сводится к изучению движения любой его точки. В самом общем случае поступательно движущееся твердое тело обладает тремя степенями свободы.

2° Движение абсолютно твердого тела, при котором две его точки  $A$  и  $B$  остаются неподвижными, называется *вращением* (вращательным движением) вокруг неподвижной прямой  $AB$ , называемой *осью вращения*. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости — перпендикулярны к ней. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, обладает одной степенью свободы: его положение полностью

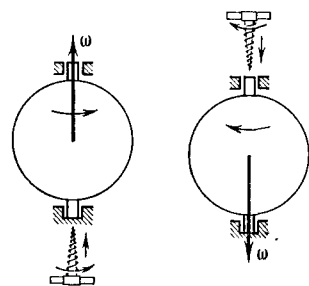


Рис. I.1.4.

определяется заданием угла  $\varphi$  поворота из некоторого начального положения.

3° *Угловой скоростью* вращения твердого тела называется вектор  $\omega$ , численно равный первой производной от угла поворота по времени,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

и направленный вдоль оси вращения таким образом, чтобы из его конца вращение тела было видно происходящим против часовой

стрелки (рис. I.1.4). Направление вектора  $\omega$  совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом (рис. I.1.4).

4° *Линейная скорость*  $v$  произвольной точки  $M$  вращающегося тела определяется по *формуле Эйлера* (рис. I.1.5):

$$v = [\omega r],$$

нальню ее расстоянию  $R$  от оси вращения:

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega R.$$

Проекции  $v_x, v_y$  и  $v_z$  вектора  $v$  на оси прямоугольной декартовой системы координат связаны с проекциями на эти оси векторов  $\omega$  и  $r$  следующими формулами:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

5° *Периодом обращения*  $T$  тела называется время, в течение которого тело поворачивается вокруг неподвижной оси вращения на угол  $\varphi = 2\pi$ :

$$\int_0^T \omega dt = 2\pi.$$

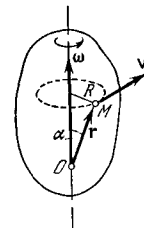


Рис. I.1.5.

Число оборотов  $n$ , совершаемое телом за единицу времени, равно

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \omega dt.$$

6° Движение абсолютно твердого тела, при котором одна из его точек остается неподвижной, называется *вращением вокруг неподвижной точки (центра)*. Это движение в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через неподвижную точку. Положение мгновенной оси вращения непрерывно изменяется как по отношению к системе отсчета, связанной с самим вращающимся телом (*подвижная система*), так и по отношению к *неподвижной системе отсчета*, связанной с окружающими его неподвижными телами. Уравнения мгновенной оси вращения имеют вид:

$$v = [\omega r] = 0, \\ \frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z},$$

где  $\omega$  — векторная,  $\omega_x, \omega_y$  и  $\omega_z$  — скалярные функции времени  $t$ . Исключив из последнего уравнения параметр  $t$ , получают уравнение *аксида* — поверхности, описываемой в пространстве мгновенной осью вращения.

Тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, обладает тремя степенями свободы: его положение относительно неподвижной системы отсчета полностью определяется заданием трех координат (например, двух направляющих косинусов какой-либо оси, проходящей через неподвижную точку тела и жестко связанной с ним, а также угла поворота тела вокруг этой оси).

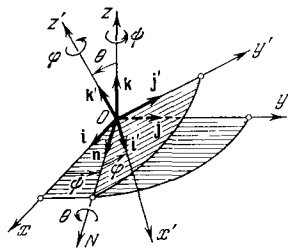


Рис. I.1.6.

В качестве независимых координат обычно выбирают три угла Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  (рис. I.1.6).  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  — оси неподвижной прямоугольной правой декартовой системы координат;  $Ox'$ ,  $Oy'$  и  $Oz'$  — оси аналогичной подвижной системы координат;  $i$ ,  $j$ ,  $k$  и  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  — единичные векторы координатных осей;  $O$  — неподвижный центр; линия  $ON$  пересечения плоскостей  $xOy$  и  $x'Oy'$  называется *линией узлов*. Линия узлов перпендикулярна  $k$  плоскости  $zOz'$ , а единичный вектор  $n$ , определяющий положительное направление на линии узлов, совпадает по направлению с векторным произведением  $[kk']$ , т. е. тройка векторов  $k$ ,  $k'$  и  $n$  имеет ту же ориентацию, что и орты координатных осей.

Угол  $\psi$  между осями  $Ox$  и  $ON$  называется *углом прецессии*. Угол  $\theta$  между осями  $Oz$  и  $Oz'$  называется *углом нутации*. Угол  $\varphi$  между осями  $ON$  и  $Ox'$  называется *углом чистого вращения*. Углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  отсчитываются в направлениях, которые определяются правилом правого винта, т. е. соответствуют изображенным на рис. I.1.6 направлениям вращения вокруг осей:  $Oz$  — для угла  $\psi$ ,  $ON$  — для угла  $\theta$  и  $Oz'$  — для угла  $\varphi$ . Углы Эйлера изменяются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \psi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Проекции вектора  $\omega$  угловой скорости тела на оси неподвижной ( $x, y, z$ ) и подвижной ( $x', y', z'$ ) систем координат удовлетворяют *кинематическим уравнениям*

Эйлера для твердого тела:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_x' &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_y' &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \\ \omega_z' &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

7° *Угловым ускорением* называется вектор  $\epsilon$ , равный первой производной от вектора угловой скорости по времени:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения во времени вектора угловой скорости тела. При вращении вокруг неподвижной оси направление вектора  $\omega$  сохраняется и

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

причем вектор  $\epsilon$  совпадает по направлению с  $\omega$  в случае ускоренного вращения ( $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} > 0$ ) и противоположен ему по направлению в случае замедленного вращения ( $\epsilon = \frac{d\omega}{dt} < 0$ ).

*Линейное ускорение* произвольной точки  $M$  ( $r$ ) вращающегося тела равно

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega r] = [\epsilon r] + [\omega[\omega r]].$$

8° Вектор  $w_{вр} = [\epsilon r]$ , направленный перпендикулярно к плоскости, образуемой векторами  $\epsilon$  и  $r$ , называется *вращательным ускорением*. Вектор  $w_{ц} = [\omega[\omega r]]$ , перпендикулярный к оси вращения и направленный от точки  $M$  к оси, называется *осеостремительным ускорением*. В случае вращения тела вокруг неподвижной оси векторы  $w_{вр}$  и  $w_{ц}$  тождественны соответственно касательному (тангенциальному) и нормальному ускорениям:

$$w_{вр} = w_{\tau} = [\epsilon r], \quad w_{ц} = w_n = [\omega[\omega r]] = (\omega r)\omega - \omega^2 r.$$

**5. Абсолютное, относительное и переносное движения**

1° *Абсолютным движением* точки называется ее движение по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (стр. 33), условно принимаемой за неподвижную и называемой *абсолютной системой отсчета*<sup>1)</sup>. *Относительным движением* точки называется ее движение по отношению к подвижной системе отсчета, которую также называют *относительной системой отсчета*. *Переносным движением* называется абсолютное движение той точки подвижной (относительной) системы, через которую движущаяся точка проходит в рассматриваемый момент времени.

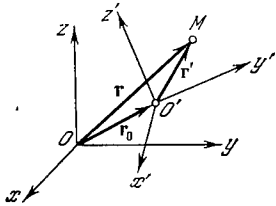


Рис. I.1.7.

Выбор абсолютной и относительной систем отсчета условен. Он зависит от постановки задачи и подчинен основной цели — максимальному упрощению ее решения.

2° Связь между радиус-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  движущейся точки  $M$ , проведенными соответственно из начала  $O$  неподвижной системы отсчета  $(x, y, z)$  и начала  $O'$  подвижной системы  $(x', y', z')$ , имеет вид (рис. I.1.7)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'),$$

где  $x', y'$  и  $z'$  — проекции  $\mathbf{r}'$  на оси подвижной системы, а  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$  — орты этих осей.

*Абсолютная скорость*  $\mathbf{v}_a$  точки  $M(\mathbf{r})$  равна

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}'.$$

*Относительная скорость*  $\mathbf{v}_r$  точки  $M(\mathbf{r}')$  равна

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}'}{dt},$$

1) Термины «абсолютное движение» и «абсолютная система отсчета» неудачны, так как согласно механическому принципу относительности (стр. 46) все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны.

где  $\frac{\tilde{d}\mathbf{r}'}{dt}$  — относительная производная по времени от радиус-вектора  $\mathbf{r}'$ , вычисляемая в предположении постоянства направления ортов  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$  подвижной системы отсчета.

Изменение во времени ортов  $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$  может быть обусловлено только вращением подвижной системы координат. Если угловая скорость этого вращения равна  $\boldsymbol{\omega}$ , то

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}'], \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}'], \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}'].$$

Следовательно<sup>1)</sup>,

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] + \mathbf{v}_r,$$

где  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0$  — скорость поступательного движения подвижной системы, а  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$  — *переносная скорость* точки  $M$ .

Абсолютная скорость движения точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей (*закон сложения скоростей*):

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r.$$

3° *Абсолютное ускорение*  $\mathbf{w}_a$  точки  $M(\mathbf{r})$  равно

$$\mathbf{w}_a = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + [\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_r] + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt}.$$

*Относительное ускорение*  $\mathbf{w}_r$  точки  $M(\mathbf{r}')$  равно

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}'.$$

*Переносное ускорение*  $\mathbf{w}_0$  точки  $M$  равно

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0 + [\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']], \quad \text{где } \mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

1) Если начала подвижной и неподвижной систем координат всегда совпадают, то

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Эта связь между абсолютной и относительной производными по времени справедлива не только для радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , но и для любого вектора, приложенного в общем начале подвижной и неподвижной систем координат.



Поворотное, или *кориолисово*, ускорение  $w_k$  равно

$$w_k = 2[\omega v_r].$$

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме ее переносного, поворотного и относительного ускорений:

$$W_a = W_e + W_k + w_r.$$

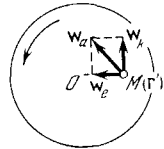
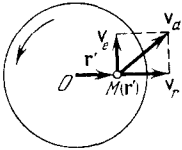


Рис. 1.1.8.

точки  $M(r')$  диска равны (рис. 1.1.8):

$$v_0 = 0, \quad v_e = [\omega_2 r'], \quad v_r = v_1, \quad v_a = [\omega_2 r'] + v_1,$$

$$v_a = \sqrt{(\omega_2 r')^2 + v_1^2},$$

$$w_e = [\omega_2 [\omega_2 r']] = -\omega_2^2 r', \quad w_k = 2[\omega_2 v_1], \quad w_r = 0,$$

$$w_a = -\omega_2^2 r' + 2[\omega_2 v_1], \quad w_a = \omega_2 \sqrt{(\omega_2 r')^2 + 4v_1^2}.$$

### 6. Некоторые случаи сложения движений твердого тела

1° Тело одновременно участвует в нескольких поступательных движениях со скоростями  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ . Его результирующее движение является также поступательным со скоростью  $v$ , равной векторной сумме скоростей  $v_1, v_2, \dots, v_k$ :

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_k = \sum_{i=1}^k v_i.$$

2° Тело одновременно участвует в поступательном движении со скоростью  $v_0$  и во вращении с угловой скоростью  $\omega$ . Результирующая скорость  $v$  произвольной точки  $M$  тела равна

$$v = v_0 + [\omega r],$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный в точку  $M$  из какой-либо точки оси вращения.

Если  $\omega \perp v_0$ , то движение тела называется *мгновенным плоскопараллельным движением*: скорости всех точек тела в рассматриваемый момент времени направлены перпендикулярно к вектору  $\omega$ .

3° Тело одновременно участвует в двух вращательных движениях: вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг некоторой оси  $A_1 B_1$ , которая в свою очередь вращается с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг неподвижной оси  $A_2 B_2$ . Рассматривая первое вращение как относительное движение, а второе — как переносное (стр. 28), получаем следующие значения переносной  $v_e$ , относительной  $v_r$  и абсолютной  $v$  скоростей произвольной точки  $M$  тела:

$$v_e = [\omega_2 r_0] + [\omega_2 r'] = [\omega_2 r],$$

$$v_r = [\omega_1 r'] = [\omega_1 r] - [\omega_1 r_0],$$

$$v = v_e + v_r = [(\omega_1 + \omega_2) r] - [\omega_1 r_0],$$

где  $r, r'$  и  $r_0$  — радиус-векторы, имеющие тот же смысл, что и на рис. 1.1.7.

4° Сложение вращений вокруг пересекающихся осей  $A_1 B_1$  и  $A_2 B_2$ . Совместив начала подвижной и неподвижной систем отсчета с точкой пересечения осей (рис. 1.1.9), получим:

$$r_0 = 0 \quad \text{и} \quad v = [(\omega_1 + \omega_2) r].$$

Одновременное вращение тела вокруг двух пересекающихся осей  $A_1 B_1$  и  $A_2 B_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в каждый момент времени эквивалентно вращению этого тела вокруг мгновенной оси  $AB$  с угловой скоростью  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

5° Сложение вращений вокруг параллельных осей ( $\omega_1 \neq -\omega_2$ ). Проведем вектор  $r_0$  перпендикулярно к осям вращения (рис. 1.1.10) и положим  $r = r_1 + d$ , где  $d = \frac{r_0}{k+1}$ ,

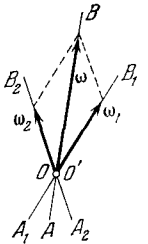


Рис. 1.1.9.

причем  $k = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$ , если векторы  $\omega_2$  и  $\omega_1$  направлены в одну и ту же сторону, и  $k = -\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$ , если векторы направлены в противоположные стороны. Тогда  $\omega_2 = k\omega_1$ ,  $\omega_1 + \omega_2 = (k+1)\omega_1$  и  $v = [(\omega_1 + \omega_2) r_1]$ . Одновременное вращение тела вокруг двух параллельных осей  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_1 \neq -\omega_2$ ) в каждый момент времени эквивалентно вращению с угловой скоростью  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  вокруг параллельной им мгновенной оси  $AB$ , положение которой относительно осей  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  определяется указанным выше значением вектора  $d$ .

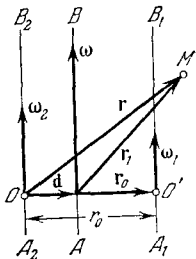


Рис. 1.1.10.

Вращение тела вокруг параллельных осей с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2 = -\omega_1$  называется *парой вращений*. В этом случае результирующая скорость всех точек тела одинакова и равна  $v = [-\omega_1 r_0]$ , где  $r_0$  — радиус-вектор, соединяющий точки  $O$  и  $O'$  осей (рис. 1.1.10). Тело движется поступательно со скоростью  $v$ , направленной перпендикулярно к плоскости, в которой находятся векторы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

## ГЛАВА 2

### ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

#### 1. Первый закон Ньютона

1° *Первый закон Ньютона*: всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.

Этот закон называют *законом инерции*, а движение материальной точки, свободной от внешних воздействий, — *движением по инерции*.

2° Всякое механическое движение *относительно*: его характер зависит от выбора системы отсчета. В одно и то же время исследуемое тело по отношению к одной системе отсчета может покоиться, по отношению к другой — двигаться равномерно и прямолинейно, а по отно-

шению к третьей — двигаться с ускорением. Поэтому закон инерции справедлив не во всякой системе отсчета. Так, например, тела, неподвижно лежащие на гладком полу равномерно и прямолинейно движущегося относительно Земли железнодорожного вагона, начинают двигаться по полу всякий раз, когда движение вагона становится ускоренным.

3° *Инерциальными системами отсчета* в классической механике называются те системы, по отношению к которым выполняется закон инерции<sup>1)</sup>. С весьма большой степенью точности можно считать, что такого рода системой отсчета является *гелиоцентрическая* система отсчета, начало координат которой совпадает с центром инерции солнечной системы, а оси проведены в направлении удаленных звезд.

Любая система отсчета, покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы, сама является инерциальной. Наоборот, всякая система, движущаяся ускоренно по отношению к инерциальной системе, является *неинерциальной*.

4° Система отсчета, жестко связанная с Землей (*геоцентрическая* система отсчета), неинерциальна, главным образом, вследствие суточного вращения Земли. Экспериментальным подтверждением этого и одним из доказательств существования суточного вращения Земли является опыт с маятником Фуко — тяжелым телом (обычно шаром), подвешенным на длинной нити и могущим свободно качаться в любом направлении практически без трения в подвесе. Положение плоскости качаний такого маятника по отношению к инерциальной системе отсчета должно быть неизменным: на маятник действуют силы тяжести и реакция нити, лежащие в этой плоскости. Однако по отношению к земной системе отсчета плоскость качаний маятника Фуко постепенно поворачивается с угловой скоростью

$$\omega_M = \omega \sin \varphi,$$

где  $\omega$  — угловая скорость суточного вращения Земли, а  $\varphi$  — географическая широта места наблюдения. Макси-

<sup>1)</sup> Обобщение этого понятия на случай релятивистской механики сделано в теории относительности (стр. 519): инерциальными называются те системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции и скорость света в вакууме является универсальной постоянной

маленькое ускорение точек земной поверхности не превосходит 0,5% ускорения свободного падения. Поэтому в большинстве практических задач геоцентрическую систему отсчета можно приближенно считать инерциальной.

## 2. Сила

1° Сила — векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей. Сила полностью задана, если указаны ее численное значение, направление и точка приложения.

Взаимодействие между телами, как это следует из первого закона Ньютона, является причиной изменения состояния их движения. Кроме того, оно вызывает также деформацию тел. Измеряя деформации  $x_1$  и  $x_2$  одного и того же упругого тела под действием двух одинаково направленных сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных в одной и той же точке, можно сравнивать численные значения этих сил:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Этот метод, основанный на законе Гука (стр. 282), реализуется в пружинных весах и динамометрах.

2° Действие на материальную точку  $A$  (рис. 1.2.1) нескольких тел с силами  $F_1, F_2, \dots, F_k$  эквивалентно действию одной силы, называемой *равнодействующей силой* и равной векторной сумме этих сил:

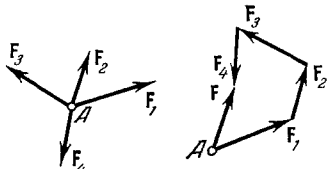


Рис. 1.2.1.

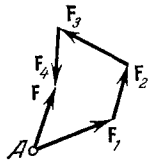


Рис. 1.2.2.

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i.$$

Равнодействующая сила представляет собой замыкающую многоугольника, построенного на силах  $F_1, F_2, \dots, F_k$  (рис. 1.2.2). Проекции

этой силы на оси декартовой системы координат равны алгебраическим суммам соответствующих проекций всех сил  $F_i$ :

$$F_x = \sum_{i=1}^k F_{ix}, \quad F_y = \sum_{i=1}^k F_{iy}, \quad F_z = \sum_{i=1}^k F_{iz}.$$

*Линией действия силы  $F_i$*  называется прямая, вдоль которой направлен вектор  $F_i$ . Воздействие на абсолютно твердое тело не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия (предполагается, что точки приложения силы либо принадлежат телу, либо жестко связаны с ним). Следовательно, силы, приложенные к абсолютно твердому телу, можно рассматривать как скользящие векторы.

3° *Системой скользящихся сил (пучком сил)* называется совокупность сил, приложенных к одному и тому же абсолютно твердому телу так, что их линии действия пересекаются в одной точке  $O$  (рис. 1.2.3). Переноса эти силы вдоль линий их действия в точку  $O$ , получим систему сил, приложенных в одной и той же точке и эквивалентных одной равнодействующей силе  $F$ , которая приложена в той же точке  $O$  и равна векторной сумме

всех сил системы:  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i$ .

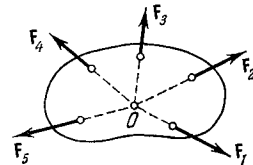


Рис. 1.2.3.

4° В самом общем случае действие на абсолютно твердое тело произвольной системы сил эквивалентно действию на тело главного момента  $M$  системы сил (стр. 70) и *главного вектора  $F$*  системы сил, равного векторной

сумме всех сил системы:  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i$ . Точка  $O$  приложе-

ния главного вектора системы сил называется *центром приведения*. Выбор этой точки совершенно произволен и влияет лишь на величину вектора главного момента  $M$ . В случае поступательного движения абсолютно твердого тела главный момент всех сил, приложенных к телу, относительно его центра инерции (стр. 37) равен нулю.

5° При рассмотрении какой-либо системы материальных точек или тел силы, действующие на некоторую точку (тело) системы со стороны других точек (тел), входящих в эту систему, называются *внутренними силами*. Силы же, обусловленные действием материальных точек или тел, не входящих в рассматриваемую систему, называются *внешними силами*.

6° *Замкнутой* или *изолированной системой* называется такая система тел (или материальных точек), на каждое из которых не действуют внешние силы.

7° *Принцип освобожденности*: всякую несвободную механическую систему можно рассматривать как свободную, если отбросить наложенные на нее связи и заменить действие на систему тел, осуществляющих связи, соответствующими силами, называемыми *реакциями связей*. Например, при перемещении тела по шероховатой плоскости ограничения, наложенные на движение тела, могут быть полностью учтены путем введения нормальной и касательной реакций плоскости. Вторая из этих сил представляет собой силу трения.

В отличие от реакций связей, все остальные силы (внешние и внутренние), приложенные к механической системе, называют *активными силами*. При рассмотрении задачи о движении механической системы все активные силы должны быть заданы, а реакции связей заранее не известны и подлежат определению в процессе решения задачи.

### 3. Масса

1° *Массой тела* называют физическую величину, являющуюся мерой его инерционных и гравитационных свойств.

В ньютоновской механике масса — величина аддитивная, т. е. масса  $m$  любой системы материальных точек (например, твердого тела) равна сумме масс  $m_i$  всех  $n$  точек этой системы:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Кроме того, в ньютоновской механике считается, что: а) масса тела не зависит от скорости его движения; б) масса изолированной системы тел (или материальных точек) не изменяется при любых происходящих в ней процессах (*закон сохранения массы*).

Инертность материальной точки проявляется в том, что под действием внешней силы эта точка приобретает конечное по величине ускорение, а в отсутствие внешних воздействий — сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения по отношению к инерциальной системе отсчета. Масса, входящая в выражение второго закона Ньютона, характеризует инерционные свойства материальной точки и называется ее *инертной массой*.

Масса материальной точки, входящая в выражение закона всемирного тяготения, характеризует гравитационные свойства этой точки и называется ее *гравитационной (тяжелой) массой*.

На основании весьма точных экспериментов установлено, что для всех тел отношения их инертных масс к гравитационным одинаковы. Поэтому при соответствующем выборе величин гравитационной постоянной (стр. 47) можно считать, что для любого тела его инертная и гравитационная массы равны друг другу и связаны с силой тяжести  $P$  этого тела соотношением  $m = P/g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. Как показывает опыт, в одной и той же точке наблюдения ускорения свободного падения для всех тел одинаковы. Поэтому отношение масс двух тел равно отношению их сил тяжести:  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1}$ . На этом основано сравнение масс тел с помощью рычажных весов.

2° *Плотностью тела*  $\rho$  называется предел отношения массы  $\Delta m$  элемента тела к его объему  $\Delta V$  при  $\Delta V$ , стремящемся к нулю:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Масса всего тела равна

$$m = \int_0^V \rho dV,$$

где интегрирование распространено на весь объем  $V$  тела. В случае однородного тела его плотность постоянна по всему объему  $V$  и масса тела  $m = \rho V$ .

Средней плотностью  $\rho_{\text{ср}}$  неоднородного тела называется отношение массы тела к его объему:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}.$$

3° *Центром инерции* или *центром масс* системы материальных точек называется точка  $C(x_c, y_c, z_c)$ , радиус-вектор  $\mathbf{r}_c$  которой связан с массами  $m_i$  и радиус-векторами  $\mathbf{r}_i$  всех  $n$  точек системы соотношением

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

так что

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Координаты центра инерции тела равны:

$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_V ex dV}{m}, \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_V ey dV}{m},$$

$$z_c = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int_V ez dV}{m}.$$

Если тело однородное, то

$$x_c = \frac{1}{V} \int x dV, \quad y_c = \frac{1}{V} \int y dV, \quad z_c = \frac{1}{V} \int z dV.$$

В прямоугольных декартовых координатах

$$dV = dx dy dz, \quad \int_V x dV = \iiint_V x dx dy dz \quad \text{и т. д.}$$

4° *Количеством движения (импульсом)* материальной точки называется вектор  $\mathbf{K}_i$ , равный произведению массы  $m_i$  точки на ее скорость  $\mathbf{v}_i$ :

$$\mathbf{K}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

Количеством движения системы  $n$  материальных точек называется вектор  $\mathbf{K}$ , равный геометрической сумме количеств движения всех точек системы:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i.$$

Для тела

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{v} dm = \int_V \rho \mathbf{v} dV.$$

Количество движения системы материальных точек равно произведению массы  $m$  всей системы на скорость  $\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}$  ее центра инерции:  $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$ . Скорость  $\mathbf{v}_c$  представляет собой скорость поступательного движения системы.

#### 4. Второй закон Ньютона

1° *Второй закон Ньютона*: первая производная по времени от импульса (количества движения) материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\mathbf{K}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i.$$

*Элементарным импульсом силы*  $\mathbf{F}_i$  за время  $dt$  называется вектор  $\mathbf{F}_i dt$ . *Импульс силы*  $\mathbf{F}_i$  за конечный промежуток времени  $\Delta t$  равен  $\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_i dt$ . Если сила  $\mathbf{F}_i$  постоянна, то ее импульс за время  $\Delta t$  равен  $\mathbf{F}_i \Delta t$ .

Второй закон Ньютона можно также сформулировать следующим образом: элементарное изменение количества движения материальной точки равно элементарному импульсу действующей на нее силы:

$$d(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i dt;$$

так как  $m_i = \text{const}$ , то

$$\mathbf{w}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}.$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать еще так: ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе, обратно пропорционально массе точки и совпадает по направлению с силой.

Уравнение, определяющее связь  $\mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{F}_i$ , называется *дифференциальным уравнением движения* точки. В прямоугольных декартовых, цилиндрических и сферических координатах оно имеет вид:

а) декартовы координаты

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix}; \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy}; \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz};$$

б) цилиндрические координаты

$$m_i (\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\varphi}_i^2) = F_{i\rho}, \quad m_i (\rho_i \ddot{\varphi}_i + 2\dot{\rho}_i \dot{\varphi}_i) = F_{i\varphi}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz},$$

где  $F_{i\rho}$  и  $F_{i\varphi}$  — проекции силы  $\mathbf{F}_i$  соответственно на направления прямой  $OM'$  (рис. 1.1.1, б, где  $M$  — движущаяся материальная точка с массой  $m_i$ ) и прямой, проведенной в плоскости  $xOy$  перпендикулярно к  $OM'$  в направлении возрастания угла  $\varphi$ ;

в) сферические координаты

$$m_i(\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 \sin^2 \vartheta_i - r_i\dot{\vartheta}_i^2) = F_{ir},$$

$$m_i[(r_i\ddot{\varphi}_i + 2\dot{r}_i\dot{\varphi}_i) \sin \vartheta_i + 2r_i\dot{\varphi}_i\dot{\vartheta}_i \cos \vartheta_i] = F_{i\varphi},$$

$$m_i(2\dot{r}_i\dot{\vartheta}_i + r_i\ddot{\vartheta}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 \sin \vartheta_i \cos \vartheta_i) = F_{i\vartheta},$$

где  $F_{ir}$  — проекция силы  $\mathbf{F}_i$  на направление прямой  $OM$  (рис. 1.1.1, в),  $F_{i\varphi}$  — проекция  $\mathbf{F}_i$  на направление прямой, проведенной в плоскости  $xOy$  перпендикулярно к  $OM'$  в направлении возрастания угла  $\varphi$ ,  $F_{i\vartheta}$  — проекция  $\mathbf{F}_i$  на направление прямой, проведенной в плоскости  $OMM'$  перпендикулярно к  $OM$  в направлении возрастания угла  $\vartheta$ .

2° *Принцип независимости действия сил*: если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке ускорение, определяемое вторым законом Ньютона так, как если бы других сил не было. Поэтому результирующее ускорение точки можно определить по второму закону Ньютона, подставляя в него результирующую силу  $\mathbf{F}_i$ .

3° В соприкасающейся плоскости ускорение материальной точки и действующую на нее силу можно разложить на нормальные и тангенциальные составляющие:

$$m_i(\mathbf{w}_{in} + \mathbf{w}_{it}) = \mathbf{F}_{in} + \mathbf{F}_{it},$$

причем

$$\mathbf{F}_{in} = m_i \mathbf{w}_{in} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_{it} = m_i \mathbf{w}_{it}.$$

Нормальная сила численно равна (стр. 23)

$$F_{in} = m_i w_{in} = \frac{m_i v_i^2}{R_i}$$

и направлена к центру кривизны траектории материальной точки. Поэтому ее часто называют *центростремительной силой*. В случае круговой траектории радиуса  $R_i$  сила  $F_{in} = m_i \omega_i^2 R_i$ , где  $\omega_i$  — угловая скорость обращения точки.

Касательная сила численно равна (стр. 23)

$$F_{it} = m_i w_{it} = m_i \dot{v}_i.$$

Если  $\dot{v}_i > 0$ , то сила  $\mathbf{F}_{it}$  совпадает по направлению с вектором скорости  $\mathbf{v}_i$  и называется *движущей силой*; если  $\dot{v}_i < 0$ , то сила  $\mathbf{F}_{it}$  противоположна по направлению скорости  $\mathbf{v}_i$  и называется *тормозящей силой*.

### 5. Третий закон Ньютона

Действия двух материальных точек друг на друга численно равны и направлены в противоположные стороны:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (i \neq j),$$

где  $\mathbf{F}_{ij}$  — сила, действующая на  $i$ -ю точку со стороны  $j$ -й, а  $\mathbf{F}_{ji}$  — сила, действующая на  $j$ -ю точку со стороны  $i$ -й. Эти силы приложены к разным точкам и могут взаимно уравновешиваться только в том случае, когда точки  $i$  и  $j$  принадлежат одному и тому же абсолютно твердому телу.

### 6. Основной закон динамики поступательного движения

1° Производная по времени от количества движения  $\mathbf{K}$  материальной точки или системы материальных точек относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета равна главному вектору  $\mathbf{F}$  всех внешних сил, приложенных к системе:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad m\mathbf{w}_c = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{w}_c$  — ускорение центра инерции системы, а  $m$  — ее масса.

В случае поступательного движения твердого тела с абсолютной скоростью  $\mathbf{v}$  скорость центра инерции  $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}$ . Поэтому при рассмотрении поступательного движения твердого тела это тело можно мысленно заменить материальной точкой, совпадающей с центром инерции тела, обладающей всей его массой и движущейся под действием главного вектора внешних сил, приложенных к телу. Таким образом, масса тела служит мерой его инертности в поступательном движении.

В проекциях на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат уравнения основного закона динамики поступательного движения системы имеют вид:

$$\frac{dK_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = F_z,$$

или

$$m w_{cx} = F_x, \quad m w_{cy} = F_y, \quad m w_{cz} = F_z.$$

2° Простейшие случаи поступательного движения твердого тела.

а) Движение по инерции ( $\mathbf{F} = 0$ ):

$$m\mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{w} = 0.$$

б) Движение под действием постоянной силы:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} = \text{const}, \quad m\mathbf{v} = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0,$$

где  $m\mathbf{v}_0$  — количество движения тела в начальный момент времени  $t = 0$ .

Пример. Движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту. Тело движется под действием постоянной

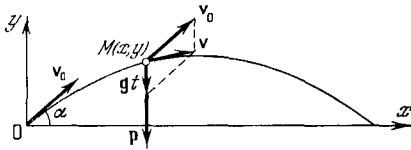


Рис. 1.2.4.

силы тяжести  $\mathbf{P}$ , направленной вертикально вниз (рис. 1.2.4). Для произвольной точки  $M(x, y)$  траектории тела

$$\begin{aligned} m\mathbf{v} &= \mathbf{P}t + m\mathbf{v}_0, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \\ v_x &= v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \\ x &= v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Наибольшая высота подъема:

$$y_{\text{макс}} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}.$$

Наибольшая дальность полета вдоль горизонтальной оси  $x$ :

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

в) Движение под действием переменной силы. Изменение количества движения тела за промежуток времени

от  $t_1$  до  $t_2$  равно

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_{\text{ср}}(t_2 - t_1),$$

где  $\mathbf{F}_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$  — среднее значение вектора силы в интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

## 7. Закон сохранения количества движения

1° Количество движения замкнутой системы с течением времени не изменяется:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const}.$$

Это один из основных законов природы, вытекающий из однородности пространства (стр. 107). В проекциях на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат он записывается в виде системы трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i &= a_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i &= a_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i &= a_3, \end{aligned} \right\}$$

где  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$  — проекции на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  вектора  $\mathbf{v}_i$  скорости  $i$ -й точки системы, а  $a_1, a_2$  и  $a_3$  — постоянные величины, равные проекциям на оси координат вектора  $\mathbf{K}$  количества движения системы.

2° Закон сохранения количества движения показывает, что взаимодействие тел, составляющих замкнутую систему, приводит только к обмену количествами движения между этими телами, но не может изменить движения системы как целого: при любом взаимодействии между телами, образующими замкнутую систему, скорость движения центра инерции этой системы не изменяется, т. е.

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость центра инерции, а  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$  — его декартовы координаты.

Если система тел не замкнута, но проекция главного вектора  $\mathbf{F}$  всех внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция на эту ось вектора количества движения системы не зависит от времени. Например, при  $F_x = 0$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = \text{const.}$$

### 8. Движение тела переменной массы

1° Дифференциальное уравнение поступательного движения абсолютно твердого тела, масса  $m$  которого зависит от времени, имеет вид

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \mathbf{v}_1 \frac{dm}{dt},$$

где  $\mathbf{F}$  — главный вектор всех сил, действующих на тело,  $\mathbf{v}_1$  — скорость присоединяющейся массы до присоединения (если  $\frac{dm}{dt} > 0$ ) или скорость отделяющейся массы после отделения (если  $\frac{dm}{dt} < 0$ ).

2° Ускорение  $\mathbf{w}$  тела переменной массы равно

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m} (\mathbf{F} + \mathbf{F}_p),$$

где

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt}$$

— реактивная сила, равная произведению производной по времени от массы тела на относительную скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$  присоединяющейся или отделяющейся массы.

Пример 1. Реактивная сила, создаваемая воздушно-реактивным двигателем. Эта сила  $\mathbf{F}_p$  равна векторной сумме двух реактивных сил, одновременно создаваемых поступающим в двигатель воздухом  $\mathbf{F}_{p1}$  и выбрасываемыми из него продуктами сгорания  $\mathbf{F}_{p2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2}, \\ \mathbf{F}_{p1} &= \mathbf{u}_1 \frac{dm_1}{dt}, \quad \mathbf{F}_{p2} = -\mathbf{u}_2 \left( \frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right), \\ \mathbf{F}_p &= (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \frac{dm_1}{dt} - \mathbf{u}_2 \frac{dm_2}{dt}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}$  — относительная скорость воздуха,  $\mathbf{v}$  — скорость полета,  $\mathbf{u}_2$  — относительная скорость продуктов сгорания на выходе из двигателя,  $\frac{dm_1}{dt}$  — секундный массовый расход воздуха,  $\frac{dm_2}{dt}$  — секундный массовый расход топлива.

Пример 2. Движение ракеты в условиях отсутствия внешнего силового воздействия. Сила тяги ракеты получается из предыдущей формулы в предположении, что  $\mathbf{u}_1 = 0$  (окислитель, как и топливо, находится в самой ракете):

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{u}_2 \frac{dm}{dt},$$

где  $\frac{dm}{dt}$  — скорость уменьшения массы ракеты за счет выгорания топлива. Уравнение движения ракеты:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_2 \frac{dm}{dt},$$

где  $\mathbf{v}$  и  $m$  — скорость и масса ракеты в произвольный момент времени  $t$ . Векторы  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  и  $\mathbf{u}_2$  направлены в противоположные стороны, поэтому

$$m \frac{dv}{dt} = -u_2 \frac{dm}{dt},$$

откуда при  $u_2 = \text{const}$  следует уравнение К. Э. Циолковского:

$$v = v_0 + u_2 \ln \frac{m_0}{m},$$

где  $v_0$  и  $m_0$  — начальные значения скорости и массы ракеты (при  $t = 0$ ).

### 9. Механический принцип относительности

1° Координаты и время в двух произвольных инерциальных системах отсчета связаны преобразованием Галилея:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_e t) \quad (\mathbf{v}_e = \text{const}), \\ t' &= t, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы движущейся точки в первой и второй системах отсчета,  $\mathbf{v}_e$  — скорость равномерного и прямолинейного движения второй системы по отношению к первой, а  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор, проведенный из начала первой системы в начало второй системы в



момент времени  $t = 0$ . Второе условие ( $t' = t$ ) выражает *абсолютный* характер времени в классической механике, т. е. одинаковость его течения во всех инерциальных системах отсчета (стр. 33).

2° Скорости и ускорения материальной точки в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}.$$

Ускорение какой-либо материальной точки во всех инерциальных системах одинаково.

В самом общем случае силы, действующие на материальную точку со стороны других тел или создаваемых ими полей, зависят от расстояний между точкой и этими телами, разностей между скоростями движения точки и тел, а также от времени. Из формул преобразования Галилея следует, что все эти величины во всех инерциальных системах одинаковы:

$$\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Поэтому одинаковы и силы, действующие на движущуюся материальную точку:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}.$$

Следовательно,

$$\frac{F'}{w'} = \frac{F}{w} = m,$$

т. е. уравнения движения материальной точки и систем этих точек одинаковы во всех инерциальных системах отсчета — *инвариантны* по отношению к преобразованию Галилея.

3° Этот результат можно сформулировать в виде *механического принципа относительности*: равномерное и прямолинейное движение (относительно инерциальной системы отсчета) замкнутой системы не влияет на ход протекающих в ней механических процессов.

Иными словами, в механике все инерциальные системы равноправны. Поэтому в рамках классической механики нет никаких оснований для выделения какой-либо определенной «главной» системы отсчета, по отно-

шению к которой покой и движение тел можно было бы считать абсолютными.

Дальнейшее обобщение принципа относительности сделано в теории относительности (стр. 519).

## 10. Закон всемирного тяготения

1° Между любыми двумя материальными точками действуют *силы взаимного притяжения*, прямо пропорциональные произведению масс этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними (рис. 1.2.5):

$$\mathbf{F}_{12} = f \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R},$$

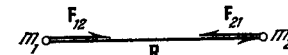


Рис. 1.2.5.

где  $\mathbf{F}_{12}$  — сила тяготения, действующая на точку с массой  $m_1$ ,  $\mathbf{R}_{12}$  — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку, обладающую массой  $m_2$ ,  $R = |\mathbf{R}_{12}|$  — расстояние между точками. Коэффициент  $f$  называется *гравитационной постоянной (постоянной тяготения)*. Он численно равен силе взаимного притяжения между двумя материальными точками, которые обладают одинаковыми массами, равными единице массы, и находятся друг от друга на расстоянии, равном единице длины. Гравитационная постоянная определяется опытным путем. Ее численное значение зависит только от выбора системы единиц измерения:

$$f = (6,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-11} \frac{\text{н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} = (6,67 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \frac{\text{дин} \cdot \text{см}^2}{\text{г}^2}.$$

По третьему закону Ньютона сила  $\mathbf{F}_{21}$ , действующая на материальную точку с массой  $m_2$ , численно равна силе  $\mathbf{F}_{12}$ , но направлена в противоположную сторону:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -f \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R} = f \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\mathbf{R}_{21}}{R}.$$

2° Достаточно малые элементы двух тел произвольной формы и размеров можно считать материальными точками, массы которых равны произведениям их объемов ( $dV_1$  и  $dV_2$ ) на плотности ( $\rho_1$  и  $\rho_2$ ). Поэтому сила тяготения  $d\mathbf{F}_{12}$ , действующая на элемент первого тела со стороны элемента второго тела, равна

$$d\mathbf{F}_{12} = f \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} dV_1 dV_2.$$

Результирующая сила  $F_{12}$  притяжения первого тела вторым равна

$$F_{12} = f \int_{V_1} \rho_1 dV_1 \int_{V_2} \frac{\rho_2}{r_{12}^2} F_{12} dV_2,$$

где интегрирование проводится по полным объемам  $V_1$  и  $V_2$  обоих тел. В случае однородных тел их плотности постоянны и

$$F_{12} = f \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} dV_1 \int_{V_2} \frac{F_{12}}{r_{12}^2} dV_2.$$

Для двух твердых тел шарообразной формы, плотность каждого из которых зависит только от расстояния до его центра,

$$F_{12} = f \frac{m_1 m_2}{R^3} R_{12},$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы обоих тел,  $R_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий центры первого и второго тел, а  $R = |R_{12}|$ .

Эта формула справедлива также и в том случае, когда одно из тел имеет произвольную форму, но его размеры во много раз меньше радиуса второго тела.

3° Силой тяжести материальной точки называется сила  $P$ , равная векторной разности между силой  $F$  тяготения этой материальной точки к Земле и центробежной силой  $F_{ц}$  обуславливающей участие материальной точки в суточном вращении Земли (рис. 1.2.6):

$$P = F - F_{ц},$$

причем

$$F_{ц} = m\omega^2 R \cos \varphi,$$

где  $m$  — масса точки,  $\omega$  — угловая скорость суточного вращения Земли,  $R$  — радиус Земли, а  $\varphi$  — географическая широта места наблюдения  $A$ .

Сила тяжести максимальна на полюсах и минимальна на экваторе. Однако это различие не превышает 0,55%. Сила тяжести тела равна геометрической сумме сил тя-

жести всех материальных точек, входящих в состав тела. Точку приложения этой силы называют *центром тяжести* тела. Центр тяжести тела совпадает с его центром инерции (стр. 37).

4° Свободным падением называется движение тела, происходящее под действием только его силы тяжести. Ускорение свободного падения (*ускорение силы тяжести*)  $g = P/m$ . Оно одинаково для всех тел и зависит от географической широты и высоты над уровнем моря. Численные значения  $g$  (в см/сек<sup>2</sup>) ускорения свободного падения на небольших высотах  $h$  (в м) над уровнем моря можно вычислять по приближенной формуле

$$g = 978,049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,0003086 h - 0,041.$$

Стандартное (нормальное) значение  $g$ , принятое для барометрических расчетов и при построении систем единиц, равно 980,665 см/сек<sup>2</sup>.

В большинстве технических расчетов пренебрегают зависимостью  $g$  от  $\varphi$  и полагают  $g = 981$  см/сек<sup>2</sup>, а для определения изменения  $g$  при удалении от поверхности Земли пользуются приближенной формулой

$$g = f \frac{M}{(R_0 + h)^2} = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2,$$

где  $M$  — масса Земли,  $R_0 = 6370$  км — средний радиус Земли, а  $g_0 = 981$  см/сек<sup>2</sup>.

5° Весом тела называют силу, с которой это тело действует вследствие тяготения к Земле на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Если тело и опора неподвижны относительно Земли, то вес тела равен его силе тяжести.

Удельным весом тела называется физическая величина  $\gamma$ , равная пределу отношения численного значения  $\Delta P$  силы тяжести элемента тела к его объему  $\Delta V$  при неограниченном уменьшении  $\Delta V$ :

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}.$$

Сила тяжести всего тела численно равна

$$P = \int (V) \gamma dV,$$

где интегрирование распространено на весь объем  $V$  тела.

Средним удельным весом  $\gamma_{\text{ср}}$  неоднородного тела называется отношение численного значения силы тяжести тела к его объему:

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{P}{V}.$$

Связь между удельным весом и плотностью тела имеет вид

$$\gamma = \rho g, \quad \gamma_{\text{ср}} = \rho_{\text{ср}} g.$$

### 11. Гравитационное поле

1° Тяготение между телами осуществляется через *гравитационное поле (поле тяготения)*, которое, наряду с другими физическими полями и веществом, является одной из форм материи. Отличительная особенность гравитационного поля состоит в том, что на помещенную в него материальную точку действует сила тяготения, прямо пропорциональная массе этой точки. Векторной характеристикой гравитационного поля является его *напряженность  $\mathbf{g}$* , которая равна отношению силы тяготения  $\mathbf{F}$ , действующей на материальную точку, к величине ее массы  $m$ :  $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$ .

2° *Потенциальный* характер сил тяготения (стр. 64) позволяет ввести скалярную характеристику гравитационного поля — *потенциал  $\varphi$* , связанный с  $\mathbf{g}$  соотношением

$$\mathbf{g} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}\right).$$

Между гравитационным и электростатическим полями (стр. 343) существует формальная аналогия, являющаяся результатом внешнего сходства между выражениями для силы взаимного притяжения двух материальных точек (стр. 47) и силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов (стр. 342). Поэтому для нахождения напряженности и потенциала гравитационного поля, создаваемого произвольной системой материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , можно воспользоваться выражениями для напряженности и потенциала электростатического поля геометрически тождественной системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , заменив в этих выражениях, написанных в системе единиц СИ, величины  $q_i/4\pi\epsilon_0$  на  $-fm_i$ , где  $f$  — гравитационная постоянная,

Так, например, для гравитационного поля, создаваемого материальной точкой с массой  $M$ , находящейся в начале координат,

$$\mathbf{g} = -f \frac{M}{r^2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \varphi = -f \frac{M}{r} + C,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки поля,  $C$  — произвольная постоянная, зависящая от выбора начала отсчета  $\varphi$ .

Эти выражения справедливы также для гравитационного поля шара массы  $M$ , плотность которого изменяется только в радиальном направлении, а радиус поверхности меньше  $r$ .

В общем случае потенциал  $\varphi$  гравитационного поля, создаваемого произвольно распределенными в пространстве массами, удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi f \rho, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -4\pi f \rho,$$

где  $\rho = dm/dV$  — объемная плотность распределения массы, а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = -f \int \frac{\rho dV}{r},$$

где  $r$  — расстояние от элемента объема  $dV$  с массой  $dm = \rho dV$  до рассматриваемой точки поля, а интегрирование проводится по всему объему  $V$ , занятому массами, создающими поле.

3° *Невесомость* называют состояние механической системы, при котором действующее на систему внешнее гравитационное поле не вызывает взаимного давления частей системы друг на друга. В состоянии невесомости тело, подвешенное на пружине, не вызывает никакой деформации пружины, а тело, лежащее неподвижно на опоре, не оказывает на нее никакого силового воздействия.

Состояние невесомости возникает в любой системе при соблюдении следующих условий: а) на систему не действуют никакие иные внешние силы, кроме сил гравитационного поля; б) размеры системы не слишком велики, так что в каждый момент времени напряженности гравитационного поля во всех точках системы одинаковы; в) система движется поступательно. Эти условия реализуются, например, в свободном падающем лифте, в искусственных спутниках Земли и космических кораблях,

совершающих свободный полет, т. е. движущихся с выключенными двигателями.

4° Закон всемирного тяготения Ньютона и построенная на его основе так называемая *нерелятивистская теория поля тяготения* являются приближенными. Эта теория достаточно точно описывает движение тела в поле тяготения только в тех случаях, когда поле сравнительно слабое, т. е. его потенциал  $|\varphi| \ll c^2$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, а скорость тела  $v \ll c$ .

Современная теория тяготения, основанная на теории относительности, была сформулирована А. Эйнштейном (так называемая *общая теория относительности*). Она представляет собой объединенную теорию пространства, времени и тяготения. Согласно этой теории геометрические свойства (метрика) четырехмерного пространства-времени (стр. 520) не являются неизменными, а зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и их движения. Массы, создающие поле тяготения, «искривляют» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяют ход времени в различных точках этого пространства, т. е. вызывают отклонение метрики пространства-времени от метрики «плоского» пространства-времени, описываемого геометрией Евклида и рассматриваемого в специальной теории относительности (стр. 519). В связи с этим в гравитационном поле элементарный интервал  $ds$  (стр. 521) между двумя мировыми точками (стр. 520) имеет вид

$$ds^2 = \sum_{k=0}^2 g_{ik} dx^i dx^k = g_{00}(dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + \dots + g_{33}(dx^3)^2,$$

где  $x^0 = ct$  — временная координата,  $x^1, x^2$  и  $x^3$  — пространственные координаты, а  $g_{ik} = g_{ki}$ . Это выражение никаким преобразованием координат нельзя привести во всем пространстве-времени к виду  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ , характерному для «плоского» (евклидова) пространства-времени. Такое приведение возможно только для бесконечно малой окрестности какой-либо одной мировой точки.

Мировая линия (стр. 520), соответствующая движению свободной материальной точки в гравитационном поле, представляет собой геодезическую линию в четырехмерном пространстве-времени, т. е. линию, вдоль которой интеграл  $\int ds$  между какими-либо двумя мировыми точками

имеет экстремальное значение. Вследствие «кривизны» пространства-времени геодезические линии в нем не являются прямыми. Соответственно материальная точка, подверженная действию гравитационного поля, движется в реальном трехмерном пространстве не прямолинейно и не равномерно.

Расчет поля тяготения в теории Эйнштейна сводится к нахождению зависимостей  $g_{ik}$  от пространственных координат и времени для заданной системы тел, создающих поле. Система уравнений гравитационного поля линейна относительно  $g_{ik}$ . Поэтому для гравитационных полей не выполняется принцип суперпозиции. Он приближенно верен лишь при наложении достаточно слабых гравитационных полей, к которым применима нерелятивистская теория.

## 12. Внешнее трение

1° Различают два основных типа трения — внутреннее и внешнее. *Внутренним трением* или *вязкостью* называется явление возникновения касательных сил, препятствующих перемещению частей жидкости или газа друг по отношению к другу (стр. 210). *Внешним трением* называется взаимодействие между телами, возникающее в месте их соприкосновения и препятствующее их относительному перемещению. В зависимости от характера относительного движения тел различают: *трение скольжения*, возникающее при поступательном перемещении одного тела по поверхности другого, и *трение качения*, возникающее тогда, когда одно тело катится по поверхности другого. В чистом виде трение качения имеет место только в том случае, если линия или точка соприкосновения трущихся тел совпадает с мгновенной осью вращения катящегося тела. Во всех остальных случаях трение качения сопровождается трением скольжения.

2° Внешнее трение, происходящее между движущимися телами, называется *кинематическим*. Внешнее трение между взаимно неподвижными телами называется *трением покоя*. Оно проявляется в том, что для возникновения относительного перемещения двух соприкасающихся тел к одному из них нужно приложить внешнюю силу  $\mathbf{F} > \mathbf{F}_0$ , где  $\mathbf{F}_0$  — так называемая *предельная сила трения покоя*. Отсутствие взаимного перемещения тел при  $\mathbf{F} \leq \mathbf{F}_0$  называется *явлением застоя*. Оно широко используется в технике для передачи усилий от одних

деталей машин к другим (ременные передачи, фрикционные муфты и т. д.).

Трение скольжения между телами, поверхности которых не подвергаются смазке, называется *сухим трением*, а трение между обильно и непрерывно смазываемыми телами — *жидкостным трением*.

В зависимости от толщины слоя смазки между трущимися телами и степени шероховатости их поверхностей различают несколько переходных случаев трения скольжения: *полусухое, граничное, полужидкостное*.

3° Сила трения скольжения в случае сухого трения в основном вызывается механическим зацеплением между неровностями поверхностей тел и сцеплением между молекулами обоих тел в областях непосредственного соприкосновения. В приближенных расчетах можно считать, что сила  $F$  трения скольжения прямо пропорциональна силе  $N$  нормального давления между поверхностями трущихся тел (*закон Амонтона*):

$$F = fN,$$

где  $f$  — безразмерный коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств материала тел. В действительности коэффициент трения зависит от множества других факторов: качества обработки поверхностей трущихся тел, наличия на них загрязнений, скорости скольжения и т. д. Поэтому его определяют на основе экспериментальных данных, полученных для случаев, сходных с рассматриваемой задачей. Коэффициент  $f_0$ , соответствующий предельной силе трения покоя, обычно больше коэффициента кинематического трения.

Часто вместо коэффициента трения  $f$  пользуются *углом трения*  $\varphi$ , связанным с  $f$  соотношением  $\operatorname{tg} \varphi = f$ . Угол  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f_0$  равен тому наименьшему углу наклона плоскости к горизонту, при котором лежащее на ней тело начинает скользить вниз под действием силы тяжести.

Более точным является двучленный закон трения, установленный на основе учета влияния сил притяжения между молекулами трущихся тел:

$$F = \mu(N + Sp_0),$$

где  $\mu$  — истинный коэффициент трения,  $p_0$  — добавочное давление, вызванное силами молекулярного притяжения, а  $S$  — общая площадь всех областей непосредственного контакта между телами.

4° При качении по плоской поверхности тел, имеющих форму круглых цилиндров или шаров, возникают не только упругие, но и пластические деформации (стр. 282). Поэтому линия действия реакции  $R$  плоскости не совпадает с линией действия силы  $N$  нормального давления (рис. 1.2.7). Нормальная к плоскости составляющая  $R_n$  силы  $R$  численно равна  $N$ , а горизонтальная составляющая  $F$  представляет собой силу трения качения. В первом приближении можно считать, что

$$F = k \frac{N}{r} \quad (\text{закон Кулона}),$$

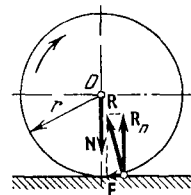


Рис. 1.2.7.

где  $r$  — радиус катящегося тела, а  $k$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины и зависящий от материала тел, состояния их поверхностей и целого ряда других факторов.

Пара сил  $R_n$  и  $N$ , приложенных к катящемуся телу, создает *момент трения*  $M$ , равный

$$M = Fr = kN.$$

### 13. Движение в неинерциальных системах отсчета

1° Относительное ускорение  $w$  точки равно разности между ее абсолютным ускорением  $w_a$  и суммой переносного  $w_e$  и кориолисова  $w_k$  ускорений (стр. 30):

$$w = w_a - (w_e + w_k).$$

Поэтому уравнение относительного движения материальной точки, обладающей массой  $m$ , в произвольной неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$mw = mw_a - (mw_e + mw_k).$$

Выбирая за абсолютную систему отсчета какую-нибудь инерциальную систему и учитывая, что для последней справедлив второй закон Ньютона ( $mw_a = F$ ), получаем:

$$mw = F + I_e + I_k,$$

где  $F$  — результирующая всех сил, действующих на материальную точку со стороны других тел, а  $I_e = -mw_e$  и  $I_k = -mw_k$  — *переносная* и *кориолисова силы инерции*.

2° Уравнение относительного движения материальной точки в произвольной неинерциальной системе отсчета формально подобно уравнению движения этой точки в инерциальной системе ( $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ ). Отличие состоит лишь в необходимости введения в правую часть уравнения двух дополнительных сил инерции. Принципиальное различие между силами инерции и обычными силами взаимодействия тел состоит в том, что для первых нельзя указать, действие каких конкретно тел на материальную точку ими описывается. Указанные выше силы инерции не следует смешивать с *даламберовой силой инерции*  $\mathbf{I}_\theta = -m\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета. Введение этой силы инерции чисто формально: оно позволяет придать уравнению динамики точки в инерциальной системе отсчета форму уравнения статики:  $\mathbf{F} + \mathbf{I}_\theta = 0$ , где  $\mathbf{F}$  — равнодействующая всех сил, приложенных к точке. В то время как переносная и кориолисова силы инерции реально действуют на точку в неинерциальной системе отсчета и могут быть измерены с помощью обычных методов (например, пружинным динамометром), даламберова сила инерции на точку не действует и поэтому не может быть измерена.

3° Силы инерции пропорциональны массам материальных точек и при прочих равных условиях сообщают этим точкам одинаковые относительные ускорения. Таким же свойством обладают силы тяготения: в одной и той же точке гравитационного поля эти силы, подобно силам инерции, пропорциональны массам материальных точек и всем им сообщают одинаковые ускорения, равные напряженности поля. Следовательно, свободное движение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению по отношению к инерциальной системе отсчета, совершающемуся под действием некоторого дополнительного («эквивалентного») гравитационного поля. Это утверждение называется *принципом эквивалентности*. Например, силам инерции, которые возникают в системе отсчета, движущейся поступательно с постоянным ускорением ( $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 = \text{const}$ ), эквивалентно однородное гравитационное поле с постоянной напряженностью  $\mathbf{g} = -\mathbf{w}_0$ .

Принцип эквивалентности отнюдь не означает тождественности сил инерции и «истинных» сил тяготения. Действительно, напряженности «истинных» гравитацион-

ных полей, создаваемых телами, стремятся к нулю по мере удаления от этих тел. Между тем напряженность гравитационного поля, «эквивалентного» силам инерции, этому условию не удовлетворяет. Так, в рассмотренном выше примере она одинакова во всех точках пространства, а в случае вращающейся системы отсчета гравитационное поле, «эквивалентное» центробежным силам инерции, даже неограниченно возрастает по мере удаления от оси вращения системы. «Эквивалентное» поле можно полностью исключить путем соответствующего выбора системы отсчета: в инерциальных системах отсчета силы инерции, а следовательно, и «эквивалентное» им гравитационное поле отсутствуют. «Истинные» гравитационные поля существуют и в инерциальных системах отсчета. Поэтому невозможно полностью исключить эти поля во всем пространстве путем изменения выбора системы отсчета и введения соответствующего поля сил инерции. Такую замену можно осуществить лишь локально, т.е. для столь малой области поля тяготения, в пределах которой это поле можно считать однородным, и для столь малого промежутка времени, в течение которого поле можно считать постоянным. Итак, «истинное» гравитационное поле эквивалентно полю сил инерции, возникающему при ускоренном движении, только в ограниченной области пространства и в течение ограниченного промежутка времени (*локальный принцип эквивалентности*).

## ГЛАВА 3

### РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

#### 1. Энергия

1° *Энергией* называется единая мера различных форм движения. Энергия — скалярная величина. Для количественной характеристики качественно различных форм движения, рассматриваемых в физике, вводятся соответствующие им виды энергии: *механическая* (стр. 63), *внутренняя* (стр. 153), *электромагнитная* (стр. 464), *химическая*, *ядерная* (стр. 808) и др.

2° *Закон сохранения и превращения энергии*: при любых процессах, происходящих в изолированной системе, ее полная энергия не изменяется.

Этот закон вытекает из однородности времени (стр. 106) и является одним из важнейших законов

природы. Он свидетельствует о том, что движение материи несотворимо и неуничтожимо: оно может лишь переходить из одних форм в другие.

3° Если система пезамкнутая, то изменение ее энергии благодаря внешним воздействиям численно равно и противоположно по знаку алгебраической сумме измененной энергии всех внешних тел и полей, взаимодействующих с системой.

4° Возможны два качественно различных способа передачи движения и соответствующей ему энергии от одного макроскопического тела к другому — в форме работы и в форме теплоты (путем теплообмена)<sup>1)</sup>.

Изменение энергии тела, осуществленное первым способом, называют *работой*, совершенной над этим телом. Соответственно изменению энергии тела, осуществленное вторым способом, называют *количеством теплоты (теплотой)*, сообщенной телу.

Передача энергии в форме работы производится в процессе силового взаимодействия тел. Поэтому можно говорить, что работа, совершенная над рассматриваемым телом, есть не что иное, как работа сил, приложенных к этому телу со стороны всех других (внешних) тел, с которыми оно взаимодействует. Работа, совершаемая над телом, может непосредственно пойти на увеличение любого вида энергии этого тела.

Передача энергии путем теплообмена между телами обусловлена различием температур этих тел и может осуществляться как при непосредственном контакте тел — теплопроводность (стр. 210 и 271) и конвективный теплообмен (стр. 327), так и через посредство испускания и поглощения электромагнитного излучения — лучистый теплообмен. Энергия, получаемая телом в форме теплоты, может непосредственно пойти только на увеличение его внутренней энергии (стр. 153).

## 2. Работа

1° Элементарная работа  $\delta A$  силы  $\mathbf{F}$ , совершаемая при перемещении  $d\mathbf{r}$  материальной точки под действием силы  $\mathbf{F}$ , равна скалярному произведению векторов  $\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{r}$ :

$$\delta A = (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = F ds \cos \alpha = F_{\tau} ds$$

<sup>1)</sup> При взаимодействии между отдельными микрочастицами (атомами, электронами и т. п.) эти понятия неприменимы, и в таких случаях говорят лишь о процессе совершения работы.

или, в декартовых координатах,

$$\delta A = F dx + F_y dy + F_z dz,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки,  $x$ ,  $y$  и  $z$  — ее декартовы координаты,  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  — проекции вектора силы на оси координат,  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{r}$ ;  $ds = |d\mathbf{r}|$  — элементарная длина пути точки вдоль траектории,  $F_{\tau} = F \cos \alpha$  — проекция силы  $\mathbf{F}$  на касательную к траектории.

Элементарная работа обозначена через  $\delta A$ , а не  $dA$ , так как в общем случае она не является полным дифференциалом, т. е. криволинейный интеграл от  $\delta A$  вдоль произвольной замкнутой траектории точки приложения силы не равен нулю, в то время как этот интеграл от полного дифференциала должен быть тождественно равен нулю. Например, работа сил трения вдоль замкнутой траектории тела может быть не равна нулю.

2° Если на материальную точку или абсолютно твердое тело действует система сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_k$ , то совершаемая при этом элементарная работа  $\delta A$  равна алгебраической сумме элементарных работ всех сил системы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^k (\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i),$$

где  $d\mathbf{r}_i$  — элементарное перемещение точки приложения силы  $\mathbf{F}_i$ .

В случае поступательного движения абсолютно твердого тела все векторы  $d\mathbf{r}_i$  одинаковы и равны  $d\mathbf{r}$ . Поэтому элементарная работа  $\delta A$  равна работе, совершаемой главным вектором  $\mathbf{F}$  системы сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_k$  (стр. 35):

$$\delta A = \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i, d\mathbf{r} \right) = (\mathbf{F} d\mathbf{r}).$$

3° В случае вращательного движения абсолютно твердого тела элементарная работа  $\delta A$  равна произведению результирующего момента  $M$  относительно оси вращения всех сил, действующих на тело (стр. 70), на элементарный угол  $d\varphi$  поворота тела вокруг этой оси:  $\delta A = M d\varphi$ .

4° Работа  $A$  силы  $\mathbf{F}$  на конечном участке  $s$  траектории перемещения ее точки приложения равна алгебраической сумме элементарных работ этой силы на всех

бесконечно малых участках траектории:

$$A = \int_0^s (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \int_0^s F_\tau ds.$$

Если  $F_\tau = \text{const}$ , то  $A = F_\tau s$ .

В случае действия на твердое тело системы сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_k$ , вызывающих поступательное движение тела,

$$A = \sum_{i=1}^k \int_0^s (\mathbf{F}_i d\mathbf{r}) = \int_0^s (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \int_0^s F_\tau ds,$$

где  $\mathbf{F}$  — главный вектор системы сил, а  $F_\tau$  — его проекция на элементарное перемещение  $d\mathbf{r}$  тела.

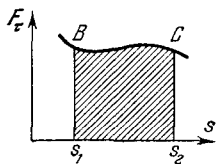


Рис. 1.3.1.

5° Если зависимость  $F_\tau$  от  $s$  задана графически (рис. 1.3.1), то работа  $A$  силы  $\mathbf{F}$  на участке траектории между точками  $B(s_1)$  и  $C(s_2)$  пропорциональна площади  $S$ , заштрихованной на рис. 1.3.1:

$$A = k_1 k_2 S,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — масштабы  $s$  и  $F_\tau$ , принятые при построении графика и показывающие соответственно, скольким единицам пути равна единица длины оси абсцисс и скольким единицам силы равна единица длины оси ординат.

### 3. Мощность

1° *Мощностью*  $N$  силы  $\mathbf{F}$  называется физическая величина, характеризующая быстроту совершения работы этой силой и равная отношению элементарной работы  $\delta A$  к промежутку времени  $dt$ , за который она совершена:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \left( \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (\mathbf{F}\mathbf{v}).$$

Мощность силы равна скалярному произведению этой силы на скорость перемещения ее точки приложения:

$$N = F_\tau v,$$

где  $F_\tau$  — проекция силы  $\mathbf{F}$  на направление вектора  $\mathbf{v}$ . В том случае, когда тело с массой  $m$  движется под действием силы  $\mathbf{F}$  поступательно,  $F_\tau = m\dot{v}$  и  $N = mv\dot{v}$ .

2° В случае произвольного движения абсолютно твердого тела результирующая мощность равна алгебраической сумме мощностей всех сил, действующих на тело:

$$N = \sum_{i=1}^k \left( \mathbf{F}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i),$$

где  $\mathbf{v}_i$  — скорость движения точки приложения силы  $\mathbf{F}_i$ .

3° Мощность силы или системы сил, вызывающих вращательное движение абсолютно твердого тела, равна произведению результирующего момента этих сил относительно оси вращения на угловую скорость тела:

$$N = M\omega.$$

### 4. Силовая функция

1° Силы, действующие на материальную точку или тело, называются *потенциальными*, если работа этих сил при перемещении точки (тела) зависит только от начального и конечного положений точки (тела) в пространстве. Иными словами, работа потенциальной силы  $\mathbf{F}$  вдоль произвольной замкнутой траектории движения ее точки приложения тождественно равна нулю:

$$\oint (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \equiv 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение (т. е. элементарная работа силы  $\mathbf{F}$ ) было полным дифференциалом некоторой скалярной функции координат  $U(x, y, z)$ , называемой *силовой функцией*:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU.$$

Отсюда

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

или

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } U.$$

Потенциальная сила  $\mathbf{F}$  равна градиенту силовой функции  $U$ .

Пример 1. Для гравитационного взаимодействия двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , отстоящих



друг от друга на расстоянии  $R$  (стр. 47),

$$U = f \frac{m_1 m_2}{R}.$$

Пример 2. Для электростатического взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $R$  (стр. 342),

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{R}.$$

2° В самом общем случае потенциальные силы и силовая функция могут явно зависеть не только от координат, но и от времени  $t$  ( $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \neq 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$ ). Такие силы называются *нестационарными*. В случае нестационарных сил при вычислении интеграла  $\oint (\mathbf{F} d\mathbf{r})$  время нужно считать фиксированным параметром.

Работа  $A$ , совершаемая стационарной потенциальной силой  $\mathbf{F}$  при конечном перемещении точки ее приложения из точки 1 ( $x_1, y_1, z_1$ ) в точку 2 ( $x_2, y_2, z_2$ ), равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках:

$$A = \int_1^2 (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

В случае нестационарной потенциальной силы эта формула верна лишь для мгновенного процесса переноса точки ее приложения, так как в противном случае подынтегральное выражение

$$(\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

не является полным дифференциалом функции  $U(x, y, z, t)$ .

3° Силы, действующие на материальную точку или тело, называются *непотенциальными*, если работа этих сил зависит от пути перемещения точки (тела).

Примером непотенциальных сил являются силы кинематического трения. Обычно они направлены в сторону, противоположную направлению элементарного перемещения  $d\mathbf{r}$ , так что  $\oint (\mathbf{F}_T, d\mathbf{r}) < 0$ .

### 5. Механическая энергия

1° *Механической энергией*  $W$  называется энергия механического движения и взаимодействия тел. Она равна сумме кинетической  $W_K$  и потенциальной  $W_{II}$  энергий<sup>1)</sup>:

$$W = W_K + W_{II}.$$

2° *Кинетическая энергия* тела является мерой его механического движения и измеряется той работой, которую может совершить это тело при его торможении до полной остановки. Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы  $m$  точки на квадрат скорости  $v$  ее движения:

$$W_K = \frac{mv^2}{2}.$$

В случае плоского движения, заданного в полярных координатах  $(\rho, \varphi)$ ,

$$W_K = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2).$$

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в его состав, и выражается следующим интегралом:

$$W_K = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV,$$

где  $dm$  — масса малого элемента тела,  $dV$ ,  $\rho$  и  $v$  — объем, плотность и модуль скорости этого элемента, а  $m$  и  $V$  — масса и объем всего тела.

В случае поступательного движения тела со скоростью  $v$

$$W_K = \frac{mv^2}{2}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то его кинетическая энергия равна половине произведения момента инерции тела  $J$  относительно оси вращения (стр. 71) на квадрат угловой скорости  $\omega$ :

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2}.$$

<sup>1)</sup> В аналитической механике кинетическую энергию принято обозначать через  $T$ , потенциальную — через  $U$ , а механическую — через  $E$ .

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, выражается той же формулой, где  $J$  — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

В самом общем случае кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью  $\mathbf{v}_c$  ее центра инерции и кинетической энергии  $W'_K$  системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре инерции (*теорема Кенигса*):

$$W_K = \sum_{i=1}^k \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m v_c^2}{2} + W'_K,$$

где

$$W'_K = \sum_{i=1}^k \frac{m_i v_i'^2}{2}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c.$$

В частности, кинетическая энергия тела, которое движется поступательно со скоростью  $\mathbf{v}$  и одновременно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр инерции тела, равна

$$W_K = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}.$$

Примером такого движения является качение шара или цилиндра по плоскости.

3° *Потенциальной энергией* называют часть энергии механической системы, зависящую от *конфигурации системы*, т. е. от взаимного расположения частиц системы и их положения во внешнем силовом поле. Ее измеряют той работой, которую совершают потенциальные силы (внешние и внутренние), действующие на все частицы системы, при переходе<sup>1)</sup> от рассматриваемой конфигурации системы к такой, которую называют *нулевой конфигурацией*, и для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Выбор нулевой конфигурации, т. е. начала отсчета потенциальной энергии, совершенно произволен, так как в любом опыте можно измерить только изменение потенциальной энергии, но не ее абсолютное значение. В каждой конкретной задаче этот выбор производится так, чтобы максимально упростить ее решение.

<sup>1)</sup> Если потенциальные силы нестационарны, то при этом переходе время  $t$  считается фиксированным параметром.

Потенциальная энергия  $W_{II}$ , подобно силовой функции  $U$  (стр. 61), характеризует данное потенциальное силовое поле и связана с ней соотношениями:

$$dW_{II} = -dU \quad \text{и} \quad W_{II} = -U + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Потенциальная энергия системы  $W_{II} = W_{II}^{\text{внеш}} + W_{II}^{\text{внутр}}$ . Здесь  $W_{II}^{\text{внеш}}$  — *внешняя потенциальная энергия системы*, обусловленная действием на нее внешних потенциальных сил, т. е. сил, приложенных со стороны тел, не входящих в состав системы, а  $W_{II}^{\text{внутр}}$  — *внутренняя потенциальная энергия системы*, обусловленная потенциальными силами взаимодействия между всеми ее частями. В общем случае  $W_{II}^{\text{внутр}}$  зависит от координат всех  $n$  материальных точек, входящих в состав системы:  $W_{II}^{\text{внутр}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ , а  $W_{II}^{\text{внеш}}$  может также зависеть явно от времени  $t$ :  $W_{II}^{\text{внеш}} = f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t)$ . Это связано с тем, что внешние тела, действующие на рассматриваемую систему, могут двигаться относительно системы отсчета (закон этого движения в каждой конкретной задаче предполагается заданным).

Если  $\mathbf{F}_i^{\text{внеш}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t)$  — результирующая всех внешних потенциальных сил, действующих на  $i$ -ую материальную точку системы, то

$$\frac{dW_{II}^{\text{внеш}}}{dt} = \frac{\partial W_{II}^{\text{внеш}}}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i),$$

где  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ ,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -й точки. В случае стационарного внешнего силового поля

$$\frac{\partial W_{II}^{\text{внеш}}}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad dW_{II}^{\text{внеш}} = - \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i) dt.$$

Внутренняя потенциальная энергия системы равна алгебраической сумме потенциальных энергий  $W_{ik}$  взаимодействия всевозможных пар точек системы:

$$W_{II}^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k>i}^n W_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n W_{ik},$$

где  $W_{ik} = - \int (\mathbf{F}_{ik}, d\mathbf{r}_{ik}) + \text{const} = - \int (\mathbf{F}_{ki}, d\mathbf{r}_{ki}) + \text{const} = W_{ki}$ ,  $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$  — потенциальные силы взаимодействия  $i$ -й и  $k$ -й точек системы. В случае абсолютно твердого тела  $W_{\Pi}^{\text{внутр}} = \text{const}$  и можно считать, что  $W_{\Pi} = W_{\Pi}^{\text{внеш}}$ .

**Пример 1.** Потенциальная энергия упруго деформированного тела (потенциальная энергия недеформированного тела принимается равной нулю) равна

$$W_{\Pi} = \int_V w_{\Pi} dV,$$

где  $w_{\Pi}$  — объемная плотность потенциальной энергии, численно равная энергии деформации единицы объема тела ( $w_{\Pi} = \frac{dW_{\Pi}}{dV}$ ), а интегрирование проводится по всему объему  $V$  тела. В простейшем случае линейного растяжения или сжатия изотропного тела вдоль оси  $Ox$  в нем возникают потенциальные силы упругости, равнодействующая  $\mathbf{F}$  которых по закону Гука (стр. 282) равна  $\mathbf{F} = -a\mathbf{x}$ , где  $a$  — коэффициент упругости, зависящий от формы и размеров тела, а также от упругих свойств его материала,  $\mathbf{x}$  — вектор, численно равный деформации тела и совпадающий по направлению с вызвавшей ее внешней силой. Так как  $F_x = -ax$ , а  $F_y = F_z = 0$ , то  $U = -ax^2/2$  и

$$W_{\Pi} = \frac{ax^2}{2}.$$

**Пример 2.** Потенциальная энергия тела в гравитационном поле. Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на материальную точку со стороны гравитационного поля, равна произведению напряженности  $g$  этого поля на массу  $m$  точки (стр. 50):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m \text{grad } \varphi = -\text{grad } (m\varphi) = \text{grad } U,$$

где  $\varphi$  — потенциал поля (стр. 50), а  $U = -m\varphi + C$  — силовая функция (стр. 61). Потенциальная энергия материальной точки в гравитационном поле равна произведению ее массы  $m$  на потенциал  $\varphi$  в рассматриваемой точке поля:

$$W_{\Pi} = m\varphi.$$

Землю в первом приближении можно считать шаром, плотность которого изменяется только вдоль радиуса. Поэтому потенциал гравитационного поля Земли в точке, отстоящей от центра Земли на расстоянии  $r$ , равен (стр. 51)  $\varphi = -f \frac{M}{r} + C$ , где  $M$  — масса Земли, а  $r \geq R_0$  — радиуса Земли.

Потенциальная энергия тела с массой  $m$ , находящегося в гравитационном поле Земли, равна

$$W_{\Pi} = -f \frac{mM}{r} + mC$$

или, при  $W_{\Pi} = 0$  на поверхности Земли ( $r = R_0$ ),

$$W_{\Pi} = fmM \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} \right).$$

## 6. Закон сохранения механической энергии

1° Элементарное изменение кинетической энергии системы  $n$  материальных точек равно алгебраической сумме элементарных работ всех сил (внешних и внутренних), действующих на точки системы:

$$dW_K = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где  $\mathbf{F}_i$  — результирующая всех сил, приложенных к  $i$ -й материальной точке.

Элементарное изменение механической энергии системы (стр. 63) равно

$$dW = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n (\mathbf{f}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где  $W_{\Pi}$  — потенциальная энергия системы, а  $\mathbf{f}_i$  — результирующая всех непотенциальных сил, действующих на  $i$ -ю материальную точку системы. Если все силы потенциальны, то полная производная по времени от механической энергии системы равна частной производной по времени от потенциальной энергии этой системы:  $\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t}$ .

2° Система тел (материальных точек) называется *консервативной*, если все внешние силы, действующие на

эти тела, являются стационарными и потенциальными, а все внутренние силы потенциальны<sup>1)</sup>. Потенциальная энергия консервативной системы не зависит явно от времени. Поэтому

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad W = W_K + W_{II} = \text{const.}$$

Механическая энергия консервативной системы сохраняется неизменной в процессе движения системы. Этот результат называется *законом сохранения механической энергии*. В частности, он справедлив для любой замкнутой системы тел, силы взаимодействия между которыми потенциальны. Если эти силы непотенциальны (например, есть силы трения), то механическая энергия замкнутой системы уменьшается.

3° Система тел называется *диссипативной*, если ее механическая энергия с течением времени уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии (например, во внутреннюю энергию хаотического движения частиц, составляющих эти тела). Этот процесс уменьшения механической энергии системы называется *диссипацией энергии*.

## 7. Удар

1° *Ударом* называется явление конечного изменения скоростей твердых тел за весьма малый промежуток времени  $\tau$ , происходящее при их столкновениях. В процессе деформации тел при ударе возникают *мгновенные (ударные) силы*, величина которых весьма значительна. Для системы соударяющихся тел мгновенные силы являются внутренними силами. Их импульсы за время  $\tau$  продолжительности удара называются *мгновенными импульсами*. Они во много раз больше импульсов за то же время всех внешних сил, приложенных к системе. Поэтому в процессе удара влиянием внешних сил можно пренебречь и считать, что система соударяющихся тел является замкнутой, т. е. в ней выполняются законы сохранения количества движения (стр. 43) и момента количества движения (стр. 79). Рассматривая соударяющиеся тела как систему, состоящую из  $n$  материальных

<sup>1)</sup> Если система несвободна, то необходимо, чтобы наложенные на нее связи были идеальными (стр. 90) и стационарными (стр. 18).

точек, получаем:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i$$

и

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{u}_i],$$

где  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{u}_i$  — скорости материальной точки с массой  $m_i$  соответственно до и после удара, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор этой точки.

2° Общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называется *линией удара*. Удар называется *прямым*, если скорости центров инерции соударяющихся тел перед ударом параллельны линии удара. В противном случае удар называется *косым*. Удар называется *центральный*, если при ударе центры инерции соударяющихся тел лежат на линии удара.

**Пример 1.** Прямой центральный удар двух тел, движущихся поступательно. Скорости тел до удара  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  и после него  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  направлены вдоль одной прямой — оси  $Ox$ , проходящей через центры инерции тел. Проекции этих скоростей на ось  $Ox$  связаны соотношениями:

$$u_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + m_2(1+k)v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{m_1(1+k)v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1 + m_2},$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2},$$

где величины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $u_1$  и  $u_2$  положительны или отрицательны в зависимости от того, как направлен соответствующий вектор скорости (вдоль положительного направления оси  $Ox$  или в противоположную сторону). Величина  $k$  называется *коэффициентом восстановления*. Она равна отношению абсолютных значений относительных скоростей тел после и до удара и зависит только от упругих свойств соударяющихся тел. Уменьшение кинетической энергии тел в результате удара равно

$$-\Delta W_K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2).$$

Эта часть механической энергии системы преобразуется в ее внутреннюю энергию. Если ударные силы потен-

циальны, то удар называется *воплне упругим* и  $k = 1$ . Удар называется *неупругим*, если после него тела движутся с одинаковой скоростью, т. е.  $u_1 = u_2$  и  $k = 0$ . Во всех остальных случаях удар называется *не вполне упругим* и  $0 < k < 1$ .

**Пример 2.** Косой центральный удар двух поступательно движущихся тел. При ударе изменяются только нормальные составляющие скоростей тел, параллельные линии удара:

$$u_{1n} = \frac{(m_1 - km_2)v_{1n} + m_2(1+k)v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$u_{2n} = \frac{m_1(1+k)v_{1n} + (m_2 - km_1)v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

причем коэффициент восстановления

$$k = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}.$$

## ГЛАВА 4

### ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

#### 1. Момент силы

1° *Моментом*  $M_i$  *силы относительно точки*  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора  $r_i$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор силы  $F_i$ :

$$M_i = [r_i, F_i].$$

Проекция  $M_{ix}$ ,  $M_{iy}$  и  $M_{iz}$  вектора  $M_i$  на оси прямоугольной декартовой системы координат с центром в точке  $O$  связаны с проекциями на эти оси векторов  $r_i$  и  $F_i$  соотношениями:

$$M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}, \quad M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz},$$

$$M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты точки приложения силы  $F_i$ .

2° *Моментом силы относительно оси* называется скалярная величина, равная проекции на данную ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси.

*Главным моментом*  $M$  системы  $k$  сил называется вектор, равный сумме векторов моментов всех сил си-

стемы относительно центра приведения (стр. 35):

$$M = \sum_{i=1}^k M_i = \sum_{i=1}^k [r_i, F_i].$$

Главные моменты  $M$  и  $M'$  одной и той же системы сил для двух различных центров приведения  $O$  и  $O'$  связаны соотношением

$$M' = M - [r_{O'O}, F],$$

где  $F = \sum_{i=1}^k F_i$  — главный вектор системы сил, а  $r_{O'O}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $O'$ .

Момент системы сил относительно оси равен проекции на эту ось главного момента системы сил, соответствующего какой-либо точке той же оси.

#### 2. Момент инерции

1° *Моментом инерции тела* относительно оси называется величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от той же оси. Моменты инерции тела относительно осей прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(V)} (y^2 + z^2) \rho dV =$$

$$= \int \int \int_{(V)} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz,$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(V)} (x^2 + z^2) \rho dV =$$

$$= \int \int \int_{(V)} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz,$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV =$$

$$= \int \int \int_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

где  $m, \rho$  и  $V$  — масса, плотность и объем тела, а  $x, y$  и  $z$  — координаты элементарной частицы тела, имеющей

объем  $dV$  и массу  $dm$ . Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс относительно оси.

Величины  $r_x = \sqrt{J_x/m}$ ,  $r_y = \sqrt{J_y/m}$  и  $r_z = \sqrt{J_z/m}$  называются *радиусами инерции тела* относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Для дискретной системы  $n$  материальных точек

$$J_x = \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i, \quad J_y = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i,$$

$$J_z = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

2° *Теорема Штейнера*: момент инерции  $J_a$  тела относительно произвольной оси  $a$  равен сумме момента инерции  $J_{a'}$  этого тела относительно оси  $a'$ , параллельной оси  $a$  и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $d$  между осями  $a$  и  $a'$  (аналогично для произвольной системы материальных точек):

$$J_a = J_{a'} + md^2.$$

Таким образом, момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр инерции, меньше момента инерции относительно любой параллельной ей оси.

3° *Центробежными моментами инерции тела* по отношению к осям прямоугольной системы координат ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) называются следующие выражения:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy \, dm = \int_{(V)} xy \rho \, dV = \iiint_{(V)} xy \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz \, dm = \int_{(V)} xz \rho \, dV = \iiint_{(V)} xz \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yz \, dm = \int_{(V)} yz \rho \, dV = \iiint_{(V)} yz \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Для системы  $n$  материальных точек

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i.$$

4° Моменты инерции твердого тела  $J_a$  относительно всевозможных осей  $a$ , проходящих через какую-либо точку  $O$ , связаны с моментами инерции этого тела по

отношению к осям координатной системы ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ), начало которой совпадает с  $O$ , следующим соотношением:

$$J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы, образуемые осью  $a$  соответственно с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Ось  $Ox$  называется *главной осью инерции тела*, если центробежные моменты инерции  $J_{xy}$  и  $J_{xz}$  одновременно равны нулю. Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные оси инерции  $Ox'$ ,  $Oy'$  и  $Oz'$  так, что

$$J_a = J_1 \cos^2 \alpha' + J_2 \cos^2 \beta' + J_3 \cos^2 \gamma',$$

где  $\alpha'$ ,  $\beta'$  и  $\gamma'$  — углы, образуемые осью  $a$  с осями  $Ox'$ ,  $Oy'$  и  $Oz'$ , а  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — моменты инерции тела по отношению к главным осям инерции в точке  $O$ , называемые *главными моментами инерции*.

5° Если через точку  $O$  твердого тела провести всевозможные оси  $a$  и вдоль каждой из них отложить отрезки  $OA$ , численно равные  $1/\sqrt{J_a}$ , то геометрическое место точек  $A$  будет представлять собой эллипсоид, называемый *эллипсоидом инерции* тела в точке  $O$ . Главные оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции тела в точке  $O$ . Уравнения эллипсоида инерции в системах координат ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) и ( $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$ ) имеют вид:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1, \\ J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = 1.$$

*Центральным эллипсоидом инерции* твердого тела называется эллипсоид инерции, соответствующий центру инерции этого тела. Главные оси центрального эллипсоида инерции тела называются *главными центральными осями инерции*, а моменты инерции тела относительно этих осей — *главными центральными моментами инерции*. Главная центральная ось инерции является главной осью инерции во всех точках тела, принадлежащих этой оси.

6° Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из его главных центральных осей инерции. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то любая перпендикулярная к ней прямая является

главной осью инерции в точке пересечения этой прямой с плоскостью симметрии.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки  $O$ , называется *телом вращения в динамическом смысле*, если его эллипсоид инерции для точки  $O$  представляет собой эллипсоид вращения. Ось вращения эллипсоида инерции называется *осью динамической симметрии тела*.

7° Главные центральные моменты инерции некоторых однородных тел простейшей формы ( $m$  — масса тела).

1) Прямолинейный тонкий стержень длиной  $l$ , расположенный вдоль оси  $Oz$ :

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} ml^2, \quad J_z = 0.$$

2) Прямоугольный параллелепипед со сторонами  $a, b$  и  $c$ , параллельными соответственно осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$ :

$$J_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

3) Полый прямой круглый цилиндр высотой  $H$  и радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными  $R_1$  и  $R_2$ ;  $Oz$  — ось цилиндра:

$$J_x = J_y = \frac{m}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2), \quad J_z = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

Для сплошного цилиндра ( $R_2 = 0$ ;  $R_1 = R$ ):

$$J_x = J_y = \frac{m}{12} (3R^2 + H^2), \quad J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

Для боковой поверхности тонкостенного полого цилиндра ( $R_1 = R_2 = R$ ):

$$J_x = J_y = \frac{m}{12} (6R^2 + H^2), \quad J_z = mR^2.$$

4) Полый шар с радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными  $R_1$  и  $R_2$ :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Для сплошного шара ( $R_2 = 0$ ;  $R_1 = R$ ):

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2.$$

Для тонкостенной сферы ( $R_1 = R_2 = R$ ):

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} mR^2.$$

Для шарового сектора ( $Oz$  — ось симметрии):

$$J_z = \frac{mh}{5} (3R - h),$$

где  $R$  — радиус шаровой поверхности,  $h$  — высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору.

Для шарового сегмента ( $Oz$  — ось симметрии):

$$J_z = \frac{mh}{20} \frac{20R^2 - 15Rh + 3h^2}{3R - h}.$$

5) Прямой круглый конус радиусом основания  $R$  и высотой  $H$  ( $Oz$  — ось конуса):

$$J_x = J_y = \frac{3m}{20} \left( R^2 + \frac{H^2}{4} \right), \quad J_z = \frac{3}{10} mR^2.$$

Для боковой поверхности тонкостенного полого конуса:

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

6) Усеченный прямой круглый конус высотой  $H$  и радиусами оснований  $R_1$  и  $R_2$  ( $Oz$  — ось конуса):

$$J_z = \frac{3m}{10} \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Для боковой поверхности тонкостенного усеченного конуса:

$$J_z = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

7) Прямая прямоугольная пирамида высотой  $H$ , стороны основания  $a$  и  $b$  параллельны соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$ :

$$J_x = \frac{m}{20} \left( b^2 + \frac{3}{4} H^2 \right), \quad J_y = \frac{m}{20} \left( a^2 + \frac{3}{4} H^2 \right),$$

$$J_z = \frac{m}{20} (a^2 + b^2).$$

8) Эллипсоид с полуосями  $a, b$  и  $c$ , параллельными соответственно осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$ :

$$J_x = \frac{m}{5} (b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{m}{5} (a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{m}{5} (a^2 + b^2).$$

9) Кольцо радиуса  $R$  с круговым поперечным сечением радиуса  $r$  (тор); ось  $Oz$  перпендикулярна к плоскости, в которой лежат центры поперечных сечений:

$$J_x = J_y = \frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2), \quad J_z = m \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$$

## 3. Момент количества движения

1° Моментом количества движения (моментом импульса) материальной точки относительно некоторой точки (полюса) называется вектор  $\mathbf{L}_i$ , равный векторному произведению радиус-вектора  $\mathbf{r}_i$  точки, проведенного из полюса, на ее количество движения  $m_i \mathbf{v}_i$ :

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i].$$

Моментом количества движения или кинетическим моментом системы материальных точек относительно полюса называется вектор  $\mathbf{L}$ , равный геометрической сумме моментов количеств движения относительно того же полюса всех  $n$  точек системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i].$$

Момент количества движения тела относительно полюса равен

$$\mathbf{L} = \int_{(m)} [\mathbf{r}\mathbf{v}] dm = \int_{(V)} [\mathbf{r}\mathbf{v}] \rho dV = \iiint_{(V)} [\mathbf{r}\mathbf{v}] \rho dx dy dz,$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\rho$  — соответственно радиус-вектор, скорость и плотность малого элемента тела, имеющего массу  $dm$  и объем  $dV$ .

2° Центр инерции  $C$  системы материальных точек обладает тем свойством, что моменты количества движения этой системы относительно  $C$  для абсолютного движения точек ( $\mathbf{L}_c$ ) и для их относительного движения ( $\mathbf{L}'_c$ ) по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в точке  $C$  одинаковы:  $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}'_c$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i m_i \mathbf{v}'_i] = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i],$$

где  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c$  — скорости абсолютного и относительного движений точки с массой  $m_i$ , положение которой относительно  $C$  определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$ . Моменты количества движения системы относительно ее центра инерции ( $\mathbf{L}_c$ ) и неподвижного полюса ( $\mathbf{L}$ ) связаны соотношением

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{L} - m[\mathbf{r}_c \mathbf{v}_c] = \mathbf{L} - [\mathbf{r}_c \mathbf{K}],$$

где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса системы,  $\mathbf{v}_c$  — абсолютная ско-

рость центра инерции по отношению к полюсу, а  $\mathbf{K}$  — количество движения системы.

3° Моментом количества движения или кинетическим моментом системы материальных точек (тела) относительно оси  $a$  называется скалярная величина  $L_a$ , равная проекции на ось  $a$  вектора  $\mathbf{L}$  момента количества движения системы (тела) относительно любого полюса, принадлежащего этой оси. Моменты количества движения системы  $n$  материальных точек относительно осей неподвижной прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$L_x = \sum_{i=1}^n (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) m_i,$$

$$L_y = \sum_{i=1}^n (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) m_i,$$

$$L_z = \sum_{i=1}^n (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) m_i,$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -й материальной точки системы,  $v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}$  — проекции ее скорости  $\mathbf{v}_i$  на оси координат.

Для тела

$$L_x = \int_{(m)} (y v_z - z v_y) dm = \iiint_{(V)} (y v_z - z v_y) \rho dx dy dz,$$

$$L_y = \int_{(m)} (z v_x - x v_z) dm = \iiint_{(V)} (z v_x - x v_z) \rho dx dy dz,$$

$$L_z = \int_{(m)} (x v_y - y v_x) dm = \iiint_{(V)} (x v_y - y v_x) \rho dx dy dz,$$

где  $x, y, z$  — координаты малого элемента тела с массой  $dm$ , а  $v_x, v_y, v_z$  — проекции скорости этого элемента на оси координат.

Момент количества движения тела или системы материальных точек относительно произвольной оси  $a$ , проходящей через начало координат, равен

$$L_a = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образуемые осью  $a$  с осями координат  $Ox, Oy, Oz$ . Если тело вращается вокруг оси  $a$  с угловой скоростью  $\omega$ , то

$$L_a = J_a \omega.$$



#### 4. Основной закон динамики вращательного движения

Производная по времени от момента количества движений механической системы относительно неподвижной<sup>1)</sup> точки или центра инерции системы равна главному моменту относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к системе:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

или, в проекциях на координатные оси неподвижной (инерциальной) системы отсчета,

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

**Пример 1.** Вращение системы вокруг неподвижной оси  $Oz$ :  $L_x = L_y = 0$ , а  $L_z = J_z \omega$ , где  $\omega$  — угловая скорость,  $J_z$  — момент инерции системы относительно оси  $Oz$ . Уравнение движения:  $\frac{d}{dt}(J_z \omega) = M_z$ . Если система является абсолютно твердым телом, то  $J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$ .

**Пример 2.** Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$ . В жестко связанной с телом подвижной системе координат  $(x', y', z')$ , начало которой находится в точке  $O$ , уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = \mathbf{M} - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}],$$

где  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  — момент количества движения тела и главный момент приложенных к нему внешних сил относительно точки  $O$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения тела, а  $\frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{dL_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dL_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dL_{z'}}{dt} \mathbf{k}'$  — относительная производная по времени от вектора  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$  — орты подвижной системы. Если оси подвижной системы координат совпадают с главными осями инерции тела в точке  $O$ , то уравнения движения тела в проекциях на эти оси имеют вид:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1,$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = M_2,$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3,$$

<sup>1)</sup> По отношению к некоторой инерциальной системе отсчета.

где  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — главные моменты инерции тела в точке  $O$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции, а  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  — моменты всех внешних сил относительно тех же осей. Эти уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

Они справедливы также для вращения свободного твердого тела вокруг центра инерции. Только в этом случае  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — главные центральные моменты инерции тела,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  — проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции, а  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  — моменты всех внешних сил относительно тех же осей.

#### 5. Закон сохранения момента количества движения

1° Если главный момент внешних сил относительно неподвижной точки или центра инерции механической системы тождественно равен нулю, то момент количества движения системы относительно этой точки с течением времени не изменится:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \text{const.}$$

В замкнутой системе внешние силы отсутствуют. Поэтому момент количества движения  $\mathbf{L}$  замкнутой системы относительно любой неподвижной точки, а также геометрическая сумма  $\mathbf{L}'_i$  моментов количества движения всех частей системы по отношению к ее центру инерции не зависит от времени:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i] = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}'_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i m_i \mathbf{v}'_i] = 0,$$

где  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — радиус-вектор и абсолютная скорость  $i$ -й материальной точки системы по отношению к неподвижной инерциальной системе координат  $(x, y, z)$ , а  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$  и  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c$  — радиус-вектор и относительная скорость той же точки по отношению к центру инерции системы. В проекциях на неподвижные оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  и оси  $O'x'$ ,  $O'y'$  и  $O'z'$  подвижной системы, перемещающейся поступательно так, что ее начало  $O'$  всегда совпадает с центром инерции, закон сохранения момента количества движения записывается в виде двух систем

уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) &= 0; \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (y_i' v_{iz}' - z_i' v_{iy}') &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (z_i' v_{ix}' - x_i' v_{iz}') &= 0, \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (x_i' v_{iy}' - y_i' v_{ix}') &= 0. \end{aligned} \right\}$$

2° Если момент внешних сил относительно центра инерции твердого тела равен нулю, то вращение тела вокруг центра инерции называют *свободным (инерционным) вращением*. Оно описывается следующими тремя уравнениями, вытекающими из динамических уравнений Эйлера (стр. 79):

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — главные центральные моменты инерции тела, а  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — проекции вектора угловой скорости тела на главные центральные оси. При этом центр инерции тела движется по закону

$$m \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  — главный вектор системы внешних сил,  $m$  — масса тела.

3° Свободное вращение тела называется *стационарным*, если вектор  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скорости тела постоянен. Необходимым и достаточным условием такого движения является вращение тела вокруг одной из главных центральных осей. Однако практически стационарное свободное вращение осуществляется только вокруг главных

центральных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции, называемых *свободными осями* тела, тогда как свободное вращение относительно третьей оси является неустойчивым.

Если механическая система не замкнута, но момент всех внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси тождественно равен нулю, то момент количества движения системы относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

## 6. Движение под действием центральных сил

1° Сила, действующая на движущуюся материальную точку или тело, называется *центральной*, если ее линия действия все время проходит через одну и ту же неподвижную точку  $O$ , называемую *центром силы*:

$$\mathbf{F} = F \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра  $O$  в точку приложения силы  $\mathbf{F}$ ;  $F$  — проекция силы на направление радиус-вектора. Примерами центральных сил являются силы тяготения между материальными точками и силы электростатического взаимодействия между точечными электрическими зарядами, для которых  $F$  обратно пропорционально  $r^2$ .

2° При движении материальной точки под действием центральной силы ее момент количества движения относительно центра  $O$  силы не изменяется:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \text{const.}$$

Поэтому точка движется в плоскости

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0,$$

перпендикулярной к  $\mathbf{L}$  и проходящей через точку  $O$ . Секторальная скорость точки (стр. 21) постоянна (*второй закон Кеплера*):

$$2\sigma = r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{m},$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки в плоскости ее движения (декартовы координаты точки:  $\xi$  и  $\eta$ ).

3° Если центральная сила, действующая на рассматриваемую материальную точку, зависит только от  $r$ :

$F = F(r)$ , то эта сила является потенциальной (стр. 61). Ее силовая функция равна

$$U(r) = \int_0^r F(r) dr + U_0,$$

где  $U_0 = U(0)$ . Потенциальная, кинетическая и полная энергии точки равны:

$$W_{II} = -U(r) + C = W_{II}(r),$$

$$W_K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

$$W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + W_{II}(r).$$

Связь между полярными координатами точки и временем имеет вид:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [W - W_{II}(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]} + C_1,$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[W - W_{II}(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]} + C_2.$$

Вторая формула определяет уравнение траектории (орбиты) материальной точки, а первая — закон движения точки вдоль этой траектории.

4° Полная энергия  $W$  точки в процессе движения не изменяется. Поэтому область возможных значений полярного радиуса  $r$  точки определяется из условия

$$\frac{L^2}{2mr_*^2} + W_{II}(r_*) = W,$$

где  $r_*$  — экстремальные значения  $r$ , т. е.  $r_{\max}$  и  $r_{\min}$ . Если  $r_{\max}$  — конечная величина, то движение называется *финитным*. При этом траектория точки заключена внутри кольца, ограниченного окружностями  $r = r_{\min}$  и  $r = r_{\max}$ . Все траектории финитного движения точки замкнуты, если потенциальная энергия  $W_{II}$  пропорциональна  $1/r$  или  $r^2$ . Если максимальное значение  $r$  не ограничено, то движение называется *инфинитным*.

5° *Задача Кеплера*<sup>1)</sup> — движение материальной точки под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра силы:

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad W_{II} = -\frac{\alpha}{r},$$

где  $\alpha$  — постоянная величина. Если  $\alpha < 0$ , то точка отталкивается от центра (кулоновское взаимодействие одноименных точечных зарядов); если  $\alpha > 0$ , то точка притягивается к центру (гравитационное взаимодействие материальных точек и кулоновское взаимодействие разноименных точечных зарядов).

Траектории точки — коническое сечение, уравнение которого в полярных координатах  $r$  и  $\psi = \varphi - C_2$  (стр. 82) имеет вид:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi} \quad (\alpha > 0),$$

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \psi} \quad (\alpha < 0),$$

где  $p = \frac{L^2}{m|\alpha|}$  — параметр орбиты,  $e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{m\alpha^2}}$  — эксцентриситет орбиты,  $W$  — полная энергия точки, а  $L$  — ее момент количества движения относительно центра.

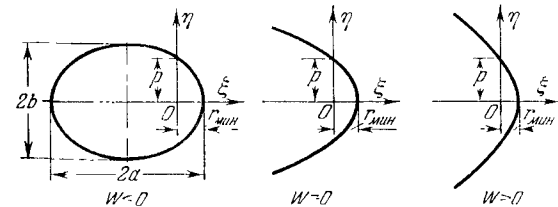


Рис. 1.4.1.

а)  $\alpha > 0$ . Центр силы лежит в фокусе орбиты материальной точки. Расстояние от него до ближайшей точки орбиты, называемой *перигелием*, равно

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}.$$

Если  $W > 0$ , то  $e > 1$  и орбита имеет форму гиперболы; если  $W = 0$ , то  $e = 1$ , т. е. орбита — парабола; если

<sup>1)</sup> Некоторые авторы называют ее *задачей Ньютона*.

$W < 0$ , то  $e < 1$  — эллиптическая орбита (рис 1.4.1), полуоси которой равны:

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{a}{2|W|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|W|}}.$$

Период обращения точки по эллиптической орбите:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{a}}.$$

б)  $a < 0$ . Полная энергия точки:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{|a|}{r} \geq 0.$$

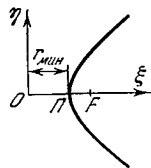


Рис. 1.4.2.

Поэтому движение всегда инфинитно, а траектория имеет вид гиперболы ( $W > 0$ ) или параболы ( $W = 0$ ). Центр силы  $O$  и фокус орбиты  $F$  расположены на ее оси симметрии по разные стороны от перигелия  $\Pi$  (рис. 1.4.2), причем

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1}.$$

**Пример 1.** Движение планет в гравитационном поле Солнца:  $a = fmM > 0$ , где  $m$  — масса планеты,  $M$  — масса Солнца,  $f$  — постоянная тяготения. Движение планет финитное, т. е.  $W < 0$ . Поэтому справедливы следующие два закона:

1) планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце (*первый закон Кеплера*);

2) отношение кубов больших полуосей орбит к квадратам времен обращения для всех планет солнечной системы одинаково (*третий закон Кеплера*):

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \frac{a}{m} = fM = \text{const}.$$

**Пример 2.** Движение тел в гравитационном поле Земли:  $a = fmM = g_0 mr_0^2$ , где  $m$  — масса тела,  $M$  — масса Земли,  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли, радиус которой равен  $r_0$  (влияние суточного вращения Земли не учитывается).

*Первой космической* или *круговой* скоростью  $v_1$  называется та скорость, которую нужно сообщить телу для превращения его в спутник Земли, обращающийся по

круговой орбите ( $e = 0$ ) радиуса  $r_0$ :

$$v_1 = \sqrt{g_0 r_0} = 7,9 \text{ км/сек}^1).$$

*Второй космической* или *параболической* скоростью  $v_2$  называется та наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической ( $e = 1$ ), т. е. чтобы тело преодолело притяжение Земли и превратилось в спутник Солнца:

$$v_2 = \sqrt{2g_0 r_0} = 11,2 \text{ км/сек}^1).$$

## 7. Гирископ

1° *Гирископом* (*симметричным гирископом*) называется твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки  $O$  и обладающее осью  $Oz'$  динамической симметрии (стр. 74), которая проходит через центр инерции гирискоса. Гирископ называется *уравновешенным*, если точка  $O$  совпадает с его центром инерции. В противном случае гирископ называется *тяжелым*, так как момент его силы тяжести относительно точки  $O$  отличен от нуля и существенно влияет на движение гирискоса.

Если ориентация мгновенной оси вращения гирискоса вокруг точки  $O$  ничем не ограничена, то гирископ обладает тремя степенями свободы. Если эта ось может занимать любые положения лишь в некоторой неподвижной плоскости, проходящей через точку  $O$ , то гирископ обладает двумя степенями свободы.

2° Инерционное вращение (стр. 80) уравновешенного гирискоса, имеющего три степени свободы.

Момент количества движения  $L$  гирискоса относительно точки  $O$  и его кинетическая энергия постоянны. Кроме того, из уравнений инерционного вращения тела вокруг точки (стр. 80) при  $J_1 = J_2$  следует:

$$\dot{\omega}_3 = 0, \quad \omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0,$$

т. е.  $\omega_3, \omega_1^2 + \omega_2^2$  и  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  постоянны.

Возможны два случая:

а)  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , так что  $\omega = \omega_3$  и  $\omega = \frac{1}{J_3} L = \text{const}$ .

<sup>1)</sup> Влияние сопротивления атмосферы не учитывается.

При инерционном вращении уравновешенного гироскопа вокруг оси динамической симметрии ориентация этой оси по отношению к осям инерциальной системы отсчета не изменяется с течением времени.

б)  $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$ , т. е. мгновенная ось вращения гироскопа не совпадает с его осью динамической симметрии  $Oz'$ .

Ось  $Oz'$  равномерно вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$ , совпадающей с вектором  $\mathbf{L}$ , описывая круговую коническую поверхность с вершиной в точке  $O$  и углом раствора  $2\theta$ , определяемым из условия

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{J_1}{J_3} \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Такое движение называется *регулярной прецессией*, а угол  $\theta$  — *углом нутации*. Угловая скорость прецессии равна

$$\Omega = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sin \theta} = \omega_3 \sqrt{\left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Если  $\omega_1^2 + \omega_2^2 \ll \omega_3^2$ , то угол нутации при регулярной прецессии мал и ось  $Oz'$  практически совпадает с неподвижной осью  $Oz$ .

3° Влияние внешних сил на движение гироскопа, имеющего три степени свободы.

В приближенной теории гироскопа предполагается, что он быстро вращается вокруг оси динамической симметрии  $Oz'$  ( $\omega = \omega_3$ ), которая в свою очередь под действием приложенных к ней внешних сил медленно движется вокруг неподвижной точки  $O$ . Это движение оси гироскопа называется *прецессией*. Векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{L} = J_3 \boldsymbol{\omega}$  называются *собственной угловой скоростью* и *собственным моментом количества движения гироскопа*.

Если внешняя сила  $\mathbf{F}$  приложена в точке  $A$  оси  $Oz'$  (рис. 1.4.3), то ее момент  $\mathbf{M}$  относительно точки  $O$  равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_a \mathbf{F}] = \frac{r_a}{J_3 \omega} [\mathbf{L} \mathbf{F}],$$

где  $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор точки  $A$ , а  $\omega$  — алгебраическое значение собственной угловой скорости гироскопа ( $\omega > 0$ , если вектор  $\mathbf{L}$  направлен вдоль положительного направления оси  $Oz'$ ).

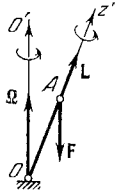


Рис. 1.4.3.

4° Из основного закона динамики вращательного движения (стр. 78) следует, что для гироскопа, имеющего три степени свободы,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{r_a}{J_3 \omega} [\mathbf{L} \mathbf{F}].$$

Векторы  $d\mathbf{L}$  и  $\mathbf{L}$  взаимно перпендикулярны. Следовательно, под действием силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к оси  $Oz'$  гироскопа, вектор  $\mathbf{L}$  и ось гироскопа прецессируют вокруг мгновенной оси  $OO'$ , параллельной силе  $\mathbf{F}$ , в направлении вектора  $\mathbf{M}$  момента этой силы относительно точки  $O$ . Угловая скорость прецессии:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{r_a}{J_3 \omega} \mathbf{F}.$$

Вектор

$$\mathbf{M}_p = -\mathbf{M} = [\mathbf{L} \boldsymbol{\Omega}] = J_3 [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Omega}]$$

называется *гироскопическим моментом*. Гироскопический момент приложен к внешнему телу, вызывающему прецессию гироскопа с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Если  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$  и угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{L}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  тоже постоянен, то прецессия называется *регулярной*. Как показывает точная теория, в случае регулярной прецессии гироскопический момент равен

$$\mathbf{M}_p = J_3 [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Omega}] \left(1 + \frac{J_2 - J_1}{J_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta\right).$$

Эта формула совпадает с приближенной в следующих случаях:

- $\omega \gg \Omega$  (исходное положение приближенной теории);
- $\theta = 90^\circ$ ;
- $J_3 = J_1 = J_2$  (сферический гироскоп).

Пример. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа, обусловленная его силой тяжести:  $\mathbf{M}_p = [Pr_c]$ , где  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра инерции. Прецессия происходит вокруг вертикальной оси, образующей угол  $\theta$  с осью гироскопа. Угловая скорость прецессии определится из уравнения

$$J_3 \omega \boldsymbol{\Omega} \left(1 + \frac{J_2 - J_1}{J_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta\right) = Pr_c.$$

Регулярная прецессия возможна при условии

$$J_3^2 \omega^2 + 4(J_3 - J_1) Pr_c \cos \theta > 0.$$

Имеются две угловые скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{-J_3\omega \pm \sqrt{J_3^2\omega^2 + 4(J_3 - J_1)Pr_s \cos \vartheta}}{2(J_3 - J_1) \cos \vartheta}.$$

Если собственная угловая скорость гироскопа достаточно велика, то

$$\Omega_1 = \frac{Pr_s}{J_3\omega} - \text{медленная прецессия,}$$

$$\Omega_2 = \frac{J_3\omega}{(J_3 - J_1) \cos \vartheta} - \text{быстрая прецессия.}$$

Для осуществления регулярной прецессии тяжелого гироскопа (или уравновешенного гироскопа, подверженного действию постоянной силы) необходимо соблюдение строго определенных начальных условий его движения. В противном случае возникает *псевдорегулярная прецессия*, при которой угол нутации  $\vartheta$  периодически изменяется. Чем больше собственная угловая скорость  $\omega$  гироскопа, тем меньше размах колебаний величины угла  $\vartheta$  и соответствующего им движения гироскопа, называемого *нутацией*.

Если ось динамической симметрии тяжелого гироскопа, имеющего три степени свободы, расположена вертикально, а его центр инерции находится выше точки опоры, то вращение гироскопа вокруг этой оси будет устойчивым, если

$$J_3\omega > 2\sqrt{PJ_1r_s}.$$

5° Гироскоп с двумя степенями свободы. Уменьшение числа степеней свободы гироскопа с трех до двух приводит к тому, что независимо от величины собственной угловой скорости гироскоп полностью теряет свою устойчивость. Внешняя сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к оси  $Oz'$  динамической симметрии гироскопа с двумя степенями свободы и направленная в плоскости, перпендикулярной к второй оси  $Ox$  его вращения, вызывает свободное вращение гироскопа вокруг оси  $Ox$  в направлении действия силы. Это связано с тем, что под влиянием силы  $\mathbf{F}$  и собственного вращения гироскопа в неподвижно закрепленных подшипниках оси  $Ox$  возникает пара сил, которая приложена к гироскопу и создает момент  $\mathbf{M}$ , совпадающий по направлению с силой  $\mathbf{F}$  и вызывающий поворот в том же направлении оси  $Oz'$ .

Благодаря суточному вращению Земли ось динамической симметрии гироскопа с двумя степенями свободы, беспрепятственно вращающегося вокруг вертикальной

оси, устанавливается в плоскости географического меридиана так, что угол между угловыми скоростями Земли и гироскопа острый. Это свойство гироскопа впервые было использовано Фуко для экспериментального доказательства существования суточного вращения Земли.

## ГЛАВА 5

### ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

#### 1. Основные понятия и определения

1° *Обобщенными координатами* механической системы называют независимые параметры  $q_1, q_2, \dots, q_l$ , полностью определяющие конфигурацию этой системы, т. е. положение всех ее точек по отношению к системе отсчета.

*Обобщенными скоростями* системы называют полные производные по времени от обобщенных координат системы:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, l).$$

2° *Числом степеней свободы* механической системы называют число  $s$  независимых возможных движений этой системы. Для голономной системы (стр. 18) число степеней свободы равно числу обобщенных координат этой системы:  $s = l$ . В случае неголономной системы (стр. 18)  $s = l - k$ , где  $k$  — число неголономных связей, наложенных на эту систему. В дальнейшем рассматриваются только голономные системы.

3° *Виртуальными (возможными) перемещениями* механической системы называют всякое бесконечно малое изменение конфигурации системы, согласующееся со связями, наложенными на систему в рассматриваемый момент времени  $t$ . Если связи стационарны (стр. 18), то действительное перемещение системы за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  совпадает с одним из ее виртуальных перемещений. В случае нестационарных связей действительное перемещение системы не совпадает ни с одним из виртуальных, так как за время  $dt$  условия, накладываемые связями, изменяются.

Виртуальное перемещение  $\delta \mathbf{r}_k$   $k$ -й материальной точки системы, обладающей  $s$  степенями свободы, равно

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

где  $\delta q_i$  — бесконечно малые приращения обобщенных координат, соответствующие виртуальному перемещению системы и называемые изохронными вариациями обобщенных координат.

4° Элементарная работа (*виртуальная работа*), совершаемая на виртуальном перемещении силами, действующими на все  $n$  материальных точек голономной системы с  $s$  степенями свободы, равна

$$\delta A = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i,$$

где  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{R}_k$ ;  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  и  $\mathbf{R}_k$  — результирующие соответственно активных сил и реакций связей (стр. 36), приложенных к  $k$ -й материальной точке. Величину

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left( \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)$$

называют *обобщенной силой*, сопряженной с обобщенной координатой  $q_i$ .

Связи называют *идеальными*, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k^{\text{ид}} \delta \mathbf{r}_k) \equiv 0.$$

Это условие справедливо, например, для тела, скользящего по абсолютно гладкой поверхности или катящегося без скольжения по абсолютно шероховатой поверхности.

В случае идеальных связей обобщенные силы выражаются только через активные силы:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left( \mathbf{F}_k^{(a)} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right).$$

Если все силы  $\mathbf{F}_k^{(a)}$  консервативные, то

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

где  $U$  — полная (внешняя и внутренняя, стр. 65) потенциальная энергия системы.

В общем случае

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i',$$

где  $Q_i' = \sum_{k=1}^n \left( \mathbf{f}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)$  — *обобщенная непотенциальная сила*,  $\mathbf{f}_k$  — результирующая всех непотенциальных сил, действующих на  $k$ -ю материальную точку системы.

5° *Функцией Лагранжа (лагранжианом)*  $L$  называется разность между кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергиями системы. Она является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t).$$

Здесь под  $q$  и  $\dot{q}$  понимается вся совокупность  $s$  обобщенных координат и  $s$  обобщенных скоростей голономной системы.

Кинетическая энергия голономной системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^2 = a + \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где  $a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2$ ;  $a_i = \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)$ ;

$a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right)$ ;  $m_k$  — масса  $k$ -й точки системы, а  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{v}_k = d\mathbf{r}_k/dt$  — радиус-вектор и скорость этой точки.

В случае свободной системы или системы со стационарными связями (стр. 18)  $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = 0$  и  $a = a_0 = 0$ , т. е. кинетическая энергия системы не зависит явно от времени и является однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = T(q, \dot{q}).$$

Этот результат справедлив, в частности, для консервативных систем (стр. 67), так как эти системы либо свободны, либо подчинены стационарным идеальным связям. Потенциальная энергия и функция Лагранжа любой консервативной системы также не зависят явно от времени:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q).$$

**Пример 1.** Материальная точка с массой  $m$  движется в поле центральных сил. Функция Лагранжа в

декартовых координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

в цилиндрических координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}),$$

в сферических координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

**Пример 2.** В системе из двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , имеющих радиус-вектор относительного движения  $\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1) - \mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$  и центр инерции с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ ,

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2) + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

6° *Обобщенный импульс*  $p_i$ , сопряженный с обобщенной координатой  $q_i$ , есть частная производная от функции Лагранжа  $L$  по обобщенной скорости  $\dot{q}_i$ :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

**Пример 1.** Для материальной точки с массой  $m$  обобщенные импульсы, сопряженные с координатами  $x, y, z$ , совпадают с проекциями импульса в декартовых координатах:

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

**Пример 2.** Обобщенный импульс  $p_\varphi$ , сопряженный с координатой  $\varphi$  в цилиндрических координатах, является моментом количества движения относительно оси  $Oz$ :

$$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}.$$

## 2. Уравнения Лагранжа второго рода

1° Если движение голономной системы описывается обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_s$  и обобщенными скоростями  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ , то уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы, а  $Q_i$  — обобщенная сила.

Эти уравнения называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Если движение происходит в потенциальном поле, то уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0. \end{aligned}$$

**Пример 1.** Материальная точка с массой  $m$ , движущаяся в потенциальном поле, описывается уравнениями Лагранжа, тождественными с уравнениями движения Ньютона (стр. 39):

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

где

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

**Пример 2.** Уравнения Лагранжа для координат центра инерции изолированной системы двух тел:

$$\ddot{X}_0 = \ddot{Y}_0 = \ddot{Z}_0 = 0.$$

Центр инерции движется прямолинейно и равномерно совершенно независимо от относительного движения обоих тел.

**Пример 3.** Уравнения Лагранжа для относительного движения изолированной системы двух материальных точек:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{y} = - \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z},$$

где  $U$  — взаимная потенциальная энергия точек ( $U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ ),  $x = x_1 - x_2$ ,  $y = y_1 - y_2$  и  $z = z_1 - z_2$ . Таким образом, задача об относительном движении изолированной системы двух взаимодействующих материальных точек сводится к задаче о движении во внешнем потенциальном силовом поле  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$  одной материальной точки с массой  $m_{\text{пр}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , называемой *приведенной массой*.

2° Если силы, действующие на голономную систему, непотенциальны, но обобщенные силы можно представить



через так называемый «обобщенный потенциал»  $U^*(q, \dot{q})$  в форме

$$Q_i = -\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

то уравнения Лагранжа для системы также имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где  $L = T - U^*$ .

**Пример.** Для частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$ , движущейся в электромагнитном поле,

$$U^* = q\varphi - q(\mathbf{A}\mathbf{v}) \quad \text{и} \quad L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q(\mathbf{A}\mathbf{v}),$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — скалярный и векторный потенциалы поля (стр. 502).

3° Уравнения Лагранжа для произвольной голономной системы, на которую действуют как потенциальные, так и непотенциальные силы, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i,$$

где  $Q'_i$  — обобщенная непотенциальная сила (стр. 91). В частности, для системы материальных точек, подверженной действию сил трения, которые пропорциональны скоростям движения точек,

$$Q'_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i},$$

где  $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  — диссипативная функция Рэлея.

## 8. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона

1° Функцией Гамильтона (гамильтонианом) голономной системы с  $s$  степенями свободы называется функция обобщенных координат и импульсов системы, а также времени, имеющая вид

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L,$$

где все  $\dot{q}_i$  и функция Лагранжа  $L$  выражены через обобщенные координаты и импульсы.

Для консервативной системы (стр. 67) функции Лагранжа и Гамильтона не зависят явно от времени и  $\frac{dH}{dt} = 0$ , т. е.  $H = \text{const}$ . Кроме того, в этом случае

$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

по теореме Эйлера для однородных функций второй степени. Поэтому

$$H = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T + U.$$

Функция Гамильтона консервативной системы есть ее полная механическая энергия.

**Пример 1.** Для частицы с массой  $m$  в потенциальном поле  $U(x, y, z)$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

**Пример 2.** В случае линейного гармонического осциллятора (стр. 113)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad U = \frac{ax^2}{2},$$

где  $a$  — коэффициент упругости (стр. 114),

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{ax^2}{2}.$$

**Пример 3.** Планета с массой  $m$  движется по эллиптической орбите в поле тяготения Солнца (стр. 84). В полярных координатах

$$p_\varrho = m\dot{\varrho}, \quad p_\varphi = m\varrho^2\dot{\varphi},$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2m} \left( p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} p_\varphi^2 \right).$$

Потенциальная энергия планеты:

$$U(\varrho) = -f \frac{mM}{\varrho},$$

где  $f$  — гравитационная постоянная (стр. 47),  $M$  — масса Солнца.

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} p_\varphi^2 \right) - f \frac{mM}{\varrho}.$$

2° Каноническими уравнениями движения Гамильтона для голономной системы с  $s$  степенями свободы, на которую действуют только потенциальные силы, называется совокупность  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Зная начальное состояние системы, т. е. совокупность значений  $q_i$  и  $p_i$  для  $t = 0$ , и проинтегрировав эти уравнения, можно определить состояние системы в произвольный момент времени  $t$ , т. е. совокупность значений  $q_i(t)$  и  $p_i(t)$ . Канонические уравнения Гамильтона выражают классический принцип причинности.

Если функции Лагранжа и Гамильтона не зависят явно от какой-либо обобщенной координаты  $q_k$ , то эту координату называют циклической. Из канонических уравнений Гамильтона следует, что обобщенный импульс  $p_k$ , сопряженный с циклической координатой  $q_k$ , не изменяется в процессе движения системы:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad \text{и} \quad p_k = \text{const.}$$

Написанные выше канонические уравнения Гамильтона справедливы также для голономной системы, обладающей «обобщенным потенциалом» (стр. 94).

Для произвольной голономной системы канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q'_i,$$

где  $Q'_i$  — обобщенная непотенциальная сила (стр. 91).

3° Для наглядного изображения изменения состояния системы вводится многомерное пространство всех обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных импульсов  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) рассматриваемой системы. Такое  $2s$ -мерное пространство называется фазовым или  $\Gamma$ -пространством.  $s$ -мерное подпространство обобщенных координат  $q_i$  называется конфигурационным пространством. Состояние системы изображается точкой в соответствующей этой системе фазовом пространстве (изобразительная, или фазовая, точка). Изменение состояния системы отображается траекторией фазовой точки в фазовом пространстве (фазовая траектория). Фазовая траектория не может пересекаться сама с собой, ибо это означало бы

неоднозначность решения уравнений Гамильтона. Фазовое пространство не имеет ничего общего с реальным пространством и является геометрической схемой, с помощью которой законы изменения состояния системы могут быть сформулированы на геометрическом языке.

Пример 1. Линейный гармонический осциллятор (стр. 113), движущийся около положения равновесия  $q = 0$  под действием упругой силы  $F = -aq$ , где  $a$  — коэффициент упругости. Уравнение движения

$$m\ddot{q} = -aq$$

дает

$$q = A \sin(\omega t + \varphi), \quad p = m\omega A \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\varphi$  — начальная фаза колебаний (стр. 110),  $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{a/m}$ ,  $\nu$  — частота колебаний. Исключая время, находим фазовую траекторию:

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1.$$

Фазовой траекторией является эллипс с полуосями  $a = A$  и  $b = m\omega A$ . Фазовым пространством осциллятора является плоскость  $(p, q)$  (рис. I.5.1).

Полная механическая энергия осциллятора равна

$$E = \frac{aA^2}{2}.$$

Ее можно связать с площадью эллипса  $S = \oint p dq = \pi ab = \pi m\omega A^2$ :

$$E = \frac{\omega}{2\pi} S = \nu \oint p dq.$$

Площадь эллипса имеет размерность действия (стр. 100).

Пример 2. Плоский ротатор представляет собой частицу, вращающуюся в плоскости на заданном расстоянии от начала координат. За обобщенную координату удобно выбрать угол  $\varphi$ , образуемый радиус-вектором  $\mathbf{r}$  с осью  $Ox$ . Функция Гамильтона  $H$  совпадает с кинетической энергией и функцией Лагранжа:

$$H = T = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m\nu^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2},$$

где  $\dot{\varphi}$  — угловая скорость и  $J = m\nu^2$  — момент инерции.

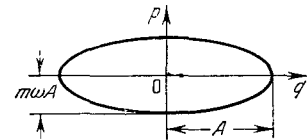


Рис. I.5.1

Обобщенный импульс  $p_\varphi$ , сопряженный с координатой  $\varphi$ , равен (стр. 92)

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = J \dot{\varphi},$$

т. е.  $p_\varphi$  есть момент количества движения.  $H$  можно выразить так:  $H = p_\varphi^2 / 2J$  — и по каноническим уравнениям Гамильтона:

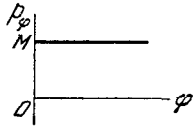


Рис. 1.5.2.

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}.$$

Первое из уравнений дает  $p_\varphi = M = \text{const}$ , т. е. закон сохранения момента количества движения (стр. 79). Фазовым пространством ( $p_\varphi, \varphi$ ) (рис. 1.5.2) фазовая траектория имеет вид прямой  $p_\varphi = M$ .

#### 4. Понятие о вариационных принципах механики

1° Уравнения движения механической системы или условия ее равновесия могут быть получены как следствия из некоторых общих положений, называемых *вариационными принципами механики*. Вариационные принципы показывают, чем истинное движение или состояние механической системы отличается от всех кинематически возможных (т. е. допускаемых связями) ее движений или состояний. Вариационные принципы, выражающие это различие для движения или состояния системы в каждый данный момент времени, называют *дифференциальными*. Эти принципы являются наиболее общими в механике — они в равной мере применимы как к голономным, так и к неголономным системам. Вариационные принципы, устанавливающие различие между истинным перемещением системы за конечный промежуток времени и всеми ее кинематически возможными перемещениями, называют *интегральными*. Интегральные вариационные принципы справедливы только для голономных систем. Однако их обычно формулируют применительно к консервативным голономным системам.

2° Основные дифференциальные вариационные принципы.

*Принцип виртуальных (возможных) перемещений*: для равновесия любой механической системы с идеальными

связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ действующих на нее активных сил при любом виртуальном перемещении системы была равна нулю (если все связи удерживающие) или меньше нуля (если среди связей есть неудерживающие), т. е. в обозначениях пп. 3° и 4° на стр. 89 и 90

$$\delta A^{(a)} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k^{(a)} \delta \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i \leq 0,$$

где  $l$  — число обобщенных координат системы.

В частности, для голономной системы с  $s$  степенями свободы, подчиненной идеальным удерживающим связям, все вариации  $\delta q_i$  независимы и условия равновесия имеют вид

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

*Принцип Даламбера — Лагранжа*: для истинного движения любой механической системы, подчиненной идеальным удерживающим связям, сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции<sup>1)</sup> на любом виртуальном перемещении системы в каждый данный момент времени равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^n \left( (\mathbf{F}_k^{(a)} - m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}) \delta \mathbf{r}_k \right) = 0,$$

где  $d^2 \mathbf{r}_k / dt^2$  — ускорение  $k$ -й материальной точки с массой  $m_k$ , а  $-m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}$  — даламберова сила инерции.

В обобщенных координатах

$$\sum_{i=1}^l \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] - Q_i \right\} \delta q_i = 0,$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы.

Принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера — Лагранжа можно также применять к системам, подчиненным неидеальным связям, если силы трения, соответствующие этим связям, включить в число активных сил.

<sup>1)</sup> Имеются в виду даламберовы силы инерции, так как предполагается, что система отсчета является инерциальной (стр. 56).

3° Действием (действием по Гамильтону) называется интеграл от функции Лагранжа  $L$  по времени:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

где  $t_0$  — начальный момент времени, в который система занимает положение, характеризуемое набором  $s$  значений обобщенных координат  $q_{i0}$ ,  $t_1$  — момент времени, в который положение системы определяется набором  $s$  координат  $q_{i1}$ .

Укороченным действием (действием по Лагранжу) называют интеграл вида

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} (H + L) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i dt,$$

где  $H$  — функция Гамильтона голономной системы с  $s$  степенями свободы, а  $p_i$  — обобщенный импульс (стр. 92). В частности, для консервативной голономной системы  $H = \text{const}$  и

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - H(t_1 - t_0) + S,$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $S$  — действие.

4° Интегральные вариационные принципы механики.

Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона): действительное перемещение консервативной голономной системы из положения  $A_0(q_{i0})$  в момент времени  $t_0$  в положение  $A_1(q_{i1})$  в момент времени  $t_1$  отличается от всех кинематически возможных перемещений этой системы из  $A_0$  в  $A_1$  за тот же промежуток времени  $t_1 - t_0$  тем, что для него действие экстремально (точнее, стационарно), т. е.

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0.$$

Здесь  $\delta$  — символ изохронной вариации, т. е. при варьировании действия время  $t$  (в частности,  $t_0$  и  $t_1$ ) не варьируется. Кроме того, предполагается, что начальное и конечное положения  $A_0$  и  $A_1$  системы фиксированы, т. е.  $\delta q_{i0} = \delta q_{i1} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Принцип Гамильтона можно обобщить на произвольную голономную систему. Его математическая запись в

этом случае имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i dt = 0$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta L + \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i \right) dt = 0,$$

где  $Q_i$  — обобщенная сила, а  $Q'_i$  — обобщенная непотенциальная сила.

Для голономной неконсервативной системы, обладающей обобщенным потенциалом  $U^*$ , принцип Гамильтона имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad \text{где} \quad L = T - U^*.$$

Принцип Мопертюи — Лагранжа. действительное перемещение консервативной голономной системы из положения  $A_0(q_{i0})$  в положение  $A_1(q_{i1})$  отличается от всех кинематически возможных изоэнергетических перемещений этой системы из  $A_0$  в  $A_1$  тем, что для него укороченное действие экстремально (точнее, минимально), т. е.

$$\Delta S_0 \equiv \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0$$

Здесь  $\Delta$  — символ полной вариации<sup>1)</sup>, при нахождении которой варьируются не только  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  (как при  $\delta$ -варьировании), но и время, т. е. пределы интегрирования. Кроме того, предполагается, что полная механическая энергия системы  $E = H = \text{const}$ , а начальное и конечное положения  $A_0$  и  $A_1$  системы фиксированы, т. е.  $\Delta q_{i0} = \Delta q_{i1} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

<sup>1)</sup> Связь между полной и изохронной вариациями произвольной функции  $f(q, t)$ :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t = \delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t$$

Принцип Мопертюи–Якоби для консервативной голономной системы:

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} \sqrt{2(E-U)} \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} dq_i dq_j} = 0.$$

Он вытекает из принципа Мопертюи–Лагранжа, так как для консервативной системы (стр. 91)  $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E-U)}$  и

$$\sqrt{2T} dt = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j} dt = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} dq_i dq_j}.$$

В частности, для свободной материальной точки с массой  $m$  и полной энергией  $E$ , движущейся в стационарном потенциальном силовом поле,

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} \sqrt{2m(E-U)} ds = 0,$$

где  $U(x, y, z)$  — потенциальная энергия точки,  $ds$  — элемент длины пути. Это соотношение совпадает с математическим выражением принципа Ферма (стр. 625) для распространения луча света в изотропной оптически неоднородной среде с показателем преломления  $n(x, y, z) = C_1 \sqrt{E-U(x, y, z)}$ , где  $C_1$  — постоянный (неварьировемый) коэффициент пропорциональности. Таким образом, существует *оптико-механическая аналогия*: каждой задаче о движении материальной точки в стационарном потенциальном поле соответствует определенная задача геометрической оптики, и наоборот.

## 5. Канонические преобразования

1° В канонических уравнениях Гамильтона обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_s$  и обобщенные импульсы  $p_1, \dots, p_s$  голономной системы играют роль независимых переменных. Преобразования этих  $2s$  переменных к новым независимым переменным

$$q'_i = q'_i(q, p, t) \quad \text{и} \quad p'_i = p'_i(q, p, t)$$

называют *каноническими*, если уравнения движения системы в новых переменных также имеют вид канонических

уравнений Гамильтона<sup>1)</sup>:

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}'_i = - \frac{\partial H'}{\partial q'_i} \quad (i = 1, \dots, s),$$

где  $H' = H'(q', p', t)$  — новая функция Гамильтона.

2° Необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование было каноническим:

$$\left[ \sum_{i=1}^s p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] - \left[ \sum_{i=1}^s p'_i dq'_i - H'(q', p', t) dt \right] = dF,$$

где  $F$  — производящая функция канонического преобразования. Производящую функцию можно записать в одном из четырех видов:

$$F_1(q, q', t); \quad F_2(q, p', t); \quad F_3(p, q', t) \quad \text{и} \quad F_4(p, p', t).$$

Если  $F = F_1$ , то

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q'_i}, \quad p'_i = - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Если  $F = F_2$ , то

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Если  $F = F_3$ , то

$$q_i = - \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = - \frac{\partial F_3}{\partial q'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Если  $F = F_4$ , то

$$q_i = - \frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_4}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Пример 1. Любое преобразование обобщенных координат  $q'_i = f_i(q, t)$  — так называемое *точечное преобразование* — является каноническим, так как получается с помощью производящей функции  $F_2(q, p', t) = \sum_{i=1}^s f_i(q, \dots, q_s, t) p'_i$ . Следовательно, канонические

<sup>1)</sup> Рассматриваются системы, на которые действуют только потенциальные силы.

уравнения Гамильтона инвариантны по отношению к выбору обобщенных координат.

Пример 2. С помощью производящей функции  $F_1(q, q', t) = \sum_{i=1}^s q_i q'_i$  осуществляется каноническое преобразование:  $q'_i = p_i$  и  $p'_i = -q_i$ , сводящееся (с точностью до знака) к взаимному переименованию обобщенных координат и импульсов. Поэтому величины  $q_i$  и  $p_i$  часто называют *канонически сопряженными*.

Пример 3. Изменение величин  $q_i$  и  $p_i$  при движении системы можно рассматривать как непрерывно совершающееся каноническое преобразование, производящей функцией которого в каждый момент времени является функция

$$F_2(q, p', t) = \sum_{i=1}^s q_i p'_i + H(q, p', t) dt:$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p'_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \quad \text{и} \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} = q_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i} dt;$$

так как  $p'_i$  и  $q'_i$  отличаются от  $p_i$  и  $q_i$  на бесконечно малые величины, то с точностью до величин первого порядка малости можно принять  $H(q, p', t) = H(q, p, t)$  и  $\frac{\partial H}{\partial p'_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ , так что

$$p'_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt = p_i + \dot{p}_i dt = p_i + dp_i$$

и

$$q'_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = q_i + \dot{q}_i dt = q_i + dq_i.$$

3° При канонических преобразованиях сохраняется объем фазового пространства:  $\int d\Gamma = \int d\Gamma'$ , где  $d\Gamma = dq_1 \dots dq_s \cdot dp_1 \dots dp_s$ ,  $d\Gamma' = dq'_1 \dots dq'_s \cdot dp'_1 \dots dp'_s$ , а интегрирование производится по произвольной области фазового пространства переменных  $(q, p)$  и по соответствующей ей области фазового пространства переменных  $(q', p')$ .

Отсюда (см. также п. 2°, пример 3) следует *теорема Лиувилля*: если в момент времени  $t_0$  фазовые точки, соответствующие различным начальным состояниям системы, движение которой описывается каноническими уравнениями Гамильтона, непрерывно заполняют элемент  $d\Gamma_0$  объема фазового пространства, то в любой момент вре-

мени  $t$  они непрерывно заполняют элемент  $d\Gamma$  объема фазового пространства, причем  $d\Gamma = d\Gamma_0$ .

4° В каждом конкретном случае для системы, гамильтониан  $H$  которой не изменяется в процессе движения, можно осуществить такое каноническое преобразование обобщенных координат и импульсов, чтобы все обобщенные координаты  $q'_i$  были циклическими (стр. 96). При этом все обобщенные импульсы постоянны:  $p'_i = \alpha_i$  и  $H' = H'(a_1, \dots, a_s)$ , так что  $\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial a_i} = \omega_i(a_1, \dots, a_s) = \text{const}$  и  $q_i = \omega_i t + \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Пример. Линейный гармонический осциллятор.

Функция Гамильтона  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E$ , где  $m$ ,  $E$  и  $\omega$  — масса, энергия и собственная циклическая частота осциллятора. Каноническое преобразование, осуществляемое с помощью производящей функции  $F_1(q, q', t) = \frac{m\omega}{2} q^2 \text{ctg } q'$ , имеет вид

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \text{ctg } q' \quad \text{и} \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 q'}$$

или

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q' \quad \text{и} \quad p = \sqrt{2m\omega p'} \cos q'.$$

Новый гамильтониан  $H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H = p'\omega \cos^2 q' + p'\omega \sin^2 q' = \omega p'$ . Следовательно,  $q'$  — циклическая координата,  $p' = \frac{E}{\omega} = \text{const}$ ,

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \omega, \quad q' = \omega t + \alpha \quad \text{и} \quad q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha).$$

## 6. Законы сохранения

1° Решения уравнений Лагранжа второго рода для механической системы с  $s$  степенями свободы содержат  $2s$  произвольных постоянных и могут быть представлены в следующем виде:

$$q_i = q_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}), \\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}) \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Из этих  $2s$  уравнений можно исключить время  $t$  и убедиться в том, что во всякой механической системе

должны существовать функции обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , которые остаются постоянными при движении. Эти функции называются *интегралами движения*. Отыскание интегралов движения составляет основную задачу механики. Среди интегралов движения есть несколько важнейших, постоянство которых имеет глубокое происхождение, связанное со свойствами основных форм существования материи — времени и пространства. Интегралы движения аддитивны: их значения для системы, состоящей из нескольких взаимодействующих частей, равны сумме значений для каждой части в отдельности.

2° Первым интегралом движения любой замкнутой системы является ее полная энергия (*закон сохранения и превращения энергии*). Этот закон следует из однородности времени, т. е. независимости законов движения системы от выбора начала отсчета времени. В частности, для консервативной системы из однородности времени вытекает закон сохранения полной механической энергии этой системы. Действительно, в силу однородности времени функция Лагранжа  $L$ , определяющая закон движения консервативной системы, не зависит явно от времени и

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right).$$

С помощью уравнений Лагранжа это равенство можно представить в форме

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - L = T + U = \text{const},$$

т. е. полная механическая энергия консервативной системы  $E = T(q, \dot{q}) + U(q)$  является интегралом ее движения. Аддитивность энергии  $E$  системы следует из аддитивности функции Лагранжа, от которой  $E$  зависит линейно. Закон сохранения полной механической энергии

справедлив для любой консервативной системы, как замкнутой, так и незамкнутой.

3° Интегралом движения замкнутой системы является также вектор импульса (количества движения) системы. Закон сохранения импульса следует из однородности пространства. Однородность пространства означает, что параллельный перенос в нем замкнутой механической системы как целого не изменяет механических свойств системы, т. е. оставляет ее функцию Лагранжа неизменной. Функция Лагранжа для замкнутой системы, состоящей из  $N$  материальных точек,

$$L = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N),$$

где  $\mathbf{r}_k$  — радиус-вектор  $k$ -й точки с массой  $m_k$  и  $\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}$  — скорость этой точки. Изменение функции Лагранжа при параллельном переносе системы на бесконечно малое расстояние, определяемое вектором перемещения  $\delta\mathbf{g}$ , т. е. при замене всех  $\mathbf{r}_k$  на  $\mathbf{r}_k + \delta\mathbf{g}$ , равно

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \delta\mathbf{g} = \delta\mathbf{g} \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k}.$$

Требование  $\delta L = 0$  в силу произвольности  $\delta\mathbf{g}$  означает,

что  $\sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0$ . По уравнениям Лагранжа  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{f}_k$ , где  $\mathbf{f}_k$  — результирующая всех непотенциальных сил, действующих на  $k$ -ю точку системы. Для замкнутой системы эти силы — внутренние, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = 0,$$

или

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k = \text{const}.$$

Импульс замкнутой системы, равный векторной сумме импульсов всех ее материальных точек, является интегралом движения системы.

4° Интегралом движения замкнутой системы также является вектор момента импульса (момента количества движения). Закон сохранения момента импульса связан

с изотропностью пространства. Механические свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого в изотропном пространстве. При этом функция Лагранжа системы не должна изменяться. При повороте системы изменяются направления радиус-векторов и скоростей всех частиц, причем все векторы  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{v}_k$  преобразуются по одинаковому закону:

$$\delta \mathbf{r} = [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}], \quad \delta \mathbf{v} = [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}],$$

где  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  — вектор бесконечно малого поворота. Его абсолютная величина равна углу  $\delta \varphi$  поворота, а направление совпадает с осью поворота, в соответствии с правовинтовой системой отсчета (стр. 15). Изменение функции Лагранжа при бесконечно малом повороте замкнутой механической системы

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \delta \mathbf{r}_k + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} \delta \mathbf{v}_k \right);$$

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \mathbf{p}_k$  и  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \dot{\mathbf{p}}_k - \mathbf{f}_k$  — по уравнениям Лагранжа. Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}_k [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}_k] + \mathbf{p}_k [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}_k] - \mathbf{f}_k [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}_k]) = \\ &= \delta \boldsymbol{\varphi} \sum_{k=1}^N ([\mathbf{r}_k \dot{\mathbf{p}}_k] + [\dot{\mathbf{r}}_k \mathbf{p}_k] - [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k]) = \delta \boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N [\mathbf{r}_k \mathbf{p}_k], \end{aligned}$$

так как для замкнутой системы  $\sum_{k=1}^N [\mathbf{r}_k \mathbf{f}_k] = 0$ . Таким образом, в силу произвольности  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  условие  $\delta L = 0$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N [\mathbf{r}_k \mathbf{p}_k] = 0.$$

При движении замкнутой системы остается постоянной векторная величина:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N [\mathbf{r}_k \mathbf{p}_k] = \text{const},$$

называемая моментом импульса системы (моментом количества движения, см. также стр. 79).

5° Любая изолированная система имеет по крайней мере семь аддитивных интегралов движения (семь урав-

нений законов сохранения): одно уравнение закона сохранения полной энергии, по три уравнения законов сохранения проекций векторов импульса и момента импульса на координатные оси.

## ГЛАВА 6

### МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 1. Основные понятия

1° *Колебаниями* или *колебательным движением* называются движения (изменения состояния), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. По своей физической природе колебания весьма разнообразны. К ним относятся механические колебания (качания маятников, движения поршней двигателей внутреннего сгорания, колебания струн, стержней и пластин, вибрации фундаментов), электромагнитные колебания (стр. 483) и др.

2° Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. *Периодом колебаний*  $T$  называется тот наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно *полное колебание*. *Частотой* периодических колебаний  $\nu$  называется число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Зависимость от времени  $t$  периодически колеблющейся физической величины  $S$  имеет вид  $S = S_0 + x(t)$ , где  $S_0 = \text{const}$ , а  $x(t)$  — периодическая функция времени:  $x(t+T) = x(t)$ .

3° Простейшим типом периодических колебаний являются *гармонические* (синусоидальные) колебания. В этом случае

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  — постоянные величины, причем  $A > 0$ ,  $\omega > 0$  и  $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ . Величина  $A$ , равная максимальному



абсолютному значению  $x$ , называется *амплитудой* колебания. Выражения  $\Phi = \omega t + \varphi_0$  и  $\Phi_1 = \omega t + \varphi_1$  определяют значение  $x$  в данный момент времени  $t$  и называются *фазой* колебания. В момент начала отсчета времени ( $t = 0$ ) фаза равна *начальной фазе*  $\varphi_0$  или  $\varphi_1$ . Величина  $\omega$  называется *циклической* или *круговой* частотой:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины  $x$  также изменяются по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \\ \ddot{x} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x. \end{aligned}$$

Следовательно, гармонически колеблющаяся величина  $x$  удовлетворяет уравнению

$$+\omega^2 x = 0,$$

которое называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

4° Гармоническое колебание может быть представлено графически с помощью вращающегося вектора амплитуды (рис. I.6.1). Вектор  $A$ , численно

равный амплитуде колебания, равномерно вращается против часовой стрелки вокруг оси  $O$ , перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью  $\omega$ . Если в момент времени  $t = 0$  угол между вектором  $A$  и осью  $Ox$  равен  $\varphi_1$ , то проекция  $B$  конца этого вектора на ось  $Ox$  совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi_1)$ .

5° Если одновременно совершаются два гармонических колебания одинаковой частоты, при которых скалярная физическая величина  $S = S_0 + x$  изменяется по законам

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

то результирующее изменение  $x = x_1 + x_2$  величины  $S$  совершается с той же частотой по гармоническому закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Для отыскания  $A$  и  $\varphi$  пользуются *методом векторных*

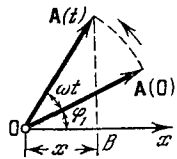


Рис. I.6.1.

*диаграмм*, основанным на том, что в каждый момент времени вращающиеся векторы амплитуд складываемых колебаний ( $A_1$  и  $A_2$ ) и результирующий вектор  $A$  связаны соотношением  $A = A_1 + A_2$ . Все три вектора вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , так что их взаимное расположение не зависит от времени. Из рис. I.6.2, соответствующего моменту времени  $t = 0$ , видно, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$  ( $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ), то  $A = A_1 + A_2$ ; если  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$  ( $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ), то  $A = |A_1 - A_2|$ . В общем случае  $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$ .

6° При наложении (*суперпозиции*) двух гармонических колебаний  $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ , имеющих разные частоты и амплитуды, результирующее колебание не является гармоническим. Его можно представить в следующей форме:

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)],$$

где

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos[\psi(t) - \varphi_1],$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \psi(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \psi(t)} \quad \text{и} \quad \psi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2.$$

С физической точки зрения такое представление результирующего негармонического колебания имеет смысл только при наложении гармонических колебаний, частоты которых достаточно близки. В этом случае  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  — медленно меняющиеся функции времени, а колебательный процесс называется *биениями*. Величина  $A(t)$  периодически изменяется в пределах от  $|A_1 - A_2|$  до  $A_1 + A_2$  с частотой  $\nu_0 = |\nu_2 - \nu_1| = \frac{1}{2\pi} |\omega_2 - \omega_1|$ , называемой *частотой биений*.

7° Сложное (негармоническое) периодическое колебание физической величины  $S$  может быть представлено в виде *ряда Фурье*, состоящего из простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной

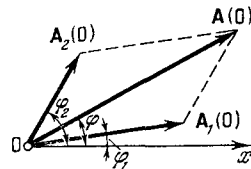


Рис. I.6.2.

циклической частоте  $\omega = 2\pi/T$ :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}.$$

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются по формулам Эйлера – Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t dt \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Отыскание ряда Фурье, соответствующего заданному сложному колебанию, называется *гармоническим анализом* последнего. Члены этого ряда, циклические частоты которых равны  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т. д., называются соответственно первой (основной), второй, третьей и т. д. *гармониками* сложного колебания.

8° Колебания вида  $x = A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$  называются *модулированными*, если  $\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega A_{\max}$  и  $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll \omega$ . Колебания называются *амплитудно-модулированными*, если  $\varphi = \text{const}$ , и *модулированными по фазе или частоте*, если  $A = \text{const}$ . Простейшим примером модулированных колебаний являются биения, для которых  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  – периодические функции времени (стр. 111).

9° *Свободными колебаниями* называются колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, в результате какого-либо начального отклонения этой системы от состояния устойчивого равновесия.

*Вынужденными колебаниями* называются колебания системы, вызываемые действием на нее периодических внешних сил.

10° Система называется *линейной*, если ее движение описывается линейными дифференциальными уравнениями. В противном случае система называется *нелинейной*, а ее колебания – *нелинейными колебаниями*.

Колебательная система, обладающая одной степенью свободы, называется одномерным *осциллятором* (вibra-

тором). Если свободные колебания этой системы являются гармоническими, то она называется одномерным *гармоническим осциллятором*. В противном случае осциллятор называется *ангармоническим*.

## 2. Малые колебания системы, имеющей одну степень свободы

### А. Свободные колебания консервативной системы

1° Кинетическая и потенциальная энергии системы равны:

$$W_K = \frac{1}{2} b(q)\dot{q}^2, \quad \text{а} \quad W = W_{\Pi}(q),$$

где  $q$  – обобщенная координата (стр. 89).  $b(q) \geq 0$

В состоянии устойчивого равновесия ( $q = q_0$ ) потенциальная энергия имеет минимум, так что

$$\left( \frac{dW_{\Pi}}{dq} \right)_{q=q_0} = 0 \quad \text{и} \quad \left( \frac{d^2W_{\Pi}}{dq^2} \right)_{q=q_0} = \beta_0 > 0.$$

Если величину потенциальной энергии отсчитывать от ее значения в состоянии  $q = q_0$ , то  $W_{\Pi}(q_0) = 0$  и ряд Тейлора для  $W_{\Pi}(q)$  имеет вид

$$W_{\Pi}(q) = \beta_0 \frac{(q - q_0)^2}{2!} + \left( \frac{d^3W_{\Pi}}{dq^3} \right)_{q=q_0} \frac{(q - q_0)^3}{3!} + \dots$$

2° Колебания называются *малыми*, если в правой части этого равенства всеми членами, кроме первого, можно пренебречь, так что

$$W_{\Pi}(q) = \frac{\beta_0}{2} (q - q_0)^2 = \frac{\beta_0 x^2}{2}$$

и

$$W_K(q) = \frac{1}{2} b(q_0) \dot{x}^2 = \frac{b_0 \dot{x}^2}{2},$$

где  $x = q - q_0$  – смещение системы из состояния устойчивого равновесия.

3° Дифференциальное уравнение малых колебаний системы имеет вид

$$b_0 \ddot{x} + \beta_0 x = 0.$$

Величина  $-\beta_0 x = -\frac{dW_{\Pi}}{dx}$  представляет обобщенную силу  $F_x$ , сопряженную с обобщенной координатой  $x$

(стр. 90). Обобщенная сила  $F_x = -\beta_0 x$ , где  $\beta_0 > 0$ , называется *квазиупругой силой*, а величина  $\beta_0$  — *коэффициентом квазиупругой силы*.

4° Колебания системы являются гармоническими:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Их циклическая частота  $\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$  определяется свойствами системы и называется *собственной циклической частотой* колебаний консервативной системы. Период колебаний  $T = 2\pi \sqrt{b_0/\beta_0}$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_1$  определяются из начальных условий. Например, если в момент времени  $t = 0$   $x = x_0$  и  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , то

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

Амплитуда свободных колебаний консервативной системы не зависит от времени. Поэтому такие колебания называются *незатухающими*.

5° Кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний системы являются периодическими функциями времени с периодом  $T' = T/2 = \pi \sqrt{b_0/\beta_0}$ :

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \beta_0 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1) = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Полная механическая энергия гармонических колебаний системы

$$W = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 = \text{const}.$$

**Пример 1.** *Пружинный маятник* — тело, совершающее прямолинейные колебания вдоль оси  $Ox$  под действием упругой силы  $F = -ax$  ( $a$  — коэффициент упругости);  $\beta_0 = a$ ,  $W_{\text{к}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$  и  $b_0 = m$  — масса тела. Циклическая частота и период колебаний равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

**Пример 2.** *Математический маятник* — материальная точка  $M$ , подвешенная к неподвижной точке на невесомой нерастяжимой нити (или стержне) и совершающая

движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. I.6.3):

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2, \quad b_0 = ml^2,$$

$$W_{\text{п}} = mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

В случае малых колебаний  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ ,

$$W_{\text{п}} \approx \frac{mgl\alpha^2}{2}, \quad \beta_0 = mgl.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

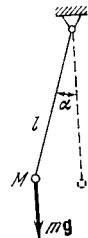


Рис. I.6.3.

При произвольных значениях угла отклонения  $\alpha$  колебания математического маятника являются нелинейными (стр. 135).

**Пример 3.** *Циклоидальный маятник* — материальная точка  $M$ , движущаяся под действием силы тяжести вдоль циклоиды, ось которой вертикальна, а выпуклость обращена вниз (рис. I.6.4). Если за начало отсчета потенциальной энергии точки принять ее значение в вершине циклоиды  $O'$  и за обобщенную координату — длину  $s$  дуги циклоиды, отсчитываемую от точки  $O'$ , то

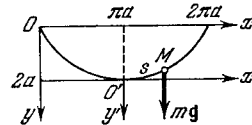


Рис. I.6.4.

ординату — длину  $s$  дуги циклоиды, отсчитываемую от точки  $O'$ , то

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \quad \text{и} \quad W_{\text{п}} = \frac{mg}{8a} s^2,$$

так что

$$b_0 = m \quad \text{и} \quad \beta_0 = \frac{mg}{4a},$$

где  $a$  — параметр циклоиды (радиус производящей окружности). Колебания возможны, если полная энергия маятника  $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} < 2mga$ . Колебания циклоидального маятника *изохронны*, т. е. их период не зависит от амплитуды колебаний и всегда равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

**Пример 4. Физический маятник** — абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$ , не проходящей через его центр тяжести  $C$  (рис. I.6.5):

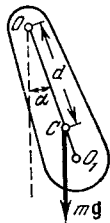


Рис I 6.5.

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2, \quad b_3 = J,$$

$$W_{\text{п}} = mgd(1 - \cos \alpha) = 2mgd \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

где  $\alpha$  — угол отклонения из положения равновесия,  $J$  — момент инерции тела относительно оси качания  $O$ .

В случае малых колебаний  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ ,

$W_{\text{п}} \approx \frac{1}{2} mgd \alpha^2$  и  $\beta_0 = mgd$ . Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Приведенной длиной  $l_{\text{пр}}$  физического маятника называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний:  $l_{\text{пр}} = \frac{J}{mgd} > d$ , так как по теореме Штейнера (стр. 72)  $J = J_c + md^2 > md^2$ . Точка  $O_1$ , лежащая на линии  $OC$  на расстоянии  $OO_1 = l_{\text{пр}}$ , называется *центром качания физического маятника*. Точка подвеса  $O$  и центр качания  $O_1$  обладают взаимностью: при переносе точки подвеса в точку  $O_1$  точка  $O$  становится центром качания, так что период колебаний маятника не изменяется.

**Пример 5. Крутильный маятник** — твердое тело, подвешенное на вертикальном невесомом упругом стержне (нити), верхний конец которого закреплен неподвижно, а ось  $Oz$  совпадает с одной из свободных осей тела (рис. I.6.6). Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при его кручении вокруг оси  $Oz$ .

В случае малых колебаний  $W_{\text{к}} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$  и  $W_{\text{п}} = \frac{1}{2} c \alpha^2$ , так что  $b_0 = J$  и  $\beta_0 = c$ , где  $\alpha$  — угол поворота маятника вокруг оси  $Oz$  из положения равновесия,  $J$  — момент инерции маятника относительно оси  $Oz$  и  $c$  — крутильная жесткость стержня.

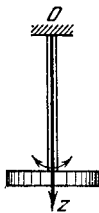


Рис. I.6.6

Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

В случае однородного круглого стержня  $c = \pi d^4 G/32l$ , где  $d$  и  $l$  — диаметр и длина стержня, а  $G$  — модуль сдвига (стр. 285) материала стержня.

### Б. Затухающие колебания

1° *Затухающими колебаниями* называются колебания, энергия которых уменьшается с течением времени. Затухание свободных колебаний механической системы обусловлено диссипацией ее энергии вследствие действия на систему непотенциальных сил сопротивления (трения).

Если в системе отсутствует сухое трение (стр. 54), то для случая малых колебаний можно считать, что обобщенная сила трения равна  $F_{\text{тр}} = -r\dot{x}$ , где  $r > 0$  — обобщенный коэффициент трения. Тогда дифференциальное уравнение малых затухающих колебаний системы имеет вид

$$b_0 \ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = 0$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\delta = r/2b_0$  — коэффициент затухания, а  $\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$  — циклическая частота свободных колебаний системы в отсутствие трения.

2° Если  $\delta > \omega_0$ , то имеет место *апериодическое затухание*:

$$x = C_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}.$$

Величина  $x$  монотонно убывает с ростом  $t$ . Система, выведенная из состояния равновесия, асимптотически, т. е. при  $t \rightarrow \infty$ , возвращается в это состояние.

3° Если  $\delta < \omega_0$ , то система совершает затухающие колебания:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A_0$  и  $\varphi_0$  — постоянные величины, определяемые из начальных условий, а  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — собственная циклическая частота колебаний диссипативной системы. Величина  $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$  называется амплитудой затухающих колебаний. Значения амплитуды для моментов времени  $t$ ,  $t + \Delta t$ ,  $t + 2\Delta t$  и т. д. образуют убывающую

геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен  $e^{-\delta t}$ . Зависимость  $x$  от  $t$  изображена на рис. I.6.7.

4° Периодом (условным периодом) затухающих колебаний<sup>1)</sup> называется промежуток времени между двумя последовательными состояниями системы, при которых колеблющаяся величина  $x$  проходит через равновесное значение, изменяясь в одном и том же направлении (например, возрастая):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Рис. I.6.7.

5° Логарифмическим декрементом затухания

$\vartheta$  называется натуральный логарифм отношения амплитуд колебаний в моменты времени  $t$  и  $t + T$ :

$$\vartheta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Логарифмический декремент затухания — величина, обратная числу колебаний  $N$ , по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз:  $\vartheta = 1/N$ . Промежуток времени  $\tau$ , необходимый для этого, называется временем релаксации:  $\tau = NT = 1/\delta$ .

6° Зависимость полной энергии механической системы от времени имеет вид

$$W(t) = \frac{1}{2} b_0 A_0^2 e^{-2\delta t} [\omega_0^2 - \delta^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - \delta \omega \sin(2\omega t + 2\varphi_0)],$$

$$\frac{dW}{dt} = -r\dot{x}^2 = -2\Phi,$$

где  $\Phi = \frac{1}{2} r\dot{x}^2$  — диссипативная функция.

7° Если затухание механических колебаний системы обусловлено сухим трением и  $|\mathbf{F}_{\text{тр}}| = \text{const}$ , то циклическая частота  $\omega$  затухающих колебаний совпадает с

<sup>1)</sup> Затухающие колебания не являются периодическими (стр. 109). Поэтому к ним неприменимы обычные понятия периода и частоты.

циклической частотой  $\omega_0$  свободных колебаний той же системы в отсутствие трения ( $\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$ ). Убывание амплитуды происходит по закону арифметической прогрессии: за каждую половину цикла колебания амплитуда уменьшается на одинаковую величину  $2|\mathbf{F}_{\text{тр}}|/\beta_0$ . Колебания прекращаются, как только амплитуда становится меньше  $|\mathbf{F}_{\text{тр}}|/\beta_0$ .

## В. Вынужденные колебания

1° Дифференциальное уравнение *малых* вынужденных колебаний записывается следующим образом:

$$b_0 \ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = F(t)$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{b_0} F(t),$$

где  $F(t)$  — обобщенная периодическая внешняя сила, сопряженная с обобщенной координатой  $x$ . Сила  $F(t)$ , вызывающая вынужденные колебания системы, называется *возмущающей или вынуждающей силой*.

2° Общее решение этого уравнения равно сумме его частного решения  $x_1$  и общего решения  $x_2$  соответствующего однородного уравнения (т. е. при  $F(t) = 0$ ):

$$x = x_1 + x_2.$$

Решение  $x_2 = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$  характеризует свободные затухающие колебания системы (стр. 117),  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2 = 0$ .

Поэтому по истечении некоторого промежутка времени после начала вынужденных колебаний, соответствующего переходному режиму, величиной  $x_2$  можно пренебречь и считать, что при установившихся вынужденных колебаниях  $x = x_1$ .

3° Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t,$$

то установившиеся вынужденные колебания также являются гармоническими, причем совершаются с той же циклической частотой  $\Omega$ :

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi_1),$$

где

$$A = \frac{F_0}{b_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Кривые зависимости от  $\Omega$  амплитуды  $A$  и угла  $\varphi_1$  сдвига фазы вынужденных колебаний приведены на

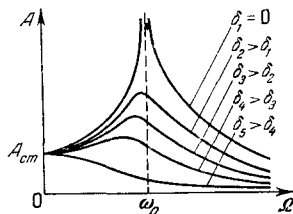


Рис. I.6.8.

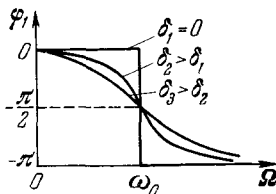


Рис. I.6.9.

рис. I.6.8 и I.6.9. При  $\Omega \ll \omega_0$  амплитуда  $A \approx A_{ст} = F_0/b_0\omega_0^2 = F_0/\beta_0$  — статическая деформация системы под действием постоянной силы  $F_0$ . Если  $\Omega \gg \omega_0$ , то  $A = F_0/b_0\Omega^2$ . Максимальное значение амплитуды  $A_{макс}$  соответствует циклической частоте

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

которая несколько меньше собственной циклической частоты  $\omega$  колебаний системы ( $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ),

$$A_{макс} = \frac{F_0}{2\delta b_0 \omega}.$$

Из этой формулы следует, что при  $\delta \rightarrow 0$   $A_{макс} \rightarrow \infty$ . Однако такая экстраполяция неправильна, так как с возрастанием амплитуды колебания перестают быть малыми и к ним неприменима рассмотренная выше теория.

4° Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению  $\Omega_0$  называется *резонансом*, а величина  $\Omega_0$  — *резонансной циклической*

*частотой*. Кривые зависимости  $A$  от  $\Omega$ , показанные на рис. I.6.8, называются *резонансными кривыми*.

Увеличение коэффициента затухания  $\delta$  приводит к сглаживанию резонансных кривых и уменьшению  $A_{макс}$ , т. е. к значительному ослаблению явления резонанса. При  $\delta \gg \omega_0/\sqrt{2}$  резонанс полностью исчезает. В приближенных расчетах резонанса в системах с малым затуханием можно считать, что  $\Omega_0 \approx \omega_0$ .

5° Зависимость полной энергии механической системы от времени имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi + \dot{x}F_0 \cos \Omega t,$$

где  $\Phi = r\dot{x}^2/2$  — диссипативная функция, а  $\dot{x}F_0 \cos \Omega t$  — мощность внешнего источника энергии, вызывающего вынужденные колебания системы.

6° Если на систему действует произвольная возмущающая сила  $F(t)$ , период которой равен  $T$ , то эту силу можно разложить в ряд Фурье (стр. 111), т. е. представить в виде суммы гармоник, циклические частоты которых кратны основной циклической частоте  $2\pi/T$ . Вынужденные колебания системы, вызываемые силой  $F(t)$ , являются результатом наложения колебаний системы под действием каждой из гармоник в отдельности. Наиболее сильно влияют на систему те гармоники силы  $F(t)$ , циклические частоты которых близки к резонансной циклической частоте  $\Omega_0$  системы.

### 3. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы

#### А. Свободные колебания консервативной системы

1° Если система обладает  $s$  степенями свободы, то ее положение относительно системы отсчета полностью определяется значениями  $s$  независимых обобщенных координат  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). В состоянии устойчивого равновесия ( $q_i = q_{i0}$ ) потенциальная энергия  $W_{п}$  системы имеет минимальное значение  $W_{п0}$ , которое в силу условия начала отсчета  $W_{п}$  в дальнейшем принято равным нулю. В случае малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия ее потенциальная энергия выражается следующей положительно определенной

квадратичной формой <sup>1)</sup> от обобщенных координат:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s \beta_{ik} x_i x_k,$$

где  $x_i = q_i - q_{i0}$ ,  $x_k = q_k - q_{k0}$ , а  $\beta_{ik}$  — постоянные вещественные коэффициенты, причем

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} = \left( \frac{\partial^2 W_{II}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{x_1=x_2=\dots=x_s=0}.$$

Кинетическая энергия  $W_K$  системы выражается также положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей:

$$W_K = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s b_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k,$$

где  $b_{ik}$  — постоянные вещественные коэффициенты, причем

$$b_{ik} = b_{ki} = \left( \frac{\partial^2 W_K}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \right)_{\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dots=\dot{x}_s=0}.$$

2° Функция Лагранжа (стр. 91) системы равна

$$L = W_K - W_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s (b_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \beta_{ik} x_i x_k).$$

Движение системы описывается  $s$  уравнениями Лагранжа второго рода (стр. 93), которые имеют вид

$$\sum_{k=1}^s (b_{ik} \ddot{x}_k + \beta_{ik} x_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (*)$$

3° Неизвестные функции времени  $x_k$  следует искать в форме

$$x_k = A_k e^{i\omega t},$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

Соотношения между постоянными коэффициентами  $A_k$  определяются из системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^s (\beta_{ik} - \omega^2 b_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (**)$$

1) Квадратичная форма  $\sum_{i, k=1}^s \beta_{ik} x_i x_k$  называется положительно

определенной, если она обращается в нуль только тогда, когда все  $x_i$  одновременно равны нулю, а при любых других значениях переменных  $x_i$  принимает положительные значения.

Необходимым и достаточным условием существования отличных от нуля решений этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega^2 b_{11} & \beta_{12} - \omega^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} - \omega^2 b_{1s} \\ \beta_{21} - \omega^2 b_{21} & \beta_{22} - \omega^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} - \omega^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} - \omega^2 b_{s1} & \beta_{s2} - \omega^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} - \omega^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение степени  $s$  относительно  $\omega^2$  называется *характеристическим* или *вековым*. Оно имеет  $s$  вещественных положительных корней  $\omega_l^2$  ( $l = 1, 2, \dots, s$ ). Величины  $\omega_l$  называются *собственными* или *главными циклическими частотами системы*.

4° Для каждого корня  $\omega_l^2$  из уравнений (\*\*\*) можно найти соответствующую систему значений  $A_k$  <sup>1)</sup>:  $A_k = A_k(\omega)$ . Общее решение системы (\*) имеет вид

$$x_k = \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (***)$$

где  $C_l, \varphi_l$  — независимые вещественные постоянные, определяемые из начальных условий:

$$\left. \begin{aligned} x_k(0) &= \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \cos \varphi_l, \\ \dot{x}_k(0) &= - \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \omega_l \sin \varphi_l \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Из (\*\*\*) следует, что колебания обобщенной координаты  $x_k$  являются результатом наложения  $s$  гармонических колебаний, каждое из которых имеет, вообще говоря, произвольные амплитуды и начальные фазы, но вполне определенные циклические частоты  $\omega_l$ .

5° Выражения  $\theta_i = C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l)$ , где  $l = 1, 2, \dots, s$ , называются *нормальными* или *главными координатами* механической системы. Они связаны с координатами  $x_k$

1) Если все корни  $\omega_l^2$  различны, то один из коэффициентов  $A_k$  может быть выбран произвольно. В случае кратных корней число произвольно задаваемых коэффициентов  $A_k$  возрастает.

линейным однородным преобразованием

$$x_k = \sum_{i=1}^s A_k(\omega^2) \theta_i \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

В свою очередь

$$\theta_l = \sum_{k=1}^s a_{lk} x_k \quad (l = 1, 2, \dots, s),$$

где  $a_{lk}$  — постоянные вещественные коэффициенты.

Кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные через нормальные координаты, имеют вид сумм квадратов:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \beta_i \theta_i^2, \quad W_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i \dot{\theta}_i^2.$$

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (b_i \dot{\theta}_i^2 - \beta_i \theta_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i (\dot{\theta}_i^2 - \omega_i^2 \theta_i^2),$$

где  $\omega_i = \sqrt{\beta_i/b_i}$  — собственная циклическая частота системы, соответствующая нормальной координате  $\theta_i$ . Обычно вместо нормальных координат  $\theta_i$  пользуются нормированными нормальными координатами  $Q_i = \sqrt{b_i} \theta_i$ .

Тогда  $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2)$ . Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

6° Для системы с двумя степенями свободы, соответствующими обобщенным координатам  $x_1$  и  $x_2$ ,

$$W_{II} = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{x}_1^2 + 2b_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + b_{22} \dot{x}_2^2),$$

$$W_{II} = \frac{1}{2} (\beta_{11} x_1^2 + 2\beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{22} x_2^2).$$

Нормальные (ненормированные) координаты системы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с  $x_1$  и  $x_2$  соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2 \\ x_2 &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{x_1 - \gamma_2 x_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \\ \theta_2 &= \frac{x_1 - \gamma_1 x_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{aligned}$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} \gamma_1 \gamma_2 + b_{12} (\gamma_1 + \gamma_2) + b_{22} &= 0, \\ \beta_{11} \gamma_1 \gamma_2 + \beta_{12} (\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_{22} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные в нормальных координатах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , имеют вид:

$$W_{II} = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2),$$

$$W_{II} = \frac{1}{2} (\beta_1 \theta_1^2 + \beta_2 \theta_2^2),$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_i &= b_{11} \gamma_i^2 + 2b_{12} \gamma_i + b_{22}, \\ \beta_i &= \beta_{11} \gamma_i^2 + 2\beta_{12} \gamma_i + \beta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2).$$

Квадраты собственных циклических частот системы равны

$$\omega_i^2 = \frac{\beta_i}{b_i} = \frac{\beta_{11} \gamma_i^2 + 2\beta_{12} \gamma_i + \beta_{22}}{b_{11} \gamma_i^2 + 2b_{12} \gamma_i + b_{22}} \quad (i = 1, 2). \quad \text{Рис. I.6.10.}$$

Пример 1. Двойной плоский маятник (рис. I.6.10). Потенциальная энергия:

$$W_{II} = m_1 g l_1 (1 - \cos \alpha_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \alpha_1) + l_2 (1 - \cos \alpha_2)].$$

В случае малых колебаний  $\sin \frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1}{2}$  и  $\sin \frac{\alpha_2}{2} \approx \frac{\alpha_2}{2}$ ,

$$W_{II} = \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \alpha_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \alpha_2^2,$$

$$\beta_{11} = (m_1 + m_2) g l_1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{22} = m_2 g l_2.$$

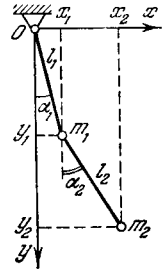
Кинетическая энергия:

$$W_{II} = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

где  $x_1 = l_1 \sin \alpha_1$ ,  $y_1 = l_1 \cos \alpha_1$ ,  $x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2$  и  $y_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2$ .

В случае малых колебаний

$$\left. \begin{aligned} W_{II} &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2, \\ b_{11} &= (m_1 + m_2) l_1^2, \quad b_{12} = m_2 l_1 l_2, \quad b_{22} = m_2 l_2^2. \end{aligned} \right\}$$





Уравнения Лагранжа для малых колебаний имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{a}_1 + m_2 l_2 \ddot{a}_2 - (m_1 + m_2) g a_1 &= 0, \\ l_1 \ddot{a}_1 + l_2 a_2 - g a_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 - \omega^2 (m_1 + m_2) l_1^2 & -\omega^2 m_2 l_1 l_2 \\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2 g l_2 - \omega^2 m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Квадраты собственных циклических частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1} \left\{ (m_1 + m_2) (l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2) [(m_1 + m_2) (l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{g}{\omega_1^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} \right) C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \left( \frac{g}{\omega_2^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} \right) C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ a_2 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

**Пример 2.** Плоское движение материальной точки под действием двух взаимно перпендикулярных квазиупругих сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . В прямоугольной декартовой системе координат  $xOy$ , начало которой совпадает с положением равновесия материальной точки, а оси  $Ox$  и  $Oy$  направлены вдоль линий действия соответственно сил  $\mathbf{F}_1$  и сил  $\mathbf{F}_2$ , уравнения движения точки имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \beta_1 x &= 0, \\ m\ddot{y} + \beta_2 y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — коэффициенты квазиупругих сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Координаты  $x$  и  $y$  являются нормальными, и их зависимость от времени имеет вид:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\beta_1/m}$  и  $\omega_2 = \sqrt{\beta_2/m}$  — собственные циклические частоты.

Таким образом, движение точки является результатом наложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Траектория точки заключена внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$  и соответственно равны  $2A_1$  и  $2A_2$ , а центр совпадает с точкой  $O$ . В случае рационального отношения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  траектории замкнуты; они называются *фигурами Лиссажу*. Вид фигур Лиссажу зависит от  $\omega_2/\omega_1$ ,

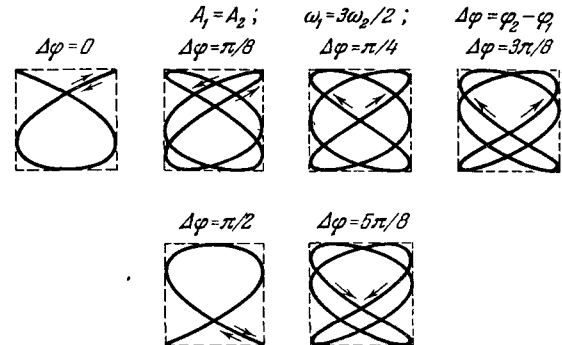


Рис. I.6.11.

$A_2/A_1$  и  $\varphi_2 - \varphi_1$  (рис. I.6.11). Отношение частот  $\omega_2/\omega_1$  равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу с горизонтальной и вертикальной сторонами прямоугольника, в который она вписывается.

Если  $\omega_1 = \omega_2$ , то фигуры Лиссажу имеют форму эллипса:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Такие колебания называются *эллиптически поляризованными*. На рис. I.6.12 показаны частные случаи эллиптически поляризованных колебаний. При  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k = 0; \pm 1; \dots$ ) эллипс приведен к осям  $Ox$  и  $Oy$ . Если, кроме того,  $A_1 = A_2$ , то траектория точки имеет вид окружности. Такие колебания называются *циркулярно*

поляризованными (поляризованными по кругу). Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$  ( $k=0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ), то эллипс вырождается в отрезок прямой и колебания называются *линейно поляризованными*.

Пример 3. Два одинаковых математических маятника с упругой связью (рис. 1.6.13). Если массой пружины можно пренебречь, то в случае малых колебаний

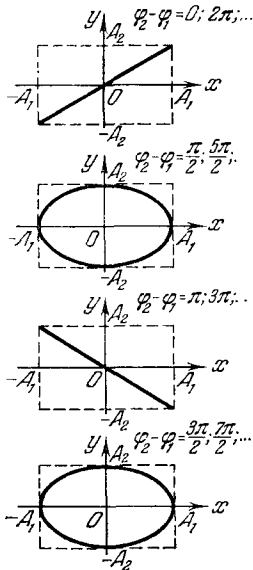


Рис. 1.6.12

$$W_{\text{к}} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)$$

и

$$W_{\text{п}} = \frac{mgl}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{2} al^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

где  $a$  — коэффициент упругости пружины,  $m$  — массы маятников.

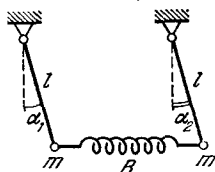


Рис. 1.6.13.

Произведя замену переменных  $\theta_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$  и  $\theta_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ , получим:

$$W_{\text{к}} = ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad \text{и} \quad W_{\text{п}} = mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2al^2\theta_2^2.$$

Координаты  $\theta_1$  и  $\theta_2$  являются нормальными. Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2a}{m}\right) \theta_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — циклическая частота колебаний свободных маятников. Собственные циклические частоты системы равны  $\omega_0$  и  $\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2a}{m}}$ ;

$$\theta_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \theta_2 = A_2 \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + \frac{2a}{m\omega_0^2}} t + \varphi_2\right).$$

### Б. Затухающие колебания

1° Если в системе отсутствует сухое трение (стр. 54), то в случае малых колебаний можно считать, что обобщенные силы трения  $F_{\text{тр}}$ , соответствующие обобщенным координатам  $q_i$ , являются линейными функциями обобщенных скоростей:  $F_{i\text{тр}} = -\sum_{k=1}^s a_{ik} \dot{x}_k$ , где  $s$  — число степеней свободы системы,  $x_k$  — отклонения ее обобщенных координат  $q_k$  от их равновесных значений  $q_{k0}$ ,  $a_{ik}$  — обобщенные коэффициенты трения ( $a_{ik} = a_{ki}$ ), которые можно считать постоянными.

Зависимость полной механической энергии  $W$  системы от времени имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi,$$

где  $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$  — диссипативная функция системы, являющаяся существенно положительной, так как энергия  $W$  в процессе движения системы непрерывно убывает.

2° Уравнения Лагранжа для системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_{i\text{тр}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Пользуясь для функции Лагранжа выражением стр. 122, получаем:

$$\sum_{k=1}^s (b_{ik} \ddot{x}_k + a_{ik} \dot{x}_k + \beta_{ik} x_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (*)$$

3° Решение этой системы однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка проводится аналогично тому, как это сделано для системы (\*) на стр. 122; известные функции  $x_k(t)$  следует искать в форме  $x_k = A_k e^{\lambda t}$ . Соотношения между постоянными

коэффициентами  $A_k$  определяются из системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^s (\beta_{ik} + a_{ik}\lambda + b_{ik}\lambda^2) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (**)$$

Характеристическое уравнение, служащее для определения значений  $\lambda$ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} + \lambda a_{11} + \lambda^2 b_{11} & \beta_{12} + \lambda a_{12} + \lambda^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} + \lambda a_{1s} + \lambda^2 b_{1s} \\ \beta_{21} + \lambda a_{21} + \lambda^2 b_{21} & \beta_{22} + \lambda a_{22} + \lambda^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} + \lambda a_{2s} + \lambda^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} + \lambda a_{s1} + \lambda^2 b_{s1} & \beta_{s2} + \lambda a_{s2} + \lambda^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} + \lambda a_{ss} + \lambda^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Оно имеет  $2s$  корней  $\lambda_l$  ( $l = 1, 2, \dots, 2s$ ), которые, в силу вещественности коэффициентов  $\beta_{ik}$ ,  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$ , являются либо вещественными, либо попарно комплексно сопряженными, т. е.  $\lambda_l = \mu_l + i\omega_l$  и  $\lambda_l^* = \mu_l - i\omega_l$ , причем  $\mu_l < 0$ , а  $\omega_l \geq 0$ . Значения  $A_k = A_k(\lambda_l)$ , получаемые из системы (\*\*), для каждой пары комплексно сопряженных корней, являются комплексно сопряженными:

$$A_k(\lambda_l) = \gamma_{kl} + i\delta_{kl}, \quad A_k(\lambda_l^*) = \gamma_{kl} - i\delta_{kl} = A_k^*(\lambda_l).$$

Общее решение системы (\*) в случае, когда все корни  $\lambda_l$  разные и комплексно сопряженные, имеет вид

$$x_k = \sum_{l=1}^s e^{\lambda_l t} \operatorname{Re} \{ A_k(\lambda_l) C_l e^{i\omega_l t} \},$$

где  $C_l$  — комплексные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (т. е. значений  $x_k$  и  $\dot{x}_k$  при  $t = 0$ ), а символ  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть комплексной функции, стоящей в фигурных скобках.

Если корень  $\lambda_l$  веществен ( $\omega_l = 0$ ), то ему в выражении для  $x_k(t)$  соответствует аperiодическая составляющая  $e^{\lambda_l t} A_k(\lambda_l) \operatorname{Re} \{ C_l \}$ . Если все корни  $\lambda_l$  вещественны, то движение системы будет полностью аperiодическим.

### В. Вынужденные колебания недиссипативной системы

1° В нормированных нормальных координатах  $Q_l$  (стр. 124) дифференциальные уравнения движения системы распадаются на  $s$  независимых уравнений для одномерных вынужденных колебаний, соответствующих каж-

дой из нормальных координат  $Q_l$ :

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = f_l(t) \quad (l = 1, 2, \dots, s),$$

где  $\omega_l$  и  $f_l(t) = \sum_{k=1}^s F_k(t) \frac{A_k(\omega_l^2)}{\sqrt{b_l}}$  — собственная циклическая частота колебаний системы и обобщенная внешняя сила, соответствующие нормальной координате  $Q_l$ ,  $F_k(t)$  — обобщенная внешняя (возмущающая) сила, сопряженная с обобщенной координатой  $x_k$ , а  $A_k(\omega_l^2)$  и  $b_l$  имеют тот же смысл, что на стр. 123 и 124.

Условием возникновения резонанса является наличие среди гармоник силы  $f_l(t)$  такой, циклическая частота которой близка к  $\omega_l$ .

2° Для системы с двумя степенями свободы, соответствующими обобщенным координатам  $x_1$  и  $x_2$ , связь между обобщенными возмущающими силами  $F_k(t)$  и  $f_l(t)$  имеет вид:

$$f_1(t) = \frac{\gamma_1 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_1}},$$

$$f_2(t) = \frac{\gamma_2 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_2}},$$

где  $\gamma_l$  и  $b_l$  имеют тот же смысл, что на стр. 125.

Пример. Двойной пружинный маятник (рис. I.6.14). Колебания совершаются под действием возмущающей силы  $F(t)$ . Кинетическая и потенциальная энергии равны:

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2), \quad W_n = \frac{1}{2} [a_1 x_1^2 + a_2 (x_2 - x_1)^2],$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — смещения материальных точек  $m_1$  и  $m_2$  из **положений их** устойчивого равновесия;

$$b_{11} = m_1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = m_2;$$

$$\beta_{11} = a_1 + a_2, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -a_2, \quad \beta_{22} = a_2.$$

Из уравнений, приведенных на стр. 125, следует:

$$\gamma_1 = k + \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad \gamma_2 = k - \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}},$$

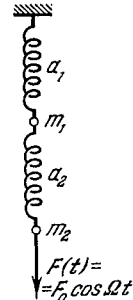


Рис. I.6.14.

где  $k = \frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1} \frac{a_1 + a_2}{2a_2}$ ;

где  $b_1 = m_1 p_1$ ,  $b_2 = m_1 p_2$ ,  $\beta_1 = a_1 n_1$ ,  $\beta_2 = a_1 n_2$ ,

$$p_1 = 2 \left( k^2 + \frac{m_2}{m_1} + k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right),$$

$$p_2 = 2 \left( k^2 + \frac{m_2}{m_1} - k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right),$$

$$n_1 = \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) \left( 2k^2 + \frac{m_2}{m_1} + 2k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right) + \\ + \frac{a_2}{a_1} \left( 1 - 2k - 2 \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right),$$

$$n_2 = \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \right) \left( 2k^2 + \frac{m_2}{m_1} - 2k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right) + \\ + \frac{a_2}{a_1} \left( 1 - 2k + 2 \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right).$$

Квадраты собственных циклических частот равны:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{n_1}{p_1}, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 \frac{n_2}{p_2},$$

где  $\omega_0^2 = \frac{a_1}{m_1}$ . Так как  $F_1(t) = 0$  и  $F_2(t) = F(t) = F_0 \cos \Omega t$ , то

$$f_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_1}} \cos \Omega t, \quad f_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_2}} \cos \Omega t.$$

Уравнения движения в нормированных нормальных координатах:

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_l}} \cos \Omega t \quad (l = 1, 2).$$

Общее решение имеет вид

$$Q_l = A_l \cos(\Omega t + \varphi_l) + B_l \cos(\omega_l t + \psi_l),$$

где второй член характеризует свободные колебания системы, а  $A_l$  и  $\varphi_l$ , в соответствии с формулами для одномерных вынужденных колебаний (стр. 120), равны:

$$A_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_l p_l (\omega_l^2 - \Omega^2)}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_l = 0.$$

Неизвестные функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  равны:

$$x_1 = \frac{Q_1}{m_1 p_1} + \frac{\gamma_2 Q_2}{\sqrt{m_2 p_2}}, \quad x_2 = \frac{Q_1}{\sqrt{m_1 p_1}} + \frac{Q_2}{\sqrt{m_2 p_2}}.$$

#### 4. Колебания нелинейной системы, имеющей одну степень свободы

##### А. Основные определения

1° Дифференциальное уравнение колебаний нелинейной системы в общем случае имеет вид

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0.$$

2° Колебательная система называется *автономной*, если время явно не входит в уравнение движения:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (*)$$

Дифференциальное уравнение колебаний *автономной консервативной* системы не содержит обобщенной скорости  $\dot{x}$ :

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (**)$$

и описывает свободные колебания.

*Автономная неконсервативная* система называется *диссипативной*, если ее движение носит характер затухающих колебаний. Если автономная неконсервативная система может совершать периодические колебания, то она называется *автоколебательной*, а ее колебания — *автоколебаниями*. Амплитуда и частота автоколебаний определяются только свойствами самой системы.

3° Колебательная система называется *неавтономной*, если время  $t$  явно входит в дифференциальное уравнение движения. Вынужденными колебаниями неавтономной системы называются процессы, происходящие в системе, если заданная периодическая функция времени  $F(t)$  входит слагаемым в дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t).$$

Левая часть уравнения называется *приведенной возмущающей силой*. В зависимости от вида функции  $f(x, \dot{x})$  различают вынужденные колебания недиссипативных систем, диссипативных систем или автоколебательных систем.

*Параметрическими* называются колебания, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x} + [a + P(t)] x = 0,$$

где  $P(t)$  — заданная периодическая функция времени.

### Б. Свободные колебания консервативной системы

1° В дифференциальном уравнении (\*\*) на стр. 133  $f(x)$  представляет собой восстанавливающую силу, приведенную к единице массы системы и нелинейно зависящую от координаты  $x$  системы.

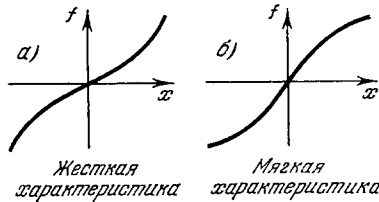


Рис. 1.6.15.

Зависимость  $f(x)$  называется *квазиупругой характеристикой* системы. При  $f(x) = -f(-x)$  квазиупругая характеристика называется *симметричной*. В зависимости от знака второй производной  $\frac{d^2f}{dx^2}$  симметричная квазиупругая характеристика называется

*жесткой*, если при  $x > 0$   $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$  (рис. 1.6.15, а),

*мягкой*, если при  $x > 0$   $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$  (рис. 1.6.15, б).

2° Свободные колебания консервативной системы являются периодическими, но ангармоническими. Период свободных колебаний зависит от амплитуды колебаний и при симметричной квазиупругой характеристике равен

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\int_x^A f(x) dx}},$$

где  $A$  — амплитуда колебаний.

**Пример 1.** Квазиупругая кубическая характеристика:  $f(x) = x^3$ . Период колебаний равен

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \frac{7,316}{A}.$$

**Пример 2.** Математический маятник при больших углах отклонения  $\alpha$  (рис. 1.6.3). Квазиупругая характеристика:

$$f(\alpha) = \frac{g}{l} \sin \alpha.$$

Период колебаний представляется эллиптическим интегралом:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^A \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}},$$

где  $A$  — наибольший угол отклонения (амплитуда колебаний). Для периода  $T$  существует представление в виде степенного ряда:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{A}{2} + \dots \right].$$

3° Приближенная формула для периода свободных колебаний при любом виде симметричной квазиупругой характеристики:

$$T = 2\pi A^2 \sqrt{\frac{1}{5 \int_0^A f(x) x^3 dx}}.$$

### В. Свободные колебания диссипативной системы

1° При не слишком значительном рассеянии механической энергии период свободных затухающих колебаний приближенно равен периоду  $2\pi/\omega_0$  свободных колебаний соответствующей консервативной системы, а движение системы в течение одного периода приближенно описывается уравнением

$$x = A \cos \omega_0 t,$$

где  $A$  — зависящая от времени амплитуда колебаний. Кривая  $A = A(t)$  представляет собой огибающую графика колебаний.

2° При нелинейно-вязком трении приведенная сила неупругого сопротивления имеет вид

$$R = k |\dot{x}|^{n-1} \dot{x},$$

где  $k$  и  $n \neq 1$  — постоянные для системы. Уравнение огибающей для системы с линейной квазиупругой характеристикой:

$$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + \frac{n-1}{2\pi} k S (\omega_0 A_0)^{n-1}}},$$

где  $A_0$  — отклонение системы при  $t = 0$ ,

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \varphi d\varphi.$$

Значения  $S$  даны в таблице:

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
S	4,000	3,500	3,142	2,874	2,666	2,498	2,356

3° Внутреннее трение в материале при циклическом деформировании характеризуется явлением *гистерезиса* (рис. 1.6.16). Приведенная сила неупругого сопротивления равна

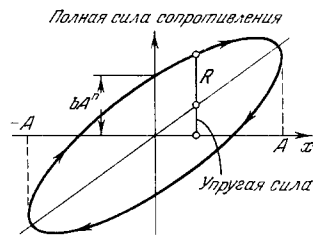


Рис. 1.6.16.

$$R = \pm b A^n \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{A^2}},$$

где  $b$  и  $n$  — постоянные системы, а знаки плюс и минус соответствуют восходящей и нисходящей ветвям петли гистерезиса. При  $n=1$  уравнение огибающей затухающих колебаний имеет вид

$$A = A_0 e^{-\frac{bt\omega_0}{2\pi}};$$

уравнение огибающей затухающих колебаний при  $n \neq 1$ :

$$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + (n-1)b A_0^{n-1} \frac{\omega_0 t}{2\pi}}}.$$

### Г. Вынужденные колебания недиссипативной системы

1° Дифференциальное уравнение колебаний недиссипативной системы при действии гармонической возмущающей силы имеет вид

$$\ddot{x} + f(x) = F_0 \sin \Omega t,$$

где  $F_0$  — амплитуда возмущающей силы, отнесенная к единице массы,  $\Omega$  — циклическая частота.

2° При кубической симметричной квазиупругой характеристике

$$f(x) = \omega_0^2 x + \beta x^3$$

уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t$$

имеет приближенное решение

$$x = A \sin \Omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega_0^8} (\sin \Omega t - \sin 3\Omega t),$$

содержащее, кроме основной гармоники, также гармонику с тройной циклической частотой. Амплитуда колебаний определяется из кубического уравнения

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}\beta A^3 + F_0 = 0.$$

При малых значениях циклической частоты  $\Omega$  уравнение имеет один действительный корень, а при больших частотах — три действительных корня; каждому из них соответствуют колебания с определенной амплитудой. Многозначность решения означает, что при данной циклической частоте возмущающей силы возможны колебания с разными амплитудами, однако не все возможные виды колебаний устойчивы. На рис. 1.6.17,а изображена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты возмущающей силы для  $\beta > 0$ . Пунктиром показаны неустойчивые решения, лишённые физического значения.

Последовательность изменения амплитуды вынужденных колебаний при медленном изменении циклической частоты возмущающей силы отмечена на рис. 1.6.17,а стрелками. При увеличении  $\Omega$  амплитуда колебаний возрастает, следуя верхней ветви графика. Как только начинается уменьшение циклической частоты  $\Omega$ , сразу происходит «срыв» амплитуды на нижнюю ветвь графика.

Дальнейшее уменьшение значений  $\Omega$  приводит к новому «перескоку» амплитуды на верхнюю ветвь графика.

3° Кроме колебаний с циклическими частотами  $\Omega$ ,  $3\Omega$  и т. д. ( $\Omega$  — циклическая частота возмущающей силы), в нелинейных системах возможны *субгармонические колебания*, циклические частоты которых в целое число раз меньше циклической частоты возмущающей силы.

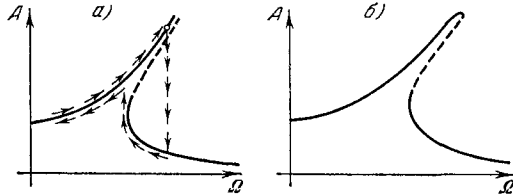


Рис. 1.6.17.

4° При действии *полигармонической возмущающей силы* типа  $F_1 \sin \Omega_1 t + F_2 \sin \Omega_2 t$ , кроме колебаний с циклическими частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , возникают колебания с *комбинационными циклическими частотами*  $\Omega_1 + \Omega_2$  и  $\Omega_1 - \Omega_2$ . Наибольшее значение имеют низкочастотные комбинационные колебания, соответствующие циклической частоте  $\Omega_1 - \Omega_2$  (эти колебания также иногда называются субгармоническими).

#### Д. Вынужденные колебания диссипативной системы

1° Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний нелинейной системы с вязким сопротивлением и кубической нелинейной характеристикой имеет вид

$$x + \mu \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t.$$

2° Амплитуда колебаний приближенно находится из уравнения

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)A - \beta A^3 \pm F_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{F_0^2} (A\Omega)^2} = 0.$$

Зависимость  $A(\Omega)$  для  $\beta > 0$  имеет вид, изображенный на рис. 1.6.17, б. Пунктиром отмечены неустойчивые решения.

#### Е. Автоколебания

1° Для исследования характера движения сложных (в частности, автоколебательных) систем используется понятие о фазовой плоскости — плоскости переменных  $x$  и  $v = \dot{x}$ . Каждому мгновенному состоянию системы, характеризуемому величинами  $x$  и  $v$ , на фазовой плоскости соответствует одна точка, называемая фазовой или изображающей точкой. Каждому процессу движения системы отвечает определенная кривая на фазовой плоскости, называемая фазовой траекторией.

2° Фазовые траектории являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v},$$

в котором  $f(x, v) = f(x, \dot{x})$  — функция, входящая в дифференциальное уравнение (\*) движения автономной системы (стр. 133). Точки фазовой плоскости, в которых  $f(x, v) = 0$  и  $v = 0$ , называются *особыми точками*. Особым точкам соответствуют состояния равновесия системы. Все другие точки фазовой плоскости называются *обыкновенными точками*. Через каждую обыкновенную точку проходит одна и только одна фазовая траектория.

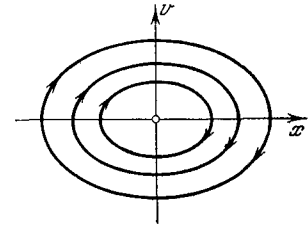


Рис. 1.6.18.

3° Особая точка, через которую не проходит ни одна из фазовых траекторий и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называется *центром* (рис. 1.6.18); центру соответствует состояние устойчивого равновесия.

Если вблизи особой точки фазовые траектории являются гиперболами, а через саму особую точку проходят только две фазовые траектории, то такая точка называется *седлом* (рис. 1.6.19); седлу соответствует состояние неустойчивого равновесия.

Если вблизи особой точки фазовые траектории имеют вид спирали, навивающихся на эту точку или свивающихся с нее, то эта точка называется *фокусом*, причем в первом случае (рис. 1.6.20, а) равновесие устойчиво, а во втором случае (рис. 1.6.20, б) равновесие неустойчиво.

Если в окрестности особой точки фазовые траектории имеют параболический вид и все проходят через нее, то такая точка называется *узлом* (рис. 1.6.21). Если

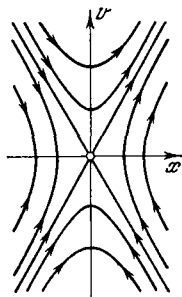


Рис. 1.6.19.

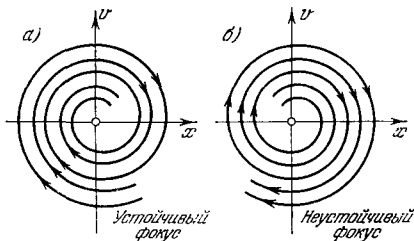


Рис. 1.6.20

фазовые траектории входят в узел, то ему соответствует состояние устойчивого равновесия, а если фазовые траектории выходят из узла, то ему соответствует состояние неустойчивого равновесия.

**Пример.** Движение математического маятника при произвольных начальных условиях. Фазовые траектории изображены на рис. 1.6.22. Точки оси абсцисс  $0; \pm 2\pi$  являются центрами, а точки  $\pm\pi$  — седлами. При достаточно больших начальных скоростях фазовые траектории носят волнообразный характер и нигде не пересекают ось абсцисс; этим траекториям соответствуют убегающие движения маятника, т. е. неограниченное увеличение угла отклонения маятника.

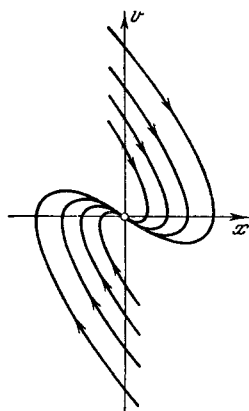


Рис. 1.6.21.

4° **Предельным циклом** называется такая замкнутая кривая  $C$ , на которую навиваются или с которой свиваются спиральные фазовые траектории, находящиеся вблизи кривой  $C$ . Если окрестные фазовые траектории навиваются на кривую  $C$ , то она называется *устойчивым предельным циклом* (рис. 1.6.23), а если свиваются с нее, то она называется *полуустойчивым предельным циклом*. Если фазовые траектории, лежащие по одну сторону от кривой  $C$ ,

навиваются на кривую  $C$ , то она называется *устойчивым предельным циклом* (рис. 1.6.23), а если свиваются с нее, то *неустойчивым предельным циклом*. Если фазовые траектории, лежащие по одну сторону от кривой  $C$ ,

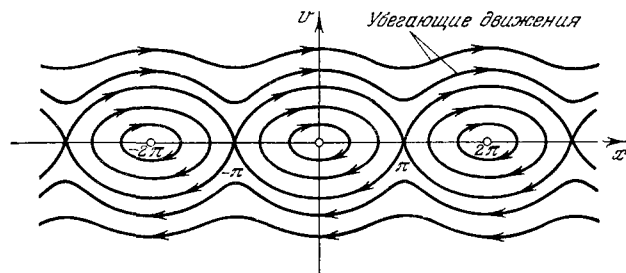


Рис. 1.6.22.

навиваются на нее, а лежащие по другую сторону от этой кривой свиваются с нее, то она называется *полуустойчивым предельным циклом*.

5° Отличия предельных циклов нелинейных автономных систем от замкнутых фазовых траекторий, описывающих колебания консервативных систем и окружающую особую точку типа центра: 1) предельные циклы являются изолированными кривыми, тогда как замкнутые фазовые траектории для консервативных систем образуют непрерывное семейство; 2) движение по предельному циклу не зависит от начальных условий; для консервативных систем именно начальные условия осуществляют выделение той или иной фазовой траектории из непрерывного семейства.

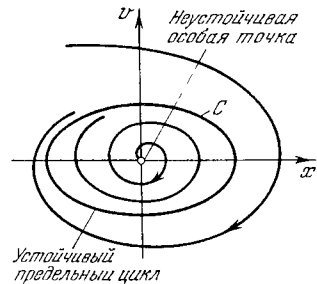


Рис. 1.6.23.



6° Если имеется несколько предельных циклов, образующих концентрическую систему, то устойчивые предельные циклы чередуются с неустойчивыми предельными циклами; при этом особая точка, расположенная внутри семейства предельных циклов, может рассматриваться как стянутый в точку предельный цикл.

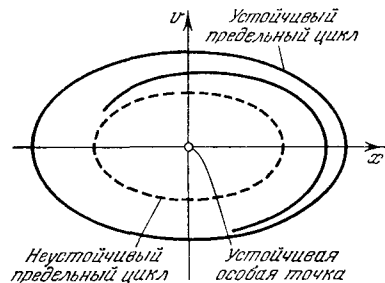


Рис. I.6.24.

7° Мягким самовозбуждением называется переход системы из состояния неустойчивого равновесия к движению по устойчивому предельному циклу (рис. I.6.23). Жестким самовозбуждением называется переход системы из состояния устойчивого равновесия к движению по устойчивому предельному циклу; для этого необходимо достаточно большое начальное возмущение, способное «забросить» начальную фазовую точку за контур неустойчивого предельного цикла, расположенного между устойчивой особой точкой и устойчивым предельным циклом (рис. I.6.24).

8° Квазилинейными называются механические системы, движение которых описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f_1 \left( x, \frac{dx}{dt} \right),$$

содержащим малый параметр  $\mu$ . Переход к «безразмерному времени»  $\tau = \omega_0 t$  приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f \left( x, \frac{dx}{d\tau} \right), \quad (*)$$

в котором

$$f \left( x, \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{1}{\omega_0^2} f_1 \left( x, \frac{dx}{dt} \right).$$

Приближенное решение уравнения (\*):

$$x = \varrho \cos (\tau - \theta),$$

где  $\varrho$  и  $\theta$  — медленно меняющиеся функции времени, определяемые уравнениями установления

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \mu \Phi(\varrho), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \mu \Psi(\varrho),$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\varrho) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho \cos \xi, -\varrho \sin \xi) \sin \xi d\xi, \\ \Psi(\varrho) &= \frac{1}{2\pi\varrho} \int_0^{2\pi} f(\varrho \cos \xi, -\varrho \sin \xi) \cos \xi d\xi. \end{aligned} \right\} (**)$$

Здесь  $f(\varrho \cos \xi, -\varrho \sin \xi)$  — результат подстановки в функцию  $f(x, \frac{dx}{d\tau})$  выражения  $\varrho \cos \xi$  вместо  $x$  и выражения  $-\varrho \sin \xi$  вместо  $\frac{dx}{d\tau}$ .

Пример. Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}.$$

По формулам (\*\*) находим:

$$\Phi(\varrho) = \frac{\varrho}{8} (4 - \varrho^2), \quad \Psi(\varrho) = 0.$$

Уравнения установления имеют вид:

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \frac{\mu\varrho}{8} (4 - \varrho^2), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

Закон изменения амплитуды  $\varrho$  во времени:

$$\varrho = \frac{2}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu\tau}}},$$

где  $C$  — постоянная, зависящая от начальных условий. При  $\tau \rightarrow \infty$  величина  $\varrho$  стремится к значению  $\varrho = 2$  и устанавливается движение по предельному циклу. Закон движения:

$$x = 2 \cos \tau.$$

## ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

### ГЛАВА I ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1° *Молекулярной физикой* называется наука, изучающая физические свойства и агрегатные состояния тел в зависимости от их молекулярного строения, сил взаимодействия между частицами, образующими тела, и характера теплового движения этих частиц. Для теоретического исследования указанных вопросов используются два взаимно дополняющих друг друга метода — статистический и термодинамический.

2° *Статистический метод* состоит в изучении свойств макроскопических систем на основе анализа, с помощью методов математической статистики, закономерностей теплового движения огромного числа микрочастиц, образующих эти системы.

3° *Термодинамический метод* состоит в изучении свойств системы взаимодействующих тел путем анализа условий и количественных соотношений происходящих в системе превращений энергии. Эти вопросы изучаются в разделе теоретической физики, называемом *термодинамикой* (*феноменологической термодинамикой*).

Термодинамический метод, в отличие от статистического, не связан с какими-либо конкретными представлениями о внутреннем строении тел и характере движения образующих их частиц. Термодинамика оперирует с макроскопическими характеристиками изучаемых ею объектов, основываясь на нескольких экспериментально установленных положениях — *законах (началах) термодинамики*, которые обладают весьма большой общностью. Поэтому термодинамический метод используется для теоретического анализа общих закономерностей самых разнообразных явлений.

4° *Термодинамической системой* называется совокупность макроскопических объектов (тел и полей), обме-

живающихся энергией в форме работы и в форме теплоты (стр. 58) как друг с другом, так и с внешней средой, т. е. с внешними по отношению к системе телами и полями.

Термодинамическая система называется *замкнутой* или *изолированной*, если отсутствует всякий обмен энергией между нею и внешней средой. Система называется *изолированной в тепловом отношении* или *адиабатически изолированной*, если отсутствует теплообмен между нею и окружающей средой. Термодинамическая система, обменивающаяся энергией с внешней средой только путем теплообмена, называется *изолированной в механическом отношении*.

5° *Гомогенной* называется термодинамическая система, внутри которой нет поверхностей раздела, отделяющих друг от друга макроскопические части системы, различающиеся по своим свойствам и составу. Термодинамическая система, не удовлетворяющая этому условию, называется *гетерогенной*. Гомогенными системами являются, например, смеси газов, жидкие и твердые растворы, а также всякое химически однородное тело, находящееся целиком в каком-либо одном агрегатном состоянии. Примерами гетерогенных систем являются тающий лед, влажный пар, многие сплавы и горные породы. Система называется *физически однородной*, если ее состав и физические свойства одинаковы для всех макроскопических частей этой системы, равных по объему. Примером такой системы может служить газ, на который не действует внешнее силовое поле.

*Фазой* называется совокупность всех гомогенных частей термодинамической системы, которые в отсутствие внешнего силового воздействия являются физически однородными. Например, влажный пар состоит из двух фаз — кипящей жидкости и сухого насыщенного пара.

*Компонентами (независимыми компонентами)* термодинамической системы называются различные вещества, наименьшее число которых достаточно для образования всех фаз системы.

*Раствором* называется гомогенная система (твердая, жидкая или газообразная), состоящая из двух или большего числа химических чистых веществ. Один из компонентов раствора (обычно тот, который содержится в наибольшем количестве) называется *растворителем*, а остальные компоненты — *растворенными веществами*.

6° Состояние термодинамической системы определяется совокупностью значений ее *термодинамически*

*параметров (параметров состояния)* — всех физических величин, характеризующих макроскопические свойства системы (ее плотность, энергию, вязкость, поляризацию, намагниченность и т. д.). Два состояния системы считаются разными, если для них численные значения хотя бы одного из термодинамических параметров неодинаковы. Состояние системы называется *стационарным*, если оно не изменяется во времени. Стационарное состояние системы называется *равновесным*, если его неизменность во времени не обусловлена протеканием какого-либо внешнего по отношению к системе процесса.

Термодинамические параметры системы взаимосвязаны. Поэтому равновесное состояние системы можно однозначно определить, указав значения ограниченного числа этих параметров (стр. 198). *Основными параметрами* состояния являются давление, температура и удельный (или молярный) объем.

В термодинамике различают внешние и внутренние параметры состояния системы. *Внешними параметрами состояния* называются параметры, зависящие только от обобщенных координат (стр. 89) внешних тел, с которыми взаимодействует система. Примером внешнего параметра для газа является его объем, зависящий от положения внешних тел — стенок сосуда. Для газа, находящегося в гравитационном или каком-либо другом внешнем силовом поле, внешним параметром является также напряженность этого поля. *Внутренними параметрами состояния* называются параметры, зависящие как от обобщенных координат внешних тел, так и от усредненных значений координат и скоростей частиц, образующих систему. Внутренними параметрами являются, например, давление и энергия системы.

$7^\circ$  *Давлением* называется физическая величина  $p$ , равная пределу отношения численного значения  $\Delta F_n$  нормальной силы, действующей на участок поверхности тела площадью  $\Delta S$ , к величине  $\Delta S$  при  $\Delta S$ , стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}.$$

*Удельным объемом*  $v$  называется величина, обратная плотности  $\rho$  (стр. 37):  $v = 1/\rho$ . Для однородного тела удельный объем равен отношению его объема к массе, т. е. численно равен объему элемента этого тела, масса которого равна единице.

*Грамм-молекулой* или *молем (килограмм-молекулой или киломолем)* называется такое количество химически однородного вещества, масса которого, выраженная в граммах (килограммах), численно равна его молекулярному весу  $\mu$ . Объем  $V_\mu$  одного моля вещества называется его *молярным объемом*:

$$V_\mu = \mu v = \frac{\mu}{\rho}.$$

*Грамм-атомом (килограмм-атомом)* называется такое количество химически простого вещества (элемента), масса которого, выраженная в граммах (килограммах), равна его атомному весу. Число молекул в грамм-молекуле и число атомов в грамм-атоме для всех веществ одинаково. Это число называется *числом Авогадро*  $N_A$  ( $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1} = 6,023 \cdot 10^{26}$  кмоль $^{-1}$ ).

$8^\circ$  *Температурой* называется физическая величина, характеризующая степень нагревности тела (см. также стр. 207 и 232). В состоянии термодинамического равновесия системы температуры всех тел, образующих систему, одинаковы. Измерение температуры можно производить только косвенным путем, основываясь на зависимости от температуры таких физических свойств тел, которые поддаются непосредственному измерению. Применяемые для этого тела (вещества) называются *термометрическими*, а устанавливаемая с их помощью шкала температуры — *эмпирической*.

Основной недостаток эмпирических шкал температуры состоит в их зависимости от специфических особенностей конкретных термометрических веществ (о возможности построения универсальной термодинамической шкалы температуры см. стр. 169). В качестве исходных значений, служащих при построении шкалы температуры для установления начала отсчета температуры и единицы ее измерения — *градуса*, применяются температуры перехода химических чистых веществ из одного агрегатного состояния в другое, например температуры плавления льда ( $t_0$ ) и кипения воды ( $t_K$ ) при нормальном атмосферном давлении, равном 760 мм рт. ст. Величины  $t_0$  и  $t_K$  в зависимости от типа шкалы имеют следующие значения:

а) *Шкала Цельсия (стоградусная шкала)*:  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ ,  $t_K = 100^\circ \text{C}$ .

б) *Шкала Фаренгейта*:  $t_0 = 32^\circ \text{F}$ ,  $t_K = 212^\circ \text{F}$ .

Связь между температурами, выраженными в градусах Цельсия и Фаренгейта, имеет вид

$$\frac{t^{\circ}\text{C}}{100} = \frac{t^{\circ}\text{F} - 32}{180}.$$

в) *Шкала Кельвина* (см. также стр. 169): температура  $T$  отсчитывается от *абсолютного нуля* ( $t = -273,15^{\circ}\text{C}$ ) и называется *абсолютной температурой*. Связь между значениями температуры по шкале Кельвина ( $T^{\circ}\text{K}$ ) и шкале Цельсия ( $t^{\circ}\text{C}$ ) имеет вид

$$T^{\circ}\text{K} = t^{\circ}\text{C} + 273,15^{\circ}\text{C}.$$

9° Внутренние параметры термодинамической системы (стр. 146), находящейся в равновесном состоянии, зависят только от ее внешних параметров и температуры:

$$y_k = f(x_1, x_2, \dots, x_n, T), \quad (*)$$

где  $y_k$  — внутренний параметр, а  $x_1, \dots, x_n$  — внешние параметры. Например, равновесное состояние физической однородной термодинамической системы в соответствии с правилом фаз Гиббса (стр. 198) полностью определяется двумя параметрами. Поэтому равновесное давление в этой системе является функцией ее объема и температуры (масса системы предполагается фиксированной):

$$p = f_1(V, T). \quad (**)$$

10° Если в уравнении (\*)  $y_k$  представляет собой обобщенную силу (стр. 90), сопряженную какому-либо из внешних параметров  $x_1, \dots, x_n$ , то уравнение (\*) называется *термическим уравнением состояния системы* (*уравнением состояния системы*). Например, уравнение (\*\*) является термическим уравнением состояния физической однородной системы.

Уравнение (\*), записанное для внутренней энергии  $U$  системы (стр. 153):

$$U = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, T),$$

называется *калорическим уравнением состояния системы*.

В термодинамике уравнения состояния исследуемой системы предполагаются известными из опыта. Теоретический вывод этих уравнений может быть осуществлен методами статистической физики.

11° *Термодинамическим процессом* называется всякое изменение состояния термодинамической системы. *Равно-*

*весным (квазистатистическим) процессом* называется термодинамический процесс, при котором система проходит непрерывный ряд равновесных состояний. *Круговым процессом* или *циклом* называется термодинамический процесс, в результате совершения которого система возвращается в исходное состояние.

*Изопроцессами* называются термодинамические процессы, протекающие при неизменном значении какого-либо параметра состояния<sup>1)</sup>. *Изохорным (изохорическим) процессом* называется термодинамический процесс, протекающий при постоянном объеме системы. *Изобарным (изобарическим) процессом* называется термодинамический процесс, протекающий при постоянном давлении. *Изотермическим (изотермным) процессом* называется термодинамический процесс, протекающий при постоянной температуре.

*Адиабатным (адиабатическим) процессом* называется термодинамический процесс, осуществляемый системой без теплообмена с внешними телами.

*Релаксацией* называют процесс возвращения в состояние термодинамического равновесия системы, выведенной из этого состояния. Мерой быстроты протекания релаксации служит *время релаксации* — промежуток времени, в течение которого отклонение какого-либо параметра системы от его равновесного значения уменьшается в  $e$  раз.

12° *Функцией состояния* называется такая физическая характеристика системы, изменение которой при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от вида соответствующего этому переходу термодинамического процесса, а целиком определяется значениями параметров начального и конечного состояний. Важнейшими функциями состояний являются внутренняя энергия  $U$  (стр. 153), энтальпия  $H$  (стр. 155), энтропия  $S$  (стр. 175), изохорно-изотермный потенциал  $F$  (стр. 181) и изобарно-изотермный потенциал  $\Phi$  (стр. 181).

*Экстенсивными величинами* называются функции состояния термодинамической системы, зависящие от ее массы. Таковы, например, перечисленные выше функции. В уравнениях термодинамики часто используют значения экстенсивных величин, отнесенные либо к единице массы системы, либо к одному молю.

*Интенсивными величинами* называются функции состояния термодинамической системы, не зависящие от

<sup>1)</sup> Масса системы предполагается неизменной.

ее массы. Таковы, например, температура, плотность, вязкость, диэлектрическая проницаемость и т. д.

13° Равновесные состояния физически однородной системы и совершаемые ею равновесные процессы можно изображать графически соответственно точками и кривыми на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами, вдоль осей которых откладываются параметры состояния системы или однозначно связанные с ними функции состояния. Такое графическое изображение называется *термодинамической диаграммой*. Наиболее распространенными являются диаграммы  $V - p$ ,  $s - T$  и  $s - H$  (первый символ указывает величину, откладываемую по оси абсцисс, второй — по оси ординат).

## ГЛАВА 2

### ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

#### 1. Идеальные газы

1° *Идеальным газом* называется газ, в котором отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия. С достаточной степенью точности газы можно считать идеальными в тех случаях, когда рассматриваются их состояния, далекие от областей фазовых превращений.

2° Для идеальных газов справедливы следующие законы:

а) *Закон Бойля — Мариотта*: при неизменных температуре и массе произведение численных значений давления и объема газа постоянно:

$$pV = \text{const.}$$

б) *Закон Гей-Люссака*: при постоянном давлении объем данной массы газа прямо пропорционален его абсолютной температуре:

$$V = \alpha V_0 T = V_0 \frac{T}{T_0},$$

где  $V_0$  — объем газа при температуре  $T_0 = 273,15^\circ \text{ K}$ ,  $\alpha = 1/T_0$  — коэффициент объемного расширения.

в) *Закон Шарля*: при постоянном объеме давление данной массы газа прямо пропорционально его абсолютной температуре:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0},$$

где  $p_0$  — давление газа при температуре  $T_0 = 273,15^\circ \text{ K}$ .

г) *Закон Авогадро*: при одинаковых давлениях и одинаковых температурах в равных объемах различных идеальных газов содержится одинаковое число молекул, или, что то же самое, при одинаковых давлениях и одинаковых температурах грамм-молекулы различных идеальных газов занимают одинаковые объемы.

Так, например, при *нормальных условиях* ( $t = 0^\circ \text{ C}$  и  $p = 101\,325 \text{ н/м}^2 = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ) грамм-молекулы всех идеальных газов занимают объем  $V_\mu = 22,414 \text{ л}$ . Число молекул, находящихся в  $1 \text{ см}^3$  идеального газа при нормальных условиях, называется *числом Лошмидта*; оно равно  $2,687 \cdot 10^{23} \text{ 1/см}^3$ .

3° *Уравнение состояния идеального газа* имеет вид

$$pV_\mu = RT,$$

где  $p$ ,  $V_\mu$  и  $T$  — давление, молярный объем и абсолютная температура газа, а  $R$  — *универсальная газовая постоянная*, численно равная работе, совершаемой одним молем идеального газа при изобарном нагревании на один градус:

$$R = 8,31 \cdot 10^8 \frac{\text{дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}} = 0,821 \frac{\text{л} \cdot \text{атм}}{\text{моль} \cdot \text{град}} = 0,848 \frac{\text{кГм}}{\text{моль} \cdot \text{град}} = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{моль} \cdot \text{град}} = 1,987 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}.$$

Для произвольной массы  $M$  газа объем  $V = \frac{M}{\mu} V_\mu$  и уравнение состояния имеет вид

$$pV = \frac{M}{\mu} RT.$$

Это уравнение называется *уравнением Менделеева — Клапейрона*. Поскольку  $V/M = v$  — удельный объем газа, то

$$pv = \frac{R}{\mu} T = BT,$$

где  $B = R/\mu$  — *удельная газовая постоянная*, зависящая от молекулярного веса газа.

4° Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что число  $n_0$  молекул, содержащихся в единице объема идеального газа, равно

$$n_0 = \frac{N_A}{V_\mu} = \frac{pN_A}{RT} = \frac{p}{kT},$$

где  $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ дж/град} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}$  — *постоянная Больцмана*,  $N_A$  — *число Авогадро* (стр. 147).

## 2. Смеси идеальных газов

1° *Смесью газов* называется совокупность нескольких разнородных газов, которые при рассматриваемых условиях не вступают друг с другом в химические реакции. Смесь газов представляет собой гомогенную термодинамическую систему (стр. 145).

*Весовой концентрацией*  $g_i$  (*весовой долей*, *весовой долевой концентрацией*)  $i$ -го газа, входящего в состав смеси, называется отношение его массы  $M_i$  к массе  $M$  всей смеси:

$$g_i = \frac{M_i}{M} = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^N M_i},$$

где  $N$  — общее число разнородных газов, образующих смесь.

*Молярной концентрацией*  $x_i$  (*молярной долей*, *молярной долевой концентрацией*)  $i$ -го газа называется отношение числа молей этого газа к числу молей всех газов в смеси:

$$x_i = \frac{\frac{M_i}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i}},$$

где  $\mu_i$  — молекулярный вес  $i$ -го газа.

2° *Парциальным давлением*  $p_i$   $i$ -го газа в смеси называется давление, под которым находился бы этот газ, если бы из смеси были удалены все остальные газы, а объем и температура сохранились прежними:

$$p_i = \frac{M_i}{\mu_i} \frac{RT}{V}, \quad (*)$$

где  $V$  и  $T$  — объем и температура смеси.

*Закон Дальтона*: давление смеси идеальных газов равно сумме их парциальных давлений:

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i}. \quad (**)$$

Из закона Дальтона следует, что парциальное давление  $i$ -го газа равно произведению давления смеси на молярную концентрацию этого газа:  $p_i = x_i p$ .

3° *Парциальным объемом*  $V_i$   $i$ -го газа в смеси называется тот объем, который имел бы этот газ, если бы из смеси все остальные газы были удалены, а давление и температура сохранились прежними:

$$V_i = \frac{M_i}{\mu_i} \frac{RT}{p}. \quad (***)$$

Из (\*\*) и (\*\*\*) следует *закон Амага*: объем смеси идеальных газов равен сумме их парциальных объемов:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i.$$

Парциальный объем  $i$ -го газа равен произведению объема смеси на молярную концентрацию этого газа:  $V_i = x_i V$ .

4° При расчете параметров состояния смеси идеальных газов можно пользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона, записанным в форме

$$pV = \frac{M}{\mu_{\text{см}}} RT$$

или

$$pV = MB_{\text{см}} T,$$

где  $\mu_{\text{см}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i}}$  — кажущийся молекулярный вес

смеси,  $B_{\text{см}} = \frac{R}{\mu_{\text{см}}} = R \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i}$  — удельная газовая постоянная смеси.

## ГЛАВА 3

### ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

#### 1. Внутренняя энергия и энтальпия

1° *Внутренней энергией*  $U$  называется энергия системы, зависящая только от ее термодинамического состояния. Для системы, не подверженной действию внешних сил и находящейся в состоянии макроскопического покоя, внутренняя энергия представляет собой полную энергию системы. В некоторых простейших случаях внутренняя энергия равна разности между полной энергией  $W$  системы и суммой кинетической энергии  $W_k$  ее макроскопического движения и потенциальной

энергии  $W_{\Pi}^{\text{внеш}}$ , обусловленной действием на систему внешних силовых полей:

$$U = W - (W_{\kappa} + W_{\Pi}^{\text{внеш}}).$$

Внутренняя энергия системы включает в себя энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и др.), энергию взаимодействия этих частиц, энергию электронных оболочек атомов и ионов, внутриядерную энергию и т. д.

2° Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы: ее изменение  $\Delta U$  при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса и равно  $\Delta U = U_2 - U_1$ . Если система совершает круговой процесс (стр. 149), то полное изменение ее внутренней энергии равно нулю:

$$\oint dU = 0.$$

3° Внутренняя энергия может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого  $U_0$ , которое не может быть найдено методами термодинамики. Однако это несущественно, так как при термодинамическом анализе системы приходится иметь дело не с абсолютными значениями ее внутренней энергии, а с ее зависящими от  $U_0$  изменениями этой энергии в различных процессах. Поэтому часто полагают  $U_0 = 0$ , а под внутренней энергией системы понимают только те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых процессах. Например, при не слишком высоких температурах внутреннюю энергию идеального газа можно считать равной сумме кинетических энергий хаотического движения его молекул.

4° Внутренняя энергия гомогенной системы является аддитивной величиной: она равна сумме внутренних энергий всех ее макроскопических частей, т. е. пропорциональна массе системы. Внутренняя энергия гетерогенной системы включает в себя не только сумму внутренних энергий всех гомогенных частей системы, но также энергию молекулярного взаимодействия их поверхностных слоев. Однако в большинстве случаев внутреннюю энергию гетерогенной системы также можно считать аддитивной величиной, равной сумме внутренних энергий всех фаз системы. Это допущение неприменимо, например, для мелкодисперсных гетерогенных систем.

5° Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его абсолютной температуры  $T$  (стр. 148) и пропорциональна массе газа  $M$ :

$$U = \int_0^T C_V dT + U_0 = M \left[ \int_0^T c_V dT + u_0 \right],$$

где  $C_V$  и  $c_V = C_V/M$  — теплоемкость (стр. 157) и удельная теплоемкость (стр. 158) газа в изохорном процессе,  $u_0 = U_0/M$  — внутренняя энергия единицы массы газа при  $T = 0^\circ \text{K}$ . Для одноатомных газов при не слишком высоких температурах  $C_V$  не зависит от температуры и  $U = C_V T + U_0$ .

Внутренняя энергия смеси  $N$  идеальных газов равна сумме внутренних энергий газов, входящих в состав смеси:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^T C_{Vi} dT + U_{0i} \right],$$

где  $C_{Vi}$  — теплоемкость  $i$ -го компонента смеси в изохорном процессе.

Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса (стр. 245) равна

$$U = \int_0^T C_V dT - \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V} + U_0,$$

где  $M$  — масса газа,  $\mu$  — его молекулярный вес,  $a$  — коэффициент Ван-дер-Ваальса.

6° *Энтальпией*  $H$  (*теплосодержанием*, *тепловой функцией*) называется функция состояния термодинамической системы, равная сумме ее внутренней энергии и произведения давления на объем системы, выраженного в тех же единицах:

$$H = U + pV.$$

Энтальпия идеального газа зависит только от его абсолютной температуры (стр. 148) и пропорциональна массе газа  $M$ :

$$H = \int_0^T C_p dT + H_0,$$

где  $C_p$  — теплоемкость газа в изобарном процессе (стр. 160),  $H_0 = U_0$  — энтальпия газа при  $T = 0^\circ \text{K}$ . Для одноатомных газов  $H = C_p T + H_0$ .

Энтальпия смеси  $N$  идеальных газов равна сумме энтальпий всех газов, входящих в состав смеси:

$$H = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^T C_{p,i} dT + H_{0i} \right],$$

где  $C_{p,i}$  — теплоемкость  $i$ -го компонента смеси в изобарном процессе.

*Изотальпийным* называется термодинамический процесс, в котором энтальпия системы не изменяется.

## 2. Работа и теплота

1° Необходимым условием совершения системой работы является перемещение взаимодействующих с ней внешних тел, т. е. изменение внешних параметров состояния системы (стр. 146). Элементарная работа  $\delta A$ , совершаемая системой над внешними телами, равна

$$\delta A = \sum_i F_i dx_i,$$

где  $x_i$  — внешние параметры состояния системы, а  $F_i$  — соответствующие им обобщенные силы (стр. 99). Элементарная работа  $\delta A'$ , совершаемая при  $\delta x_i$  внешними телами над системой, численно равна  $\delta A$  и противоположна ей по знаку:  $\delta A' = -\delta A$ .

2° *Работой расширения* называется работа, совершаемая системой против сил внешнего давления. Элементарная работа расширения системы, подверженной равномерно распределенному внешнему давлению  $p_{\text{вн}}$ , равна  $\delta A = p_{\text{вн}} dV$ .

В случае равновесного (квазистатического) процесса расширения  $p_{\text{вн}}$  всегда равно давлению  $p$  в системе и  $\delta A = p dV$ . Работа равновесного расширения системы от объема  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

На диаграмме  $V-p$  эта работа измеряется площадью, ограниченной кривой процесса, осью абсцисс и вертикальными прямыми  $V = V_1$  и  $V = V_2$  (зактрихована на рис. 11.3.1).

Работа, совершаемая системой, зависит от вида процесса изменения ее состояния. Например, работа расширения зависит не только от параметров начального ( $p_1, V_1$ ) и конечного ( $p_2, V_2$ ) состояний, но и от характера процесса 1-2. На этом основано действие всех тепловых машин.

3° Для перевода системы из одного состояния в другое с помощью различных термодинамических процессов ей нужно сообщать, вообще говоря, различные количества теплоты. Иными словами, теплота и работа являются функциями процесса изменения состояния системы. Поэтому элементарное количество теплоты  $\delta Q$ , сообщаемого системе в процессе изменения ее состояния, подобно элементарной работе  $\delta A$  не является полным дифференциалом (стр. 59).

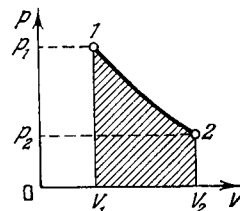


Рис. 11.3.1.

## 3. Теплоемкость

1° *Теплоемкостью (истинной теплоемкостью)*  $C$  тела называется отношение элементарного количества теплоты  $\delta Q$ , сообщенного телу в каком-либо процессе, к соответствующему изменению температуры тела:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Теплоемкость зависит от массы тела, его химического состава, термодинамического состояния и вида процесса сообщения теплоты.

2° *Средней теплоемкостью*  $\bar{C}$  тела в интервале температур от  $T_1$  до  $T_2 > T_1$  называется отношение количества теплоты  $Q$ , необходимого для повышения температуры тела от  $T_1$  до  $T_2$ , к  $T_2 - T_1$ :

$$\bar{C} = \frac{Q}{T_2 - T_1}.$$

Связь между средней теплоемкостью тела и его теплоемкостью имеет вид

$$\bar{C} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} C dT.$$



3° Удельной теплоемкостью  $c$  называется теплоемкость единицы массы однородного вещества. Для однородного тела  $c = C/M$ , где  $M$  — масса тела.

Для смеси  $N$  газов  $c = \sum_{i=1}^N g_i c_i$ , где  $c_i$  и  $g_i$  — удельная теплоемкость и весовая концентрация  $i$ -го компонента смеси.

4° Атомной теплоемкостью  $C_a$  называется теплоемкость килограмм-атома (грамм-атома) простого вещества:  $C_a = A c$ , где  $A$  — атомный вес вещества.

Молярной (мольной) теплоемкостью  $C_\mu$  называется теплоемкость одного киломоля (моля) вещества:  $C_\mu = \mu c$ , где  $\mu$  — молекулярный вес вещества.

(Теорию теплоемкостей газов см. на стр. 232 и 234-236, твердых тел — на стр. 275.)

5° Элементарное количество теплоты  $\delta Q$ , сообщаемое телу для изменения его температуры от  $T$  до  $T + dT$ , равно

$$\delta Q = C dT.$$

В случае однородного тела  $\delta Q = M c dT = \frac{M}{\mu} C_\mu dT$ .

Для химически простого тела  $\delta Q = \frac{M}{A} C_a dT$ .

#### 4. Первый закон термодинамики

1° В термодинамике обычно рассматриваются макроскопически неподвижные системы<sup>1)</sup>. Для таких систем закон сохранения и превращения энергии можно записать в форме

$$\Delta U = Q + A',$$

где  $A'$  — работа, совершенная над системой внешними телами,  $Q$  — количество теплоты, сообщенное системе,  $\Delta U$  — изменение внутренней энергии системы. Если  $\Delta U$ ,  $Q$  и  $A'$  измерены в разных единицах ( $A'$  — в механических, а  $Q$  и  $\Delta U$  — в тепловых), то

$$\frac{1}{J} \Delta U = \frac{1}{J} Q + A',$$

<sup>1)</sup> Первый закон термодинамики для движущихся систем см. на стр. 325.

где  $J$  — механический эквивалент единицы количества теплоты ( $J = 4,18$  дж/кал =  $0,427$  кГм/кал). Величина  $\frac{1}{J} = 0,239$  кал/дж =  $2,34$  кал/кГм называется тепловым эквивалентом единицы работы. В дальнейшем везде предполагается, что все величины измерены в единицах одной и той же системы.

2° Работа  $A$ , совершаемая системой над внешними телами (против внешних сил), равна  $-A'$ . Следовательно,

$$Q = \Delta U + A.$$

Количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил (первый закон термодинамики).

Если система представляет собой периодически действующую машину, в которой газ, пар или другое рабочее тело в результате совершения кругового процесса возвращается в исходное состояние, то  $\Delta U = 0$  и  $A = Q$ . Следовательно, нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы работу, большую подводимой к нему извне энергии (вечный двигатель первого рода невозможен).

3° Для элементарного изменения состояния системы первый закон термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A$$

или

$$C dT = dU + \delta A,$$

где  $C$  — теплоемкость системы.

Если на систему, помимо равномерно распределенного внешнего давления, действуют другие силы, то работа  $\delta A$  равна сумме работы расширения, т. е. работы против внешнего давления, равной  $p_{вн} dV$ , и работы  $\delta A^*$ , совершаемой системой против других внешних сил:  $\delta A = p_{вн} dV + \delta A^*$ . В равновесном процессе  $p_{вн}$  равно давлению  $p$  в системе и первый закон термодинамики записывается в форме

$$C dT = dU + p dV + \delta A^*$$

или

$$C dT = dH - V dp + \delta A^*,$$

где  $H$  — энтальпия системы (стр. 155).

4° Для равновесного процесса в однофазной однокомпонентной системе, подверженной только равномерному внешнему давлению,  $\delta A^* = 0$ ,  $U = f(T, V)$  и  $H = f_1(T, p)$ , так что

$$C dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV,$$

или

$$C dT = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp.$$

Теплоемкость  $C_V$  в изохорном процессе ( $V = \text{const}$ ) равна

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

Теплоемкость  $C_p$  в изобарном процессе ( $p = \text{const}$ ) равна

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \\ &= C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \end{aligned}$$

5° Для идеального газа  $U = Mf(T)$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$  и  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p}$ , где  $M$  и  $\mu$  — масса и молекулярный вес газа.

Уравнение Майера:  $C_p - C_V = \frac{M}{\mu} R$ , или для молярных теплоемкостей:  $C_{p\mu} - C_{V\mu} = R$ , для удельных теплоемкостей:  $c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$ .

Величина  $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_{p\mu}}{C_{V\mu}} = \frac{c_p}{c_V}$  называется показателем адиабаты. Из уравнения Майера следует, что

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{R}{\kappa-1} \frac{M}{\mu}, & C_{V\mu} &= \frac{R}{\kappa-1}, & c_V &= \frac{R}{(\kappa-1)\mu}; \\ C_p &= \frac{\kappa R}{\kappa-1} \frac{M}{\mu}, & C_{p\mu} &= \frac{\kappa R}{\kappa-1}, & c_p &= \frac{\kappa R}{(\kappa-1)\mu}. \end{aligned}$$

6° Тепловым эффектом  $E$  процесса называется сумма количества теплоты  $Q'$ , отданного системой в этом процессе, и теплового эквивалента  $A^*$  работы, равной разности между полной работой системы в этом процессе и работой ее расширения:  $E = Q' + A^*$ . Так как  $Q' = -Q$ , где  $Q$  — количество теплоты, сообщенное системе, то из

первого закона термодинамики следует, что в равновесном процессе

$$E = U_1 - U_2 - \int_1^2 p dV = H_1 - H_2 + \int_1^2 V dp.$$

7° Закон Гесса: тепловой эффект реакции, протекающей в системе при постоянном объеме или при постоянном давлении, не зависит от промежуточных стадий, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы. В изохорном процессе  $E_V = -\Delta U = U_1 - U_2$ , в изобарном процессе  $E_p = -\Delta H = H_1 - H_2$ .

Закон Гесса, выражающий первый закон термодинамики применительно к химическим процессам, является основным законом *термохимии*. Из него вытекает ряд следствий, которые упрощают расчет химических реакций, протекающих в системе при  $p = \text{const}$  или  $V = \text{const}$ :

а) тепловой эффект реакции разложения химического соединения численно равен и противоположен по знаку тепловому эффекту реакции синтеза этого соединения из продуктов разложения;

б) разность тепловых эффектов двух реакций, приводящих из разных исходных состояний к одинаковым конечным состояниям, равна тепловому эффекту реакции перехода из одного начального состояния в другое. Следовательно, тепловой эффект какой-либо реакции равен алгебраической сумме тепловых эффектов при сгорании реагентов до одинаковых продуктов (для исходных веществ эти тепловые эффекты считаются положительными, для продуктов реакции — отрицательными);

в) разность тепловых эффектов двух реакций, приводящих из одного исходного состояния к разным конечным состояниям, равна тепловому эффекту реакции перехода из одного конечного состояния в другое. Следовательно, тепловой эффект какой-либо реакции равен алгебраической сумме тепловых эффектов при образовании реагентов из простых веществ (для продуктов реакции эти тепловые эффекты считаются положительными, для исходных веществ — отрицательными).

8° Уравнение Кирхгофа для изохорного и изобарного тепловых эффектов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_V}{\partial T}\right)_V &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial U_2}{\partial T}\right)_V = C_{V1} - C_{V2} = -\Delta C_V, \\ \left(\frac{\partial E_p}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial H_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial H_2}{\partial T}\right)_p = C_{p1} - C_{p2} = -\Delta C_p. \end{aligned}$$

### 5. Простейшие термодинамические процессы идеальных газов

1° *Политропным (политропическим) процессом* называется термодинамический процесс, в котором удельная теплоемкость  $c$  газа постоянна. Величина  $n = \frac{c - c_p}{c - c_v}$  называется *показателем политропы*. Изопроцессы и адиабатный процесс — частные случаи политропного процесса.

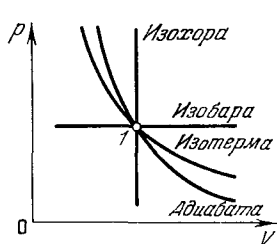


Рис. П.3.2.

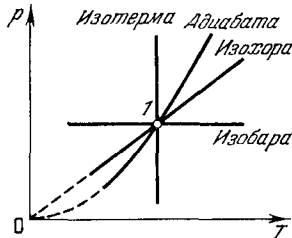


Рис. П.3.3.

2° В таблице ниже приводятся основные соотношения для равновесных изохорного, изобарного, изотермического, адиабатного и политропного процессов, совершаемых идеальным газом, для которого предполагается, что масса неизменна, теплоемкости  $C_v$  и  $C_p$  не зависят от температуры, а работа совершается только против внешнего давления.

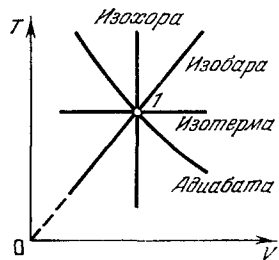


Рис. П.3.4.

В этой таблице индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям; в формулах все величины выражены в единицах одной системы.

3° *Изохорой, изобарой, изотермой, адиабатой и политропой* называются линии, изображающие в какой-либо тер-

модинамической диаграмме соответственно изохорный, изобарный, изотермический, адиабатный и политропный процессы. На рис. П.3.2, П.3.3 и П.3.4 показан вид изо-

Название процесса	Уравнение процесса	Связь между параметрами состояния	Работа в процессе	Количество теплоты, сообщенное в процессе
Изохорный	$V = \text{const}$	$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\delta A = 0$ $A = 0$	$\delta Q = C_v dT$ $Q = C_v(T_2 - T_1)$
Изобарный	$p = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = p(V_2 - V_1)$	$\delta Q = C_p dT$ $Q = C_p(T_2 - T_1)$
Изотермический	$T = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ $= \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\delta Q = \delta A$ $Q = A$

Продолжение

Название процесса	Уравнение процесса	Связь между параметрами состояния	Работа в процессе	Количество теплоты, сообщенное в процессе
<b>Адиабатный</b>	$\delta Q = 0$	$pV^\kappa = \text{const}$ $pT^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \text{const}$ $V T^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \text{const}$	$\delta A = p dV = -dU$ $A = -\Delta U = C_V(T_1 - T_2) =$ $= \frac{1}{\kappa-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ $A = \frac{M R T_1}{\mu \kappa - 1} \left[ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] =$ $= \frac{p_1 V_1}{\kappa-1} \left[ 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} \right]$	$\delta Q = 0$ $Q = 0$
<b>Политропный</b>	$Q = \text{const}$	$pV^n = \text{const}$ $pT^{\frac{1-n}{n}} = \text{const}$ $V T^{\frac{n-1}{n}} = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ $A = \frac{M R T_1}{\mu n - 1} \left[ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right] =$ $= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n} \right]$	$\delta Q = C dT$ $Q = C(T_2 - T_1)$

Продолжение

Название процесса	Изменение внутренней энергии	Изменение энтальпии	Теплоемкость	Показатель политропы
<b>Изохорный</b>	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU + V dp = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C_V = \frac{M R}{\mu \kappa - 1}$	$n = \pm \infty$
<b>Изобарный</b>	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU + p dV = \delta Q$ $\Delta H = \Delta U + A = Q$	$C_p = \frac{M \kappa R}{\mu \kappa - 1}$	$n = 0$
<b>Изотермический</b>	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dH = 0$ $\Delta H = 0$	$C_T = \begin{cases} +\infty & \text{при } dV > 0 \\ -\infty & \text{при } dV < 0 \end{cases}$	$n = 1$
<b>Адиабатный</b>	$dU = C_V dT = -\delta A$ $\Delta U = -A = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT = -\delta A$ $\Delta H = -\kappa A = C_p(T_2 - T_1)$	$C_{\text{ад}} = 0$	$n = \kappa = \frac{C_p}{C_V}$
<b>Политропный</b>	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C = \frac{M}{\mu} \frac{R(n-\kappa)}{(\kappa-1)(n-1)}$	$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$

в диаграммах  $V - p$ ,  $T - p$  и  $V - T$ . Начальное состояние газа (1) для всех процессов принято одинаковым.

График зависимости теплоемкости  $C$  идеального газа в политропном процессе от показателя политропы  $n$  представлен на рис. II.3.5.

4° Некоторые соотношения для политропного процесса идеального газа:

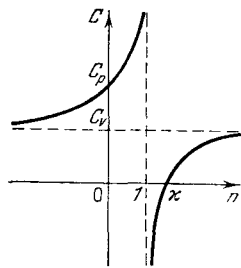


Рис. II 3.5.

$$\frac{\delta Q}{dV} = \frac{\kappa - n}{\kappa - 1} p, \quad \frac{\delta Q}{dp} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} V,$$

$$\frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{\kappa - 1}{\kappa - n}, \quad \frac{dU}{\delta Q} = \frac{n - 1}{n - \kappa},$$

$$\frac{dH}{\delta Q} = \frac{\kappa(n - 1)}{n - \kappa}.$$

## ГЛАВА 4

### ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

#### 1. Обратимые и необратимые процессы

1° *Обратимым термодинамическим процессом* называется термодинамический процесс, допускающий возможность возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения.

Необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

2° *Необратимым термодинамическим процессом* называется термодинамический процесс, не допускающий возможности возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения.

Все реальные процессы протекают с конечной скоростью. Они сопровождаются трением, диффузией и теплообменом при конечной разности между температурами системы и внешней среды. Следовательно, все они неравновесны и необратимы.

3° Всякий необратимый процесс в одном направлении (прямо) протекает самопроизвольно, а для осуществления его в обратном направлении так, чтобы система вер-

нулась в первоначальное состояние, требуется *компенсирующий процесс* во внешних телах, в результате которого состояния этих тел оказываются отличными от первоначальных. Например, процесс выравнивания температур двух соприкасающихся различно нагретых тел идет самопроизвольно, т. е. не связан с необходимостью одновременного существования каких-либо процессов в других (внешних) телах. Однако для осуществления обратного процесса увеличения разности температур тел во внешних телах, обуславливающие, например, работу холодильной машины.

4° Необратимые процессы в силу их неравновесности нельзя изображать в термодинамических диаграммах. Обычно на практике нужно знать интегральные характеристики необратимого процесса перехода системы из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2, т. е. работу  $A_{\text{необр}}$ , совершенную системой, и сообщенное ей количество теплоты  $Q_{\text{необр}}$ . Поэтому необратимый процесс может быть заменен «эквивалентным» ему обратимым процессом 1-2, который переводит систему из состояния 1 в состояние 2 таким образом, что совершенная при этом работа  $A = A_{\text{необр}}$  и полученное системой количество теплоты  $Q = Q_{\text{необр}}$ . Эквивалентный обратимый процесс может быть представлен в любой термодинамической диаграмме.

Таким образом удается условно изображать графически необратимые процессы. Условность этого «изображения» состоит в том, что в действительном необратимом процессе система проходит вовсе не через те состояния, которым соответствуют промежуточные точки кривой «эквивалентного» обратимого процесса.

#### 2. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно

1° *Нагревателем (теплоотдатчиком)* называют тело, сообщающее рассматриваемой термодинамической системе энергию в форме теплоты.

*Холодильником (теплоприемником)* называют тело, получающее от рассматриваемой термодинамической системы энергию в форме теплоты.

2° *Рабочим телом (рабочим агентом)* называют термодинамическую систему, совершающую круговой

процесс в тепловой установке. В тепловом двигателе рабочее тело, получая энергию в форме теплоты, часть этой энергии отдает в форме работы. В холодильной установке рабочее тело, получая энергию в форме работы, осуществляет передачу энергии в форме теплоты от холодного тела к телу, более нагретому.

3° Круговые процессы (стр. 149) изображаются в термодинамических диаграммах в виде замкнутых кривых. Работа против внешнего давления, совершаемая системой в обратимом круговом процессе, измеряется площадью, ограниченной кривой этого процесса в диаграмме  $V-p$ .

*Прямым циклом* называется круговой процесс, в котором система совершает положительную работу:  $A = \oint p dV > 0$ . В диаграмме  $V-p$  прямой цикл изображается в виде замкнутой кривой, проходимой рабочим телом по часовой стрелке.

*Обратным циклом* называется круговой процесс, в котором работа, совершаемая системой, отрицательна:  $A = \oint p dV < 0$ . В диаграмме  $V-p$  обратный цикл изображается в виде замкнутой кривой, проходимой рабочим телом против часовой стрелки.

В тепловом двигателе рабочее тело совершает прямой цикл, а в холодильной установке — обратный цикл.

4° *Термическим (термодинамическим) коэффициентом полезного действия* (к. п. д.)  $\eta$ , называется отношение теплового эквивалента  $A$  работы, совершенной рабочим телом в рассматриваемом прямом круговом процессе, к сумме  $Q_1$  всех количеств теплоты, сообщенных при этом рабочему телу нагревателями:

$$\eta_i = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где  $Q_2$  — абсолютная величина суммы количеств теплоты, отданных рабочим телом холодильникам.

Термический к. п. д. характеризует степень совершенства преобразования внутренней энергии в механическую, происходящего в тепловом двигателе, который работает по рассматриваемому циклу.

5° *Циклом Карно* называется прямой круговой процесс (рис. П.4.1), состоящий из двух изотермических процессов  $1-1'$  и  $2-2'$  и двух адиабатических процессов  $1'-2$  и  $2'-1$ . В процессе  $1-1'$  рабочее тело получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ , а в процессе  $2-2'$

рабочее тело отдает холодильнику количество теплоты  $Q_2$ .

*Теорема Карно*: термический к. п. д. обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и является функцией только абсолютных температур нагревателя ( $T_1$ ) и холодильника ( $T_2$ ):

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Доказательство теоремы Карно основано на втором законе термодинамики (стр. 174).

6° Из сопоставления выражений для термического к. п. д. произвольного цикла (п. 4°) и обратимого цикла Карно следует, что в обратимом цикле Карно отношение температур нагревателя и холодильника равно отношению количеств теплоты, соответственно отданной и полученной ими за цикл:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Таким образом, для сравнения температур двух тел нужно осуществить обратимый цикл Карно, в котором эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника, и измерить  $Q_1$  и  $Q_2$ . Устанавливаемая таким образом шкала температуры называется *абсолютной термодинамической шкалой температуры*. Ее преимущество состоит в том, что в соответствии с теоремой Карно она не связана со свойствами какого-либо конкретного термометрического тела. Однако вследствие невозможности осуществления обратимого цикла Карно указанный способ сравнения температур нельзя практически реализовать, и он имеет лишь принципиальное значение.

7° Термический к. п. д.  $(\eta)_{\text{обр}}$  произвольного обратимого цикла не может превосходить термический к. п. д. обратимого цикла Карно, проведенного между температурами  $T_{\text{макс}}$  и  $T_{\text{мин}}$ :

$$(\eta)_{\text{обр}} \leq \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}},$$

где  $T_{\text{макс}}$  и  $T_{\text{мин}}$  — экстремальные значения температуры нагревателей и холодильников, участвующих в осуществлении рассматриваемого цикла.

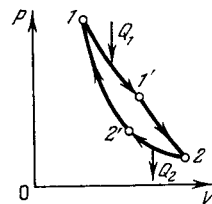
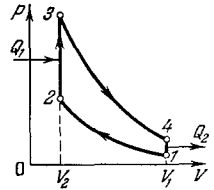
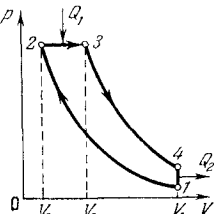
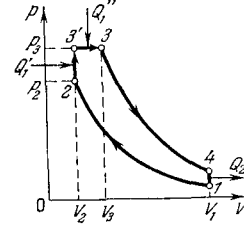


Рис. П.4.1.

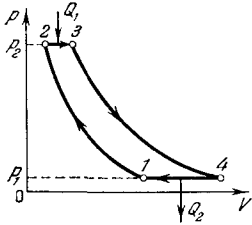
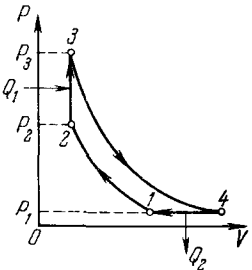
## 8° Теоретические циклы поршневых тепловых двигателей.

Продолжение

Название и схема цикла	Термический к. п. д.
<p>1. Цикл со сгоранием при <math>V = \text{const}</math> (цикл Отто)</p>  <p>Рис. II.4.2.</p> <p>1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изохорное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изохорное охлаждение.</p>	$\eta_t = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}},$ <p>где <math>\epsilon = \frac{V_1}{V_2}</math> — степень сжатия, <math>\kappa</math> — показатель адиабаты сжатия и расширения</p>
<p>2. Цикл со сгоранием при <math>p = \text{const}</math> (цикл Дизеля)</p>  <p>Рис. II.4.3.</p> <p>1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изобарное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изохорное охлаждение.</p>	$\eta_t = 1 - \frac{e^{\kappa-1}}{\kappa e^{\kappa-1}(e-1)},$ <p>где <math>\epsilon = \frac{V_1}{V_2}</math> — степень сжатия, <math>e = \frac{V_3}{V_2}</math> — степень предварительного расширения, <math>\kappa</math> — показатели адиабаты сжатия и расширения</p>

Название и схема цикла	Термический к. п. д.
<p>3. Смешанный цикл со сгоранием при <math>V = \text{const}</math> и <math>p = \text{const}</math> (цикл Тринклера—Сабата)</p>  <p>Рис. II.4.4.</p> <p>1-2 — адиабатное сжатие, 2-3' — изохорное нагревание, 3'-3 — изобарное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изохорное охлаждение.</p>	$\eta_t = 1 - \frac{\lambda e^{\nu-1}}{\epsilon^{\kappa-1}[(\lambda-1) + \kappa\lambda(e-1)]},$ <p>где <math>\epsilon = \frac{V_1}{V_2}</math> — степень сжатия, <math>e = \frac{V_3}{V_2}</math> — степень предварительного расширения, <math>\lambda = \frac{p_3}{p_2}</math> — степень повышения давления, <math>\kappa</math> — показатель адиабаты сжатия и расширения</p>

## 9° Теоретические циклы газовых турбин.

Название и схема цикла	Термический к. п. д.
<p>1. Цикл со сгоранием при <math>p = \text{const}</math></p>  <p>Рис. II.4.5.</p> <p>1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изобарное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изобарное охлаждение.</p>	$\eta_t = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{1}{\kappa-1}}}$ <p>где <math>\beta = \frac{p_2}{p_1}</math> — степень повышения давления при сжатии, <math>\kappa</math> — показатель адиабаты сжатия и расширения</p>
<p>2. Цикл со сгоранием при <math>V = \text{const}</math></p>  <p>Рис. II.4.6.</p> <p>1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изохорное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изобарное охлаждение.</p>	$\eta_t = 1 - \frac{1}{(\lambda-1)\beta^{\frac{\lambda}{\kappa-1}}}$ <p>где <math>\beta = \frac{p_2}{p_1}</math> — степень повышения давления при сжатии, <math>\lambda = \frac{p_3}{p_2}</math> — степень добавочного повышения давления</p>

10° Термический к. п. д.  $(\eta_t)_{\text{необр}}$  произвольного необратимого цикла всегда меньше термического к. п. д. обратимого цикла Карно, проведенного между указанными на стр. 169 температурами  $T_{\text{макс}}$  и  $T_{\text{мин}}$ :

$$(\eta_t)_{\text{необр}} < \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}$$

11° Экономичность холодильной установки характеризуется *холодильным коэффициентом*  $\mathcal{E}$ , равным отношению количества теплоты  $Q$ , отбираемого от охлаждаемого тела, к тепловому эквиваленту  $A$  затрачиваемой на это работы:

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{A}$$

Холодильный коэффициент  $\mathcal{E}_{\text{обр}}$  любой холодильной установки, работающей по обратимому циклу, зависит только от абсолютных температур охлаждаемого тела  $T_0$  и теплоприемника ( $T > T_0$ ), т. е. равен холодильному коэффициенту  $\mathcal{E}_K$  установки, работающей в том же интервале температур по обратимому обратному циклу Карно:

$$\mathcal{E}_{\text{обр}} = \mathcal{E}_K = \frac{T_0}{T - T_0}$$

Для холодильной установки, работающей по необратимому циклу,

$$\mathcal{E}_{\text{необр}} < \frac{T_0}{T - T_0}$$

## 3. Второй закон термодинамики

1° Первый закон термодинамики, выражающий всеобщий закон сохранения и превращения энергии, не позволяет определить направление протекания термодинамических процессов. Например, основываясь на этом законе, можно было бы пытаться построить *вечный двигатель второго рода*, т. е. двигатель, рабочее тело которого, совершая круговой процесс, получало бы энергию в форме теплоты от одного внешнего тела и целиком передавало ее в форме работы другому внешнему телу.

2° Обобщение результатов многочисленных экспериментов привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода. Этот вывод называется *вторым законом термодинамики* и имеет ряд



формулировок, различных по форме, но эквивалентных по существу, в частности <sup>1)</sup>:

а) невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы, эквивалентной количеству теплоты, полученному от нагревателя;

б) невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему.

3° Второй закон термодинамики указывает на существенное различие двух форм передачи энергии — теплоты и работы. Он утверждает, что процесс преобразования упорядоченного движения тела как целого в неупорядоченное движение частиц самого тела и внешней среды является необратимым. Упорядоченное движение может переходить в неупорядоченное без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов, например при трении. В то же время обратный переход неупорядоченного движения в упорядоченное, или, как часто говорят, «переход теплоты в работу», не может являться единственным результатом термодинамического процесса, т. е. всегда должен сопровождаться каким-либо компенсирующим процессом. Например, при равновесном изотермическом расширении идеальный газ совершает работу, которая полностью эквивалентна количеству теплоты, переданному газу нагревателем. Однако плотность газа при этом уменьшается, т. е. «превращение теплоты в работу» не является единственным результатом рассматриваемого процесса. Тепловой двигатель, работающий по прямому циклу Карно, совершает работу, эквивалентную лишь части полученного от нагревателя количества теплоты, так как оставшая часть отдается холодильнику, состояние которого вследствие этого изменяется. В холодильной машине энергия передается в форме теплоты от холодного тела к горячему. Однако для осуществления этого процесса необходим компенсирующий процесс совершения работы внешними телами.

#### 4. Энтропия

1° *Приведенным количеством теплоты*  $Q^*$  в изотермическом процессе называется отношение количества теплоты  $Q$ , полученного системой, к температуре  $T$  теплоот-

<sup>1)</sup> См. также стр. 179.

дающего тела:  $Q^* = Q/T$ , где  $Q > 0$  при подводе к телу энергии и  $Q < 0$  при отводе энергии.

Приведенное количество теплоты для произвольного процесса равно  $Q^* = \int \frac{\delta Q}{T}$ , где  $\delta Q$  — количество теплоты, сообщенное системе на элементарном участке процесса теплоотдающим телом, температура которого равна  $T$ .

2° Приведенное количество теплоты  $Q_{\text{обр}}$ , сообщаемое системе в любом обратимом круговом процессе, равно нулю (*равенство Клаузиуса*):

$$Q_{\text{обр}}^* = \oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

где  $T$  — температура системы, при которой ей сообщается элементарное количество теплоты  $\delta Q$ , а подынтегральное выражение  $\delta Q/T$ , в отличие от  $\delta Q$ , является полным дифференциалом. Следовательно, абсолютная температура системы представляет собой интегрирующий делитель для элементарного количества теплоты, сообщаемого системе в обратимом процессе.

3° *Энтропией* называется функция  $S$  состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты, сообщенного системе, к абсолютной температуре последней:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Энтропия сложной системы равна сумме энтропий всех ее однородных частей.

По знаку изменения энтропии системы в обратимом процессе можно судить о направлении теплообмена. Для всех обычных термодинамических систем внутренняя энергия  $U$  неограниченно возрастает при  $T \rightarrow \infty$ , поэтому абсолютная температура в равновесных состояниях может быть только положительной, так что при нагревании системы  $dS > 0$ , а при охлаждении  $dS < 0$ .

Однако существуют системы (*необычные системы*), для которых  $\lim_{T \rightarrow \infty} U$  равен некоторой конечной величине  $U_0$ . Такие системы могут находиться в состояниях как с положительной, так и с отрицательной абсолютной температурой ( $T > 0$ , если  $U < U_0$ , и  $T < 0$ , если  $U > U_0$ ). Примером такой системы может служить система ядерных

спинов (стр. 812) некоторых кристаллов (например, LiF), которую в течение времени  $\tau$ , много меньшего времени релаксации  $\tau_1$  для спин-решеточного взаимодействия (стр. 766), можно считать изолированной и равновесной, так как время релаксации  $\tau_2$  для спин-спинового взаимодействия (стр. 766) меньше  $\tau_1$  приблизительно в  $10^7$  раз. Температура  $T = 0$  соответствует состоянию, в котором все спины ориентированы в направлении внешнего магнитного поля; температура  $T = \infty$  (или  $T = -\infty$ ) — состоянию полной хаотичности в ориентации спинов; температура  $T = -0$  — состоянию, при котором все спины ориентированы в направлении, противоположном внешнему магнитному полю, т. е. когда энергия системы спинов максимальна.

4° Изменение энтропии в любом обратимом процессе, переводящем систему из состояния 1 в состояние 2, равно приведенному количеству теплоты, переданному системе в этом процессе:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

*Изоэнтропийным процессом* называется термодинамический процесс, в котором энтропия системы не изменяется. Например, в обратимом адиабатическом процессе  $\delta Q = 0$  и  $S = \text{const}$ .

5° Энтропия тела может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого (константы интегрирования):

$$S = \int_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} + \text{const}$$

или

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} + S_0,$$

где интегрирование производится вдоль произвольного обратимого процесса, а  $S_0$  — значение энтропии тела при  $T = 0^\circ \text{K}$ , которое не может быть определено с помощью первого и второго законов термодинамики.

6° Энтропия физически однородной системы является функцией двух независимых параметров состояния, например  $p$  и  $T$  или  $T$  и  $V$  (масса системы предполагается

неизменной). Поэтому

$$S(V, T) = \int_0^T C_V \frac{dT}{T} + S_0'$$

или

$$S(p, T) = \int_0^T C_p \frac{dT}{T} + S_0'',$$

где интегралы  $\int_0^T C_V \frac{dT}{T}$  и  $\int_0^T C_p \frac{dT}{T}$  вычисляются соответственно для обратимых процессов изохорного и изобарного нагревания системы от  $T = 0^\circ \text{K}$  до температуры  $T$ , соответствующей рассматриваемому состоянию,  $C_V$  и  $C_p$  — теплоемкости системы в этих процессах, а  $S_0' = S(V, 0)$  и  $S_0'' = S(p, 0)$ , причем в соответствии с принципом Нернста (стр. 203)  $S_0' = S_0'' = S_0$ .

Пример 1. Энтропия идеального газа. По первому закону термодинамики (стр. 159) при  $\delta A^* = 0$

$$\delta Q = dU + p dV = dH - V dp,$$

где  $dU = C_V dT$  и  $dH = C_p dT$ , так что

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp.$$

Для идеального газа (стр. 151)  $\frac{p}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{V}$  и  $\frac{V}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p}$ , поэтому

$$\begin{aligned} dS &= \frac{M}{\mu} \left( C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu} \right) = \frac{M}{\mu} \left( C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right) = \\ &= \frac{M}{\mu} \left( C_{p\mu} \frac{dV_\mu}{V_\mu} + C_{V\mu} \frac{dp}{p} \right), \end{aligned}$$

где  $V_\mu$  — объем одного моля газа,  $C_{V\mu}$  и  $C_{p\mu}$  — его молярные теплоемкости (стр. 158), зависящие только от температуры;

$$S = \frac{M}{\mu} \left[ \int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln V_\mu + a_1 \right],$$

$$S = \frac{M}{\mu} \left[ \int C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_2 \right],$$

$$S = \frac{M}{\mu} [C_{p\mu} \ln V_\mu + C_{V\mu} \ln p + a_3],$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — постоянные интегрирования.

Для одноатомных газов  $C_{V\mu}$  и  $C_{P\mu}$  не зависят от температуры (стр. 232) и

$$S = \frac{M}{\mu} [C_{V\mu} \ln T + R \ln V_{\mu} + a_1],$$

$$S = \frac{M}{\mu} [C_{P\mu} \ln T - R \ln p + a_2].$$

**Пример 2.** Энтропия смеси  $N$  идеальных газов равна сумме энтропий всех компонентов смеси, взятых при температуре смеси и их парциальных давлениях  $p_i$  (стр. 152):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i} \left[ \int C_{P\mu_i} \frac{dT}{T} - R \ln p_i + a_{2i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i} \left[ \int C_{P\mu_i} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_{2i} \right] + \Delta S_{\text{см}}, \end{aligned}$$

где  $p$  — давление смеси,

$$\Delta S_{\text{см}} = -R \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i} \ln x_i = -R \left( \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i} \right) \left( \sum_{i=1}^N x_i \ln x_i \right)$$

— энтропия смешения,  $x_i$  — молярная концентрация  $i$ -го компонента смеси (стр. 152). Энтропия смешения разнородных идеальных газов не зависит от их индивидуальных особенностей и определяется только молярными концентрациями этих газов и общим числом молей всех газов в смеси. При смешении тождественных газов ( $x_i = 1$ ,  $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_N = 0$ ) энтропия смешения равна нулю (*парадокс Гиббса*).

**Пример 3.** Энтропия газа Ван-дер-Ваальса (стр. 245)  $dU = C_V dT + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} dV$ ; поэтому

$$\begin{aligned} dS &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left( p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) dV = \\ &= \frac{M}{\mu} \left[ C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_{\mu}}{V_{\mu} - b} \right] \end{aligned}$$

и

$$S = \frac{M}{\mu} \left[ \int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln(V_{\mu} - b) + \text{const} \right],$$

где  $V_{\mu}$  — объем одного моля газа, а  $C_{V\mu}$  — его молярная теплоемкость.

### 5. Основное соотношение термодинамики

1° Из второго закона термодинамики следует, что в необратимом элементарном процессе изменение энтропии системы  $dS > \delta Q/T$ , где  $\delta Q$  — количество теплоты, сообщенное системе в этом процессе внешним телом, температура <sup>1)</sup> которого равна  $T$ .

Для произвольного элементарного процесса

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (*)$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства — к необратимым.

2° Для теплоизолированной (адиабатической) системы  $\delta Q = 0$  и выражение (\*) имеет вид

$$dS \geq 0.$$

Этот результат является математической записью второго закона термодинамики, который тем самым состоит в утверждении, что энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать.

Все реальные процессы необратимы, поэтому в действительности энтропия изолированной системы может только возрастать, достигая максимума в состоянии термодинамического равновесия системы. Истолкование этого закона связано с физическим смыслом энтропии, который выясняется в статистической физике (стр. 236).

3° Если система совершает круговой процесс, то изменение ее энтропии равно нулю и алгебраическая сумма приведенных количеств теплоты, сообщенных при этом системе, равна нулю в обратимом процессе:

$$\oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

и меньше нуля в необратимом процессе:

$$\oint_{\text{необр}} \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

Последнее соотношение называется *неравенством Клаузиуса* и является математической записью второго закона

<sup>1)</sup> Предполагается, что абсолютная температура  $T > 0$ . Для систем с отрицательной абсолютной температурой (стр. 175)  $dS < -\delta Q/T$ .

термодинамики для необратимых процессов в изолированной системе.

4° *Основное соотношение термодинамики*, объединяющее в себе первый и второй законы термодинамики, получается из выражения (\*) путем замены  $\delta Q$  его значением в соответствии с первым законом термодинамики (стр. 159):

$$T dS \geq dU + \delta A.$$

Для обратимых процессов это соотношение переходит в *термодинамическое тождество*:

$$T dS = dU + \delta A.$$

## 6. Характеристические функции и термодинамические потенциалы

1° *Характеристической функцией* называется функция состояния системы, посредством которой, а также ее производных могут быть явно выражены термодинамические свойства системы. В зависимости от выбора независимых переменных вид характеристической функции изменяется. Например, при независимых переменных  $H$  (энтальпия) и  $p$  (давление) или  $U$  (внутренняя энергия) и  $V$  (объем) характеристической функцией является энтропия  $S$ , а при независимых переменных  $S$  и  $V$  — внутренняя энергия  $U$  (см. также п. 3°).

2° *Термодинамическим потенциалом* называется характеристическая функция, убыль которой в равновесном (обратимом) процессе, протекающем при неизменных значениях определенной пары термодинамических параметров ( $T$  и  $V$ ,  $T$  и  $p$ ,  $S$  и  $p$ ,  $S$  и  $V$  и т. д.), равна  $A^*$  — полной работе, произведенной системой, за вычетом работы против внешнего давления.

3° Существование термодинамических потенциалов вытекает из термодинамического тождества (стр. 180), согласно которому элементарная работа  $\delta A^* = \delta A - p dV$  (стр. 159) может быть определена с помощью следующих формул:

$$\delta A^* = T dS - dU - p dV,$$

$$\delta A^* = T dS - dH + V dp,$$

$$\delta A^* = -d(U - TS) - S dT - p dV,$$

$$\delta A^* = -d(H - TS) - S dT + V dp.$$

а) Независимые переменные  $S$  и  $V$ . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является внутренняя энергия  $U$  (*изохорно-изотропный потенциал*).

б) Независимые переменные  $S$  и  $p$ . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является энтальпия  $H$  (*изобарно-изотропный потенциал*).

в) Независимые переменные  $T$  и  $V$ . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является функция состояния системы  $F = U - TS$ , называемая *изохорно-изотермическим потенциалом (изохорным потенциалом, свободной энергией)*.

г) Независимые переменные  $T$  и  $p$ . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является функция состояния системы  $\Phi = H - TS = U + pV - TS$ , называемая *изобарно-изотермическим потенциалом (изобарным потенциалом, термодинамическим потенциалом Гиббса)*.

4° *Изохорно-изотермический и изобарно-изотермический потенциалы идеального газа*:

$$F = -\frac{M}{\mu} [RT \ln V_{\mu} + \varphi(T)] = -n [RT \ln \frac{V}{n} + \varphi(T)],$$

$$\Phi = n [RT \ln p + f(T)],$$

где  $n = M/\mu$  — число молей газа,  $V_{\mu}$  — объем одного моля,

$$\varphi(T) = -U_{\mu} + T \left( a_1 + \int C_{V\mu} \frac{dT}{T} \right)$$

и

$$f(T) = H_{\mu} - T \left( a_2 + \int C_{p\mu} \frac{dT}{T} \right)$$

— функции температуры,  $U_{\mu}$  и  $H_{\mu}$  — внутренняя энергия и энтальпия одного моля газа,  $C_{V\mu}$  и  $C_{p\mu}$  — молярные теплоемкости,  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные интегрирования в выражении для энтропии (стр. 177).

5° Для смеси идеальных газов изохорно-изотермический потенциал равен сумме изохорно-изотермических потенциалов всех  $N$  компонентов смеси, взятых при объеме  $V$  и температуре  $T$  смеси:

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = - \sum_{i=1}^N n_i \left[ RT \ln \frac{V}{n_i} + \varphi_i(T) \right].$$

Изобарно-изотермный потенциал смеси равен сумме изобарно-изотермических потенциалов всех  $N$  компонентов смеси, взятых при температуре смеси и их парциальных давлениях (стр. 152):

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N n_i [RT \ln p_i + f_i(T)],$$

или

$$\Phi = \sum_{i=1}^N n_i [RT \ln p + RT \ln x_i + f_i(T)],$$

где  $x_i = n_i / \sum_{i=1}^N n_i$  — молярная концентрация  $i$ -го компонента, а  $p_i$  — его парциальное давление.

#### 6° Элементарная работа

$$\delta A^* = \sum_i F_i da_i,$$

где  $a_i$  — все внешние параметры системы (стр. 146), кроме ее объема  $V$ , а  $F_i$  — соответствующие обобщенные силы (стр. 90). Поэтому уравнения п. 3° (стр. 180) можно записать в виде

$$dU = T dS - p dV - \sum_i F_i da_i,$$

$$dH = T dS + V dp - \sum_i F_i da_i,$$

$$dF = -S dT - p dV - \sum_i F_i da_i,$$

$$d\Phi = -S dT + V dp - \sum_i F_i da_i.$$

Так как  $dU$ ,  $dH$ ,  $dF$  и  $d\Phi$  — полные дифференциалы функций соответственно от независимых переменных  $S$ ,  $V$ ,  $a_1, a_2, \dots$ ;  $S$ ,  $p$ ,  $a_1, a_2, \dots$ ;  $T$ ,  $V$ ,  $a_1, a_2, \dots$  и  $T$ ,  $p$ ,  $a_1, a_2, \dots$ <sup>1)</sup>,

1) Подстрочные индексы у частных производных показывают, при каких неизменных параметрах системы эти производные определяются. В дальнейшем применяется, как это обычно принято, сокращенная запись без индексов  $a_1, a_2, \dots$ , например:  $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$  вместо  $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, a_1, a_2, \dots}$ .

то

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, a_1, a_2, \dots} = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p, a_1, a_2, \dots},$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, a_1, a_2, \dots} = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T, a_1, a_2, \dots},$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S, a_1, a_2, \dots} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_{T, a_1, a_2, \dots},$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V, a_1, a_2, \dots} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{p, a_1, a_2, \dots}.$$

Кроме того, из первого закона термодинамики и написанных выше выражений для  $dU$  и  $dH$  следует:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V, a_1, a_2, \dots} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V, a_1, a_2, \dots},$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, a_1, a_2, \dots} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p, a_1, a_2, \dots}.$$

7° Связь между термодинамическими потенциалами и их производными:

$$U = H - pV = H + V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S,$$

$$H = U + pV = U + p \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S,$$

$$F = U - TS = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,$$

$$\Phi = H - TS = H + T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p.$$

Последние два уравнения называются *уравнениями Гиббса — Гельмгольца*. Эти уравнения могут быть представлены также в виде:

а) изохорно-изотермический процесс —

$$A^* = E_V + T \left(\frac{\partial A^*}{\partial T}\right)_V,$$

где  $A^*$  — работа, совершаемая системой в рассматриваемом процессе,  $E_V$  — тепловой эффект при изохорном процессе (стр. 161);

б) изобарно-изотермический процесс —

$$A^* = E_p + T \left(\frac{\partial A^*}{\partial T}\right)_p,$$

где  $A^*$  — немеханическая работа, совершаемая системой в рассматриваемом процессе (полная работа за вычетом работы расширения),  $E_p$  — тепловой эффект в изобарном процессе (стр. 161).

Пр и м е р. Связь между электродвижущей силой обратимого гальванического элемента <sup>1)</sup> и тепловым эффектом протекающей в нем химической реакции. Работа  $A^*$  затрачивается на перенос электрических зарядов:  $A^* = q\mathcal{E}$ , где  $q$  — перенесенный заряд,  $\mathcal{E}$  — э. д. с. элемента. Из уравнения Гиббса — Гельмгольца для изобарно-изотермического процесса следует уравнение Гельмгольца для гальванического элемента:

$$\mathcal{E} = e_p + T \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p = \frac{e_p \mu}{zF} + T \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p,$$

где  $e_p = E_p/q$  — тепловой эффект, отнесенный к единице перенесенного заряда,  $e_p \mu$  — тепловой эффект, отнесенный к одному молю прореагировавшего вещества,  $F$  — число Фарадея (стр. 388),  $z$  — валентность иона, переносящего заряд.

Количество теплоты  $Q$ , сообщаемое извне элементу при перенесении заряда  $q$ ,

$$Q = -E_p + q\mathcal{E} = qT \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p.$$

Теплоизолированный элемент в процессе работы охлаждается, если  $\left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p > 0$ , и нагревается, если  $\left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p < 0$ .

### 7. Основные дифференциальные уравнения термодинамики (для однофазной однокомпонентной <sup>2)</sup> равновесной системы, на которую не действуют иные силы, кроме равномерно распределенного внешнего давления)

<sup>1)</sup> Состояние рассматриваемой системы полностью определяется заданием двух независимых параметров состояния (масса системы предполагается фиксированной).

Элементарная работа  $\delta A^* = 0$ , и термодинамическое тождество (стр. 180) имеет вид:

$$\begin{aligned} dU &= T dS - p dV, \\ dH &= T dS + V dp, \\ dF &= -S dT - p dV, \\ d\Phi &= -S dT + V dp. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> То есть такого, в котором при пропускании электрического тока в противоположном направлении происходит обратные химические реакции, а потери энергии на выделение теплоты отсутствуют.

<sup>2)</sup> Уравнения, приведенные в этом параграфе, справедливы также для физически однородной многокомпонентной системы постоянного состава.

<sup>2)</sup> Некоторые соотношения между производными термодинамических величин.

а) Независимые переменные  $V$  и  $T$ .

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V,$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_V = C_V + V \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right], \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{T},$$

$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V, \quad C_p - C_V = -T \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2}{\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T},$$

$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = -\frac{T}{C_V} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$  — дифференциальное уравнение адиабаты,

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = \frac{p - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}{C_V}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_H = -\frac{T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}{C_V + V \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}.$$

Пр и м е р 1. Идеальный газ. Уравнение состояния:  $pV = \frac{M}{\mu} RT$ .

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{M}{\mu} \frac{R}{V}, \quad \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{M}{\mu} \frac{RT}{V^2}.$$

Поэтому

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = 0 \quad \text{и} \quad C_p - C_V = \frac{M}{\mu} R,$$

т. е. внутренняя энергия, энтальпия и теплоемкости  $C_V$  и  $C_p$  любого идеального газа, масса которого постоянна, зависят только от температуры.

Пр и м е р 2. Газ Ван-дер-Ваальса. Уравнение состояния:  $\left( p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT$ .

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\frac{M}{\mu} R}{V - \frac{M}{\mu} b}, \quad \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V = 0,$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{\frac{M}{\mu} RT}{\left( V - \frac{M}{\mu} b \right)^2} + 2 \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^3}.$$

Поэтому  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0$ , т. е. теплоемкость  $C_V$  любого газа Ван-дер-Ваальса, масса которого пологина, зависит только от температуры;

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \quad \text{и} \quad C_p - C_V = \frac{\frac{M}{\mu} R}{1 + \frac{M}{\mu} \frac{2a \left(v - \frac{M}{\mu} b\right)^2}{RTV^3}}.$$

б) Независимые переменные  $p$  и  $T$ .

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = C_p - p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = C_p,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T},$$

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p, \quad C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p -$  дифференциальное уравнение адибаты,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{C_p - p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p} \quad \text{-- коэффициент Джоуля -- Томсона.}$$

Пример 3. Идеальный газ. Уравнение состояния:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{MR}{\mu p}, \quad \text{поэтому} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = 0.$$

в) Независимые переменные  $p$  и  $V$ .

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p,$$

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{C_p}{C_V} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V} -$  дифференциальное уравнение адибаты,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V = \frac{p - C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H = -\frac{C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V}.$$

3° Термодинамическим коэффициентом расширяемости называется величина  $\alpha_i$ , характеризующая относительное изменение объема системы при изобарном увеличении ее температуры на единицу:

$$\alpha_i = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_p,$$

где  $V$  — объем системы,  $T$  и  $t$  — ее температура в °К и °С.

Термическим коэффициентом расширения (объемного расширения) называется величина

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_p,$$

где  $V_0$  — объем системы при 0° С.

Термодинамическим коэффициентом сжимаемости (изотермической сжимаемостью) называется величина  $\beta$ , характеризующая относительное изменение объема системы при изотермическом уменьшении ее давления на единицу:

$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Адиабатической сжимаемостью называется величина  $\beta_s$ , характеризующая относительное изменение объема системы при адиабатическом уменьшении ее давления на единицу:

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S, \quad \beta_s = \frac{C_V}{C_p} \beta,$$

где  $C_V$  и  $C_p$  — теплоемкости системы в изохорном и изобарном процессах.

Термодинамическим коэффициентом давления называется величина  $\gamma_i$ , характеризующая относительное изменение давления системы при изохорном увеличении ее температуры на единицу:

$$\gamma_i = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V. \quad \gamma = \frac{1}{p} \frac{\alpha_i}{\beta}.$$

Термическим коэффициентом давления называется величина

$$\gamma = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

где  $p_0$  — давление при  $0^\circ \text{C}$ .

### 8. Диаграмма $s-T$

$1^\circ$  Диаграммой  $s-T$  называется графическое изображение равновесных термодинамических состояний системы в прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которой отложена удельная энтропия  $s$  (энтропия единицы массы системы), а по оси ординат — абсолютная температура  $T$ . Величина  $s$  отсчитывается от ее значения в каком-либо определенном состоянии.

$2^\circ$  Для однородной системы изобары и изохоры на диаграмме  $s-T$  имеют вид восходящих кривых, так как

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} > 0 \quad \text{и} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_V = \frac{T}{c_V} > 0,$$

где  $c_p$  и  $c_V$  — удельные теплоемкости. Чем больше давление  $p$ , тем выше на диаграмме  $s-T$  располагается соответствующая изобара. Чем больше удельный объем  $v$ , тем ниже на этой диаграмме располагается соответствующая изохора.

$3^\circ$  Диаграмма  $s-T$  широко используется для термодинамического анализа обратимых круговых процессов.

В обратимом процессе  $\delta Q = T ds = MT ds$ , где  $M$  — масса системы. Поэтому площадь в диаграмме  $s-T$ , ограниченная кривыми 1-2 (рис. II.4.7), осью абсцисс и ординатами  $s=s_1$  и  $s=s_2$ , пропорциональна количеству теплоты  $Q$ , которое было сообщено системе в этом процессе:

$$Q = M \int_1^2 T ds.$$

Обратимый круговой процесс изображается в диаграмме  $s-T$  в виде замкнутой кривой. В прямом круговом процессе  $1a2b1$  (рис. II.4.8) на участке  $1a2$  системе сооб-

щается количество теплоты  $Q_1$ , а на участке  $2b1$  от нее отводится количество теплоты, абсолютная величина которого равна  $Q_2$ . Величины  $Q_1$  и  $Q_2$  пропорциональны площадям криволинейных трапеций  $s_11a2s_2$  и  $s_1b2s_2$ , заштрихованным соответственно вертикально и горизонтально. Площадь цикла  $1a2b1$  пропорциональна  $Q_1 - Q_2$ , т. е. работе  $A$ , совершенной системой в круговом процессе. Термический к. п. д.  $\eta_c$  кругового процесса равен отношению площади цикла к площади криволинейной трапеции  $s_11a2s_2$ .

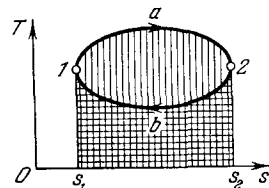


Рис. II.4.8

Обратимый цикл Карно, состоящий из двух изотермических и двух изэнтропийных процессов, изображается в диаграмме  $s-T$  в виде прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат (рис. II.4.9).

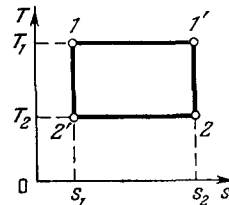


Рис. II.4.9.

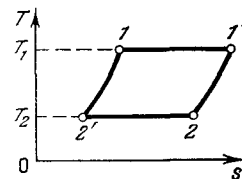


Рис. II.4.10.

Обобщенным циклом Карно называется обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотермических процессов и двух замыкающих цикл процессов, которые в диаграмме  $s-T$  изображаются эквидистантными кривыми, т. е. кривыми, совмещающимися друг с другом при параллельном переносе вдоль оси абсцисс (рис. II.4.10). Термический к. п. д.  $\eta_c$  обобщенного цикла Карно равен

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

$4^\circ$  Диаграмма  $s-T$  применяется также для анализа некоторых необратимых процессов, в частности процессов, необратимость которых вызвана необратимостью адиабатного сжатия и расширения рабочего тела.



**Пример 1.** Круговой процесс 1-2-3-4 (рис. П.4.11), состоящий из обратимых процессов изотермического расширения (1-2) и сжатия (3-4), обратимого адиабатного сжатия (4-1) и необратимого адиабатного расширения (2-3), условно изображенного пунктирной линией (2-3).

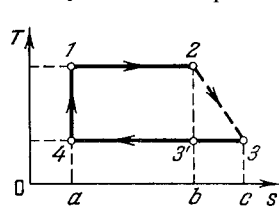


Рис. П.4.11

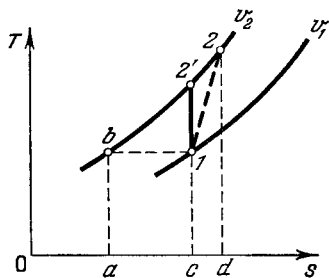


Рис. П.4.12.

Количество теплоты  $Q_1$ , сообщаемое рабочему телу теплодатчиком в процессе 1-2, пропорционально площади прямоугольника  $a12b$ , а абсолютная величина количества теплоты  $Q_2$ , отдаваемого рабочим телом теплоприемнику в процессе 3-4, пропорциональна площади прямоугольника  $a43c$ . Поэтому работа  $A_{необр} = Q_1 - Q_2$ , совершаемая в необратимом цикле 1-2-3-4-1, меньше работы  $A_{обр}$  в соответствующем ему обратимом цикле Карно 1-2-3'-4-1, пропорциональной площади последнего.

Разность  $A_{обр} - A_{необр}$  пропорциональна площади прямоугольника  $b3'3c$ .

**Пример 2.** Процесс адиабатного сжатия идеального газа, необратимость которого обусловлена внутренним трением.

Процесс обратимого адиабатного сжатия газа от удельного объема  $v_1$  до  $v_2$  изображается в диаграмме  $s-T$  (рис. П.4.12) изоэнтропой 1-2'. Работа  $A'_{обр}$ , совершаемая внешними силами в этом процессе, по первому закону термодинамики равна приращению внутренней энергии газа:

$$A_{обр} = M \int_{T_1}^{T_2} c_v dT = M \int_1^{2'} T ds,$$

где  $M$  - масса газа,  $c_v$  - его удельная теплоемкость

в изохорном процессе. Работа  $A'_{обр}$  пропорциональна площади криволинейной трапеции  $ab2'c$ .

Вследствие трения состояние газа в конце необратимого адиабатного сжатия соответствует точке 2, а сам процесс сжатия условно изображается пунктирной линией 1-2, проведенной так, чтобы площадь криволинейной трапеции  $c12d$  была пропорциональна количеству теплоты трения  $Q_{тр}$  или равной ему работе трения  $A'_{тр}$ .

Работа внешних сил  $A'_{необр}$  в процессе 1-2 равна

$$A'_{необр} = M \int_{T_1}^{T_2} c_v dT = M \int_1^2 T ds,$$

т. е. пропорциональна площади криволинейной трапеции  $ab2d$ . Работа  $A'_{необр}$  больше суммы  $A'_{обр} + A'_{тр}$  на величину работы, измеряемой площадью криволинейного треугольника  $12'2$  и обусловленной дополнительным подогревом газа вследствие трения.

**Пример 3.** Процесс адиабатного расширения идеального газа, необратимость которого обусловлена внутренним трением.

Работа  $A_{обр}$ , совершаемая газом в процессе обратимого адиабатного расширения 1-2' (рис. П.4.13),

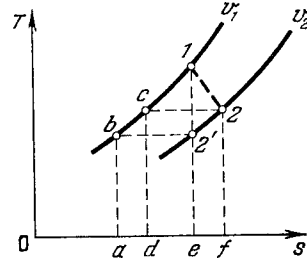


Рис. П.4.13

равна убыли внутренней энергии газа:  $A_{обр} = M \int_1^2 T ds$ , т. е.

пропорциональна площади криволинейной трапеции  $ab1e$ . Работа трения  $A_{тр}$  пропорциональна площади криволинейной трапеции  $e12f$ . Работа  $A_{необр}$ , совершаемая

газом в необратимом процессе 1-2, равна  $A_{необр} = M \int_1^2 T ds$ ,

т. е. пропорциональна площади криволинейной трапеции  $dc1e$ . Разность  $A_{обр} - A_{необр}$  меньше  $A_{тр}$  на величину работы, измеряемой площадью криволинейного треуголь-

шка 122' (площади криволинейных трапеций  $abcd$  и  $e2'2f$  одинаковы, так как для идеального газа  $c_p$  не зависит от  $v$ ) и соответствующей преобразованию части теплоты трения в полезную работу.

### 9. Многокомпонентные и многофазные системы. Условия термодинамического равновесия

1° Всякая экстенсивная величина (стр. 149) для гомогенной системы, состоящей из нескольких компонентов, существенным образом зависит от состава этой системы. Например, термодинамические потенциалы зависят от числа молей каждого компонента в системе:

$$U = U(S, V, n_1, n_2, \dots, n_N), \quad H = H(S, p, n_1, n_2, \dots, n_N), \\ F = F(T, V, n_1, n_2, \dots, n_N), \quad \Phi = \Phi(T, p, n_1, n_2, \dots, n_N),$$

где  $n_i$  — число молей  $i$ -го компонента,  $N$  — общее число компонентов.

2° *Парциальной мольной величиной*  $\bar{G}_i$  называется частная производная от экстенсивной величины  $G(p, T, n_1, n_2, \dots, n_N)$  для гомогенной системы, состоящей из  $N$  компонентов, по числу  $n_i$  молей  $i$ -го компонента при постоянных значениях давления, температуры и числа молей всех остальных компонентов:

$$\bar{G}_i = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_N}.$$

Уравнения Гиббса — Дюгема:

$$G = \sum_{i=1}^N n_i \bar{G}_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N n_i d\bar{G}_i = 0 \\ (\text{при } p = \text{const и } T = \text{const})$$

или для одного моля системы:

$$G_\mu = \sum_{i=1}^N x_i \bar{G}_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N x_i d\bar{G}_i = 0 \\ (\text{при } p = \text{const и } T = \text{const}),$$

где  $x_i = n_i / \sum_{i=1}^N n_i$  — молярная концентрация  $i$ -го компонента и  $G_\mu = G / \sum_{i=1}^N n_i$ .

Для парциальных мольных величин справедливы следующие соотношения:

$$\bar{G}_i = G_\mu + \frac{\partial G_\mu}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$\bar{G}_N = G_\mu - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k}.$$

3° *Химическим потенциалом*  $\mu_i$   $i$ -го компонента гомогенной системы (или фазы гетерогенной системы) называется частная производная от любого из термодинамических потенциалов системы (фазы) по числу молей  $n_i$  этого компонента при постоянных значениях числа молей всех остальных компонентов системы (фазы) и параметров состояния, соответствующих данному термодинамическому потенциалу (стр. 180):

$$\mu_i = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_k} = \left( \frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_k} = \left( \frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{S, p, n_k} = \left( \frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S, v, n_k},$$

где  $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ .

Примечание 1. В статистической физике количество  $i$ -го компонента системы характеризуют не числом молей  $n_i$ , а числом частиц  $N_i = n N_A$ , где  $N_A$  — число Авогадро. Соответственно *химическим потенциалом*  $i$ -го компонента системы называют величину  $\mu_i$ , в  $N_A$  раз меньшую введенной выше:

$$\mu_i = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{p, T, N_k} = \left( \frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{p, T, N_k} = \left( \frac{\partial H}{\partial N_i} \right)_{S, p, N_k} = \left( \frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, v, N_k},$$

где  $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ . Иногда эту величину  $\mu_i$  называют *химическим потенциалом, отнесенным к одной частице*.

На практике чаще всего пользуются в качестве независимых параметров давлением и температурой, поэтому наиболее употребительным является первое выражение для  $\mu_i$ , из которого следует, что химический потенциал представляет собой парциальное мольное значение изобарно-изотермического потенциала. В соответствии с первым уравнением Гиббса — Дюгема (п. 2°)  $\Phi = \sum_{i=1}^N n_i \mu_i$ .

Примечание 2. В статистической физике  $\Phi = \sum_{i=1}^N N_i \mu_i$ , так что для системы, состоящей из одинаковых частиц,

химический потенциал равен отношению изобарно-изотермического потенциала системы к числу содержащихся в ней частиц.

Химический потенциал является интенсивной величиной (стр. 149), т. е. зависит от параметров состояния и состава гомогенной системы, но не зависит от ее массы.

**П р и м е р.** Химический потенциал компонента смеси идеальных газов.

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{p, T, n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_N} = \\ &= RT \ln \frac{n_i}{V} + RT - \varphi_i(T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right)_{p, T, n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_N} = \\ &= RT \ln x_i + RT \ln p + f_i(T),\end{aligned}$$

где  $n_i/V$  и  $x_i$  — мольно-объемная и молярная концентрации  $i$ -го компонента смеси, а  $\varphi_i(T)$  и  $f_i(T)$  имеют тот же смысл, что и на стр. 181 и 182.

4° Для обратимых процессов, совершаемых гомогенной  $N$ -компонентной системой, состав и масса которой могут изменяться и на которую не действуют иные силы, кроме равномерно распределенного внешнего давления, справедливы следующие соотношения:

$$dU = T dS - p dV + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i,$$

$$dH = T dS + V dp + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i,$$

$$dF = -S dT - p dV + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i,$$

$$d\Phi = -S dT + V dp + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i.$$

**П р и м е ч а н и е.** В общем случае к правым частям этих уравнений нужно еще прибавить элементарную работу  $\delta A^*$  (стр. 159).

5° Изобарно-изотермический потенциал гомогенной системы равен

$$\Phi = \int_{p^0}^p V dp + \Phi^0,$$

где интегрирование производится при постоянных значениях температуры и числа молей всех компонентов системы от малого давления  $p^0$ , при котором система представляет собой смесь идеальных газов, до давления  $p$  в рассматриваемом состоянии,  $\Phi^0$  — значение изобарно-изотермического потенциала этой смеси идеальных газов при  $p = p^0$  и температуре  $T$  системы:

$$\Phi^0 = \sum_{i=1}^N \Phi_i^0 + RT \sum_{i=1}^N n_i \ln x_i,$$

где  $\Phi_i^0 = \Phi_i(p^0, T, n_i)$  — изобарно-изотермический потенциал  $i$ -го компонента, а  $x_i$  — молярная концентрация последнего.

Вычисление определенного интеграла  $\int_{p^0}^p V dp$  можно

произвести алгебраически, если рассматриваемая система представляет собой смесь газов и если известно ее уравнение состояния. В общем случае этот интеграл определяется графически на основании экспериментально установленной зависимости  $V = V(p)$  в изотермическом процессе. Если система находится в твердом или жидком состоянии, то зависимость  $V = V(p)$  претерпевает разрывы непрерывности, обусловленные фазовыми переходами (стр. 198). Однако и в этом случае  $\int_{p^0}^p V dp$  может быть

определен графически.

6° Энтропия, энтальпия и внутренняя энергия газовой смеси.

а) Энтропия:

$$S = \int_{p^0}^p \left[ \frac{nR}{p} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \right] dp + S^0,$$

$$S^0 = \sum_{i=1}^N S_i^0 - R \sum_{i=1}^N n_i \ln x_i - nR \ln \frac{p}{p^0},$$

где  $n = \sum_{i=1}^N n_i$  — число молей всех газов в смеси,

$x_i = n_i/n$  — молярная концентрация  $i$ -го газа в смеси; интегрирование производится при постоянных значениях  $n_i$  и температуры, равной температуре  $T$  смеси в рассматриваемом состоянии ( $p, T$ ),  $p^0$  — малое давление,

при котором система является смесью идеальных газов,  $S_i^0$  – энтропия  $i$ -го газа при давлении  $p^0$  и температуре  $T$ :

$$S_i^0 = \int_{T_0}^T C_{p_i}^0 d \ln T + S_{i0}^0,$$

где  $C_{p_i}^0$  – теплоемкость  $i$ -го компонента (идеального газа) в изобарном процессе, а  $S_{i0}^0$  – энтропия этого газа в состоянии ( $p^0, T_0$ ),  $T_0$  – произвольная стандартная температура.

б) Энтальпия:

$$H = \int_{p^0}^p \left[ V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dp + H^0,$$

$$H^0 = \sum_{i=1}^N n_i H_{i0}^0, \quad H_{i0}^0 = \int_{T_0}^T C_{p_i}^0 dT + H_{i0}^0.$$

в) Внутренняя энергия:

$$U = \int_{V^0}^V \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right] dV + U^0,$$

где интегрирование производится при постоянных значениях  $n_i$  и температуры, равной температуре  $T$  смеси, от очень большого объема системы  $V_\infty$ , при котором она является смесью идеальных газов, до ее объема  $V$  в рассматриваемом состоянии;  $U^0$  – внутренняя энергия системы в состоянии ( $V_\infty, T$ ):

$$U^0 = \sum_{i=1}^N n_i U_{i0}^0, \quad U_{i0}^0 = \int_{T_0}^T C_{v_i}^0 dT + U_{i0}^0.$$

7° Термодинамические потенциалы и энтропия гетерогенной системы равны суммам соответствующих функций для всех ее гомогенных частей (фаз)<sup>1)</sup>:

$$U = \sum_{j=1}^{\varphi} U_j, \quad H = \sum_{j=1}^{\varphi} H_j, \quad F = \sum_{j=1}^{\varphi} F_j,$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\varphi} \Phi_j, \quad S = \sum_{j=1}^{\varphi} S_j,$$

где  $\varphi$  – число фаз системы.

<sup>1)</sup> Предполагается, что система не является мелкодисперсной, т. е. что влиянием поверхностных эффектов можно пренебречь.

8° Общие условия термодинамического равновесия системы. В зависимости от характера изоляции системы условия ее термодинамического равновесия выражаются следующими способами:

- а) если  $U = \text{const}$  и  $V = \text{const}$ , то  $dS = 0$  и  $S = S_{\text{макс}}$ ;
- б) если  $S = \text{const}$  и  $V = \text{const}$ , то  $dU = 0$  и  $U = U_{\text{мин}}$ ;
- в) если  $S = \text{const}$  и  $p = \text{const}$ , то  $dH = 0$  и  $H = H_{\text{мин}}$ ;
- г) если  $T = \text{const}$  и  $V = \text{const}$ , то  $dF = 0$  и  $F = F_{\text{мин}}$ ;
- д) если  $T = \text{const}$  и  $p = \text{const}$ , то  $d\Phi = 0$  и  $\Phi = \Phi_{\text{мин}}$ .

Отсюда, в частности, следуют:

*условие химического равновесия*: в равновесной гетерогенной системе химические потенциалы любого компонента должны быть одинаковыми для всех фаз, в которых этот компонент содержится;

*условие теплового равновесия*: температура во всех частях равновесной системы должна быть одинаковой;

*условие механического равновесия*: давление во всех частях равновесной системы, на которую не действуют иные силы, кроме равномерного внешнего давления, должно быть одинаковым.

9° Функции  $U, H, F$  и  $\Phi$  для системы могут иметь несколько минимумов (при заданных значениях соответствующих им двух параметров состояния, например  $p$  и  $T$  для  $\Phi$ ;  $V$  и  $T$  для  $F$  и т. д.), а энтропия  $S$  – несколько максимумов (при  $U, V = \text{const}$ )<sup>1)</sup>.

Состояние равновесия, соответствующее абсолютному максимуму  $S$  при заданных значениях  $U$  и  $V$ , соответственно абсолютному минимуму  $\Phi$  (при заданных  $p$  и  $T$ ),  $F$  (при заданных  $V$  и  $T$ ) и т. д., является *устойчивым*, или *истинным, равновесием*. Состояния равновесия, соответствующие относительным максимумам  $S$  (относительным минимумам  $\Phi, F, H$  и  $U$ ), являются *неустойчивыми*, или *метастабильными*. Примерами метастабильных состояний равновесия могут служить перегретая жидкость и пересыщенный пар (стр. 252).

10° *Принцип Ле-Шателье* (принцип смещения равновесия): если на систему, находящуюся в состоянии устойчивого равновесия, производится внешнее воздействие,

<sup>1)</sup> Число параметров состояния для неравновесных состояний системы больше, чем для равновесных.

выводящее систему из равновесия, то равновесие смещается в том направлении, при котором эффект внешнего воздействия ослабляется.

Например, при уменьшении объема равновесной однокомпонентной системы жидкость — пар происходит конденсация части пара, в результате чего температура системы и давление повышаются.

11° *Фазовым переходом (фазовым превращением)* называется переход вещества из одной фазы в другую. Различают два типа фазовых переходов — фазовые переходы первого и второго рода.

*Фазовым переходом первого рода* называется фазовый переход, сопровождающийся скачкообразным изменением внутренней энергии и плотности. Фазовые переходы первого рода всегда связаны с выделением или поглощением теплоты, называемой *теплотой (скрытой теплотой) фазового перехода*. Термодинамический потенциал  $\Phi$  системы при фазовом переходе первого рода не изменяется. Примерами таких фазовых переходов служат испарение (стр. 260), плавление (стр. 277), сублимация (стр. 277), многие переходы твердого тела из одной кристаллической модификации в другую.

*Фазовым переходом второго рода* называется фазовый переход, при котором отсутствует скачкообразное изменение внутренней энергии и плотности. Теплота фазового перехода второго рода равна нулю. Фазовый переход второго рода сопровождается скачкообразным изменением теплоемкости и термодинамических коэффициентов расширяемости и сжимаемости (стр. 187). Примерами фазовых переходов второго рода являются переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние (стр. 264), переход в точке Кюри ферромагнитного вещества в парамагнитное (стр. 478) и т. д.

12° *Термодинамическими степенями свободы* системы называются параметры фаз системы, находящейся в равновесии, которым можно придавать произвольные значения в том интервале, при котором число фаз не изменяется.

*Правило фаз Гиббса*: число  $f$  термодинамических степеней свободы системы, состоящей из  $\varphi$  фаз и  $N$  компонентов, равно

$$f = N - \varphi + 2.$$

Так как  $f \geq 0$ , то число сосуществующих фаз системы удовлетворяет следующему неравенству:  $\varphi \leq N + 2$ .

В зависимости от числа термодинамических степеней свободы различают *безвариантные* системы ( $f = 0$ ), *одновариантные* системы ( $f = 1$ ), *двухвариантные* системы ( $f = 2$ ) и т. д.

13° Однокомпонентная система ( $1 \leq \varphi \leq 3$ ). При  $\varphi = 3$   $f = 0$ , т. е. равновесное сосуществование данных трех фаз (например, твердой, жидкой и газообразной) возможно только в одном определенном состоянии, называемом *тройной точкой*.

Для двухфазной равновесной однокомпонентной системы давление является функцией температуры. Эта зависимость выражается *уравнением Клапейрона—Клаузиуса*:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T \Delta v},$$

где  $r$  — удельная теплота фазового перехода из первой фазы во вторую,  $\Delta v = v_2 - v_1$  — разность удельных объемов фаз.

Если вторая фаза является идеальным газом, то уравнение Клапейрона—Клаузиуса имеет вид

$$d(\ln p) = -\frac{r_{\mu}}{R} d\left(\frac{1}{T}\right),$$

где  $r_{\mu} = r\mu$  — *теплота испарения* для одного моля вещества.

## 10. Химическое равновесие

1° *Летучестью (фугитивностью, активным давлением)*  $f_i$   $i$ -го компонента гомогенной системы называется функция давления, температуры и концентрации, связанная с химическим потенциалом  $\mu_i$  этого компонента в изотермическом процессе следующим уравнением:

$$(d\mu_i)_T = RT d(\ln f_i)$$

или

$$RT \ln \frac{f_i}{f_i^0} = \mu_i - \mu_i^0,$$

где  $\mu_i^0$  и  $f_i^0$  — значения химического потенциала и летучести  $i$ -го компонента в некотором произвольно выбранном (в отношении давления и концентрации) начальном состоянии, соответствующем той же температуре, что и в рассматриваемом состоянии. Это начальное состояние называется *стандартным состоянием*.

2° *Активностью*  $a_i$   $i$ -го компонента гомогенной системы называется отношение его летучести  $f_i$  в данном состоянии к летучести  $f_i^0$  в стандартном состоянии при той же температуре:

$$a_i = \frac{f_i}{f_i^0}, \quad \text{или} \quad RT \ln a_i = \mu_i - \mu_i^0.$$

3° Летучесть  $i$ -го компонента смеси идеальных газов равна парциальному давлению рассматриваемого газа в смеси:  $f_i = p_i = x_i p$ , где  $x_i$  — молярная концентрация, а  $p$  — давление смеси. Таким образом, летучесть имеет размерность давления.

Термодинамические уравнения, выведенные для изотермических процессов идеальных газов и их смесей, оказываются справедливыми для реальных газов и их смесей, если в этих уравнениях парциальные давления газов заменены их летучестями.

4° *Химическим равновесием* называется равновесие системы, состоящей из химически реагирующих между собой компонентов. При химическом равновесии скорости прямой и обратной реакций одинаковы, так что состав системы не изменяется.

Способность компонентов системы вступать друг с другом в химическую реакцию называется их *химическим средством*. Мерой химического средства для реакции, протекающей в системе, температура и объем которой неизменны, является изменение  $\Delta F$  изохорно-изотермического потенциала системы в процессе реакции:  $\Delta F = F - F_{\text{исх}}$ . Соответственно для реакции, протекающей при постоянной температуре и постоянном давлении, мерой химического средства является изменение изобарно-изотермического потенциала:  $\Delta \Phi = \Phi - \Phi_{\text{исх}}$ . В состоянии химического равновесия потенциалы  $F$  (при  $T, V = \text{const}$ ) и  $\Phi$  (при  $T, p = \text{const}$ ) должны иметь минимум. Поэтому самопроизвольная реакция в системе возможна только в тех случаях, когда  $\Delta F < 0$  (при  $T, V = \text{const}$ ) и  $\Delta \Phi < 0$  (при  $T, p = \text{const}$ ).

5° Химическая реакция символически записывается в виде *стехиометрической формулы*:

$$\sum_{i=1}^N a_i A_i = 0,$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_N$  — химические символы веществ, вступающих в реакцию и образующихся в результате ее, а

$a_1, a_2, \dots, a_N$  — положительные (для веществ, образующихся в результате реакции) и отрицательные (для веществ, вступающих в реакцию) целые числа, пропорциональные изменениям числа молей  $n_1, n_2, \dots, n_N$  веществ

$$A_1, \dots, A_N, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dn_1}{a_1} = \frac{dn_2}{a_2} = \dots = \frac{dn_N}{a_N}.$$

6° *Закон действующих масс*: в состоянии химического равновесия системы соотношение между активностями ее компонентов, химическая реакция между которыми описывается стехиометрической формулой  $\sum_{i=1}^N a_i A_i = 0$ , имеет вид

$$\prod_{i=1}^N a_i^{a_i} = K_a,$$

где  $K_a = e^{-\Delta \mu_0 / RT}$  — *термодинамическая константа равновесия*,  $\Delta \mu_0 = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i^0$  и  $\mu_i^0$  — химический потенциал

$i$ -го компонента в стандартном состоянии. Если для каждого компонента стандартным является состояние чистого вещества, то  $\mu_i^0 = \Phi_{\mu i}^0$  — изобарно-изотермический потенциал одного моля чистого вещества в стандартном состоянии.

В этом случае  $\Delta \mu_0 = \sum_{i=1}^N a_i \Phi_{\mu i}^0 = \Delta \Phi^0$  и для константы равновесия справедливо соотношение

$$RT \ln K_a \approx -\Delta \Phi^0.$$

Для чистого газа за стандартное состояние при каждой температуре принимается гипотетическое состояние, в котором при давлении  $p^0 = 1 \text{ атм}$  летучесть  $f^0 = 1 \text{ атм}$ . Поэтому для газов при любой температуре  $a_i = f_i / p^0$  численно равна  $f_i$ , выраженной в *атм*. Закон действующих масс для реакции в газообразной фазе имеет вид

$$\prod_{i=1}^N f_i^{a_i} = K_f, \quad \text{где} \quad K_f = K_a (p^0)^{\sum_{i=1}^N a_i}.$$

Если газы можно считать идеальными, то  $f_i = p_i = x_i p$  и закон действующих масс записывается в следующих формах:

$$\prod_{i=1}^N p_i^{a_i} = K_p \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^N x_i^{a_i} = K_x,$$

где  $p_i$  и  $x_i$  — парциальное давление и молярная концен-

трация  $i$ -го компонента,  $K_p = K_f$  и  $K_x = p \sum_{i=1}^N \alpha_i K_p$ .

7° Константа равновесия  $K_a$  зависит только от абсолютной температуры. Если для всех компонентов стандартным является состояние чистого вещества, то

$$\frac{d \ln K_a}{dT} = \frac{\Delta H^0}{RT^2},$$

где  $\Delta H^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i H_{\mu}^0$ ,  $H_{\mu}^0$  — энтальпия одного моля  $i$ -го компонента в стандартном состоянии.

Зависимость  $\Delta \Phi^0$  от температуры имеет вид

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta \Phi^0}{RT} \right) = - \frac{\Delta H^0}{RT^2}.$$

8° Если компоненты  $A_i$  рассматриваемой системы являются не простыми веществами, а химическими соединениями, то

$$\Delta \Phi^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\Delta \Phi^0)_i \quad \text{и} \quad K_a = \prod_{i=1}^N (K_a)_i^{\alpha_i},$$

где  $(\Delta \Phi^0)_i$  и  $(K_a)_i$  соответствуют реакции образования одного моля  $i$ -го компонента из простых веществ. При этом необходимо, чтобы все промежуточные реакции синтеза приводили к образованию компонентов  $A_i$  именно в тех термодинамических состояниях, в каких они находятся в рассматриваемой системе.

Стандартным изобарно-изотермным потенциалом  $\Delta \Phi_{298}^0$  какого-либо химического соединения называется изменение изобарно-изотермного потенциала в процессе образования одного моля этого соединения из простых веществ при условии, что процесс является изотермическим ( $t = 25^\circ \text{C}$ ), а исходные простые вещества и образующееся соединение находятся при давлении в 1 атм (точнее, при активностях, равных единице).

Тепловой эффект  $\Delta H_{298}^0$  указанного процесса называется стандартным тепловым эффектом.

## 11. Третий закон термодинамики

1° Первый и второй законы термодинамики не позволяют определить значение  $S_0$  энтропии системы при абсолютном нуле температуры ( $T = 0^\circ \text{K}$ ). В связи с этим

оказывается невозможным теоретический расчет абсолютных значений энтропии, изохорно-изотермного и изобарно-изотермного потенциалов системы, а также константы равновесия.

2° На основании обобщения экспериментальных исследований свойств различных веществ при сверхнизких температурах был установлен закон, устранивший указанную трудность и получивший название принципа Нернста или третьего закона термодинамики. В формулировке Нернста он гласит: в любом изотермическом процессе, проведенном при абсолютном нуле температуры, изменение энтропии системы равно нулю, т. е.

$$\Delta S_{T=0} = 0, \quad S = S_0 = \text{const},$$

независимо от изменения любых других параметров состояния (например, объема, давления, напряженности внешнего силового поля и т. д.). Иными словами, при абсолютном нуле температуры изотермический процесс является также и изоэнтропийным.

3° Из третьего закона термодинамики следует, что для всех тел при  $T = 0^\circ \text{K}$  обращаются в нуль теплоемкости  $C_p$  и  $C_V$  и термодинамический коэффициент расширения  $\alpha$  (стр. 187). Из него также вытекает вывод о невозможности осуществления такого процесса, в результате которого тело охладилось бы до температуры  $T = 0^\circ \text{K}$  (принцип недостижимости абсолютного нуля температуры).

4° Принцип Нернста был развит Планком, предположившим, что  $S_0 = 0$ : при абсолютном нуле температуры энтропия системы равна нулю. Физическое истолкование принципа Нернста в формулировке Планка дается в статистической физике (стр. 231 и 235).

Условие  $S_0 = 0$  при  $T = 0^\circ \text{K}$  является следствием квантового характера процессов, происходящих в любой системе при низких температурах, и выполняется только для систем, находящихся при  $T = 0^\circ \text{K}$  в состоянии устойчивого, а не метастабильного равновесия (стр. 197). На основании гипотезы Планка можно определить абсолютные значения энтропии системы в произвольном равновесном состоянии. Например, для гомогенной системы постоянного состава

$$S(p, T) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT,$$

где интегрирование производится в предположении  $p = \text{const}$ .

Из условия  $S_0 = 0$  следует, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_p = 0.$$

## ГЛАВА 5

### КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

#### 1. Основное уравнение кинетической теории газов

1° Кинетическая теория газов основана на статистических методах исследования (стр. 144).

Основное уравнение кинетической теории газов:

$$pV = \frac{2}{3} W_K,$$

где  $p$  — давление газа,  $V$  — его объем,  $W_K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i u_i^2}{2}$  —

суммарная кинетическая энергия поступательного движения  $n$  молекул газа, находящихся в объеме  $V$ ,  $m_i$  — масса  $i$ -й молекулы,  $u_i$  — ее скорость.

2° Если ввести среднюю квадратичную скорость  $c$  (стр. 207) поступательного движения молекул газа:

$$c = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2},$$

то для однородного газа ( $m_i = m$ )

$$W_K = \frac{1}{2} nmc^2$$

и

$$pV = \frac{1}{3} nmc^2 = \frac{1}{3} Mc^2,$$

где  $M = nm$  — масса газа.

Другой вид основного уравнения:

$$p = \frac{2}{3} W_{K0} = \frac{1}{3} n_0 m c^2 = \frac{1}{3} \rho c^2,$$

где  $n_0 = n/V$  — число молекул газа в единице объема,  $W_{K0} = W_K/V$  и  $\rho = n_0 m$  — плотность газа.

#### 2. Закон распределения молекул по скоростям Максвелла

1° Закон распределения молекул по скоростям Максвелла описывает стационарное распределение молекул однородного одноатомного идеального газа по скоростям в условиях термодинамического равновесия и отсутствия внешнего силового поля. Максвелловское распределение молекул по скоростям устанавливается в результате взаимных столкновений между молекулами при их хаотическом тепловом движении.

2° Употребляются следующие формы закона распределения Максвелла. Распределение молекул по абсолютным значениям скоростей:

$$dn_u = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du.$$

Здесь  $u$  — абсолютное значение скорости молекулы,  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ ,  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $dn_u$  — число молекул (из общего их числа  $n$ ), скорости которых заключены в пределах от  $u$  до  $u + du$ .

Распределение Максвелла в форме

$$dn = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du_x du_y du_z,$$

где  $u_x, u_y, u_z$  — проекции скорости молекулы на оси координат, может быть представлено в виде

$$dn = n f(u_x) f(u_y) f(u_z) du_x du_y du_z.$$

Здесь

$$f(u_i) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mu_i^2}{2kT}} \quad (i = x, y, z)$$

— функция распределения по проекциям скоростей.

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равновероятны, распределение молекул по скоростям изотропно и  $f(u_i)$  имеет одинаковый вид для  $i = x, y, z$ .

Другая форма закона распределения Максвелла по абсолютным значениям скоростей:

$$dn = n \sqrt{\frac{4}{\pi u_B^3}} e^{-\left(\frac{u}{u_B}\right)^2} u^2 du,$$

где  $u_B$  — наиболее вероятная скорость (п. 3°).



На рис. П.5.1 изображена кривая закона распределения молекул по скоростям. Доля молекул газа  $dn$  со скоростями в интервале от  $u$  до  $u+du$  численно равна площади  $dS$  заштрихованной криволинейной трапеции:

$$\frac{u_B dn}{n du}$$

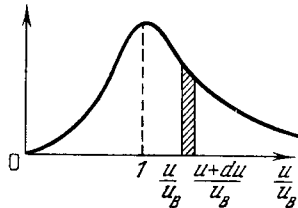


Рис. П.5.1.

$$dS = \left( \frac{1}{n} \frac{dn}{du} \right) du = \frac{dn}{n},$$

$$\frac{dn}{n} = f(u) du,$$

где

$$f(u) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 -$$

функция распределения молекул по скоростям, указывающая долю молекул  $\frac{dn}{n}$  со скоростями, лежащими в единичном интервале  $du$  около значения скорости  $u$ .

Условие нормировки функции распределения:

$$\int_0^{\infty} f(u) du = 1,$$

так как скорости всех молекул заключены в пределах от 0 до  $\infty$ .

С увеличением температуры газа максимум кривой распределения смещается в сторону больших скоростей, а его абсолютная величина уменьшается. На рис. П.5.2 изображены кривые распределения молекул по скоростям при трех температурах  $T_1 < T_2 < T_3$ .

3° Различают следующие скорости, характеризующие газ при данной температуре:

а) наиболее вероятная скорость  $u_B$ , которая соответствует максимуму функции  $f(u)$ :

$$u_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1,41 \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

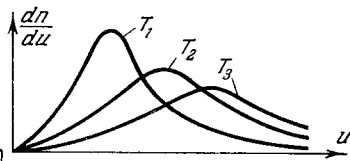


Рис. П.5.2.

б) средняя арифметическая скорость  $\bar{u}$  движения молекул  $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ , где  $n$  — общее число молекул газа:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1,60 \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

в) средняя квадратичная скорость  $c$  движения молекул

$$c = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}:$$

$$c = \sqrt{3BT} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 1,73 \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

где  $B$  — удельная газовая постоянная (стр. 151),  $T$  — абсолютная температура,  $\mu$  — молекулярный вес газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная (стр. 151),  $k$  — постоянная Больцмана,  $m$  — масса молекулы газа.

4° Распределение молекул по энергиям:

$$dn_W = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{W}{kT}} \sqrt{W} dW,$$

где  $W = \frac{mu^2}{2}$  — энергия поступательного движения молекулы одноатомного газа. В этой формуле  $\frac{dn_W}{n} = f(W) dW$ ;  $f(W)$  — функция распределения молекул по энергиям.

Пример 1. Средняя кинетическая энергия молекул одноатомного идеального газа:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \int_0^{\infty} W f(W) dW = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} W e^{-\frac{W}{kT}} \sqrt{W} dW = \frac{3}{2} kT. \end{aligned}$$

Абсолютная температура (стр. 148) является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. Это справедливо в области не слишком низких температур, далеких от температуры вырождения (стр. 229).

Пр и м е р 2. Число молекул, имеющих энергии, больше заданной энергии  $W_{0K} \gg kT$ :

$$n_{W_K > W_{0K}} = \int_{W_{0K}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} n(kT)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_K}{kT}} \sqrt{W_K} dW_K \approx \frac{2n\sqrt{W_{0K}}}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_{W_{0K}}^{\infty} e^{-\frac{W_K}{kT}} dW_K = \frac{2n\sqrt{W_{0K}}}{\sqrt{\pi kT}} e^{-\frac{W_{0K}}{kT}}.$$

5° Распределение Максвелла по относительным скоростям молекул. Относительное движение двух молекул может быть описано как движение одной частицы с приведенной массой (стр. 93)  $m_{пр} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Для однородного газа  $m_1 = m_2 = m$  и  $m_{пр} = \frac{m}{2}$ . Распределение молекул по относительным скоростям:

$$dn_{u_{отн}} = n \left( \frac{m}{4\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m u_{отн}^2}{4kT}} 4\pi u_{отн}^2 du_{отн},$$

где  $u_{отн}$  — относительная скорость двух молекул;

$$\frac{dn_{u_{отн}}}{n} = f(u_{отн}) du_{отн};$$

$f(u_{отн})$  — функция распределения молекул по относительным скоростям, равная

$$f(u_{отн}) = 4\pi \left( \frac{m}{4\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m u_{отн}^2}{4kT}} u_{отн}^2.$$

Пр и м е р. Средняя относительная скорость молекул:

$$\bar{u}_{отн} = \int_0^{\infty} u_{отн} f(u_{отн}) du_{отн} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{2} \bar{u},$$

где  $\bar{u}$  — средняя арифметическая скорость молекул.

### 3. Средняя длина свободного пробега молекул

1° Столкновение двух частиц характеризуется *эффективным поперечным сечением соударения*  $\sigma$ . В случае соударения молекул, имеющих диаметр  $d \approx 10^{-8}$  см, эф-

фективное *газокинетическое* поперечное сечение равно площади круга с радиусом  $d$  (*эффективный диаметр молекулы*):

$$\sigma_0 = \pi d^2.$$

Эффективное поперечное сечение зависит от энергии соударяющихся частиц и характера процесса, происходящего при соударении (стр. 729 и 730).

2° Между двумя последовательными соударениями молекула движется прямолинейно и равномерно, проходя в среднем определенное расстояние, называемое *средней длиной свободного пробега*  $\bar{\lambda}$ . Закон распределения свободных пробегов устанавливает вероятность  $d\omega(x)$  того, что молекула пройдет без соударения путь  $x$  и претерпит соударение на следующем бесконечно малом участке пути  $dx$ :

$$d\omega(x) = e^{-n_0 \sigma x} n_0 \sigma dx,$$

где  $n_0$  — число молекул в 1 см<sup>3</sup> газа,  $\sigma$  — эффективное поперечное сечение соударения.

3° Среднее расстояние  $\bar{x}$ , пройденное молекулой без соударения (средняя длина свободного пробега):

$$\bar{x} = \bar{\lambda} = \int_0^{\infty} x d\omega(x) = \int_0^{\infty} x e^{-n_0 \sigma x} n_0 \sigma dx = \frac{1}{n_0 \sigma}.$$

С учетом распределения соударяющихся молекул по относительным скоростям

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \sigma},$$

где  $\sigma$  считается не зависящим от  $u_{отн}$ . Для данного газа средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению газа  $p$  (при  $T = \text{const}$ ):

$$p_1 \lambda_1 = p_2 \lambda_2;$$

индексы 1 и 2 относятся к двум состояниям газа.

### 4. Явления переноса в газах

1° В результате беспорядочного движения молекул и соударений между ними происходят непрерывные изменения скоростей (энергий) частиц газа. Если существует пространственная неоднородность плотности, температуры газа или скорости упорядоченного движения отдельных

его слоев, то на тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение, которое и выравнивает эти неоднородности, — возникают явления переноса.

2° *Явления переноса* (теплопроводность, внутреннее трение и диффузия) состоят в возникновении в газах или жидкостях направленного переноса массы (диффузия), количества движения (внутреннее трение) и внутренней энергии (теплопроводность). В газах эти явления связаны с нарушением максвелловского распределения молекул по скоростям. В простейшем случае явления переноса одномерны — определяющие их физические величины зависят только от одной декартовой координаты.

3° *Явление теплопроводности* возникает при наличии градиента температуры и в одномерном стационарном случае ( $T = T(x)$ ) описывается уравнением Фурье (общий случай см. стр. 271):

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt,$$

где  $dQ$  — количество теплоты, переносимое за время  $dt$  через площадку  $dS$  в направлении нормали  $x$  к этой площадке в сторону убывания температуры,  $\frac{dT}{dx}$  — градиент температуры,  $K$  — коэффициент теплопроводности, численно равный количеству теплоты, переносимому через единицу поверхности за единицу времени, при градиенте температуры, равном единице.

Согласно элементарной кинетической теории

$$K = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_v.$$

Здесь  $\bar{v}$  — средняя скорость теплового движения молекул,  $\bar{\lambda}$  — средняя длина свободного пробега,  $\rho$  — плотность газа,  $c_v$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

4° *Явление внутреннего трения (вязкости)* связано с возникновением сил трения между двумя слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с различными по величине скоростями. Причиной внутреннего трения является перенос молекулами количества движения из одного слоя газа в другой. Уравнение Ньютона для вязкости в одномерной задаче ( $v = v(x)$ ):

$$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS,$$

где  $dF$  — сила внутреннего трения, действующая на площадку  $dS$  поверхности слоя,  $\frac{dv}{dx}$  — градиент скорости движения слоев в направлении  $x$ , перпендикулярном к поверхности слоя,  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения, численно равный силе трения между двумя слоями с площадью, равной единице, при градиенте скорости, равном единице.

Согласно элементарной кинетической теории

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \rho \bar{\lambda},$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость теплового движения молекул,  $\bar{\lambda}$  — средняя длина свободного пробега,  $\rho$  — плотность газа.

Более точная теория приводит к замене множителя  $1/3$  на коэффициент  $\varphi$ , зависящий от характера взаимодействия молекул. Для молекул, сталкивающихся, как гладкие твердые шары,  $\varphi = 0,499$ . Более точные модели сил взаимодействия приводят к тому, что  $\varphi$  становится возрастающей функцией температуры.

5° Коэффициенты переноса  $K$  и  $\eta$  не зависят от плотности газа, ибо произведение  $\rho \bar{\lambda}$  не зависит от  $\rho$ . Вязкость газов растет с повышением температуры пропорционально  $\sqrt{T}$ .

6° *Явление диффузии* называется процесс установления внутри фаз (стр. 145) равновесного распределения концентраций (стр. 152). Результатом диффузии при постоянной температуре является выравнивание химических потенциалов (стр. 193). В однофазной системе при постоянной температуре и при отсутствии внешних сил диффузия выравнивает концентрацию компонента фазы во всей системе. Если на систему действуют внешние силы или поддерживается градиент температуры, то в результате диффузии устанавливаются градиенты концентраций отдельных компонентов (*термодиффузия, электродиффузия* и другие процессы). Явление диффузии в одномерном случае ( $\rho = \rho(x)$ ) в двухкомпонентной системе описывается *первым законом Фика*:

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt,$$

где  $dM$  — масса первого компонента, которая переносится за время  $dt$  через элементарную площадку  $dS$  в направлении нормали  $x$  к рассматриваемой площадке в сторону

убывания плотности первого компонента,  $dg/dx$  — градиент плотности,  $D$  — коэффициент диффузии.

Если в однокомпонентной системе мысленно выделить группу молекул, выравнивание концентрации выделенных частиц по объему сосуда называется *самодиффузией*. Самодиффузия также описывается законом Фика, в котором  $D$  называется *коэффициентом самодиффузии*.

В простейшем случае самодиффузии происходит выравнивание концентрации химически однородного вещества при  $T = \text{const}$  и отсутствии внешних сил, осуществляемое наложением на тепловое движение атомов или молекул их упорядоченного движения. В случае броуновского движения (стр. 243) диффундируют крупные частицы, взвешенные в газе или жидкости.

7° Плотностью диффузионного потока  $\mathbf{j}$  называется число частиц вещества данного сорта, переносимое путем диффузии в единицу времени через единицу поверхности. При условии существования в среде градиента давлений  $\nabla p$ , вызванного некоторыми внешними силами, и градиента температур  $\nabla T$  плотность диффузионного потока равна

$$\mathbf{j} = -Dn_0 \left( \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right), \quad \text{где } n_0 = \frac{p}{kT},$$

$k$  — постоянная Больцмана,  $D$  — коэффициент диффузии, численно равный плотности диффузионного потока при наличии одного только градиента концентрации  $\nabla c$ , равного  $1/n_0$ . Величина  $k_T D$  называется *коэффициентом термодиффузии*; эта величина численно равна плотности диффузионного потока при условиях:  $\nabla c = \nabla p = 0$ ;  $\nabla T/T = 1/n_0$ . Безразмерная величина  $k_T$  называется *термодиффузионным отношением*. Величина  $k_p D$  называется *коэффициентом бародиффузии*; она численно равна плотности диффузионного потока при условиях:  $\nabla c = \nabla T = 0$ ,  $\nabla p/p = 1/n_0$ .

8° В случае трехмерной диффузии изменение концентрации с течением времени при постоянной температуре и отсутствии внешних сил описывается дифференциальным уравнением диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right),$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $t$  — время. Если  $D$  не зависит от концентрации, то уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$$

(второй закон Фика), где  $\Delta$  — дифференциальный оператор Лапласа.

Пример 1. Распределение концентрации вдоль полубесконечного стержня, на торце которого в начальный момент времени  $t=0$  сосредоточена масса  $M$  (на единице площади торца):

$$c(x, t) = \frac{M}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

где  $x$  — расстояние от торца.

Пример 2. Распределение концентрации растворенного в жидкости вещества с массой  $M$ , которое в начальный момент  $t=0$  находилось в начале координат:

$$c(r, t) = \frac{M}{8\varrho(\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}},$$

где  $\varrho$  — плотность жидкости,  $r$  — расстояние от начала координат.

9° Согласно элементарной кинетической теории газов

$$D = \frac{1}{3} \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}n_0\sigma} = \frac{1}{3} \frac{\bar{u}\lambda}{\sqrt{2}},$$

где  $\bar{u}$  — средняя скорость теплового движения молекул,  $\sigma$  — эффективное поперечное сечение соударения молекул (стр. 208),  $n_0$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ ,  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега.

Коэффициент самодиффузии обратно пропорционален давлению газа; при изменении температуры  $D$  изменяется пропорционально  $T^{1/2}$  при постоянном объеме и  $T^{3/2}$  (практически от  $T^{1.7}$  до  $T^2$ ) при постоянном давлении.

10° В неравновесной стационарной смеси двух газов наблюдается диффузия молекул одного газа в другой. В первом приближении коэффициент диффузии  $D$  в этом случае вычисляется по формуле п. 9°, причем

$$\sigma = \sqrt{2}\pi \left( \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2,$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — диаметры молекул обоих газов. Более точное выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{3\sqrt{RT}}{32\sqrt{2}\pi N_A \psi(c_1 + c_2)} \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}},$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — молекулярные веса каждого из газов,  $c_1$  и  $c_2$  — их концентрации в *моль/см<sup>3</sup>*,  $N_A$  — число Авогадро. Величина  $\psi$  зависит от характера силового взаимодействия молекул; в случае молекул — упругих шариков

$$\psi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{16},$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — диаметры молекул обоих сортов газов.

11° Согласно кинетической теории газов между коэффициентами переноса существует связь:

$$\eta = \rho D \quad \text{и} \quad \frac{K}{\nu c_V} = 1,$$

где  $c_V$  — удельная теплоемкость газа в изохорном процессе. Практически используется более точная связь коэффициентов переноса:

$$D = \frac{K}{\alpha \rho c_V},$$

где  $\alpha$  — множитель, зависящий от числа степеней свободы молекул газа; для одноатомного газа  $\alpha = 2,5$ , двухатомного  $\alpha = 1,9$ ; трехатомного  $\alpha = 1,75 \div 1,5$ .

По одному найденному из опыта коэффициенту переноса и известным  $\rho$  и  $c_V$  могут быть определены остальные коэффициенты. Формулы для коэффициентов явлений переноса в газах согласуются с опытом лишь приблизительно, с точностью до порядка величины. По значениям коэффициентов переноса могут быть вычислены эффективные диаметры молекул. В таблице ниже приведены уравнения переноса (для одномерной задачи) и формулы для коэффициентов переноса в газах.

Сводная таблица явлений переноса в газах

Явление	Переносимая физическая величина	Уравнение переноса	Формула коэффициента переноса
Диффузия	Масса	$dM = -D \frac{dc}{dx} dS dt$	$D = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda}$
Внутреннее трение	Количество движения	$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS$	$\eta = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \epsilon$
Теплопроводность	Внутренняя энергия	$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt$	$K = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho c_V$

### 5. Свойства разреженных газов

1° *Разреженным* называется газ, находящийся в состоянии при давлении ниже атмосферного. Такое состояние газа называется также *вакуумом*. Степень разрежения газа зависит от соотношения между средней длиной свободного пробега  $\bar{\lambda}$ , соответствующей взаимным столкновениям молекул газа, и линейными размерами  $d$  сосуда, в котором находится газ. Различают степени сверхвысокого ( $\bar{\lambda} \gg d$ ), высокого ( $\bar{\lambda} \approx d$ ), среднего ( $\bar{\lambda} \ll d$ ) и низкого ( $\bar{\lambda} \ll d$ ) вакуума. Отличие свойств разреженных газов от неразреженных проявляется в первых трех из перечисленных степеней вакуума.

Некоторые характеристики различных степеней вакуума

Характеристики	Вакуум			
	низкий	средний	высокий	сверхвысокий
Давления, характерные для данной степени вакуума, мм рт. ст.	760—1	$1-10^{-2}$	$10^{-3}-10^{-7}$	$10^{-8}$ и менее
Число молекул, м <sup>-3</sup>	$10^{25}-10^{22}$	$10^{22}-10^{19}$	$10^{18}-10^{13}$	$10^{13}$ и менее
Зависимость от давления коэффициентов теплопроводности и внутреннего трения	Не зависят от давления	Зависимость от давления определяется параметром $\frac{\bar{\lambda}}{d}$	Прямо пропорциональны давлению	Оба явления практически отсутствуют

2° В дальнейшем под разреженными газами понимаются газы, находящиеся в состоянии высокого вакуума. Длина свободного пробега молекул разреженного газа определяется размерами сосуда. Поэтому уменьшение плотности разреженного газа не влияет на величину  $\bar{\lambda} = d$ , а приводит лишь к убыли числа молекул, участвующих в переносе импульса или внутренней энергии.

Коэффициенты вязкости и теплопроводности разреженного газа прямо пропорциональны плотности газа.

3° В разреженных газах существует лишь внешнее трение движущегося газа о стенки сосуда. Последнее зависит от изменения импульса (количества движения) молекул при их соударениях со стенками. Величина силы трения, действующей на единицу площади стенки, в первом приближении пропорциональна скорости движения газа и его плотности. Теплопроводность разреженных газов меньше, чем обычных газов, и осуществляется переносом внутренней энергии молекулами, свободно перемещающимися между стенками сосуда с различными температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Количество теплоты, полученное (или отданное) единицей площади стенки за единицу времени, прямо пропорционально разности температур  $T_1 - T_2$  и плотности газа.

4° *Закон Кнудсена* для течения разреженного газа по цилиндрическому капилляру радиуса  $r$  и длины  $l$ :

$$Q = \frac{8}{3} r^3 \sqrt{\frac{\pi \mu}{2RT}} \frac{p_1 - p_2}{l},$$

где  $Q$  — масса газа, протекающего за 1 сек через поперечное сечение капилляра,  $\mu$  — молекулярный вес газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная (стр. 151),  $T$  — абсолютная температура,  $p_1$  и  $p_2$  — давления газа на концах капилляра.

5° При соединении узкой трубкой двух сосудов, находящихся при различных температурах  $T_1$  и  $T_2$ , стационарному состоянию разреженного газа соответствует условие

$$n_1 u_1 = n_2 u_2,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — числа молекул в 1 см<sup>3</sup> в обоих случаях,  $u_1$  и  $u_2$  — их средние скорости. Это условие означает равенство встречных потоков молекул, перелетающих из первого сосуда во второй и обратно. Так как  $n \propto p/T$ , а  $u \propto \sqrt{T}$ , то

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

(*эффект Кнудсена*).

6° На особых свойствах разреженных газов основано устройство многих приборов для получения вакуума (*диффузионные* и др. *насосы*), его измерения (*вакуумметры*) и для создания тепловой изоляции (*сосуды Дьюара*).

## ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### 1. Введение

1° *Статистической физикой* (*физической статистикой*) называется раздел теоретической физики, в котором изучаются макроскопические свойства систем на основе молекулярно-кинетических представлений и методов математической статистики.

Статистическая физика рассматривает системы, находящиеся в равновесном состоянии (стр. 146) или близких к нему. Задачей статистической физики является исследование поведения и свойств таких систем на основе определенных представлений об их атомной структуре.

2° В статистической физике предполагаются известные свойства и законы движения отдельных атомов, молекул, элементарных частиц, изучаемые квантовой механикой. Во многих случаях состояние произвольной системы, состоящей из  $n$  частиц с  $s$  степенями свободы, может быть описано классической механикой заданием  $ns$  обобщенных координат и  $ns$  обобщенных импульсов (стр. 92), т. е. заданием  $2ns$  независимых переменных.

3° Поведение систем, состоящих из большого числа частиц, определяется *статистическими закономерностями*, отличными от законов, которым подчиняется каждая из частиц, входящая в макроскопическую систему. Поведение отдельной частицы (например, ее траектория, последовательность изменения ее состояний и т. п.) при статистическом описании системы оказывается несущественным. Поэтому изучение свойств системы сводится к отысканию средних значений физических величин, характеризующих состояние системы как целого. Существенное отличие систем, подчиняющихся статистическим закономерностям, от систем, в которых достаточным оказывается описание с помощью законов механики, состоит в том, что поведение и свойства первых в значительной степени не зависят от их начального состояния.

4° Связь между закономерностями, описывающими движение отдельных частиц (*динамические закономерности*), и статистическими закономерностями проявляется в том, что в зависимости от законов движения отдельных частиц существенно изменяются свойства макроскопической системы, изучаемой методами статистической физики.

## 2. Вероятность состояния системы. Средние значения физических величин

1° Различные состояния системы могут осуществляться с той или иной вероятностью. Вероятность  $i$ -го состояния  $w_i$  определяется как предел отношения времени  $t_i$ , в течение которого система находится в данном состоянии, к полному времени  $T$  наблюдения над системой при неограниченном увеличении  $T$ :

$$w_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_i}{T}.$$

Если некоторая физическая величина  $M$  является однозначной функцией состояния (стр. 149) и принимает значение  $M_i$ , то это означает, что система находится в  $i$ -м состоянии.

2° Вероятность  $i$ -го состояния системы совпадает с вероятностью того, что физическая величина  $M$  принимает значение  $M_i$ . Если  $N$  есть полное число измерений величины  $M$ , а  $N_i$  есть число измерений, в результате которых найдено, что величина  $M$  имеет значение  $M_i$ , то

$$w_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}.$$

3° При непрерывном изменении состояния системы необходимо говорить не о значении  $M_i$ , а об интервале значений этой величины. Вероятность  $dw(M)$  того, что величина  $M$  имеет значение, лежащее в интервале от  $M$  до  $M + dM$ , равна

$$dw(M) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt_M}{T},$$

где  $dt_M$  — время, в течение которого система находится в состояниях, соответствующих значениям  $M$ , лежащим в интервале от  $M$  до  $M + dM$ ; величины  $dt_M$  и  $dw_M$  пропорциональны величине интервала  $dM$ :

$$dw(M) = \varrho(M) dM,$$

где  $\varrho(M)$  — плотность вероятности, или функция распределения вероятностей.

4° Условие нормировки вероятностей состояния:

$$\text{при дискретных состояниях } \sum_i w_i = 1;$$

$$\text{при непрерывном изменении состояний } \int dw(M) = \\ = \int \varrho(M) dM = 1.$$

5° Статистическое среднее значение величины  $M$  обозначается  $\bar{M}$  и определяется следующим образом:

$$\bar{M} = \sum_i M w_i,$$

если величина  $M$  изменяется дискретно. Суммирование производится по всем состояниям системы. В случае непрерывного изменения величины  $M$

$$\bar{M} = \int M dw(M) = \int M \varrho(M) dM,$$

где интегрирование производится по всем возможным состояниям системы. Примеры вычисления средних значений см. на стр. 207, 208.

## 3. Распределение Гиббса

1° Микроканоническим распределением Гиббса называется распределение вероятностей различных состояний замкнутой макроскопической системы, т. е. системы, не взаимодействующей с окружающими телами и имеющей постоянную энергию. Подобная система в действительности не может быть получена и является идеализированной. Ее состояния являются вырожденными: каждому значению энергии могут соответствовать различные состояния. Кратностью вырождения данного состояния  $\Omega(E)$  называется число состояний, обладающих энергией  $E$ .

2° Микроканоническое распределение основано на предположении о равной вероятности различных состояний, имеющих одну и ту же энергию. При изображении состояния системы в фазовом пространстве (стр. 96) каждому состоянию соответствует ячейка (клетка), и их совокупность с заданной энергией образует некоторую поверхность  $E = \text{const}$ .

3° Макроскопические системы, которые могут в течение достаточно большого времени пребывать в любом состоянии с данной энергией, называются эргодическими (эргодными). Предположение, лежащее в основе микроканонического распределения (п. 2°), означает, что изобразительная точка в фазовом пространстве с равной вероятностью располагается в любой ячейке фазового пространства на поверхности  $E = \text{const}$ .

4° Для эргодических систем, состояния которых с данной энергией  $E$  равновероятны, справедливо утверждение: если макроскопическая система в некоторый момент времени находится в данном состоянии с энергией  $E$ , то

с течением времени она будет самопроизвольно переходить в любые другие состояния с той же энергией и находиться в каждом из них (в среднем) одинаково долго.

Вероятность состояния системы  $w(E_i)$  выражается микроканоническим распределением Гиббса:

$$w(E_i) = C \Omega(E_i).$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  определяется из условия нормировки (стр. 218)

$$\sum_i w(E_i) = 1.$$

Микроканоническое распределение Гиббса лежит в основе канонического распределения Гиббса.

5° *Каноническим распределением Гиббса* называется распределение вероятностей различных возможных состояний некоторой *квазизамкнутой подсистемы*, т. е. некоторой части замкнутой макроскопической системы (стр. 145). Подсистема называется квазизамкнутой, если ее собственная энергия в среднем велика по сравнению с энергией ее взаимодействия с остальными частями замкнутой системы (называемыми *термостатом*).

Например, каждая молекула идеального газа при не слишком низких температурах является квазизамкнутой подсистемой. Ее собственная кинетическая энергия в среднем намного превышает энергию ее взаимодействия с другими молекулами газа (термостатом).

6° Взаимодействие подсистемы с термостатом приводит к изменению ее состояний: она может переходить как в состояния с первоначальной энергией, так и в состояния с другими значениями энергии. При последних переходах подсистема обменивается энергией с термостатом, увеличивая или уменьшая свою энергию.

7° Вероятность состояния подсистемы зависит только от ее энергии. Согласно *квантовому каноническому распределению Гиббса*

$$w(E_i) = \frac{e^{-\frac{E_i}{\Theta}} \Omega(E_i)}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{\Theta}} \Omega(E_i)} = \frac{e^{-\frac{E_i}{\Theta}} \Omega(E_i)}{Z},$$

где  $w(E_i)$  – вероятность пребывания квазизамкнутой подсистемы в состоянии с энергией  $E_i$ ,  $\Omega(E_i)$  – кратность вырождения (стр. 219),  $\Theta$  – *модуль канонического распределения*, или *статистическая температура*.

Величина  $\Theta$  является температурой, выраженной в энергетических единицах. Она превращает неполный дифференциал  $\delta Q$  в полный дифференциал величины  $\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V$ , где  $F$  – свободная энергия системы (стр. 183):

$$\delta Q = -\Theta d\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V.$$

Величина  $\Theta$  принимает одинаковые значения в двух различных системах, находящихся в состоянии термодинамического равновесия при тепловом контакте между ними. Универсальным коэффициентом пропорциональности, переводящим статистическую температуру  $\Theta$  из эргов в градусы, является постоянная Больцмана (стр. 151):

$$\Theta = kT > 0.$$

Величина  $Z = \sum_i e^{-E_i/\Theta} \Omega(E_i)$  называется *суммой по состояниям* или *статистической суммой*.

8° Для систем, энергия состояний которых изменяется квазинепрерывно, т. е. расстояния между энергетическими уровнями которых малы сравнительно с  $\Theta = kT$ , квантовое распределение Гиббса переходит в *классическое каноническое распределение*:

$$dw(E) = \frac{e^{-\frac{E}{\Theta}}}{Z} d\Omega(E),$$

где  $d\Omega(E) = \Omega(E) dE$ ,  $Z = \int e^{-E/\Theta} \Omega(E) dE$ ,

$d\Omega(E)$  – число различных состояний, отвечающих интервалу энергий от  $E$  до  $E + dE$ ,  $Z$  – *интеграл состояний* или *фазовый интеграл*. Для системы  $N$  тождественных частиц

$$Z = \frac{1}{h^s N!} \int e^{-\frac{E}{\Theta}} d\Gamma,$$

где  $d\Gamma$  – элемент фазового объема (стр. 104),  $h$  – постоянная Планка,  $s$  – число степеней свободы системы, а интегрирование проводится по всему фазовому пространству данной системы. Интеграл состояний и статистическая сумма связаны со свободной энергией  $F$  (стр. 181) системы соотношением

$$Z = e^{-\frac{F}{\Theta}}; \quad F = -\Theta \ln Z.$$

9° Для подсистемы с большим числом частиц каноническое распределение Гиббса имеет резкий максимум. Такая подсистема наибольшую часть времени находится



в наиболее вероятном состоянии с соответствующей ему энергией. Если подсистемой является одна молекула идеального газа, то каноническое распределение Гиббса переходит в распределение Больцмана (стр. 224).

Каноническое распределение Гиббса применяется при отыскании среднего значения  $\bar{M}$  физической величины  $M$ , характеризующей состояние системы и зависящей от ее энергии (стр. 219):

$$\bar{M} = \sum_r M(E_r) w(E_r).$$

При непрерывном изменении состояний

$$\bar{M} = \int M(E) dw(E).$$

10° Вычисление  $Z$  позволяет отыскать термодинамические функции и уравнение состояния данной системы.

В таблице ниже приведена сводка формул, выражающих термодинамические функции, теплоемкость и уравнение состояния через сумму (или интеграл) по состояниям системы.

Наименование величины	Обозначение	Формула
Свободная энергия	$F$	$F = -kT \ln Z$
Изобарно-изотермический потенциал	$\Phi$	$\Phi = kT \left[ \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln U} \right)_T - \ln Z \right]$
Внутренняя энергия	$U$	$U = kT^2 \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V$
Энтальпия	$S$	$S = k \left[ \ln Z + T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \right]$
Энтальпия	$H$	$H = kT \left[ \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V} \right)_T + \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T} \right)_V \right]$
Теплоемкость	$C_V$	$C_V = kT \left[ 2 \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V + \right.$ $\left. + T \left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2} \right)_V \right]$
Уравнение состояния	$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$	$p = kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T$

#### 4. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

В классической статистической системе, состоящей из которой характеризуется термодинамическим равновесием (стр. 146), каждой степени свободы отдельной частицы соответствует одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура.

Все степени свободы системы, описываемой классической механикой, энергетически равноправны. В этом и заключается закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Этот закон имеет ограниченную область применимости и перестает быть справедливым при квантовом описании системы (стр. 225).

#### 5. Распределение Максвелла — Больцмана

Закон, или распределение, Максвелла — Больцмана устанавливает распределение молекул газа по координатам и скоростям при наличии произвольного потенциального силового поля.

Наиболее употребительные формулы этого распределения:

$$a) dn_u = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}u_B^3} e^{-\frac{1}{u_B^2} \left( u^2 + \frac{2W_{II}}{m} \right)} u^2 du,$$

где  $u_B$  — наиболее вероятная скорость молекул (стр. 206),  $dn_u$  — число молекул в единице объема газа вблизи точки  $(x, y, z)$ , скорости которых заключены в интервале от  $u$  до  $u + du$ ,  $W_{II}(x, y, z)$  — потенциальная энергия молекулы в рассматриваемой точке внешнего силового поля,  $n_0$  — число молекул в единице объема газа в той точке, где  $W_{II} = 0$ ;

$$b) dw = \text{const.} \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2 + p_x^2 + p_y^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z \times \\ \times e^{-\frac{W_{II}(x, y, z)}{kT}} dx dy dz,$$

где  $dw$  — вероятность того, что координаты и проекции импульса молекулы находятся в элементе фазового объема  $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  около фазовой точки  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ ;  $W_{II}(x, y, z)$  — потенциальная энергия

молекулы во внешнем силовом поле. В такой форме распределение Максвелла — Больцмана можно рассматривать как функцию распределения, представляющую собой произведение вероятностей двух независимых событий — вероятности данного значения импульса молекулы и данного положения ее в пространстве. Первая вероятность,

$$dw(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z,$$

является распределением Максвелла (стр. 205). Вторая вероятность,

$$dw(x, y, z) = \text{const} \cdot e^{-\frac{W_{\Pi}(x, y, z)}{kT}} dx dy dz,$$

называется *распределением Больцмана*.

**П р и м е р.** Распределение Больцмана в гравитационном поле. Потенциальная энергия молекулы с массой  $m$  в поле тяготения:  $W_{\Pi} = mgz$ , где  $z$  — высота и  $g$  — ускорение силы тяжести. На каждой высоте имеется максвелловское распределение молекул по скоростям, определяемое температурой. Интегрирование распределения Максвелла по всем импульсам дает число молекул, находящихся в объеме  $dx dy dz$ :

$$dn(x, y, z) = \text{const} \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}} dx dy dz.$$

Отсюда следует, что плотность газа  $\rho = \frac{dn(x, y, z)}{dx dy dz} m$  убывает с высотой по экспоненциальному закону:

$$\rho = \text{const} \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

Постоянная в этом выражении определяется из условия, что при  $z = 0$   $\rho = \rho_0 = \text{const}$ .

Таким образом,  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$  (*барометрическая формула*). Плотность газа убывает в  $e$  раз на высоте  $h = kT/mg$ , называемой *характеристической длиной распределения Больцмана в гравитационном поле*.

## 6. Квантовая статистика

1° *Квантовой статистикой* называется теория систем, состоящих из весьма большого числа частиц, подчиняющихся квантовым закономерностям.

Состояние произвольной квантовомеханической системы, имеющей  $s$  степеней свободы, можно рассматривать в так называемом *квазиклассическом приближении* аналогично тому, как это делается в классической механике. При этом на возможные состояния системы накладывається ограничение: каждому квантовому состоянию системы с  $s$  степенями свободы соответствует ячейка (клетка) в ее фазовом пространстве, имеющая объем  $h^s$ . Это соответствует соотношению неопределенностей Гейзенберга (стр. 719).

Изменение состояния системы может происходить лишь дискретно; система из одних клеток фазового объема переходит «скачком» в другие. В квазиклассическом приближении переход в соседнюю квантовую ячейку соответствует очень малому изменению свойств системы. Можно считать, что свойства системы изменяются непрерывно. Распределение частиц по ячейкам 6-мерного фазового пространства  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  характеризует определенное *микросостояние* системы.

2° Задачей квантовой статистики является отыскание функции распределения системы частиц в фазовом пространстве. Существенным отличием квантовой статистики от классической является последовательное проведение *принципа неразличимости тождественных частиц*. В квантовой статистике при решении задачи о распределении тождественных частиц в фазовом пространстве не имеет смысла постановка вопроса о том, какая из частиц находится в данной ячейке (клетке) фазового пространства. Ставится вопрос лишь о числе частиц, находящихся в данной ячейке. Микросостояние системы не изменяется от перестановки частиц как внутри данной клетки фазового пространства, так и между клетками.

## 7. Квантовые распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака

1° В системах, описываемых симметричными волновыми функциями (стр. 756), осуществляется *статистика Бозе — Эйнштейна*. Этой статистике подчиняются системы частиц с целым спином (стр. 769) — *бозоны* (например, фотоны и некоторые ядра), для которых не накладывається ограничения на число частиц, могущих находиться в данной клетке 6-мерного фазового пространства.

2° Для отыскания функции распределения в статистике Бозе — Эйнштейна весь фазовый объем разбивают на

малые элементы  $\Delta G_i$ , в каждом из которых содержится  $\Delta g_i$  состояний с энергией от  $W$  до  $W_i + \Delta W_i$ . Если в данном элементе фазового объема  $\Delta G_i$  содержится  $\Delta N_i$  частиц, то они могут всевозможными способами распределиться между  $\Delta g_i$  состояниями с энергией  $W_i$ . Число состояний  $\Delta g_i = \Delta G_i/h^3$ . Термодинамическая вероятность (стр. 236) распределения частиц по состояниям в фазовом пространстве позволяет найти наиболее вероятное распределение при условии сохранения в системе полного числа частиц  $N$  и полной энергии  $W$ :

$$\sum_i \Delta N_i = N, \quad \sum_i \Delta N_i W_i = W.$$

Вместо числа частиц  $\Delta N(W_i)$  в интервале энергии  $\Delta W_i$  обычно определяют среднюю «заселенность» состояний с данной энергией, т. е. среднее число частиц  $\bar{n}_i$  в одном состоянии, которое называется *функцией распределения Бозе – Эйнштейна*:

$$\bar{n}_i = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i} = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} - 1},$$

где  $\mu$  – химический потенциал (стр. 193), отнесенный к одной частице,  $k$  – постоянная Больцмана. Индекс  $i$  иногда опускается, ибо эта функция распределения справедлива для любого из элементов фазового объема.

3° В системах частиц, описываемых антисимметричными волновыми функциями (стр. 756), осуществляется *распределение Ферми – Дирака (статистика Ферми – Дирака)*. Этой статистикой описывается поведение систем *фермионов* (электронов, протонов, нейтронов и др.) – частиц, подчиняющихся принципу запрета Паули (стр. 769) и имеющих полуцелый спин (стр. 769). В таких системах частиц в одном квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. Решение задачи о наиболее вероятном распределении частиц по состояниям, при условии сохранения полной энергии системы и полного числа ее частиц, приводит к *функции распределения Ферми – Дирака*:

$$\bar{n}_i = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i} = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

Об означения здесь те же, что и для распределения Бозе – Эйнштейна.

4° Функции распределения в классической и квантовых статистиках могут быть записаны в единой формуле:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} + \delta},$$

Для распределения Максвелла – Больцмана  $\delta = 0$ ,  $\mu = 0$ ; для распределения Бозе – Эйнштейна  $\delta = -1$ ; для распределения Ферми – Дирака  $\delta = +1$ . На рис. II.6.1 показаны эти три функции распределения.

Пример. Объемная плотность излучения и термодинамические функции фотонного газа, заключенного в объеме  $V$  при  $T = \text{const}$  в состоянии термодинамического равновесия.

Число состояний  $dg$ , излучения, находящегося в элементарном фазовом объеме:

$$dg_i = 2 \frac{4\pi p^2 dp dx dy dz}{h^3}.$$

Рис. II.6.1.



Коэффициент 2 появляется в связи с наличием двух возможных направлений поляризации света (стр. 568).

Полное число состояний в объеме  $V$ :

$$dg = \frac{8\pi p^3 dp V}{h^3} = \frac{8\pi W^3 dW}{h^3 c^3} V.$$

Импульс фотона  $p$  и его энергия  $W$  (стр. 698):

$$p = \frac{h\nu}{c}, \quad W = h\nu,$$

где  $\nu$  – частота,  $c$  – скорость света в вакууме.

Число фотонов с энергией от  $W$  до  $W + dW$  в объеме  $V$ :

$$dN(W) = \frac{dg}{e^{\frac{W}{kT}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2 V d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}.$$

Объемная плотность энергии излучения в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ :

$$w(\nu, T) d\nu = \frac{dN(W) h\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

(формула Планка для объемной плотности энергии теплового излучения абсолютно черного тела).

Интеграл состояний  $Z$  для излучения:

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-\frac{W}{kT}} g(W) dW = \frac{V}{h^3} \frac{16\pi(kT)^3}{c^3}.$$

Уравнение состояния для излучения:

$$pV = \frac{8\pi^5(kT)^4}{45h^3c^3} V.$$

$$\text{Давление излучения: } p = \frac{8\pi^5(kT)^4}{45c^3h^3}.$$

$$\text{Свободная энергия: } F = -\frac{V}{h^3} \frac{8\pi^5(kT)^4}{45c^3}.$$

Энергия излучения:  $U(T) = \frac{V}{h^3} \frac{8\pi^5(kT)^4}{15c^3}$  (закон Стефана – Больцмана, стр. 692).

Давление изотропного излучения:  $p = \frac{1}{3} \frac{U(T)}{V} = \frac{1}{3} u(T)$ , где  $u(T)$  – объемная плотность энергии излучения.

$$\text{Энтропия излучения: } S = \frac{V}{h^3} \frac{32\pi^6k}{45c^3} (kT)^3.$$

## 8. Вырождение газов, подчиняющихся квантовой статистике

1° *Вырождением идеальных газов* называется отклонение их свойств от свойств обычных газов, вызванное квантовыми свойствами систем частиц. Вырождение газов становится существенным при весьма низких температурах и больших плотностях. При  $e^{-\frac{\mu}{kT}} \gg 1$  (стр. 226) функции распределения Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака переходят в классическую функцию распределения (малость вырождения). При этом выполняется условие

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \ll 1,$$

где  $n_0$  – число молекул в 1  $\text{см}^3$  газа,  $m$  – масса молекулы,  $T$  – абсолютная температура,  $k$  – постоянная Больцмана,  $h$  – постоянная Планка. Величина  $A$  называется *параметром вырождения*.

2° Уравнение состояния для одного моля идеального газа Бозе – Эйнштейна имеет вид

$$pV = RT \left( 1 - \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \right) = RT (1 - A).$$

Оно отличается от уравнения Менделеева – Клапейрона (стр. 151) наличием члена  $-RTA$ ; при обычных значениях  $n_0$  и  $T$  этим членом можно пренебречь ( $A \ll 1$ ).

3° Термодинамические функции вырожденного газа Бозе – Эйнштейна, находящегося в объеме  $V$ :

$$\text{свободная энергия } F = -1,344 \frac{V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2},$$

$$\text{энтропия } S = 3,352 \frac{V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} k(kT)^{3/2},$$

$$\text{внутренняя энергия } U = 2,011 \frac{V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2},$$

$$\text{теплоемкость } C_V = 5,027 \frac{V}{h^3} (2\pi m)^{3/2} k(kT)^{3/2}.$$

4° Температурный критерий вырождения в газах:

$$T \leq T_0, \text{ где } T_0 = \frac{h^2 n_0^{2/3}}{2\pi m k} - \text{температура вырождения.}$$

При  $h \rightarrow 0$  температура вырождения  $T_0 \rightarrow 0$ , откуда видно, что вырождение газов имеет квантовую природу. При  $T \gg T_0$  газ не вырожден и подчиняется классической статистике. Например, для газа протонов с массой частицы  $m \approx 2 \cdot 10^{-24}$  г при плотностях  $n_0 \sim 10^{22}$   $\text{см}^{-3}$  величина  $T_0 \approx 1^\circ$  К. Фотонный газ всегда вырожден, ибо для него  $T_0 = \infty$  (масса покоя фотона  $m_0 = 0$ , стр. 526). Для водорода при нормальных условиях ( $T = 300^\circ$  К и  $n_0 \approx 3 \cdot 10^{10}$   $\text{см}^{-3}$ ) параметр  $A \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll 1$ . Это соответствует температуре вырождения  $T_0 \approx 1^\circ$  К.

Для газов более тяжелых, чем водород,  $A$  еще меньше, и, следовательно, газы при нормальных давлениях и температурах никогда не бывают вырождены. Вырождение, вызванное квантовыми свойствами газов, сказывается значительно меньше, чем отклонения газов от идеальности, связанные с ван-дер-ваальсовыми силами взаимодействия между молекулами (стр. 247).

5° Для электронов в металлах  $n_0 \approx 10^{22} \div 10^{23}$   $\text{см}^{-3}$ , так что  $T_0 \approx (16 \div 20) \cdot 10^3$  °К. Следовательно, электронный газ в металлах (стр. 376) всегда вырожден (вследствие

малой массы электрона,  $m \approx 10^{-27}$  г, и большой плотности частиц).

6° Если при  $T \rightarrow 0$   $\mu \rightarrow W_F$ , то согласно распределению Ферми – Дирака (стр. 226)  $\Delta N(W_i) = 0$  при  $W > W_F$  и  $\Delta N(W_i) = \Delta g$  при  $W < W_F$ . Это означает, что все нижние состояния электронов, вплоть до состояния с энергией  $W_F$ , заполнены, а все состояния с энергией, большей  $W_F$ , свободны. Таким образом,  $\mu(0)$  в формуле распределения Ферми – Дирака (стр. 226) имеет смысл граничной энергии  $W_F$  заполненных состояний при температуре абсолютного нуля.  $W_F$  называется энергией Ферми. Функция распределения электронов при  $T \rightarrow 0$  изображена на рис. II.6.2.



Рис. II.6.2.

7° В модели электронного газа в металлах электроны при  $T \rightarrow 0$  равномерно заполняют все клетки фазового пространства, лежащие внутри сферы с объемом  $\frac{4}{3} \pi p_F^3 V$ , где  $p_F$  – наибольший импульс электрона при  $T = 0$ . Число состояний в этой сфере, с учетом принципа Паули и двух возможных ориентаций спина электрона (стр. 464), равно числу электронов:

$$2 \frac{1}{h^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3 V = N,$$

откуда

$$p_F = h \left( \frac{3n_0}{8\pi} \right)^{1/3},$$

где  $n_0 = \frac{N}{V}$  – число электронов в 1 см<sup>3</sup>. Наибольшая энергия электрона при  $T = 0$  равна  $W_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}$ , или  $W_F = 5,77 \cdot 10^{-27} n_0^{2/3} \text{ эрг} = 3,63 \cdot 10^{-15} n_0^{2/3} \text{ эВ}$ .

При плотности свободных электронов в металлах  $n_0 \approx 10^{22}$  см<sup>-3</sup> энергии Ферми  $W_F$  соответствует температура  $T$  классического газа, равная

$$T \approx \frac{W_F}{k} \approx 10^4 \text{ }^\circ\text{K}.$$

Средняя энергия электрона в металле при  $T \rightarrow 0$  равна

$$\bar{W} = \frac{3}{5} W_F = \frac{3h^2}{10m} \left( \frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3},$$

т. е. она имеет порядок величины  $W_F$ .

Давление электронного газа при  $T \rightarrow 0$

$$p = \frac{2}{5} n_0 W_F = \frac{1}{5} \frac{h^2}{m} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} n_0^{5/3}$$

составляет десятки тысяч атмосфер.

Коэффициент сжимаемости электронного газа при  $T \rightarrow 0$

$$\beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{3}{5} p^{-1}.$$

8° Функция распределения, изображенная на рис. II.6.2, представляет собой наиболее вероятное распределение. Термодинамическая вероятность такого распределения равна единице, откуда следует, что энтропия электронного газа при  $T = 0$  равна нулю в соответствии с принципом Нернста (стр. 203).

9° При  $T \neq 0$  функция распределения Ферми изображена на рис. II.6.1. Она отличается от прямоугольника (при  $T = 0$ ) в области, близкой к  $\mu$ , имеющей ширину порядка  $2kT$ .

Химический потенциал  $\mu$  электронного газа:

$$\mu = W_F \left( 1 - \frac{\pi^2 (kT)^2}{12W_F^2} \right),$$

где  $W_F$  – энергия Ферми.

Энтропия  $S$  вырожденного электронного газа:

$$S = \frac{4\pi^3}{3} \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} k \mu^{1/2} (kT),$$

где  $V$  – объем газа,  $k$  – постоянная Больцмана. При  $T \rightarrow 0$   $S \rightarrow 0$ .

10° Внутренняя энергия  $U$  электронного газа равна

$$U = \frac{3}{5} N W_F \left[ 1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (kT)^2}{W_F^2} \right],$$

где  $N$  – общее число электронов в объеме  $V$ .

Грамм-атомная теплоемкость  $C_{av}$  электронного газа:

$$C_{av} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} N_A k \frac{kT}{W_F}.$$

Сравнение с классическим выражением для теплоемкости  $C_{av}$  одноатомного газа (стр. 232) дает

$$\frac{C_{av}}{C_{av}^{\text{класс}}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{W_F} \approx 0,03,$$

так как  $kT/W_F \approx 0,01$  при всех температурах, когда электронный газ еще вырожден. Теплоемкость электронного газа в металлах ничтожно мала. Это связано с тем, что в процессе изменения внутренней энергии при нагревании участвует незначительное число электронов, находящихся в состояниях, соответствующих «области спада» функции распределения Ферми – Дирака при  $T \neq 0$  (рис. П.6.1).

11° В связи с тем, что энергия газов, описываемых квантовыми статистиками, не является линейной функцией температуры, простое физическое истолкование абсолютной температуры (стр. 207) непригодно в области низких температур.

### 9. Теплоемкости одноатомных и двухатомных газов

1° Для одноатомного газа, молекулы которого имеют три степени свободы поступательного движения, закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (стр. 223) приводит к величине внутренней энергии 1 моля газа:

$$U = \frac{3}{2} N_A kT,$$

где  $N_A k = R$  – универсальная газовая постоянная (стр. 151). Энергия не зависит от объема и пропорциональна температуре. Молярная теплоемкость  $C_{\mu\nu}$  (стр. 158) такого газа равна

$$C_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_\nu = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R \approx 3 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}.$$

2° Двухатомной молекулой называется устойчивое соединение двух одинаковых или различных атомов. Природа сил, приводящих к образованию молекул из изолированных атомов, рассматривается в квантовой механике (стр. 779). Энергия молекулы складывается из  $W_{\text{пост}}$  – энергии поступательного движения ее центра инерции,  $W_{\text{эл}}$  – энергии движения электронов в молекуле,  $W_{\text{кол}}$  – энергии колебательного движения ядер и  $W_{\text{вращ}}$  – энергии вращательного движения молекулы:

$$W = W_{\text{пост}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{кол}} + W_{\text{вращ}}.$$

3° Поступательное движение двухатомной молекулы не квантовано и не отличается от такого же движения одноатомной молекулы. Все остальные виды внутренних

движений молекулы *квантованы*: энергии  $W_{\text{эл}}$ ,  $W_{\text{кол}}$  и  $W_{\text{вращ}}$  принимают дискретный ряд значений.

4° В первом приближении все три вида внутренних движений в молекуле независимы друг от друга. При малых амплитудах колебаний ядер можно пренебречь влиянием колебательного движения на вращение, т. е. не учитывать изменений моментов инерции молекулы за счет колебаний.

5° При рассмотрении теплоемкостей одноатомных и двухатомных молекул, вплоть до самых высоких температур, можно не принимать во внимание изменения энергии  $\Delta W_{\text{эл}}$  электронного движения: соседние уровни энергии электронов в молекулах расположены на расстояниях порядка нескольких эв, что соответствует температуре в несколько десятков тысяч градусов.

6° Колебательное движение ядер в молекуле около равновесного положения описывается как колебания одной частицы с приведенной массой  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . В первом приближении такая частица колеблется, как гармонический осциллятор (стр. 113, 721), с энергией

$$W_{\text{кол}} = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где квантовое число  $n$  принимает целочисленные значения  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $\nu$  – собственная частота колебаний. Энергия  $h\nu/2$  (*нулевая энергия осциллятора*) сохраняется при  $T \rightarrow 0$ . Изменение  $n$  подчиняется правилу отбора  $\Delta n = 0, \pm 1$ . Разность энергии  $\Delta W_{\text{кол}}$  между соседними уровнями колебательного движения,

$$\Delta W_{\text{кол}} = h\nu,$$

не зависит от квантового числа.

7° Вращательное движение двухатомной молекулы в первом приближении рассматривается как движение жесткого ротатора (стр. 724), вращающегося вокруг центра инерции, с моментом инерции  $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  – массы атомов,  $r_0$  – расстояние между атомами в молекуле. Энергия ротатора:

$$W_{\text{вращ}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1) = hBJ(J+1),$$

где  $J$  – квантовое число, принимающее целочисленные

значения  $J = 0, 1, 2, \dots$ ,  $B = h/8\pi^2 I$  – вращательная постоянная молекулы. При изменении вращательных квантовых состояний для  $J$  имеется правило отбора:  $\Delta J = \pm 1$ . Расстояние между соседними уровнями энергии вращения равно

$$\Delta W_{\text{вращ}} = 2hB(J+1).$$

Величина  $\Delta W_{\text{вращ}}$  в 800–1000 раз меньше  $\Delta W_{\text{кол}}$ . Из энергетического спектра колебательных и вращательных состояний можно найти суммы по состояниям колебательного и вращательного движений молекулы  $Z_{\text{кол}}$  и  $Z_{\text{вращ}}$  и с их помощью оценить вклад колебаний и вращений во внутреннюю энергию 1 моля  $U$  и молярную теплоемкость  $C_{\mu\nu}$ .

8° Вклад колебательного движения двухатомных молекул во внутреннюю энергию и теплоемкость 1 моля равен:

$$U_{\text{кол}} = \frac{N_A h\nu}{2} \frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}} + e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{e^{\frac{h\nu}{2kT}} - e^{-\frac{h\nu}{2kT}}} = \frac{N_A h\nu}{2} \operatorname{cth} \left( \frac{h\nu}{2kT} \right) = \frac{N_A h\nu}{2} \operatorname{cth} \left( \frac{T_0}{2T} \right),$$

$$C_{\mu\nu_{\text{кол}}} = \frac{N_A k}{4} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{h\nu}{2kT} \right)} = \frac{N_A k}{4} \left( \frac{T_0}{T} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left( \frac{T_0}{2T} \right)},$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $N_A$  – число Авогадро,  $T_0 = h\nu/k$  – характеристическая температура для колебаний.

При высоких температурах ( $T \gg T_0$ )

$$U_{\text{кол}} \approx N_A kT = RT,$$

$$C_{\mu\nu_{\text{кол}}} \approx N_A k = R,$$

т. е. формулы совпадают с формулами классической теории, вытекающими из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. В этих условиях  $\Delta W_{\text{кол}} \ll kT$  и энергию осциллятора можно считать изменяющейся непрерывно.

При низких температурах ( $T \ll T_0$ )

$$U_{\text{кол}} \approx \frac{N_A k T_0}{2} + N_A k T_0 e^{-\frac{T_0}{T}},$$

$$C_{\mu\nu_{\text{кол}}} \approx N_A k \left( \frac{T_0}{T} \right)^2 e^{-\frac{T_0}{T}},$$

т. е.  $U_{\text{кол}}$  и  $C_{\mu\nu_{\text{кол}}}$  являются сложными функциями температуры и собственной частоты. При  $T \rightarrow 0$

$$U \rightarrow \frac{N_A k T_0}{2} = \frac{N_A h\nu}{2}.$$

Величина  $\frac{N_A h\nu}{2}$  называется нулевой энергией колебаний системы (стр. 722). При  $T \rightarrow 0$   $C_{\mu\nu_{\text{кол}}} \rightarrow 0$  в согласии с принципом Нернста (стр. 203). На рис. II.6.3 изображена зависимость колебательной теплоемкости двухатомных газов от температуры.

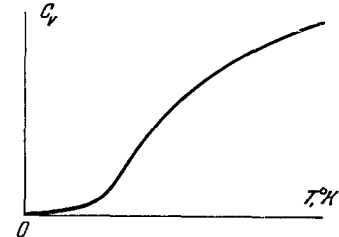


Рис II.6.3.

9° Вклад вращательного движения двухатомных молекул во внутреннюю энергию и теплоемкость 1 моля равен:

$$U_{\text{вращ}} = N_A k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\frac{T'_0 J(J+1)}{T}},$$

где  $T'_0 = h^2/8\pi^2 kI$  – характеристическая температура для вращения.

При  $T \gg T'_0$

$$U_{\text{вращ}} \approx N_A k T \left( 1 - \frac{h^2}{24\pi^2 I k T} \right),$$

$$C_{\mu\nu_{\text{вращ}}} \approx N_A k,$$

т. е. вращательная теплоемкость при высокой температуре имеет классическое значение.

При  $T \ll T'$

$$U_{\text{вращ}} = N_A k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( 1 + 3e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 I k T}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{3h^2 N_A}{4\pi^2 I} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 I k T}},$$

$$C_{\mu\nu \text{вращ}} \approx 3 \left( \frac{h^2}{4\pi^2 I} \right)^2 \frac{N_A}{k T^2} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 I k T}},$$

т. е. при  $T \rightarrow 0$   $C_{\mu\nu \text{вращ}} \rightarrow 0$ .

Общий ход изменения с температурой теплоемкости, связанной с вращением молекулы, такой же, как и у колебательной теплоемкости (рис. II.6.3). Однако величины  $T_c$  и  $T'_c$  существенно различны.

Характеристические температуры для колебания ( $T_c$ ) и вращения ( $T'_c$ ) некоторых молекул

Молекула	$T_c$ , °К	$T'_c$ , °К	Молекула	$T_c$ , °К	$T'_c$ , °К
H <sub>2</sub>	6000	85,4	HCl	4140	15,1
N <sub>2</sub>	3340	2,85	HJ	3200	9,0
O <sub>2</sub>	2230	2,07			

### 10. Статистический смысл второго начала термодинамики

1° Второй закон (второе начало) термодинамики эквивалентен утверждению о невозможности убывания энтропии изолированной системы (стр. 179). Этому закону может быть дано статистическое истолкование с помощью формулы Больцмана:

$$S = k \ln P + \text{const},$$

где  $S$  — энтропия системы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $P$  — термодинамическая вероятность состояния.

2° Термодинамической вероятностью состояния называется число микросостояний системы, соответствующее

при данному макросостоянию (стр. 219). Величина  $P$  для химически однородной системы показывает, сколькими способами может быть реализовано заданное количественное распределение частиц по ячейкам фазового пространства безотносительно к тому, в какой ячейке находится та или иная конкретная частица. Из определения  $P$  следует, что  $P \geq 1$ . Согласно формуле Больцмана термодинамическая вероятность состояния изолированной системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — термодинамические вероятности двух последовательных состояний системы. В случае обратимого процесса (стр. 166)  $\Delta P = 0$ ,  $P = \text{const}$ . В случае необратимого процесса (стр. 166)  $\Delta P > 0$  и  $P$  возрастает. Необратимым является такой процесс, который переводит систему из менее вероятного состояния в более вероятное.

3° Являясь статистическим законом, второй закон термодинамики выражает закономерности хаотического движения большого числа частиц, входящих в состав изолированной системы. В системах или их частях, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц, наблюдаются значительные флуктуации (стр. 237), представляющие собой отклонения от второго закона термодинамики.

Второй закон термодинамики неприменим также к системам, состоящим из бесконечного числа частиц, так как для таких систем все состояния равновероятны.

### 11. Флуктуации

1° Флуктуацией физической величины  $L$ , характеризующей систему, называется отклонение истинного значения величины  $L$  от ее среднего значения  $\bar{L}$ , обусловленное хаотическим тепловым движением частиц системы. Мерой флуктуации является средний квадрат разности  $\Delta L = L - \bar{L}$ , называемый квадратичной флуктуацией:

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{(L - \bar{L})^2}.$$

По определению

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{L^2 - 2L\bar{L} + (\bar{L})^2} = \bar{L}^2 - 2\bar{L}\bar{L} + (\bar{L})^2 = \bar{L}^2 - (\bar{L})^2 \geq 0.$$



Если флуктуации величины  $L$  малы, то большие отклонения  $L$  от  $\bar{L}$  маловероятны. Малость  $(\Delta L)^2$  означает, что значение  $L$  близко к  $\bar{L}$ .

Квадратичная флуктуация суммы  $N$  независимых величин  $L_1, \dots, L_N$  равна сумме квадратичных флуктуаций этих величин:

$$\left[ \Delta \left( \sum_{k=1}^N L_k \right) \right]^2 = \sum_{k=1}^N (\Delta L_k)^2.$$

При этом для двух независимых величин  $L_i$  и  $L_j$

$$\overline{(\Delta L_i)(\Delta L_j)} = 0.$$

2° Относительная погрешность, вносимая заменой  $L$  ее средним значением  $\bar{L}$ , оценивается величиной *относительной флуктуации*:

$$\delta_L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{\bar{L}}.$$

Если система состоит из  $N$  независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния  $L$  системы обратно пропорциональна квадратному корню из числа ее частей:

$$\delta_L \propto \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3° Если состояние макроскопической системы характеризуется некоторым параметром  $\lambda$ , то вероятность малых флуктуаций, в результате которых параметр  $\lambda$  может изменяться в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , выражается *распределением Гаусса*:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta^2}} e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\Delta^2}} d\lambda,$$

где  $\lambda_0$  — равновесное значение параметра  $\lambda$ ,  $\Delta^2$  — квадратичная флуктуация  $\lambda$ :  $\Delta^2 = \overline{(\Delta \lambda)^2} = \overline{(\lambda - \lambda_0)^2}$ . Вероятность данной флуктуации экспоненциально уменьшается с ростом ее величины, а также с уменьшением  $\Delta^2$ .

4° Количественной мерой вероятности малых флуктуаций  $\Delta \lambda$  величины  $\lambda$  в макроскопической системе является работа  $\Delta A$ , которую нужно совершить над системой для изменения параметра  $\lambda$  на величину  $\Delta \lambda$ . Флуктуации возможны, однако, и при условии отсутствия реальной внеш-

ней работы (например, в замкнутой системе). Величину  $\Delta A$  можно представить как изменение потенциальной энергии системы при ее перемещении в некотором вообразимом (а иногда и реальном) силовом поле.

П р и м е р 1. Изотермические малые флуктуации объема  $V$  и плотности  $\rho$ . Квадратичная флуктуация объема:

$$(\Delta V)^2 = \overline{(V - \bar{V})^2} = \frac{kT}{\left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|},$$

где  $T$  — температура системы. Вероятность изотермических флуктуаций объема:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta V)^2}} e^{-\frac{(V - \bar{V})^2}{2(\Delta V)^2}} dV.$$

Масштаб и вероятность флуктуаций объема растут с повышением температуры, а также с увеличением изотермической сжимаемости  $\beta = -\frac{1}{v_0} \left( \frac{\partial v_0}{\partial p} \right)_T$ , где  $v_0$  — удельный объем. Изотермическая сжимаемость должна быть положительна. В противном случае вероятность флуктуации объема возрастала бы с ее масштабом и в результате флуктуаций объем системы либо неограниченно возрастал, либо уменьшался до нуля.

Условие устойчивости состояний однородного вещества, испытывающего флуктуации объема:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T < 0.$$

В частности, для идеального газа

$$(\Delta V)^2 = \frac{kT}{\left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} = \frac{V^2 kT}{NkT} = \frac{V^2}{N}.$$

Квадратичная флуктуация плотности  $\rho = \frac{m}{V}$  ( $m$  — масса, заключенная в объеме  $V$ , в котором происходит флуктуация):

$$(\Delta \rho)^2 = \frac{\rho^2}{V} kT\beta.$$

Относительная флуктуация плотности в объеме  $V$ :

$$\delta_\rho = \sqrt{\frac{kT\beta}{V}}.$$

Квадратичная флуктуация числа частиц  $N$ , находящихся в заданном объеме  $V$ :

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N^2 k T}{V^2} \frac{1}{\left| \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|}.$$

В частности, для идеального газа

$$\overline{(\Delta N)^2} = N.$$

О рассеянии света на флуктуациях плотности см. стр. 686.

**П р и м е р 2.** Изохорические малые флуктуации температуры. Квадратичная флуктуация температуры:

$$\overline{(\Delta T)^2} = \overline{(T - T_0)^2} = \frac{k T_0^2}{C_V},$$

где  $T_0$  — равновесное значение температуры,  $C_V$  — теплоемкость системы при постоянном объеме. Вероятность того, что температура испытает флуктуацию:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta T)^2}} e^{-\frac{(T - T_0)^2}{2(\Delta T)^2}} dT.$$

$C_V > 0$ , так как вероятность флуктуаций температуры уменьшается с возрастанием их величины. Это условие вытекает не только из теории флуктуаций, но и из общих соображений термодинамики: при  $C_V < 0$  можно было бы нагревать тело, отбирая от него теплоту, что противоречит второму началу термодинамики.

## 12. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов

1° Современные высокочувствительные приборы измеряют величины того же порядка, что и флуктуации, обусловленные тепловым движением молекул в приборе и окружающей среде. При однократном измерении некоторой физической величины, значения которой меньше, чем случайные отклонения показаний самого прибора, вызванные флуктуациями, прибор не дает правильного результата измерений. Прибор регистрирует в этом случае фон, являющийся результатом теплового движения, а не измеряемую величину. Этим определяется *предел чувствительности* данной конструкции прибора при однократном измерении.

2° *Метод зеркального отсчета* (зеркальце, подвешенное на тонкой кварцевой нити). Предел чувствительности определяется тем, что наименьший угол поворота нити, который может быть измерен, должен превышать углы поворота  $\varphi$ , связанные со случайными колебаниями зеркальца, вызванными тепловым движением молекул среды. Средний квадратичный угол отклонения, характеризующий предел чувствительности для нити радиуса  $r$  и длины  $l$ :

$$\overline{\varphi^2} = \frac{k T}{a},$$

где  $a = \frac{\pi^2 r^4 G}{2l}$ ,  $G$  — модуль сдвига материала нити. При  $T = 300^\circ \text{K}$  для очень тонкой кварцевой нити ( $a = 10^{-6} \text{ эрг}$ )  $\sqrt{\overline{\varphi^2}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$ .

3° *Пружинные весы*. Измерение массы  $m$  на пружинных весах возможно в том случае, если вызываемое ею растяжение пружины  $\Delta x$  больше, чем флуктуация длины пружины  $\sqrt{(\Delta x)^2}$ , вызванная флуктуациями давления окружающего воздуха и тепловым движением:

$$\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{k T}{a}},$$

где  $a$  — коэффициент упругости пружины. Наименьшая масса  $m$ , которая может быть определена при однократном измерении:

$$m = \frac{\sqrt{k T a}}{g},$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

4° *Газовый термометр*, наполненный идеальным газом, позволяет измерять температуры не меньше, чем флуктуации температуры газа. Малые изменения температуры идеального газа (стр. 150):

$$\Delta T = \frac{p \Delta V}{N h} = \frac{T}{V} \Delta V.$$

Малые изменения объема вследствие его флуктуаций:

$$\Delta V = \sqrt{(\Delta V)^2} = \sqrt{\frac{k T}{\left( -\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}} = \frac{V}{\sqrt{N}}.$$

Флуктуационные изменения температуры:

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta T)^2} = \frac{T}{\sqrt{N}}.$$

Газовый термометр не позволяет измерять температуры меньше, чем  $\Delta T$ . Если термометр содержит 1 моль газа ( $N = N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ ), то

$$\Delta T \approx \frac{T}{\sqrt{N_A}}.$$

Реально измеряемые изменения температуры значительно превышают эту величину.

### 13. Электрические флуктуации в радиоаппаратуре

1° Независимые флуктуационные эффекты, наблюдаемые в приемной радиоаппаратуре в отсутствие внешних помех, создают *шумовой фон*, который кладет предел чувствительности приемной аппаратуры; интенсивность принимаемого сигнала должна быть выше, чем интенсивность фона в приемнике.

2° *Дробовой эффект* представляет собой флуктуацию величины анодного тока в электронной лампе, обусловленную флуктуациями числа электронов, вылетающих из катода. Мерой дробового эффекта является квадратичная флуктуация тока:

$$(\overline{\Delta I})^2 = \frac{e I_0}{t},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $I_0$  — средняя сила тока за время  $t$ , в течение которого измеряется ток; по условию вывода формулы  $t$  значительно больше времени  $\tau$  пролета электрона в лампе. Флуктуации анодного тока в лампе, включенной в колебательный контур, вызывают флуктуации тока и напряжения в контуре. Квадратичная флуктуация напряжения в контуре равна

$$\sqrt{(\overline{\Delta U})^2} = \sqrt{\frac{Q I_0 e}{\omega C^2}},$$

где  $\omega$  — частота свободных колебаний в контуре (стр. 483),

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  — добротность контура (стр. 490),  $R$ ,  $L$  и  $C$  — омическое сопротивление, индуктивность и емкость контура.

3° Тепловое движение электронов внутри проводников сопровождается переносом заряда и появлением в цепи *флуктуационной электродвижущей силы* и *флуктуационного тока*, беспорядочно изменяющихся по величине и направлению. Флуктуационная э. д. с. определя-

ется по формуле Найквиста:

$$\mathcal{E}^2(\nu) = 4kTR(\nu),$$

где  $\mathcal{E}(\nu)$  — флуктуационная э. д. с., отнесенная к единичной полосе частот,  $R(\nu)$  — соответствующее сопротивление.

Обычно дробовой эффект приводит к большим флуктуациям тока, чем тепловое движение электронов. Однако в условиях, когда дробовой эффект уменьшен, флуктуации тока, связанные с тепловым движением электронов, становятся основными и ограничивают чувствительность радиоприемных устройств.

### 14. Броуновское движение

1° *Броуновским движением* называют непрерывное хаотическое движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе. Броуновское движение продолжается неограниченно долго без каких-либо видимых изменений; интенсивность движения броуновских частиц зависит от их размеров, но не от природы частиц; она возрастает с ростом температуры и уменьшением вязкости жидкости или газа. Не являясь по существу молекулярным движением, броуновское движение служит непосредственным доказательством существования молекул и хаотического характера их теплового движения.

2° Причиной броуновского движения являются флуктуации давления, оказываемого на поверхность малой частицы со стороны молекул среды. Сила давления изменяется по величине и направлению, в результате чего частица находится в беспорядочном движении.

3° Вероятность  $w(r, t) dr$  того, что броуновская частица, находившаяся в начальный момент  $t = 0$  в изотропной среде в начале координат, к моменту времени  $t$  будет находиться на расстоянии между  $r$  и  $r + dr$  от начала координат, равна

$$w(r, t) dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} r^2 dr.$$

Средний квадрат расстояния  $\overline{r^2}$ , на которое смещается частица за время  $t$ , выражается формулой Эйнштейна:

$$\overline{r^2} = 6Dt,$$

где  $D$  — коэффициент диффузии частицы.

Для сферической частицы радиуса  $a$

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a},$$

где  $T$  — температура среды,  $\eta$  — вязкость среды.

Между коэффициентом диффузии  $D$  броуновской частицы и ее подвижностью  $u = v/f$ , где  $f$  — постоянная внешняя сила, действующая на частицу,  $v$  — скорость частицы, существует следующая зависимость:

$$D = kTu.$$

4° Кроме поступательного броуновского движения существует вращательное броуновское движение. Для сферической частицы смещение характеризуется углом поворота  $\theta$  (углом Эйлера, стр. 26) за время  $t$ . Среднее значение квадрата  $\sin^2 \theta$  выражается соотношением

$$\overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3} (1 - e^{-6Dt}),$$

где коэффициент вращательной диффузии

$$D = kT/8\pi\eta a^2.$$

При малых временах средний квадрат  $\theta$  выражается формулой, похожей на формулу Эйнштейна для поступательного движения:

$$\overline{\theta^2} = 4Dt.$$

При больших временах  $\overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3}$ , что соответствует равновероятности всех ориентаций сферы.

## ГЛАВА 7

### РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ПАРЫ

#### 1. Уравнения состояния реальных газов

1° *Реальным газом* называется газ, между молекулами которого существуют заметные силы межмолекулярного взаимодействия (стр. 246). *Паром* называется реальный газ, находящийся в состояниях, близких к состояниям перехода его в жидкость. Для описания свойств реальных газов применяются различные уравнения состояния, отличающиеся от уравнения Клапейрона — Менделеева (стр. 151).

2° *Уравнение Ван-дер-Ваальса* состояния реального газа ( $V_0 = V_\mu$  — объем 1 моля газа):

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right) (V_0 - b) = RT,$$

где  $a/V_\mu^2$  — внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами,  $b$  — поправка на собственный объем молекул, учитывающая действие сил отталкивания между молекулами и равная учетверенному объему молекул в 1 моле газа:

$$b = N_A \cdot \frac{2}{3} \pi d^3;$$

здесь  $N_A$  — число Авогадро,  $d$  — диаметр молекулы. Величина  $a$  равна

$$a = -2\pi N_A^2 \int_0^\infty W_{II}(r) r^2 dr,$$

где  $W_{II}(r)$  — потенциальная энергия притяжения двух молекул ( $W_{II} < 0$ ). Величины  $a$  и  $b$  связаны с параметрами критического состояния газа  $p_k$ ,  $V_{0k}$  и  $T_k$  (стр. 251):

$$b = \frac{1}{3} V_{0k}, \quad a = \frac{9}{8} RT_k V_{0k},$$

$$V_{0k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

3° С помощью безразмерных переменных

$$\pi = \frac{p}{p_k}, \quad \varphi = \frac{V_0}{V_{0k}}, \quad \tau = \frac{T}{T_k},$$

называемых *приведенными параметрами состояния*, уравнение Ван-дер-Ваальса переписывается в форме *приведенного уравнения состояния*:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right) (3\varphi - 1) = 8\tau,$$

не содержащего постоянных, характеризующих вещество.

Два вещества, состояния которых определяются одинаковыми значениями двух приведенных параметров, находятся в *соответственных состояниях* (закон соответственных состояний).

4° *Уравнение состояния Берглю*:

$$\left(p + \frac{a}{TV_\mu^2}\right) (V_0 - b) = RT.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  связаны с параметрами критического состояния  $p_k$ ,  $V_{0k}$  и  $T_k$  (стр. 251) соотношениями:

$$a = \frac{27}{64} R^2 \frac{T_k^3}{p_k}, \quad b = \frac{1}{4} V_{0k}.$$

5° Уравнение состояния Вукаловича и Новикова:

$$pV_0 = RT \left[ 1 + \frac{B_1(T)}{V_0} + \frac{B_2(T)}{V_0^2} + \dots \right],$$

где  $B_1$ ,  $B_2$  и т. д. — так называемые *вириальные коэффициенты* весьма сложного вида, вычисление которых производится с учетом ассоциации молекул — объединения под влиянием ван-дер-ваальсовых сил притяжения (стр. 246) молекул газа в группы (комплексы).

6° Уравнение состояния Майера:

$$pV_0 = RT \left[ 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{k}{k+1} \frac{\beta_k N_k^k}{V_0^k} \right],$$

где

$$\beta_k = \frac{1}{k! V_0} \iint \dots \int \sum_{k+1} \prod_{i > j > 1} f_{ij} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{k+1},$$

$$f_{ij} = e^{-\frac{w_{ij}}{kT}} - 1 \quad \text{и} \quad d\tau_i = dq_{i1} \dots dq_{in},$$

$W_{ij}$  — взаимная потенциальная энергия  $i$ -й и  $j$ -й молекул, взаимодействующих по закону центральных сил, так что  $W_{ij}$  зависит от расстояния между этими молекулами,  $q_{i1}, \dots, q_{in}$  — обобщенные координаты  $i$ -й молекулы, обладающей  $n$  степенями свободы.

Подынтегральное выражение в формуле для  $\beta_k$  содержит сумму произведений  $f_{ij}$  для всевозможных комбинаций взаимодействий в группе из  $k+1$  молекул, причем суммируются все произведения, содержащие не менее двух одинаковых функций  $f_{ij}$ .

## 2. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах

1° Между молекулами любого газа существуют *силы межмолекулярного притяжения и отталкивания*, имеющие электромагнитную и квантовую природу. Силы притяжения, проявляющиеся на расстояниях  $r$  между центрами молекул порядка  $10^{-7}$  см, называются *ван-дер-ваальсовыми силами*. Они являются причиной поправки на внутреннее давление в уравнении состояния Ван-дер-

Ваальса (стр. 245) и убывают с расстоянием  $f \sim \frac{1}{r^7}$ . Это соответствует потенциальной энергии, изменяющейся по закону  $U \sim \frac{1}{r^6}$ . Различают три вида ван-дер-ваальсовых сил.

а) *Ориентационные силы* между двумя молекулами, обладающими постоянными дипольными моментами  $p_e$  (стр. 346), стремятся расположить молекулы упорядоченно так, чтобы векторы дипольных моментов ориентировались вдоль одной прямой. Этому препятствует тепловое движение молекул. При высоких температурах потенциальная энергия  $U_{ор}$  ориентационного взаимодействия

$$U_{ор} = - \frac{p_e^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 kT} \frac{1}{r^6} \quad (\text{в СИ}).$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная (стр. 342).

б) *Индукционные силы* возникают между молекулами, обладающими высокой поляризуемостью. Если молекулы достаточно облизены, то под действием электрического поля одной из них в другой возникает индуцированный дипольный момент  $p_e = \epsilon_0 \alpha E$ , где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы,  $E$  — напряженность поля первой молекулы. Потенциальная энергия  $U_{инд}$  индукционного взаимодействия не зависит от температуры:

$$U_{инд} = - \frac{\alpha p_e^2}{8\pi^2 \epsilon_0^3} \cdot \frac{1}{r^6} \quad (\text{в СИ})$$

в) *Дисперсионные силы*, возникающие в результате возбуждения колебаний электронов в молекуле (атоме) под влиянием колебаний электронов в другой молекуле (атоме). Колебания электронов соседних молекул происходят в одинаковой фазе и приводят к притяжению двух молекул (атомов). Величина дисперсионных сил определяется нулевой энергией (стр. 233) молекул (атомов), если колебания их могут быть рассмотрены как колебания линейных гармонических осцилляторов (стр. 113). В этом приближении потенциальная энергия  $U_{дисп}$  дисперсионного взаимодействия

$$U_{дисп} = - \frac{e^4 h \nu_0}{32\pi^2 \epsilon_0^3 a^2} \cdot \frac{1}{r^6} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $e$  — заряд электрона,

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{m}}$  — частота колебаний атомов-осцилляторов,  $a$  — коэффициент упругости (стр. 97).

Полная потенциальная энергия  $U$  ван-дер-ваальсовых сил

$$U = U_{ор} + U_{инд} + U_{цисп}.$$

Для полярных молекул (стр. 362) основную роль играют ориентационные силы притяжения, для остальных молекул — дисперсионные силы. Энергия ван-дер-ваальсова притяжения составляет 0,1–1 ккал/моль. В большинстве случаев ван-дер-ваальсовы силы притяжения перекрываются значительно превосходящими их химическими валентными силами притяжения с энергиями порядка 10–100 ккал/моль.

Согласно упрощенной модели ван-дер-ваальсовых сил молекулы газа — абсолютно упругие шары — притягиваются с силами, достигающими наибольшего значения при непосредственном их соприкосновении. Силы отталкивания, проявляющиеся на меньших расстояниях, заменяются бесконечно большой упругой силой, возникающей при соприкосновении шаров. В этой модели при расстояниях  $r$  между молекулами, равном диаметру молекул, внутреннее давление в газе достигает максимума.

2° Межмолекулярное взаимодействие на малых расстояниях не может быть выражено степенным законом и носит сложный характер. На расстояниях между центрами молекул  $r \leq 10^{-8}$  см возникает квантовое обменное взаимодействие между нейтральными атомами, приводящее или к сильному притяжению (химическая связь, стр. 779), или к возникновению значительных сил отталкивания.

3° Силы отталкивания убывают с увеличением расстояния между центрами молекул по закону  $f_{отт} \propto 1/r^n$ , где  $n \geq 9$ , т. е. значительно быстрее, чем силы притяжения. На рис. II.7.1 представлена зависимость от  $r$  сил притяжения (кривая 1), отталкивания (кривая 2) и результирующей силы взаимодействия (кри-

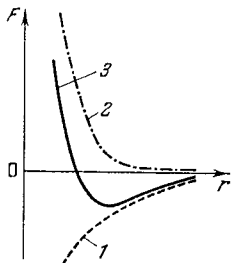


Рис. II.7.1.

кону  $f_{отт} \propto 1/r^n$ , где  $n \geq 9$ , т. е. значительно быстрее, чем силы притяжения. На рис. II.7.1 представлена зависимость от  $r$  сил притяжения (кривая 1), отталкивания (кривая 2) и результирующей силы взаимодействия (кри-

вая 3). Область пространства, в которой существенно проявляются силы взаимодействия данной молекулы с другими частицами, называется *сферой ее молекулярного действия*.

### 3. Дросселирование газов. Эффект Джоуля — Томсона

1° *Дросселированием (матием) газа* называется уменьшение его давления при адиабатическом прохождении газа через узкое отверстие или пористую пробку. Процесс дросселирования необратим, он сопровождается возрастанием энтропии (стр. 179). Энтальпия (стр. 155) газа в начальном и конечном его состояниях при дросселировании не изменяется.

2° Изменение температуры газа при дросселировании называется *эффектом Джоуля — Томсона*. *Дифференциальный эффект* Джоуля — Томсона описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right]$$

и наблюдается при достаточно малом перепаде давления от  $p$  до  $p + dp$ . Различают:

*отрицательный эффект* Джоуля — Томсона  $T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V < 0$ ,  $dT > 0$ ;

*положительный эффект*  $T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V > 0$ ,  $dT < 0$ .

Если  $T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$ , то  $dT = 0$ , т. е. эффект Джоуля — Томсона отсутствует. В идеальном газе эффект Джоуля — Томсона всегда отсутствует.

Температура, при которой эффект Джоуля — Томсона для данного газа изменяет знак, называется *температурой инверсии*  $T_{инв}$ :

$$T_{инв} = V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p.$$

3° *Интегральный эффект* Джоуля — Томсона наблюдается при конечном перепаде давления в дросселе. Уравнение эффекта:

$$\Delta T = -\frac{\Delta W_H}{C_p} - \frac{\Delta(pV)}{C_p},$$

где  $\Delta W_H$  — изменение потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.

#### 4. Изотермы реальных газов. Пары. Критическое состояние вещества

1° *Изотермой реального газа* называется кривая зависимости молярного объема газа от давления при изотермическом процессе. На рис. II.7.2 приведены экспериментальные изотермы углекислого газа ( $T_1 < T < T_2 < T_K < T_3 < T_4$ ).

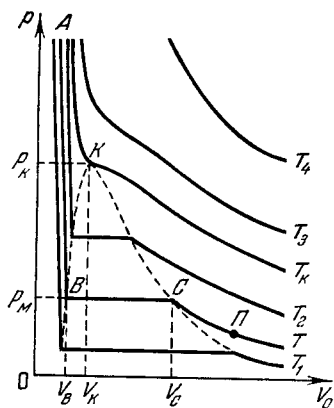


Рис. II.7.2.

Давление сухого насыщенного пара  $p_m$  зависит только от температуры и химической природы пара. Оно возрастает с повышением температуры. Перегретый пар имеет температуру более высокую, чем температура насыщенного пара при том же давлении. Разность температур этих паров называется *перегревом пара*. Сжатие сухого насыщенного пара переводит его в *влажный насыщенный пар* — двухфазное состояние вещества — смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара. Количество сухого насыщенного пара в 1 кг влажного насыщенного пара называется *сухостью пара*. Количество влаги в 1 кг влажного насыщенного пара называется *влажностью пара*. Сжатие влажного насыщенного пара переводит его в жидкость. Точка *B* характеризует состояние *кипящей жидкости*.

3° Переход вещества из газообразного состояния в жидкое называется *конденсацией пара*. Количество пара, конденсирующегося в 1 сек на 1 см<sup>2</sup> поверхности жидко-

сти, равно (в г·см<sup>-2</sup>·сек<sup>-1</sup>)

$$M = 4,374 \cdot 10^{-5} p \sqrt{\frac{\mu}{T}},$$

где  $p$  — давление пара в  $\text{дин}/\text{см}^2$ ,  $\mu$  — молекулярный вес вещества,  $T$  — абсолютная температура. Для чистых паров, не соприкасающихся ни с жидкой фазой, ни с твердыми адсорбционно-активными веществами (стр. 280), условием конденсации насыщенного и даже *пересыщенного пара* (давление которого  $p > p_m$ ) является присутствие *центров конденсации* (газовых ионов, пылинок). Если центры конденсации отсутствуют, то конденсация пара начинается в местах уплотнений вещества, имеющих характер флуктуаций плотности (стр. 239).

4° При критической температуре ( $T = T_K$ ) разность молярных объемов сухого насыщенного пара и жидкости становится равной нулю. Горизонтальный участок изотермы обращается в точку перегиба *K* (*критическая точка*). В критической точке

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_K} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_K} = 0.$$

Значения давления  $p_K$ , молярного объема  $V_{0K}$  и температуры  $T_K$  в критической точке называются *критическими параметрами газа*.

При  $T \rightarrow T_K$  стирается различие между жидким и газообразным состояниями вещества, обращаются в нуль удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения. Вблизи критической точки наблюдается *критическая опалесценция* — сильное рассеяние света в веществе, вызванное его оптической неоднородностью, связанной с флуктуациями плотности и ростом сжимаемости (см. также стр. 684).

5° Изотермы реальных газов, построенные по уравнению Ван-дер-Ваальса (стр. 245), содержат в области

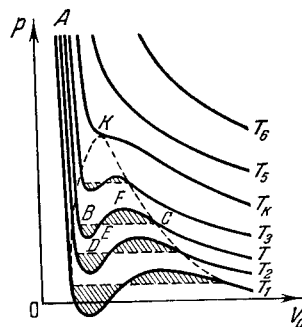


Рис. II.7.3.

влажного насыщенного пара *петлю* (петля *BDEF* на рис. II.7.3), которая пересекается горизонтальной прямой *BC*, соответствующей нормальному процессу фазового перехода, на равные по площади участки (*правило Максвелла*). *Метастабильные состояния* (стр. 197) вещества, характеризуемые точками кривой *BD*, называются *перегретой жидкостью*. Участок изотермы *CF* соответствует *пересыщенному пару*. Участок *CEF* практически неосуществим.

### 5. Сжижение газов

1° *Сжижение газов* — перевод их в жидкое состояние — осуществляется охлаждением газов ниже температуры кипения (стр. 261) при данном давлении. Уменьшением объема это достигается только в том случае, если температура газа ниже критической. Для сжижения газов с критической температурой выше 223° К (хлор, аммиак и др.) производится их сжатие в компрессоре с последующей конденсацией в теплообменнике.

2° В *каскадном методе сжижения* аммиак ( $T_K = 405,5^\circ \text{K}$ ) переводится в жидкость изотермическим сжатием и при понижении давления кипит. Теплота кипения отнимается от другого газа, для которого удовлетворено условие:  $405,5^\circ \text{K} > T_K > T'$ , где  $T'$  — температура кипения аммиака. При этом происходит охлаждение второго газа до температуры ниже его  $T_K$ , и последующим изотермическим сжатием его переводят в жидкость. В третьем и следующих каскадах таким способом могут быть сжижены кислород, азот, водород (в пятом каскаде) и гелий (в шестом каскаде).

3° Промышленный метод сжижения газов основан на использовании положительного эффекта Джоуля — Томсона (стр. 249). В этом методе сильно сжатый и охлажденный до комнатной температуры газ подвергается несколько раз адиабатическому дросселированию и при этом охлаждается, пока не начинается сжижение газа.

4° Наиболее совершенными и производительными холодильными машинами являются *детандеры* (поршневые и турбинные), в которых сжатый газ адиабатически расширяется либо в цилиндре с поршнем, либо в турбине. Охлаждение и сжижение газа происходит за счет работы расширения.

### 1. Общие свойства и строение жидкостей

1° *Жидкостями* называются тела, которые имеют определенный объем, но не имеют *упругости формы* (отсутствие модуля сдвига, стр. 285). Жидкости отличаются сильным межмолекулярным взаимодействием и вследствие этого малой сжимаемостью. Малая сжимаемость жидкостей объясняется тем, что небольшое уменьшение расстояния между молекулами на малых взаимных расстояниях приводит к появлению больших сил межмолекулярного отталкивания. Коэффициент сжимаемости (стр. 187) для жидкостей изменяется в пределах от  $2 \cdot 10^{-6}$  до  $2 \cdot 10^{-4} \text{ атм}^{-1}$ .

2° Обычные жидкости изотропны, за исключением *жидких кристаллов*, анизотропность которых в отношении ряда физических свойств связана с преобладанием у них в различных микрообъемах определенной ориентации молекул.

3° В жидкостях наблюдается *ближний порядок* — упорядоченное относительное расположение (или взаимная ориентация в жидких кристаллах) соседних частиц жидкости внутри малых ее объемов. Структура жидкости и ее физические свойства описываются набором *функций распределения* положений групп ее частиц. Наибольшее значение имеет *радиальная функция распределения*  $G(r)$ . Число частиц, находящихся в шаровом слое толщины  $dr$  на расстоянии  $r$  от произвольно выбранной (центральной) частицы,

$$dN = 4\pi n_0 G(r) r^2 dr,$$

где  $n_0 = N/V$  — средняя концентрация частиц.

Радиальная функция распределения определяется из данных рентгеноструктурного анализа (стр. 623), а также электронографии (стр. 623) и нейтронографии (стр. 623).

Для *простых жидкостей*, состоящих из сферических симметричных молекул, в предположении, что взаимодействие между молекулами носит парный характер и осуществляется центральными силами, имеющими потенциал  $U(r)$ , может быть получено уравнение состояния



вида

$$\frac{pv}{kT} = 1 - \frac{2\pi}{3vkT} \int_0^{\infty} \frac{dU(r)}{dr} G(r)r^3 dr,$$

где  $p$  — давление,  $v$  — средний объем, приходящийся на одну частицу жидкости,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура.

Средняя энергия  $\bar{E}$ , приходящаяся на одну частицу,

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT + \frac{2\pi}{v} \int_0^{\infty} U(r) G(r) r^3 dr.$$

Явный вид функции  $p = p(v, T)$  определяется видом функций  $U(r)$  и  $G(r)$ , для отыскания которых разработан ряд теоретических методов.

4° Молекулы жидкости совершают тепловые колебания около положений равновесия со средней частотой  $1/\tau_0$ , близкой к частотам колебаний атомов в кристаллах, и амплитудой, определяемой «свободным объемом», предоставленным молекуле ее соседями. По истечении времени  $\tau \gg \tau_0$  эти положения равновесия смещаются на расстояния порядка  $10^{-8}$  см. Среднее (по совокупности большого числа молекул) время  $\bar{\tau}$ , называемое *временем релаксации*, является характерным временем, связанным с перемещением частиц жидкости на расстояния  $\delta$ , по порядку величины равные среднему расстоянию между соседними молекулами:

$$\bar{\delta} \sim \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}},$$

где  $\mu$  — молекулярный вес,  $\rho$  — плотность жидкости,  $N_A$  — число Авогадро. Для воды  $\bar{\delta} \sim 3 \cdot 10^{-8}$  см.

Эти перемещения совершаются не непрерывно, а в виде активированных скачков с преодолением потенциального барьера высотой  $W$  (энергия активации). Энергия  $W$  обусловлена связью молекулы с соседними частицами. Продолжительность  $\bar{\tau}$  «времени оседлой жизни» молекулы во временном положении равновесия уменьшается с ростом температуры по закону

$$\bar{\tau} \propto e^{\frac{W}{kT}},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Время  $\bar{\tau}$  определяет среднюю скорость  $\bar{v}$  теплового перемещения молекул в жидкости:

$$\bar{v} = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\tau}}.$$

5° Представления о характере теплового движения молекул жидкости (п. 4°) объясняют основное свойство жидкости — ее *текучесть*. Постоянная внешняя сила  $F$ , действующая на жидкость, приводит к преимущественной направленности скачков частиц жидкости вдоль направления действия силы. Следствием этого является поток частиц вдоль направления действия силы, т. е. текучесть. Мерой текучести жидкости служит величина  $1/\eta$ , где  $\eta$  — коэффициент вязкости. Если внешняя сила  $F$  переменна, но ее период  $T \gg \bar{\tau}$ , то по-прежнему возникает поток частиц жидкости и ее текучесть. Если  $T \ll \tau$ , то механизм текучести не успевает проявиться и жидкость испытывает упругие деформации не только типа растяжения — сжатия, но и сдвиговые деформации (стр. 284), связанные с касательными напряжениями в жидкости.

6° Целый ряд фактов свидетельствует о сходстве жидкостей с твердыми телами. Рентгеноструктурный анализ (стр. 623) показывает, что расположение частиц в жидкостях при температурах, близких к температуре кристаллизации, не является хаотическим. Рентгенограммы жидкостей при невысоких температурах сходны с рентгенограммами поликристаллических твердых тел. Жидкость можно рассматривать как тело, состоящее из очень большого числа беспорядочно ориентированных кристалликов субмикроскопических размеров (*сиботаксические области*). В пределах каждой из таких областей относительное расположение частиц сохраняет достаточную правильность.

7° Многие физические свойства жидкостей мало отличаются от свойств твердых тел. Так, кристаллические тела обладают малой текучестью, проявляющейся в их пластической деформации. При плавлении твердых тел относительное увеличение их объема незначительно ( $\sim 10\%$ ). Следовательно, расстояния между частицами возникающей жидкости почти не меняются по сравнению с расстояниями между частицами в твердом теле, и в расположении частиц жидкости сохраняется некоторое сходство с расположением частиц в твердом теле. Сравнение теплот плавления и испарения показывает, что теплота испарения в 30–40 раз больше теплоты плавления. Это

также свидетельствует о малости изменений расстояний между частицами вещества при его переходе из кристаллического состояния в жидкое. Теплоемкость тел почти не изменяется при их плавлении.

8° Жидкости разделяются на *неассоциированные* и *ассоциированные*. Первые имеют малые значения относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  (стр. 342), не зависящие от температуры, дипольные моменты их молекул (стр. 362) равны нулю (гексан, бензол и др.). Вторые обладают большой полярностью, их молекулы имеют  $P_s \neq 0$ , а  $\epsilon$  зависит от температуры (вода, спирты и др.). В ассоциированных жидкостях образуются комплексы из значительного числа молекул. Величина  $\epsilon$  для жидкостей изменяется от 2 (неполярные углеводороды) до 81 (вода).

9° В жидкостях в случае нарушения пространственной однородности плотности, температуры или скорости упорядоченного движения возникают явления переноса (стр. 210), подчиняющиеся тем же дифференциальным уравнениям, что и соответствующие явления в газах. Однако выражения коэффициентов переноса для газов неприменимы к жидкостям.

При высоких температурах, близких к критической (стр. 251), возникновение внутреннего трения в жидкостях связано с переносом молекулами импульсов (количество движения). При температурах, близких к температуре плавления (затвердевания), импульс отдельной молекулы колеблется соответственно колебаниям частиц около их временного положения равновесия. При низких температурах вязкость жидкостей изменяется по закону

$$\eta \propto T e^{\frac{W}{kT}},$$

где  $W$  — энергия активации (стр. 254).  $\eta$  быстро уменьшается с ростом  $T$ , в то время как для газов  $\eta$  растет пропорционально  $\sqrt{T}$ . При больших давлениях вязкость жидкостей быстро возрастает с увеличением давления. Это связано с возрастанием энергии активации и соответствующим увеличением времени релаксации (стр. 254).

10° В химически однородной жидкости коэффициент диффузии  $D$  резко возрастает с температурой по закону

$$D \propto \frac{d^2}{6\bar{v}_0} e^{-\frac{W}{kT}},$$

где  $d$  — среднее расстояние между молекулами в жидкости,  $\bar{v}_0$  — средний период колебаний молекулы около положения равновесия. Возрастание  $D$  с ростом  $T$  объясняется, в основном, резким уменьшением времени релаксации  $\bar{\tau}$  и некоторым увеличением  $d$ . При температурах, близких к критическим, коэффициенты диффузии в жидкостях становятся близкими к величинам коэффициентов диффузии в газах (стр. 213 и 214).

## 2. Свойства поверхностного слоя жидкости

1° На поверхности раздела двух фаз (жидкость и ее насыщенный пар, две не вполне смешивающиеся жидкости, жидкость и твердое тело) в результате различного межмолекулярного взаимодействия в соприкасающихся фазах обнаруживается направленная внутрь одной из них равнодействующая сил, приложенных к  $1 \text{ см}^2$  поверхностного слоя. В частности, на поверхности раздела жидкость — пар эта сила направлена внутрь жидкости.

2° Для перенесения молекул из объема фазы в поверхностный слой необходимо совершить работу, которая идет на увеличение *поверхностной энергии* — создание избытка энергии частиц в поверхностном слое по сравнению с их энергией внутри остального объема фазы.

Для изотермического увеличения поверхностного слоя жидкости за счет молекул, находящихся в ее объеме, требуется совершить работу, идущую на увеличение *свободной поверхностной энергии* жидкости:

$$A = (\overline{F_s} - \overline{F_v})N,$$

где  $\overline{F_s} - \overline{F_v}$  — средняя разность свободной энергии на поверхности  $F_s$  и в объеме  $F_v$  (на одну молекулу),  $N$  — число молекул в поверхностном слое жидкости.

3° Работа изотермического образования  $1 \text{ см}^2$  поверхности (удельная свободная поверхностная энергия) называется *поверхностным натяжением*  $\sigma$  данной жидкости на границе с другой фазой:

$$\sigma = \frac{A}{S} = (\overline{F_s} - \overline{F_v}) \frac{N}{S} = (\overline{F_s} - \overline{F_v}) n_1,$$

где  $n_1 = N/S$  — число молекул на  $1 \text{ см}^2$  поверхностного слоя. Поверхностное натяжение выражается также формулой

$$\sigma = \frac{dF}{dS},$$

где  $\Delta F$  — изменение свободной поверхностной энергии,  $\Delta S$  — изменение площади поверхностного слоя. На границе жидкости с собственным паром при комнатных температурах  $\sigma$  изменяется в пределах от 15 эрг/см<sup>2</sup> (углеводороды) до 2000 эрг/см<sup>2</sup> (расталвленные металлы). С повышением температуры и приближением ее к критической (стр. 254) стираются различия между жидкостью и ее насыщенным паром. Вблизи критической температуры, при  $T \rightarrow T_K$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ . Вдали от  $T_K$  величина  $\sigma$  линейно убывает с ростом температуры. Снижение поверхностного натяжения достигается введением в жидкость примесей *поверхностно-активных веществ*, адсорбирующихся на поверхностях раздела и уменьшающих свободную поверхностную энергию (мыла, жирные кислоты) (стр. 281).

4° Если поверхность жидкости ограничена периметром смачивания (стр. 258), то величина  $\sigma$  равна силе, действующей на единицу длины периметра смачивания и направленной нормально к ней. Эта сила лежит в плоскости, касательной к свободной поверхности жидкости.

5° Условием устойчивого равновесия жидкостей является *минимум свободной поверхностной энергии*. В отсутствие внешних сил жидкость имеет минимальную площадь поверхности (при заданном объеме) и принимает сферическую форму.

### 3. Смачивание. Капиллярные явления

1° На границе соприкосновения трех фаз (1 — жидкость, 2 — газ, 3 — твердое тело) наблюдаются явления,

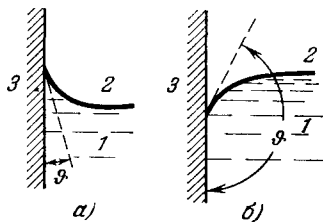


Рис. П.8.1.

называемые *смачиванием* (рис. П.8.1). Свободная поверхность жидкости около твердой поверхности искривлена и называется *мениском*. Линия, по которой мениск пересекается с твердым телом, называется *периметром смачивания*. Явления смачивания характеризуются *краевым углом*  $\theta$  между смоченной поверх-

ностью твердого тела и мениском в точках их пересечения (периметра смачивания).

2° Мерой смачивания считается величина  $\cos \theta$ , определяемая по уравнению

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}},$$

где  $\sigma_k$  — поверхностные натяжения на трех поверхностях раздела. Если  $\sigma_{23} > \sigma_{13}$ , то  $\theta < \pi/2$ ; жидкость имеет вогнутый мениск и смачивает твердое тело (рис. П.8.1,а), поверхность которого называется *гидрофильной* (карбонаты, силикаты, сульфаты, кварц). Если  $\sigma_{23} < \sigma_{13}$ , то  $\theta > \pi/2$ ; жидкость имеет выпуклый мениск и не смачивает твердого тела (рис. П.8.1,б), поверхность которого называется *гидрофобной* (чистые металлы, сульфиды, графит). Если  $\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12}$ , то  $\theta \rightarrow 0$ , т.е. мениск касателен к поверхности тела (*идеальное смачивание*). Межмолекулярные силы, действующие на частицу поверхностного слоя, в этом случае полностью компенсированы и свободная поверхностная энергия этого слоя имеет минимальное значение. Если  $\sigma_{23} < \sigma_{13}$ , то  $\theta \rightarrow \pi/2$ ; жидкость имеет плоскую свободную поверхность. Этот случай называется *отсутствием смачивания и несмачивания*.

3° Искривление поверхностного слоя приводит к появлению дополнительного давления на жидкость, зависящего от поверхностного натяжения  $\sigma$  и кривизны поверхности. По *закону Лапласа* при средней кривизне поверхности

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

определяемой главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , давление под искривленной поверхностью жидкости равно

$$p_M = p_{0M} + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $p_{0M}$  — давление при плоской поверхности жидкости,  $p_{RM} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\sigma H$  — дополнительное давление, зависящее от кривизны;  $p_{RM} > 0$ , если мениск выпуклый,  $p_{RM} < 0$ , если мениск вогнутый. Если мениск имеет форму цилиндрической поверхности, то  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$  и

$$p_{RM} = \frac{\sigma}{R}.$$

Для сферической поверхности,  $R_1 = R_2 = R$ ,

$$p_{RM} = \frac{2\sigma}{R}.$$

Дополнительное давление внутри пузыря радиуса  $R$  вызывается обеими поверхностями пленки:  $p_{RM} = \frac{4\sigma}{R}$ .

4° В узких цилиндрических сосудах (*капиллярах*) радиуса  $r$  уровень смачивающей (несмачивающей) жидкости выше (ниже), чем в сообщающемся с ними широком сосуде, на величину

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{r\sigma g}$$

(*формула Жюрена*), где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\vartheta$  — краевой угол.

Если капилляр имеет форму узкой щели с постоянной толщиной  $\delta$ , то мениск жидкости представляет собой цилиндрическую поверхность радиуса  $\delta/2$  и высота поднятия (смачивающей) или опускания (несмачивающей) жидкости в капилляре равна

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\delta \rho g}$$

5° Давление насыщенного пара (стр. 250) над искривленной поверхностью жидкости зависит от формы ее мениска. В случае вогнутой (выпуклой) поверхности оно меньше (больше), чем над плоской поверхностью, на величину

$$\Delta p_M = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} p_{RM},$$

где  $\rho$  — плотность насыщенного пара,  $\rho_1$  — плотность жидкости,  $p_{RM}$  — дополнительное давление, связанное с кривизной поверхности.

#### 4. Испарение и кипение жидкостей

1° *Испарением* называется процесс парообразования, происходящий со свободной поверхности жидкости. Испарение происходит при любой температуре и увеличивается при ее повышении. Испарение объясняется вылетом из поверхностного слоя жидкости молекул, обладающих наибольшей скоростью и кинетической энергией, так что в результате испарения жидкость охлаждается. Скорость испарения  $u$ , т. е. количество жидкости, переходящей в пар за 1 сек, зависит от внешнего давления и движения газообразной фазы над свободной поверхностью жидкости:

$$u = \frac{GS}{p_0} (p_{II} - p),$$

где  $C$  — постоянная,  $S$  — площадь свободной поверхности жидкости,  $p_{II}$  — давление насыщенного пара,  $p$  — давление паров жидкости над ее свободной поверхностью,  $p_0$  — внешнее барометрическое давление.

2° *Кипением* называется процесс интенсивного испарения жидкости не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара. Давление  $p$  внутри пузырька определяется по формуле

$$p = p_0 + \rho g h + p_{RM},$$

где  $p_0$  — внешнее давление,  $\rho g h$  — гидростатическое давление вышележащих слоев жидкости,  $p_{RM} = 2\sigma/r$  — дополнительное давление, связанное с кривизной,  $r$  — радиус пузырька пара,  $h$  — расстояние от его центра до поверхности жидкости,  $\rho$  и  $\sigma$  — плотность и поверхностное натяжение жидкости.

3° Кипение жидкости начинается при такой температуре, что

$$p_{II} \cong p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r},$$

где  $p_{II}$  — упругость (давление) насыщенного пара внутри пузырька; остальные обозначения см. в п. 2°.

При малых  $r$  давление  $p_{II}$  достаточно велико и кипение жидкостей происходит при сравнительно высоких температурах. Если в жидкости имеются *центры парообразования* (пылинки, пузырьки растворенных газов и пара), то обычно  $p_{RM} \ll p_0$  и кипение начинается при меньших температурах. Если  $\rho g h \ll p_0$ , то приближенное условие кипения:

$$p_{II} \approx p_0.$$

Температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению, называется *температурой* или *точкой кипения*.

4° Если кипение жидкости происходит при постоянном давлении  $p_0$ , то ее температура остается постоянной. Теплота, подводимая к жидкости, расходуется только на парообразование. Теплота  $q_K$ , необходимая для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется *удельной теплотой парообразования* (*скрытой теплотой кипения*).

Изменение внутренней энергии жидкости при переходе единицы ее массы в пар при температуре кипения называется *внутренней удельной теплотой парообра-*

зования. Удельная теплота парообразования уменьшается при повышении температуры кипения и обращается в нуль при критической температуре (стр. 251)

5° Кипение жидкости и конденсация пара являются примерами фазовых переходов первого рода (стр. 198). Удельные теплоты фазовых переходов для процессов парообразования и плавления (стр. 277) определяются из уравнения Клапейрона – Клаузиуса (стр. 199).

Для кипения жидкости оно имеет вид

$$r_{\text{к}} = (v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}) T \frac{dp}{dT},$$

где  $v_{\text{п}}$  и  $v_{\text{ж}}$  – удельные объемы жидкости и пара при температуре кипения  $T$ . Зависимость температуры кипения от давления определяется из уравнения

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}}{r_{\text{к}}} T.$$

Поскольку  $v_{\text{п}} > v_{\text{ж}}$  и  $r_{\text{к}} > 0$ , то

$\frac{dT}{dp} > 0$ . На рис. П.8.2 представлена кривая фазового равновесия процесса парообразования. Она заканчивается в критической точке К.

Температура кипения возрастает при увеличении давления.

### 5. Свойства разбавленных растворов

1° Под *разбавленным раствором* понимается такая смесь нескольких веществ, в которой одно из веществ является преобладающим, а остальные являются малыми к нему примесями. Основное вещество называется *растворителем*, остальные – *растворенными веществами*. Раствор может находиться в твердом состоянии (*твердые растворы*), жидком (*истинные растворы*, водные и неводные) и газообразном (*газовые смеси*).

Если растворяющееся вещество дробится на отдельные молекулы (*молекулярная дисперсность* вещества), то образуется *молекулярный истинный раствор*. В случае *истинных ионных растворов* происходит распад растворенного вещества на ионы. Кроме того, существуют *коллоидные растворы*, представляющие собой взвешенные в растворителе *частицы* вещества.

2° Количество растворенного вещества характеризуется его *концентрацией* (стр. 152).

Такие растворы, в которых молекулы растворенного вещества полностью диссоциируют на ионы в сильно ассоциированных растворителях, называются *растворами сильных электролитов*. Образовавшиеся ионы взаимодействуют с молекулами растворителя (*явление гидратации*).

3° В разбавленных растворах наблюдается хаотическое движение молекул растворенного вещества, аналогичное движению молекул газа. Однако для растворенных молекул несправедливы максвелловское распределение скоростей (стр. 205), закон распределения свободных пробегов (стр. 209) и другие газокинетические закономерности.

4° Экспериментальным методом изучения свойств истинных растворов являются наблюдения над *явлением осмоса* – проникновением растворителя в раствор через пористую перегородку (*мембрану*), непроницаемую для растворенного вещества и отделяющую раствор от чистой жидкости. Через мембрану осуществляется обмен молекулами растворителя, находящимися по обе ее стороны. В результате преимущественного движения молекул растворителя в сторону раствора равновесие в системе растворитель – мембрана – раствор поддерживается с помощью *осмотического давления*, производимого растворенным веществом в растворе. Осмотическое давление  $p_{\text{осм}}$  вычисляется по *уравнению Вант-Гоффа*:

$$p_{\text{осм}} = \frac{n}{V} RT,$$

где  $n$  – число молей растворенного вещества в объеме  $V$  раствора,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура.

Аналогия между уравнениями Вант-Гоффа и Клапейрона – Менделеева (стр. 151) является причиной ошибочного толкования осмотического давления как результата ударов молекул раствора о стенки сосуда.

5° Равновесная концентрация слабого раствора, возникающего при растворении в жидкости или твердом теле газа, пропорциональна давлению газа и не зависит от природы газа и конденсированной фазы (*закон растворимости Генри*). Это утверждение справедливо при отсутствии *хемисорбции* – химического взаимодействия между газом и твердым растворителем (стр. 280).

6° Давление насыщенного пара над разбавленным раствором меньше, чем над чистой жидкостью. Относительное понижение давления пара пропорционально концентрации раствора и не зависит от химической природы растворенного вещества (*закон Рауля*).

7° Введение в растворитель молекул растворенного вещества повышает температуру кипения и снижает температуру отвердевания растворов на величину, пропорциональную концентрации раствора и не зависящую от химической природы растворенного вещества (*закон Рауля*).

О кристаллизации растворов см. стр. 279.

## 6. Сверхтекучесть гелия

1° При сверхнизких температурах у гелия наблюдается совокупность особых свойств:

а) отсутствует тройная точка (стр. 280);

б) при давлениях  $p < 24$  атм гелий не кристаллизуется при охлаждении до сколь угодно низких температур;

в) для изотопа  $\text{He}^4$  (стр. 806) критические параметры (стр. 251) составляют:  $T_{\text{к}} = 5,19^\circ \text{К}$ ,  $p_{\text{к}} = 2,26$  атм. При нормальном давлении  $\text{He}^4$  сжимается при  $T = 4,2^\circ \text{К}$ , причем плотность жидкого гелия аномально мала.

2° При понижении температуры до  $T = 2,2^\circ \text{К}$  и нормальном давлении в  $\text{He}^4$  происходит  $\lambda$ -переход, являющийся фазовым переходом второго рода (стр. 198): жидкий гелий I переходит в гелий II. При повышении давления температура  $\lambda$ -перехода понижается.

3° Сверхтекучестью называется обнаруженное у жидкого гелия II явление практически полного отсутствия вязкости (стр. 210) при течении его сквозь очень узкие капиллярные трубки (радиусом  $r \approx 10^{-5}$  см). Коэффициент вязкости в этом случае меньше  $10^{-11}$  пуаза.

4° Согласно *двухжидкостной модели* жидкий гелий с массой  $m$  при  $T < 2,2^\circ \text{К}$  представляет собой смесь двух полностью взаимопроницающих без трения компонентов: нормального (с массой  $m_n$ ) и сверхтекучего (с массой  $m_s = m - m_n$ ). Это соответствует двум типам движений, одновременно существующих в гелии II. Первое из них соответствует течению жидкости, в которой возбуждено тепловое движение, рассматриваемое как совокупность «элементарных тепловых возбуждений энергиями  $h\nu$ », где  $h$  — постоянная Планка,  $\nu$  — частоты

соответствующих этим возбуждениям фононов (стр. 274). Это течение называется нормальным, оно подобно движению обычной вязкой жидкости. С ним связан запас внутренней энергии гелия II и наличие в нем внутреннего трения (вязкости). Второй тип движения соответствует течению жидкости, в которой отсутствуют тепловые возбуждения, запас внутренней энергии и вязкость. Из детального рассмотрения механизма возникновения «элементарных тепловых возбуждений» в гелии II, основанного на законах сохранения энергии и импульса, следует возможность таких состояний гелия II, в которых не возникают элементарные возбуждения. В этих состояниях частицы гелия II образуют связанный коллектив (*конденсат*) сильно взаимодействующих частиц. Таким состояниям соответствует сверхтекучая часть гелия II.

При  $T = 0$  «элементарные возбуждения» отсутствуют и весь гелий II является сверхтекучим. С ростом  $T$  увеличивается доля нормальной части гелия II. При  $T = 2,2^\circ \text{К}$  происходит непрерывный переход от гелия II к гелию I (фазовый переход первого рода, стр. 198).

5° В гелии II обнаруживается аномально высокая теплопроводность, в сотни раз превосходящая теплопроводность металлов при комнатных температурах. Поэтому в гелии II не создается заметного перепада температур, он не может кипеть, а лишь испаряется со свободной поверхности. Высокая теплопроводность гелия II обуславливается интенсивными конвективными токами, которые возникают в неравномерно нагретом жидком гелии вследствие повышения доли его нормального компонента вблизи нагревателя. При стационарной теплопроводности (стр. 272) в гелии II одновременно существуют два противоположных по направлению движения жидкости: нормальное — от нагревателя к холодильнику и сверхтекучее — от холодильника к нагревателю. Перенос энергии в форме теплоты осуществляется в нормальном движении. За счет сверхтекучего движения к нагревателю доставляются новые порции жидкости, способные прийти в нормальное движение. При этом не происходит макроскопического переноса массы, ибо оба движения компенсируют друг друга.

6° При перетокании гелия II через узкий капилляр между двумя сосудами температура в сосуде, откуда гелий II вытекает (втекает), понижается (повышается). Это явление, называемое *механикокарическим эффектом*,

объясняется тем, что вытекающий из сосуда сверхтекучий компонент гелия II не обладает внутренней энергией и, следовательно, не уносит ее. Поэтому удельная внутренняя энергия и соответствующая ей температура оставшейся в сосуде жидкости повышаются.

## ГЛАВА 9

### КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

#### 1. Общие свойства и строение твердых тел

1° *Твердыми телами* называются тела, отличающиеся постоянством формы и объема. Твердые тела подразделяются на кристаллические и аморфные.

2° *Кристаллы* — твердые тела, имеющие правильное периодическое расположение составляющих их частиц (*дальний порядок, кристаллическая решетка*). Кристаллы ограничены плоскими, упорядоченно расположенными друг относительно друга гранями, сходящимися в ребрах и вершинах. При температурах ниже точки кристаллизации (стр. 278) кристаллическое состояние является устойчивым состоянием всех твердых тел.

*Монокристаллы* имеют форму правильных многогранников, обусловленную их химическим составом. Большинство твердых тел — *поликристаллов* — имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из большого числа сросшихся мелких, хаотически расположенных кристаллов (*кристаллических зерен, кристаллитов*).

3° Кристаллы имеют *симметрию*, состоящую в том, что любому заданному направлению в кристалле соответствует одно или несколько направлений, которые в отношении рассматриваемых свойств являются совершенно одинаковыми. Симметрия кристаллов исследуется с помощью *симметрических преобразований (операций совмещения)*, в результате применения которых кристалл совпадает сам с собой в различных положениях. Простейшие операции совмещения (*поворот, отражение, трансляция* — параллельное смещение) связаны с *элементами симметрии*. Простейшими элементами симметрии являются *оси и плоскости симметрии*. Группа симметрических преобразований, состоящая обычно из комбинации поворотов, отражений и поворотов с отражением, называется *классом симметрии*.

#### II.9.1] СВОЙСТВА И СТРОЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ 267

4° Различают скалярные, векторные и тензорные физические свойства кристаллов. *Скалярные свойства* (плотность, теплоемкость и др.) однозначно определяются заданием численных значений физических величин, определяющих эти свойства. *Векторные свойства* (теплопроводность, электрическое сопротивление и др.) определяются заданием значений характеризующих их величин по каждому из трех направлений, характерных для кристалла (по *основным координатным осям кристалла*). *Тензорные свойства* определяются заданием их значений по более чем трем направлениям в кристалле (относительная диэлектрическая проницаемость, упругие свойства и т. д.).

5° По характеру сил взаимодействий, типу связи и тому, какие частицы расположены в узлах кристаллической решетки, различаются следующие типы твердых тел.

а) *Металлы* (Na, Fe и др.). При сближении атомов, находящихся в начале каждого периода периодической системы Менделеева (стр. 770), валентные электроны покидают свои атомы и становятся обобществленными (коллективизированными), образуя электронный газ в металлах (стр. 229). При этом создается однородное распределение электронной плотности по всей решетке. Лишь вблизи узлов кристаллической решетки плотность электронов возрастает за счет внутренних электронных оболочек атомов. *Металлическая связь* в решетке возникает между положительными ионами и электронным газом и является специфическим типом химической связи, поскольку условия, необходимые для образования ионной (гетерополярной) (стр. 782) или атомной (гомополярной) (стр. 786) связи, у атомов металла отсутствуют. Коллективизированные электроны металлов «стягивают» главным образом электростатическими силами положительные ионы, уравновешивая отталкивание между ионами. При уменьшении расстояния между атомами в решетке растет электронная плотность и силы, стягивающие ионы, а также силы отталкивания между ионами. При определенных расстояниях (*периоде решетки*) эти силы уравновешивают друг друга и возникает устойчивая металлическая решетка кристалла. Потенциальная энергия взаимодействия металлической связи составляет десятки *ккал/моль* (например, 26 *ккал/моль* у Na и 94 *ккал/моль* у Fe). Металлы отличаются высокой тепло- и электропроводностью.

б) *Ионные кристаллы* (NaCl, LiF, окислы металлов, сульфиды, карбиды, селениды и др.) характеризуются ионной (гетерополярной) связью (стр. 782) между правильно чередующимися в узлах кристаллической решетки положительными и отрицательными ионами. Потенциальная энергия связи составляет сотни ккал/моль (например, 180 ккал/моль у NaCl, 240 ккал/моль у LiF) или  $10^5$  Дж/моль. Характерные свойства ионных кристаллов: высокие точки плавления и большие теплоты сублимации, сильное поглощение в инфракрасной области, малая электропроводность и теплопроводность при низких температурах. При высоких температурах обнаруживается значительная ионная проводимость.

в) *Валентные (атомные) кристаллы* (C, Ge, Te и др.) характерны для кристаллических решеток полупроводников (стр. 400), многих органических твердых тел. Наблюдаются также у некоторых металлов и интерметаллических соединений. Химическая связь между нейтральными атомами — гомеополярная связь (стр. 786) — обусловлена кваптовомеханическим взаимодействием. Потенциальная энергия связи составляет сотни ккал/моль (например, энергия связи у алмаза 470 ккал/моль). Основные свойства валентных кристаллов: высокие температуры плавления и теплоты сублимации, высокая механическая прочность (твердость), малая электропроводность в чистых образцах.

г) *Молекулярные кристаллы* (Ag, CH<sub>4</sub>, парафин, многие твердые органические соединения). В узлах кристаллических решеток находятся молекулы, и связь между ними осуществляется силами Ван-дер-Ваальса, главным образом дисперсионными (стр. 247). Потенциальная энергия связи составляет несколько единиц ккал/моль (например, у Ag 1,8 ккал/моль, у CH<sub>4</sub> 2,4 ккал/моль). Основные свойства: низкие точки плавления и кипения, *плотная упаковка молекулярных кристаллов*. Инертные газы, превращаясь в твердое тело, образуют плотноупакованную кубическую структуру.

д) *Кристаллы с водородными связями* (лед, HF и др.). Атом водорода, обладающий одной ковалентной (атомной) связью (стр. 786), в некоторых случаях связывается силами притяжения с двумя атомами, образуя *водородную связь* с потенциальной энергией связи  $\sim 5$  ккал/моль. Образование связи происходит так, что атом водорода отдает свой электрон одному из атомов молекулы, а получившийся ион водорода (протон) в основном за счет ион-

ного взаимодействия образует водородную связь. При этом атомы сильно сближены и протон не может обеспечить связь более чем двух атомов. Подобная связь действует между молекулами воды и вместе с притяжением дипольных моментов молекул H<sub>2</sub>O обеспечивает особые свойства воды и льда вблизи 4° С. Водородная связь осуществляется между белковыми молекулами, обеспечивая их специфическую геометрию, и играет большую роль в процессе полимеризации — образовании групп однопипных молекул (стр. 294).

б) Между кристаллическим строением твердых тел и их химическим составом существует связь, исследуемые в *кристаллохимии*. Всякое химически индивидуальное вещество характеризуется определенными элементами симметрии кристаллов. Важнейшими положениями кристаллохимии являются: а) сходство формы кристаллов у веществ с аналогичным химическим составом (*изоморфизм*); б) возможность существования нескольких кристаллических форм для твердых тел одного химического состава, каждая из которых устойчива в различных условиях (*полиморфизм*). Для развития кристаллохимии и всего учения о кристаллических твердых телах большую роль играет рентгеноструктурный анализ (стр. 623). С его помощью установлено, что каждый структурный элемент кристалла (атом, ион) имеет практически непроницаемую «сферу действия» и расхождение между атомами в кристаллах являются суммами радиусов их сфер действия. Так, структура ионных кристаллов существенно зависит от соотношения ионных радиусов.

7° Тепловое движение связанных частиц твердых тел состоит в колебаниях частиц относительно узлов кристаллической решетки. В результате совместного действия сил притяжения и отталкивания между частицами, а также отсутствия полной периодичности в реальных кристаллах эти колебания не являются гармоническими (*ангармонические колебания*).

Гармоническим колебаниям соответствует квадратичная зависимость потенциальной энергии взаимодействия частиц  $U(q)$  от смещения  $q$  частиц из положения равновесия (стр. 413). *Ангармоничность колебаний* учитывается следующими после квадратичного членами разложения в ряд  $U(q)$  по степеням  $q$ . В первом приближении ангармоничность учитывается удержанием кубического члена в разложении потенциальной энергии взаимодей-



ствия частиц по степеням  $q$ :  $U(q) = U_0 + \beta_0 \frac{q^2}{2} - \frac{bq^3}{3}$ , где  $U_0$  — значение  $U$  при  $q=0$ ,  $\beta_0$  — коэффициент квазиупругой силы (стр. 114).

## 2. Тепловое расширение твердых тел

1° С повышением температуры происходит расширение твердых тел, называемое *тепловым расширением*. Различаются *линейное* и *объемное тепловые расширения*, характеризующиеся *средними коэффициентами линейного*  $\alpha_l$  и *объемного*  $\alpha_V$  расширений в данном интервале температур.

2° Если  $l_0$  — первоначальная длина тела, а  $\Delta l$  — удлинение этого тела при нагревании на  $\Delta t$  градусов, то  $\alpha_l$  в этом интервале температур определяется по формуле

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Величина  $\alpha_l$  характеризует *относительное удлинение*  $\Delta l/l_0$ , происходящее при нагревании тела на один градус. Длина нагретого тела равна

$$l = l_0(1 + \alpha_l \Delta t).$$

Значение  $\alpha_l$  зависит от материала и для большинства тел имеет порядок величины  $10^{-5} \div 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>. Наблюдается также слабая зависимость  $\alpha_l$  от температуры.

3° Объем твердого тела  $V$  при нагревании возрастает в первом приближении пропорционально первой степени приращения температуры:

$$V = V_0(1 + \alpha_V \Delta t),$$

где  $V_0$  — первоначальный объем тела,  $\alpha_V$  — средний коэффициент объемного расширения в интервале температур  $\Delta t$ , характеризующий *относительное увеличение объема*  $\Delta V/V_0$ , происходящее при нагревании тела на один градус:

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Связь коэффициентов  $\alpha_V$  и  $\alpha_l$  в первом приближении имеет вид

$$\alpha_V = 3\alpha_l.$$

4° Тепловое расширение твердого тела связано с агармоничностью тепловых колебаний (стр. 269) частиц его кристаллической решетки. Сила, действующая на час-

тицу,

$$F(q) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q} = -\beta_0 q + bq^2.$$

Для равновесного состояния кристалла среднее значение силы  $\bar{F} = 0$ , поэтому при строго гармонических колебаниях ( $F = -\beta_0 q$ )  $\bar{q} = -\frac{\bar{F}}{\beta_0} = 0$  и теплового расширения происходить не может. В действительности же

$$\bar{q} = \frac{b}{\beta_0} \bar{q}^2.$$

Но по закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы (стр. 223)

$$\beta_0 \frac{\bar{q}^2}{2} = \frac{1}{2} kT,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура; поэтому

$$\bar{q} = \frac{bk}{\beta_0^2} T.$$

Вследствие агармоничности тепловых колебаний, с повышением температуры возрастает равновесное расстояние  $r_0$  между соседними частицами твердого тела. Коэффициент линейного расширения связан с *коэффициентом агармоничности*  $b$ :

$$\alpha_l = \frac{\bar{q}}{r_0 T} = \frac{bk}{\beta_0^2} \frac{1}{r_0}.$$

## 3. Теплопроводность твердых тел

1° Явление теплопроводности твердых тел состоит в передаче энергии в форме теплоты в неравномерно нагретом твердом теле (без теплового излучения). В общем случае температура  $T$  в различных точках тела изменяется с течением времени:  $T = f(x, y, z, t)$ , где  $x, y, z$  — координаты точки,  $t$  — время. Вид функции  $f$  устанавливается с помощью решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье, которое для однородного изотропного тела имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T + \frac{q_V}{c_V},$$

где  $q_V$  — количество теплоты, выделяемое внутренними источниками теплоты в единице объема тела за единицу времени,  $c$  — удельная теплоемкость тела,  $\rho$  — его

плотность,  $\Delta$  — дифференциальный оператор Лапласа. Величина  $a$ , характеризующая скорость выравнивания температуры в неравномерно нагретом теле, называется *коэффициентом температуропроводности*. Он имеет смысл приведенного коэффициента теплопроводности  $K$  (стр. 240) и связан с ним соотношением

$$a = \frac{K}{c\rho}$$

(для газов  $c = c_p$ ).

2° Для стационарной теплопроводности ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ )

$$a \Delta T - \frac{q_{\text{в}}}{c\rho} = 0.$$

В отсутствие внутренних источников теплоты ( $q_{\text{в}} = 0$ )

$$\Delta T = 0.$$

Для практического решения уравнения теплопроводности должны быть заданы: а) начальные условия  $T = f(x, y, z, 0)$ , б) краевые условия (условия теплообмена на границе тела).

3° В случае плоской бесконечной стенки, разделяющей две среды 1 и 2 с постоянными температурами  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$  ( $T_{c1} > T_{c2}$ ), удельный тепловой поток  $q$  через стенку

$$q = \frac{K}{d} (T_{b1} - T_{b2}),$$

или

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{K} + \frac{1}{a_2}} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{R},$$

где  $T_{b1}$  и  $T_{b2}$  — температуры внешних поверхностей стенки,  $d$  — толщина стенки,  $K$  — коэффициент теплопроводности материала стенки (стр. 240),  $a_1$  и  $a_2$  — *коэффициенты теплоотдачи* (стр. 327) от первой среды к стенке и от стенки ко второй среде. Величина

$$R = \frac{1}{a_1} + \frac{d}{K} + \frac{1}{a_2}$$

называется *термическим сопротивлением*,  $1/R$  — *коэффициентом теплопередачи*.

1) Удельным тепловым потоком называется количество теплоты, переносимое в единицу времени через единицу поверхности постоянной температуры в направлении нормали к ней.

Температуры на внешних поверхностях:

$$T_{b1} = T_{c1} - \frac{q}{a_1}, \quad T_{b2} = T_{c2} + \frac{q}{a_2}.$$

Температура однослойной стенки на расстоянии  $l$  от поверхности 1:

$$T = T_{b1} - \frac{T_{b1} - T_{b2}}{d} l.$$

Для стенок конечных размеров формулы могут использоваться при условии  $L \gg d$ , где  $L$  — линейные размеры боковой поверхности стенки.

4° Для стенки в форме длинного полого цилиндра с постоянными температурами сред внутри и вне цилиндра  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$  ( $T_{c1} > T_{c2}$ ) тепловой поток через единицу длины стенки за единицу времени

$$q_l = \frac{2\pi K (T_{b1} - T_{b2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}},$$

или

$$q_l = \frac{\pi (T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2K} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}},$$

где  $T_{b1}$  и  $T_{b2}$  — температуры внутренней и наружной поверхностей цилиндра,  $d_1$  и  $d_2$  — внутренний и наружный диаметры цилиндра,  $K$  — коэффициент теплопроводности материала стенки,  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты теплоотдачи на внутренней и внешней поверхностях цилиндра. Температуры на внутренней и наружной поверхностях стенки:

$$T_{b1} = T_{c1} - \frac{q_l}{\pi a_1 d_1}, \quad T_{b2} = T_{c2} + \frac{q_l}{\pi a_2 d_2}. \quad (*)$$

Температура однослойной стенки на расстоянии  $r$  от оси цилиндра:

$$T = T_{b1} - \frac{q_l}{2\pi K} \ln \frac{2r}{d_1}.$$

5° Для шаровой стенки с внутренним диаметром  $d_1$  и наружным  $d_2$ , разделяющей две среды с постоянными температурами  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$  ( $T_{c1} > T_{c2}$ ), тепловой поток  $Q$  через стенку за единицу времени

$$Q = \pi K \frac{d_1 d_2}{d} (T_{b1} - T_{b2}),$$

где  $d$  — толщина стенки, или

$$Q = \frac{\pi(T_{e1} - T_{e2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2K} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

(обозначения см. в п. 4°). Температуры стенок подсчитываются по формулам, аналогичным (\*). Температура шаровой стенки на расстоянии  $r$  от центра:

$$T = T_{b1} - \frac{T_{b1} - T_{b2}}{\frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2}} \left( \frac{2}{d_1} - \frac{1}{r} \right).$$

6° Металлы отличаются хорошей теплопроводностью, которая осуществляется в основном за счет переноса энергии свободными электронами. Коэффициент электронной теплопроводности металлов:

$$K = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2 n_0 \lambda(W_F)}{m \bar{u}(W_F)} T,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $n_0$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$  металла,  $\lambda(W_F)$  и  $\bar{u}(W_F) = p_F/m$  — длина свободного пробега и средняя скорость теплового движения электронов, соответствующие граничной энергии  $W_F$  фермиевского распределения электронов по энергиям при температуре  $T = 0$  (стр. 230),  $m$  — масса электрона.

В классическом приближении идеального электронного газа

$$K = \frac{1}{2} k n_0 \bar{\lambda} \bar{u},$$

где  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{u}$  — средние длина свободного пробега и скорость теплового движения электронов. Теплопроводность металлов, осуществляемая кристаллической решеткой (решеточная теплопроводность), значительно меньше электронной.

7° В металлических кристаллах механизмом теплопроводности является передача энергии электронами проводимости (стр. 376). В кристаллических диэлектриках основную роль играет передача энергии связанных колебаний узлов решетки. В первом приближении этот процесс можно представить в виде распространения в кристалле набора гармонических упругих волн, имеющих различные частоты  $\nu_i$ . В квантовой теории этим волнам сопоставляются квазичастицы — *фононы* — с энергиями  $h\nu_i$  и импульсами  $h\nu_i/v$ , где  $v$  — скорость упругих волн (скорость звука).

Процесс решеточной теплопроводности может быть рассмотрен как перемещение фононов по кристаллу. Средняя длина свободного пробега  $\bar{\lambda}$  фононов является кинетической характеристикой, аналогичной средней длине свободного пробега молекулы (стр. 209). Коэффициент решеточной теплопроводности кристаллов:

$$K = \frac{1}{3} c v \bar{\lambda},$$

где  $c$  — теплоемкость единицы объема,  $v$  — скорость звука,  $\bar{\lambda}$  — средняя длина свободного пробега фононов. Например, для решетки NaCl при  $t = 0^\circ \text{C}$  и значениях  $c = 0,45 \text{ кал}\cdot\text{см}^{-3}$  и  $K = 0,17 \text{ кал}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}\cdot\text{сек}^{-1}$   $\bar{\lambda} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , что в 4 раза превышает расстояние  $d$  между соседними ионами в кубической гранецентрированной решетке NaCl:  $d = 5,63 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  (период кристаллической решетки).  $\bar{\lambda}$  фононов определяется геометрическим рассеянием фононов (рассеяние на границах кристалла, дефектах решетки и аморфных структурах) и рассеянием фононов на ангармонических колебаниях узлов решетки (рассеяние фононов на фононах). На гармонических колебаниях последний процесс не происходит. Рассеяние фононов на фононах приводит при высоких температурах  $T > T_c$ , где  $T_c$  — характеристическая температура кристалла (стр. 276), к зависимости  $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{T}$ ; при  $T \ll T_c$   $\bar{\lambda} \sim e^{-T/T_c}$ . Геометрическое рассеяние существенно при больших значениях  $\bar{\lambda}$ , сравнимых с линейными размерами  $d$  образца. В этом случае, наблюдающемся при низких температурах, происходит резкое уменьшение теплопроводности чистых кристаллов и справедливо соотношение  $K \approx \frac{1}{3} c v d$ . При не слишком низких температурах  $K \sim 1/T$  в соответствии с зависимостью  $\bar{\lambda} \sim 1/T$ . При низких температурах  $K \sim T^3$ , ввиду того что  $c \sim T^3$  (стр. 277).

#### 4. Теплоемкость твердых тел

1° Для твердых тел не различают теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  (стр. 160). При этом являются удельная, объемная и грамматомная (или молярная) теплоемкости (стр. 158). У неметаллических твердых тел наибольший вклад в теплоемкость дает энергия тепловых колебаний частиц, падающих в узлах кристаллических решеток. Для металлов следует, кроме того, учитывать малую теплоемкость вырожденного электронного газа (стр. 231).

2° Связанные колебания частиц в кристалле, содержащем  $N$  атомов, можно в первом приближении рассматривать как систему  $3N$  независимых линейных осцилляторов (соответствующих  $3N$  степеням свободы) с частотами от 0 до  $\nu_{\text{макс}}$ ,

$$\nu_{\text{макс}} = \left( \frac{9}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{v_l^2 v_t^3}{2v_l^3 + v_t^3} \right)^{1/3},$$

где  $v_l$  и  $v_t$  — скорости продольных и поперечных упругих волн в кристалле с объемом  $V$ .

3° Энергия  $U$   $g$ -атома твердого тела и его грамматомная теплоемкость  $C_g$  вычисляются с помощью интегриала состояний  $Z$  (стр. 221) по формулам, приведенным в таблице на стр. 222. Теория теплоемкости твердых тел, основанная на представлении об упругих волнах в кристалле, приводит к формуле

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} - 9N_A \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \int_0^{T_c/T} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx,$$

где  $T$  — температура кристалла,  $T_c = h\nu_{\text{макс}}/k$  — характеристическая температура кристалла (дебаевская температура),  $k$  — постоянная Больцмана,  $h$  — постоянная Планка,  $N_A$  — число Авогадро.

4° В области высоких температур ( $T \gg T_c$ )

$$\ln Z \approx -3N_A \ln \frac{T_c}{T} - \frac{9}{8} N_A \frac{T_c}{T} + N_A,$$

$$U = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \approx 3N_A kT.$$

Отсюда

$$C_g = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k = 3R = 5,97 \frac{\text{кал}}{g\text{-атом} \cdot \text{град}}.$$

Этот результат может быть получен из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы (стр. 223) и совпадает с экспериментально установленным *закон Дюлонга и Пти*: грамматомная теплоемкость всех численно простых кристаллических твердых тел приблизительно равна  $6 \text{ кал}/g\text{-атом} \cdot \text{град}$ .

5° В области низких температур ( $T \ll T_c$ ).

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} + \frac{\pi^4 N_A}{5} \left( \frac{T}{T_c} \right)^3,$$

$$U = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{9}{8} N_A kT_c + \frac{3\pi^4}{5} \frac{N_A kT^4}{T_c^3}.$$

Первый член в правой части выражения для  $U$  представляет энергию кристалла при  $T \rightarrow 0$ . Теплоемкость кристалла при низких температурах пропорциональна  $T^3$  (*закон Дебая*):

$$C_g = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{12\pi^4 N_A k}{5 T_c^3} T^3.$$

6° В промежуточной области ( $T \approx T_c$ ) энергия и теплоемкость кристалла являются сложными функциями температуры, зависящими от результата численного интегрирования  $\ln Z$  (п. 3°). Общий ход зависимости грамматомной теплоемкости от температуры представлен на рис. П.9.4.

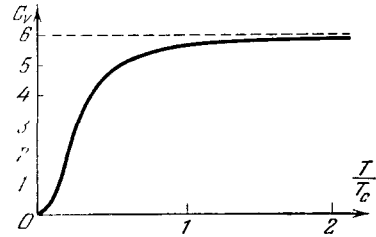


Рис. П.9.4.

## 5. Фазовые превращения твердых тел

1° При нагревании твердого тела подводимая к нему теплота расходуется в основном на увеличение запаса внутренней энергии кристалла (кинетической энергии тепловых колебаний и потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки). Сильное нагревание может привести к переходу вещества из кристаллической фазы в жидкую (*плавление*) или газообразную (*сублимация, возгонка*). Это происходит при такой температуре, когда смещения частиц из положений равновесия соизмеримы с равновесными расстояниями между частицами в решетке.

2° Плавление твердого тела начинается при определенной температуре  $T_{\text{пл}}$ , называемой *температурой плавления*. Процесс плавления однокомпонентного (стр. 145) кристалла происходит при постоянной для данного давления температуре  $T_{\text{пл}}$ .

3° Количество теплоты, которое необходимо подвести к единице массы твердого тела при постоянной температуре  $T_{\text{пл}}$  для осуществления плавления, называется *удельной теплотой плавления*  $r_{\text{пл}}$ :

$$r_{\text{пл}} = u_{\text{жл}} - u_{\text{тв}} + P(v_{\text{жл}} - v_{\text{тв}}),$$

где  $u_{ж}$  и  $u_{тв}$  — внутренние энергии единицы массы вещества в жидкой и твердой фазах,  $v_{ж}$  и  $v_{тв}$  — удельные объемы жидкости и твердого тела,  $p$  — постоянное давление фазового перехода первого рода (стр. 198).

4° Зависимость температуры плавления от давления описывается уравнением Клапейрона — Клаузиуса (стр. 199):

$$\frac{dT_{пл}}{dp} = \frac{T_{пл}(v_{ж} - v_{тв})}{r_{пл}}$$

Как правило,  $v_{ж} > v_{тв}$ , и поскольку  $r_{пл} > 0$ , то  $\frac{dT_{пл}}{dp} > 0$ .

При увеличении давления для большинства веществ температура плавления повышается. Для некоторых веществ (вода, галлий, висмут) плотность жидкой фазы больше, чем твердой,  $v_{ж} - v_{тв} < 0$  и  $\frac{dT_{пл}}{dp} < 0$ ; температура плавления

таких веществ понижается при увеличении давления. На рис. II.9.2 представлены кривые равновесия двухфазной системы твердое тело — жидкость. Процесс плавления связан с возрастанием энтропии (стр. 179) системы, как переход из более упорядоченного, кристаллического состояния в менее упорядоченное, жидкое.

5° При охлаждении жидкостей до некоторой температуры, являемой *температурой кристаллизации* (*затвердевания*) жидкой фазы  $T_{крист}$ , начинается переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние (*кристаллизация*). Кристаллизация связана с выделением количества теплоты, равного теплоте плавления, и для химически чистых жидкостей протекает при постоянной температуре, причем  $T_{крист}$  совпадает с температурой плавления  $T_{пл}$ .

6° В процессе кристаллизации упорядочивается движение частиц жидкости, увеличивается время их «сосед-

лого» существования (время релаксации, стр. 254). Постепенно движения частиц превращаются в связанные тепловые колебания около некоторых средних положений — узлов кристаллической решетки.

7° Для начала кристаллизации необходимо, чтобы в жидкости имелись *центры кристаллизации* (посторонние примеси, пылинки, пузырьки газа, местные сгущения жидкости). В этих местах в первую очередь возникает правильное взаимное расположение частиц и начинается образование твердой фазы.

8° Если в жидкости отсутствуют центры кристаллизации и от нее достаточно медленно и равномерно отводится теплота, то жидкость может быть охлаждена до более низкой температуры, чем температура кристаллизации (*переохлажденная жидкость*). Это состояние жидкости является метастабильным (ср. пересыщенный пар, стр. 251) и легко нарушается (например, кристаллизация переохлажденной жидкости начинается при ее встряхивании).

9° Температура кристаллизации раствора (стр. 145 и 262) зависит от его состава. Точки  $A$  и  $B$  на рис. II.9.3 определяют температуры кристаллизации (плавления) чистых веществ  $A$  и  $B$ . Добавление одного из веществ к другому вызывает понижение температуры кристаллизации раствора (или температуры плавления образующегося при этом сплава). При некоторой концентрации  $c_3$  вещества  $B$  (точка  $Э$ ) достигается минимальное значение температуры кристаллизации (плавления). Раствор (сплав) такого состава называется *эвтектикой*, а температура плавления эвтектики называется *эвтектической точкой*.

10° Испарение твердых тел (*сублимация*), происходящее при любой температуре, сопровождается поглощением теплоты испарения, затрачиваемой на преодоление сил связи между частицами твердого тела и на «отрыв» частиц с поверхности кристалла. Разность между удельными теплотами испарения твердых тел и жидкостей при температуре плавления равна удельной теплоте плавления.

11° Кривая равновесия твердое тело — пар в диаграмме  $p$  —  $T$  называется *кривой сублимации*. На

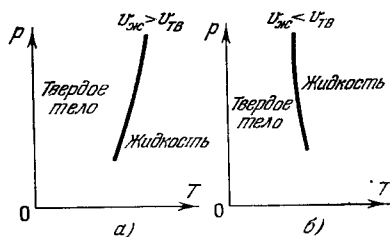


Рис. II.9.2.

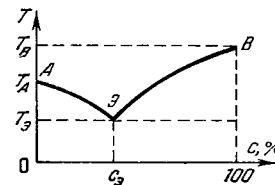


Рис. II.9.3.

рис. П.9.4 представлены для некоторого вещества кривые равновесия: твердое тело — пар, твердое тело — жидкость и жидкость — пар. Они пересекаются в *тройной точке М*, где вещество находится одновременно в твердой, жидкой и паровой фазах, которые равновесно сосуществуют друг с другом.

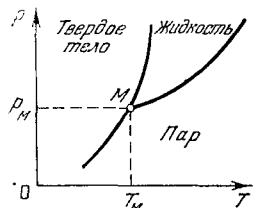


Рис. П.9.4.

## 6. Адсорбция

1° *Адсорбцией* называется концентрирование (сгущение) одного из веществ (компонентов), происходящее в пограничном слое у поверхности раздела двух фаз. Например, на поверхности твердого тела или жидкости происходит концентрирование веществ из газа или раствора. Понятие *сорбции* включает в себя как поверхностное поглощение вещества жидкостью или твердым телом — *адсорбцию*, так и объемное поглощение вещества — *абсорбцию*. Адсорбируемое вещество называется *адсорбатом*; тело, образующее поглощающую поверхность, — *адсорбентом*. *Десорбцией* называется обратный процессу сорбции отделение от поверхности ранее поглощенного ею вещества.

Адсорбированные частицы удерживаются на поверхности некоторое время, зависящее от природы адсорбента и адсорбата, температуры и давления. По мере развития процесса адсорбции ее интенсивность уменьшается и возрастает роль процесса десорбции. *Адсорбиционным равновесием* называется установление равных скоростей процессов адсорбции и десорбции.

2° *Физической адсорбцией* называется адсорбция, при которой частицы адсорбата сохраняют свои индивидуальные свойства. При *химической адсорбции* (хемисорбции) молекулы адсорбата образуют химическое соединение с адсорбентом. Адсорбиционные силы при физической адсорбции имеют ту же природу, что и силы межмолекулярного взаимодействия в газах, жидкостях и твердых телах (стр. 247). Физическая адсорбция протекает весьма быстро при условии, что она не осложнена побочными процессами. Хемисорбция при низких температурах протекает медленно, и скорость ее возрастает с повышением

температуры подобно скорости химических реакций (*активированная адсорбция*).

Процесс адсорбции сопровождается выделением теплоты. *Теплота физической адсорбции* имеет порядок теплоты конденсации и составляет 1–5 ккал/моль для простых молекул и 10–20 ккал/моль для сложных молекул. Теплоты хемисорбции сравнимы с теплотой химических реакций (10–100 ккал/моль).

Адсорбция является процессом, сопровождающимся понижением свободной энергии поверхностного слоя адсорбента (стр. 257). Адсорбат должен вносить меньший вклад в поверхностную энергию адсорбента, т. е. должен обладать меньшим, чем адсорбент, поверхностным натяжением (стр. 257).

3° Количественной характеристикой адсорбции является *величина адсорбции Г* — избыток массы данного компонента в молях на 1 см<sup>2</sup> поверхностного слоя по сравнению с его содержанием в таком же объеме соприкасающихся фаз; по *уравнению Гиббса*

$$\Gamma = - \frac{\partial \sigma}{\partial \mu},$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\mu$  — химический потенциал (стр. 193) данного компонента при равновесии фаз. Если поглощение компонента происходит из среды, где его концентрация  $c$  невелика, то уравнение Гиббса приводится к виду

$$\Gamma = - \frac{c}{RT} \frac{\partial \sigma}{\partial c},$$

где  $\frac{\partial \sigma}{\partial c} = G$  — *поверхностная активность адсорбата*, характеризующая его способность понижать при адсорбции поверхностную энергию адсорбента.

## 7. Упругие свойства твердых тел

1° *Деформацией* твердого тела называется изменение его размеров и объема, сопровождающееся чаще всего изменением формы тела. В некоторых случаях (всестороннее сжатие или растяжение) форма тела сохраняется. Деформации вызываются изменением температуры (стр. 270) или внешними силовыми воздействиями. При деформациях происходят смещения частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток твердых тел, из первоначальных положений равновесия в новые. Этому

препятствуют силы взаимодействия между частицами, вследствие чего в деформированном теле возникают внутренние упругие силы, которые уравновешивают внешние силы, приложенные к телу.

2° Упругой называется деформация, которая исчезает после прекращения действия вызывающей ее силы. При этом происходят «обратимые» смещения частиц из новых положений равновесия в кристаллической решетке в прежние. Неупругие деформации твердого тела, сопровождающиеся необратимой перестройкой его кристаллической решетки, называются *пластическими*.

3° Напряжением  $\sigma$  называется физическая величина, численно равная упругой силе  $F_{\text{упр}}$ , приходящейся на единицу площади  $S$  сечения тела:

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS}.$$

Напряжение называется *нормальным*, если сила  $dF_{\text{упр}}$  нормальна к поверхности  $dS$ , и *касательным*, если сила касательна к этой поверхности.

4° Мерой деформации является *относительная деформация*  $\frac{\Delta x}{x}$ , равная отношению абсолютной деформации  $\Delta x$  к первоначальному значению величины  $x$ , характеризующей размеры или форму тела.

5° *Закон Гука*: напряжение  $\sigma$  при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации:

$$\sigma = K \frac{\Delta x}{x},$$

где  $K$  — *модуль упругости*, численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Величина  $a = 1/K$  называется *коэффициентом упругости*. Закон Гука справедлив в определенных пределах деформаций. Напряжение, при котором нарушается пропорциональность между напряжением и деформацией, называется *пределом пропорциональности*.

6° *Одностороннее, или продольное, растяжение (сжатие)* состоит в увеличении (уменьшении) длины тела под действием растягивающей (сжимающей) силы  $F$ . Упругое растяжение (сжатие) прекращается при условии  $F_{\text{упр}} = F$ , где  $F_{\text{упр}}$  — упругая сила. Мерой деформации является *относительное удлинение (сжатие)*  $\frac{\Delta l}{l}$ . В этом случае  $K = E$  называется *модулем Юнга*.

При этом  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$ . По закону Гука

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES},$$

где  $l$  — первоначальная длина тела,  $\Delta l$  — изменение длины при нагрузке  $F$ . При  $\Delta l = l$  модуль Юнга  $E = F/S = \sigma$ , т. е. численно равен напряжению, возникающему в образце при увеличении (уменьшении) его длины в два раза при прочих неизменных условиях.

7° Относительное продольное растяжение (сжатие) образца сопровождается его *относительным поперечным сужением (расширением)*  $\frac{\Delta d}{d}$ , где  $d$  — поперечный размер образца. *Коэффициентом Пуассона*  $\mu$  называется отношение относительного поперечного сужения (расширения)  $\frac{\Delta d}{d}$  к относительному продольному удлинению (сжатию)  $\frac{\Delta l}{l}$ :

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}.$$

8° По достижении предела пропорциональности (п. 5°) (точка  $A$  на диаграмме растяжения, рис. II.9.5) удлинению возрастает быстрее, чем напряжению. *Пределом упругости* (точка  $A'$ ) называется максимальное напряжение, при котором еще не получают *остаточные деформации* (остающиеся в теле после снятия напряжения). *Предел текучести* (точка  $B$ ) характеризует состояние деформированного тела, после которого удлинение возрастает без увеличения действующей силы (горизонтальный участок  $BC$ ). *Пределом прочности* называется напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой телом перед разрушением.

9° При многократных деформациях, соответствующих переходу за предел упругости, с последующим освобождением образца от деформирующих сил упругость тела возрастает и предел пропорциональности увеличивается (*закалка, или наклеп, материала*).

10° Объемная плотность  $w_0$  потенциальной энергии тела при растяжении (сжатии) определяется удельной работой  $A_{\text{упр}}$  по преодолению упругих сил, рассчитанной

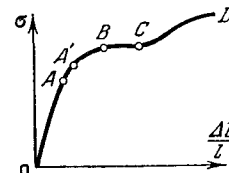


Рис. II.9.5.

на единицу объема тела. В области, где справедлив закон Гука,

$$w_{\sigma} = A_{\text{упр}} = -\frac{\sigma^2}{2E},$$

где  $\sigma$  — напряжение,  $E$  — модуль Юнга.

11° *Деформация всестороннего растяжения (сжатия)* состоит в увеличении (уменьшении) объема тела без изменения его формы под влиянием равномерно распределенных по всей поверхности тела растягивающих (сжимающих) сил. По закону Гука

$$\sigma = K \frac{4V}{V},$$

где  $\frac{4V}{V}$  — относительное увеличение (уменьшение) объема тела под действием напряжения  $\sigma$ .  $K$  называется *модулем всесторонней объемной упругости* и имеет смысл напряжения, при котором относительное увеличение (уменьшение) объема равно единице;

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

12° *Сдвигом* называется деформация, при которой все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости (*плоскости сдвига*), не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. II.9.6). Сдвиг происходит под действием силы  $F$ , приложенной касательно к грани  $BC$ , параллельной плоскости сдвига. Грань  $AD$  закреплена неподвижно. Мерой деформации

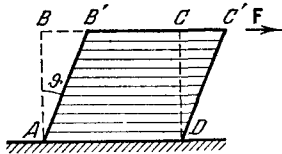


Рис. II.9.6

является *угол сдвига*  $\vartheta$  (*относительный сдвиг*), выраженный в радианах. Для малых деформаций

$$\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\Delta x}{x},$$

где  $\Delta x = CC'$  — *абсолютный сдвиг*.

По закону Гука относительный сдвиг пропорционален касательному («скальзывающему») напряжению:

$$\sigma_{\tau} = \frac{F}{S} = G\vartheta,$$

где  $G$  — *модуль сдвига*, численно равный касательному напряжению, вызывающему относительный сдвиг, равный единице. Он связан с модулем Юнга  $E$  (п. 6°) и коэффициентом Пуассона  $\mu$  (п. 7°) соотношением

$$G = \frac{E}{2} (1 + \mu)^{-1}.$$

13° Удельная (рассчитанная на единицу объема) потенциальная энергия деформированного тела при сдвиге равна

$$w_{\sigma} = \frac{\sigma_{\tau}^2}{2G}.$$

14° *Кручением* называется деформация образца с одним закрепленным концом под действием пары сил, плоскость которой перпендикулярна к оси образца. Момент  $M_{\text{кр}}$  этой пары называется *крутящим моментом*. Кручение состоит в относительном повороте параллельных друг другу сечений, проведенных перпендикулярно к оси образца. В случае кручения круглого цилиндрического тела сечения, перпендикулярные к его оси, вращаются вокруг оси тела, сохраняя свою форму и оставаясь параллельными друг другу. Если  $\varphi$  — угол поворота,  $z$  — измеренное по оси образца расстояние от закрепленного конца, то разность углов поворота двух бесконечно близких сечений (удаленных на  $dz$  друг от друга) равна

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dz} dz = \vartheta' dz,$$

где  $\vartheta' = \frac{d\varphi}{dz}$  — *относительный угол кручения*; этот угол является мерой деформации. Полный поворот данного сечения пропорционален его расстоянию от начала координат:

$$\varphi = \vartheta' z.$$

15° Закон Гука для кручения:

$$\vartheta' = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_p},$$

где  $M_{\text{кр}}$  — *крутящий момент*,  $G$  — *модуль сдвига*,



$J_p$  — полярный момент инерции сечения. Для кругового сечения радиуса  $R$   $J_p = \pi R^4/2$ .

Угол поворота между крайними сечениями образца длины  $L$ :

$$\varphi = \frac{M_K L}{G J_p}, \quad \text{или} \quad M_K = \frac{G J_p}{L} \varphi.$$

Момент, закручивающий на угол  $\varphi$  однородный круглый стержень, имеющий длину  $L$  и радиус  $R$ :

$$M_K = \frac{\pi G}{2} \frac{R^4}{L} \varphi.$$

16° Удельная (на единицу объема) потенциальная энергия деформированного круглого цилиндра:

$$w_K = \frac{M_K^2 r^2}{2G J_p^2},$$

где  $r$  — расстояние от оси цилиндра.

17° Если к нижнему концу укрепленной цилиндрической проволоки прикреплено тело с моментом инерции  $J$  относительно оси проволоки, то дифференциальное уравнение *крутильных колебаний* (стр. 116), возникающих при кручении, имеет вид

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{G J_p}{L} \varphi.$$

Решение его позволяет вычислить период крутильных колебаний.

## ГЛАВА 10

### АМОРФНЫЕ ВЕЩЕСТВА

#### 1. Общие свойства и строение аморфных веществ

1° *Аморфными* называются вещества, не обладающие в конденсированном состоянии кристаллическим строением, но обладающие, в отличие от жидкостей, упругостью формы (модуль сдвига (стр. 285) не равен нулю).

В аморфном состоянии могут находиться, например, обычные (неорганические) стекла, сера, селен, глицерин и большинство высокомолекулярных соединений (стр. 291).

2° Аморфные вещества при определенных условиях *стеклуются*, т. е. переходят от свойств и закономерностей

жидкого состояния к свойствам и закономерностям твердого состояния.

3° Переход аморфного вещества из жидкого состояния в твердое при изменении температуры или давления называется *структурным стеклованием*. При таком переходе меняются объем, теплотемпература (стр. 155), а также механические, электрические и другие свойства веществ.

4° В жидкости каждой данной температуре соответствует своя равновесная молекулярная структура.

При изменении температуры структура жидкости перестраивается и стремится к равновесной при новой температуре. Скорость перестройки определяется временем релаксации  $\bar{\tau}$  (стр. 254). При высоких температурах  $\bar{\tau}$  мало и структура жидкости практически не отличается от равновесной. Изменение свойств (например, объема) связано с изменением взаимного расположения частиц и средних расстояний между ними (область  $AA'$  на рис. П.10.1). При охлаждении вещества с некоторой конечной скоростью  $\bar{\tau}$  увеличивается и изменение структуры начинает отставать от изменения температуры, и структура перестает быть равновесной. Температура  $T_2$  (на рис. П.10.1) является верхней границей области стеклования. Ниже некоторой температуры время релаксации становится настолько большим, что изменение структуры прекращается вовсе. Эта температура  $T_1$  является нижней границей области стеклования. Ниже  $T_1$  вещество находится в твердом состоянии ( $CB$  на рис. П.10.1). Аморфное вещество в твердом состоянии называется *застеклованным веществом* или, короче, *стеклом*.

5° Стеклование и *размягчение* (переход из твердого состояния в жидкое при повышении температуры) совершаются в довольно широкой температурной области — до нескольких десятков градусов. Однако условно переход характеризуют некоторой одной температурой, называемой соответственно *температурой стеклования*  $T_g$

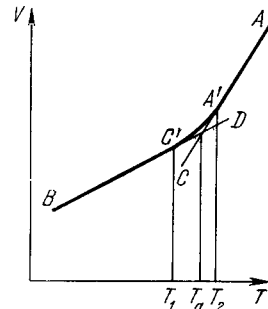


Рис. П.10.1.

или температурой размягчения  $T_g$ , произвольно выбранной в интервале перехода. При исследовании объемных изменений эти температуры определяются обычно по пересечению прямолинейных отрезков ( $BD$  и  $CA$  на рис. II.10.1), при исследовании изменений их теплоемкости — по точке перегиба кривой  $C_p - T$  и т. д.

6° При охлаждении аморфного вещества его свойства зависят только от температуры и скорости охлаждения. Скорость охлаждения  $w$  определяет положение области стеклования на шкале температур (чем больше  $w$ , тем выше  $T_g$ ).

7° При нагревании твердого аморфного вещества характер изменения его свойств в области размягчения зависит от его тепловой предыстории (тепловая обработка несколько влияет на свойства образца в твердом состоянии, но главным образом она проявляется в области размягчения). При нагревании свойства образца зависят не только от скорости нагревания, но и от структуры, зафиксированной в образце, т. е. от скорости предварительного охлаждения, ибо ею определяется замороженная структура.

Чем больше фиксированная структура отличается от равновесной (при данной температуре), тем более «аномально» изменение свойств в области размягчения. Если скорость нагревания больше скорости предшествующего охлаждения вещества, то область размягчения лежит выше области стеклования. В области размягчения образец обладает более плотной структурой, чем структура, равновесная при данной температуре;

релаксация структуры приводит к менее плотной упаковке частиц, т. е. к резкому увеличению объема при размягчении (рис. II.10.2).

8° При выдерживании вещества в неравновесном состоянии при достаточно высоких температурах его структура с течением времени будет приближаться к равновесной (релаксация). Скорость этого процесса резко увеличивается с повышением температуры; для

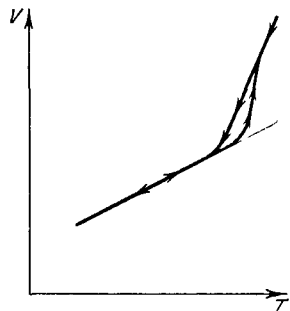


Рис. II.10.2.

структур, соответствующих более высоким температурам, чем температура отжига, скорость приближения к равновесию больше, чем для структур, соответствующих температурам ниже температуры отжига.

9° При стекловании (или размягчении) коэффициенты теплового расширения и теплоемкость резко меняются, что делает стеклование похожим на фазовый переход второго рода (стр. 198). Однако принципиальное отличие структурного стеклования от фазового перехода заключается в следующем.

а) При фазовом переходе происходит переход от менее упорядоченной структуры к более упорядоченной; переход же жидкости в стекло не связан с изменением степени упорядочения структуры.

б) При фазовом переходе происходит переход от термодинамически равновесной структуры к равновесной же. При стекловании происходит переход от равновесной структуры (жидкость) к неравновесной (стекло).

в) При больших скоростях охлаждения температура начала фазового перехода первого рода может зависеть от скорости (может наблюдаться переохлаждение). При этом с увеличением скорости степень переохлаждения увеличивается, температура начала перехода понижается. Температура же стеклования с увеличением скорости охлаждения повышается, что указывает на *кинетическую*, а не *термодинамическую природу* этого перехода.

10° На рис. II.10.3 кривая  $acc''$  схематически изображает изменение объема жидкости при кристаллизации. При температурах ниже  $T_{\text{крист}}$  минимумом свободной энергии (стр. 181) обладает кристалл. Кристаллическая структура при  $T < T_{\text{крист}}$  является термодинамически равновесной (стр. 197). Если жидкость дается переохлаждать, то при  $T < T_{\text{крист}}$  вещество находится в состоянии метастабильного равновесия (стр. 197) (отрезок  $ca$ ). Переохлаждать жидкость удается в сравнительно небольшом

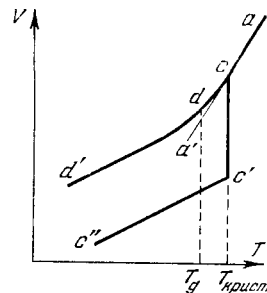


Рис. II.10.3.

температурном интервале (отрезок  $cd$ ), так как для сохранения метастабильного равновесия необходимо очень медленное охлаждение. Ниже этого интервала вещество находится в неравновесном стеклообразном состоянии (отрезок  $dd'$ ). Отсюда видно, что переохлажденная жидкость и стекло не одно и то же. Состояние переохлажденной жидкости является предельным, «равновесным» для стекла.

## 2. Вязко-упругие свойства аморфных веществ

1° В области стеклования особенно четко проявляются вязко-упругие свойства аморфных веществ, т. е. наличие одновременно и модуля сдвига  $G$  и коэффициента внутреннего трения (динамической вязкости)  $\eta$  (стр. 211). Качественно связь между касательным напряжением  $\sigma_\tau$  (стр. 285) и сдвигом  $\theta$  описывается уравнением Максвелла:

$$\frac{d\sigma_\tau}{dt} + \frac{G}{\eta} \sigma_\tau = G \frac{d\theta}{dt}.$$

Аналогичное уравнение можно написать и для одноосного растяжения (стр. 282), если заменить модуль сдвига на модуль Юнга. (Уравнение Максвелла, вообще говоря, неприменимо для высокополимеров. О вязко-упругости полимеров см. стр. 307.)

2° Решение уравнения Максвелла при условии, что до момента  $t = 0$  тело было не деформировано, имеет вид

$$\sigma_\tau(t) = G\theta(t) - \frac{G}{\tau_M} \int_0^t e^{-\frac{u-t}{\tau_M}} \theta(u) du,$$

где  $\tau_M = \eta/G$  называется максвелловским временем релаксации. Смысл этого названия выявляется, если проследить за изменением  $\sigma_\tau$  при неизменной после некоторого момента  $t'$  деформации:

$$\sigma_\tau(t) = \sigma_\tau(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_M}} \quad (t \geq t').$$

Следовательно,  $\tau_M$  — это время, характеризующее релаксацию напряжений.

3° Если происходит периодическая деформация  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ , то

$$\sigma_\tau(t) = \frac{\eta\omega\theta_0}{\sqrt{1+\tau_M^2\omega^2}} \sin(\omega t + \delta),$$

где сдвиг фазы  $\delta = \text{arccotg } \omega\tau_M$ . При высоких частотах, таких, что  $\omega \gg \tau_M^{-1}$ ,

$$\sigma_\tau(t) = G\theta(t),$$

т. е. при высоких частотах выполняется закон Гука. При малых частотах  $\omega \ll \tau_M^{-1}$

$$\sigma_\tau = \eta \frac{d\theta}{dt},$$

что представляет собой уравнение Ньютона для вязкости (стр. 210). Таким образом, при высоких частотах вязко-упругие тела ведут себя, как твердые, при низких — как обычные вязкие жидкости.

4° Внутреннее трение приводит к диссипации механической энергии (стр. 68). В случае периодического нагружения вязко-упругого (максвелловского) тела диссипация энергии в единице объема за период равна

$$\pi\eta\theta_0^2\omega/(1+\tau_M^2\omega^2).$$

Эта величина достигает максимума при  $\omega = \tau_M^{-1}$ . Иногда температуру, при которой наблюдается максимум диссипации (максимум механических потерь), называют также температурой стеклования. Однако нужно иметь в виду отличие стеклования по отношению к переменному внешнему воздействию от структурного стеклования (стр. 287), так как первое не связано с изменением структуры тела.

## ГЛАВА 11 ПОЛИМЕРЫ

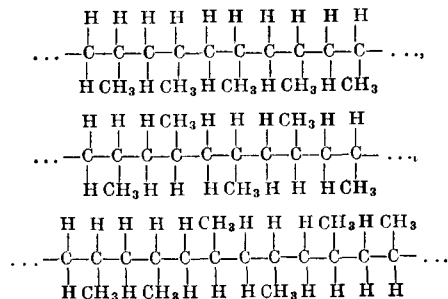
### 1. Общие свойства и строение полимеров

1° Полимерами называют вещества, молекулы которых построены из большого числа повторяющихся групп — *мономерных единиц* (группы, находящиеся на концах молекулы, — *концевые группы* — по своему строению несколько отличны от основных мономерных единиц). Число мономерных единиц в молекуле называется *степенью полимеризации*.

2° Полимеры разделяются на *линейные* и *трехмерные*. Линейными полимерами называются вещества, построенные из линейных молекул, т. е. таких молекул, в которых каждая мономерная единица, за исключением концевых групп, соединена только с двумя соседними моно-



вытянута в линию, то боковые группы будут располагаться либо по одну сторону цепи, либо регулярно чередоваться, либо чередоваться беспорядочно (соответственно *изотактический*, *синдиотактический* и *атактический* полимеры). Ниже приведены структурные формулы изо-, синдио- и атактического полипропилена:



8° В отличие от низкомолекулярных веществ, полимеры не имеют определенного молекулярного веса. Они представляют собой смесь молекул различного веса, или, иначе, различной степени полимеризации. Фракционированием можно разделить вещество на фракции, содержащие молекулы примерно одинакового веса. Распределение по молекулярным весам в полимере дается весовыми концентрациями фракций  $g_i$  или же величинами  $N_i$  — числами молекул в  $i$ -й фракции.

9° Существует несколько определений средних молекулярных весов полимеров. Наиболее употребительны *среднечисленный молекулярный вес*:

$$\bar{\mu}_N = \frac{\sum_i N_i \mu_i}{\sum_i N_i} = \frac{1}{\sum_i g_i / \mu_i}$$

где  $\mu_i$  — молекулярный вес  $i$ -й фракции, а суммирование проводится по всем фракциям; *средневесовой*:

$$\bar{\mu}_w = \frac{\sum_i N_i \mu_i^2}{\sum_i N_i \mu_i}$$

и *средневязкостный* (стр. 304). Величина  $\bar{\mu}_w$  всегда больше  $\bar{\mu}_N$ . Разность между ними характеризует ширину распределения по молекулярным весам, или, иначе, *полидисперсность* полимера.

10° В полимерных молекулах, содержащих в главной цепи простые валентные связи, например единичные С — С-связи, вокруг таких связей осуществляется *внутреннее вращение*, заторможенное в той или иной степени. В результате этого полимерная молекула, имеющая большое число таких связей, обладает громадным количеством различных *конфигураций* (*конформаций*). В этом проявляется гибкость полимерной цепи, содержащей единичные связи. Вращение вокруг двойных связей заторможено настолько сильно, что возможны только малые крутильные колебания (стр. 116). Малые колебания испытывают также длины валентных связей между атомами и углы между валентными связями — валентные углы. По сравнению с большой амплитудой вращения вокруг простых связей этими малыми колебаниями пренебрегают и полимерную цепь считают состоящей из жестких элементов — *звеньев*, которые могут вращаться друг относительно друга по конусам валентных углов (рис. II.11.1). Например, в полиэтилене звеном является связь С—С, цепь полиизопрена состоит из двух чередующихся звеньев: связи С—С и группы С=C—С—С.

11° Конформации полимерной цепи определяются набором углов внутреннего вращения  $\varphi_i$  ( $i$  — номер звена), определяющих поворот относительно некоторого положения отсчета. Обычно за начало отсчета принимается *трансконформация*, при которой звенья  $i-2$ ,  $i-1$ ,  $i$  лежат в одной плоскости и  $i$ -е звено параллельно  $i-2$ -му (рис. II.11.1).

12° Различным значениям  $\varphi_i$  соответствует различная потенциальная энергия внутреннего вращения. Конформации, отвечающие минимуму потенциальной энергии (устойчивые конформации), называются *поворотными изомерами*. Среди многих возможных наборов поворотных изомеров есть энергетически более устойчивые,

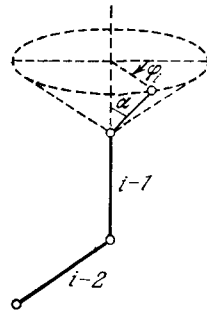


Рис. II.11.1.

отвечающие наиболее глубоким минимумам потенциальной энергии. В стереорегулярных полимерах, изо- или синдиотактических (стр. 294), наиболее устойчивые конформации — это конформации, в которых атомы главной цепи лежат на винтовой линии (спиральная конформация). Частным случаем спиральной конформации является плоский зигзаг (трансконформация).

13° Сложность молекулярного строения полимеров обуславливает многообразие надмолекулярных структур в полимерах: от полностью аморфной структуры до вполне упорядоченной — кристаллической. Поэтому не всегда можно сказать, в каком состоянии: жидком или твердом, кристаллическом или аморфном — находится полимер.

14° При температурах выше температуры стеклования (стр. 287) или плавления (стр. 303) происходят перескоки между поворотными изомерами, в результате чего происходит непрерывное изменение конформации цепи. Движения достаточно удаленных друг от друга участков цепи можно считать независимыми. Такие участки называются кинетическими сегментами или просто сегментами, и тепловое движение, при котором происходит изменение конформаций всей цепи, называется сегментным. Кроме сегментного в полимерах осуществляются еще многообразные мелкомасштабные движения, в основном типа крутильных колебаний (стр. 116) боковых групп или малых участков основной цепи. Эти мелкомасштабные (групповые) движения могут происходить и при температурах ниже температуры стеклования или плавления.

## 2. Конформационная статистика полимерных цепей

1° Полимерная цепь обладает большим числом степеней свободы; поэтому наблюдающиеся на опыте величины, характеризующие молекулу, являются статистическими средними (стр. 219) по всем возможным конформациям. Вычисление этих средних производится методами конформационной статистики полимерных цепей.

2° Внутримолекулярные взаимодействия разделяются на два класса. К первому классу относятся взаимодействия, которые приводят к заторможенности внутреннего вращения: это взаимодействия между близкими звеньями, называемые взаимодействиями ближнего порядка. Ко второму классу относятся взаимодействия между

звеньями, которые в среднем разделены значительным расстоянием, но могут случайно сблизиться в процессе теплового движения и взаимодействовать при этом, — взаимодействия дальнего порядка. Наиболее существенная черта последних состоит в том, что объем, занятый звеном, недоступен для других звеньев. Поэтому взаимодействия дальнего порядка называют еще эффектами исключенного объема (объемными эффектами).

3° В конформационной статистике рассчитываются, в частности, средний квадрат расстояния между концами цепи  $\bar{h}^2$  и средний квадрат радиуса инерции  $\bar{R}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{r}_i^2$ , где  $\bar{r}_i^2$  — средний квадрат расстояния  $i$ -го звена от центра инерции молекулы и  $N$  — число звеньев в молекуле. Величины  $\bar{h}^2$  и  $\bar{R}^2$  характеризуют гибкость полимерной цепи. Наряду с вычислением средних величин возникает задача вычисления функций распределения, например функции распределения для расстояний между концами цепи  $w(h)$ , т. е. вероятности  $w(h) dh$  того, что расстояние между концами цепи лежит в интервале между  $h$  и  $h+dh$ .

4° Влияние растворителя может привести к тому, что при некоторой температуре взаимодействия дальнего порядка можно пренебречь (подробнее — стр. 298–300). В этих условиях следует учитывать только взаимодействия ближнего порядка.

5° Как и в других задачах статистической физики, реальная полимерная молекула замещается моделью, более или менее точно отражающей ее свойства. Наиболее простой и грубой является модель свободно сочлененных сегментов, согласно которой полимерная цепь состоит из  $z$  жестких сегментов длины  $a$ , направления которых в пространстве совершенно независимы. Сегмент всегда больше звена, и его длина является параметром, характеризующим гибкость цепи. В этой модели

$$\bar{h}^2 = za^2, \quad \bar{R}^2 = \bar{h}^2/6.$$

6° Более точные модели формулируются в виде предположений о характере потенциальной энергии цепи  $W_{\text{п}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , где  $\varphi_i$  — углы внутреннего вращения (стр. 295). Пренебрежение заторможенностью внутреннего вращения означает  $W_{\text{п}} = 0$ . Принимая для простоты, что все звенья одинаковы и имеют длину  $l$ , а валентные углы между ними равны  $\pi - \alpha$ , при выполнении условий

$N \gg 1$  и  $W_{II} = 0$  находят:

$$\bar{h}^2 = Nl^2 \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

7° Учет заторможенности внутреннего вращения, или, другими словами, взаимодействий ближнего порядка, приводит к появлению добавочного множителя  $\sigma^2 > 1$ , т. е.

$$\bar{h}^2 = Nl^2 \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \sigma^2.$$

Множитель  $\sigma$  зависит от строения конкретной макромолекулы, в частности, может быть выражен через разности энергий поворотных изомеров.

8° Распределение расстояний между концами цепи (стр. 297) с учетом только взаимодействий ближнего порядка для *сильно свернутых цепей*, т. е. для цепей, у которых  $h$  много меньше своего максимального значения, соответствующего полностью вытянутой цепи (трансконформации), совпадает с гауссовым распределением:

$$w(h) dh = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{6}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3h^2}{2h^2}\right) h^2 dh.$$

Распределение, справедливое во всей области изменения  $h$ , получено только для модели свободно сочлененных сегментов. При  $z \gg 1$  оно имеет вид

$$\ln \left[ \frac{w(h)}{4\pi h^2} \right] = z \left[ \ln \frac{sh L^{-1}(t)}{L^{-1}(t)} - t L^{-1}(t) \right],$$

где  $t = h/za$  — относительное растяжение цепи,  $L^{-1}(t)$  — обратная функция Ланжевена (стр. 365). Разложение в ряд по  $t$  приводит к соотношению

$$\ln \left[ \frac{w(h)}{4\pi h^2} \right] = -z \left[ \frac{3}{2} t^2 + \frac{9}{20} t^4 + \frac{99}{350} t^6 + \dots \right],$$

где первый член соответствует гауссову распределению. Эти формулы достаточно хорошо описывают распределение для реальной полимерной цепи.

9° Объемные эффекты приводят к *раздуванию молекулярного клубка* — увеличению средних расстояний между концами цепи. Раздувание приближенно описывается параметром  $a$ , показывающим, во сколько раз увеличились средние линейные размеры клубка по сравнению с размерами без учета объемных эффектов. Приближенная термодинамическая теория дает

$$a^5 - a^3 = 2C_{\mu} \Psi_1 \left(1 - \frac{\Theta}{T}\right) \sqrt{\mu}.$$

Здесь  $\Psi_1$  — параметр, характеризующий изменение энтропии при смещении сегментов цепи и молекул растворителя,  $\Theta$  — *температура Флори*, характеризующая энергию взаимодействия сегментов по сравнению с энергией взаимодействия сегментов с растворителем,  $\mu$  — молекулярный вес цепи,

$$C_{\mu} = \frac{27}{2^{3/2} \pi^{3/2}} \frac{\bar{v}^2}{N_A v_1} \left(\frac{\bar{h}_0^2}{\mu}\right)^{-3/2},$$

$\bar{v}$  — удельный объем полимера,  $v_1$  — молярный объем растворителя,  $N_A$  — число Авогадро,  $\bar{h}_0^2$  — средний квадрат расстояния между концами цепи в отсутствие взаимодействий дальнего порядка;  $\bar{h}_0^2/\mu$  не зависит от  $\mu$ .

10° При температуре  $\Theta$  (в  $\Theta$ -точке)  $\alpha = 1$  и объемные эффекты не влияют на размеры цепи. В хороших растворителях  $\Theta$  лежит ниже температуры замерзания растворителя.  $\Theta$ -точка может быть достигнута только в плохих растворителях. Температура  $T_c$ , при которой полимер выпадает в осадок, связана с температурой Флори соотношением

$$\frac{1}{T_c} = \frac{1}{\Theta} \left(1 + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right),$$

где  $b$  — постоянная. Следовательно,  $\Theta$ -точка есть температура осаждения полимера с бесконечно большим молекулярным весом.

11° Формула п. 9° количественно плохо согласуется с экспериментом ввиду грубости предположений, сделанных при ее выводе. Точную теорию удается развить только в области очень малых объемных эффектов. Она основана на так называемой *модели жемчужного ожерелья*, согласно которой цепь состоит из свободно сочлененных сегментов, взаимодействующих между собой центральными силами. Для наглядности можно представить, что цепь «жемчужного ожерелья» состоит из бусинок, надетых на стерженьки (бесконечно тонкие), свободно сочлененные между собой. В теориях, основанных на модели «жемчужного ожерелья», применяется разложение по малому параметру:

$$\xi = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{z} v_0}{a^3},$$

где  $z$  — число сегментов,  $a$  — длина сегмента (стр. 297) и

$$v_0 = 4\pi \int_0^\infty (1 - e^{-W_{II}(r_{ij})/kT}) dr_{ij}$$

— эффективный исключенный объем; здесь  $r_{ij}$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м сегментами цепи и  $W_{II}(r_{ij})$  — потенциальная энергия взаимодействия сегментов, избыточная по сравнению с энергией взаимодействия между сегментами и молекулами растворителя. Если сегменты взаимодействуют, как твердые шарики,  $W_{II}(r_{ij}) = \infty$  при  $r_{ij} \leq d$ ,  $W_{II}(r_{ij}) = 0$  при  $r_{ij} > d$ , то  $v_0 = \frac{4}{3} \pi d^3$  равен объему шарика.

12° Если исключенный объем настолько мал, что  $\xi \ll 1$ , то справедливы соотношения:

$$\bar{h}^2 = \bar{h}_0^2 \left( 1 + \frac{4}{3} \xi - 2,08 \xi^2 + \dots \right),$$

$$\bar{R}^2 = \bar{R}_0^2 \left( 1 + \frac{134}{105} \xi - \dots \right).$$

Здесь индекс «нуль» отмечает величины, вычисленные без учета объемных эффектов.

13° На малых расстояниях сегменты отталкиваются и  $W_{II} > 0$ ; на больших расстояниях отталкивание сменяется притяжением и  $W_{II} < 0$ . В согласии с этим  $v_0$  распадается и на две части, различным образом зависящие от температуры: при некоторой температуре эти части могут компенсироваться, и тогда  $v_0 = 0$ . Таким образом,  $\Theta$ -точка соответствует температуре, при которой объемные эффекты компенсируются ( $v_0 = 0$ ). Поэтому соотношения п. 12° справедливы только вблизи  $\Theta$ -точки.

### 3. Разбавленные растворы полимеров

1° Закон Вант-Гоффа (стр. 263) для растворов полимеров имеет вид

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{p}{g} = \frac{RT}{\mu_N},$$

где  $\mu_N$  — среднечисленный молекулярный вес (стр. 294). Измерения осмотического давления  $p$  при малых концентрациях  $g$  дают возможность определить  $\mu_N$ .

2° Вязкость полимерных растворов характеризуется следующими величинами: *относительной вязкостью*, или *вязкостным отношением*,  $\eta_{\text{отн}} = \eta/\eta_0$ , где  $\eta$  и  $\eta_0$  — коэф-

фициенты вязкости (стр. 211) раствора и чистого растворителя соответственно; *удельной вязкостью*  $\eta_{\text{уд}} = \eta_{\text{отн}} - 1$ ; *приведенной вязкостью* (вязкостным числом)  $\eta_{\text{пр}} = \eta_{\text{уд}}/g$ , где  $g$  — концентрация раствора; *логарифмической вязкостью*  $\{\eta\} = \ln \eta_{\text{отн}} - \ln g$ ; *характеристической вязкостью* (предельным числом вязкости)  $[\eta] = \lim_{g \rightarrow 0} \eta_{\text{пр}} = \lim_{g \rightarrow 0} \{\eta\}$ .

3° Для характеристической вязкости существует эмпирическая формула

$$[\eta] = k \mu_w^a,$$

где  $k$ ,  $a$  — постоянные, характеризующие пару растворитель — полимер,

$$\bar{\mu}_w = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} g_i \mu_i^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} N_i \mu_i^{1+a} / \sum_{i=1}^{\infty} N_i \mu_i \right]^{1/a}$$

— средневязкостный молекулярный вес (стр. 295).  $\bar{\mu}_w$  отличается от средневесового молекулярного веса  $\bar{\mu}_n$  (стр. 294) не более чем на 20%. При  $a = 1$   $\bar{\mu}_w = \bar{\mu}_n$ .

4° Характеристическая вязкость может быть вычислена теоретически на основании модели «жемчужного ожерелья» (стр. 299). Достаточно точным для длинных молекул является предположение, что растворитель, находящийся внутри молекулярного клубка, полностью им увлекается. В этом случае для моодисперсного полимера (стр. 295)

$$[\eta] = \Phi (\bar{h}^2)^{3/2} / \mu_w,$$

где  $\Phi$  — постоянная, равная  $\sim 2,8 \cdot 10^{23}$  вблизи  $\Theta$ -точки и убывающая до  $\sim 2,0 \cdot 10^{23}$  в хороших растворителях. Для разветвленных макромолекул (стр. 293)  $\Phi$  больше, чем для линейных.

5° Коэффициент диффузии (стр. 212) полимерных молекул в разбавленных растворах может быть вычислен при помощи соотношения Эйнштейна (стр. 243–244). При этом для полностью увлекаемого растворителя коэффициент диффузии

$$D = kT/P(\bar{h}^2)^{1/2} \eta_0,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана (стр. 151),  $T$  — абсолютная температура и  $P$  — численный множитель, зависящий от строения цепи. Для линейных гибких макромолекул вблизи  $\Theta$ -температуры (стр. 299)  $P = 5,20$ .



6° При достаточно больших моле улярных весах размеры полимерной цепи сравнимы по порядку величины с длиной волны света  $\lambda$ . При этом рассеяние света (стр. 684) полимерными растворами асимметрично. Мерой асимметрии рассеяния служит функция  $P(\theta) = I(\theta)/I(0)$ , где  $I(\theta)$  — интенсивность света, рассеянного под углом  $\theta$  к направлению падающего пучка.

При малых углах  $\theta$  в разбавленных растворах справедливо соотношение

$$P(\theta) = 1 - \frac{x^2}{3},$$

где  $x^2 = \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 \overline{R^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ,  $\overline{R^2}$  — средний квадрат радиуса инерции (стр. 297) цепи. По известным значениям  $P(\theta)$  при малых углах  $\theta$  можно определить  $\overline{R^2}$ . Если распределение расстояний между двумя любыми атомами цепи описывать гауссовой функцией, что справедливо для достаточно длинных и гибких цепей в  $\Theta$ -точке (стр. 299), то

$$P(\theta) = \frac{2}{x^2} (e^{-x} - 1 + x).$$

#### 4. Кристалличность полимеров

1° Когда температура кристаллизации  $T_{\text{крист}}$  (стр. 278) полимера выше температуры его стеклования (стр. 287), полимеры могут находиться в кристаллическом состоянии. При прочих равных условиях  $T_{\text{крист}}$  выше у тех полимеров, которые имеют регулярное строение. Легко кристаллизуются полимеры, у которых боковые группы имеют одинаковый химический состав или по крайней мере одинаковые размеры; плохо кристаллизуются сополимеры (стр. 293).  $T_{\text{крист}}$  для изо- и синдиотактических полимеров (стр. 294) обычно выше, чем  $T_{\text{крист}}$  атактических полимеров (стр. 294). Полимеры с жесткими цепями кристаллизуются легче полимеров с гибкими цепями.

2° Существуют три типа кристаллических полимеров:

а) Поликристаллы, у которых имеется дальний порядок в расположении звеньев. Размеры кристаллитов (стр. 266) обычно порядка  $10^2 \text{ \AA}$ , т. е. меньше, чем размеры цепей; под микроскопом их не видно.

б) Глобулярные кристаллы с дальним порядком в расположении молекул, имеющих вид плотного клубка — *глобулы*, в котором звенья расположены беспоря-

дочно. Глобулярные кристаллы представляют собой частный случай молекулярных кристаллов (стр. 268).

в) Монокристаллы с дальним порядком в расположении звеньев. Полимерные монокристаллы обычно видны под микроскопом.

Подавляющее большинство кристаллических полимеров принадлежит к первому типу.

3° Связь звеньев в полимерной цепи препятствует установлению порядка в расположении звеньев, принадлежащих разным молекулам, поэтому полимерные кристаллы содержат большое число дефектов. На рентгенограммах полимеров первого типа, кроме колец, характерных для кристаллов, имеется также размытое гало, характерное для аморфного состояния. Это позволяет говорить о кристаллической и аморфной «фазах» в поликристаллических полимерах и ввести *степень кристалличности*  $\lambda$  как отношение веса кристаллической «фазы» к весу всего образца. Величина  $\lambda$  на самом деле указывает на степень дефектности кристаллов.

Величина  $\lambda$  может быть определена рентгенографически, из измерений плотности, показателя преломления, удельной теплоты плавления и некоторыми другими методами. Условность в определении  $\lambda$  приводит к тому, что значения степени кристалличности, определенные различными методами, не всегда совпадают.

4° Высокая вязкость полимеров обуславливает большую длительность процесса кристаллизации, занимающего в некоторых случаях много суток. Поэтому поликристаллические полимеры в большинстве случаев термодинамически неравновесны (стр. 146). Неравновесность проявляется, в частности, в том, что температура плавления  $T_{\text{пл}}$  практически всегда выше  $T_{\text{крист}}$  и процесс плавления занимает некоторый температурный интервал. Наличие интервала температур плавления связано не только с неравновесностью, но и с дефектностью кристаллов. Кристаллиты меньших размеров и более дефектные плавятся при более низких температурах. Равновесное плавление поликристаллических полимеров — это фазовый переход первого рода (стр. 198).

Зависимость  $T_{\text{пл}}$  от молекулярного веса  $\mu$  имеет вид

$$\frac{1}{T_{\text{пл}}} - \frac{1}{T_{\text{пл}}^0} = \frac{R}{r_{\text{пл}} \mu},$$

где  $T_{\text{пл}}^0$  — температура плавления идеального кристалла, образованного молекулами с  $\mu = \infty$ ,  $R$  — универсальная

газовая постоянная (стр. 151),  $r_{пл}$  — удельная теплота плавления.

5° Температура кристаллизации и, следовательно, способность к кристаллизации полимеров повышается при их растяжении. Некоторые полимеры могут кристаллизоваться только при растяжении. Растяжение приводит к ориентации полимерных цепей (стр. 292), облегчающей упаковку звеньев. Кристаллиты полимеров, закристаллизованных при растяжении, ориентированы вдоль направления растяжения.

### 5. Механические свойства полимеров

1° Ценность полимерных материалов для различных приложений определяется в первую очередь их необычайными механическими свойствами: способностью к большим деформациям и большой чувствительностью к изменениям температуры и частоты внешнего воздействия.

2° Деформация полимеров представляет собой сложный процесс, который можно разделить на три составляющих: а) *упругую деформацию*, аналогично упругим деформациям обычных твердых тел связанную с изменением межатомных и межмолекулярных расстояний; б) *высокоэластическую деформацию*, связанную с перемещением звеньев (стр. 295) молекул без относительного перемещения молекул как целого; при этом происходит изменение формы молекул: например, при растяжении молекулярные клубки раскручиваются; в) *пластическую деформацию* (течение), связанную с относительным перемещением молекул как целого.

Высокоэластичность присуща только полимерам. Для ее развития необходимо, чтобы цепи были достаточно длинными. В отличие от упругой деформации, которая составляет не более нескольких процентов, при высокоэластической деформации размеры тела меняются на сотни процентов. В отличие от пластической деформации, высокоэластическая деформация обратима.

3° Все три типа деформации резин имеют свое время релаксации. Упругая деформация практически мгновенно следует за приложенной силой. Времена релаксации сильно зависят от температуры. У застеклованных полимеров (стр. 287) времена релаксации высокоэластической и пластической деформаций настолько велики, что они вовсе не наблюдаются, и стеклообразные полимеры де-

формируются, как обычные твердые тела. Кристалличность полимеров также затрудняет развитие высокоэластической и пластической деформаций.

4° В сеточных полимерах (стр. 293) молекулы шиты друг с другом, что препятствует пластической деформации. В принципе можно наблюдать термодинамически равновесную (стр. 148) высокоэластическую деформацию сеточных полимеров. Однако это очень трудно, так как времена релаксации высокоэластической деформации могут быть весьма большими. Кроме того, всегда имеют место разрывы поперечных швов и разрывы цепей, которые приводят к возникновению необратимой пластической деформации.

5° Существенные черты высокоэластичности можно выяснить на примере одноосного растяжения (стр. 282). При этой деформации куб со стороной  $l_0$  превращается в параллелепипед длиной  $l$ .

Высокоэластические материалы обладают тем свойством, что при деформациях, в которых не происходит изменения температуры или давления, объем меняется ничтожно мало. Это свойство называется *несжимаемостью*. Оно аналогично соответствующему свойству жидкостей (стр. 253). Следовательно, с хорошей точностью поперечные размеры параллелепипеда будут равны  $\sqrt{l_0^3/l}$ .

Так как при высокоэластической деформации поперечное сечение сильно меняется, то приходится отличать истинное напряжение  $\sigma$  (стр. 282), численно равное упругой силе, отнесенной к единице площади поперечного сечения деформированного тела, от условного напряжения  $S$ , отнесенного к единице площади недеформированного тела. Для несжимаемых тел истинное и условное напряжения связаны соотношением  $\sigma = Sl/l_0$ .

6° Изменение внутренней энергии  $U$  (стр. 153) при одноосном растяжении определяется соотношением

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{T, \sigma} = F_{упр} - T \left(\frac{\partial F_{упр}}{\partial T}\right)_{l, \sigma},$$

где  $F_{упр}$  — упругая сила и  $(\partial F_{упр}/\partial T)_{l, \sigma}$  означает производную по температуре при постоянных  $l$  и  $\sigma$ . Приведенное соотношение позволяет экспериментально определить изменение внутренней энергии при деформации.

У мягких резин с достаточно гибкими цепями относительное изменение внутренней энергии много меньше

относительного изменения энтропии. Такие резины пападают на идеальный газ, у которого изотермическое изменение объема не сопровождается изменением внутренней энергии (стр. 155). Для идеальных в этом смысле резин упругая сила пропорциональна абсолютной температуре (аналогично давлению идеального газа).

При деформации сеточных полимеров с более жесткими цепями, например сшитого полиэтилена, относительное изменение внутренней энергии сравнимо с относительным изменением энтропии.

7° Статистическая теория равновесной высокоэластической деформации основана на предположении, что при вычислении свободной энергии деформации можно не учитывать взаимодействия между цепями. Теория применима к достаточно редким сеткам, т. е. таким, у которых в недеформированном состоянии цепи представляют собой сильно скрученные клубки.

В области деформаций, далеких от предельной, т. е. таких, при которых цепи почти полностью выпрямлены, распределение расстояний между концами цепей в сетке может быть описано гауссовым распределением (стр. 298). При этом статистическая теория высокоэластичности дает следующую связь между истинным напряжением и удлинением:

$$\sigma = RTQ(l^2/l_0^2 - l_0/l),$$

где  $R$  — газовая постоянная (стр. 151),  $Q$  — постоянная, зависящая от числа поперечных сшивок между цепями ( $Q$  возрастает с увеличением числа сшивок) и от гибкости цепей.

Эта формула качественно правильно описывает растяжение резины в области, где  $l/l_0$  меняется не более чем на 300–400%. При больших растяжениях напряжение растет значительно быстрее, чем это следует из теоретической формулы.

Это расхождение объясняется тем, что в этой области растяжений молекулярные клубки сильно вытянуты и гауссово приближение для функции распределения уже неприменимо. Эта область называется негауссовой областью.

Это расхождение связано как с недостаточной равнопностью наблюдаемых деформаций, так и с грубостью предположений, лежащих в основе теории. Более точно описывает растяжение резин в гауссовой области эмпи-

рическая формула Муни-Ривлина:

$$\sigma = C_1(l^2/l_0^2 - l_0/l) + C_2(l/l_0 - l_0^2/l^2),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — упругие постоянные.  
8° В области малых растяжений,

$$\frac{l-l_0}{l} = \frac{\Delta l}{l_0} \ll 1,$$

формула статической теории высокоэластичности переходит в закон Гука (стр. 282):

$$\sigma = 3RTQ \Delta l/l_0,$$

т. е. модуль Юнга резины равен  $3RTQ$ .

9° Уравнение Максвелла (стр. 290) неприменимо для описания вязко-упругих свойств полимеров, во-первых, потому, что оно приводит к линейной связи между напряжением и деформацией и, следовательно, пригодно только для области малых деформаций, и, во-вторых, потому, что сложность молекулярного и надмолекулярного строения полимеров приводит к необходимости характеризовать их вязко-упругие свойства большим набором времен релаксации. Описание вязко-упругости при больших деформациях представляет собой очень сложную задачу. Относительно просто могут быть охарактеризованы вязко-упругие свойства в области малых деформаций — в области *линейной вязко-упругости*.

10° Связь между напряжением  $\sigma(t)$  и деформацией  $\epsilon(t)$  в общем случае линейно вязко-упругого тела дается соотношением

$$\sigma(t) = E_{\infty}\epsilon(t) - \int_0^{\infty} K(u) \epsilon(t-u) du,$$

где  $E_{\infty}$  называется *мгновенным* или *предельным модулем* и  $K(u)$  — релаксационная функция. При высоких частотах это соотношение переходит в закон Гука:

$$\sigma(t) = E_{\infty}\epsilon(t),$$

что раскрывает смысл  $E_{\infty}$ .

11° Если происходит очень быстрая деформация до значения  $\epsilon_0$ , которое затем поддерживается неизменным, то *релаксация напряжений* при этом описывается формулой

$$\sigma(t) = [E_{\infty} - E(0) + E(t)] \epsilon_0,$$

где

$$E(t) = \int_0^{\infty} K(u) du$$

называется *релаксационным модулем*. Разность  $E_{\infty} - E(0)$  называется *равновесным модулем*.

12° Для сравнения с релаксацией напряжений в максвелловском теле релаксационный модуль записывают в виде

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} \frac{d\tau}{\tau},$$

где  $\tau$  называется временем релаксации, а функция  $H(\tau)$  — *спектром времен релаксации*. Величина  $H(\tau) d \ln \tau$  показывает, какой вклад в релаксацию дают времена релаксации, лежащие в интервале между  $\ln \tau$  и  $\ln \tau + d \ln \tau$ . Величина области, в которой функция  $H(\tau)$  заметно отлична от нуля, называется шириной спектра. Спектры полимеров становятся более широкими при возрастании молекулярного веса.

13° В линейных полимерах при температурах выше температуры стеклования или плавления равновесный модуль обращается в нуль и возможно наблюдение истинного течения, описываемого уравнением Ньютона (стр. 210) с коэффициентом вязкости

$$\eta = \int_0^{\infty} G(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) d\tau,$$

где  $G(u)$  — релаксационный модуль н сдвига и  $H(\tau)$  — соответствующий спектр времен релаксации.

14° Вязкость полимеров сильно зависит от молекулярного веса и от температуры. Для каждого полимера существует некоторый критический молекулярный вес, такой, что при молекулярных весах меньше критического  $\eta$  пропорционально молекулярному весу, а при молекулярных весах больше критического  $\eta$  пропорционально  $\bar{M}_w^{2.4}$ , где  $\bar{M}_w$  — средневесовой молекулярный вес (стр. 294).

Температурная зависимость вязкости полимеров описывается уравнением Вильямса — Ланделла — Ферри (ВЛФ):

$$\lg \frac{\eta(T)}{\eta(T_g)} = - \frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g},$$

где  $\eta(T)$  — коэффициент вязкости при температуре  $T$ ,  $T_g$  — некоторая температура приведения ( $T_g$  выше температуры стеклования  $T_g^0$ ),  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные. Если  $T_g = T_g^0$ , то для большинства аморфных полимеров  $C_1 = 17,78$ ;  $C_2 = 54,6^\circ \text{K}$ .

15° Уравнение ВЛФ для вязкости является следствием общей закономерности, называемой *принципом температурно-временной инвариантности*. Этот принцип означает, что при повышении температуры все времена релаксации умножаются на один и тот же множитель, описываемый уравнением ВЛФ. Принцип температурно-временной инвариантности применим только к аморфным полимерам.

## ОТДЕЛ III

## ОСНОВЫ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

## ГЛАВА I

## ГИДРОАЭРОСТАТИКА

## 1. Введение

1° *Гидроаэромеханикой* называется раздел физики, в котором изучаются законы равновесия и движения жидкостей и газов, а также взаимодействие движущихся жидкостей и газов с омываемыми ими твердыми телами. В гидроаэромеханике отвлекаются от молекулярного строения жидкостей и газов, рассматривая их как *плотную среду*, непрерывно распределенную в пространстве<sup>1)</sup>.

*Гидроаэростатикой* называется отдел гидроаэромеханики, в котором рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил.

*Гидроаэродинамикой* называется отдел гидроаэромеханики, в котором изучаются законы движения жидкостей и газов и их взаимодействия с твердыми телами.

2° Отличительной особенностью жидкостей и газов по сравнению с твердыми телами является их текучесть, т. е. малая сопротивляемость деформации сдвига (стр. 284). При неограниченном уменьшении скорости деформации силы сопротивления жидкости или газа этой деформации стремятся к нулю.

Различие между жидкостью и газом заключается лишь в характере зависимости их плотности от давления, т. е. в практической несжимаемости жидкостей и заметной сжимаемости газов.

3° В гидроаэромеханике для капельных жидкостей и газов обычно пользуются единым термином «жидкость» (несжимаемая или сжимаемая).

<sup>1)</sup> Эта модель неприменима к разреженным газам (стр. 215), которые не могут быть исследованы методами гидроаэродинамики и изучаются в молекулярной физике.

*Несжимаемой жидкостью* называется капельная жидкость или газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче можно пренебречь. *Сжимаемой жидкостью* называется газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче пренебречь нельзя.

*Идеальной жидкостью* называется жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение. *Вязкими жидкостями* называются жидкости, для которых явлением внутреннего трения пренебрегать нельзя.

*Баротропной жидкостью* называют жидкость, плотность которой зависит только от давления.

## 2. Гидроаэростатика

1° Рассмотрение задач гидростатики может быть основано на *принципе отвердевания*: равновесие жидкости не нарушится, если какой-либо элемент ее объема считать отвердевшим, т. е. если его мысленно заменить таким же по объему и форме элементом твердого тела, имеющим ту же плотность, что и рассматриваемая жидкость.

Различают два типа внешних сил, действующих на элемент объема жидкости, — массовые и поверхностные силы.

*Массовыми силами* называются силы, действие которых не зависит от присутствия других частей жидкости, кроме рассматриваемого элемента, а численное значение пропорционально массе этого элемента. Примером массовой силы может служить сила тяжести. Массовая сила равна  $F_0 dV$ , где  $dV$  — объем рассматриваемого элемента жидкости,  $\rho$  — ее плотность,  $F$  — массовая сила, отнесенная к единице массы жидкости и называемая *напряженностью поля массовых сил* (например, для силы тяжести величина  $F$  равна ускорению  $g$  свободного падения).

Массовые силы называют *потенциальными*, если их напряженность  $F$  можно представить в форме

$$F = -\text{grad } \varphi_F = -\nabla \varphi_F,$$

где  $\text{grad } \varphi_F = \frac{\partial \varphi_F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_F}{\partial z} \mathbf{k}$  — градиент скалярной функции  $\varphi_F(x, y, z, t)$ , называемой *потенциалом массовых сил*;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — орты прямоугольной декартовой системы координат;  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  — оператор «набла».

*Поверхностными силами* называются силы, приложенные к элементу жидкости со стороны прилегающих к нему частиц остальной части жидкости. Эти силы действуют на поверхность рассматриваемого элемента. Поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности, на которую она действует, называется *напряжением*. Всякую поверхностную силу можно разложить на нормальную и касательную к поверхности составляющие. Соответственно различают нормальное напряжение, или давление,  $p$  и касательное напряжение  $\tau$ . В состоянии равновесия касательные напряжения в жидкости равны нулю и поверхностные силы представляют собой лишь силы давления, причем давление  $p$  в данной точке жидкости по всем направлениям одинаково, т. е. не зависит от ориентации той поверхности, для которой оно определяется.

2° *Уравнения равновесия жидкости:*

$$F_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

где  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  — проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат вектора  $\mathbf{F}$  результирующей напряженности поля массовых сил, действующих на жидкость. В векторной форме уравнение равновесия имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Уравнения равновесия получаются из уравнений гидродинамики идеальной жидкости (стр. 318) в предположении, что скорость движения жидкости равна нулю.

3° Равновесие жидкости под действием массовых сил возможно только в том случае, если напряженность  $\mathbf{F}$  поля этих сил удовлетворяет соотношению

$$F_x \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) + F_y \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0$$

или, в векторной форме,

$$(\mathbf{F} \text{ rot } \mathbf{F}) = 0,$$

где  $\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$  — ротор, или вихрь, вектора  $\mathbf{F}$ .

Если плотность жидкости  $\rho$  не зависит от координат, то  $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \frac{p}{\rho}$  и равновесие возможно только в потенциальном силовом поле (стр. 65) с потенциалом

$q = - \frac{p}{\rho} + \text{const}$ . Поверхности равного давления совпадают с поверхностями равного потенциала.

4° Равновесие жидкости в однородном поле силы тяжести ( $\mathbf{F} = \mathbf{g} = \text{const}$ ). Если ось  $Oz$  направлена в сторону, противоположную  $\mathbf{g}$ , то  $F_x = F_y = -g$ ,  $F_z = F_y = 0$  и уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{\rho} = -g dz.$$

В общем случае для жидкостей плотность является функцией давления и температуры:  $\rho = \rho(p, T)$ . Если температура жидкости всюду одинакова (условие теплового равновесия) и жидкость несжимаема, то

$$p + \rho g z = p_0,$$

где  $p_0$  — давление на уровне  $z = 0$ . Это соотношение называется *основным уравнением гидростатики для несжимаемой жидкости*. Обычно начало отсчета  $z$  совмещается со свободной поверхностью жидкости, тогда  $p_0$  — внешнее давление на этой поверхности. Разность  $p - p_0$  не зависит от  $p_0$ , т. е. давление, производимое на жидкость внешними силами, передается ею по всем направлениям равномерно (*закон Паскаля*).

Для сжимаемой жидкости, находящейся в тепловом и механическом равновесии, должна быть одинакова по всему объему сумма  $\Phi + gz$ , где  $\Phi$  — изобарно-изотермический потенциал (стр. 181) единицы массы жидкости, а  $gz$  — потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле силы тяжести.

Механическое равновесие жидкости в поле силы тяжести возможно и в случае отсутствия теплового равновесия, если температура жидкости изменяется только вдоль вертикальной оси  $Oz$ . Это равновесие устойчиво, если выполняется следующее неравенство (*условие отсутствия конвекции*):

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0,$$

где  $v$  и  $s$  — удельный объем и энтропия единицы массы жидкости. Для большинства жидкостей  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p > 0$  и условие отсутствия конвекции имеет вид

$$\frac{dT}{dz} > - \frac{gT}{c_p v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p,$$

где  $c_p$  — удельная теплоемкость жидкости в изобарном процессе. Для идеального газа

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}.$$

5° *Закон Архимеда*: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, которая численно равна весу жидкости, вытесненной телом, и приложена в центре тяжести объема погруженной части тела.

## ГЛАВА 2 ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

### 1. Основные понятия

1° *Частицей сплошной среды* называется весьма малый элемент объема среды, размеры которого в то же время во много раз больше межмолекулярных расстояний. Так как последние очень малы (порядка  $10^{-8}$  см для газов, находящихся в нормальных условиях), то частицы жидкости можно приближенно считать точечными.

2° В кинематике жидкостей возможны два различных метода описания движения. Один из них, называемый *методом Лагранжа*, состоит в том, что движение жидкости задается путем указания зависимости от времени  $t$  координат всех ее частиц:

$$\left. \begin{aligned} x &= F_1(a, b, c, t), \\ y &= F_2(a, b, c, t), \\ z &= F_3(a, b, c, t), \end{aligned} \right\}$$

где  $a, b$  и  $c$  — координаты частицы в начальный момент времени  $t = 0$ , служащие для обозначения частицы. Исключая из этих уравнений время, можно получить уравнение траектории частицы. Величины  $a, b, c$  и  $t$  называются *переменными Лагранжа*. Проекция на оси координат векторов скорости  $v$  и ускорения  $w$  частицы равны:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t}, & v_y &= \frac{\partial y}{\partial t}, & v_z &= \frac{\partial z}{\partial t}; \\ w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, & w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Основным методом гидроаэродинамики является *метод Эйлера*, который заключается в том, что движение

жидкости определяется путем задания поля скоростей жидкости в пространстве в каждый момент времени, т. е.

$$v = f(r, t)$$

или, в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат,

$$\left. \begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t), \end{aligned} \right\}$$

где  $v = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$  — скорость жидкости в момент времени  $t$  в точке пространства, определяемой радиус-вектором  $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Величины  $x, y, z, t$  называются *переменными Эйлера*. В качестве переменных Эйлера вместо прямоугольных декартовых координат ( $x, y, z$ ) можно пользоваться цилиндрическими, сферическими и другими координатами.

Проекция на оси прямоугольной декартовой системы координат вектора  $w$  ускорения частиц жидкости равны:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z, \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что ускорение  $w$  частицы жидкости равно сумме двух ускорений:  $w = w_{\text{лок}} + w_{\text{ков}}$ , где

$$w_{\text{лок}} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \mathbf{k}$$

— *локальное ускорение*, обусловленное изменением поля скоростей во времени, и

$$\begin{aligned} w_{\text{ков}} &= \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

— *конвективное ускорение*, обусловленное неоднородностью поля скоростей.

В дальнейшем все уравнения гидроаэродинамики записываются в переменных Эйлера, причем под  $x, y, z$  подразумеваются прямоугольные декартовы координаты.

3° Движение жидкости называется *установившимся* или *стационарным*, если поле ее скоростей не изменяется с течением времени. В противном случае движение называется *неустановившимся*. При установившемся движении жидкости поля давления и плотности не зависят от времени.

*Потенциальным* или *безвихревым* называется такое движение жидкости, при котором в каждый момент времени во всем объеме жидкости  $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$ , т. е. скорость равна градиенту некоторой скалярной функции координат и времени  $\varphi(x, y, z, t)$ , называемой *потенциалом скорости*. Если существуют области жидкости, в которых  $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ , то движение жидкости называется *вихревым*.

4° *Линией тока* называется линия, касательная в каждой точке которой в данный момент времени  $t$  совпадает по направлению с вектором скорости жидкости в этой точке. В случае установившегося течения жидкости линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости. *Уравнение линий тока* имеет вид

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)},$$

где время  $t$  является фиксированным параметром.

*Трубкой тока* называется поверхность, образованная линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура. Часть жидкости, ограниченная трубкой тока, называется *стружкой*. В случае установившегося движения жидкости трубки тока не изменяются во времени и частицы жидкости движутся так, что каждая из них остается в пределах определенной стружки.

5° *Циркуляцией скорости* вдоль замкнутого контура  $L$  называется криволинейный интеграл

$$\Gamma = \oint_L (\mathbf{v} \, d\mathbf{l}),$$

где  $d\mathbf{l}$  — элементарный вектор, численно равный длине дуги элементарного участка контура и направленный по касательной к контуру в сторону его обхода.

По теореме Стокса

$$\Gamma = \int_S \text{rot}_n \mathbf{v} \, dS,$$

где  $S$  — площадь поверхности, охватываемой контуром  $L$ ,  $\text{rot}_n \mathbf{v}$  — проекция  $\text{rot } \mathbf{v}$  на направление внешней нормали  $\mathbf{n}$  к элементу  $dS$  этой поверхности<sup>1)</sup>. В случае потенциального движения жидкости  $\Gamma \equiv 0$  независимо от выбора контура  $L$ .

6° *Вихревой линией* называется линия, касательная в каждой точке которой в данный момент времени  $t$  совпадает по направлению с вихрем скорости  $\text{rot } \mathbf{v}$  в этой точке. *Уравнение вихревой линии* имеет вид

$$\frac{dx}{\text{rot}_x \mathbf{v}} = \frac{dy}{\text{rot}_y \mathbf{v}} = \frac{dz}{\text{rot}_z \mathbf{v}},$$

где  $\text{rot}_x \mathbf{v}$ ,  $\text{rot}_y \mathbf{v}$  и  $\text{rot}_z \mathbf{v}$  — проекции вектора  $\text{rot } \mathbf{v}$  на соответствующие оси координат.

*Вихревой трубкой* называется поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки малого замкнутого контура. Жидкость, заключенная внутри вихревой трубки, называется *вихревой нитью*.

*Интенсивностью вихря (вихревой трубки)* называется произведение численного значения вектора  $\text{rot } \mathbf{v}$  в каком-нибудь нормальном сечении вихревой трубки на площадь  $\sigma$  этого сечения. Интенсивность вихря постоянна вдоль всей вихревой трубки и равна циркуляции скорости вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного на поверхности вихревой трубки и охватывающего трубку один раз.

7° *Потоком жидкости* сквозь неподвижную поверхность  $S$  называется масса  $m_{\text{сек}}$  жидкости, проходящей сквозь эту поверхность за единицу времени:

$$m_{\text{сек}} = \int_S \rho \mathbf{v}_n \, dS = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности  $dS$ ,  $\mathbf{v}_n$  — проекция скорости жидкости на направление  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  — вектор плотности потока жидкости.

## 2. Уравнение неразрывности

1° *Уравнение неразрывности* является математическим выражением закона сохранения массы в гидроаэромеханике. В переменных Эйлера оно может быть записано

<sup>1)</sup> Векторы  $\mathbf{n}$  проводятся таким образом, чтобы при наблюдении из концов этих векторов обход контура  $L$ , принятый при вычислении циркуляции, был виден происходящим против часовой стрелки.



в нескольких эквивалентных формах:

$$а) \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

где  $\rho(x, y, z, t)$  — плотность жидкости,  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  — ее скорость, а  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  — дивергенция, или расхождение, вектора  $\mathbf{v}$ ;

$$б) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0;$$

$$в) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left( v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0,$$

где  $\operatorname{grad} \rho$  — градиент плотности.

2° Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости ( $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности для установившегося движения жидкости ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ):

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

При установившемся течении поток жидкости сквозь поперечное сечение струйки не зависит от местоположения этого сечения. Для двух произвольных поперечных сечений  $dS_1$  и  $dS_2$  элементарной струйки выполняется условие  $\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$ .

### 3. Уравнения движения жидкости

1° Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера):

а) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

где  $\mathbf{F}$  — напряженность поля массовых сил (стр. 311),  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости, а оператор  $(\mathbf{v} \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ ;

б) в проекциях на оси координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

В случае установившегося движения  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  и  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ .

2° Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса)<sup>1)</sup>:

а) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $\eta = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$ . В противном случае уравнения движения имеют более сложный вид:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}),$$

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}),$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\eta \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

где  $\nu = \eta/\rho$  — *кинематическая вязкость* жидкости,  $\eta$  — *динамическая вязкость*, или *коэффициент внутреннего трения* (стр. 211),  $\zeta$  — *вторая вязкость* (см. п. 3°), а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа (часто оператор Лапласа обозначают также через  $\nabla^2$ );

б) в проекциях на оси координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\}$$

Для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  (стр. 318) и уравнение Навье — Стокса имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Это уравнение может быть представлено в форме, не содержащей давления  $p$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + \nu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Если поле массовых сил потенциальное, каким является, например, поле тяготения, то  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ . В случае идеальной жидкости ( $\nu = 0$ ) последний член уравнения также равен нулю.

3° Вторая вязкость (коэффициент второй вязкости)  $\zeta$ , подобно динамической (первой) вязкости  $\eta$ , является положительной величиной и зависит от химической природы сжимаемой жидкости, давления и температуры. Если первая вязкость проявляется при деформации чистого сдвига, то вторая — при деформации всестороннего сжатия, сопровождающейся изменением плотности жидкости. При сжатии и расширении в жидкости нарушается термодинамическое равновесие и в ней возникают процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Так как про-

цессы установления равновесия необратимы (стр. 166), то они сопровождаются возрастанием энтропии (стр. 179), свидетельствующим о диссипации энергии. Эта диссипация энергии и определяющая ее вторая вязкость  $\zeta$  будут тем большими, чем медленнее протекают процессы восстановления равновесия по сравнению с процессом сжатия или расширения. Например, величина  $\zeta$  должна быть велика, если при сжатии или расширении в жидкости нарушается химическое равновесие и возникает химическая реакция, имеющая большое время релаксации, т. е. малую скорость. В случае сжатий и разрежений, вызываемых звуковыми волнами (стр. 535),  $\zeta$  зависит от частоты (*дисперсия второй вязкости*).

4° *Основной задачей гидроаэродинамики* является нахождение полей скорости, давления и плотности в жидкости, движущейся под действием заданных внешних сил, т. е. нахождение следующих пяти функций координат и времени:

$$v_x = f_1(x, y, z, t), \quad v_y = f_2(x, y, z, t),$$

$$v_z = f_3(x, y, z, t),$$

$$p = f_4(x, y, z, t) \quad \text{и} \quad \rho = f_5(x, y, z, t).$$

Уравнения движения и неразрывности достаточны для решения основной задачи гидроаэродинамики всякой жидкости, у которой плотность и оба коэффициента вязкости зависят только от давления, причем вид этих зависимостей задан:  $\rho = \rho(p)$ ,  $\zeta = \zeta(p)$  и  $\eta = \eta(p)$ . В частности, это верно для идеальной несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ,  $\eta = \zeta = 0$ ), идеальной баротропной жидкости ( $\eta = \zeta = 0$ ), а также для изотермического движения вязкой жидкости.

Во всех остальных случаях для решения основной задачи гидроаэродинамики необходимо рассматривать расширенную систему уравнений, состоящую из уравнений движения, неразрывности, энергии (стр. 325), состояния жидкости (стр. 148) и уравнений, выражающих зависимости динамической и второй вязкостей от параметров состояния жидкости (см. примечание на стр. 319).

5° Для учета специфических особенностей конкретной задачи и получения однозначного решения указанной выше системы дифференциальных уравнений гидроаэродинамики необходимо еще указать начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи.

Начальные условия определяют состояние движения жидкости в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$v_{z0} = f_1(x, y, z, 0), \quad v_{y0} = f_2(x, y, z, 0) \quad \text{и т. д.}$$

В случае установившегося движения жидкости надобность в задании начальных условий отпадает.

Граничные условия определяют особые условия движения жидкости на ее границах с твердыми телами, на свободной поверхности жидкости и на поверхностях раздела несмешивающихся жидкостей.

6° Некоторые случаи граничных условий для идеальной жидкости:

а) в точках поверхности неподвижной твердой стенки нормальная к поверхности составляющая скорости жидкости равна нулю (*условие скольжения*):

$$v_n = 0, \quad \text{или} \quad v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

где  $\Phi(x, y, z) = 0$  — уравнение поверхности стенки;

б) если стенка перемещается в пространстве и в общем случае деформируется при этом, то скорость любой точки поверхности и скорость частицы жидкости, находящейся в данный момент в этой точке, должны иметь одинаковые проекции на направление нормали к поверхности:

$$v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

где  $\Phi(x, y, z, t) = 0$  — уравнение подвижной поверхности;

в) на свободной поверхности жидкости  $\Phi(x, y, z, t) = 0$ , помимо условия б), должно выполняться условие постоянства давления:  $p(x, y, z, t) = \text{const}$ ;

г) на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей должно выполняться условие равенства давлений обеих жидкостей, а также условие равенства нормальных к поверхности раздела составляющих скоростей самой поверхности и обеих жидкостей.

7° Некоторые случаи граничных условий для вязкой жидкости:

а) в точках поверхности неподвижной стенки скорость жидкости равна нулю (*условие прилипания*);

б) в точках поверхности движущейся стенки скорость жидкости равна скорости соответствующей точки стенки.

Ввиду сложности системы дифференциальных уравнений гидроаэродинамики нахождение ее решения аналитическими методами обычно сопряжено с непреодолимыми

трудностями и возможно лишь для некоторых простейших случаев движения.

8° Для установившегося движения идеальной баротропной жидкости (стр. 311) в потенциальном силовом поле справедливо уравнение Бернулли (*интеграл Бернулли*):

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

где  $\varphi_F$  — потенциал поля массовых сил, а  $C$  — величина, одинаковая для всех точек данной линии тока и, вообще говоря, изменяющаяся при переходе от одной линии тока к другой.

Если на жидкость не действуют иные массовые силы, кроме силы тяжести, то  $\varphi_F = gz$  (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх) и уравнение Бернулли имеет вид

$$gz + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C.$$

Для несжимаемой жидкости

$$\rho gz + \frac{\rho v^2}{2} + p = C_1 \quad \text{или} \quad z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_2,$$

где  $\rho v^2/2$  — *скоростной напор*,  $p$  — *статическое давление*,  $p/\rho g$  — *пьезометрическая высота*,  $v^2/2g$  — *скоростная высота*.

Для сжимаемой жидкости интеграл  $\int \frac{dp}{\rho}$  зависит от вида процесса изменения состояния. В случае изотермического и адиабатного (изоэнтропийного) процессов идеального газа (стр. 149)

$$\int \frac{dp}{\rho} = k_1 \ln p + \text{const},$$

изотерм

$$\int \frac{dp}{\rho} = k_2 \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \text{const},$$

адиабат

где  $\kappa = c_p/c_v$  — отношение удельных теплоемкостей газа в изобарном и изохорном процессах (показатель адиабаты, стр. 160),  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные величины.

9° Потенциальное движение (стр. 316) идеальной баротропной жидкости возможно только в том случае, когда массовые силы являются потенциальными. Для этого случая движения справедливо *соотношение Коши*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \varphi_F = f(t),$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости ( $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ ),  $\varphi_F$  — потенциал массовых сил, а  $f(t)$  — функция времени, вид которой остается произвольным.

10° Установившееся потенциальное движение идеальной жидкости. Для баротропной жидкости справедливо уравнение Бернулли — Эйлера:

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const},$$

где константа, в отличие от уравнения Бернулли, одинакова для всех линий тока.

11° Плоским движением называется такое движение жидкости, при котором все ее частицы движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, причем скорости всех частиц, лежащих на одном и том же перпендикуляре к этой плоскости, одинаковы. Если неподвижную плоскость принять за координатную плоскость  $xOy$ , то в случае плоского движения

$$v_x = f_1(x, y, t), \quad v_y = f_2(x, y, t), \quad v_z = 0.$$

Для плоского движения несжимаемой жидкости

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где  $\psi(x, y, t)$  — функция тока. Семейство линий  $\psi(x, y, t) = \text{const}$  (время  $t$  играет роль фиксированного параметра) представляет собой совокупность линий тока на плоскости  $xOy$  в момент времени  $t$ .

Если поле внешних сил потенциальное, то функция тока идеальной жидкости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x},$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — двумерный оператор Лапласа.

Если плоское движение несжимаемой жидкости является потенциальным, то справедливы уравнения Коши — Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Функция тока и потенциал скорости удовлетворяют уравнению Лапласа:  $\Delta \psi = 0$  и  $\Delta \varphi = 0$ . Линии тока являются ортогональными траекториями семейства линий равного потенциала скорости.

12° Закон сохранения циркуляции скорости (теорема Томсона): при движении идеальной баротропной жидкости в потенциальном поле массовых сил циркуляция скорости вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного через одни и те же частицы жидкости (материального контура), не изменяется с течением времени, т. е.

$$\oint_L (\mathbf{v} \, d\mathbf{l}) = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \oint_L (\mathbf{v} \, d\mathbf{l}) = 0.$$

#### 4. Уравнение энергии

1° Первый закон термодинамики для движущейся системы имеет вид

$$d\left(U + \frac{Mv^2}{2}\right) = \delta Q + \delta A' \quad \text{или} \quad d\left(H + \frac{Mv^2}{2}\right) = \delta Q + \delta A' + d(pV),$$

где  $U$  и  $H$  — внутренняя энергия и энтальпия системы (стр. 153), объем которой равен  $V$ ;  $p$  — давление;  $M$  — масса системы;  $\delta Q$  — подведенное извне количество теплоты;  $\delta A'$  — работа, совершенная внешними силами;  $v$  — скорость движения системы.

2° Дифференциальное уравнение закона сохранения энергии для сжимаемой вязкой жидкости:

$$\rho \frac{du}{dt} = \varepsilon + \text{div} (K \text{ grad } T) - p \, \text{div } \mathbf{v} + \\ + \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div } \mathbf{v})^2 \right\} + \zeta (\text{div } \mathbf{v})^2,$$

или

$$\rho \frac{dh}{dt} = \varepsilon + \frac{dp}{\rho} + \text{div} (K \text{ grad } T) + \\ + \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div } \mathbf{v})^2 \right\} + \zeta (\text{div } \mathbf{v})^2,$$

где  $u$  и  $h$  — внутренняя энергия и энтальпия единицы массы жидкости,  $\rho$ ,  $T$  и  $p$  — плотность, абсолютная температура и давление жидкости,  $v$  — ее скорость,  $K$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты теплопроводности, внутреннего

трения и второй вязкости жидкости,  $\varepsilon$  — количество теплоты, поступающее в единицу объема жидкости за единицу времени вследствие излучения или каких-либо иных причин, кроме теплопроводности (например, химических реакций).

Выражение

$$\Phi = \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$$

называется *диссипативной функцией*. Диссипативная функция представляет собой то количество механической энергии жидкости, которое преобразуется вследствие трения во внутреннюю энергию за единицу времени в единице объема жидкости.

Для газа, подчиняющегося уравнению Менделеева — Клапейрона, в случае не очень значительных изменений температуры можно считать  $\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$  и  $\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}$ , где  $c_v$  и  $c_p$  — удельные теплоемкости в изохорном и изобарном процессах.

3° При  $K = \eta = \zeta = \varepsilon = 0$  уравнение энергии определяет условие *адиабатичности движения* идеальной жидкости:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} s) = 0,$$

где  $s$  — энтропия единицы массы жидкости.

В случае несжимаемой жидкости при  $\varepsilon = 0$  уравнение энергии имеет вид

$$c \rho \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) + \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\},$$

где  $c$  — удельная теплоемкость жидкости.

Для несжимаемой идеальной жидкости при  $\varepsilon = 0$  и  $K = \operatorname{const}$

$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T,$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

где  $a = K/c\rho$  — коэффициент температуропроводности (стр. 272).

4° *Конвективным теплообменом* называется передача энергии в форме теплоты между неравномерно нагретыми частями жидкости или жидкостью и твердыми телами, осуществляемая в результате движения макроскопических частей жидкости друг относительно друга или по отношению к твердым телам.

Конвективный теплообмен между жидкостью и твердыми телами называется *теплоотдачей*. В зависимости от причин движения жидкости различают теплоотдачу при *свободной (естественной) конвекции* и теплоотдачу при *вынужденной конвекции*. В первом случае движение жидкости происходит под действием силы тяжести и является следствием неоднородности удельного веса различных нагретых участков жидкости. Во втором случае относительно движение обусловлено либо перемещением тел в неподвижной жидкости, либо действием на жидкость различного рода насосов, вентиляторов и т. п.

5° *Коэффициентом теплоотдачи* называется величина  $\alpha$ , характеризующая интенсивность теплоотдачи и численно равная

$$\alpha = \frac{q}{\Delta T},$$

где  $q$  — плотность теплового потока, численно равная количеству теплоты, передаваемой сквозь единицу площади поверхности тела за единицу времени;  $\Delta T$  — температурный напор, равный абсолютной величине разности между температурами жидкости и поверхности тела. В ряде случаев температурный напор определяется иначе, например, при обтекании тела потоком сжимаемой жидкости  $\Delta T$  обычно принимается равным абсолютной величине разности между температурой жидкости вдали от тела и той равновесной температурой, которую имела бы поверхность тела в отсутствие теплообмена.

Вследствие влияния вязкости относительная скорость жидкости на поверхности тела равна нулю. Поэтому около самой поверхности теплообмен в жидкости осуществляется путем теплопроводности:  $q = K |\operatorname{grad} T|_{\text{ст}}$ , где  $K$  — коэффициент теплопроводности жидкости,  $|\operatorname{grad} T|_{\text{ст}}$  — модуль градиента температуры жидкости на границе с телом.

Связь между коэффициентами теплоотдачи и теплопроводности имеет вид

$$\alpha = \frac{K}{\Delta T} |\operatorname{grad} T|_{\text{ст}}.$$

### 5. Элементы теории размерностей и теории подобия

1° *Единицей измерения*  $[A]$  физической величины  $A$  называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина  $A$ .

*Системой единиц измерения* называется совокупность определенным образом установленных единиц измерения для всех величин, рассматриваемых в данной области физики. Например, в механике применяются системы СГС (*абсолютная физическая*), МКС (*абсолютная практическая*) и МКГСС (*техническая*), в электричестве и магнетизме — СГСЭ (*абсолютная электростатическая*), СГСМ (*абсолютная электромагнитная*), *гауссова* система единиц и *абсолютная практическая* система единиц МКСА. С 1 января 1963 г. в СССР рекомендована в качестве предпочтительной для всех областей науки и техники *Международная система единиц* (СИ), которая для механических величин совпадает с системой МКС, а для электромагнитных величин — с МКСА.

*Абсолютными* называются системы, в которых в качестве основных единиц для механических величин приняты единицы длины, массы и времени.

*Основными или первичными единицами измерения* в данной системе называются независимо установленные единицы измерения для нескольких (обычно трех или четырех) произвольно выбранных разнородных физических величин. Например, в системе СГС основными единицами являются 1 *см* (единица длины), 1 *г* (единица массы) и 1 *сек* (единица времени).

*Международная система единиц* (СИ), охватывающая все области физики и техники, построена на базе шести основных единиц: длины (*м*), массы (*кг*), времени (*сек*), силы тока (*а*), температуры (*°К*) и силы света (*св*).

*Производными или вторичными единицами измерения* называются единицы, устанавливаемые через основные единицы измерения данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между рассматриваемыми физическими величинами и величинами, единицы измерения которых приняты в качестве основных.

*Формулой размерности* или *просто размерности* какой-либо физической величины  $B$  называется соотношение, определяющее связь между единицей измерения этой величины  $[B]$  и основными единицами  $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$

данной системы. Формулы размерности имеют вид степенных одпочленов:

$$[B] = [A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k},$$

где  $k$  — число основных единиц;  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — рациональные числа.

Единицы измерения и размерности физических величин в различных системах единиц, а также соотношения между единицами измерения одних и тех же величин в различных системах приведены в Приложении I.

2° *Однородными физическими величинами* называются величины, имеющие одинаковые размерности и физический смысл, т. е. отличающиеся лишь по численной величине (например, координаты точек тела и его линейные размеры).

*Одноименными физическими величинами* называются величины, имеющие одинаковую размерность, но различный физический смысл. Примером одноименных величин могут служить коэффициент диффузии и кинематическая вязкость.

*Безразмерными* называются величины, численные значения которых не зависят от выбора системы единиц измерения. Например, отношение двух однородных или двух одноименных величин является безразмерной величиной. Отношение двух однородных величин называется *симплексом*.

3° *Аксиомы теории размерностей*.

а) Численное значение  $a$  физической величины  $A$  равно отношению этой величины к единице ее измерения  $[A]$ :

$$a = \frac{A}{[A]}.$$

б) Физическая величина не зависит от выбора ее единиц измерения, т. е. при увеличении единицы измерения в  $q$  раз численное значение данной физической величины уменьшается в  $q$  раз.

в) Математическое описание какого-либо физического явления, указывающее функциональную зависимость между численными значениями физических величин, не зависит от выбора единиц измерения этих величин. Следовательно, все члены уравнения, описывающего физический процесс, должны иметь одинаковую размерность, так что они могут быть преобразованы к безразмерному виду путем деления обеих частей уравнения на какую-нибудь постоянную величину, имеющую ту же размерность.

4° *π-теорема*: всякое соотношение между  $n$  размерными величинами, для измерения которых использовано  $k$  основных единиц измерения, можно представить в виде соотношения между  $n - k$  безразмерными комбинациями  $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$  этих  $n$  величин.

Например, пусть зависимость между численными значениями  $a_1, \dots, a_n$  размерных величин  $A_1, \dots, A_n$  в рассматриваемом явлении имеет вид  $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ , причем единицы измерения для первых  $k$  величин установлены независимо друг от друга и приняты в качестве основных, а единицы измерения для остальных  $n - k$  величин являются производными, т. е.

$$[A_{k+1}] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{m_i}, \dots, [A_n] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{p_i}.$$

Тогда, увеличив основные единицы  $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$  соответственно в  $a_1, a_2, \dots, a_k$  раз, можно представить написанное выше соотношение в безразмерном виде:

$$\pi_{n-k} = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-k-1})$$

или

$$\pi_{n-k} = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k-1}),$$

где

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{\prod_{i=1}^k a_i^{m_i}} = \frac{A_{k+1}}{\prod_{i=1}^k A_i^{m_i}}, \dots, \pi_{n-k} = \frac{a_n}{\prod_{i=1}^k a_i^{p_i}} = \frac{A_n}{\prod_{i=1}^k A_i^{p_i}}$$

— безразмерные комбинации, или *степенные комплексы*, физических величин  $A_1, \dots, A_n$ .

Некоторые следствия  $\pi$ -теоремы: а) если  $n - k = 0$ , то это значит, что уравнение  $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$  составлено неверно, так как его нельзя привести к безразмерному виду; б) если  $n - k = 1$ , то  $\pi_{n-k} = \text{const}$ .

5° Два физических процесса называются *подобными*, если они подчинены одним и тем же физическим законам и все величины  $\xi_i'$ , характеризующие один процесс, могут быть получены путем умножения однородных с ними величин  $\xi_i''$ , характеризующих другой процесс, на постоянные числа  $c_i$ , которые называются *константами подобия* и одинаковы для всех однородных величин:  $\xi_i' = c_i \xi_i''$ .

*Критериями подобия* называются безразмерные степенные комплексы, которые входят в безразмерное математическое описание рассматриваемого процесса, составленное с помощью  $\pi$ -теоремы. Для установления

вида критериев подобия в каждом конкретном случае необходимо с помощью дифференциальных уравнений процесса и условий однозначности их решения составить список всех размерных величин  $A_1, \dots, A_n$ , характеризующих этот процесс, а затем применить  $\pi$ -теорему к функциональной зависимости  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , представляющей собой неизвестный интеграл (решение) задачи.

*Определяющими критериями подобия* называются критерии, которые составлены только из величин, заданных в условиях однозначности, и независимых переменных.

6° *Первая теорема подобия*: для двух подобных процессов все критерии подобия попарно равны друг другу, т. е.

$$\pi_1 = \pi_1', \quad \pi_2 = \pi_2' \quad \text{и т. д.}$$

*Вторая теорема подобия*: критерии подобия связаны друг с другом *уравнением подобия*, которое является безразмерным решением (интегралом) рассматриваемой задачи, справедливым для всех подобных процессов.

*Третья теорема подобия*: для того чтобы два процесса были подобны, необходимо и достаточно, чтобы они были качественно одинаковы, а их определяющие критерии — попарно равны.

*Качественно одинаковыми* называются процессы, математические описания которых отличаются только численными значениями содержащихся в них размерных величин.

7° Теория подобия является научной основой экспериментальных исследований сложных явлений методом моделирования и методом аналогии.

*Метод моделирования* состоит в воспроизведении и исследовании на модели процессов, качественно одинаковых с процессами, имеющими место в реальных объектах. Результаты эксперимента могут быть распространены на эти объекты, если соблюдены условия, сформулированные в третьей теореме подобия.

*Метод аналогии* состоит в изучении какого-либо процесса путем экспериментального исследования качественно других физических процессов, дифференциальные уравнения протекания которых и условия однозначности по своей форме совпадают с таковыми для изучаемого процесса. В настоящее время широко применяются экспериментальные методы исследования различных явлений, основанные на аналогии между электрическими, гидро-

динамическими, тепловыми, механическими и другими явлениями. Применительно к тепловым процессам метод аналогии страдает существенным недостатком, так как не позволяет учесть зависимость от температуры физических свойств среды (вязкости, теплопроводности, теплоемкости и т. д.).

8° Основными критериями подобия в гидроаэродинамике являются число Рейнольдса  $Re$ , число Фруда  $Fr$ , число Струхала  $St$  и число Маха  $M$ .

Число Рейнольдса  $Re = vl/\nu$ , где  $v$  — характерная для данной задачи скорость жидкости,  $l$  — характерный линейный размер,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Выбор характерной скорости и характерного размера в зависимости от рассматриваемой задачи можно производить по-разному. Например, при течении несжимаемой жидкости в круглой трубе диаметром  $d$  величина  $l = d$ , а  $v$  — средняя по сечению скорость жидкости ( $v = 4V_{сек}/\pi d^2$ , где  $V_{сек}$  — секундный объемный расход жидкости); при поперечном обтекании жидкостью круглого цилиндра диаметром  $d$  величина  $l = d$ , а  $v$  — скорость пезомущенной жидкости, т. е. ее скорость вдали перед цилиндром. Число Рейнольдса характеризует соотношение между силами инерции и силами трения в потоке жидкости.

9° Число Фруда  $Fr = v^2/gl$ , где  $v$  — скорость жидкости вдали от обтекаемого ею тела,  $l$  — характерный линейный размер тела,  $g$  — ускорение силы тяжести. Число Фруда характеризует соотношение между силами инерции и силами тяжести в потоке жидкости. Оно играет важную роль при моделировании процессов, связанных с работой различных гидротехнических сооружений, движением корабля и т. п. При моделировании газовых потоков этот критерий подобия не играет сколько-либо существенной роли, так как ввиду малой плотности газов влиянием силы тяжести обычно можно пренебречь.

10° Число Струхала является критерием подобия неустановившихся движений жидкости. Оно равно  $St = vT/l$ , где  $v$  — характерная скорость,  $l$  — характерный линейный размер, а  $T$  — характерный интервал времени (например, для периодических движений  $T$  — период).

11° Число Маха  $M = v/c$ , где  $v$  — скорость жидкости в рассматриваемой точке,  $c$  — скорость звука (в жидкости) в той же точке. Число  $M$  является мерой влияния сжимаемости жидкости на ее движение. В тех случаях, когда  $M \ll 1$ , жидкость можно считать несжимаемой. Движение сжимаемой жидкости называется *дозвуковым*,

если  $M < 1$ , и *сверхзвуковым*, если  $M > 1$ . Число  $M$  является основным критерием подобия для установившихся движений сжимаемой жидкости, совершающихся с большими скоростями.

12° Основными критериями подобия в случае стационарной теплоотдачи при свободной конвекции (стр. 327) несжимаемой жидкости являются критерии Нуссельта  $Nu$ , Грасгофа  $Gr$  и Прандтля  $Pr$ , а в случае стационарной теплоотдачи при вынужденной конвекции (стр. 327) — критерии  $Nu$ ,  $Re$  и  $Pr$ . Часто применяется также критерий Пекле  $Pe = RePr$ .

13° Критерий Нуссельта:  $Nu = al/K$ , где  $a$  — коэффициент теплоотдачи (стр. 327),  $l$  — характерный размер,  $K$  — коэффициент теплопроводности жидкости.

14° Критерий Прандтля характеризует физические свойства жидкости. Он равен  $Pr = \nu/a = \eta c/K$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости (стр. 320),  $a$  — ее коэффициент температуропроводности (стр. 272),  $\eta$  и  $c$  — динамическая вязкость и удельная теплоемкость жидкости (для газов  $c = c_p$ ).

15° Критерий Грасгофа:  $Gr = \frac{\alpha g l^3}{\nu^2} \Delta T$ , где  $\alpha$  — термодинамический коэффициент расширяемости (стр. 187) жидкости,  $\nu$  — ее кинематическая вязкость,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — характерный размер,  $\Delta T$  — температурный папор, равный абсолютной величине разности между температурами жидкости и стенки.

## 6. Движение тел в жидкости. Пограничный слой

1° В соответствии с механическим принципом относительности (стр. 46) задача о силовом взаимодействии между телом, движущимся равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{u}$  в неподвижной неограниченной жидкости, и жидкостью эквивалентна задаче о взаимодействии между неподвижным телом и набегающим на него стационарным потоком жидкости, скорость  $\mathbf{v}_0$  которого вдали перед телом равна  $-\mathbf{u}$ .

2° Уравнение Навье — Стокса (стр. 319) для стационарного течения жидкости в отсутствие массовых сил имеет вид

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}.$$

В случае обтекания тела потоком несжимаемой жидкости ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ), соответствующим малым значениям



числа Рейнольдса ( $Re = v_0 l / \nu \ll 1$ , где  $l$  — характерный размер тела), так что инерционный член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \ll \nu \Delta \mathbf{v}$ , это уравнение может быть представлено в следующей приближенной форме:

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

3° Сила сопротивления  $F$ , действующая со стороны потока жидкости на медленно движущееся в ней тело шарообразной формы, определяется по формуле Стокса:

$$F = -6\pi\eta R u,$$

где  $R$  — радиус тела,  $u$  — его скорость,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости. Формула справедлива при  $Re \ll 1$  ( $Re = uR\rho/\eta$ ,  $\rho$  — плотность жидкости).

Скорость  $u$  установившегося падения твердого шара в вязкой жидкости, происходящего под действием силы тяжести, в пределах применимости формулы Стокса равна

$$u = \frac{2R^2g(\rho' - \rho)}{9\eta},$$

где  $\rho'$  — плотность шара,  $g$  — ускорение свободного падения.

Сила сопротивления и скорость установившегося падения шарообразной капли жидкости равны:

$$F = 2\pi\eta R u \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}, \quad u = \frac{2R^2g(\rho' - \rho)(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')},$$

где  $\rho'$  и  $\eta'$  — плотность и динамическая вязкость жидкости, образующей каплю.

Для маленького пузырька пара, всплывающего в жидкости,  $\rho' \approx 0$  и  $\eta' \approx 0$ . Поэтому сила сопротивления

$$F = 4\pi\eta R u$$

и скорость перемещения пузырька

$$u = \frac{R^2 g \rho}{3\eta}.$$

4° При очень больших значениях числа Рейнольдса приближенно можно считать, что влияние вязкости проявляется только в той части жидкости, которая движется в непосредственной близости от поверхности обтекаемого ею тела и поэтому называется *пограничным слоем*.

Скорость жидкости на поверхности тела равна нулю (условие прилипания, стр. 322), скорость на внешней границе пограничного слоя зависит от скорости и попереч-

ных размеров набегающего потока, формы и размеров тела. В случае продольного обтекания тонкой пластины дозвуковым потоком эта скорость равна скорости набегающего потока.

Толщина пограничного слоя постепенно возрастает при перемещении вдоль поверхности тела по направлению течения жидкости. При прочих равных условиях пограничный слой тем тоньше, чем больше число Рейнольдса.

Вне пограничного слоя жидкость с достаточной степенью точности можно считать идеальной.

5° Возможны два качественно различных типа течения вязкой жидкости — ламинарное и турбулентное. *Ламинарным* называется упорядоченное течение жидкости, при котором траектории соседних частиц мало отличаются друг от друга, так что жидкость можно рассматривать как совокупность отдельных слоев, движущихся с разными скоростями, не перемешиваясь друг с другом. *Турбулентным* называется течение жидкости, при котором ее частицы совершают неустановившиеся неупорядоченные движения по сложным траекториям, в результате чего происходит интенсивное перемешивание различных слоев движущейся жидкости.

Ламинарное течение может быть как установившимся, так и неустановившимся, турбулентное — только неустановившимся (скорость жидкости в каждой точке пространства нерегулярно изменяется во времени). Для характеристики турбулентного потока пользуются понятием *средней скорости*  $\bar{v}$  в данной точке пространства, получающейся в результате усреднения истинной скорости  $v$  за достаточно большой промежуток времени. Разность  $v' = v - \bar{v}$  называется *пульсацией скорости*. Турбулентное течение условно считается установившимся, если  $\bar{v}$  не зависит от времени ( $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ ).

Турбулентное течение возникает в результате потери устойчивости ламинарным течением при достаточно больших значениях числа Рейнольдса.

6° Уравнения установившегося плоского (стр. 324) движения несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое:

$$v \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

где  $x$  и  $y$  — криволинейные координаты, отсчитываемые

вдоль поверхности тела в направлении течения жидкости ( $x$ ) и по нормали к этой поверхности ( $y$ );  $p$  — давление на внешней границе пограничного слоя. Давление передается сквозь пограничный слой без изменения, т. е.  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ,  $p = p(x)$ , и связано со скоростью  $\tilde{v}$  на внешней границе пограничного слоя соотношением

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\tilde{v} \frac{d\tilde{v}}{dx}.$$

7° В случае ламинарного пограничного слоя на пластине, продольно обтекаемой несжимаемой жидкостью, касательное напряжение на поверхности пластины, вызываемое силами трения, равно

$$\tau_{ст} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta v_0^3}{x}} = 0,332 \rho v_0^2 \frac{1}{\sqrt{Re_x}},$$

где  $\rho$  и  $\eta$  — плотность и динамическая вязкость жидкости,  $v_0$  — скорость набегающего потока,  $x$  — расстояние от передней кромки пластины,  $Re_x = xv_0\rho/\eta$ . Если длина пластины по потоку равна  $l$ , то среднее значение напряжения трения по всей пластине

$$\bar{\tau}_{ст} = \frac{1}{l} \int_0^l \tau_{ст} dx = 0,664 \rho v_0^2 \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

где  $Re = lv_0\rho/\eta$ .

8° Число Рейнольдса  $(Re_x)_{кр}$ , при котором происходит переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, называется *критическим*. Для продольного обтекания пластин и тел с малой кривизной поверхности  $(Re_x)_{кр} \sim 300\,000$  и в сильной степени зависит от степени начальной турбулентности набегающего потока, равной отношению среднеквадратичной пульсации скорости набегающего потока к его средней скорости:  $\sqrt{v_0'^2}/v_0$ .

Турбулизация пограничного слоя приводит к возрастанию градиента скорости жидкости на поверхности тела и увеличению напряжения трения, так как в этом случае внутреннее трение в жидкости обусловлено одновременно действующими процессами переноса количества движения как за счет теплового движения молекул, так и за счет турбулентного перемешивания.

## 7. Движение жидкостей в трубах

1° Из уравнения неразрывности следует, что при установившемся течении жидкости в трубе

$$m_{сек} = \int_S \rho v_n dS = \text{const},$$

где  $m_{сек}$  — масса жидкости, протекающей за единицу времени сквозь каждое поперечное сечение трубы (секундный массовый расход, стр. 317),  $\rho$  — плотность жидкости,  $dS$  — элемент площади поперечного сечения,  $v_n$  — нормальная к площадке  $dS$  составляющая скорости жидкости.

Если жидкость несжимаема, то

$$V_{сек} = \int_S v_n dS = \text{const},$$

где  $V_{сек}$  — объем жидкости, протекающей за единицу времени сквозь произвольное поперечное сечение трубы (секундный объемный расход).

В случае течения идеальной жидкости в цилиндрической трубе ( $S = \text{const}$ ) скорость  $v_n = v$  и одинакова во всех точках данного поперечного сечения, а для несжимаемой жидкости скорость одинакова также для всех сечений.

Для сжимаемой жидкости

$$\rho v = \frac{m_{сек}}{S} = \text{const}.$$

2° При движении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрической трубе поток в начальном участке трубы состоит из двух частей — пограничного слоя у стенок и невозмущенного ядра, в пределах которого скорость жидкости во всех точках данного поперечного сечения одинакова. По мере удаления от входа в трубу толщина пограничного слоя увеличивается до тех пор, пока на расстоянии  $l_{стаб}$  он не заполняет все поперечное сечение трубы. Начальный участок длиной  $l_{стаб}$  называется *участком гидродинамической стабилизации*, а течение жидкости за этим участком — *стабилизированным*, так как ему соответствует одинаковое по всем сечениям поле скоростей жидкости. Длина  $l_{стаб}$  возрастает с увеличением размеров трубы и числа Рейнольдса (для ламинарного потока в круглой трубе  $l_{стаб} \sim R \cdot Re$ , где  $R$  — радиус трубы,  $Re = 2V_{срR}/\nu$ ).

3° В случае стабилизированного ламинарного течения несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе, ось которой совпадает с осью  $Oz$  прямоугольной декартовой системы координат, скорость  $v$  жидкости во всех точках трубы параллельна оси  $Oz$ :  $v_x = v_y = 0$  и  $v_z = v$ . Из уравнения неразрывности (стр. 318) следует:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \text{т. е.} \quad v = f(x, y).$$

Из уравнений Навье – Стокса (стр. 320) следует:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l},$$

где  $\Delta p$  – падение давления на участке трубы длиной  $l$ .

4° Для круглой цилиндрической трубы это уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{dv}{dr} \right)' = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние от оси трубы.

Распределение скоростей жидкости по сечению трубы выражается формулой

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2),$$

где  $R$  – радиус трубы,  $r$  – расстояние от оси до рассматриваемой точки поперечного сечения,  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости,  $\Delta p$  – падение давления на участке трубы длиной  $l$ .

Секундный объемный расход жидкости определяется по формуле Пуазейля:

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p.$$

5° Если труба имеет эллиптическое сечение, то

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right],$$

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi a^2 b^3}{4\eta l (a^2 + b^2)} \Delta p,$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса,  $x$  и  $y$  – координаты рассматриваемой точки поперечного сечения в системе координат, оси  $Ox$  и  $Oy$  которой совпадают с полуосями  $a$  и  $b$  эллипса.

6° Для течения в кольцевом зазоре между соосными цилиндрическими поверхностями с радиусами  $R_1$  и  $R_2 > R_1$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[ R_2^2 - r^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right] \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} \left[ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right].$$

7° Критическое число Рейнольдса  $Re_{\text{кр}}$  ( $Re = 4V_{\text{сек}}/\pi d v$ , где  $d$  – диаметр трубы), соответствующее переходу ламинарного течения в турбулентное, для гладких круглых труб имеет порядок 2300.

Для турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе имеется ряд полуэмпирических формул.

8° Для стационарного адиабатического течения идеальной сжимаемой жидкости в трубе переменного сечения зависимость плотности потока жидкости  $\rho v$  от скорости  $v$  имеет вид

$$\frac{d}{dv} (\rho v) = \rho \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

где  $c$  – местная скорость звука (стр. 535),  $\rho$  – плотность, соответствующие параметрам состояния жидкости в сечении, где ее скорость равна  $v$ .

Величина  $\rho v$  достигает максимального значения  $\rho_* v_*$  при скорости  $v$ , равной местной скорости звука  $c_*$  и называемой *критической скоростью*. Отношение  $v/c_* = M_*$  называется *коэффициентом скорости*. При  $M_* < 1$  поток является дозвуковым, а при  $M_* > 1$  – сверхзвуковым (стр. 333). Для перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому необходимо, чтобы площади  $S$  поперечных сечений трубы изменялись вдоль ее оси по закону

$$S = \frac{m_{\text{сек}}}{\rho v} = \frac{\rho_* v_*}{\rho v} S_*,$$

т. е. в области дозвукового течения постепенно уменьшались вплоть до критического значения  $S_*$ , а затем вновь увеличивались. Такая труба называется *соплом Лавала*.

Для идеального газа

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} BT_0},$$

$$\rho_* = \rho_0 \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad T_* = \frac{2}{\kappa+1} T_0 \quad \text{и} \quad p_* = p_0 \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты (стр. 160);  $B$  — удельная газовая постоянная (стр. 151);  $P_0$ ,  $\rho_0$  и  $T_0$  — давление, плотность и температура газа, адиабатически заторможенного до скорости  $v = 0$ ;  $c_0$  — скорость звука в газе при температуре  $T_0$ ;  $\rho_*$ ,  $T_*$  и  $P_*$  — критические значения плотности, температуры и давления.

В произвольном сечении трубы параметры идеального газа удовлетворяют уравнениям:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \rho_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}},$$

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right) = T_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right),$$

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = P_0 \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

## 1. Основные понятия. Закон Кулона

1° *Электростатикой* называется учение о свойствах и взаимодействии электрических зарядов, неподвижных относительно избранной для их изучения инерциальной системы отсчета.

Сущес вует два рода электрических зарядов — положительные и отрицательные. Одноименные заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные притягиваются друг другом.

2° *Закон сохранения электрических зарядов*: алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе сохраняется постоянной.

Электрический заряд любого тела состоит из целого числа *элементарных зарядов*, равных  $4,8 \cdot 10^{-10}$  электростатических единиц количества электричества (СГСЭ<sub>q</sub>). Наименьшая устойчивая частица, обладающая отрицательным элементарным зарядом, называется *электроном*. Масса электрона равна  $9,1 \cdot 10^{-28}$  г. Наименьшая устойчивая частица, имеющая положительный элементарный заряд, называется *протоном*. Масса протона равна  $1,67 \cdot 10^{-24}$  г. Электроны и протоны входят в состав атомов любого вещества.

В нейтральном (незаряженном) теле содержатся заряды противоположных знаков, равные по абсолютной величине.

Электрические заряды считаются *точечными*, если линейные размеры тел, на которых эти заряды сосредоточены, во много раз меньше любых расстояний, рассматриваемых в данной задаче.

3° *Закон Кулона*: сила  $F$  электростатического взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , находящимися в вакууме, прямо

пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ К}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$  — *электрическая постоянная*.

Для одноименных зарядов ( $q_1 > 0, q_2 > 0$  или  $q_1 < 0, q_2 < 0$ )  $F > 0$ , что соответствует их взаимному отталкиванию. Для разноименных зарядов ( $q_1 > 0, q_2 < 0$  или  $q_1 < 0, q_2 > 0$ )  $F < 0$ , что соответствует взаимному притяжению зарядов.

4° Силы электростатического взаимодействия — центральные силы. Сила  $F_{12}$ , действующая в вакууме на точечный заряд  $q_2$  со стороны точечного заряда  $q_1$ ,

равна:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий заряды  $q_1$  и  $q_2$  (рис. IV.1.1).

5° Если точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  находятся в однородном и безграничном газообразном или жидком диэлектрике, то сила их электростатического взаимодействия

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon$  — *относительная диэлектрическая проницаемость среды*, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами  $q_1$  и  $q_2$  в данной среде меньше, чем в вакууме. Уменьшение силы  $F_{12}$  в  $\epsilon$  раз связано с явлением *электрострикции*, т. е. деформации диэлектрика под влиянием электрического поля. При деформации жидкие и газообразные диэлектрики, прилегаая вплотную к заряженным телам, производят на них дополнительное меха-

ническое воздействие. В твердых диэлектриках заряженные тела располагаются внутри полостей, и при прочих равных условиях силы, действующие на эти тела, зависят от формы полостей.

## 2. Электрическое поле. Напряженность поля

1° Согласно *теории близкого действия* взаимодействия между частицами вещества и удаленными друг от друга макроскопическими телами осуществляются через посредство *физических полей*, которые создаются этими частицами или телами в окружающем пространстве. Поля столь же материальны, как и их источники — частицы и тела. Представление о физических полях тесно связано с конечностью скорости распространения в пространстве изменений любых взаимодействий. В специальной теории относительности (стр. 519) в соответствии с данными опытов утверждается, что эти скорости не превышают скорости света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ .

2° Взаимодействие между неподвижными электрически заряженными частицами или телами осуществляется посредством *электростатического поля*. Электростатическое поле представляет собой стационарное, т. е. не изменяющееся во времени, *электрическое поле*, создаваемое неподвижными зарядами. Оно является частным случаем *электромагнитного поля*, посредством которого осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами, которые в общем случае могут произвольным образом двигаться относительно системы отсчета.

3° Силовой характеристикой электрического поля служит вектор его *напряженности*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0},$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая со стороны поля на неподвижный «пробный» заряд  $q_0$ , помещенный в рассматриваемую точку поля. При этом предполагается, что «пробный» точечный заряд  $q_0$  достаточно мал, так что не искажает поля, напряженность которого с его помощью измеряется. *Напряженность электрического поля* в какой-либо точке численно равна и совпадает по направлению с силой, действующей со стороны поля на помещенный в эту точку единичный положительный «пробный» точечный заряд.

Напряженность электростатического поля не зависит от времени. Электростатическое поле называют *однород-*

ным, если его напряженность  $E$  во всех точках поля одинакова. В противном случае поле называют *неоднородным*.

Для графического изображения электростатических полей пользуются силовыми линиями. Силовыми линиями (*линиями напряженности*) называют линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке поля. Силовые линии электростатического поля разомкнуты. Они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных зарядах (в частности, они могут уходить в бесконечность или приходить из бесконечности). В силу однозначности направления вектора напряженности в каждой точке поля, силовые линии нигде не пересекаются. Траектория свободной заряженной частицы, движущейся в поле, совпадает с силовой линией поля только в том случае, если поле однородно (силовые линии такого поля — система параллельных прямых) и начальная скорость частицы направлена вдоль силовой линии.

4° Результирующая сила  $F$ , действующая на пробный заряд  $q_0$  со стороны поля, созданного системой неподвижных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , равна векторной сумме сил  $F_i$ , приложенных к нему со стороны каждого из полей зарядов  $q_i$ :

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Отсюда следует *принцип наложения (суперпозиции) электрических полей*:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i.$$

Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности.

В случае непрерывного распределения электрических зарядов

$$E = \int dE;$$

интегрирование производится по области, где распределены заряды:

а) вдоль линии, если заряды распределены вдоль линии с линейной плотностью  $\tau = \frac{dq}{dl}$  ( $dq$  — заряд элемента линии длиной  $dl$ );

б) по поверхности, если заряды распределены по поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{dq}{dS}$  ( $dS$  — элементарная площадь поверхности);

в) по объему, если заряды распределены в объеме с объемной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dV}$  ( $dV$  — элемент объема).

5° Если в электростатическом поле имеются диэлектрики, то при рассмотрении этого поля различают два рода зарядов — свободные и связанные. *Связанными зарядами* называют заряды, входящие в состав атомов и молекул диэлектрика, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой. Все остальные заряды называют *свободными*. Примерами свободных зарядов могут служить электроны проводимости в металлах, ионы в газах и электролитах, избыточные заряды, сообщенные проводящему или непроводящему телу и обуславливающие нарушение его электронейтральности, и т. п.

Напряженность поля  $E$  в этом случае равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых свободными ( $E_0$ ) и связанными ( $E_p$ ) зарядами:

$$E = E_0 + E_p$$

В примерах электростатических полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что среда, окружающая свободные заряды, представляет собой изотропный диэлектрик, который однороден либо в пределах всего поля, либо в пределах областей, ограниченных эквипотенциальными поверхностями (стр. 353). При этих условиях

$$E = \frac{E_0}{\epsilon},$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке поля, т. е. при заданном распределении свободных зарядов напряженность электростатического поля в однородном изотропном диэлектрике меньше, чем в вакууме, в  $\epsilon$  раз (*обобщенный закон Кулона*).

6° Напряженность электростатического поля точечного заряда  $q$  равна:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{r}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{r}{r} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $g$  — радиус-вектор, проведенный из точечного заряда в исследуемую точку поля,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Численное значение напряженности:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{l}{er^2} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

7° Напряженность электростатического поля системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  равна:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{er_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad (\text{в СИ});$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{er_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

В частности, для *электрического диполя* — системы двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга, малом по сравнению с расстоянием  $r$  до рассматриваемой точки поля,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 er^3} - \frac{\mathbf{p}_e}{4\pi\epsilon_0 er^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{er^3} - \frac{\mathbf{p}_e}{er^3} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\mathbf{p}_e = ql$  — *электрический момент диполя*; вектор  $l$  направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. В сферической системе координат  $r, \theta$  и  $\varphi$  с центром в середине диполя и полярной осью, параллельной  $\mathbf{p}_e$  (рис. IV.1.2),

$$E_r = \frac{p_e \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 er^3}, \quad E_\theta = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 er^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_r = \frac{2p_e \cos \theta}{er^3}, \quad E_\theta = \frac{p_e \sin \theta}{er^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

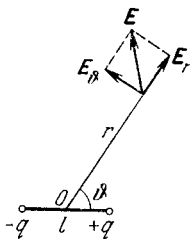


Рис. IV.1.2.

Модуль вектора напряженности:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{er^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{p_e}{er^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

8° Напряженность электростатического поля вне равномерно заряженной бесконечной прямой линии, кругового цилиндра, заряженного по поверхности, в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами (коаксиальная кабель, цилиндрический конденсатор, стр. 360):

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 er} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{E} = \frac{2\tau}{er} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\tau$  — линейная плотность зарядов,  $r$  — радиус-вектор кратчайшего расстояния до рассматриваемой точки поля от оси цилиндра. Напряженность поля внутри цилиндра  $\mathbf{E}_i = 0$ .

9° Напряженность однородного электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 e} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{2\pi\sigma}{e} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов

10° Напряженность электростатического поля между двумя равномерно и разноименно заряженными бесконечными параллельными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 e} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{4\pi\sigma}{e} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

где  $\sigma$  — абсолютная величина поверхностной плотности зарядов обеих плоскостей.

11 Напряженность электростатического поля шара радиуса  $R$ , заряд  $q$  которого равномерно распределен по его поверхности, совпадает вне шара с напряженностью

поля точечного заряда  $q$ , помещенного в центре шара :

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Напряженность поля внутри шара  $\mathbf{E}_i = 0$ .

12° Напряженность электростатического поля шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью  $\rho$ :

$$\left. \begin{aligned} r \geq R: \quad \mathbf{E} &= \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathbf{r}, \\ r \leq R: \quad \mathbf{E} &= \frac{1}{3\epsilon_0 \epsilon} \rho \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} r \geq R: \quad \mathbf{E} &= \frac{4}{3} \frac{\pi}{\epsilon} \rho \left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathbf{r}, \\ r \leq R: \quad \mathbf{E} &= \frac{4}{3\epsilon} \pi \rho \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

### 3. Электрическое смещение. Теорема Остроградского — Гаусса для потока смещения

1° *Электрическим смещением (электрической индукцией)  $\mathbf{D}$  называется векторная величина, характеризующая электрическое поле.*

Для поля в вакууме

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Для поля в диэлектрике

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\mathbf{P}_e$  — вектор поляризации (стр. 364 и 368).

Если среда изотропна, то

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon$  — скалярная величина. Если, кроме того, среда однородна, то  $\mathbf{E}$  обратно пропорционально  $\epsilon$  и  $\mathbf{D}$  не зависит от  $\epsilon$  (при заданном распределении свободных зарядов).

2° *Основной задачей электростатики является отыскание векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в каждой точке электрического поля, созданного данной системой источников поля —*

электрических зарядов. Для решения этой задачи, помимо принципа суперпозиции полей (стр. 344), применяется метод, основанный на вычислении *потока смещения*.

Элементарный поток  $d\Phi_e$  смещения  $\mathbf{D}$  сквозь участок поверхности  $dS$  равен

$$\begin{aligned} d\Phi_e &= (\mathbf{D}\mathbf{n}) dS = D dS \cos(\mathbf{D}, \mathbf{n}) = \\ &= D_n dS = D dS_n, \end{aligned}$$

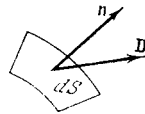


Рис. IV.1.3.

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к площадке  $dS$  (рис. IV.1.3),  $D_n$  — проекция вектора  $\mathbf{D}$  на направление нормали,  $dS_n = dS \cos(\mathbf{D}, \mathbf{n})$ . Поток смещения  $\Phi_e$  сквозь произвольную поверхность  $S$  находится суммированием (интегрированием) всех элементарных потоков:

$$\Phi_e = \int_S D dS \cos(\mathbf{D}, \mathbf{n}) = \int_S D_n dS = \int_S D dS_n.$$

Если поле однородно и плоская поверхность  $S$  расположена перпендикулярно к полю, то  $D_n = D = \text{const}$  и

$$\Phi_e = DS.$$

3° *Теорема Остроградского — Гаусса*: поток смещения  $\Phi_e$  сквозь произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме свободных электрических зарядов  $q_i$ , охватываемых этой поверхностью:

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = 4\pi \sum_i q_i \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Поток смещения  $\Phi_e$  сквозь произвольную замкнутую поверхность, не охватывающую свободных зарядов, равен нулю.

Теорема Остроградского — Гаусса в дифференциальной форме ( $\rho$  — объемная плотность зарядов, стр. 345):

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

В такой форме теорема показывает, что источниками электрического смещения являются свободные электрические заряды. Дифференциальная форма теоремы



является одним из уравнений Максвелла для электромагнитного поля (стр. 501).

Применение теоремы Остроградского – Гаусса к вычислению  $\mathbf{D}$  сводится к выбору такой замкнутой поверхности, чтобы она допускала элементарным путем вычисление потока смещения  $\Phi_e$ .

#### 4. Потенциал электростатического поля

1° Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой  $\mathbf{F}$ , действующей на точечный электрический заряд  $q'$ , находящийся в электростатическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , равна

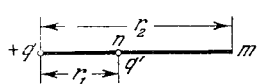


Рис. IV.1.4.

$$dA = F dl \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = q' E \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) dl,$$

где  $dl$  – элементарное перемещение заряда,  $(\mathbf{E}, d\mathbf{l})$  – угол между направлениями векторов  $\mathbf{E}$  и  $d\mathbf{l}$ .

Полная работа  $A$  при конечном перемещении заряда  $q'$  из точки  $n$  в точку  $m$  поля (рис. IV.1.4) равна

$$A = q' \int_n^m \mathbf{E} dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

2° Если электростатическое поле создано точечным зарядом  $+q$ , то

$$A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$A = \frac{qq'}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния точек  $n$  и  $m$  от заряда  $q$ ,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость.

Работа электрических сил отталкивания одноименных зарядов положительна при удалении их друг от друга и отрицательна, если заряды сближаются. Работа электрических сил притяжения разноименных зарядов положительна при сближении их и отрицательна при удалении зарядов друг от друга. Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда  $q'$  в поле, созданном зарядом  $q$ , не зависит от формы пути, а зависит лишь от начального и конечного положений заряда (потенциальность электростатических сил, стр. 61).

Работа, которую совершают электрические силы при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому пути  $L$ , численно равна

$$A = \oint_L \mathbf{E} dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}).$$

Этот интеграл называется *циркуляцией напряженности* по замкнутому контуру  $L$ .

Циркуляция напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю (потенциальный характер электростатического поля):

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = \oint_L E dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

Условие потенциальности электростатического поля в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

3° Работа, совершаемая силами поля при перемещении электрического заряда  $q'$  в электростатическом поле, созданном зарядом  $q$ , равна убыли потенциальной энергии  $W_{II}$  заряда  $q'$ :

$$A = -\Delta W_{II} = W_{II1} - W_{II2},$$

где  $W_{II1}$  и  $W_{II2}$  – значения потенциальной энергии заряда в начальной и конечной точках траектории. При перемещении заряда  $q'$  в электростатическом поле, созданном произвольной системой зарядов  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , электростатические силы совершают работу, равную алгебраической сумме работ, произведенных силами, действующими на  $q'$  со стороны каждого из зарядов  $q_i$ .

Изменение потенциальной энергии  $\Delta W_{II}$  заряда  $q'$  при перемещении его из точки 1 в точку 2 в поле системы точечных зарядов  $q_i$ :

$$\Delta W_{II} = q' \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i1}} \right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta W_{II} = q' \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i}{\epsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{\epsilon r_{i1}} \right) \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r_{i1}$  и  $r_{i2}$  – начальное и конечное расстояния между зарядами  $q_i$  и  $q'$ ; суммирование проводится по всем  $n$  зарядам системы.

4° Потенциальная энергия электрического заряда  $q'$  в данной точке электростатического поля, удаленной на расстояние  $r$  от заряда  $q$ , создающего поле, при условии, что  $W_{II}(\infty) = 0$ , равна:

$$W_{II} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{II} = \frac{qq'}{er} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Потенциальная энергия отталкивания одноименных зарядов положительна и возрастает при сближении зарядов. Потенциальная энергия притяжения разноименных зарядов отрицательна и возрастает до нуля при удалении одного из зарядов в бесконечность. На рис. IV.1.5 показана зависимость  $W_{II}(r)$  для двух точечных зарядов.

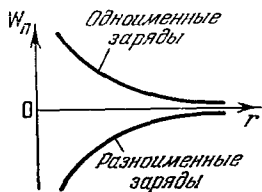


Рис. IV.1.5.

5° Потенциал электрического поля является его энергетической характеристикой. *Потенциалом* в данной точке поля называется скалярная величина, численно равная потенциальной энергии  $W_{II}$  единичного положительного заряда, помещенного в эту точку:

$$\varphi = \frac{W_{II}}{q}.$$

6° Работа, которая совершается силами электростатического поля при перемещении точечного электрического заряда  $q$ , равна произведению этого заряда на *разность потенциалов* в начальной 1 и конечной 2 точках пути:

$$A = W_{II1} - W_{II2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если точка 2 находится в бесконечности, то  $W_{II2} = 0$  и принимается, что  $\varphi_2 = 0$ . Работа  $A_\infty$  перемещения заряда  $q$  из точки 1 в  $\infty$ :

$$A_\infty = W_{II1} = q\varphi_1;$$

следовательно,  $\varphi = A_\infty/q$ .

Потенциал электростатического поля численно равен работе, совершаемой электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда из данной

точки поля в бесконечность. Потенциал численно равен также работе, которую совершают внешние силы (против сил электрического поля) при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку.

Часто за нуль потенциала принимается не значение его в бесконечности, а значение потенциала Земли. Это несущественно, ибо во всех практических расчетах важно знать разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, а не абсолютные значения потенциалов в этих точках.

7° *Эквипотенциальной поверхностью* называется геометрическое место точек в электростатическом поле, имеющих одинаковый потенциал. В любой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности электростатического поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала.

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Напряженность в произвольной точке электростатического поля равна градиенту потенциала поля в этой точке, взятому со знаком минус. Знак минус показывает, что вектор  $\mathbf{E}$  направлен, как указано выше.

Так как в любой точке поля  $\mathbf{E}$  — величина конечная, то  $\varphi$  — непрерывная функция координат точек поля.

8° При наложении электростатических полей их потенциалы складываются алгебраически. Если в электростатическом поле имеются диэлектрики, то потенциал  $\varphi$  в произвольной точке поля равен алгебраической сумме потенциалов в этой точке для полей, создаваемых свободными ( $\varphi_0$ ) и связанными ( $\varphi_p$ ) зарядами (стр. 345):

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_p.$$

При условии, что  $\varphi(\infty) = 0$ ,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int \frac{e+e_p}{r} dV + \int \frac{\sigma+\sigma_p}{r} dS \right] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \int \frac{e+e_p}{r} dV + \int \frac{\sigma+\sigma_p}{r} dS \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $e$  и  $e_p$  — объемные плотности свободных и связанных зарядов,  $\sigma$  и  $\sigma_p$  — поверхностные плотности свободных и связанных зарядов,  $r$  — расстояние от элементов объема  $dV$  и поверхности  $dS$  до рассматриваемой точки поля, а

интегрирование производится по всему пространству, занятому свободными и связанными зарядами.

В примерах электростатических полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что диэлектрик, заполняющий поле, однороден и изотропен. В таком случае при заданном распределении свободных зарядов потенциал электростатического поля в диэлектрике в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме:  $\varphi = \varphi_0/\epsilon$  — и удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon}, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов.

9° Потенциал поля точечного заряда  $q$  при условии  $\varphi(\infty) = 0$  равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r$  — расстояние точки поля, обладающей потенциалом  $\varphi$ , от заряда  $q$ ;  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

10° Потенциал поля произвольной системы точечных зарядов  $q_1, \dots, q_n$  при условии  $\varphi(\infty) = 0$  равен:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_i} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon r_i} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

В частности, потенциал поля диполя (стр. 346) равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(\mathbf{p}_* \cdot \mathbf{r})}{\epsilon r^3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{(\mathbf{p}_* \cdot \mathbf{r})}{\epsilon r^3} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\mathbf{p}_*$  — электрический момент диполя,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра диполя в исследуемую точку поля.

11° Потенциал электростатического поля, созданного заряженными поверхностями (потенциал поля поверхностных зарядов), при условии  $\varphi(\infty) = 0$  равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma dS}{\epsilon r} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Потенциал поля объемных зарядов при условии  $\varphi(\infty) = 0$  равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{\epsilon r} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Здесь  $\rho$  и  $\sigma$  — объемная и поверхностная плотности свободных зарядов,  $r$  — расстояние от элементарного объемного заряда  $\rho dV$  или поверхностного заряда  $\sigma dS$  до рассматриваемой точки поля. Интегрирование производится по поверхностям и объемам, где распределены электрические заряды.

12° Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от равномерно заряженной бесконечной прямой линии, равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\tau}{\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\tau$  — линейная плотность зарядов,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Те же формулы справедливы для поля, создаваемого равномерно заряженным круговым цилиндром радиуса  $R$  и бесконечной длины, если  $r \geq R$ .

13° Разность потенциалов между двумя точками поля 1 и 2, расположенными на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от равномерно заряженной бесконечной плоскости, равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} (x_2 - x_1) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi \sigma}{\epsilon} (x_2 - x_1) \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов.

14° Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между двумя равномерно и разноименно заряженными бесконечными параллельными плоскостями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi\sigma d}{\epsilon} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $d$  — расстояние между плоскостями.

15° Потенциал электростатического поля шара радиуса  $R$  с зарядом  $q$ , равномерно распределенным по его поверхности, вне шара совпадает с потенциалом поля точечного заряда  $q$ , помещенного в центре шара [ $\varphi(\infty) = 0$ ]:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon R} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Внутри шара потенциал поля постоянен и равен  $\varphi(R)$ .

16° Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между двумя точками электростатического поля шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью зарядов  $\rho$ :

внутри шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{r_1 r_2 \epsilon} (r_2^2 - r_1^2) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2}{3\epsilon} (\rho r_2^2 - \rho r_1^2) \quad (\text{в системе СГСЭ});$$

вне шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $q = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$  — общий заряд шара,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точек до центра шара.

## 5. Проводники в электростатическом поле

1° Под действием внешнего электростатического поля заряды в проводнике (электроны проводимости в металлическом проводнике) перераспределяются таким образом, что напряженность результирующего поля в любой точке

внутри проводника равна нулю ( $\mathbf{E} = 0$ ). Во всех точках его поверхности  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n \neq 0$  и  $\mathbf{E}_\tau = 0$ , где  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{E}_\tau$  — соответственно нормальная и касательная составляющие вектора напряженности. Весь объем проводника является эквипотенциальным: во всех точках внутри проводника потенциал  $\varphi$  одинаков. Поверхность проводника также эквипотенциальна. В заряженном проводнике некомпенсированные электрические заряды располагаются только на его поверхности.

2° Электрическое смещение и напряженность поля в однородном и изотропном диэлектрике вблизи поверхности заряженного проводника (вне его):

$$\left. \begin{aligned} D &= \sigma, \\ E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}, \\ E &= \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\sigma$  — поверхностная плотность электрических зарядов на проводнике.

Распределение электрических зарядов на поверхности проводников различной формы, находящихся в однородном диэлектрике, зависит от кривизны поверхности:  $\sigma$  возрастает с увеличением кривизны. На поверхностях внутренних полостей в проводниках  $\sigma = 0$ . Многократная передача зарядов по проводнику повышает его потенциал до величин, ограничиваемых стеканием зарядов с проводника. На этом принципе основан *электростатический генератор Ван-де-Граафа*, применяемый в линейных ускорителях (стр. 445).

3° На элемент  $dS$  поверхности заряженного проводника действует сила  $d\mathbf{F}$ , направленная в сторону внешней нормали к поверхности проводника. Если проводник находится в вакууме, то

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dS \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{E^2}{8} dS \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $E$  — напряженность электростатического поля у поверхности проводника. Если проводник находится в

однородном жидком или газообразном диэлектрике, то благодаря явлению электрострикции (стр. 342) сила  $dF$  в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме:

$$dF = \frac{\sigma^2 dS}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} dS \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} dS = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dS \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $E$  — напряженность электростатического поля в диэлектрике вблизи поверхности проводника.

Давление  $p$  на поверхность заряженного проводника, вызванное этой силой, равно:

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Силы  $F$  притяжения, действующие на разноименно заряженные обкладки плоского конденсатора (стр. 360), разделенные твердым диэлектриком, такие же как и в том случае, когда между обкладками находится вакуум:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = 2\pi\sigma^2 S \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $S$  — площадь обкладки,  $\sigma$  — поверхностная плотность свободных зарядов на обкладках.

Если пространство между пластинами заполнено однородным жидким или газообразным диэлектриком, то

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon\epsilon_0} S = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} S \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} S \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $E$  — напряженность поля в конденсаторе (стр. 347).

4° Явление, состоящее в электризации незаряженного проводника во внешнем электростатическом поле, называют *электростатической индукцией*. Оно заключается в разделении положительных и отрицательных зарядов, имеющих в проводнике в равных количествах. *Наведенные (индуцированные) заряды* исчезают при удалении проводника из электростатического поля. При любом способе электризации проводника электрические заряды

распределяются на его поверхности, и внутренняя полость в замкнутом проводнике экранируется от внешних электростатических полей. На этом основана *электростатическая защита*.

## 6. Электроемкость

1° При увеличении заряда  $q$  проводника пропорционально возрастает поверхностная плотность зарядов в любой точке его поверхности:

$$\sigma = kq,$$

где  $k$  — некоторая функция координат рассматриваемой точки поверхности. Потенциал поля, создаваемого заряженным проводником в однородном и изотропном диэлектрике (стр. 355):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{k dS}{r} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \oint_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{\epsilon} \oint_S \frac{k dS}{r} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Для точек поверхности  $S$  проводника интеграл зависит только от ее размеров и формы.

Потенциал  $\varphi$  уединенного заряженного проводника, на который не действуют внешние электростатические поля, пропорционален его заряду  $q$ . Величина

$$C = q/\varphi, \quad \text{или} \quad C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \left( \oint_S \frac{k dS}{r} \right)^{-1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \epsilon \left( \oint_S \frac{k dS}{r} \right)^{-1} \quad (\text{в системе СГСЭ})$$

называется *электроемкостью (емкостью)* уединенного проводника. Она численно равна заряду, изменяющему потенциал проводника на одну единицу. Емкость проводника зависит от его формы и линейных размеров. Геометрически подобные проводники имеют емкости, прямо пропорциональные их линейным размерам. Электроемкость не зависит от материала проводника, его агрегатного состояния и прямо пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник.

2° Емкость уединенного шара:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \epsilon R \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $R$  – радиус шара,  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

3° *Взаимной емкостью* двух проводников называется величина, численно равная заряду  $q$ , который нужно перенести с одного проводника на другой для того, чтобы изменить разность потенциалов между ними  $\varphi_1 - \varphi_2$  на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Взаимная емкость зависит от формы, размеров и взаимного расположения проводников, а также от относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой они находятся.

4° *Конденсатором* называется система двух разноименно заряженных равными по абсолютной величине зарядами проводников, имеющих такую форму и расположение друг относительно друга, что поле, создаваемое такой системой, сосредоточено (локализовано) в ограниченной области пространства. Сами проводники называются *обкладками конденсатора*. Емкость конденсатора является взаимной емкостью его обкладок.

5° Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $S$  – площадь каждой из пластин или меньшей из них,  $d$  – расстояние между пластинами. Емкость плоского многопластинчатого конденсатора отличается от емкости плоского конденсатора заменой  $S$  на  $S(n-1)$ , где  $n$  – число пластин.

6° Емкость цилиндрического конденсатора и коаксиального кабеля:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r_2, r_1$  – радиусы внешнего и внутреннего цилиндров,  $l$  – длина цилиндра.

7° Емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $r_2, r_1$  – радиусы внешней и внутренней сфер.

8° Емкость двухпроводной линии:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{d-r}{r}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$C = \frac{\epsilon l}{4 \ln \frac{d-r}{r}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $d$  – расстояние между осями проводов,  $r$  – радиус проводов.

9° Для всех типов конденсаторов существует *пробивное напряжение* – разность потенциалов между обкладками, при которой происходит электрический разряд через слой диэлектрика. Пробивное напряжение зависит от толщины диэлектрика, его свойств и формы обкладок.

10° Для увеличения емкости применяется *параллельное соединение конденсаторов* одноименно заряженными обкладками. Результирующая емкость при таком соединении равна

$$C = \sum_{i=1}^n C_i,$$

где  $C_i$  – емкость  $i$ -го конденсатора.

11° При *последовательном соединении конденсаторов* они соединяются разноименно заряженными обкладками. При этом

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Результирующая емкость всегда меньше минимальной емкости любого конденсатора, входящего в соединение.

## 7. Диэлектрики в электрическом поле

1° *Диэлектриками* называются вещества, не проводящие электрического тока. В них отсутствуют свободные электрические заряды. Квантовые представления о диэлектриках в зонной теории твердых тел – см. стр. 734 – 739.

2° По своим электрическим свойствам молекулы диэлектрика эквивалентны электрическим диполям с моментом  $\mathbf{p}_e = q\mathbf{l}$ , где  $q$  — суммарная величина положительных (или равных им отрицательных) зарядов молекулы,  $l$  — расстояние между центрами тяжести положительных и отрицательных зарядов. Если в отсутствие внешнего электрического поля  $l = 0$ , то диэлектрики называются *неполярными*; если в тех же условиях  $l \neq 0$ , то диэлектрики называются *полярными*.

3° В молекулах неполярных диэлектриков ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{CCl}_4$ , углеводороды и др.) центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего поля совпадают и дипольный момент молекулы равен нулю. При помещении таких диэлектриков во внешнее электрическое поле происходит деформация молекулы (атома) и возникает индуцированный дипольный электрический момент молекулы (*индуцированный*, или *квазидиполь*), пропорциональный напряженности поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{p}_e = \epsilon_0 a \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{p}_e = a \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $a$  — коэффициент поляризуемости (*поляризуемость*) молекулы или атома,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная (стр. 342). Поляризуемость молекулы зависит только от ее объема. Тепловое движение молекул неполярных диэлектриков не влияет на возникновение у них дипольных моментов:  $a$  не зависит от температуры.

4° Молекулы полярных диэлектриков ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{CH}_3\text{Cl}$  и др.) имеют *постоянный дипольный момент*  $\mathbf{p}_e = \text{const}$ , связанный с асимметрией в расположении электронных облаков и ядер этих молекул. Центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в таких молекулах не совпадают (находятся на практически постоянном расстоянии  $l$  друг от друга — *жесткий диполь*).

5° На жесткий диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}_e$ , помещенный во внешнее однородное электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , действует пара сил с моментом  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_e, \mathbf{E}],$$

стремящаяся повернуть диполь в направлении вектора напряженности поля. В реальных молекулах полярных диэлектриков действие внешнего поля приводит, кроме того, к появлению индуцированного дипольного момента (п. 3°).

6° На жесткий диполь, помещенный во внешнее однородное электрическое поле, действует сила  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \text{grad} (\mathbf{p}_e \mathbf{E}) = p_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l},$$

где  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$  — изменение  $\mathbf{E}$  на единице длины вдоль оси диполя. Сила  $\mathbf{F}$  направлена вдоль вектора  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$  и стремится переместить диполь в область больших значений  $\mathbf{E}$  поля.

7° Потенциальная энергия  $W_{\text{п}}$  жесткого диполя, помещенного во внешнее электрическое поле, равна

$$W_{\text{п}} = -(\mathbf{p}_e \mathbf{E}) = -p_e E \cos \vartheta,$$

где  $\mathbf{p}_e$  — электрический момент диполя,  $\mathbf{E}$  — напряженность внешнего поля в месте расположения диполя,  $\vartheta$  — угол между осью диполя и направлением вектора  $\mathbf{E}$ . Знак минус показывает, что устойчивым положением диполя, соответствующим минимуму потенциальной энергии, является расположение его вектора  $\mathbf{p}_e$  вдоль положительного направления вектора  $\mathbf{E}$ .

8° На каждый элемент объема диэлектрика, находящегося в неоднородном электростатическом поле  $\mathbf{E}$ , действует сила, равная равнодействующей всех сил, приложенных к отдельным его молекулам. Объемная плотность  $\mathbf{f}$  сил, т. е. сила, приложенная к единице объема диэлектрика:

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \text{grad} E^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{f} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad} E^2 \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Формула справедлива для слабо поляризующихся диэлектриков ( $\epsilon \ll 1$ , п. 10°). Сила  $\mathbf{f}$  направлена в сторону возрастания абсолютной величины вектора  $\mathbf{E}$ , независимо от направления этого вектора.

9° В отсутствие внешнего электрического поля электрические моменты молекул диэлектрика, не являющегося сегнетоэлектриком (стр. 370), если и отличны от нуля, то ориентированы совершенно беспорядочно. Поэтому результирующий дипольный электрический момент любого элемента объема  $\Delta V$  диэлектрика, содержащего большое число молекул, равен нулю.

Во внешнем электрическом поле диэлектрики *поляризуются*, т. е. переходят в состояние, характеризующееся тем, что дипольные моменты каждого элемента объема

$\Delta U$  диэлектрика отличны от нуля. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называют *поляризованным*. Различают:

а) *ориентационную поляризацию* диэлектрика с полярными молекулами. Она состоит в повороте осей жестких диполей вдоль направления вектора напряженности поля. В результате совместного действия электрического поля и теплового движения, дезориентирующего молекулы-диполи, возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул вдоль направления поля. Ориентационная поляризация возрастает с увеличением напряженности поля и убывает при повышении температуры; она имеет место в ряде жидкостей и газов;

б) *электронную поляризацию* диэлектрика с неполярными молекулами, состоящую в возникновении у каждой молекулы индуцированного электрического момента (стр. 362) и осуществляющуюся в ряде жидкостей и газов;

в) *ионную поляризацию* в кристаллических диэлектриках типа NaCl, CsCl и др., имеющих ионные кристаллические решетки (стр. 268). Она состоит в смещении положительных ионов решетки вдоль направления поля, а отрицательных ионов — в противоположную сторону.

10° Мерой поляризации диэлектрика является *вектор поляризации (поляризованность)*  $\mathbf{P}_e$  — векторная сумма дипольных моментов молекул (атомов), находящихся в единице объема:

$$\mathbf{P}_e = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ei} \right),$$

где  $n$  — число диполей-молекул, содержащихся в объеме  $V$  диэлектрика,  $\mathbf{p}_{ei}$  — дипольный электрический момент  $i$ -й молекулы (атома). Для однородного диэлектрика с неполярными молекулами, находящегося в однородном электрическом поле,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \mathbf{p}_e,$$

где  $\mathbf{p}_e$  — индуцированный момент одной молекулы,  $n_0$  — число молекул в единице объема. Используя формулу, приведенную на стр. 362, получим:

$$\mathbf{P}_e = \epsilon_0 n_0 \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa_e \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{P}_e = n_0 \alpha \mathbf{E} = \kappa_e \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\kappa_e = n_0 \alpha$  — *диэлектрическая восприимчивость* вещества, или поляризуемость единицы объема диэлектрика, пропорциональная объему всех молекул в  $1 \text{ см}^3$ .

В случае однородного диэлектрика с полярными молекулами, помещенного в однородное электрическое поле,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \bar{\mathbf{p}}_e,$$

где  $\bar{\mathbf{p}}_e$  — среднее значение составляющей вдоль поля вектора постоянного дипольного момента молекулы, вычисляемое с помощью распределения Больцмана для частиц в силовом поле (стр. 224):

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{p}}_e| &= L(a) p_e = \\ &= \left( \text{cth } a - \frac{1}{a} \right) p_e, \end{aligned}$$

где  $L(a)$  — *классическая функция Ланжевена* (рис. IV.1.6),  $a = p_e E / kT$  (в системе СГСЭ). При  $a \ll 1$   $L(a) \approx a/3$  и

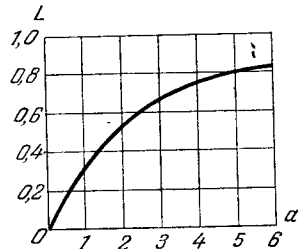


Рис. IV.1.6.

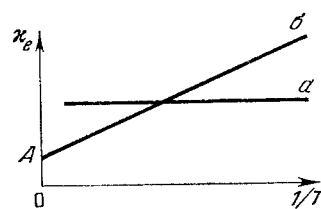


Рис. IV.1.7.

$$\mathbf{P}_e = \epsilon_0 \kappa_e \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{P}_e = \kappa_e \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ});$$

$\kappa_e$  вычисляется по формуле Дебая — Ланжевена:

$$\kappa_e = \frac{n_0 p_e^2}{3 \epsilon_0 k T} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\kappa_e = \frac{n_0 p_e^2}{3 k T} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $n_0$  — число молекул в единице объема диэлектрика.

На рис. IV.1.7 приведена зависимость  $\kappa_e$  от  $1/T$  для неполярных ( $\alpha$ ) и полярных ( $\sigma$ ) молекул. Отрезок  $OA$  характеризует электронную поляризуемость в неполярных молекулах.

11° В поляризованном диэлектрике на каждую молекулу действует *эффективное электрическое поле* с напряженностью  $\mathbf{E}_{\text{эф}}$ , внешнее по отношению к данной



молекуле.  $E_{эфф}$  отличается от напряженности среднего макроскопического поля  $E$  в диэлектрике. Для неполяризованных молекул

$$E_{эфф} = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_{эфф} = E + \frac{4\pi}{3} P_e \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $P_e$  — вектор поляризации. К диэлектрикам с жесткими диполями эта формула неприменима, и зависимость  $E_{эфф}$  ( $P_e$ ) носит сложный характер.

12° В неполяризованном диэлектрике объемная ( $\rho_p$ ) и поверхностная ( $\sigma_p$ ) плотности связанных зарядов (стр. 345) равны нулю. В процессе поляризации диэлектрика происходит смещение связанных зарядов. В поляризованном диэлектрике значения  $\rho_p$  и  $\sigma_p$  зависят от вектора поляризации. Поэтому соответствующие объемные и поверхностные связанные заряды называют *поляризационными зарядами*. Объемные поляризационные заряды возникают в диэлектрике, поляризация которого неоднородна:

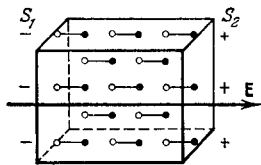


Рис. IV.1.8.

$$\rho_p = -\operatorname{div} P_e.$$

Если диэлектрик однороден и находится в однородном электрическом поле (рис. IV.1.8), то  $\operatorname{div} P_e = 0$  и  $\rho_p = 0$ .

Поверхностные поляризационные заряды возникают на поверхностях раздела либо между разнородными поляризованными диэлектриками, либо между поляризованным диэлектриком и вакуумом или проводником. Если  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$  — векторы поляризации первой и второй сред в какой-либо точке  $A$  поверхности  $S$  их раздела, а  $P_{e1n}$  и  $P_{e2n}$  — проекции этих векторов на внешнюю (по отношению к первой среде) нормаль к поверхности  $S$  в точке  $A$ , то поверхностная плотность поляризационных зарядов в точке  $A$

$$\sigma_p = -(P_{e2n} - P_{e1n}).$$

В частности, если вторая среда — вакуум или проводник, то

$$P_{e2} = 0, \quad P_{e1} = P_e \quad \text{и} \quad \sigma_p = P_{en}.$$

13° Внешнее, поляризующее электрическое поле  $E_0$ , которое является причиной появления связанных зарядов, создается системой свободных электрических зарядов. В диэлектрике векторно складываются поле  $E_0$  и поле связанных зарядов  $E_p$ . Вектор напряженности поля в диэлектрике  $E$  характеризует результирующее макроскопическое поле. Поэтому  $E$  зависит от электрических свойств среды.

Пример. Однородный диэлектрик в однородном электростатическом поле между двумя параллельными проводящими плоскостями  $AA'$  и  $BB'$ , равномерно заряженными, с соответствующими плотностями, соответственно равными  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. IV.1.9).

Объемная плотность поляризационных зарядов  $\rho_p = 0$ . Поверхностные плотности поляризационных зарядов на поверхностях диэлектрика, прилегающих к плоскостям  $AA'$  и  $BB'$ , соответственно равны  $-\sigma_p$  и  $+\sigma_p$ , где

$$\sigma_p = P_e = \epsilon_0 \kappa_e E \quad (\text{в СИ}),$$

$$\sigma_p = P_e = \kappa_e E \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Поляризационные заряды создают внутри диэлектрика дополнительное поле, напряженность которого  $E_p$  противоположна по направлению  $E_0$  и  $E$  и численно равна:

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \kappa_e E \quad (\text{в СИ}),$$

$$E_p = 4\pi \sigma_p = 4\pi \kappa_e E \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Напряженность результирующего поля в диэлектрике:

$$E = E_0 + E_p = E_0 - \kappa_e E \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = E_0 + E_p = E_0 - 4\pi \kappa_e E \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Следовательно,

$$E = \frac{1}{1 + \kappa_e} E_0 = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (\text{в СИ}),$$

$$E = \frac{1}{1 + 4\pi \kappa_e} E_0 = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика (см. п. 15°).

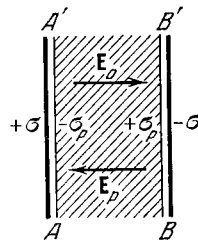


Рис. IV.1.9.

14° Теорема Остроградского – Гаусса (стр. 349) для вектора смещения  $\mathbf{D}$  в произвольной среде:

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum q_{\text{своб}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = 4\pi \sum q_{\text{своб}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\sum q_{\text{своб}}$  – сумма свободных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$ ,  $\oint_S \mathbf{D}_n dS$  – поток смещения

сквозь эту поверхность.

Теорема Остроградского – Гаусса для вектора напряженности  $\mathbf{E}$  в диэлектрике:

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \left( \sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}} \right) \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\oint_S E_n dS$  – поток напряженности сквозь замкнутую поверхность  $S$ ;  $\sum q_{\text{своб}}$  – сумма свободных зарядов, охватываемых поверхностью  $S$ ;  $\sum q_{\text{связ}}$  – сумма связанных зарядов, охватываемых этой поверхностью;  $\sum q_{\text{связ}} = -\oint_S P_{en} dS$ ,  $P_{en}$  – значение проекции вектора поляризации  $\mathbf{P}_e$  на направление внешней нормали к элементу поверхности  $dS$ .

15° Связь векторов смещения  $\mathbf{D}$ , напряженности  $\mathbf{E}$  и поляризации  $\mathbf{P}_e$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

В изотропных диэлектриках вектор поляризации  $\mathbf{P}_e$  пропорционален напряженности поля  $\mathbf{E}$  и совпадает с  $\mathbf{E}$  по направлению. Поэтому

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость, являющаяся скалярной величиной. Связь между  $\varepsilon$  и ди-

электрической восприимчивостью  $\kappa_e$  (стр. 364) имеет вид:

$$\varepsilon = 1 + \kappa_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \kappa_e \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

16° С учетом отличия эффекта внешнего поля, действующего в диэлектрике (стр. 365), от среднего макроскопического поля, для неполярных диэлектриков связь  $\varepsilon$  и  $\kappa_e$  выражается уравнением К.ла, зюса – Мосотти:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} &= \frac{1}{3} \kappa_e, \\ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{\rho} &= \frac{N_A \alpha}{3} = \Omega \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} &= \frac{4\pi}{3} \kappa_e, \\ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{\rho} &= \frac{4\pi}{3} N_A \alpha = \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\mu$  – молекулярный вес вещества,  $\rho$  – его плотность,  $N_A$  – число Авогадро,  $\alpha$  – поляризуемость молекулы,  $\Omega$  и  $\Omega_1$  – величины молярной (молекулярной) рефракции, пропорциональные объему всех молекул соответственно в 1 моле и в 1 моле вещества.

17° В анизотропном кристаллическом диэлектрике электрические свойства различны в разных направлениях ( $\kappa_e$  и  $\varepsilon$  – тензорные величины). Поэтому в общем случае векторы  $\mathbf{P}_e$  и  $\mathbf{D}$  не совпадают по направлению с вектором  $\mathbf{E}$  напряженности поля.

Для анизотропных кристаллов, не являющихся пироэлектриками, т. е. не обладающих спонтанной поляризацией в отсутствие внешнего поля, связь между проекциями векторов  $\mathbf{P}_e$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеет вид:

$$P_{ei} = \varepsilon_0 \sum_j \kappa_{ej} E_j \quad (\text{в СИ}),$$

$$P_{ei} = \sum_j \kappa_{ej} E_j \quad (\text{в системе СГСЭ});$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (\text{в СИ}),$$

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $i, j = x, y, z$ ;  $\kappa_{ej} = \kappa_{jeh}$  и  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{jih}$ .

Значения  $\kappa_{ej}$  и  $\varepsilon_{ij}$  зависят от ориентации осей координат по отношению к кристаллографическим осям диэлек-

трика. При соответствующем выборе осей  $x, y, z$  величины  $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$  и  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$  могут быть одновременно обращены в нуль, так что диэлектрические свойства анизотропного кристалла будут полностью характеризоваться тремя главными значениями диэлектрической восприимчивости:

$$\kappa_{e1} = \kappa_{e22}, \quad \kappa_{e2} = \kappa_{e33} \quad \text{и} \quad \kappa_{e3} = \kappa_{e11}$$

и соответствующими им тремя главными значениями относительной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx} = 1 + \kappa_{e1}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} = 1 + \kappa_{e2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} = 1 + \kappa_{e3}$$

(в СИ),

$$\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\kappa_{e1}, \quad \varepsilon_2 = 1 + 4\pi\kappa_{e2}, \quad \varepsilon_3 = 1 + 4\pi\kappa_{e3}$$

(в системе СГСЭ).

## 8. Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект

1° Сегнетоэлектриками называется группа кристаллических диэлектриков, у которых в отсутствие внешнего электрического поля возникает самопроизвольная (спонтанная) ориентация дипольных моментов частиц, входящих в состав кристаллической решетки. В результате этого сегнетоэлектрики состоят из совокупности микроскопических областей (доменов), поляризованных в различных направлениях. Свое название сегнетоэлектрики получили по первоначально

наблюдению спонтанной ориентации дипольных моментов частиц, входящих в состав кристаллической решетки. В результате этого сегнетоэлектрики состоят из совокупности микроскопических областей (доменов), поляризованных в различных направлениях. Свое название сегнетоэлектрики получили по первоначально

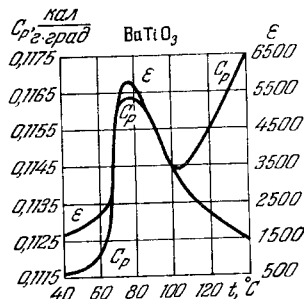


Рис. IV.1.10.

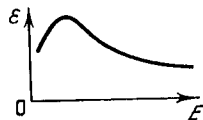


Рис. IV.1.11.

обнаруженному кристаллическому веществу с такими свойствами — сегнетовой соли  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ . Сегнетоэлектриками являются также титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ , дигидрофосфат калия  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  и др.

2° Относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  сегнетоэлектриков резко возрастает в определенном интер-

вале температур (рис. IV.1.10) и является функцией напряженности  $E$  поля в веществе:  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  (рис. IV.1.11). В связи с этим зависимость  $D$  от  $E$  при не очень больших полях является нелинейной. При достаточно больших значениях  $E$  происходит насыщение — вектор поляризации  $P_e$  перестает изменяться с ростом  $E$ .

3° Спонтанная поляризация в сегнетоэлектриках происходит в области температур, ограниченных, вообще говоря, верхней и нижней точками Кюри  $\Theta$ .

Для сегнетовой соли  $\Theta_{\text{верх}} = 297^\circ \text{K}$ ,  $\Theta_{\text{нижн}} = 255^\circ \text{K}$ .

Наличие одной точки Кюри  $\Theta$ , выше которой характерные свойства сегнетоэлектриков исчезают, обязательно для всех представителей этого типа веществ. При  $T > \Theta$  тепловое движение нарушает спонтанную ориентацию дипольных моментов внутри доменов. Вблизи точки Кюри наблюдается резкое возрастание теплоемкости (рис. IV.1.10), что свидетельствует о наличии в этой точке фазового перехода второго рода (стр. 198)<sup>1)</sup>.

4° В сегнетоэлектриках наблюдается явление диэлектрического гистерезиса (запаздывания; рис. IV.1.12).  $P_{e0}$  характеризует остаточную поляризацию,  $E_k$  — величину напряженности поля обратного направления, при которой исчезает поляризация сегнетоэлектрика.

5° Пьезоэлектрический эффект (пьезоэффект) состоит в том, что при механических деформациях некоторых кристаллов в определенных направлениях на их гранях появляются электрические заряды противоположных знаков. Пьезоэффект наблюдается в кварце, турмалине, сегнетовой соли, титанате бария, цинковой обманке и других веществах. Пьезоэлектрический эффект в кварце происходит вдоль электрических осей  $X_1, X_2, X_3$  кристалла (рис. IV.1.13), перпендикулярных к его оптической

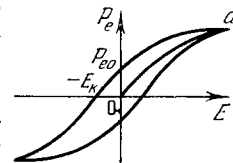


Рис. IV.1.12.

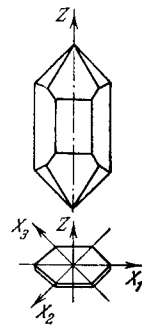


Рис. IV.1.13.

<sup>1)</sup> У некоторых сегнетоэлектриков (например,  $\text{BaTiO}_3$ ) в точке Кюри происходит фазовый переход первого рода.

оси  $Z$  (стр. 654). Обращение направления деформации кристалла изменяет знаки зарядов на поверхностях на противоположные. *Обратный пьезоэлектрический эффект* заключается в изменении линейных размеров некоторых кристаллов под действием электрического поля. Изменение направления электрического поля вызывает изменение характера деформаций на противоположный. Этот эффект имеет большое значение для получения ультразвука (стр. 557).

### 9. Энергия заряженного проводника и электрического поля

1° Энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ :

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  — потенциал в точке нахождения заряда  $q_i$  для электростатического поля, создаваемого всеми зарядами системы, за исключением заряда  $q_i$ .

Если заряды находятся в однородном изотропном диэлектрике, то

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{\substack{i,k \\ (k \neq i)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{\substack{i,k \\ (k \neq i)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $r_{ik}$  — расстояние между зарядами  $q_i$  и  $q_k$ .

2° Полная электрическая энергия  $W_e$  системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , т. е. заряженных тел, расстояния между которыми во много раз больше линейных размеров этих тел, отличается от  $W_{\text{вз}}$  на величину суммы собственных энергий заряженных тел (зарядов  $q_i$ ):

$$W_e = W_{\text{вз}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{соб}i},$$

*Собственной энергией заряженного проводника* называют энергию взаимодействия зарядов, находящихся на этом проводнике. Энергия проводника, не подверженного

действию внешнего поля, представляет собой собственную энергию этого проводника. Она равна

$$W_{\text{соб}} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2},$$

где  $C$  — емкость проводника,  $q$  и  $\varphi$  — его заряд и потенциал (при  $q = 0$   $\varphi = 0$ ). Собственная энергия проводника, в отличие от  $W_{\text{вз}}$ , не может быть отрицательной. Она равна нулю, если проводник не заряжен. Для любых двух проводников сумма их собственных энергий всегда больше (или в крайнем случае равна, если проводники не заряжены) их взаимной энергии:

$$(W_{\text{соб}})_1 + (W_{\text{соб}})_2 \geq W_{\text{вз}}.$$

3° Полная электрическая энергия системы заряженных проводников равна

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где  $q_i$  — заряд  $i$ -го проводника, а  $\varphi_i$  — потенциал проводника, обусловленный как полем всех остальных проводников, так и его собственным полем.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W_e = \frac{q \Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta\varphi^2}{2},$$

где  $q$  — заряд конденсатора,  $C$  — его емкость,  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов между обкладками.

4° Энергия любой системы зарядов в вакууме или диэлектрике может быть представлена в форме

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma\varphi dS,$$

где  $\rho$  и  $\sigma$  — объемная и поверхностная плотности свободных зарядов,  $\varphi$  — значение потенциала в элементе объема  $dV$  или на элементе поверхности  $dS$  для электростатического поля всех свободных и поверхностных зарядов, а интегрирование распространено на весь объем  $V$ , занятый свободными объемными зарядами, и на все заряженные поверхности  $S$ . Влияние диэлектрика на величину  $W_e$  сказывается в том, что при одном и том же распределении свободных зарядов значения  $\varphi$  в разных диэлектриках различны (в однородном изотропном диэлектрике  $\varphi$  в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме).

Выражение для  $W_e$  может быть представлено также в форме:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\mathbf{DE}) dV \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_e} (\mathbf{DE}) dV \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  — электрическое смещение и напряженность в элементе объема  $dV$  для поля рассматриваемой системы зарядов, а интегрирование распространено на весь объем  $V_e$  пространства, занятого полем. Отсюда следует, что энергия  $W_e$  распределена по этому пространству, т. е. что электрическое поле обладает энергией. *Объемная плотность энергии электрического поля*, т. е. энергия единицы объема поля, равна:

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} (\mathbf{DE}) \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}\mathbf{E}) \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Если среда изотропна, то

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e = \frac{DE}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\epsilon} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

5° В макроскопической теории электричества постулируется, что  $w_e$  представляет собой *объемную плотность свободной энергии* (стр. 181) *электрического поля в диэлектрике*, т. е. является мерой работы, связанной с обратимым изотермическим изменением поля в единице объема диэлектрика.

В диэлектрике с неполярными молекулами часть энергии, затрачиваемой на создание поля, расходуется на поляризацию диэлектрика (на «растяжение» упругих диполей). *Объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика*:

$$w_{\text{диэл}} = (\epsilon - 1) \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_{\text{диэл}} = (\epsilon - 1) \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

Разность между  $w_e$  и  $w_{\text{диэл}}$  представляет собой объемную плотность энергии электрического поля: такой же

напряженности, созданного в вакууме. Ее часто называют *объемной плотностью собственно электрической энергии поля в диэлектрике*:

$$w_e - w_{\text{диэл}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_e - w_{\text{диэл}} = \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{в системе СГСЭ}).$$

## ГЛАВА 2

### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

#### 1. Основные понятия и определения

1° *Электрическим током* называется всякое упорядоченное движение электрических зарядов в пространстве.

2° Упорядоченное движение свободных зарядов, возникающее в проводнике под действием электрического поля, называется *током проводимости*.

Упорядоченное движение электрических зарядов может быть осуществлено путем перемещения в пространстве заряженного тела (проводника или диэлектрика). Такой электрический ток называется *конвекционным* (например, ток, связанный с движением по орбите Земли, облакающей избыточным отрицательным зарядом).

3° За направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов. В действительности в металлических проводниках электрический ток создается движением электронов в направлении, обратном току.

4° *Силой тока* (в электротехнике — *током*) сквозь некоторую поверхность  $S$  называется скалярная величина  $I$ , равная первой производной по времени от заряда  $q$ , проходящего через эту поверхность:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

5° *Ток* называется *постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. Для постоянного тока

$$I = \text{const}$$

где  $q$  — электрический заряд,  $t$  — время. Сила постоянного тока численно равна заряду  $q$ , проходящему через поверхность  $S$  за единицу времени.

6° Распределение электрического тока по сечению  $S$  характеризуется *вектором плотности тока*  $\mathbf{j}$ . Он направлен в сторону движения положительных зарядов и численно равен

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS'},$$

где  $dS'$  — проекция элемента поверхности  $dS$  на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{j}$ ,  $dI$  — сила тока сквозь  $dS$  и  $dS'$ .

Проекция  $\mathbf{j}_n$  вектора  $\mathbf{j}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности  $dS$  равна

$$j_n = \frac{dI}{dS} = j \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{n}$ .

7° Сила тока в проводнике равна

$$I = \int_S \mathbf{j} dS;$$

интегрирование распространяется на все поперечное ( $\alpha \equiv 0$ ) сечение  $S$  проводника.

8° Плотность постоянного тока одинакова по всему сечению  $S$  проводника. Для постоянного тока

$$I = jS.$$

Плотности постоянного тока в двух поперечных сечениях проводника обратно пропорциональны площадям сечений:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

## 2. Электронная теория проводимости

1° Носителями тока в металлах являются *электроны проводимости*, возникающие вследствие того, что валентные электроны атомов металла являются обобществленными, т. е. не принадлежащими определенному атому. В классическом приближении эти электроны (электроны проводимости) рассматриваются как *электронный газ*, частицы которого обладают тремя степенями свободы. В более строгом приближении электронный газ рассматривается как вырожденный квантовый газ, подчиняющийся статистике Ферми—Дирака (стр. 229). В классическом приближении число электронов проводимости в  $1 \text{ см}^3$  одновалентного металла принимается равным

$$n_0 = \frac{N_A}{A} D,$$

где  $N_A$  — число Авогадро (стр. 147),  $A$  — атомный вес металла,  $D$  — его плотность. По порядку величины  $n_0 \approx 10^{22} \pm \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

2° Согласно классической теории хаотическое тепловое движение электронов происходит при комнатных температурах со средними скоростями (стр. 207) порядка  $10^6 \text{ см/сек}$ . Согласно *теории Друде—Лоренца* электрон имеет среднюю длину свободного пробега  $\bar{\lambda}$  (стр. 209), равную по порядку величины периоду кристаллической решетки металла ( $10^{-8} \text{ см}$ ).

3° В квантовой теории электроны в металле описываются законами квантовой механики (стр. 715) и подчиняются квантовой статистике Ферми—Дирака (стр. 226). В пренебрежении электрическим полем положительных ионов кристаллической решетки и взаимодействием электронов рассматривается модель «потенциального ящика» с плоским дном: вне металла потенциальная энергия электронов равна нулю, а внутри металла энергии электронов образуют квазинепрерывный спектр. На верхнем занятом уровне энергия электрона равна  $-A$ , где  $A$  — положительная работа выхода электрона из металла (стр. 405). Учет влияния поля ионов на движение электронов приводит к зонной структуре энергетического спектра электронов в металле (стр. 734—739).

4° Импульсы и энергии электронов в металле квантованы, т. е. имеют определенные значения. Заполнение электронами энергетических уровней в металле происходит в соответствии с принципом Паули (стр. 769): на каждом уровне располагается не более двух электронов с противоположными спинами (стр. 464). Верхний энергетический уровень, занятый электронами при абсолютном нуле температуры, называется *уровнем Ферми*. От него отсчитывается работа выхода электрона из металла (рис. IV.2.1). Число занятых электронами энергетических уровней равно по порядку величины числу свободных электронов в металле.



Рис. IV.2.1.

Близко расположенные (квазинепрерывные) энергетические уровни в металле образуют *энергетические зоны* (стр. 735). Самая нижняя зона, не полностью занятая электронами, называется *зоной проводимости металлов*. Возможны случаи, когда две последовательные зоны металла перекрываются (например, у щелочноземельных и переходных металлов). Наличие зоны, не полностью

занятой электронами, является характерной особенностью металлической проводимости.

5° Взаимодействие электронов с положительными ионами кристаллической решетки в квантовой теории металлов рассматривается как рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях ионов решетки.

6° Упорядоченное движение электронов в металлическом проводнике возникает под действием внешнего электрического поля. Плотность тока

$$\mathbf{j} = n_0 e \bar{\mathbf{v}},$$

где  $n_0$  — число электронов проводимости в единице объема,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $\bar{\mathbf{v}}$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов. При наибольших допустимых плотностях токов  $\bar{v} = 10^{-2}$  см/сек. Время установления тока в цепи  $t = L/c$ , где  $L$  — длина цепи,  $c$  — скорость света в вакууме, совпадает со временем, в течение которого вдоль цепи устанавливается стационарное электрическое поле и начинается упорядоченное движение электронов. Практически это движение возникает на всем протяжении проводника одновременно с замыканием цепи.

7° Закон Ома для плотности тока:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Плотность тока в проводнике равна произведению удельной электропроводности металла  $\gamma$  на напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ . Величина  $\rho = 1/\gamma$  называется удельным сопротивлением.

Выражение для  $\gamma$  в классической электронной теории:

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{2m\bar{u}},$$

где  $n_0$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$  объема металла,  $\bar{\lambda}$  — средняя длина свободного пробега,  $\bar{u}$  — средняя (арифметическая) скорость теплового движения электронов при данной температуре. По квантовой теории металлов

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{p_F},$$

где  $p_F$  — импульс электрона, находящегося на уровне Ферми  $W_F$  (стр. 230),  $p_F$  не зависит от температуры;  $\bar{\lambda}$  — средняя длина пробега электронных волн в металле. Величина

$\bar{\lambda}$  зависит от температуры  $T$ . В области комнатных температур  $\bar{\lambda} \sim T^{-1}$ , так что удельное сопротивление металлов  $\rho = 1/\gamma$ , в согласии с данными опытов, растет пропорционально  $T$ . При более низких температурах  $\bar{\lambda} \sim T^{-n}$ , где  $n > 1$ , и увеличивается по мере уменьшения  $T$  (на рис. IV.2.2 показана зависимость  $\bar{\lambda}$  от  $T$  для серебра).

Закон Ома нарушается при больших плотностях токов.

8° Плотностью тепловой мощности тока  $w$  называется величина энергии, которая в результате взаимодействия ионов с электронами передается ионам кристаллической решетки в единицу объема проводника за единицу времени. Закон Джоуля — Ленца для плотности тепловой мощности тока:

$$w = \rho j^2.$$

Плотность тепловой мощности тока в проводнике равна произведению квадрата плотности тока на удельное сопротивление проводника.

9° Закон Видемана — Франца: для всех металлов отношение коэффициента теплопроводности  $K$  (стр. 210) к удельной электропроводности  $\gamma$  прямо пропорционально абсолютной температуре  $T$ :

$$\frac{K}{\gamma} = cT = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана (стр. 151),  $e$  — заряд электрона.

Закон Видемана — Франца является следствием того, что теплопроводность металлов (как и их электропроводность) осуществляется свободными электронами (стр. 376). Согласно квантовой теории металлов (стр. 274)

$$c = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k}{e} \right)^2.$$

Это значение  $c$  находится в хорошем согласии с экспериментом при комнатных температурах.

10° Классическая электронная теория проводимости Друде — Лоренца приводит к ошибочному значению грамматомной теплоемкости металлов (9 кал/г-атом-град).

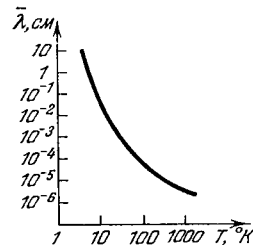


Рис. IV.2.2.

В действительности вырожденный электронный газ в металле (стр. 232) практически не вносит вклада в теплоемкость металла, равную  $6 \text{ кал/г-атом.град}$  (стр. 276).

11° Зависимость удельного сопротивления проводника  $\rho$  от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + at),$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление проводника при  $0^\circ \text{C}$ ,  $t$  — температура в градусах Цельсия,  $a$  — температурный коэффициент сопротивления. Для большинства металлов в интервале температур  $0 - 100^\circ \text{C}$   $a$  изменяется в пределах  $(3,3 \div 6,2) \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ . Зависимость  $\rho$  и  $\gamma$  от температуры для чистых металлов (и некоторых сплавов) объясняется зависимостью  $\bar{\lambda}$  от температуры.

При всех температурах, кроме  $T = 0$ , электронные волны (стр. 378) испытывают рассеяние на тепловых колебаниях ионов тем большее, чем выше температура. При этом  $\bar{\lambda}$  и  $\gamma$  обратно пропорциональны абсолютной температуре (в области не слишком низких температур). В некоторых металлах и сплавах обнаруживается явление сверхпроводимости, заключающееся в том, что ниже некоторой критической температуры сопротивление этих веществ становится исчезающе малым (стр. 479).

### 3. Законы постоянного тока

1° Кулоновские силы электростатического взаимодействия между электрическими зарядами (стр. 341) приводит к такому их перераспределению в проводнике, при котором электрическое поле в проводнике исчезает, а потенциалы во всех его точках выравниваются. Поэтому поле кулоновских сил не может являться причиной возникновения постоянного электрического тока.

2° Постоянный ток проводимости может быть осуществлен только при условии, что напряженность электрического поля в проводнике отлична от нуля и не изменяется с течением времени. Цепи постоянного тока проводимости должны быть замкнутыми, а на свободные заряды, помимо электростатических (кулоновских) сил, должны действовать неэлектростатические силы, называемые сторонними силами. Электрическое поле сторонних сил в цепи создается включенными в нее источниками э. д. с. (гальваническими элементами, аккумуляторами, электрическими генераторами и т. д.). Перемещая электрические заряды

и поддерживая постоянными разности потенциалов между любыми двумя точками цепи постоянного тока, сторонние силы совершают работу за счет энергии, затрачиваемой в источнике э. д. с., который, таким образом, играет роль источника энергии в цепи. Поле сторонних сил существует внутри источника э. д. с. На участках цепи постоянного тока, не содержащих источников э. д. с., перемещение зарядов происходит под действием сил электростатического поля.

3° Для любой точки внутри проводника, по которому проходит постоянный ток,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{кул}} + \mathbf{E}_{\text{стор}},$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля в данной точке,  $\mathbf{E}_{\text{кул}}$  и  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$  — соответственно напряженности кулоновского поля и поля сторонних сил. Для участка  $1 - 2$  проводника сечением  $S$  справедливо соотношение

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{кул}} dl) + \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{стор}} dl),$$

где  $I$  — сила тока в проводнике,  $dl$  — вектор, численно равный элементу  $dl$  длины проводника и направленный по касательной к проводнику в ту же сторону, что и вектор плотности тока  $\mathbf{j}$ ;

$$\int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{кул}} dl) = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — значения потенциала электростатического поля в точках 1 и 2 (стр. 352).

4° Линейный интеграл от вектора  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$  напряженности электрического поля сторонних сил вдоль участка цепи  $1 - 2$  называется электродвижущей силой (э. д. с.)  $\mathcal{E}_{21}$ , действующей на этом участке цепи:

$$\mathcal{E}_{21} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{стор}} dl).$$

Э. д. с. численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении на участке  $1 - 2$  проводника единичного положительного заряда. Величина  $\mathcal{E}_{21}$  равна алгебраической сумме э. д. с. всех источников, включенных на участке цепи  $1 - 2$ . Цифр этом э. д. с. источника считается



положительной, если он, будучи один включен в рассматриваемую замкнутую цепь, возбуждает в ней ток, направленный на участке 1 - 2 от точки 1 к точке 2.

5° *Напряжением (падением напряжения)*  $U_{21}$  на участке цепи 1 - 2 называется величина, численно равная работе, совершаемой суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении на участке 1 - 2 цепи единичного положительного заряда:

$$U_{21} = \int_1^2 ((E_{кул} + E_{стор}) dl) = \int_1^2 (E dl).$$

Таким образом,

$$U_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{21}.$$

6° Интеграл

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{21}$$

называется *сопротивлением участка цепи* между сечениями 1 и 2. Для однородного цилиндрического проводника ( $\rho = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ )

$$R_{21} = \rho \frac{l_{21}}{S} = \frac{l_{21}}{\gamma S},$$

где  $l_{21}$  - длина участка 1 - 2 проводника.

7° *Закон Ома для произвольного участка цепи:*

$$IR_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{21},$$

или

$$U_{21} = IR_{21}.$$

Напряжение на участке цепи равно произведению его сопротивления на силу тока.

Пример 1. Для замкнутой электрической цепи  $\varphi_1 = \varphi_2$ , общее сопротивление всей цепи  $R_{21} = R$  и

$$\mathcal{E} = IR,$$

где  $\mathcal{E}$  - алгебраическая сумма всех э. д. с., действующих в этой цепи. Для замкнутой электрической цепи, изображенной на рис. IV.2.3, где источник имеет э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$ , напряжение  $U$  на клеммах источника тока (на внешней цепи) равно

$$U = IR_1,$$

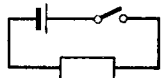


Рис. IV.2.3.

где  $I = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1}$  и  $R_1 = R - r$ . Поэтому  $U = \frac{\mathcal{E}R_1}{r+R_1} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{r+R_1} = \mathcal{E} - Ir$ .

Пример 2. Для разомкнутой цепи  $I = 0$  и  $\mathcal{E}_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$ . Для нахождения э. д. с. источника можно измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой внешней цепи.

8° Если образующие цепь проводники неподвижны, а электрический ток постояен, то работа сторонних сил целиком расходуется на нагревание проводников. Энергия  $W$ , выделяющаяся в цепи за время  $t$  во всем объеме проводника, равна

$$W = IUt,$$

где  $I$  - сила тока,  $U$  - падение напряжения в проводнике. Соответствующее этой энергии количество теплоты  $Q$  (в калориях), выделяющееся в проводнике,

$$Q = 0,24IUt,$$

где  $I$  дано в а,  $U$  - в в и  $t$  - в сек.

Эта формула выражает *закон Джоуля - Ленца*: количество теплоты, выделяемое током в проводнике, пропорционально силе тока, времени его прохождения и падению напряжения.

#### 4. Правила Кирхгофа

1° Расчет *сложных (разветвленных) цепей* постоянного тока заключается в отыскании по заданным сопротивлениям участков цепи и приложенным к ним э. д. с. сил токов в каждом участке. Для решения этой задачи применяются правила Кирхгофа.

2° *Узлом* в разветвленной цепи называется точка, в которой имеется более двух возможных направлений тока (рис. IV.2.4). В узле сходится больше двух проводников.

*Первое правило Кирхгофа (правило узлов)*: алгебраическая сумма токов  $I_k$ , сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

где  $n$  - число проводников, сходящихся в узле. Положительными считают ток, подходящие к узлу, отрицательными - токи, отходящие от него.

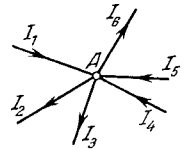


Рис. IV.2.4.

3° Второе правило Кирхгофа (правило контуров): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_k$  на сопротивления  $R_k$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме приложенных в нем э. д. с.  $\mathcal{E}_k$ :

$$\sum_{k=1}^{n_1} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n_1} \mathcal{E}_k.$$

При использовании второго правила Кирхгофа выбирается определенное направление обхода контура; токи  $I_k$ , совпадающие по направлению с направлением обхода, считаются положительными. Э. д. с.  $\mathcal{E}_k$  источников тока считаются положительными, если они создают токи, направленные в сторону обхода контура.

4° Порядок расчета сложной цепи постоянного тока:

а) произвольно выбираются направления токов во всех участках цепи;

б) для  $m$  узлов цепи записываются  $m - 1$  независимых уравнений правила узлов;

в) выделяются произвольные замкнутые контуры так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входящий в уже рассмотренные контуры. В разветвленной цепи, состоящей из  $p$  ветвей (участков цепи между соседними узлами) и  $m$  узлов, число независимых уравнений правила контуров равно  $p - m + 1$ .

Пример 1. Для измерения токов  $I$ , превышающих максимальный ток  $I_0$ , на который рассчитан амперметр, имеющий сопротивление  $R_0$ , параллельно ему включается добавочное сопротивление  $R_{ш}$ , называемое шунтом (рис. IV.2.5). Расчет шунта производится по правилам Кирхгофа:

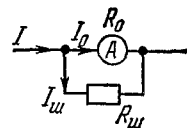


Рис. IV.2.5.

$$I = I_0 + I_{ш}, \quad I_0 R_0 = I_{ш} R_{ш},$$

откуда

$$R_{ш} = \frac{R_0 I_0}{I - I_0};$$

$I_{ш}$  — сила тока в шунте.

Пример 2. Для измерения напряжения  $U$  на участке цепи параллельно этому участку включается вольтметр, рассчитанный на напряжение  $U_0$  при максимальной

силе тока в приборе  $I_0$  ( $U_0 = I_0 R_0$ ). Если  $U > U_0$ , то последовательно с вольтметром включается добавочное сопротивление  $R_{д}$  (рис. IV.2.6), определяемое из уравнения

$$(R_0 + R_{д}) I_0 = U,$$

откуда

$$R_{д} = \frac{U}{I_0} - R_0.$$

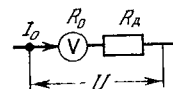


Рис. IV.2.6.

Пример 3. В электрической схеме, приведенной на рис. IV.2.7, заданы сопротивления  $R_2, R_3, R_4$  и электродвижущие силы  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ . Требуется определить сопротивление  $R_1$  при условии, что ток в цепи гальванометра  $G$  отсутствует ( $I_g = 0$ ). Если направления токов выбраны так, как показано на рис. IV.2.7, то для узлов  $A, B$  и  $C$  первое правило Кирхгофа дает:

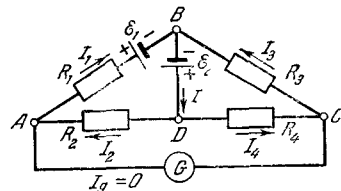


Рис. IV.2.7.

$$I_2 - I_1 = 0,$$

$$I_1 + I_3 = I,$$

$$I_4 - I_3 = 0.$$

Замкнутые контуры  $ABCGA$ ,  $ADCGA$  и  $BCDB$  обходятся против часовой стрелки:

$$-I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0,$$

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_2.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4} - \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_4} \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}.$$

При  $\mathcal{E}_1 = 0$  результат не зависит от  $\mathcal{E}_2$ , и мы приходим к схеме мостика Уитстона для измерения сопротивлений:

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4}.$$

Эта формула остается справедливой, если гальванометр  $G$  и источник э. д. с.  $\mathcal{E}_2$  в мостике Уитстона поменять местами.

## ГЛАВА 3

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

## 1. Проводимость жидкостей. Электролитическая диссоциация

1° Электрический ток во многих жидкостях (водных растворах солей, кислот и проч.) осуществляется упорядоченным перемещением ионов — атомов или групп атомов, обладающих избыточным или недостаточным количеством электронов по сравнению с нейтральными атомами или молекулами. Электрическое поле, которое вызывает упорядоченное движение ионов, создается в жидкости *электродами* — проводниками, соединенными с полюсами источника тока. Положительный электрод называется *анодом*, отрицательный — *катодом*. Соответственно положительные ионы (*катионы*) — ионы металлов и водорода — движутся к катоду, отрицательные ионы (*анионы*) — ионы кислотных остатков и гидроксильной группы — движутся к аноду.

2° Прохождение электрического тока через такие жидкости сопровождается *явлением электролиза* — выделением на электродах составных частей растворенных веществ или других веществ, являющихся результатом вторичных реакций. Проводники, в которых прохождение электрического тока сопровождается электролизом, называются *электролитами* или *проводниками второго рода*. В отличие от металлических проводников (*проводников первого рода*), ток в электролитах связан с переносом вещества.

3° *Электролитической диссоциацией* называют распад молекул растворенного вещества на положительно и отрицательно заряженные ионы в результате взаимодействия с растворителем. Это явление обусловлено совместным действием двух причин: теплового движения и взаимодействия полярных молекул растворенного вещества, состоящих из взаимосвязанных ионов (например, молекул солей, кислот и щелочей), с полярными молекулами растворителя (например, воды). Указанное взаимодействие приводит к ослаблению связи между ионами и облегчает разрыв этой связи при столкновении молекулы растворенного вещества с достаточно быстро движущейся молекулой растворителя (или растворенного вещества).

*Коэффициентом (степенью) диссоциации  $\alpha$*  называется отношение числа молекул  $n'_0$ , диссоциировавших на ионы, к общему числу  $n_0$  молекул растворенного вещества:  $\alpha = n'_0/n_0$ .

4° Вследствие хаотического теплового движения ионов в растворе происходит процесс воссоединения ионов противоположных знаков в нейтральные молекулы, называемый *молизацией*.

В условиях динамического равновесия между процессами диссоциации и молизации  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \text{const} \cdot n_0.$$

Если  $n_0 \rightarrow 0$ , то  $\alpha \rightarrow 1$ , т.е. в слабых растворах  $\alpha \approx 1$  и почти все молекулы диссоциированы. С увеличением концентрации раствора  $\alpha$  убывает. В сильно концентрированных растворах

$$\alpha \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{n_0}}.$$

## 2. Законы электролиза

1° *Первый закон электролиза (первый закон Фарадея)*: количество вещества  $M$ , выделяющегося на электроде, прямо пропорционально электрическому заряду  $q$ , прошедшему через электролит:

$$M = kq.$$

Коэффициент пропорциональности  $k$ , численно равный массе вещества, выделившегося при прохождении через электролит единицы электрического заряда, называется *электрохимическим эквивалентом* вещества. При пропускании через электролит постоянного тока  $I$  в течение  $t$  сек  $q = It$  и  $M = kIt$ .

2° *Второй закон электролиза (второй закон Фарадея)*: электрохимические эквиваленты элементов прямо пропорциональны их химическим эквивалентам:

$$k = C \frac{A}{Z},$$

где отношение атомного веса  $A$  элемента к его валентности  $Z$  называется *химическим эквивалентом*. Количество вещества, масса которого, выраженная в граммах, равна его химическому эквиваленту, называется *грамм-эквивалентом*. Величина  $F = 1/C$  называется *числом*

*Фарадея.*  $F$  равно электрическому заряду, который нужно пропустить через электролит для выделения на электроде 1 грамм-эквивалента любого вещества:

$$F = 96\,494 \frac{\kappa}{2 \cdot 928} \approx 9,65 \cdot 10^4 \frac{\kappa}{2 \cdot 928}.$$

3° *Объединенный закон Фарадея:*

$$M = \frac{1}{F} \frac{A}{Z} It, \text{ или } M = \frac{1}{F} \frac{A}{Z} q.$$

### 3. Атомность электричества

Из заповей Фарадея определяется величина  $q$  заряда любого иона:  $q = \pm ZF/N_A$ , где  $Z$  – валентность иона,  $F$  – число Фарадея,  $N_A$  – число Авогадро. Заряд одновалентного иона ( $Z = 1$ ) равен по абсолютной величине заряду электрона:

$$q_1 = e = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}_q = 1,602 \cdot 10^{-19} \kappa.$$

Установлено, что любой электрический заряд является кратным от наименьшего заряда  $e$ , который является *элементарным* (стр. 341).

### 4. Закон Ома для тока в жидкостях

1° Плотность тока  $\mathbf{j}$  (стр. 376) в жидкостях равна сумме плотностей токов положительных и отрицательных ионов:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-.$$

Зависимость плотности тока в жидкостях  $\mathbf{j}$  от напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля, приложенного к электродам, имеет вид

$$\mathbf{j} = \frac{F}{N_A} Z_+ n_{0+} (u_+ + u_-) \mathbf{E},$$

где  $F$  – число Фарадея,  $N_A$  – число Авогадро,  $Z_+$  – валентность положительных ионов в растворе,  $n_{0+}$  – число положительных ионов в единице объема электролита,  $u_+$  и  $u_-$  – *подвижности* соответственно положительного и отрицательного ионов, т. е. средние скорости движения этих ионов под действием электрического поля, напряженность которого равна единице. Эта формула выражает *закон Ома для плотности тока в электролитах.*

2° Удельное сопротивление электролита равно

$$\rho = \frac{N_A}{FZ_+ n_{0+} (u_+ + u_-)}.$$

Если молекула электролита диссоциирует на  $k_+$  положительных и  $k_-$  отрицательных ионов, то  $k_+ Z_+ = k_- Z_-$ ,

$$n_{0+} = k_+ a n_0 \text{ и } n_{0-} = k_- a n_0,$$

где  $a$  – коэффициент диссоциации,  $n_0$  – концентрация электролита (стр. 387). В этом случае

$$\rho = \frac{N_A}{FZ_+ k_+ a n_0 (u_+ + u_-)} \text{ или } \rho = \frac{1}{FaC(u_+ + u_-)},$$

где  $C = \frac{k_+ Z_+ n_0}{N_A} = \frac{k_- Z_- n_0}{N_A}$  – число грамм-эквивалентов (килограмм-эквивалентов) ионов одного знака, содержащихся в единице объема электролита в свободном состоянии и связанных в молекулах. Величину  $C$  называют *эквивалентной концентрацией раствора* (измеряют в  $\kappa\text{-эке}/\text{м}^3$  или, что то же, в  $\text{э-эке}/\lambda$ ).

### 5. Электропроводность газов

1° Газы состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и в нормальных условиях являются *изоляторами*. Электропроводность газов возникает при их *ионизации* – отщеплении от атомов и молекул газов электронов. Атомы (молекулы) превращаются при этом в положительные ионы. Отрицательные ионы возникают в газах при соединении нейтральных атомов (молекул) со свободными электронами.

2° При ионизации атома (молекулы) совершается *работа ионизации*  $A_i$  против сил взаимодействия между вырываемым электроном и другими частицами атома (молекулы).  $A_i$  зависит от химической природы газа и энергетического состояния электрона в атоме (молекуле).  $A_i$  возрастает с увеличением *кратности ионизации*, т. е. числа электронов, вырванных из атома.

3° *Потенциалом ионизации*  $\varphi_i$  называется разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле для того, чтобы увеличение его энергии равнялось работе ионизации:  $\varphi_i = A_i/e$ , где  $e$  – абсолютная величина заряда электрона.

4° Ионизация газа происходит в результате внешних воздействий: сильного нагревания, рентгеновских лучей, радиоактивных излучений, при бомбардировке молекул (атомов) газа быстро движущимися электронами или

ионами. Интенсивность ионизации измеряется числом пар противоположных по знаку заряженных частиц, возникающих в единице объема газа за единицу времени.

5° Ударная ионизация одноатомного газа электронами или ионами происходит при кинетической энергии ионизирующей частицы

$$\frac{mv^2}{2} \geq A_i \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

где  $A_i$  — работа ионизации,  $M$  — масса атома.

Для осуществления ударной ионизации одновалентные ионы должны пройти в ускоряющем поле большую разность потенциалов, чем электроны. Это справедливо для ионизации молекул, состоящих из любого числа атомов.

### 6. Несамостоятельный газовый разряд

1° Если электропроводность газа вызывается внешними ионизаторами, то процесс прохождения электрического тока через газ называется *несамостоятельным газовым разрядом*. Кривая зависимости силы тока при несамостоятельном газовом разряде от напряжения  $U$  между электродами изображена на рис. IV.3.1. При небольших напряжениях плотность тока  $j$  в разряде пропорциональна напряженности поля  $E$ :

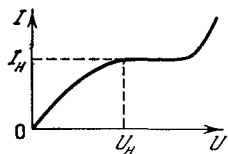


Рис. IV.3.1.

$$j = en_0(u_+ + u_-)E,$$

где  $u_+$  и  $u_-$  — подвижности положительных и отрицательных ионов,  $n_0$  — число пар электронов и одновалентных положительных ионов в единице объема,  $e$  — абсолютное значение заряда электрона. В интервале давлений от  $10^{-4}$  до  $10^1$  атм  $u_+$  и  $u_-$  обратно пропорциональны давлению газа. При дальнейшем увеличении напряженности поля  $E$  концентрация ионов в разряде убывает и линейная зависимость силы тока от напряжения нарушается.

2° Максимальная сила тока  $I_H$ , возможная при данной интенсивности ионизации, называется *током насыщения*. При этом все ионы, возникающие в газе, достигают электродов:  $I_H = eN_H$ , где  $N_H$  — максимальное число пар одновалентных ионов, образующихся в 1 сек в газе под действием ионизатора.

### 7. Самостоятельный газовый разряд

1° Электрический разряд в газе, продолжающийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным газовым разрядом*. Свободные электрические заряды, необходимые для поддержания такого разряда, возникают главным образом в результате ударной ионизации (стр. 390) молекул газа под действием электронов (*объемная ионизация*) и выбивания электронов из катода при бомбардировке его положительными ионами (*поверхностная ионизация*). Ударную ионизацию молекул газа положительными ионами нужно учитывать только в случае достаточно сильных полей (стр. 390, п. 5°). Вырывание электронов из катода может также происходить вследствие его нагрева (термоэлектронная эмиссия, стр. 421) и внешнего фотоэффекта, связанного со свечением разряда (фотоэлектронная эмиссия, стр. 424).

2° Переход несамостоятельного газового разряда в самостоятельный называется *электрическим пробоем газа* и происходит при *напряжении зажигания*  $U_3$  (*напряжение пробоя*). Согласно приближенной теории Таунсенда условие зажигания *самостоятельного разряда* в газе между плоскими электродами имеет вид

$$\gamma(e^{ad} - 1) = 1,$$

где  $d$  — расстояние между электродами,  $a$  — коэффициент объемной ионизации газа электронами, равный среднему значению количества актов ионизации, производимых одним электроном на пути единичной длины,  $\gamma$  — коэффициент поверхностной ионизации, равный среднему числу электронов, выбиваемых из катода одним положительным ионом. Для данного газа и материала катода

$$\frac{a}{p} = f_1\left(\frac{U}{pd}\right) \quad \text{и} \quad \gamma = f_2\left(\frac{U}{pd}\right),$$

где  $p$  — давление газа,  $U$  — напряжение между электродами. Таким образом, напряжение зажигания  $U_3$  зависит от произведения  $pd$  (*закон Паушена*). Характер этой зависимости показан на рис. IV.3.2. С уменьшением потенциала ионизации (стр. 389) и работы выхода электронов из катода, при прочих равных условиях,  $U_3$  уменьшается.

Зависимость разрядного тока от напряжения, приложенного к электродам в разряде, называют *вольтамперной характеристикой разряда*.

3° При низких давлениях (несколько десятков мм рт. ст.) наблюдается *тлеющий* самостоятельный газовый разряд. Основными частями тлеющего разряда являются следующие четыре области: *I* — *катодное темное пространство*, *II* — *отрицательное (тлеющее) свечение*, *III* — *фарадеево темное пространство*, *IV* — *положительный столб разряда* (рис. IV.3.3). Области *I–III* образуют *катодную часть разряда*. Вблизи катода происходит резкое падение потенциала, связанное с большой концентрацией положительных ионов на границе областей *I–II*. В области *II* электроны, ускоренные в области *I*, производят интенсивную ударную ионизацию. Тлеющее свечение в основном вызывается обратным воссоединением (*рекомбинацией*) электронов и ионов в нейтральные атомы или молекулы. Тлеющее свечение имеет сплошной спектр. В положительном столбе наблюдается постоянная и большая концентрация электронов и положительных ионов (газоразрядная плазма, стр. 397), обусловленная ударной ионизацией молекул газа электронами. Падение потенциала в пределах положительного столба сравнительно невелико и при прочих равных условиях возрастает с уменьшением диаметра газоразрядной трубки.

Свечение положительного столба, определяющее оптические свойства тлеющего разряда, связано с излучением возбужденных атомов (молекул) газа. Рекомбинация электронов и положительных ионов в основном происходит на стенках газоразрядной трубки и вызывает нагрев стенок. Положительный столб часто бывает *слоистым*, т. е. состоит из чередующихся светлых слоев (*страт*) и темных промежутков. Положительный столб по своей форме следует форме газоразрядной трубки независимо от формы и расположения катода и анода. Это связано с на-

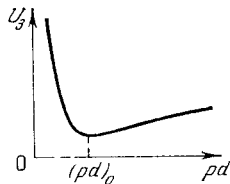


Рис. IV.3.2

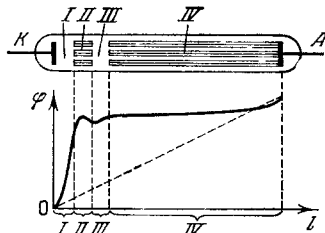


Рис. IV.3.3.

личием поперечного (радиального) электрического поля, возникающего благодаря осаждению электронов на стенках трубки. При тлеющем разряде в достаточно коротких трубках или в широких сосудах светящийся положительный столб не наблюдается.

Основной областью тлеющего разряда, в которой происходит процессы объемной ионизации газа, необходимые для поддержания разряда, является область катодного темного пространства. Длинной  $l_k$  *катодного темного пространства* называют расстояние от катода до той точки разряда, в которой кривая  $\varphi = \varphi(l)$  (рис. IV.3.3.) имеет максимум, или точку перегиба. Тлеющий разряд может существовать лишь при условии, что расстояние между электродами  $d \geq l_k$ . Изменение потенциала  $\varphi_k$  на длине катодного темного пространства называют *катодным падением*.

Различают два режима тлеющего разряда: *нормальный*, при котором плотность разрядного тока не зависит от величины тока, изменяемой с помощью внешнего нагрузочного сопротивления, и *аномальный*, при котором плотность тока возрастает вместе с током. В первом случае катод не полностью покрыт отрицательным свечением, во втором — полностью. В случае нормального тлеющего разряда  $l_k$  обратно пропорционально давлению газа, а  $\Delta\varphi_k$  зависит от рода газа, материала и состояния поверхности катода, возрастая с увеличением работы выхода электронов из катода (стр. 405). С увеличением разрядного тока падение потенциала в положительном столбе уменьшается. Поэтому вольтамперная характеристика нормального тлеющего разряда *падающая*, т. е. с увеличением тока напряжение на электродах уменьшается. При аномальном разряде с увеличением разрядного тока  $l_k$  уменьшается, а  $\Delta\varphi_k$  возрастает. Вольтамперная характеристика аномального тлеющего разряда *возрастающая*.

Если давление в трубке с нормальным тлеющим разрядом достаточно мало, то катодное темное пространство почти полностью заполняет всю трубку. При этом лучок электронов движется от катода до стенок трубки практически свободно, т. е. не испытывая столкновений с молекулами газа. Такие пучки электронов называют *катодными лучами*.

*Каналовыми лучами* называют пучки свободно движущихся положительных ионов. Они также могут быть

получены с помощью тлеющего разряда: если в катоде разрядной трубки сделать небольшое отверстие (канал), то положительные ионы, попадающие в этот канал, будут проходить через него в эвакуированное закатодное пространство в виде пучка каналовых лучей.

4° При нормальном и больших давлениях наблюдаются несколько типов газового разряда: кистевой, коронный, искровой и дуговой.

*Коронный разряд* возникает в газе, находящемся в сильно неоднородном электрическом поле, т. е. около электродов с малыми радиусами кривизны поверхности (например, около острий, проводов линий высокого напряжения и т. п.). При коронном разряде ионизация газа и его свечение происходят только в сравнительно небольшой области, притягающей к электроду с малым радиусом кривизны поверхности и называемой *коронирующим слоем*. Соответствующий электрод называют *коронирующим электродом*. Остальную часть разрядного промежутка, находящуюся за пределами коронирующего слоя (или двух слоев, если коронируют оба электрода), называют *внешней* («темной») *областью коронного разряда*.

В случае коронирования катода (*отрицательная корона*) электроны, вызывающие объемную ионизацию газа, выбиваются из катода положительными ионами. Если коронирует анод (*положительная корона*), то электроны возникают вблизи анода благодаря фотоионизации газа под действием излучения коронирующего слоя. Во внешней области разряда проводимость газа сравнительно невелика, так как осуществляется только за счет заряженных частиц одного знака, поступающих в нее из коронирующего слоя. Поэтому сила тока в коронном разряде, в отличие от других видов самостоятельного разряда, определяется не сопротивлением внешней части цепи, а сопротивлением внешней области разряда.

При повышенном напряжении коронный разряд на острие приобретает вид светящейся кисти — системы выходящих из острия и перемежающихся во времени тонких светящихся линий, имеющих изломы и изгибы. Такой разряд называют *кистевым*.

Если напряжение между электродами становится равным *напряжению искрового перекрытия*  $U_{и}$ , то коронный разряд переходит в искровой. При прочих равных условиях  $U_{и}$  для положительной короны меньше, чем для

отрицательной. Напряжение  $U_{и}$  и *напряжение*  $U_{к}$  *зажигания коронного разряда* зависят от расстояния  $d$  между электродами. По мере уменьшения  $d$  напряжение  $U_{и}$  уменьшается быстрее, чем  $U_{к}$ , т. е. область напряжений от  $U_{к}$  до  $U_{и}$ , при которых осуществляется коронный разряд, сокращается. При  $U_{и}$  значении  $d_{кр}$  (*критическое расстояние*)  $U_{и}$  становится равным  $U_{к}$ . Если  $d < d_{кр}$ , то  $U_{и} < U_{к}$  и коронный разряд вообще не может возникнуть.

5° *Искровой разряд* имеет вид прерывистых ярких зигагообразных разветвляющихся нитей — каналов ионизованного газа, которые пронизывают разрядный промежуток и исчезают, сменяясь новыми. Искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты и ярким свечением газа. Явления, характеризующие такой разряд, вызываются электронными и ионными лавинами, возникающими в искровых каналах, где давление увеличивается до сотен атмосфер, а температура повышается до  $10^4$  °С. Примером искрового разряда является *молния*. Главный канал молнии имеет диаметр от 10 см до 25 см. Длина молнии достигает нескольких километров при максимальной силе тока импульса молнии, достигающей сотен тысяч ампер.

6° *Дуговой разряд* происходит при большой плотности тока и при напряжении между электродами порядка нескольких десятков вольт. Он является результатом интенсивного испускания термоэлектронов (стр. 422) раскаленным катодом. Электроны ускоряются электрическим полем и производят ударную ионизацию молекул газа. Поэтому электрическое сопротивление газового промежутка между электродами дуги невелико. При увеличении силы тока дугового разряда проводимость газового промежутка настолько сильно возрастает, что напряжение между электродами дуги падает (*падающая вольтамперная характеристика*). Температура катода (при атмосферном давлении) достигает 3000°С. Бомбардировка электронами анода создает в нем углубление — *кратер дуги* с температурой около 4000°С (при  $p = 760$  мм рт. ст.). Температура газа в канале электрической дуги 5000–6000°С. Если дуговой разряд происходит при сравнительно низкой температуре катода (например, ртутная дуговая лампа), то основную роль играет холодная эмиссия электронов из катода (стр. 423).

### 8. Понятие о плазме

1° *Плазмой* называется состояние вещества, характеризующееся высокой ионизацией его частиц, доходящей до полной ионизации. В зависимости от степени ионизации  $\alpha$ , т. е. отношения концентрации заряженных частиц к полной концентрации частиц, различают плазму: *слабо ионизованную* ( $\alpha$  — доли %), *умеренно ионизованную* ( $\alpha$  — несколько %), *полностью ионизованную* ( $\alpha$  близко к 100%).

В природных условиях слабо ионизованная плазма наблюдается в ионосфере. Солнце, горячие звезды, а также некоторые межзвездные облака являются примерами полностью ионизованной плазмы, образующейся при очень высоких температурах (*высокотемпературная плазма*). Искусственно плазма создается в газовых разрядах (стр. 392), газоразрядных лампах. Управление движением плазмы лежит в основе ее использования как рабочего тела в различных двигателях, для прямого превращения внутренней энергии в электрическую (магнитогидродинамические генераторы, плазменные источники электрической энергии).

2° Большая электропроводность плазмы приближает ее свойства к свойствам проводников. Случайно возникающие в плазме, не подверженной внешним воздействиям, разности концентраций заряженных частиц и разности потенциалов сглаживаются, как в проводниках, на которые не действуют внешние э. д. с.

3° Между заряженными частицами плазмы действуют электростатические силы (стр. 341), между заряженными и нейтральными частицами — силы квантовомеханической природы (стр. 757).

Плазма отличается от простого скопления заряженных частиц некоторой минимальной плотностью таких частиц, определяемой из условия  $L \gg D$ , где  $L$  — линейный размер системы заряженных частиц,  $D$  — характерное для плазмы расстояние, называемое *дебаевским радиусом экранирования*: 
$$D = \left( \sum_i \frac{4\pi e_i^2 n_i}{k T_i} \right)^{-1/2}$$
 (в системе СГСЭ), где

$e_i$  — заряд,  $n_i$  — концентрация,  $T_i$  — температура  $i$ -го сорта частиц,  $k$  — постоянная Больцмана. На расстоянии  $D$  происходит экранирование кулоновского поля произвольного заряда плазмы в результате того, что данный заряд оказывается преимущественно окруженным частицами с зарядом противоположного знака. В целом

плазма является квазинейтральной системой с большим числом заряженных частиц, расположенных в области пространства с различными размерами  $L \gg D$ .

Общее число заряженных частиц плазмы в сфере с радиусом  $D$  называется *дебаевским числом*. Плазма называется газовой, если  $N$  велико, и в термодинамическом отношении она рассматривается как идеальный газ.

Специфические особенности плазмы, связанные с кулоновским дальнородствующим взаимодействием ее частиц, позволяют рассматривать плазму как особое агрегатное состояние вещества. Эти особенности: сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, обусловленное высокой электропроводностью плазмы, особое коллективное взаимодействие частиц плазмы посредством самосогласованного поля (стр. 754), наличие упругих свойств, приводящих к возможности возбуждения и распространения в плазме разнообразных колебаний и волн.

4° Состояние термодинамического равновесия высокоионизованного газа подобно плазме определенной температуры, в которой убыль заряженных частиц, происходящая за счет рекомбинации (стр. 392), пополняется за счет новых актов ионизации. Средняя кинетическая энергия составляющих такую плазму различных частиц (положительных и отрицательных ионов, нейтральных частиц в различных состояниях возбуждения) одинакова. Энергия черного излучения (стр. 227), существующего в такой плазме, соответствует той же температуре. Процессы обмена энергией между частицами являются равновесными процессами. Плазма, обладающая пересеченными свойствами, называется *изотермической плазмой*. Она существует в атмосфере звезд, обладающих высокой температурой. О значении плазмы для термоядерных процессов см. стр. 864.

5° В *газоразрядной плазме* заряженные частицы, входящие в ее состав, непрерывно находятся в ускоряющем электрическом поле. Средней кинетической энергии электронов в газоразрядной плазме сопоставляется некоторая температура максвелловского распределения электронов по энергиям (стр. 207), называемая *электронной температурой*  $T_e$ . Она имеет условный смысл, ибо в газоразрядной неизотермической плазме отсутствует термодинамическое равновесие. Средняя кинетическая энергия электронов в газоразрядной плазме значительно превышает среднюю энергию нейтральных частиц плазмы.



6° Состояние термически неравновесной газоразрядной плазмы поддерживается за счет энергии проходящего через плазму разрядного тока. Если исчезает внешнее электрическое поле, то исчезает и газоразрядная плазма. Исчезновение предоставленной самой себе газоразрядной плазмы называется *деионизацией газа*. В балансе энергии плазмы, созданной в ограниченном объеме, наряду с процессами ионизации и рекомбинации, происходящими в объеме, большую роль играет взаимодействие плазмы со стенками, ограничивающими ее объем, а также излучение плазмы и перенос в нее излучения. Диффузия заряженных частиц к стенкам и их рекомбинация на стенках, передача энергии стенкам теплопроводностью уменьшают энергию плазмы и загрязняют ее различными примесями. Для предотвращения этих процессов плазму стремятся удержать от соприкосновения со стенками магнитным полем (см. также стр. 864). Видя излучения плазмы в оптическом диапазоне и дальком ультрафиолете: тормозное излучение электронов, возникающее при их торможении на ионах, рекомбинационное излучение, сопровождающее процессы рекомбинации, обычное излучение возбужденными частицами спектральных линий. В магнитном поле, кроме того, возможно бетатронное (синхротронное) излучение (стр. 579).

7° Параметрами газоразрядной плазмы являются: электронная температура  $T_e$ , концентрация электронов  $n_0$ , число ионизаций, приходящихся на один электрон в 1 сек, плотность ионного или электронного тока на стенки, продольная напряженность  $E_z$  электрического поля, установившегося вдоль оси симметрии плазмы.

8° Условием высокой степени ионизации термодинамически равновесной плазмы, состоящей из двух сортов заряженных частиц, имеющих противоположные по знаку и одинаковые по величине заряды, является максимальное уменьшение рекомбинации частиц (стр. 392).

*Условие разреженности плазмы:*

$$\frac{e^2}{r} < kT \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $e^2/r$  — средняя потенциальная энергия кулоновского взаимодействия частиц с зарядами  $e$ , находящихся на расстоянии  $r$ ,  $kT$  — средняя энергия теплового движения частиц,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура.

9° Полностью ионизованная плазма может быть получена при условии, что

$$kT \gg e\varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  — потенциал ионизации атомов газа. Для водорода и дейтерия этому соответствует  $T \approx 160\,000^\circ \text{K}$ . При этих условиях существенную роль играет излучение плазмы, затрудняющее ее адиабатическую изоляцию (стр. 145).

10° При температурах, много меньших тех, которые соответствуют полной ионизации (п. 9°), внутренняя энергия термодинамически равновесной плазмы, состоящей из частиц двух сортов с зарядами  $\pm e$  и нейтральных атомов, равна

$$U = U_0 - e^2 N \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kTV}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

где  $U_0 = C_V T + U_0$  — внутренняя энергия идеального газа (стр. 155),  $N$  — число частиц одного сорта в объеме  $V$ .

Величина  $d = \sqrt{\frac{kTV}{4\pi N e^2}}$  является дебаевским радиусом экранирования для плазмы, близкой по своим свойствам к идеальному газу. На расстояниях, больших  $d$ , электрическое поле данного заряда экранируется зарядами противоположного знака и становится пренебрежимо малым.

11° Для плазмы, рассмотренной в п. 10°: свободная энергия (стр. 181)

$$F = F_0 - \frac{2}{3} N e^2 \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kTV}},$$

термическое уравнение состояния (стр. 148, 183)

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{RT}{V} \frac{M}{\mu} - \frac{1}{3} N e^2 \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kTV^3}},$$

энтропия (стр. 183)

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = (C_V)_{\text{ид}} \ln T + \frac{M}{\mu} R \ln V \mu - \frac{1}{3} N e^2 \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kT^3 V}}$$

( $V_\mu$  — объем 1 моля идеального газа),  
теплоемкость (стр. 183)

$$C_V = - T \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V = (C_V)_{\text{ид}} + \frac{1}{2} N e^2 \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kT^3 V}}.$$

В этих формулах  $R$  — универсальная газовая постоянная (стр. 151).

## ГЛАВА 4

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

## 1. Собственная проводимость полупроводников

1° *Полупроводники* — большой класс веществ, удельное сопротивление которых изменяется в широких пределах и в очень сильной степени уменьшается с увеличением температуры (по экспоненциальному закону).

5 В	8 С			
	14 Si	15 P	16 S	
	32 Ge	33 As	34 Se	
	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 J

Рис. IV.4.1.

В периодической системе Д. И. Менделеева полупроводники образуют группу элементов, изображенную на рис. IV.4.1. Наиболее типичными, широко применяемыми полупроводниками с хорошо изученными электрическими свойствами являются германий (Ge), кремний (Si) и теллур (Te). На внешней оболочке атомов кремния и германия находятся 4 валентных электрона, связанных химическими (ковалентными) связями (стр. 786) с валентными электронами соседних атомов. Кристаллические полупроводники относятся к типу твердых тел с полностью занятой электронами валентной энергетической зоной (стр. 738), которая отделена от не занятой электронами (при 0°K) зоны проводимости (стр. 738) сравнительно узким интервалом энергий.

2° Электропроводность химически чистого полупроводника называется *собственной проводимостью*. *Электронная проводимость (проводимость n-типа)* возникает при перебросе электронов из валентной энергетической зоны (самой верхней зоны, целиком заполненной электронами) в зону проводимости (рис. IV.4.2). Энергия, которая должна быть при этом затрачена, равна по меньшей мере ширине запрещенной зоны (стр. 735) и называется *энергией активации собственной проводимости*  $\Delta W_0$ .

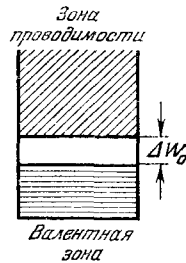


Рис. IV.4.2.

Значения энергии активации (в  $e\theta$ ) собственной проводимости полупроводниковых элементов приведены в кружках на рис. IV.4.1. Удельная электропроводность  $\gamma$  полупроводников возрастает с повышением температуры  $T$ :

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta W_0/2kT},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Электрическое сопротивление полупроводников при нагревании уменьшается. В этом состоит важное отличие полупроводников от металлов (стр. 380).

Помимо нагревания, проводимость полупроводников может быть вызвана действием достаточно сильного электрического поля и освещением (*фотопроводимость полупроводников*, стр. 701).

3° Переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости создает в ранее заполненной зоне полупроводника вакантные энергетические уровни. Движение электрона, находящегося в этой зоне, под действием электрического поля эквивалентно движению положительного заряда («дырки»), численно равного заряду электрона. Дырки перемещаются в направлении напряженности электрического поля (стр. 343). Проводимость, обусловленная «дырками», называется *дырочной проводимостью* или *проводимостью p-типа*.

4° Общая удельная электропроводность полупроводников складывается из проводимостей *n-* и *p-* типов:

$$\gamma = e n_e u_e + e n_h u_h,$$

где  $e$  — абсолютная величина заряда единичного носителя тока (заряда электрона),  $n_e$  и  $n_h$  — равные концентрации электронов и дырок,  $u_e$  и  $u_h$  — подвижности электронов и дырок (стр. 388), различные вследствие различия эффективных масс (стр. 737) и временах свободных пробегов этих частиц.

## 2. Примесная проводимость полупроводников

1° *Примесной проводимостью* полупроводников называется их электропроводность, обусловленная наличием *примесных центров*. Под примесными центрами (примесью) подразумеваются: а) атомы посторонних элементов; б) избыточные (по сравнению со стехиометрическим составом) атомы элементов, входящих в полупроводники; в) всевозможные дефекты кристаллической решетки: пустые узлы, атомы или ионы, внедренные в междоузлия

решетки, сдвиги, связанные с пластической деформацией кристалла, трещины и т. п.

2° Примесные включения вносят изменения в периодическое электрическое поле кристалла (стр. 734) и влияют на движение электронов и на их энергетические состояния. Энергетические уровни валентных электронов примесных атомов не размещаются в разрешенных энергетических зонах основного кристалла и образуют примесные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне (*локальные уровни*).

3° Примеси могут служить дополнительными источниками электронов в кристалле. Например, при замещении

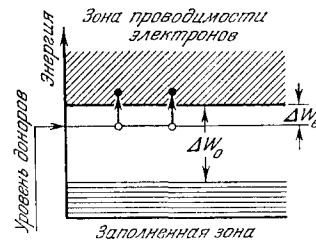


Рис IV.4.3.

одного четырехвалентного атома германия пятивалентным атомом фосфора, мышьяка или сурьмы один электрон не может образовать ковалентной связи и является «лишним». Энергетический уровень такого электрона располагается ниже зоны проводимости (рис. IV.4.3). Подобные уровни, заполненные электронами, называются *донорными*. Атомы примесей, поставляющие электроны, называются *атомами-донорами*. Для перевода электронов с донорных уровней в незаполненную зону проводимости необходима малая энергия  $\Delta W_d$ . Например, для кремния  $\Delta W_d = 0,054 \text{ эв}$ , если примесью является мышьяк. В результате переброса электронов с донорных уровней в зону проводимости в полупроводнике возникает *электронная примесная проводимость*. Полупроводники такого типа называются *электронными* или *полупроводниками n-типа*.

4° Если четырехвалентный атом германия замещен в кристаллической решетке атомом с тремя валентными электронами (бор, алюминий, индий), то возникает недостаток одного электрона для образования ковалентных связей. Недостающий электрон может быть заимствован у соседнего атома германия в решетке (рис. IV.4.4), у которого появится положительная «дырка». Последовательное заполнение электронами образующихся у атомов германия «дырок» приводит к появлению проводимости полупроводника. Свободные примесные энергетические

уровни называются *уровнями прилипания* или *акцепторными уровнями*. Они располагаются несколько выше верхнего края валентной зоны основного кристалла (рис. IV.4.5), на расстоянии от него  $\Delta W_a$ . Например, при внедрении бора в решетку кремния  $\Delta W_a = 0,08 \text{ эв}$ . Атомы примесей такого рода называются *атомами-акцепторами*. Переброс электронов из заполненной валентной зоны полупроводника на уровни прилипания приводит к *дырочной примесной проводимости* (проводимость p-типа). Полупроводники с такой проводимостью называются *дырочными* или *полупроводниками p-типа*.

Энергетический уровень такого электрона располагается ниже зоны проводимости (рис. IV.4.3). Подобные уровни, заполненные электронами, называются *донорными*. Атомы примесей, поставляющие электроны,

называются *атомами-донорами*. Для перевода электронов с донорных уровней в незаполненную зону проводимости необходима малая энергия  $\Delta W_d$ . Например, для кремния  $\Delta W_d = 0,054 \text{ эв}$ , если примесью является мышьяк. В результате переброса электронов с донорных уровней в зону проводимости в полупроводнике возникает *электронная примесная проводимость*. Полупроводники такого типа называются *электронными* или *полупроводниками n-типа*.

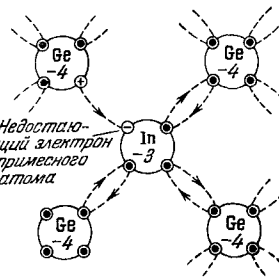


Рис IV 4.4.

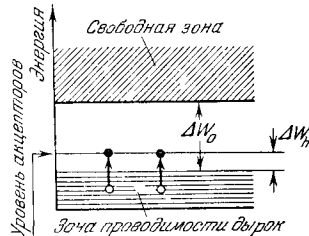


Рис. IV.4.5.

5° При одновременном введении в полупроводник донорных и акцепторных примесей характер проводимости определяется примесью с более высокой концентрацией носителей тока. При любом типе проводимости число носителей тока в полупроводниках значительно меньше, чем в металлах. Концентрация и энергия электронов (и дырок) в полупроводниках, в отличие от металлов, весьма сильно зависят от температуры, возрастая при ее повышении.

### 3. Явление Холла в металлах и полупроводниках

1° *Эффектом Холла* называется возникновение поперечного электрического поля и разности потенциалов в металле или полупроводнике, по которым проходит электрический ток, при помещении их в магнитное поле, перпендикулярное к направлению тока. Если в магнитное

поле помещен металл или электронный полупроводник, то электроны, движущиеся со скоростью  $v$  в магнитном поле (рис. IV.4.6, а), под действием силы Лоренца (стр. 442)

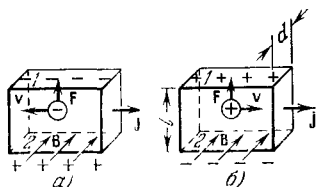


Рис IV.4.6.

отклоняются в определенную сторону. На противоположной стороне скапливаются положительные заряды. В дырочном полупроводнике (рис. IV.4.6, б) знаки зарядов на поверхностях противоположные.

2° Поперечное электрическое поле препятствует отклонению электронов магнитным полем. Разность потенциалов при эффекте Холла:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = R \frac{BI}{d},$$

где  $B$  — индукция магнитного поля (стр. 425),  $I$  — сила тока,  $d$  — линейный размер образца в направлении вектора  $B$ ,  $R$  — постоянная Холла.

Напряженность поперечного электрического поля:

$$E_B = R[\mathbf{B}\mathbf{j}],$$

где  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока.

3° Для металлов и примесных полупроводников с одним типом проводимости

$$R = \frac{A}{nq} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R = \frac{A}{c n q} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — электродинамическая постоянная,  $q$  и  $n$  — заряд и концентрация носителей тока,  $A$  — безразмерный числовой коэффициент порядка единицы, связанный со статистическим характером распределения скоростей носителей тока. По знаку постоянной Холла можно судить о типе проводимости полупроводника или проводника (при электронной проводимости  $q = -e$  и  $R < 0$ , при дырочной проводимости  $q = e$  и  $R > 0$ ), а по ее величине можно определить концентрацию носителей тока.

4° Для полупроводников со смешанной ( $n$ - и  $p$ -типа) проводимостью постоянная Холла в общем случае зависит не только от подвижностей (стр. 388) и концентраций обоих типов носителей тока — электронов ( $u_e, n_e$ ) и дырок ( $u_h, n_h$ ), но также и от величины магнитной индукции. В случае слабых полей, т. е. при условии

$$B \ll \max \left\{ \frac{1}{u_e}, \frac{1}{u_h} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\frac{B}{c} \ll \max \left\{ \frac{1}{u_e}, \frac{1}{u_h} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

постоянная Холла равна:

$$R = \frac{A}{e} \frac{u_h n_h - u_e^2 n_e}{(u_h n_h + u_e n_e)^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$R = \frac{A}{ce} \frac{u_h n_h - u_e^2 n_e}{(u_h n_h + u_e n_e)^2} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Знак постоянной Холла позволяет определить тип преимущественной проводимости полупроводника.

## ГЛАВА 5

### КОНТАКТНЫЕ, ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

#### 1. Контактные явления в металлах. Законы Вольты

1° *Работой выхода*  $A$  электрона из металла называют ту наименьшую энергию, которую нужно сообщить электрону проводимости металла для того, чтобы он мог выйти из металла в вакуум. Она находится из следующего соотношения:

$$A = e(\varphi_- - \varphi') - \mu,$$

где  $\varphi$  и  $\varphi'$  — значения электрического потенциала соответственно в точках внутри металла и в вакууме около поверхности металла,  $\mu$  — химический потенциал электронного газа в металле (стр. 231). Величину  $\mu - e\varphi$  называют *электрохимическим потенциалом* электронного газа в металле.

Работа выхода зависит от рода металла и состояния его поверхности. Для чистых металлов она имеет величину порядка нескольких электрон-вольт.

2° В классической электронной теории работа выхода истолковывается как работа, совершаемая электроном при его вылете из металла, во-первых, против сил притяжения со стороны положительных зарядов, индуцируемых электроном на поверхности металла, и, во-вторых, против сил электрического поля *двойного электрического слоя*. Этот слой возникает у поверхности металла благодаря тому, что в процессе теплового движения электроны проводимости могут пересекать поверхность металла, образуя около нее «электронное облако». Плотность этого «облака» практически отлична от нуля лишь в пределах нескольких межатомных расстояний ( $\sim 10^{-8}$  см). Такой двойной электрический слой подобен весьма тонкому заряженному конденсатору, одной из обкладок которого служит поверхность металла с находящимися на ней положительными ионами, а другой — «электронное облако». За пределами двойного слоя напряженность его электрического поля равна нулю.

3° Величину

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' = \frac{A + \mu}{e}$$

называют *поверхностным скачком потенциала на границе металл-вакуум* или *контактной разностью потенциалов между металлом и вакуумом*. В классической электронной теории поверхностный скачок потенциала

$$\Delta\varphi_{\text{кл}} = \frac{A}{e}.$$

Это значение отличается от истинного, приведенного выше, и согласуется с ним лишь качественно.

4° *Законы Вольты:*

а) при соединении двух проводников, изготовленных из различных металлов, между ними возникает контактная разность потенциалов, которая зависит только от их химического состава и температуры;

б) разность потенциалов между концами цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников; она равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

5° В состоянии равновесия электрохимические потенциалы  $\mu - e\varphi$  (стр. 405) для обоих контактирующих металлов должны быть равны. Поэтому при приведении в кон-

такт двух незаряженных металлов ( $\varphi' = 0$ ) с различными работами выхода  $A_1$  и  $A_2 < A_1$  электроны переходят преимущественно из второго металла в первый. При этом оба металла заряжаются (металл 1 — отрицательно, а металл 2 — положительно) и создают в окружающем пространстве электрическое поле. Одновременно происходит относительное смещение энергетических уровней электронов в контактирующих металлах. В металле 1 все уровни смещаются вверх, а в металле 2 — вниз. Для установления равновесия достаточно, чтобы из металла 2 перешла в металл 1 ничтожная часть электронов проводимости. Поэтому при приведении металлов в контакт значения химических потенциалов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  не изменяются.

6° Условие равновесия для контакта двух металлов имеет вид

$$e\varphi_1 - \mu_1 = e\varphi_2 - \mu_2,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — равновесные значения потенциалов 1-го и 2-го металлов. Величину

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}$$

называют *внутренней контактной разностью потенциалов*. Она обусловлена различием химических потенциалов электронов в контактирующих металлах. В соответствии с выражением для химического потенциала (стр. 234)

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{1}{e} \left[ (W_{F_1} - W_{F_2}) + \frac{3}{2} (kT)^2 \left( \frac{1}{W_{F_2}} - \frac{1}{W_{F_1}} \right) \right],$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $W_{F_1}$  и  $W_{F_2}$  — значения энергии Ферми для первого и второго металлов. Величина  $\Delta\varphi_{12}$  зависит от температуры  $T$  контакта металлов и обуславливает термоэлектрические явления (стр. 416).

7° Изменение потенциала от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  происходит в пределах двойного электрического слоя, образующегося на поверхности контакта и называемого *контактным слоем*. Толщина контактного слоя порядка  $10^{-8} \div 10^{-7}$  см. Возникновение этого слоя при контактировании двух металлов связано с переходом из одного металла, заряжающегося положительно, в другой, заряжающийся отрицательно, лишь ничтожной части электронов проводимости, имеющих в объеме контактного слоя. Поэтому для каждого из металлов концентрация электронов в контактном слое практически такая же, как и в остальном объеме металла, так что удельное электрическое

сопротивление контактного слоя не отличается от удельного сопротивления остальной части металла.

8° В классической электронной теории металлов внутренняя контактная разность потенциалов рассматривается как следствие различия концентраций  $n_0$  электронов проводимости в контактирующих металлах. В состоянии равновесия диффузионный поток электронов из металла с большим значением  $n_0$  в металл с меньшим значением  $n_0$  полностью компенсируется потоком электронов в обратном направлении под влиянием электрического поля контактного слоя. Соответствующее выражение для внутренней контактной разности потенциалов имеет вид

$$\Delta\varphi_{12,кл} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}.$$

Это значение отлично от точного значения  $\Delta\varphi_{12}$  (п. 6°). Оно может быть использовано только для качественного рассмотрения зависимости внутренней контактной разности потенциалов от температуры.

9° *Внешней контактной разностью потенциалов* называют разность потенциалов между двумя точками, находящимися вблизи поверхностей первого ( $\varphi'_1$ ) и второго ( $\varphi'_2$ ) контактирующих металлов вне их. Из условия равенства электрохимических потенциалов электронов в контактирующих металлах следует, что

$$\Delta\varphi'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — работы выхода электронов из первого и второго металлов.

## 2. Контактные явления в полупроводниках

### А. Контакт металла с полупроводником

1° *Работой выхода  $A$  (термодинамической работой выхода)* электрона из полупроводника называют наименьшую энергию, которую нужно затратить для удаления электрона из полупроводника в вакуум, если начальная энергия электрона в полупроводнике равна электрохимическому потенциалу. Уровень энергии, равной электрохимическому потенциалу, обычно называют *уровнем химического потенциала* или *уровнем Ферми полупроводника*. Его положение по отношению к дну зоны проводимости

определяется, как и для металлов, значением химического потенциала  $\mu$  (обычно  $\mu < 0$ , т. е. уровень Ферми в полупроводниках, в отличие от металлов, располагается ниже дна зоны проводимости; см. ниже).

*Внешней работой выхода*  $A_{\text{внеш}}$  электрона из полупроводника называют наименьшую работу, которую нужно затратить для удаления в вакуум электрона, начальная энергия которого в полупроводнике равна энергии, соответствующей дну зоны проводимости. Связь между  $A$  и  $A_{\text{внеш}}$  имеет вид  $A = A_{\text{внеш}} - \mu$ .

Внешняя работа выхода определяется свойствами кристаллической решетки полупроводника и для различных полупроводников составляет от 1 до 6 эв.

2° Для чистого (беспримесного) полупроводника

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{v_h}{v_e},$$

где  $\Delta W_0$  — энергия активации собственной проводимости (стр. 400),  $k$  — постоянная Больцмана,

$$v_e = \frac{2}{h^3} (2\pi m_e^* kT)^{3/2}, \quad v_h = \frac{2}{h^3} (2\pi m_h^* kT)^{3/2},$$

$h$  — постоянная Планка,  $m_e^*$  и  $m_h^*$  — эффективные массы (стр. 737) электрона и дырки. При  $T = 0^\circ\text{K}$   $\mu = -\Delta W_0/2$ , т. е. уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, отделяющей зону проводимости от валентной зоны.

Концентрации электронов в зоне проводимости ( $n_e$ ) и дырок в валентной зоне ( $n_h$ ) равны:

$$n_e = n_h = \sqrt{v_e v_h} e^{-\Delta W_0/2kT}.$$

3° Электронный примесный полупроводник ( $n$ -типа).

а) В области низких температур, удовлетворяющих условию

$$e^{\Delta W_e/kT} \gg \frac{v_e}{n_d},$$

где  $\Delta W_e$  — энергия активации примесной проводимости  $n$ -типа (рис. IV.4.3) и  $n_d$  — концентрация донорных уровней,

$$\mu = -\frac{\Delta W_e}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{n_d}{v_e}.$$

При  $T = 0^\circ\text{K}$   $\mu = -\Delta W_e/2$ , т. е. уровень Ферми располагается посередине между донорными уровнями и дном зоны проводимости. С увеличением температуры от  $0^\circ\text{K}$  до  $T_0$   $\mu$  возрастает, а затем уменьшается.

Температура  $T_0$  соответствует условию:

$$n_e(T_0) = n_D e^{-3/2},$$

$$T_0 = \frac{h^2 e}{2\pi m_e^* k} \left( \frac{n_D}{2} \right)^{2/3}$$

и

$$\mu_{\max} = \mu(T_0) = -\frac{\Delta W_e}{2} + \frac{3h^2 e}{8\pi m_e^*} \left( \frac{n_D}{2} \right)^{2/3},$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Концентрация электронов в зоне проводимости  $n_e \ll n_D$ :

$$n_e = \sqrt{n_D \nu_e} e^{-\Delta W_e/2kT}.$$

б) В области температур, при которых все донорные уровни опустошены  $\left( \frac{\nu_e}{n_D} \gg e^{\Delta W_e/kT} \right)$ , но собственной проводимостью основного полупроводника можно еще пренебречь, концентрация электронов в зоне проводимости не зависит от температуры:

$$n_e = n_D \quad \text{и} \quad \mu = kT \ln \frac{n_D}{\nu_e}.$$

Температуру насыщения, при которой  $n_e$  становится равным  $n_{i0}$ , можно найти из соотношения

$$T_{\text{нас}} = \frac{\Delta W_e}{k \ln \frac{\nu_e(T_{\text{нас}})}{n_D}}.$$

При  $T = T_{\text{нас}}$   $\mu = -\Delta W_e$ .

в) В области еще более высоких температур концентрация электронов в зоне проводимости начинает вновь возрастать за счет переброса электронов из валентной зоны. При  $n_e \gg n_D$  химический потенциал электронного полупроводника приближается к значению

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{hT}{2} \ln \frac{\nu_h}{\nu_e},$$

соответствующему собственной проводимости (см. п. 2°). Таким образом, температура перехода к собственной проводимости равна

$$T_{\text{соб}} = \frac{\Delta W_0}{k \frac{\nu_e \nu_h}{n_D^2}}.$$

4° Дырочный примесный полупроводник ( $p$ -типа).

а) В области низких температур, удовлетворяющих условию

$$e^{\Delta W_h/kT} \gg \frac{\nu_h}{n_a},$$

где  $\Delta W_h$  — энергия активации примесной проводимости  $p$ -типа (рис. IV.4.5) и  $n_a$  — концентрация акцепторных уровней,

$$\mu = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{n_a}{\nu_h}.$$

При  $T = 0^\circ\text{K}$   $\mu = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2}$ , т. е. уровень Ферми располагается посередине между верхним краем валентной зоны и акцепторными уровнями. При повышении температуры от  $0^\circ\text{K}$  до  $T_0$   $\mu$  убывает, а затем при  $T > T_0$  возрастает. Температура  $T_0$  и  $\mu_{\min}$  равны:

$$T_0 = \frac{h^2 e}{2\pi m_h^* k} \left( \frac{n_a}{2} \right)^{2/3},$$

$$\mu_{\min} = \mu(T_0) = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2} - \frac{3h^2 e}{8\pi m_h^*} \left( \frac{n_a}{2} \right)^{2/3},$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Концентрация дырок в валентной зоне  $n_h \ll n_a$ :

$$n_h = \sqrt{n_a \nu_h} e^{-\Delta W_h/2kT}.$$

б) В области температур, при которых все акцепторные уровни заняты электронами  $\left( \frac{\nu_h}{n_a} \gg e^{\Delta W_h/kT} \right)$ , но собственной проводимостью основного полупроводника можно еще пренебречь, концентрация дырок в валентной зоне не зависит от температуры:

$$n_h = n_a \quad \text{и} \quad \mu = -\Delta W_0 + kT \ln \frac{\nu_h}{n_a}.$$

Температура перехода к собственной проводимости равна

$$T_{\text{соб}} = \frac{\Delta W_0}{k \ln \frac{\nu_e \nu_h}{n_D^2}}.$$

5° Если металл привести в контакт с полупроводником, то так же, как и при контактировании двух металлов, должно произойти выравнивание электродифференциальных потенциалов электронов в металле и полупроводнике — «выравнивание уровней Ферми», осуществляющееся в

результате перехода электронов из тела с меньшей работой выхода в тело с большей работой выхода. При этом между металлом и полупроводником устанавливается контактная разность потенциалов, обусловленная двойным электрическим слоем, образующимся в области контакта и называемым *контактным слоем*. Вследствие этого концентрации носителей тока в полупроводнике (порядка  $(10^{14} \div 10^{16}) \text{ см}^{-3}$  вместо  $10^{22} \text{ см}^{-3}$  в металлах) толщина контактного слоя в полупроводнике достигает  $(10^{-6} \div 10^{-4}) \text{ см}$ , т. е. на несколько порядков больше толщины контактного слоя в металлах. В пределах этого слоя в полупроводнике распределен объемный заряд и существует контактное электрическое поле. Знак объемного заряда зависит от соотношения между работами выхода электрона из металла ( $A_1$ ) и из полупроводника ( $A_2$ ): если  $A_1 > A_2$ , то объемный заряд положительный, а если  $A_1 < A_2$  — отрицательный.

6° Вследствие существования электрического поля контактного слоя потенциал в точках этого слоя полупроводника при  $A_1 > A_2$  ниже, чем в остальном объеме полупроводника, а при  $A_1 < A_2$  — выше. Поэтому, если  $A_1 > A_2$ , то при прочих равных условиях энергия электронов в контактном слое полупроводника больше, чем в остальном объеме. Так как электрохимический потенциал во всех частях полупроводника одинаков, то в контактном слое дно зоны проводимости поднимается вверх, удаляясь от уровня Ферми, а верхний край валентной зоны также поднимается вверх, приближаясь к уровню Ферми. При этом ширина запрещенной зоны  $\Delta W_0$  между верхним краем валентной зоны и дном зоны проводимости остается такой же, как и в остальном объеме полупроводника.

Если  $A_1 < A_2$ , то направление вектора напряженности контактного электрического поля изменяется на противоположное, так что потенциал в точках контактного слоя полупроводника выше, чем в остальном объеме. Поэтому в контактном слое дно зоны проводимости опускается вниз, приближаясь к уровню Ферми, а верхний край валентной зоны также опускается вниз, удаляясь от уровня Ферми.

7° Возможны следующие четыре случая контакта металла с примесными полупроводниками (рис. IV.5.1). а)  $A_1 > A_2$ , полупроводник *n*-типа.

Объемный положительный заряд обусловлен избытком донорных примесей. Контактный слой полупроводника

обеднен основными носителями тока — электронами в зоне проводимости. Поэтому удельное сопротивление контактного слоя во много раз больше удельного

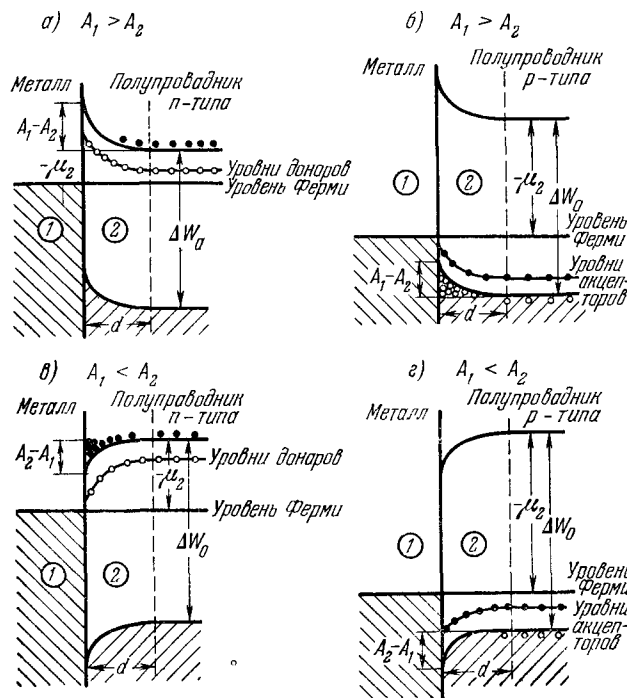


Рис. IV.5.1.

● — электроны в зоне проводимости и отрицательные ионы акцепторных примесей; ○ — дырки в валентной зоне и положительные ионы донорных примесей;  $d$  — толщина контактного слоя.

сопротивления остальной части полупроводника. Такой контактный слой называют *запирающим*.

б)  $A_1 > A_2$ , полупроводник *p*-типа.

В контактном слое полупроводника имеется избыток основных носителей тока — дырок в валентной зоне.



Поэтому контактный слой обладает повышенной проводимостью. Такой контактный слой называют *антизапирающим*.

в)  $A_1 < A_2$ , полупроводник  $n$ -типа.

Отрицательный объемный заряд контактного слоя полупроводника обусловлен избытком основных носителей тока — электронов в зоне проводимости. Поэтому контактный слой полупроводника обладает повышенной проводимостью, т. е. представляет собой антизапирающий слой.

г)  $A_1 < A_2$ , полупроводник  $p$ -типа.

В контактном слое полупроводника имеется избыток отрицательных ионов акцепторных примесей и недостаток основных носителей тока — дырок в валентной зоне. Поэтому контактный слой запирающий.

8° Запирающий контактный слой на границе металла с полупроводником обладает *односторонней (вентильной) проводимостью*, т. е. при включении металла и полупроводника в электрическую цепь пропускает ток практически только в одном направлении (либо из металла в полупроводник, либо из полупроводника в металл). Вентильные свойства запирающего слоя связаны с тем, что значения его сопротивления для двух взаимно противоположных направлений тока через поверхность контакта очень сильно отличаются друг от друга.

Если направление напряженности внешнего поля и возбуждаемого им тока противоположно направлению напряженности контактного электрического поля, то основные носители тока втягиваются в контактный слой из остального объема полупроводника. При этом толщина контактного слоя, обедненного основными носителями тока, и его электрическое сопротивление уменьшаются. В таком направлении, называемом *пропускным*, электрический ток может проходить через контакт металла и полупроводника. При изменении направления напряженности внешнего поля на противоположное основные носители тока вытесняются из контактного слоя в глубь полупроводника, так что толщина и электрическое сопротивление контактного слоя сильно возрастают. Следовательно, в направлении, противоположном пропускному, электрический ток практически не может проходить через запирающий контактный слой. Такое направление принято называть *запорным*.

Для запирающего слоя на границе металла с полупроводником  $p$ -типа ( $A_1 < A_2$ ) пропускным является

направление тока из полупроводника в металл, а для запирающего слоя на границе металла с полупроводником  $n$ -типа ( $A_1 > A_2$ ), — наоборот, из металла в полупроводник.

### Б. Контакт двух полупроводников

1° Граница соприкосновения двух полупроводников с различными,  $n$ - и  $p$ -типами проводимости (стр. 402 и 403) называется *электронно-дырочным переходом* ( $p - n$ -переходом). Обычно, он осуществляется в одном и том же кристалле полупроводника, где с помощью соответствующих примесей (стр. 401) обеспечиваются области различной ( $n$ - и  $p$ -) проводимости.

2° Двойной электрический слой (стр. 406)  $p - n$ -перехода образуется в результате перемещения электронов из  $n$ - в  $p$ -полупроводник (так как  $A_p > A_n$ , где  $A_p$  и  $A_n$  — работы выхода электрона из полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа), а дырок — в противоположном направлении. При этом в контактном слое  $n$ -полупроводника оказывается избыток положительных ионов донорных примесей, а в контактном слое  $p$ -полупроводника — избыток отрицательных ионов акцепторных примесей. Таким образом, контактный слой в обоих полупроводниках обеднен основными носителями тока и обладает пониженной проводимостью, т. е. является запирающим. Толщина  $d$   $p - n$ -перехода в практически важных случаях составляет  $(10^{-4} \div 10^{-6})$  см.

3° Если к контактному слою приложено внешнее напряжение таким образом, что  $n$ -полупроводник соединен с положительным полюсом источника э. д. с. (рис. IV.5.2), то внешнее электрическое поле усиливает поле контактного слоя и вызывает движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике в противоположные стороны от границы  $p - n$ -перехода. Это приводит к расширению запирающего слоя и росту его сопротивления. Направление внешнего поля, расширяющее запирающий слой, называется *запирающим (обратным)*. В этом направлении электрический ток через контакт двух полупроводников практически не проходит.

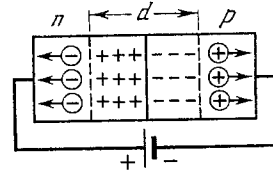


Рис. IV.5.2.

4° При *пропускном* (прямом) направлении (рис. IV.5.2) внешнее электрическое поле направлено противоположно полю контактного слоя. Электроны и положительные дырки перемещаются под действием внешнего поля к границе *p-n*-перехода навстречу друг другу, толщина контактного слоя и его сопротивление уменьшаются. Следовательно, в этом направлении электрический ток может проходить через границу двух полупроводников.

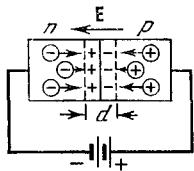


рис. IV.5.3.

5° Действие *p-n*-перехода, обладающего односторонней проводимостью, аналогично выпрямляющему действию двухэлектродной лампы — диода (стр. 490). Поэтому полупроводник с одним *p-n*-переходом называется *полупроводниковым диодом*.

### 3. Термоэлектрические явления в металлах и полупроводниках

1° В металлах и полупроводниках процессы переноса заряда (электрический ток) и энергии взаимосвязаны, так как осуществляются посредством перемещения подвижных носителей тока — электронов проводимости и дырок. Эта взаимосвязь обуславливает ряд явлений (Зеебека, Пельтье и Томсона), которые называют *термоэлектрическими явлениями*.

Выражения для плотности постоянного тока  $\mathbf{j}$  и плотности потока энергии  $\mathbf{u}$  в изотропном металле или полупроводнике в отсутствие внешнего магнитного поля имеют вид:

$$\frac{1}{\gamma} \mathbf{j} = -a \operatorname{grad} T - \operatorname{grad} \left( \varphi - \frac{\mu}{e} \right),$$

$$\mathbf{u} = -K \operatorname{grad} T + \Pi \mathbf{j} + \left( \varphi - \frac{\mu}{e} \right) \mathbf{j}.$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал электронов,  $\varphi$  — электрический потенциал,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $(\mu - e\varphi)$  — электрохимический потенциал,  $K$  и  $\gamma$  — коэффициент теплопроводности и удельная электропроводность. Коэффициенты  $a$  и  $\Pi$  называют соответственно *удельной термоэлектродвижущей силой* и *коэффициентом Пельтье*. Они зависят от материала проводника или полупроводника, а также от температуры.

$\Pi$  и  $a$  связаны между собой соотношением, вытекающим из законов термодинамики и называемым *вторым соотношением Томсона*:

$$\Pi = aT.$$

2° Явлением *Зеебека* называют возникновение электродвижущей силы  $\mathcal{E}_T$  в замкнутой электрической цепи, составленной из последовательно соединенных разнородных проводников (или полупроводников), если места их контакта (спаи) поддерживают при различных температурах. Величину  $\mathcal{E}_T$  называют *термоэлектродвижущей силой* (термо-э. д. с.). Так как  $(\varphi - \frac{\mu}{e})$  — непрерывная функция координат, то

$$\mathcal{E}_T = - \oint_L a (\operatorname{grad} T, d\mathbf{l}) = - \int_a^b a dT,$$

где интегрирование производится по всему замкнутому контуру  $L$  электрической цепи.

Простейшую замкнутую электрическую цепь (рис. IV.5.4), состоящую из двух разнородных проводников (или полупроводников) 1 и 2, называют *термоэлементом* или *термопарой*. Если  $T_a$  и  $T_b$  — температуры спаев  $a$  и  $b$  термоэлемента, то при выбранном на рис. IV.5.4 направлении обхода цепи по часовой стрелке термо-э. д. с. термоэлемента равна

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_a}^{T_b} a_1 dT - \int_{T_b}^{T_a} a_2 dT = \int_{T_a}^{T_b} a_{12} dT,$$

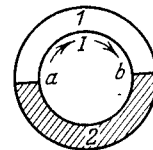


рис. IV.5.4.

где  $a_1$  и  $a_2$  — значения  $a$  для двух различных материалов 1 и 2 ветвей термоэлемента, а  $a_{12} = a_2 - a_1$  — *удельная дифференциальная термоэлектродвижущая сила* для данной пары материалов:

$$a_{12} = \frac{d\mathcal{E}_T}{dT}.$$

Если интервал температур  $T_b - T_a$  велик, то в его пределах можно считать, что  $a_{12}$  — постоянная величина и

$$\mathcal{E}_T = a_{12}(T_b - T_a).$$

При  $T_b > T_a$   $\mathcal{E}_T > 0$ , если  $a_{12} = a_2 - a_1 > 0$ , и  $\mathcal{E}_T < 0$ , если  $a_{12} < 0$ . В первом случае термоток  $I$  в цепи термоэлемента идет в направлении, показанном на рис. IV. 5.4 (по

часовой стрелке), а во втором — в противоположном направлении. Таким образом, в горячем спае термоэлемента термоток всегда идет из ветви с меньшим значением  $a$  в ветвь с большим значением  $a$ .

Если в разрыв одной из ветвей термоэлемента включить последовательно любое число проводников другого состава, все спаи которых *термостатированы*, т. е. поддерживаются при одной и той же температуре, то термо-э. д. с. в такой цепи будет равна термо-э. д. с. исходного термоэлемента.

3° Явление Зеебека обусловлено следующими тремя причинами:

а) преимущественной диффузией носителей тока в проводнике или полупроводнике от нагретого конца к холодному (*объемная составляющая термо-э. д. с.*);

б) зависимостью контактной разности потенциалов от температуры, связанной с зависимостью химического потенциала  $\mu$  от температуры (*контактная составляющая термо-э. д. с.*);

в) увлечением электронов фононами (стр. 274), которые преимущественно перемещаются от горячего конца проводника к холодному и, взаимодействуя с электронами, вызывают преимущественное перемещение их в том же направлении (*фононная составляющая термо-э. д. с.*); при низких температурах эта составляющая термо-э. д. с. может играть определяющую роль.

Соответственно удельная термо-э. д. с.  $a$  равна сумме трех составляющих:

$$a = a_0 + a_K + a_{\text{ф}},$$

где

$$a_K = -\frac{1}{e} \frac{d\mu}{dT}.$$

В металлах электронный газ находится в сильно вырожденном состоянии (стр. 229). Концентрация электронов проводимости очень велика и не зависит от температуры, а их распределение по энергиям и скоростям теплового движения незначительно изменяется при нагревании. Поэтому значения удельной термо-э. д. с. металлов очень малы (порядка нескольких *мкв/град*). Явление Зеебека в металлах используют в основном для измерения температуры.

В полупроводниках концентрация носителей тока (электронов проводимости и дырок) значительно меньше,

чем в металлах. Обычно она столь невелика, что носители тока подчиняются классической статистике Больцмана (невырожденный полупроводник), т. е. средняя энергия их теплового движения равна  $\frac{3}{2} kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. С повышением температуры полупроводника увеличивается концентрация носителей тока (иногда она может сохраняться неизменной, см. стр. 410) и, что особенно существенно, возрастает скорость их теплового движения. Поэтому значения удельной термо-э. д. с.  $a$  для невырожденных полупроводников с одним типом носителей тока во много раз больше, чем для металлов (порядка  $(10^2 \div 10^3)$  *мкв/град*). Коэффициенты  $a$  у электронных и дырочных полупроводников противоположны по знаку. Следовательно, наибольшие значения удельной дифференциальной термо-э. д. с.  $a_{12}$  получаются для пар, составленных из электронного и дырочного полупроводников.

Полупроводниковые термоэлементы используют для прямого преобразования внутренней энергии в электрическую. К.п.д. современных полупроводниковых термоэлектрических генераторов достигают 15%.

4° Явлением *Пельтье* называют выделение или поглощение (в зависимости от направления тока) теплоты, избыточной над Джоулевой и называемой *теплотой Пельтье*, осуществляющееся в спае разнородных проводников или полупроводников при прохождении через спай постоянного электрического тока.

На поверхности контакта двух проводников 1 и 2 непрерывны электрохимический потенциал ( $\mu - e\phi$ ), температура  $T$  и нормальные составляющие плотности потока энергии  $u$  и плотности тока  $j$ . Поэтому из выражения для  $u$  (п. 1°) следует, что при прохождении постоянного тока  $I$  из первого проводника во второй на поверхности контакта за промежуток времени  $t$  выделяется (или поглощается) теплота Пельтье

$$Q_{\text{П}} = P_{12} t = P_{12} \eta t,$$

где

$$P_{12} = P_1 - P_2 = -\alpha_{12} T \quad \text{и} \quad q = It.$$

В отличие от Джоулевой теплоты, пропорциональной квадрату силы тока и всегда выделяющейся в проводнике, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока, а ее знак зависит от направления тока в спае. Если

ток в спае идет из проводника с большим значением коэффициента Пельтье в проводник с меньшим значением коэффициента Пельтье ( $\Pi_1 > \Pi_2$  и  $\Pi_{12} > 0$ ), то  $Q_{\Pi} > 0$ , т. е. теплота Пельтье выделяется в спае. При противоположном направлении тока через спай  $Q_{\Pi} < 0$ , т. е. теплота Пельтье поглощается в спае.

5° Явление Пельтье обусловлено тем, что в разнородных проводниках или полупроводниках, находящихся в контакте, значения  $\bar{w}_1$  и  $\bar{w}_2$  средней энергии подвижных зарядов, участвующих в образовании тока, не равны друг другу. Пусть, например,  $\bar{w}_1 > \bar{w}_2$  и ток имеет такое направление, что носители тока переходят через поверхность контакта из 1-го проводника во 2-й. Во 2-м проводнике носители тока, перешедшие из 1-го проводника, имеют энергию, превышающую ту, которая соответствует термодинамическому равновесию между носителями тока и узлами кристаллической решетки. Поэтому, сталкиваясь с узлами кристаллической решетки 2-го проводника, носители тока передают им избыток своей энергии, вызывая нагревание проводника. Этот процесс происходит в очень тонком слое 2-го проводника, прилегающем к поверхности контакта, т. е. проявляется в нагревании спая. Если при тех же условиях ток в спае имеет противоположное направление, то носители тока переходят из 2-го проводника в 1-й, имея энергию, меньшую равновесной в 1-м проводнике. Сталкиваясь с узлами кристаллической решетки 1-го проводника, носители тока получают энергию, недостающую им до равновесной. Следовательно, в этом случае спай должен охлаждаться.

Явление Пельтье обратное явлению Зеебека. При прохождении термотока в цепи термоэлемента в горячем спае теплота Пельтье поглощается, а в холодном — выделяется. Поэтому, в полном согласии со вторым началом термодинамики, для поддержания постоянного термотока необходимо к горячему спаю термоэлемента непрерывно подводить извне теплоту, а от холодного спая — непрерывно отводить теплоту. Явление Пельтье в полупроводниках используют для создания достаточно экономичных и производительных холодильных установок.

6° *Явлением Томсона* называют выделение (или поглощение) теплоты, избыточной над джоулевой, при прохождении постоянного тока по неравномерно нагретому однородному проводнику или полупроводнику. Из выражений для плотности потока энергии  $\mathbf{u}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  (п. 1°) следует, что за единицу времени в единице объема

проводника выделяется количество теплоты

$$w = -\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T) + \frac{1}{\gamma} j^2 + \tau (\mathbf{j}, \operatorname{grad} T),$$

где  $\tau$  — коэффициент Томсона, связанный с удельной термо-э. д. с.  $\alpha$  проводника и коэффициентом Пельтье  $\Pi$  первым соотношением Томсона:

$$\tau = -\left(\frac{d\Pi}{dT} - \alpha\right) = -T \frac{d\alpha}{dT}.$$

За единицу времени в единице объема проводника выделяется *теплота Томсона*

$$w_T = \tau (\mathbf{j}, \operatorname{grad} T).$$

Знак  $w_T$  зависит от направления тока: если  $\tau > 0$ , то  $w_T > 0$ , если ток в проводнике идет от холодного его конца к нагретому, и  $w_T < 0$ , если ток идет в обратном направлении.

В участке проводника длиной  $dl$  за промежуток времени  $t$  выделяется теплота Томсона

$$dQ_T = \tau It \left(\frac{dT}{dl}\right) dl = \tau q \left(\frac{dT}{dl}\right) dl,$$

где  $q = It$  — заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника, а производная  $\frac{dT}{dl} > 0$ , если ток идет в направлении возрастания температуры проводника.

Явление Томсона связано с тем, что в более нагретой части проводника средняя энергия носителей тока больше, чем в менее нагретой. Если носители тока перемещаются в направлении убывания температуры, то они отдают избыток своей энергии кристаллической решетке проводника, т. е. теплота Томсона выделяется:  $dQ_T > 0$ . Если носители тока движутся в противоположном направлении, то они пополняют свою энергию за счет энергии кристаллической решетки, т. е. теплота Томсона поглощается:  $dQ_T < 0$ . Таким образом, для проводников и полупроводников, обладающих электронной проводимостью, коэффициент Томсона  $\tau > 0$ , а для проводников и полупроводников, обладающих дырочной проводимостью,  $\tau < 0$ .

#### 4. Эмиссионные явления в металлах

1° *Термоэлектронной эмиссией* называют испускание электронов твердыми или жидкими телами, происходящее вследствие нагревания этих тел. Электроны, испус-

каемые нагретым телом, называют *термоэлектронами*, а само тело — *эмиттером*.

Для того чтобы электрон мог вылететь из металла, он должен обладать энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металл-вакуум, т. е. для совершения работы выхода (стр. 405).

При обычных (комнатных) температурах число таких электронов в металле ничтожно мало и термоэлектронная эмиссия практически отсутствует. Она становится заметной при значительно более высоких температурах, соответствующих видимому свечению раскаленного металла.

2° Явление термоэлектронной эмиссии используют в электронных лампах и других электронных приборах с накаленным катодом.

Термоэлектронный ток в вакуумной двухэлектродной лампе (диоде), раскаленный катод которой испускает термоэлектроны, зависит от напряжения  $U_A$ , приложенного между анодом и катодом (*анодное напряжение* диода), формы, размеров и взаимного расположения электродов, работы выхода электронов из катода и его температуры. При прочих равных условиях зависимость тока  $I_A$  от  $U_A$  имеет вид, изображенный на рис. IV.5.5. Эта зависимость нелинейна, т. е. ток в диоде не подчиняется закону Ома.

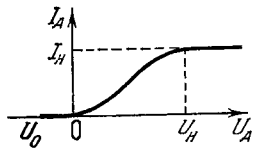


Рис. IV.5.5.

Небольшой ток, существующий в цепи диода при отрицательных анодных напряжениях ( $U_0 < U_A < 0$ ), обусловлен тем, что некоторые электроны, эмиттируемые катодом, имеют начальную кинетическую энергию, достаточную для преодоления задерживающего электрического поля между анодом и катодом. Обычно этот ток очень мал даже при  $U_A = 0$ , т. е. начальной кинетической энергией термоэлектронов можно пренебречь. В этом случае при небольших положительных значениях анодного напряжения величина термоэмиссионного тока, ограничиваемая объемным отрицательным зарядом, удовлетворяет закону *Богуславского-Лэнгмюра* (*закон трех вторых*): сила тока пропорциональна анодному напряжению в степени  $\frac{3}{2}$ .

Так, для бесконечно протяженных плоских электродов, находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, плотность тока

$$j = BU_A^{3/2},$$

где

$$B = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\epsilon_0}{d^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \frac{1}{d^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

$e$  и  $m$  — абсолютная величина заряда и масса электрона,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Для электродов в форме бесконечных коаксиальных цилиндров, внутренний из которых является катодом, ток с единицы длины катода

$$j = BU_A^{3/2},$$

где

$$B = \frac{8\pi\sqrt{2}}{9} \frac{\epsilon_0}{r_A r_K \beta^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{1}{r_A r_K \beta^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad (\text{в системе СГСЭ}),$$

$r_A$  — радиус анода, а  $\beta^2$  — функция отношения радиусов анода и катода  $r_A/r_K$ . При изменении  $r_A/r_K$  от 1 до 41,25  $\beta^2$  возрастает от 0 до 1,095, а при  $r_A/r_K > 41,25$  — убывает, стремясь к 1 при  $r_A/r_K \rightarrow \infty$ .

3° Максимальный термоэлектронный ток, возможный при данной температуре катода, называют *током насыщения*. При этом все электроны, вылетающие из катода, достигают анода. Ток насыщения растет с повышением температуры катода. Плотность тока насыщения  $j_H$  вычисляется по *формуле Ричардсона — Дэймана*:

$$j_H = \bar{D} C T^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

где  $\bar{D}$  — средняя прозрачность потенциального барьера на границе металл — вакуум для электронных волн (стр. 733),  $C = \frac{4\pi m e k^2}{h^2} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ а/м}^2 \cdot \text{град}^2$  — эмиссионная постоянная,  $k$  — постоянная Больцмана,  $h$  — постоянная Планка и  $A$  — работа выхода электрона из металла.

4° *Холодной (автоэлектронной) эмиссией* называется вырывание электронов из металла внешним электриче-

ским полем. Этот эффект может происходить при комнатных температурах, причем температура металла в процессе холодной эмиссии практически не изменяется. Холодная эмиссия объясняется туннельным эффектом (стр. 733) — прохождением электронов любой скорости сквозь потенциальный барьер на границе металла. Вероятность просачивания электронов сквозь потенциальный барьер, а следовательно, и плотность тока  $j$  холодной эмиссии зависят от напряженности  $E$  внешнего электрического поля:

$$j \sim e^{-E_0/E},$$

где

$$E_0 = \frac{8\pi}{3hc} \sqrt{2m \cdot 4^3}.$$

5° Явление фотозлектронной эмиссии состоит в вырывании электронов с поверхности тел (главным образом металлов), помещенных в вакууме или газе, под действием света (см. стр. 699).

6° Если поверхность металла в вакууме бомбардируется электронами, то

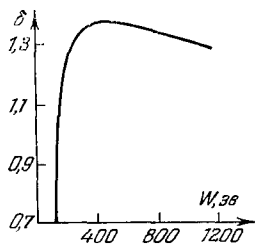


Рис. IV.5.6.

наблюдается встречный поток электронов от поверхности. Это явление называется *вторичной электронной эмиссией*. Помимо отражения электронов от поверхности происходит их вырывание из металла. Наибольшая эмиссия вторичных электронов наблюдается при энергиях первичных электронов в несколько сотен эв. Вторичная эмиссия характеризуется *коэффициентом вторичной эмиссии*  $\delta$ , равным отношению суммы числа отраженных и эмиттированных электронов к числу первичных. Типичный вид зависимости  $\delta$  от энергии первичных электронов  $W$  приведен на рис. IV.5.6. Для большинства обезгаженных металлов при нормальном падении электронов на поверхность  $\delta_{\text{макс}}$  не превышает 2. При наличии адсорбированного газа  $\delta$  увеличивается до 3. Вторичная электронная эмиссия применяется в электронных умножителях, служащих для многократного усиления слабых электронных токов.

## ГЛАВА 6

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 1. Магнитное поле. Закон Ампера

1° *Магнитным полем* называют одну из форм проявления электромагнитного поля, особенностью которой является то, что это поле действует только на движущиеся частицы и тела, обладающие электрическим зарядом, а также на намагниченные тела (стр. 467) независимо от состояния их движения.

Магнитное поле создается проводниками с током, движущимися электрически заряженными частицами и телами, намагниченными телами, а также переменным электрическим полем (токами смещения, стр. 499).

2° Силовой характеристикой магнитного поля служит *вектор магнитной индукции*  $\mathbf{B}$ . В Международной системе единиц (СИ) он численно равен пределу отношения силы, действующей со стороны магнитного поля на элемент проводника с электрическим током, к произведению тока и длины элемента проводника, если длина этого элемента стремится к нулю, а элемент так расположен в поле, что этот предел имеет наибольшее значение:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{I} \left( \frac{d\mathbf{F}}{dl} \right)_{\text{макс}},$$

В гауссовой системе единиц

$$\mathbf{B} = \frac{c}{I} \left( \frac{d\mathbf{F}}{dl} \right)_{\text{макс}},$$

где  $c$  — *электродинамическая постоянная*, равная отношению единиц заряда в системах СГСМ и СГСЭ к совпадающей со скоростью света в вакууме ( $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек).

Вектор  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно к направлению элемента проводника, удовлетворяющего указанному выше условию, и к направлению силы, действующей на этот элемент со стороны магнитного поля, причем из конца вектора  $\mathbf{B}$  вращение по кратчайшему расстоянию от направления силы к направлению тока в элементе проводника должно быть видно происходящим против часовой стрелки.

3° Силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с током, называют *силой Ампера*. Элементарная сила Ампера  $d\mathbf{F}$ , действующая на малый элемент  $dl$  длины проводника, по которому идет электрический

ток  $I$ , равна:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $d\mathbf{l}$  — вектор, численно равный длине  $dl$  элемента проводника и направленный в ту же сторону, что и вектор  $\mathbf{j}$  плотности тока в этом элементе проводника. Написанное выше соотношение называют *законом (формулой) Ампера*.

Взаимное расположение векторов  $d\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{l}$  показано на рис. IV. 6.1. В частности, если  $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$ , то направление силы  $d\mathbf{F}$  можно найти по *правилу левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца указывали бы направление электрического тока, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей со стороны поля на проводник.

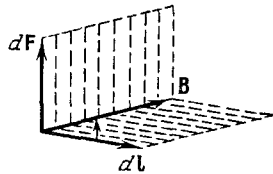


Рис IV 6 1.

4° Для графического изображения магнитных полей вводится представление о *линиях магнитной индукции*. Линиями магнитной индукции называются кривые, касательными к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\mathbf{B}$  в этих точках поля. Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с токами, создающими поле. Замкнутость линий индукции является выражением отсутствия в природе свободных магнитных зарядов. Магнитное поле называют *однородным*, если векторы  $\mathbf{B}$  во всех его точках одинаковы. В противном случае поле называют *неоднородным*.

5° Направление линий индукции магнитного поля тока определяется *правилом Максвелла (правилом буравчика)*: если ввинчивать буравчик по направлению тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление линий магнитной индукции.

6° В отличие от электростатических сил, которые являются центральными (стр. 342), сила Ампера, как и другие силы электромагнитного взаимодействия, не является центральной. Она направлена перпендикулярно к линиям индукции магнитного поля.

## 2. Закон Био — Савара — Лапласа

1° Закон *Био—Савара—Лапласа* устанавливает величину и направление вектора магнитной индукции  $d\mathbf{B}$  в произвольной точке  $C$  магнитного поля, создаваемого в вакууме элементом проводника длиной  $dl$  с током  $I$  (рис. IV.6.2):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $d\mathbf{l}$  — вектор элемента проводника, численно равный  $dl$  и проведенный в направлении тока,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из этого элемента проводника в рассматриваемую точку поля,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — электродинамическая постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  в·сек/а·м =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  гн/м — магнитная постоянная.

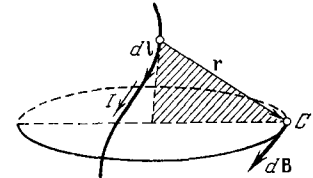


Рис. IV.6.2.

Вектор  $d\mathbf{B}$  перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ , и направлен таким образом, чтобы из его конца кратчайшее вращение вектора  $d\mathbf{l}$  до совмещения с вектором  $\mathbf{r}$  казалось происходящим против часовой стрелки (рис. IV.6.2). Такое же направление  $d\mathbf{B}$  следует из правила буравчика.

Численно вектор  $d\mathbf{B}$  равен:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\varphi \quad (\text{в СИ}),$$

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{I}{r} d\varphi \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $d\varphi$  — угол, под которым виден из рассматриваемой точки поля элемент  $dl$  проводника.

2° Если проводники с током или движущиеся заряженные тела (коннекционные токи) находятся не в вакууме, а в каком-либо веществе (магнетике), то это вещество намагничивается и магнитная индукция результирующего поля равна (стр. 472)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{внутр}},$$

где  $\mathbf{B}_0$  — магнитная индукция внешнего (намагничивающего) поля, создаваемого токами проводимости и конвекционными токами (*макроскопическими токами*), а  $\mathbf{B}_{\text{внутр}}$  — магнитная индукция поля, создаваемого намагниченным веществом, т. е. *молекулярными токами* в веществе.

В тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик полностью заполняет все пространство, где имеется магнитное поле, или часть его таким образом, что линии индукции намагничивающего поля не пересекают поверхность магнетика, то в магнетике

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0,$$

где  $\mu$  — *относительная магнитная проницаемость* магнетика, показывающая, во сколько раз при заданном распределении макроскопических токов магнитная индукция в рассматриваемой точке поля в данном веществе, заполняющем все поле, больше, чем в вакууме.

3° *Напряженностью магнитного поля* называют векторную физическую величину  $\mathbf{H}$ , характеризующую магнитное поле и определяемую следующим образом:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mathbf{I}$  — вектор интенсивности намагничения среды (стр. 467) в рассматриваемой точке поля. В частности, для магнитного поля в вакууме

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (\text{в СИ}) \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Если среда изотропна, то

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu \mu_0} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mu$  — скалярная величина, так что векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  коллинеарны.

Если выполнены условия, указанные в п. 2°, т. е., в частности, для магнитного поля в однородном изотропном магнетике, заполняющем весь объем поля, напряженность  $\mathbf{H}$  не зависит от  $\mu$  и совпадает с напряженностью в рассматриваемой точке, для магнитного поля, создаваемого той же системой макроскопических токов в

вакууме,

$$\mathbf{H} = \int_i d\mathbf{H},$$

где  $d\mathbf{H}$  может быть найден из закона *Био—Савара—Лапласа* для напряженности магнитного поля:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}] \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Смысл обозначений см. в п. 1°.

4° Магнитная индукция  $\mathbf{B}_q$  и напряженность  $\mathbf{H}_q$  магнитного поля заряда  $q$ , движущегося в безграничной, однородной и изотропной среде со скоростью  $\mathbf{v}$ , равны:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_q &= \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v} \mathbf{r}], \\ \mathbf{H}_q &= \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v} \mathbf{r}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_q &= \frac{\mu}{c} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v} \mathbf{r}], \\ \mathbf{H}_q &= \frac{1}{c} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v} \mathbf{r}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из движущегося заряда в рассматриваемую точку поля. Векторы  $\mathbf{B}_q$  и  $\mathbf{H}_q$  направлены перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ . Если  $q > 0$ , то из концов векторов  $\mathbf{B}_q$  и  $\mathbf{H}_q$  кратчайшее вращение от  $\mathbf{v}$  к  $\mathbf{r}$  кажется происходящим против часовой стрелки. Если  $q < 0$ , то  $\mathbf{B}_q$  и  $\mathbf{H}_q$  направлены в противоположную сторону (рис. IV.6.3). Магнитное

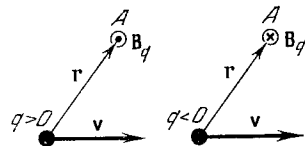


Рис. IV.6.3.

поле движущегося заряда переменнo, ибо численное значение и направление  $\mathbf{r}$  изменяются даже при  $\mathbf{v} = \text{const}$ . В отличие от электростатического поля неподвижного заряда (стр. 345), которое обладает сферической симметрией, магнитное поле обладает зеркальной симметрией относительно направления  $\mathbf{v}$ .



### 3. Простейшие магнитные поля токов

1° По принципу суперпозиции полей (стр. 344), который справедлив также для магнитного поля, магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в любой точке магнитного поля проводника с током  $I$  равна векторной сумме индукций  $\Delta\mathbf{B}$ , элементарных полей, создаваемых всеми участками проводника:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \Delta\mathbf{B}_i,$$

где  $n$  — общее число участков, на которые разбит проводник. При  $n \rightarrow \infty$   $\mathbf{B} = \int \mathbf{d}\mathbf{B}$ , где интегрирование распространяется на всю длину проводника.

Во всех примерах магнитных полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что среда однородна, изотропна и заполняет все пространство, в котором существует магнитное поле.

2° Магнитное поле прямолинейного проводника  $MN$  с током  $I$  (рис. IV.6.4) в произвольной точке  $A$  равно:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \\ H &= \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} \mu \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \\ H &= \frac{1}{c} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе),}$$

где  $r_0$  — расстояние точки  $A$  до проводника,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы, образованные радиус-векторами, проведенными в точку  $A$  из начала и конца проводника,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость, а  $\mu_0$  — магнитная постоянная. В частности, для магнитного поля бесконечного

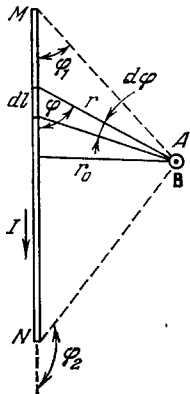


Рис. IV.6.4.

прямолинейного проводника с током  $I$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r_0} \quad \text{(в СИ),}$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{1}{c} \frac{2I}{r_0} \quad \text{(в гауссовой системе)}$$

(обозначения см. выше).

3° Магнитное поле в центре прямоугольного витка с током  $I$ :

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\ H &= \frac{1}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} \mu \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\ H &= \frac{1}{c} \frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе),}$$

где  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольника.

4° Магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  замкнутого плоского контура с током  $I$ :

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}, \quad \text{(в СИ),}$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} I\mathbf{S} \quad \text{(в гауссовой системе),}$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор, численно равный площади, охватываемой контуром, и направленный по нормали к плоскости контура так, чтобы из конца вектора  $\mathbf{p}_m$  ток казался

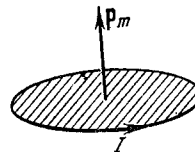


Рис. IV.6.5.

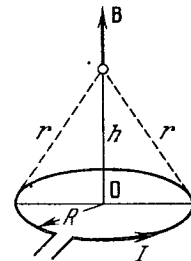


Рис. IV.6.6.

протекающим против часовой стрелки (рис. IV.6.5). Магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  произвольной системы замкнутых токов равен векторной сумме магнитных моментов отдельных замкнутых контуров, составляющих систему.

В частности, магнитный момент соленоида (стр. 433) равен векторной сумме магнитных моментов всех его витков:  $\mathbf{p}_m = NIS$ , где  $N$  — общее число витков соленоида,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $I$  — ток в витках соленоида. Вектор  $\mathbf{p}_m$  направлен по оси соленоида и совпадает с направлением его магнитного поля.

5° Магнитное поле, создаваемое круговым витком с током  $I$  в произвольной точке оси витка (рис. IV.6.6):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}, & \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}, & \mathbf{H} &= \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе).}$$

Численно  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  равны:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 IS}{2\pi(R^2+h^2)^{3/2}}, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{IS}{2\pi(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} \mu \frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \mu \frac{2IS}{(R^2+h^2)^{3/2}}, \\ H &= \frac{1}{c} \frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \frac{2IS}{(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе),}$$

где  $h$  — расстояние до центра витка,  $R$  — радиус витка  $S = \pi R^2$  — площадь витка.

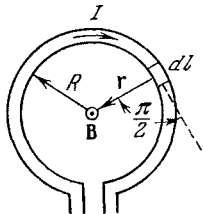


Рис. IV 6 7.

6° Магнитное поле в центре кругового витка радиуса  $R$ , по которому протекает ток  $I$  (рис. IV.6.7):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, & \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, & \mathbf{H} &= \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе).}$$

Численно  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  равны:

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu\mu_0 \frac{I}{2R}, & H &= \frac{I}{2R} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} 2\pi\mu \frac{I}{R}, & H &= \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе).}$$

Магнитное поле кругового витка направлено по оси витка перпендикулярно к его плоскости.

7° *Торойдом* называется кольцевая катушка, намотанная на сердечник, имеющая форму тора (рис. IV.6.8). Магнитное поле тороида целиком локализовано внутри его объема, где

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r}, & H &= \frac{NI}{2\pi r} \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} \mu \frac{2NI}{r}, & H &= \frac{1}{c} \frac{2NI}{r} \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе).}$$

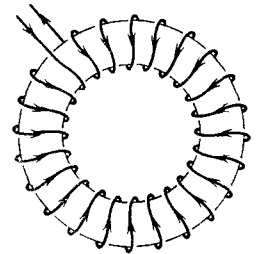


Рис. IV 6 8.

Напряженность поля внутри тороида уменьшается от  $H_{\text{макс}} = NI/2\pi R_2$  до  $H_{\text{мин}} = NI/2\pi R_1 = NI/2\pi (R_2 + d)$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — внешний и внутренний радиусы тора,  $N$  и  $d$  — число и диаметр витков обмотки. Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида:

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi R_{\text{ср}}} = nI \text{ (в СИ),}$$

где  $R_{\text{ср}} = (R_1 + R_2)/2$ ,  $n$  — число витков на единицу длины средней линии тороида. При  $R_{\text{ср}} \rightarrow \infty$  и постоянных  $d$  и  $n$  получается бесконечно длинный соленоид с однородным полем.

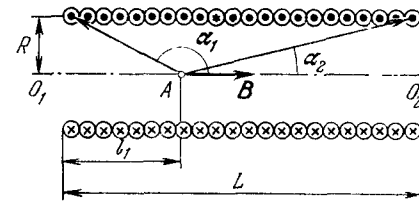


Рис. IV 6 9

8° *Соленоидом* называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа витков проволоки, образующих винтовую линию. Если витки расположены вплотную

или достаточно близко друг к другу, соленоид представляет собой систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось. На рис. IV.6.9 точками и крестами показаны сечения витков, в которых ток направлен из-за чертежа и за чертеж. Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  направлены по оси соленоида по правилу буравчика (стр. 426).

Магнитное поле соленоида в произвольной точке  $A$ , лежащей на оси соленоида:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \\ H &= \frac{nI}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{c} 2\pi\mu nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \\ H &= \frac{1}{c} 2\pi nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $n = N/L$  — число витков на единицу длины соленоида,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы, под которыми из точки  $A$  видны концы соленоида ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ) (рис. IV.6.9):

$$\cos \alpha_1 = -\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}}.$$

Максимальные значения магнитной индукции  $B_{\text{макс}}$  и напряженности  $H_{\text{макс}}$  соответствуют точке, лежащей на середине оси соленоида:

$$\left. \begin{aligned} B_{\text{макс}} &= \mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \\ H_{\text{макс}} &= nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}).$$

9° При условии  $L \gg R$  магнитное поле внутри соленоида в точках его оси, достаточно удаленных от концов соленоида:

$$B = \mu_0 nI, \quad H = nI \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} 4\pi\mu nI, \quad H = \frac{1}{c} 4\pi nI \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

10° Магнитная индукция и напряженность магнитного поля достаточно длинного соленоида в точках оси, совпадающих с его концами:

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI, \quad H = \frac{1}{2} nI \quad (\text{в СИ}),$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi\mu nI, \quad H = \frac{1}{c} 2\pi nI \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

11° Напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля, созданного произвольной системой токов с магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$  на расстояниях от системы  $r$ , значительно превышающих ее линейные размеры, равна напряженности поля эквивалентного «магнитного диполя» с моментом  $\mathbf{p}_m$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

«Магнитным диполем» называется система из двух разноименных точечных магнитных «зарядов»  $+m$  и  $-m$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, малом по сравнению с расстоянием  $r$  до рассматриваемых точек поля. Магнитный момент диполя:  $\mathbf{p}_m = ml$ , где вектор  $l$  направлен от южного полюса к северному (от  $-m$  к  $+m$ , ср. стр. 346).

#### 4. Действие магнитного поля на проводники с токами. Взаимодействие проводников

1° Закон Ампера для магнитного взаимодействия в вакууме малых элементов двух проводников длиной  $dl_1$  и  $dl_2$  с токами  $I_1$  и  $I_2$ :

$$\left. \begin{aligned} (d\mathbf{F}_{12})_{\text{вак}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [dl_2 [dl_1 \mathbf{r}_{12}]], \\ (d\mathbf{F}_{21})_{\text{вак}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^2} [dl_1 [dl_2 \mathbf{r}_{21}]] \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} (d\mathbf{F}_{12})_{\text{вак}} &= \frac{1}{c^2} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [dl_2 [dl_1 \mathbf{r}_{12}]], \\ (d\mathbf{F}_{21})_{\text{вак}} &= \frac{1}{c^2} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^2} [dl_1 [dl_2 \mathbf{r}_{21}]] \end{aligned} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $(d\mathbf{F}_{12})_{\text{вак}}$  — сила, действующая на элемент второго проводника длиной  $dl_2$  со стороны элемента первого проводника длиной  $dl_1$ ;  $(d\mathbf{F}_{21})_{\text{вак}}$  — сила, действующая на

элемент  $dl_1$  со стороны элемента  $dl_2$ ; векторы  $dl_1$  и  $dl_2$  проведены в направлении тока в соответствующих участках проводников;  $\mathbf{r}_{12}$  — вектор, проведенный из элемента  $dl_1$  в элемент  $dl_2$ , а  $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ .

Если, как это предполагается во всех примерах, рассматриваемых ниже, проводники находятся в однородной, изотропной и безграничной среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ , то

$$d\mathbf{F}_{12} = \mu(d\mathbf{F}_{12})_{\text{вак}} \text{ и } d\mathbf{F}_{21} = \mu(d\mathbf{F}_{21})_{\text{вак}}.$$

2° Сила, действующая на элемент длины  $dl$  прямолинейного проводника с током  $I_1$  со стороны длинного прямолинейного проводника с током  $I_2$ , расположенного параллельно первому на расстоянии  $d$  от него, равна:

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} dl \quad (\text{в СИ}),$$

$$dF = \frac{1}{c^2} \mu \frac{2I_1 I_2}{d} dl \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Сила  $F$ , действующая на участок проводника длиной  $l$ , равна:

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} l \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{1}{c^2} \mu \frac{2I_1 I_2}{d} l \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Проводники с токами  $I_1$  и  $I_2$  одного направления притягиваются. В случае противоположно направленных токов проводники отталкиваются.

3° Сила взаимодействия двух одинаковых квадратных контуров с токами  $I_1$  и  $I_2$  (стороны обоих квадратов параллельны, а их центры лежат на прямой, перпендикулярной к их плоскостям) равна:

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} 8I_1 I_2 \left\{ \frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1 \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{1}{c^2} 8\mu I_1 I_2 \left\{ \frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1 \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $a$  — сторона квадрата,  $d$  — расстояние между центрами квадратов. Контур притягивается при одинаковом направлении токов и отталкивается в случае разных направлений токов.

4° Сила взаимодействия двух достаточно длинных соосных соленоидов (с радиусами витков  $R_1$  и  $R_2$ ), ближние

концы которых отстоят друг от друга на расстоянии  $d \gg R_1$  и  $R_2$ , равна ( $S_1 = \pi R_1^2$ ,  $S_2 = \pi R_2^2$ ):

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1}{d^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$F = \frac{1}{c^2} \mu \frac{I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1}{d^2} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Направление  $\mathbf{F}$  зависит от того, обтекаются соленоиды токами одинакового или противоположного направления. В первом случае соленоиды притягиваются, во втором — отталкиваются.

5° На плоский проводящий замкнутый контур с током (например, прямоугольную рамку), помещенный в однородное магнитное поле, действует момент сил  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = [p_m \mathbf{B}],$$

где  $p_m$  — вектор магнитного момента контура,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция поля. Вращающий момент направлен перпендикулярно к векторам  $p_m$  и  $\mathbf{B}$  так, что из его конца кратчайшее вращение от  $p_m$  к  $\mathbf{B}$  кажется происходящим против часовой стрелки. Под действием момента  $\mathbf{M}$  контур принимает положение устойчивого равновесия, при котором векторы  $p_m$  и  $\mathbf{B}$  параллельны друг другу.

6° В неоднородном магнитном поле на замкнутый контур с током кроме момента сил  $\mathbf{M}$  действует еще результирующая сила  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \text{grad}(p_m \mathbf{B}).$$

Под действием силы  $\mathbf{F}$  контур втягивается в сторону больших значений индукции магнитного поля (в область более сильного поля).

## 5. Закон полного тока. Магнитные цепи

1° *Циркуляцией вектора  $\mathbf{H}$  напряженности магнитного поля* вдоль замкнутого контура  $L$  называется интеграл вида

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}),$$

где  $L$  — контур произвольной формы,  $d\mathbf{l}$  — элемент длины контура в направлении его обхода. Интегрирование распространено на всю длину замкнутого контура.

2° *Закон полного тока для токов проводимости*: циркуляция вектора напряженности магнитного поля

постоянного электрического тока вдоль замкнутого контура пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $n$  — число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы. Ток считается положительным, если из конца вектора плотности тока (стр. 376), направленного по оси проводника в сторону тока, обход контура  $L$  кажется происходящим против часовой стрелки (по правилу буравчика, стр. 426). В противном случае токи считаются отрицательными. Токи, которые не охватываются контуром  $L$ , не дают вклада в циркуляцию  $\mathbf{H}$ .

Для магнитного поля в вакууме закон полного тока можно записать в форме:

$$\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l})$  — циркуляция вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  вдоль замкнутого контура  $L$ .

Обобщение закона полного тока на случай существования токов смещения и молекулярных токов см. на стр. 500 и стр. 473. Закон полного тока применяется для расчета магнитных полей постоянного тока.

3° Элементарный поток  $d\Phi_m$  вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  сквозь участок поверхности с площадью  $dS$ :

$$d\Phi_m = B dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = B_n dS = B dS_n,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к площадке  $dS$ ,  $B_n$  — проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление нормали

(рис. IV.6.10). Магнитный поток  $\Phi_m$  сквозь произвольную поверхность  $S$  находится суммированием или интегрированием всех элементарных потоков:

$$\Phi_m = \int_S B dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = \int_S B_n dS = \int_S B dS_n.$$

Для однородного поля и плоской поверхности  $S$ , расположенной перпендикулярно к вектору  $\mathbf{B}$ ,

$$B_n = B = \text{const}, \quad \Phi_m = BS.$$

4° Теорема Остроградского — Гаусса для потока магнитной индукции: магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0.$$

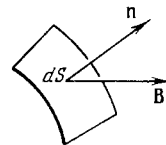


Рис. IV.6.10.

Теорема выражает отсутствие в природе магнитных зарядов и замкнутость линий индукции магнитного поля.

Дифференциальная форма теоремы

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

является одним из уравнений Максвелла для электромагнитного поля (стр. 501).

5° Магнитной цепью называется совокупность тел или областей пространства, в которых сосредоточено магнитное поле. Магнитные цепи составляют необходимую часть электрических машин и многих электрических устройств.

6° Магнитный поток в магнитной цепи играет роль, аналогичную силе тока в электрической цепи. Во всех сечениях неразветвленной магнитной цепи магнитный поток  $\Phi_m$  должен быть одинаковым.

7° Формула Гопкинсона (закон Ома для замкнутой магнитной цепи):

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

где  $\Phi_m$  — магнитный поток, постоянный вдоль каждого участка цепи,  $\mathcal{E}_m = IN$  — магнитодвижущая, или намагничивающая, сила (в СИ),  $N$  — число витков намагничивающего тока  $I$ ,  $R_m$  — полное магнитное сопротивление цепи. Магнитное сопротивление участка цепи длиной  $l$  с

постоянной площадью поперечного сечения  $S$ :

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu\mu_0 S} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость данного участка цепи,  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Если  $S$  не постоянно, то

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu\mu_0 S} \quad (\text{в СИ}).$$

8° Общее (полное) магнитное сопротивление  $R_m$  последовательно соединенных участков магнитной цепи равно

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi},$$

где  $n$  — число участков цепи.

При параллельном соединении  $n$  магнитных сопротивлений полное магнитное сопротивление  $R_m$  цепи равно

$$R_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{mi}}}.$$

9° *Первое правило Кирхгофа для разветвленных магнитных цепей*: алгебраическая сумма магнитных потоков в участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0,$$

где  $n$  — число участков, сходящихся в узле (ср. стр. 383).

Магнитный поток считается положительным, если линии индукции подходят к узлу. Если они выходят из узла, то поток  $\Phi_{mi}$  считается отрицательным.

10° *Второе правило Кирхгофа*: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков  $\Phi_{mi}$  на магнитные сопротивления  $R_{mi}$  соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме приложенных в этом контуре магнитодвижущих сил  $\mathcal{E}_{mi}$ :

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^l \mathcal{E}_{mi},$$

где  $k$  — число участков магнитной цепи, составляющих замкнутый контур (ср. стр. 384), а  $\Phi_{mi}$  и  $\mathcal{E}_{mi}$  считают поло-

жительными, если направления линий индукции соответствующих им магнитных полей совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура.

## 6. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле

1° Под влиянием силы Ампера (стр. 425) незакрепленный проводник с током перемещается в магнитном поле. Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой Ампера при перемещении элемента  $dl$  проводника с током  $I$ , равна

$$dA = I d\Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$dA = \frac{1}{c} I d\Phi_m \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $d\Phi_m$  — элементарный магнитный поток сквозь поверхность, образуемую элементом длины движущегося проводника. Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении проводника конечной длины с током  $I = \text{const}$ :

$$A = I\Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$A = \frac{1}{c} I\Phi_m \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\Phi_m$  — магнитный поток сквозь поверхность, которую описывает проводник при своем движении, а  $I = \text{const}$ .

2° При произвольном перемещении замкнутого контура с током  $I = \text{const}$  в магнитном поле совершается работа

$$A = I \Delta\Phi_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$A = \frac{1}{c} I \Delta\Phi_m \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\Delta\Phi_m$  — изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

При вычислении магнитного потока  $\Phi_m$  сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром с током, направление внешней нормали выбирается таким образом, чтобы из конца вектора нормали ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки.

3° Работа перемещения в магнитном поле проводника или замкнутого контура с током  $I = \text{const}$  совершается за счет энергии, затрачиваемой источником тока.

## ГЛАВА 7

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

## 1. Сила Лоренца

1° На электрический заряд, движущийся в магнитном поле, действует *сила Лоренца*:

$$\mathbf{F}_Л = q[\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{F}_Л = \frac{1}{c} q[\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $q$  — алгебраическая величина движущегося заряда ( $q > 0$  для положительного заряда и  $q < 0$  для отрицательного заряда),  $\mathbf{v}$  — скорость заряда,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция поля, в котором движется заряд,  $c$  — электродинамическая постоянная,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

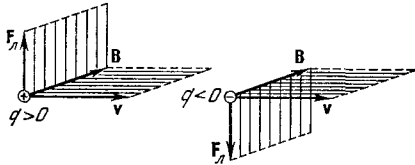


Рис IV.7.1.

На рис. IV.7.1 показано взаимное расположение векторов  $\mathbf{F}_Л$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{v}$  для случаев  $q > 0$  и  $q < 0$ . Сила Лоренца не совершает работы, ибо она перпендикулярна к вектору  $\mathbf{v}$ .

2° При совместном действии на движущийся заряд электрического и магнитного полей результирующая сила (ее иногда также называют силой Лоренца)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля.

3° В однородном магнитном поле, перпендикулярном к направлению скорости движущейся заряженной частицы, последняя под действием силы Лоренца движется

по окружности постоянного радиуса  $r$  в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{B}$ . Сила Лоренца является в этом случае центростремительной силой (стр. 40);

$$r = \frac{m}{|q|} \frac{v}{B} \quad (\text{в СИ}),$$

$$r = \frac{cm}{|q|} \frac{v}{B} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $m$  — масса частицы,  $|q|$  — абсолютная величина ее заряда,  $v$  — скорость частицы,  $B$  — магнитная индукция. По направлению отклонения элементарной заряженной частицы в магнитном поле (рис. IV.7.2) судят о знаке ее заряда.

Период  $T$  обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} \quad (\text{в СИ}),$$

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{mc}{|q|} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

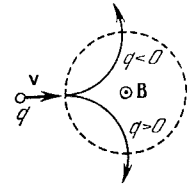


Рис IV.7.2.

При скорости частицы  $v \ll c$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, период  $T$  не зависит от  $v$ .

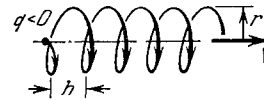


Рис. IV.7.3.

4° Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле так, что вектор  $\mathbf{v}$  ее скорости составляет угол  $\alpha$  с направлением магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , то траекторией частицы является винтовая линия (рис. IV.7.3) с радиусом витков  $r$  и шагом винта  $h$ :

$$r = \frac{m}{|q|} \frac{v \sin \alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} v \cos \alpha \quad (\text{в СИ}),$$

$$r = \frac{mc}{|q|} \frac{v \sin \alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{mc}{|q|} v \cos \alpha \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

5° Если рассмотренное выше движение (п. 4°) происходит в неоднородном поле, магнитная индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то радиус витков и шаг винта уменьшаются по мере увеличения  $B$ .

## 2. Удельный заряд частиц. Масс-спектрография

1° *Удельным зарядом* частицы называется отношение  $q/m$  ее заряда к массе. Для измерения удельного заряда используется отклонение заряженных частиц в магнитном поле (стр. 442). Экспериментально определяются скорость частицы  $v$  (обычно скорость частицы создается электрическим полем с заданной разностью потенциалов) и радиус  $r$  траектории частицы в магнитном поле.  $q/m$  определяется по формуле п. 3° стр. 443.

Удельный заряд электрона см. в таблице на стр. 910.

2° Для определения удельного заряда и массы положительных ионов применяется совместное действие на частицы магнитного и электрического полей. Приборы, предназначенные для точных измерений относительных атомных весов (а следовательно, и масс) изото-

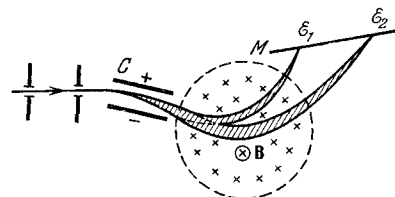


Рис. IV.7.4.

*Астона* (рис. IV.7.4) все частицы с одинаковым удельным зарядом  $q/m$  отклоняются во взаимно перпендикулярных электрическом поле конденсатора  $C$  и магнитном поле катушки  $M$  так, что независимо от их скорости они фокусируются в одной точке. На фотопластинке получается ряд узких параллельных линий ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ ), соответствующих различным значениям  $q/m$  [ $(q/m)_{\epsilon_1} > (q/m)_{\epsilon_2}$ ].

*Двойная фокусировка* ионов по энергиям и направлениям, осуществляемая заменой плоских конденсаторов на цилиндрические и применением специальных электромагнитов, дает плоскопараллельный пучок ионов, входящих в магнитное поле, и обеспечивает при достаточной интенсивности линий на фотопластинке точность измерения масс ионов легких элементов до  $10^{-4}\%$ .

пов химических элементов (стр. 806), называются *масс-спектрографами* и *масс-спектрометрами*.

3° *Спектром масс* (массовым спектром) частиц называется совокупность значений их масс. В *масс-спектрографе*

4° В масс-спектрометрах с помощью специальных ионных источников создаются моноэнергетические (мономатематические) пучки ионов, которые в поперечном магнитном поле хорошо фокусируются даже при сильно расходящихся пучках большого числа ионов. Этим достигается высокая точность измерения концентраций различных изотопов.

## 3. Ускорители заряженных частиц

1° Устройства для получения заряженных частиц с весьма большой кинетической энергией называются *ускорителями*. Методы ускорения делятся на три группы: *прямой, индукционный* и *резонансный*. По форме траекторий движения частиц ускорители делятся на *линейные* и *циклические*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических они являются окружностями или спиралями.

2° В прямых линейных ускорителях частица неоднократно проходит электрическое поле с большой разностью потенциалов, созданное электростатическими генераторами, например *генератором Ван-де-Граафа* (стр. 357).

3° Единственным ускорителем индукционного типа является *бетатрон*, используемый для ускорения электронов до энергий порядка  $10^2$  Мэв. В бетатроне использовано возникновение в ускорительной камере вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля электромагнита. Траекториями электронов являются окружности, совпадающие с линиями напряженности вихревого электрического поля. При многократном движении электрона по устойчивой круговой орбите электрон приобретает большую энергию.

Напряженность  $E$  вихревого электрического поля в бетатроне:

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{dB_{\text{вр}}}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $B_{\text{вр}}$  — среднее значение в момент времени  $t$  магнитной индукции в пределах круга радиуса  $r$ ,  $r$  — расстояние от оси поля до рассматриваемой точки (радиус круговой орбиты электрона в бетатроне). Условие стабильности орбиты электрона в бетатроне:

$$B = \frac{1}{2} B_{\text{вр}},$$

где  $B$  — численное значение магнитной индукции на орбите.



Условия устойчивости орбиты электрона в бетатроне:

а) *аксиальная фокусировка*, т. е. расположение орбиты в одной плоскости, достигается за счет специальной формы полюсных наконечников электромагнита, обеспечивающей постепенное ослабление магнитного поля по мере удаления от его оси;

б) *радиальная фокусировка*, т. е. возвращение на стабильную орбиту электронов, случайно сошедших с нее, достигается за счет того, что магнитная индукция поля электромагнита убывает от оси к периферии медленнее, чем  $1/r$ , где  $r$  — расстояние от рассматриваемой точки поля до оси.

4° В резонансных циклических ускорителях, применяемых для ускорения протонов, дейтронов и других частиц, ускоряемая частица многократно проходит через переменное электрическое поле по замкнутой траектории, каждый раз увеличивая свою энергию. Для управления движением частиц и периодического возвращения их в область ускоряющего электрического поля применяется сильное магнитное поле. Прохождение частицей определенных точек переменного электрического поля происходит приблизительно в одной и той же его фазе («в резонансе»).

5° Простейшим резонансным ускорителем является *циклотрон*. Переменное ускоряющее электрическое поле создается в щели между двумя половинками цилиндрической коробки (*дуантами*)  $M$  и  $N$  (рис. IV.7.5). Частица ускоряется каждый раз, когда она, описав под действием маг-

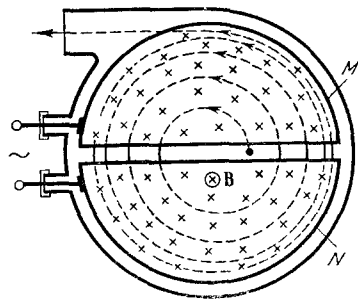


Рис. IV.7.5.

нитного поля полуокружность в дуанте, входит в зазор между  $M$  и  $N$ . Для непрерывного ускорения частицы необходимо выполнение условия резонанса (*синхронизма*):  $T_0 = T$ , где  $T_0$  — период колебаний электрического поля,  $T$  — период обращения частицы. При скоростях  $v$  частицы, соизмеримых со скоростью света в вакууме,

вследствие релятивистской зависимости массы  $m$  от скорости (стр. 526) период  $T$  возрастает и условие синхронизма нарушается.

6° *Принцип автофазировки* в циклических ускорителях релятивистских частиц заключается в том, что всякое отклонение периода  $T$  от резонансного значения  $T_0$  приводит к такому изменению прироста энергии частицы при каждом ускорении, что  $T$  колеблется около  $T_0$ , оставаясь в среднем равным ему:

$$T_0 \approx T = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| = \frac{2\pi}{B} \frac{E}{|q|c^2},$$

где  $E$  — полная энергия частицы (стр. 527),  $c$  — скорость света в вакууме,  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $m_0$  — масса покоящейся частицы, остальные обозначения см. на стр. 443.

7° В *фазотроне* ускорение осуществляется при  $B = \text{const}$  медленным увеличением  $T_0$ . Из принципа автофазировки следует, что при этом растет энергия частиц вследствие релятивистского возрастания массы со скоростью.

В *синхротроне* при неизменном периоде  $T_0$  ускоряющего электрического поля индукция магнитного поля  $B$  возрастает пропорционально увеличению массы частиц ( $m/B = \text{const}$ ). Энергия частиц возрастает пропорционально увеличению  $B$  (при постоянном  $T$ ).

В *синхрофазотроне* одновременно и согласованно увеличиваются  $T_0$  и  $B$ , что приводит к увеличению  $E$ .

Максимальная энергия протонов, получаемая в действующих синхрофазотронах, составляет  $32 \text{ Гэв}$  (Брукхейвен, США). Закачивается наладка ускорителя протонов на энергию  $70 \text{ Гэв}$  (Серпухов, СССР). Проектируются ускорители протонов на энергии до  $1000 \text{ Гэв}$ . Крупнейшими ускорителями электронов являются синхротроны на  $6 \text{ Гэв}$  в Кембридже (США), Гамбурге (ФРГ) и Ереване. В Станфорде (США) проектируется ускоритель электронов на энергию  $20 \text{ Гэв}$ .

8° Напряженность магнитного поля в ускорителях не может превышать  $15\,000 - 20\,000 \text{ э}$ . Поэтому необходимое для ускорения частиц увеличение радиусов их орбит приводит к увеличению размеров ускорителей и их веса, а также усложняет фокусировку, необходимую для устойчивого движения частиц в вакуумной камере ускорителя. *Сильная (жесткая) фокусировка* позволяет снизить вес и размеры ускорителей. Она достигается специальной

конструкцией электромагнитов и особым режимом магнитного поля. Так, в кольцевом фазотроне магнитное поле, не изменяясь во времени, создается магнитом, состоящим из отдельных радиальных секторов с резким изменением поля по радиусу в противоположных направлениях в соседних секторах.

9° В настоящее время успешно развиваются новые методы ускорения: метод встречных пучков, когерентный метод и др.

В *методе встречных пучков* используется столкновение двух движущихся навстречу друг другу частиц высоких энергий  $W_1$  и  $W_2$ . Каждая из них в относительном движении приобретает энергию  $W \approx 2W_1W_2$ . Для получения заметного числа соударений на орбите должно находиться  $10^{12} \div 10^{14}$  частиц.

В *когерентном методе* пучок электронов падает на поток протонов и за счет кулоновского взаимодействия увлекает за собой протоны до тех пор, пока  $v_e > v_p$ , где  $v_e$  — скорость электронов,  $v_p$  — скорость протонов. Когда  $v_e = v_p$ , энергия протонов оказывается в  $\sim 1840$  раз больше энергии электронов. В этом методе ускоряющее действие электрического поля определяется не только внешним источником, но и числом ускоряемых частиц.

#### 4. Основы электронной оптики

1° *Электронная оптика* изучает свойства пучков заряженных частиц (электронов, протонов), взаимодействующих с электрическими и магнитными полями. В *геометрической электронной оптике* пренебрегают волновыми свойствами пучков частиц (стр. 716). Заряженные частицы в ней представляются как материальные точки, а их движение в полях описывается совокупностью траекторий.

Законы геометрической электронной оптики применяются в тех областях пучков заряженных частиц, где их плотность существенно меняется в пределах линейных размеров

$$l = \frac{h}{2\pi\sqrt{2me\phi}},$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $e$  и  $m$  — заряд и масса частиц,  $\phi$  — потенциал электростатического поля. Этим участкам соответствуют границы пучков и места их схождения (например, в главном фокусе, в точках изображения,

создаваемого электроопто-оптическими системами), где наблюдаются дифракционные явления, связанные с волновыми свойствами пучков частиц.

2° На электронную оптику могут быть перенесены все основные законы обычной (световой) оптики. Аналогия обычной и электронной оптики основывается на том, что поле, в котором движется пучок электронов (или других заряженных частиц), можно уподобить оптически неоднородной среде, а траектории электронов — световым лучам в этой среде (оптико-механическая аналогия, стр. 102).

В электронной оптике в основном применяют *осесимметричные* поля (аналогично аксиально-симметричным оптическим системам).

3° Для движения электрона в электростатическом поле в нерелятивистском случае (скорость электрона  $v \ll c$ , где  $c$  — скорость света в вакууме) *электрооптический показатель преломления* «среды» равен

$$n = C\sqrt{\phi},$$

где  $\phi$  — потенциал в рассматриваемой точке поля, отсчитываемый от потенциала той точки, в которой скорость электрона равна нулю,  $C$  — произвольная постоянная.

Закон преломления на границе раздела двух «сред» (закон *Снеллиуса*) в этом случае имеет вид

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sqrt{\phi_2}}{\sqrt{\phi_1}},$$

где  $i$  и  $r$  — углы «падения» и «преломления» электронного луча на некоторой поверхности, разделяющей области поля с потенциалами  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Это соотношение применяется для приближенного нахождения траекторий электронов; при этом задаются рядом эквипотенциальных поверхностей («поверхностей раздела») (стр. 353) и рассматривают электронные траектории как отрезки прямых («лучи»). Более точное построение траекторий электронов производится с учетом их кривизны:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2\phi} \frac{d\phi}{dn},$$

где  $\frac{d\phi}{dn}$  — изменение потенциала электростатического поля в направлении нормали к траектории.

В релятивистском случае электро-оптический показатель преломления для электростатического поля имеет вид

$$n = C \sqrt{\varphi(1 + k\varphi)},$$

где  $k = e/2m_0c^2$  — релятивистская поправка,  $e$  и  $m_0$  — абсолютная величина заряда и масса покоя электрона.

Если помимо электростатического поля на электрон действует стационарное магнитное поле, то электро-оптический показатель преломления зависит не только от  $\varphi$ , но и от направления движения электрона в рассматриваемой точке. Следовательно, комбинированное (электростатическое и магнитное) поле подобно анизотропной «среде» (стр. 652).

4° Для управления движением электронов в электро-оптических приборах (*электронных микроскопах, умножителях, преобразователях света*) служат электростатические и магнитные линзы.

*Электростатические линзы* представляют собой металлические диафрагмы с отверстиями круговой формы или отрезки металлических труб круглого сечения. Оптическая ось линзы образуется осями симметрии отдельных ее электродов. Линза называется *одиночной*, если потенциалы ее крайних электродов одинаковы; в противном случае она называется *иммерсионной*.

Поле электростатической линзы меняет скорости электронов по величине и направлению. Если электроны проходят сквозь линзу, то она является *собирающей*. Траектории периферийных электронов в пучке пересекают оптическую ось линзы всегда раньше, чем траектории центральных электронов пучка (сферическая аберрация, стр. 641, всегда отрицательна).

Если потенциал в средней точке одиночной линзы (*седловой точке*) ниже потенциала источника электронов (катода), то линза становится *электронным зеркалом*. Это зеркало может быть *рассеивающим* и создавать мнимое изображение (стр. 626) или может быть *собирающим* и создавать действительное изображение (стр. 626), в зависимости от положения в линзе той эквипотенциальной поверхности, от которой отражаются электроны.

Форма траекторий электронов в электростатических линзах в случае скоростей электронов, много меньших скорости света в вакууме (нерелятивистский случай), зависит только от распределения потенциала; когда скорость электронов приближается к скорости света, на

траектории начинает также влиять величина  $e/m$  — отношение заряда электрона к его массе.

Линзу называют *тонкой*, если ее фокусное расстояние во много раз больше поля линзы в осевом направлении. *Оптическая сила* (стр. 632) *тонкой одиночной электростатической линзы* в нерелятивистском случае приближенно равна

$$D_e = \frac{1}{f} = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi')^2}{\varphi^2} dz,$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы,  $\varphi(z)$  — распределение потенциала вдоль оптической оси линзы  $z$ ,  $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$ .

Для иммерсионной линзы при тех же условиях

$$\frac{1}{f_1} = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 dz \quad \text{и} \quad f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — переднее (в пространстве предмета) и заднее (в пространстве изображения) фокусные расстояния линзы, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы электростатического поля в пространстве предмета и в пространстве изображения.

5° *Магнитные линзы* обычно имеют вид коротких соленоидов (стр. 433), коаксиальных пучку электронов. Для концентрации магнитного поля вблизи оптической оси линзы применяются соленоиды, окруженные ферромагнитными оболочками.

*Оптическая сила тонкой магнитной линзы* для параксиального пучка (стр. 627) в нерелятивистском случае приближенно равна

$$D_m = \frac{1}{f} = \frac{e}{8mU} \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz \quad (\text{в СИ}),$$

где  $U$  — разность потенциалов, пройденная электроном до входа в магнитную линзу,  $B_z(z)$  — магнитная индукция вдоль оптической оси линзы. Поле магнитной линзы меняет скорость электронов только по направлению (*фокусирующее действие*), вкручивая их траектории вокруг оптической оси. Это вызывает *поворот электронного изображения* относительно предмета на угол  $\theta$ .

Для паракиального пучка этот угол равен

$$\theta = \sqrt{\frac{e}{8mU}} \int_{-\infty}^{\infty} B_z dz \quad (\text{в СИ}).$$

Ввиду того, что  $\int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz > 0$ , существуют только собира-  
тельные магнитные линзы. При этом  $D_m$ , в отличие от  
электростатических линз, зависит от скорости электро-  
нов (т. е. от  $U$ ) даже в нерелятивистском случае. Для  
релятивистских скоростей электронов величину  $U$  в при-  
веденных формулах следует заменить на  $U^* = U + \frac{e}{2m_0c^2} U^2$   
( $m_0$  — масса покоя электрона, см. стр. 526).

6° Стилматическое изображение предметов (стр. 625)  
в электронно-оптических системах получается только  
для паракиальных электронных пучков.

Основные уравнения (уравнения траекторий) в осесим-  
метричных полях для паракиальных пучков электронов  
имеют вид (в СИ):

а) для электростатических линз в нерелятивистском  
случае

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{2\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \frac{dr}{dz} + \frac{r}{4\varphi} \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

где  $\varphi(z)$  — потенциал на оптической оси системы, отчи-  
тываемый от потенциала точки, в которой скорость элек-  
трона  $v = 0$ ,  $z$  и  $r$  — координаты соответственно вдоль  
этой оси и в радиальном направлении; отсюда следуют  
законы подобия: 1) при увеличении линейных размеров  
электронно-оптической системы в  $n$  раз во столько же  
раз увеличиваются размеры траекторий; 2) траектории  
не изменяются, если потенциалы всех электродов увели-  
чиваются в  $n$  раз;

б) для электростатических линз в релятивистском  
случае

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{d}{dz} \left[ \sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1+k\varphi) \frac{d^2\varphi}{dz^2} r = 0,$$

где  $k = e/2m_0c^2$ ,  $m_0$  — масса покоя электрона,  $c$  — скорость  
света в вакууме;

в) для магнитных линз в нерелятивистском случае

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{e}{8mU} B_z^2 r = 0,$$

где  $B_z(z)$  — проекция магнитной индукции на ось

линзы,  $U$  — разность потенциалов, которую прошел элек-  
трон до входа в линзу;

г) для магнитных линз в релятивистском случае рас-  
пространение формулы производится согласно сказанному  
в п. 5°;

д) для комбинированных электростатического и маг-  
нитного полей в нерелятивистском случае

$$\frac{d}{dz} \left( \sqrt{\varphi} \frac{dr}{dz} \right) + \frac{1}{4\sqrt{\varphi}} \left( \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{e}{2m} B_z^2 \right) r = 0,$$

в релятивистском случае

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{d}{dz} \left[ \sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} \left[ (1+k\varphi) \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{e}{2m_0} B_z^2 \right] r = 0.$$

Наличие пространственного заряда (стр. 345) в элек-  
тронно-оптических системах учитывается заменой в приве-  
денных уравнениях  $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$  на  $\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , где  $\rho(z)$  — осевое  
распределение пространственного заряда,  $\epsilon_0$  — электри-  
ческая постоянная (стр. 342).

7° Ввиду невозможности ограничения паракиальными  
электронными пучками в электронно-оптических систе-  
мах неизбежны aberrации (стр. 641).

Электростатические и магнитные осесимметричные си-  
стемы обладают в основном сферической aberrацией, ко-  
мой, астигматизмом, кривизной поля изображения и  
дисторсией (см. стр. 641 — 644).

Нестабильность питания источников электронов и линз  
приводит к некоторому разбросу скоростей электронов  
и вызывает появление хроматической aberrации, хро-  
матической разности увеличений и хроматической раз-  
ности поворота изображения (последние две погреш-  
ности присущи только магнитным линзам). Все эти по-  
грешности ухудшают разрешающую способность и каче-  
ство изображения в электронно-оптических системах.

8° Электронной микроскопией называется получение  
изображений микроскопических объектов с помощью  
электронных пучков, фокусируемых электрическими  
и магнитными полями. В электронной микроскопии ис-  
пользуются электроны с дебройлевской длиной волны  
(стр. 715), много меньшей размеров объекта, так что пучки  
электронов ведут себя, как лучи в геометрической оптике  
(стр. 624). Разрешающая способность электронных микро-  
скопов на несколько порядков выше, чем оптических  
микроскопов, и ограничивается волновыми свойствами  
электронов при данной их энергии.

## ГЛАВА 8

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## 1. Основной закон электромагнитной индукции

1° *Явление электромагнитной индукции* состоит в том, что в проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле, возникает *электродвижущая сила индукции*  $\mathcal{E}_i$ . Если контур замкнут, то в нем возникает электрический ток, называемый *индукционным током*.

2° *Закон электромагнитной индукции Фарадея*: э. д. с. электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_m$  сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Направления обхода контура и внешней нормали  $\mathbf{n}$ , принятые при вычислении соответственно  $\mathcal{E}_i$  и  $\Phi_m$ , взаимосвязаны: из конца вектора  $\mathbf{n}$  обход контура должен быть виден происходящим против часовой стрелки.

Если замкнутый контур состоит из  $N$  последовательно соединенных витков (например, имеет вид соленоида), то под  $\Phi_m$  следует понимать полный магнитный поток сквозь поверхности, ограниченные всеми  $N$  витками. В электротехнике эту величину называют *потокосцеплением*

*контура*  $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_{m_i}$  и закон электромагнитной индукции записывают в форме

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{в СИ}).$$

3° Знак минус в формуле для  $\mathcal{E}_i$  является выражением *правила Ленца*: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, уменьшает те изменения магнитного потока, которые вызвали появление индукционного тона.

4° Магнитный поток, охватываемый контуром, может изменяться по ряду причин — благодаря деформации или перемещению контура во внешнем магнитном поле,

а также вследствие изменения магнитного поля во времени. Полная производная  $d\Phi_m/dt$  учитывает действие всех этих причин.

Если проводящий контур движется в стационарном магнитном поле, то э. д. с. индукции наводится во всех участках контура, пересекающих линии магнитной индукции, причем общая э. д. с. в контуре равна алгебраической сумме э. д. с., возникающих во всех его участках. Появление э. д. с. электромагнитной индукции в этом случае можно объяснить тем, что на каждый свободный заряд  $q$  (носитель тока в проводнике), перемещающийся вместе с проводником в магнитном поле, действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = q[(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \mathbf{B}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{F}_L = \frac{q}{c} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \mathbf{B}] \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость движения заряда  $q$  вместе с проводником, а  $\mathbf{v}'$  — скорость заряда относительно проводника. Под действием сторонних сил — касательных к проводнику составляющих сил Лоренца — заряды  $q$  перемещаются, образуя в замкнутом проводнике индукционный ток.

5° Направление стороннего вихревого электрического поля электромагнитной индукции в прямолинейном проводнике, движущемся в магнитном поле, определяется с помощью *правила правой руки*: если расположить правую руку так, чтобы вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  входил в ладонь, а отставленный большой палец совпадал с направлением перпендикулярной к проводнику составляющей скорости его движения, то вытянутые четыре пальца укажут направление стороннего вихревого электрического поля электромагнитной индукции, возникающего в проводнике.

**Пример 1.** Э. д. с. электромагнитной индукции возникает в отрезке проводника длиной  $l$ , который движется в магнитном поле и пересекает линии индукции. В простейшем случае, когда скорость движения проводника  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,

$$\mathcal{E}_i = -vBl.$$

**Пример 2.** Плоский виток вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$  так, что ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна

к вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}_0$  внешнего поля. Э. д. с. индукции в витке равна:

$$\mathcal{E}_i = B_0 S \omega \sin \omega t - \frac{d\Phi_{mc}}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{c} B_0 S \omega \sin \omega t - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_{mc}}{dt} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $S$  — площадь, ограниченная витком,  $\Phi_{mc}$  — поток самоиндукции витка (стр. 457).

6° Э. д. с. электромагнитной индукции в неподвижном проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле, равна:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Явление электромагнитной индукции в неподвижных проводниках обусловлено тем, что переменное магнитное поле возбуждает *вихревое электрическое поле*. Циркуляция напряженности  $\mathbf{E}$  этого поля вдоль замкнутого контура  $L$  проводника равна:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

## 2. Вихревые индукционные токи

1° Индукционные токи, возникающие в массивных проводниках, называют *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Замкнутые цепи таких токов образуются в толще самого проводника.

Количество теплоты, выделяемое в единицу времени вихревыми токами, прямо пропорционально квадрату частоты изменения магнитного поля. Для выделения больших количеств теплоты (в *индукционных печах*) применяют токи высокой частоты.

2° Для уменьшения вредных потерь энергии, связанных с токами Фуко, магнитные цепи электрических машин и сердечники трансформаторов изготавливают из отдельных пластин, расположенных параллельно линиям магнитной индукции.

Для увеличения сопротивления магнитных цепей применяют *магнитодieleктрики* — спрессованные под большим давлением смеси порошкообразных ферромагнитных веществ (стр. 474) и диэлектриков (стр. 361) и *ферриты* — полупроводниковые ферромагнитные материалы с удельным сопротивлением, в  $\sim 10^9$  раз превосходящим удельное сопротивление металлических ферромагнитных веществ. Ферриты представляют собой двойные окислы, образуемые окисью железа ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) с окислами двухвалентных металлов (см. также стр. 479).

## 3. Явление самоиндукции

1° Возникновение э. д. с. индукции в цепи в результате изменения тока в этой цепи называется *явлением самоиндукции*. Собственное магнитное поле тока в контуре создаст магнитный поток  $\Phi_m$  сквозь поверхность  $S$ , ограниченную самим контуром:

$$\Phi_m = \int_S B_n dS.$$

Магнитный поток  $\Phi_m$  называют *поток самоиндукции* или *поток Фуко*. Если контур находится в неферромагнитной среде, то его поток самоиндукции пропорционален току  $I$  в контуре:

$$\Phi_m = LI \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi_m = \frac{1}{c} LI \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где

$$L = \frac{\mu}{c} \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n \quad (\text{в СИ}),$$

$$L = \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Здесь  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\mathbf{l}$  контура в элемент  $dS$  поверхности  $S$ , ограниченной этим контуром, индекс  $n$  означает проекцию на нормаль к элементу  $dS$ .

Величину  $L$  называют *индуктивностью контура*. Она численно равна потоку самоиндукции контура при токе единичной силы (в гауссовой системе при токе  $I = c$ ).  $L$  зависит от геометрической формы контура, его разме-

ров и относительной магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

**Пример 1.** Индуктивность соленоида (стр. 433) длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  с общим числом витков  $N$  равна:

$$L = k \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = k \mu_0 \mu n^2 V \quad (\text{в СИ}),$$

$$L = k \mu \frac{4\pi N^2 S}{l} = k \mu 4\pi n^2 V \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $n = N/l$  — число витков на единицу длины,  $V = Sl$  — объем соленоида,  $k$  — коэффициент, зависящий от отношения длины  $l$  соленоида к диаметру  $d$  его витков.

В таблице приведены значения  $k$  в зависимости от отношения  $l/d$ .

$l/d$	0,1	0,5	1	5	10
$k$	0,2	0,5	0,6	0,9	$\approx 1,0$

Как видно, при  $l/d \gg 1$   $k \approx 1$ .

**Пример 2.** Индуктивность достаточно длинного коаксиального кабеля длиной  $l$  равна:

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $R_2$  и  $R_1$  — радиусы внешнего и внутреннего цилиндров.

**Пример 3.** Индуктивность длинной двухпроводной линии длиной  $l$  равна:

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} l \ln \frac{d}{R} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $d$  — расстояние между осями проводов,  $R$  — радиус сечения проводов ( $d/R \gg 1$ ).

2° Э. д. с. самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  определяется по закону Фарадея:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{mc}}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(LI) \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

Если среда не ферромагнитна (стр. 474) и контур не деформируется, то  $L = \text{const}$  и

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_s = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

3° Индукционный ток, возникающий вследствие самоиндукции, по правилу Ленца противодействует изменению тока в цепи, замедляя его возрастание или убывание. Индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока.

4° Закон изменения тока в цепи с постоянной электродвижущей силой  $\mathcal{E}$ , индуктивностью  $L$  и электрическим сопротивлением  $R$  при ее замыкании и размыкании:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

где  $I_0$  — сила тока в начальный момент времени  $t = 0$ .

**Пример 1.** При замыкании цепи (начальный ток отсутствует,  $I_0 = 0$ )

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Ток в цепи увеличивается, стремясь к асимптотическому значению  $\mathcal{E}/R$  тем быстрее, чем больше отношение  $R/L$  (рис. IV.8.1).

**Пример 2.** При выключении источника э. д. с. ( $\mathcal{E} = 0$ )

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ток в цепи уменьшается от начального значения  $I_0$  до нуля тем быстрее, чем больше отношение  $R/L$  (рис. IV.8.2). Большая э. д. с. самоиндукции при быстром размыкании является причиной пробоя воздушного зазора между контактами выключателей и появления дугового разряда (стр. 395), расплавляющего контакты. Для гашения дуги применяются специальные выключатели и параллельное включение в цепь конденсаторов.

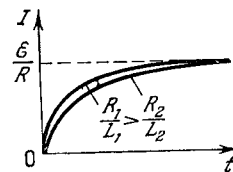


Рис. IV.8.1.

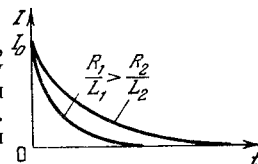


Рис. IV.8.2.

5° При внезапном увеличении сопротивления цепи постоянного тока от  $R_0$  до  $R$  в ней возникает э. д. с.  $\mathcal{E}_c$ , равная

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E} \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) e^{-2\pi L / \tau},$$

где  $L$  — индуктивность цепи,  $\mathcal{E}$  — э. д. с. источников, включенных в цепь.

6° Вихревое электрическое поле самоиндукции, возникающее в проводнике при прохождении в нем переменного тока, противодействует изменению тока внутри проводника и способствует его изменению вблизи поверхности. На рис. IV.8.3, а показано направление силовых линий вихревого поля при возрастании тока, а на рис. IV.8.3, б — при его убывании.

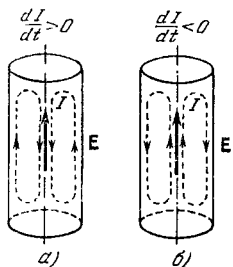


Рис. IV.8.3

Сопротивление внутренних частей проводника для переменного тока больше, чем внешних. Плотность переменного тока максимальна на поверхности проводника и минимальна на его оси. В случае высокочастотных токов плотность тока отлична от нуля только в тонком слое вблизи поверхности проводника. Это явление называется *скин-эффектом* (поверхностным эффектом). Приближенные формулы, описывающие скин-эффект в однородных цилиндрических проводниках:

$$\frac{R_\omega}{R_0} = \begin{cases} 1 + \frac{k^4}{3} & \text{при } k < 1, \\ 0,997k + 0,277 & \text{при } 1,5 < k < 10, \\ k + \frac{1}{4} + \frac{3}{64k} & \text{при } k > 10, \end{cases}$$

где  $R_\omega$  — эффективное сопротивление проводника радиусом  $r$  переменному току с циклической частотой  $\omega$ ,  $R_0$  — сопротивление проводника постоянному току,  $k = r/2\delta$ ,

$$\delta = 2(2\mu_0\gamma\omega)^{-1/2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\delta = c(2\pi\mu_0\gamma\omega)^{-1/2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$c$  и  $\mu_0$  — электродинамическая и магнитная постоянные,  $\gamma$  — удельная электропроводность проводника для

постоянного тока,  $\mu$  — его относительная магнитная проницаемость,  $\delta$  — эффективная глубина проникновения переменного тока — расстояние от поверхности проводника, на котором плотность тока уменьшается в  $e$  раз по сравнению с плотностью его на поверхности. Чем толще проводник, тем заметнее скин-эффект и тем при меньших значениях  $\omega$  и  $\gamma$  его нужно учитывать.

#### 4. Взаимная индукция. Трансформатор

1° Явление взаимной индукции заключается в наведении э. д. с. индукции во всех проводниках, находящихся вблизи других проводников, токи в которых изменяются с течением времени. Например, при изменении тока  $I_1$  в первой цепи, изображенной на рис. IV.8.4, во второй цепи наводится э. д. с. взаимной индукции  $\mathcal{E}_2$  и возникает индукционный ток;

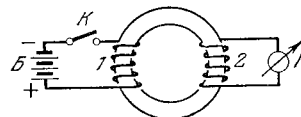


Рис. IV.8.4.

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\Phi_{m21}$  — магнитный поток поля тока  $I_1$  сквозь поверхность, охватываемую вторым контуром.

2° Магнитный поток  $\Phi_{m21}$  пропорционален току  $I_1$ :

$$\Phi_{m21} = M_{21}I_1 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Phi_{m21} = \frac{1}{c} M_{21}I_1 \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $M_{21}$  — коэффициент, называемый *взаимной индуктивностью* второго и первого контуров.  $M_{21}$  зависит от геометрической формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от относительной магнитной проницаемости среды, в которой находятся контуры.

Аналогично  $\Phi_{m12} = M_{12}I_2$ , где  $I_2$  — ток во втором контуре,  $\Phi_{m12}$  — магнитный поток поля тока  $I_2$  сквозь поверхность, охватываемую первым контуром,  $M_{12}$  — взаимная индуктивность первого и второго контуров. Для неферромагнитной среды (стр. 474)  $M_{21} = M_{12}$ . Если среда ферромагнитна, то  $M_{12}$  и  $M_{21}$  зависят, кроме пере-



численных ранее величин, от сил токов в контурах и, вследствие явления гистерезиса (стр. 477), от характера изменения этих токов.

3° Выражение для э. д. с. взаимной индукции:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(M_{21}I_1) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(M_{21}I_1) \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Если  $M_{21} = \text{const}$ , то

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{M_{21}}{c^2} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

**Пример.** Для повышения или понижения напряжения переменного тока служат *трансформатор*, действие которого основано на явлении взаимной индукции. Переменное магнитное поле тока  $I_1$  в *первичной обмотке* вызывает появление э. д. с. взаимной индукции во *вторичной обмотке*. Сердечник обеспечивает значительную взаимную индуктивность  $M_{21}$  трансформатора; при его холостом ходе (при  $I_2 = 0$ )

$$M_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m},$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — числа витков в первичной и вторичной обмотках,  $R_m$  — магнитное сопротивление сердечника (стр. 439). Отношение абсолютных значений напряжений  $U_2$  и  $U_1$  на концах вторичной и первичной обмоток при холостом ходе называется *коэффициентом трансформации*:

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1}.$$

### 5. Энергия магнитного поля электрического тока

1° *Собственной энергией тока*  $I$  в контуре с индуктивностью  $L$  называется величина, численно равная работе, затрачиваемой на преодоление э. д. с. самоиндукции при создании тока (предполагается, что среда неферромагнитна, так что  $L$  не зависит от  $I$ ):

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Собственная энергия тока есть энергия его магнитного поля. Например, у длинного соленоида

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \frac{\mu}{c^2} 2\pi n^2 I^2 V \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $V$  — объем соленоида,  $n$  — число витков на единицу его длины,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды.

2° *Объемная плотность энергии*  $w_m$  магнитного поля есть энергия, заключенная в единице объема поля:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля в изотропной и неферромагнитной среде равна:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \frac{B^2}{\mu} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды,  $B$  и  $H$  — магнитная индукция и напряженность в рассматриваемой точке магнитного поля.

3° Энергия магнитного поля, создаваемого в неферромагнитной изотропной среде  $n$  контурами с токами  $I_1, I_2, \dots, I_n$ :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n M_{ik} I_i I_k \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k=1}^n M_{ik} I_i I_k \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $M_{ik}$  — взаимная индуктивность  $i$ -го и  $k$ -го контуров, а  $M_{ii} = L_i$  — индуктивность  $i$ -го контура.

4° *Взаимной энергией токов*  $I_i$  и  $I_k$  называют величину

$$W_{ik} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu(\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_k) dV = M_{ik} I_i I_k \quad (\text{в СИ}),$$

$$W_{ik} = \frac{1}{8\pi} \int_V \mu(\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_k) dV = \frac{1}{c^2} M_{ik} I_i I_k \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $i \neq k$ ,  $\mathbf{H}_i$  и  $\mathbf{H}_k$  — напряженности магнитных полей, создаваемых токами  $I_i$  и  $I_k$  порознь, а интегрирование производится по всему объему  $V$  поля. Таким образом, энергия магнитного поля системы контуров с токами равна сумме собственных и взаимных энергий всех этих токов.

5° Объемная плотность энергии электромагнитного поля в изотропной среде, не обладающей ферромагнитными и сегнетоэлектрическими свойствами:

$$w = w_m + w_e = \frac{\mu_0 H^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$w = w_m + w_e = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

## ГЛАВА 9

### МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

#### 1. Магнитные моменты электронов и атомов

1° Электрон обладает собственным моментом количества движения (механическим моментом)  $\mathbf{p}_s$ , называемым спином. Этот момент может иметь только две ориентации относительно внешнего магнитного поля, направленного по оси  $z$ , такие, что две его возможные проекции на направление этого поля равны

$$p_{sz} = \pm \frac{\hbar}{2} = \pm \frac{h}{4\pi},$$

где  $h$  — постоянная Планка (стр. 695), а  $\hbar = h/2\pi$ .

2° Спицу электрона  $\mathbf{p}_s$  соответствует спиновый магнитный момент  $\mathbf{p}_{ms}$ :

$$\mathbf{p}_{ms} = g_s \mathbf{p}_s.$$

Величина  $g_s$  называется гиромагнитным отношением для спинового момента:

$$g_s = -\frac{e}{m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$g_s = -\frac{e}{mc} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света в вакууме. Спиновый

магнитный момент электрона равен магнетону Бора:

$$p_{ms} = -\frac{e\hbar}{2mc} = \mu_B \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$p_{ms} = -\frac{e\hbar}{2m} = \mu_B \quad (\text{в СИ}),$$

где

$$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{тл}} = 0,927 \cdot 10^{-20} \frac{\text{эрг}}{\text{гс}}.$$

Спином электрона объясняется тонкая структура спектральных линий (стр. 760), расщепление этих линий в магнитных полях (стр. 761). Спин электрона оказывает влияние на распределение электронов по энергетическим состояниям в атомных системах. Спином объясняются также магнитные свойства ферромагнетиков (стр. 474).

Об аномальном магнитном моменте электрона, вызванном взаимодействием с нулевыми колебаниями, см. стр. 885.

3° Магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ , вызванный движением электрона по орбите, называется орбитальным магнитным моментом. Момент  $\mathbf{p}$  количества движения электрона:  $\mathbf{p} = m[\mathbf{rv}]$  (стр. 76), где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{v}$  — скорость электрона.

4° Орбитальные магнитный и механический (относительно ядра) моменты электрона пропорциональны друг другу и направлены в противоположные стороны:

$$\mathbf{p}_m = g\mathbf{p},$$

где

$$g = -\frac{e}{2m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$g = -\frac{e}{2mc} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Гиромагнитное отношение орбитальных моментов  $g$  в два раза меньше, чем  $g_s$  (п. 2°). Величина  $p$  для стационарного состояния электрона в атоме равна

$$p = \sqrt{l(l+1)}\hbar,$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число (стр. 750),

$$p_m = \sqrt{l(l+1)} \mu_B,$$

$\mu_B$  — магнетон Бора (п. 2°).

5° Вектором орбитального магнитного момента атома  $\mathbf{p}_m$  называется векторная сумма орбитальных

магнитных моментов всех  $Z$  его электронов:

$$\mathbf{P}_m = \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_{mi},$$

где  $Z$  — порядковый номер атома в периодической системе Менделеева (стр. 771—775).

Вектор орбитального момента количества движения атома определяется аналогично:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^Z \mathbf{p}_i,$$

где  $\mathbf{p}_i$  — орбитальный момент количества движения  $i$ -го электрона. Для атомных моментов  $\mathbf{P}_m$  и  $\mathbf{P}$  сохраняется соотношение

$$\mathbf{P}_m = g\mathbf{P},$$

где  $g$  — гиромангнитное отношение (п. 4°).

О магнитных моментах нуклонов и атомных ядер см. стр. 812 и 813.

6° Однородное магнитное поле, в которое внесен атом, изменяет угловую скорость (стр. 24) вращения его электронов вокруг ядра. Это изменение происходит в процессе нарастания того магнитного поля, в которое вносится атом, и является результатом возникновения индукционного вихревого электрического поля (стр. 498), действующего на электроны.

7° Если орбита электрона и вектор его орбитального момента  $\mathbf{p}_m$  расположены относительно вектора напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля, как указано на рис. VI.9.1, то совершается прецессионное движение (стр. 86) орбиты и вектора  $\mathbf{p}_m$  вокруг направления  $\mathbf{H}$  с угловой скоростью  $\omega_L$  (ларморова прецессия):

$$\omega_L = \mu_0 \frac{e\mathbf{H}}{2m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\omega_L = \frac{e\mathbf{H}}{2mc} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\mu_0$  — магнитная постоянная (стр. 427).

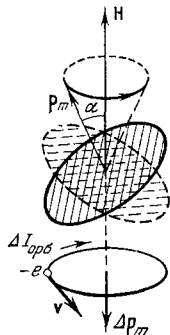


Рис. IV 9 1

**Теорема Лармора:** единственным результатом влияния магнитного поля на электронную орбиту является прецессия орбиты и вектора  $\mathbf{p}_m$  с угловой скоростью Лармора  $\omega_L$  вокруг оси, проходящей через центр орбиты и параллельной вектору  $\mathbf{H}$ .

8° Наличие прецессии приводит к появлению дополнительного орбитального тока  $\Delta I_{\text{орб}}$  и индуцированного орбитального магнитного момента электрона  $\Delta \mathbf{p}_m$ , направленного в сторону, противоположную вектору  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e^2 \mu_0 S_{\perp}}{4\pi m} \mathbf{H} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi mc^2} \mathbf{H} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $S_{\perp}$  — площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную к направлению напряженности магнитного поля,  $S_{\perp} = \pi \overline{r_{\perp}^2}$ ;  $\overline{r_{\perp}^2}$  — среднее по времени значение квадрата проекции радиуса электронной орбиты. Для сферически симметричной электронной оболочки атома  $\overline{r_{\perp}^2} = \frac{2}{3} \overline{r^2}$ , где  $\overline{r^2}$  — среднее значение квадрата радиуса орбиты.

9° Общий индуцированный орбитальный момент атома  $\Delta \mathbf{P}_m$  равен

$$\Delta \mathbf{P}_m = \sum_{i=1}^Z \Delta \mathbf{p}_{mi},$$

где  $\Delta \mathbf{p}_{mi}$  — орбитальный наведенный магнитный момент электрона,  $Z$  — число электронов в атоме;

$$\Delta \mathbf{P}_m = -\frac{e^2 \mu_0}{6m} \sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2} \mathbf{H} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta \mathbf{P}_m = -\frac{e^2}{6\pi mc^2} \sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2} \mathbf{H} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

## 2. Классификация магнетиков

1° *Магнетиками* называются все среды, способные намагничиваться в магнитном поле, т. е. создавать собственное магнитное поле. По магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы: *диамагнетики*, *парамагнетики* и *ферромагнетики*.

2° Для характеристики намагничивания вещества вводится вектор *интенсивности намагничивания* (намагничен-

ность)  $\mathbf{I}$  — векторная сумма магнитных моментов атомов (молекул), находящихся в единице объема:

$$\mathbf{I} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_m \right),$$

где  $N$  — число частиц, содержащихся в объеме  $V$  магнетика,  $\mathbf{P}_m$  — магнитный момент  $i$ -й молекулы (атома). Для магнетиков, находящихся в не слишком сильных магнитных полях,

$$\mathbf{I} = \kappa_m \mathbf{H},$$

где  $\kappa_m$  — магнитная восприимчивость вещества. У диамагнетиков  $\kappa_m < 0$ , а у парамагнетиков  $\kappa_m > 0$ .

3° Диамагнетики подразделяются на «классические», «аномальные» и сверхпроводники. К первой подгруппе относятся инертные газы, некоторые металлы (цинк, золото, ртуть и др.), элементы типа кремния и фосфора, многие органические соединения. Для этих веществ  $\kappa_m < 0$  и имеет малое абсолютное значение, порядка  $(0,1 \div 10) \cdot 10^{-6}$ , и не зависит от температуры. Ко второй подгруппе относятся висмут, галлий, сурьма, графит и др. Для этих веществ  $\kappa_m < 0$ , зависит от температуры и имеет абсолютные значения порядка  $(1 \div 100) \cdot 10^{-6}$ . О магнитной восприимчивости сверхпроводников см. стр. 481.

4° Парамагнетики подразделяются на нормальные парамагнетики, парамагнитные металлы с магнитной восприимчивостью, не зависящей от температуры, и антиферромагнетики.

Нормальными парамагнетиками являются газы  $O_2$ ,  $NO$  и др., платина, палладий, соли железа, кобальта и никеля и сами эти металлы при  $T > \Theta_k$ , где  $\Theta_k$  — точка Кюри (стр. 475), и др. Магнитная восприимчивость  $\kappa_m > 0$  и зависит от температуры по закону Кюри:

$$\kappa_m = \frac{C}{T}$$

или закону Кюри — Вейсса:

$$\kappa_m = \frac{C'}{T + \Delta},$$

где  $C$  и  $C'$  — постоянные Кюри. Константа  $\Delta$  может быть положительна, отрицательна или равна нулю.

Типичные парамагнитные металлы, у которых  $\kappa_m$  не зависит от температуры — щелочные металлы: литий,

натрий, калий, рубидий и цезий. Они весьма слабо магнитны:  $\kappa_m \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$ .

Антиферромагнетики (кристаллы элементов переходных групп периодической системы Менделеева, их сплавы и химические соединения) выше антиферромагнитной точки Кюри  $\Theta_{fk}$  (стр. 475) являются нормальными парамагнетиками с  $\Delta < 0$ .

5° Ферромагнетики — группа некоторых переходных металлов (железо, никель, кобальт) и ряд сплавов, обладающих особыми магнитными свойствами (стр. 474).

### 3. Диамагнетизм

1° Явлением диамагнетизма называется индуцирование дополнительного магнитного момента в атомных электронных оболочках под действием внешнего магнитного поля. Диамагнетизм присущ всем веществам, но наблюдается в тех случаях, когда атомы, ионы или молекулы не имеют результирующего магнитного момента  $P_m$  ( $S$ - или  $\Sigma$ -состояния: стр. 760 и 788).

2° Диамагнитная восприимчивость равна:

$$\kappa_m \text{ диам} = -\frac{n_0 e^2 \mu_0}{6m} \sum_{i=1}^Z \bar{r}_i^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\kappa_m \text{ диам} = -\frac{n_0 e^2}{6m c^2} \sum_{i=1}^Z \bar{r}_i^2 \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $n_0$  — концентрация частиц вещества. Остальные обозначения указаны на стр. 766–767. Формула справедлива при условии, что  $\sum_{i=1}^Z \bar{r}_i^2$  имеет стационарное

значение и не меняется вследствие теплового движения атомов. При учете квантовых свойств электронной оболочки атомов формула справедлива для вырожденных  $S$ - и  $\Sigma$ -состояний (стр. 219) и сферически симметричного электрического поля ядра атома или иона.

3° Электроны проводимости в металлах (стр. 376) обладают, наряду с парамагнитными свойствами, диамагнитной восприимчивостью:

$$\kappa_m = -\frac{n_0 \mu_B^2 \mu_0}{2W_F} = -\frac{4m \mu_B^2 \mu_0}{h^2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} n_0^{1/3} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\kappa_m = -\frac{n_0 \mu_B^2}{2W_F} = -\frac{4m \mu_B^2}{h^2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} n_0^{1/3} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $W_F$  — энергия Ферми (стр. 230),  $n_e$  — концентрация электронов проводимости,  $m$  — масса электрона,  $\mu_B$  — магнетон Бора (стр. 465),  $h$  — постоянная Планка.

#### 4. Парамагнетизм

1° *Парамагнетизмом* называется совокупность магнитных свойств некоторых веществ, атомы (ионы) которых обладают постоянным магнитным моментом  $P_m$ , не зависящим от внешнего магнитного поля.  $P_m$  имеет порядок величины  $10^{-20}$  эрг/с, или  $10^{-23}$   $\frac{\text{дж}}{\text{об/м}^2}$ . В отсутствие внешнего поля дезориентирующее действие теплового движения не допускает упорядоченной ориентации векторов  $P_m$  и появления намагниченности у вещества.

2° При внесении парамагнетика во внешнее однородное магнитное поле возникает явление прецессии электронных орбит и векторов магнитных моментов атомов вокруг направления внешнего поля (стр. 466). Совместное действие поля и теплового движения атомов приводит к преимущественной ориентации магнитных моментов атомов по направлению внешнего магнитного поля.

3° Классическое выражение для интенсивности намагниченности  $I$  (без учета пространственного квантования, стр. 758) в предположении, что между атомами (молекулами) отсутствует взаимодействие:

$$I = n_0 P_m L(a),$$

где  $n_0$  — число частиц в единице объема,  $P_m$  — постоянный магнитный момент атома (молекулы),  $L(a)$  — классическая функция Ланжевена (стр. 365):

$$L(a) = \text{cth } a - \frac{1}{a},$$

$$a = \frac{\mu_0 P_m H}{kT} \quad (\text{в СИ}),$$

$$a = \frac{P_m H}{kT} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

$H$  — напряженность магнитного поля,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура. При комнатных температурах и в не очень сильных полях выполняется условие  $P_m H \ll kT$ , при котором  $L(a) \approx a/3$  и

$$I = \frac{n_0 P_m \mu_0}{3kT} H \quad (\text{в СИ}),$$

$$I = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} H \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Парамагнитная восприимчивость:

$$\chi_m = \frac{n_0 P_m \mu_0}{3kT} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\chi_m = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

*Закон Кюри*: парамагнитная восприимчивость вещества обратно пропорциональна его абсолютной температуре.

При низких температурах или в сильных полях величина  $P_m H \gg kT$ ,  $L(a) \rightarrow 1$  и  $I = n_0 P_m$  (насыщение намагниченности).

4° Классическое выражение для интенсивности намагниченности парамагнитного вещества, допускающее возможность любых ориентаций магнитных моментов атомов, заменяется в квантовой теории парамагнетизма формулой

$$I = n_0 g J \mu_B B_J(x),$$

где  $J$  — внутреннее квантовое число (стр. 759),  $\mu_B$  — магнетон Бора (стр. 465),  $g$  — фактор Ланде (стр. 764),  $x = g J \mu_B H/kT$  (в СИ),  $x = g J \mu_B H/kT$  (в гауссовой системе),  $B_J(x)$  — функция Бриллюэна:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \text{cth } \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \text{cth } \frac{x}{J}.$$

При  $x \ll 1$   $B_J(x) = \frac{J+1}{3J} x$ .

Интенсивность намагниченности:

$$I = n_0 g \mu_B \frac{J+1}{3} x.$$

Парамагнитная восприимчивость:

$$\chi_m = \frac{n_0 (p \mu_B)^2 \mu_0}{3kT} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\chi_m = \frac{n_0 (p \mu_B)^2}{3kT} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $p = g [J(J+1)]^{1/2}$  — эффективное число магнетонов Бора, приходящееся на атом.

В сильных полях и при весьма низких температурах  $x \rightarrow \infty$ ,  $B_J(x) \rightarrow 1$  и намагниченность достигает насыщения:

$$I = n_0 g J \mu_B.$$

5° Парамагнитные свойства металлов обусловлены спиновыми магнитными моментами электронов (стр. 464). Включение магнитного поля нарушает равноправность двух возможных ориентаций спина. Устойчивому термодинамическому равновесию электронного газа в металлах соответствует преимущественная ориентация спиновых магнитных моментов электронов вдоль поля, т. е. парамагнитная намагничённость. Парамагнитная восприимчивость электронного газа практически не зависит от температуры и втрое превышает его диамагнитную восприимчивость (стр. 469):

$$\kappa_m = \frac{3n_0\mu_B^2\mu_0}{2W_F} = \frac{12m\mu_B^2\mu_0}{h^2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} n^{1/2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\kappa_m = \frac{3n_0\mu_B^2}{2W_F} = \frac{12m\mu_B^2}{h^2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} n_0^{1/2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $W_F$  — энергия Ферми (стр. 230),  $n_0$  — концентрация электронов проводимости,  $m$  — масса электрона,  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $h$  — постоянная Планка.

### 5. Магнитное поле в магнетиках

1° Магнитное поле, которое создается молекулами (атомами, ионами) вещества, называется *собственным* или *внутренним магнитным полем*. Это поле обусловлено существованием у атомов (молекул, ионов) магнитных моментов и характеризуется вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}_{\text{внутр}}$ .

2° Вектор  $\mathbf{B}$  индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен векторной сумме магнитных индукций внешнего (намагничивающего) и внутреннего полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{внутр}},$$

где  $\mathbf{B}_0$  — магнитная индукция поля в вакууме;

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{в СИ}) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{H} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Магнитная индукция  $\mathbf{B}_{\text{внутр}}$  внутреннего поля для ферромагнитных веществ пропорциональна вектору интенсивности намагничения  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{B}_{\text{внутр}} = \mu_0 \mathbf{I} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{B}_{\text{внутр}} = 4\pi \mathbf{I} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

3° Связь между магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ , напряженностью  $\mathbf{H}$  и интенсивностью намагничения  $\mathbf{I}$ :

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

4° Связь между относительной магнитной проницаемостью  $\mu$  (стр. 428) и магнитной восприимчивостью  $\kappa_m$  (стр. 468):

$$\mu = 1 + \kappa_m \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mu = 1 + 4\pi \kappa_m \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Для диамагнитных веществ  $\kappa_m < 0$  и  $\mu < 1$ . Для парамагнитных веществ  $\kappa_m > 0$  и  $\mu > 1$ . В обоих случаях  $\mu$  не зависит от величины напряженности магнитного поля, в котором находятся вещества, и мало отличается от единицы ( $\mathbf{B}_{\text{внутр}} \ll \mathbf{B}_0$ ).

5° Объемная плотность энергии (стр. 463) ферромагнитной намагниченной среды:

$$w_m \text{ магн} = \mu_0 \frac{(\mu-1)H^2}{2} \quad (\text{в СИ})$$

$$w_m \text{ магн} = \frac{(\mu-1)H^2}{8\pi} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Объемная плотность энергии магнитного поля в магнетике складывается из объемной энергии магнитного поля в вакууме ( $\mu = 1$ )  $w_m \text{ вак}$  и объемной плотности энергии намагниченного магнетика:

$$w_m = w_m \text{ вак} + w_m \text{ магн}.$$

6° Закон полного тока для циркуляции вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в магнетиках (стр. 438):

$$\oint_L (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \mu_0 (\sum I + \sum I_{\text{мол}}) \quad (\text{в СИ}),$$

где  $\sum I$  — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых замкнутым контуром  $L$ , а  $\sum I_{\text{мол}}$  — алгебраическая сумма молекулярных токов, охватываемых этим же контуром, равная циркуляции вектора намагничения по контуру  $L$ :

$$\sum I_{\text{мол}} = \oint_L (\mathbf{I} d\mathbf{l}).$$

## 6. Ферромагнетизм

1° *Ферромагнетиками* называются магнитные вещества, в которых собственное (внутреннее) магнитное поле может в сотни и тысячи раз превосходить вызвавшее его внешнее магнитное поле.

2° Большая величина намагниченности (стр. 467) ферромагнетиков объясняется существованием в них «молекулярного» магнитного поля, обусловленного особым квантовомеханическим (обменным) взаимодействием (стр. 757 и 783) нескомпенсированных спиновых магнитных моментов электронов (стр. 464) атомов в кристаллических решетках ферромагнетиков. В результате этого взаимодействия устойчивым и энергетически выгодным состоянием системы электронов в кристалле является упорядоченное состояние с параллельной (*ферромагнетизм*) или антипараллельной (*антиферромагнетизм*) ориентацией спиновых магнитных моментов соседних атомов в решетке.

3° Ферромагнетизм и антиферромагнетизм наблюдаются только у кристаллов переходных металлов — Fe, Co, Ni (ферромагнетизм), галлоидных солей элементов группы железа, хрома, марганца и др. (антиферромагнетизм), в решетке которых имеются атомы с недостроенными электронными оболочками  $3d$  или  $4f$  (стр. 776), обладающими не равным нулю значением результирующего спинового магнитного момента.

4° Ферромагнетизм (антиферромагнетизм) имеет место при условии положительного (отрицательного) значения обменного интеграла (стр. 757), характеризующего особое квантовое (обменное) взаимодействие между магнитными спиновыми моментами (стр. 464).

5° Ферромагнетизм существует лишь при определенных параметрах кристаллической решетки. Расстояния между соседними атомами должны обеспечить необходимую величину перекрытия волновых функций электронных оболочек, такую, чтобы взаимодействие между соседними атомами привело к полной энергии системы электронов, обеспечивающей устойчивость ферромагнитного (или антиферромагнитного) состояния.

Условие ферромагнетизма выполняется лишь для тех кристаллов переходных металлов, для которых  $d/a \geq 1,5$ , где  $d$  — диаметр атома,  $a$  — диаметр незаполненной оболочки  $3d$  (или  $4f$ ). Поэтому у элементов группы железа ферромагнетизм наблюдается лишь у  $\alpha$ -железа, кобальта и никеля. При  $d/a < 1,5$  обменный интеграл

отрицателен и упорядоченному расположению спинов соответствует их антипараллельная ориентация (п. 2°). В этом случае антиферромагнетизма магнитную структуру кристалла можно рассматривать как сложную, состоящую из двух подрешеток, намагниченных противоположно друг другу. Если магнитные моменты подрешеток численно равны то спонтанная намагниченность кристалла не возникает. Если же они неодинаковы (различно число атомов или их природа), то появляется разность магнитных моментов подрешеток, приводящая к спонтанному намагничению кристалла — *нескомпенсированный антиферромагнетизм* или *ферримагнетизм*. Такими свойствами обладают, например, ферриты (стр. 479).

6° Особые свойства ферро- и антиферромагнетиков обнаруживаются только при температурах, меньших соответственно  $\Theta_k$  и  $\Theta_{ak}$ , называемых *точками Кюри* (температуру  $\Theta_{ak}$  часто называют *точкой Нееля*). При  $T < \Theta_k$  ферромагнитное тело разбито на *домены* — малые области *самопроизвольной (спонтанной) намагниченности* до полного насыщения. В отсутствие внешнего магнитного поля направления векторов намагниченности различных доменов не совпадают и результирующая намагниченность всего тела может быть равна нулю.

7° Монокристаллы ферромагнетиков обладают резко выраженной анизотропией магнитных свойств, которая проявляется в существовании *направлений легчайшего и трудного намагничения*. Число легчайших направлений зависит от кристаллографической структуры данного вещества. В отсутствие внешнего магнитного поля направление спонтанной намагниченности в каждом домене совпадает с одним из направлений легчайшего намагничения монокристалла или отдельного зерна поликристалла (стр. 266). Число доменов с различной ориентацией спонтанной намагниченности (число *магнитных фаз*) равно удвоенному числу осей легчайшего намагничения. Размеры доменов, их форма и местоположение границ между ними в отсутствие внешнего магнитного поля определяются из условий минимума свободной энергии кристалла. Линейные размеры доменов составляют  $10^{-3}$  —  $10^{-2}$  см.

8° В переходном слое между двумя доменами, намагниченными в различных направлениях, который имеет конечную толщину (для Fe этот слой приблизительно равен 300 периодам решетки), имеется неоднородность намагниченности. Этому слою соответствует свободная поверх-

постная энергия, равная внешней работе, затраченной на его образование. В равновесном размагниченном состоянии кристалла границы между доменами проходят по тем местам в кристалле, которые соответствуют условиям минимума свободной энергии кристалла и обеспечивают отсутствие в нем результирующей макроскопической намагниченности.

Экспериментальным доказательством существования областей спонтанной намагниченности являются: а) скачкообразный характер

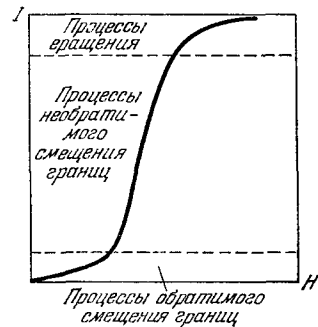


Рис IV 9 2

технической кривой намагничивания (п. 9°) в области слабых внешних полей (вблизи крутого подъема кривой) — эффект Баркгаузена, б) неоднородности в распределении магнитных порошков на поверхности ферромагнитного кристалла (полосы или порошковые фигуры Биттера — Акулова).

9° Процессом технического намагничивания ферромагнетиков называется возникновение в них результирующей намагниченности под действием

внешнего намагничивающего поля. Зависимость намагниченности  $I$  от напряженности  $H$  внешнего поля  $I = f(H)$  называется *технической кривой намагничивания* (рис. IV.9.2).

Существуют два типа процессов технического намагничивания:

а) процесс смещения границ — он состоит в росте объемов доменов, у которых намагниченность ориентирована наиболее близко к направлению внешнего поля, за счет объемов соседних доменов;

б) процесс вращения — изменение направления спонтанной намагниченности отдельных доменов или всего кристалла в целом путем поворота вектора намагниченности насыщения.

10° Смещение границ происходит при возрастании внешнего магнитного поля с конечной скоростью и может быть обратимым или необратимым. Если смещение границ между магнитными фазами происходит при намаг-

нивании обратно, то при квазистатическом уменьшении внешнего поля границы доменов смещаются в обратном направлении через те же места в кристалле и при  $H = 0$  домены занимают исходные положения. Обратимое смещение границ наблюдается в начале технической кривой намагничивания. Необратимое смещение границ между доменами не снимается при уменьшении магнитного поля. Исходные положения доменов могут быть достигнуты в процессе перемагничивания. Завершение процессов смещения границ в ферромагнитных кристаллах приводит к *техническому насыщению* последних вдоль одной из осей легчайшего намагничивания, ближайшей к направлению намагничивающего поля.

11° Увеличение напряженности внешнего магнитного поля после завершения процессов смещения вызывает процессы вращения вектора  $I$  намагниченности, которые заканчиваются, когда векторы  $I$  и  $H$  становятся параллельными друг другу. Разбиение технической кривой намагничивания на участки, отличающиеся своей природой, носит относительный характер. В области слабых полей ниже максимума на кривой Столетова (см. рис. IV.9.4)  $\kappa_{см} \gg \kappa_{вр}$ ; при средних полях (после максимума кривой  $\kappa(H)$ ) на пологом участке кривой  $I(H)$  (рис. IV. 9.2)  $\kappa_{вр} \gg \kappa_{см}$ , где  $\kappa_{см}$  и  $\kappa_{вр}$  — магнитные восприимчивости ферромагнетика, связанные с процессами смещения границ и вращения (п. 9°).

12° *Магнитным гистерезисом ферромагнетиков* называется отставание изменения магнитной индукции  $B$  от изменения напряженности внешнего намагничивающего поля, обусловленное зависимостью  $B$  от ее предыдущих значений. Магнитный гистерезис есть следствие необратимых изменений при намагничивании и перемагничивании. Причинами магнитного гистерезиса являются необратимые процессы смещения границ между областями самопроизвольной намагниченности и процессы вращения (стр. 476, п. 9°). *Петлей гистерезиса* (рис. IV.9.3) называется кривая изменения магнитной индукции ферромагнитного тела, помещенного во внешнее магнитное

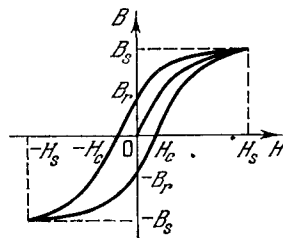


Рис. IV 9 3.



поле, при изменении напряженности последнего от  $+H_s$  до  $-H_s$  и обратно, где  $H_s$  — напряженность магнитного поля, соответствующая насыщению. Величина  $\pm B_s$  магнитной индукции, достигаемая при значении напряженности внешнего поля, равной  $\pm H_s$ , называется *индукцией насыщения*. Величина магнитной индукции  $\pm B_r$ , сохраняющейся в образце после уменьшения напряженности поля от  $\pm H_s$  до 0, называется *остаточной индукцией*. Ее существование является основой создания постоянных магнитов. Напряженность  $H_c$  обратного поля, доводящего магнитную индукцию до нуля, называется *коэрцитивной силой* (задерживающей напряженностью). Площадь петли гистерезиса  $P_h$  (*потери на гистерезис*) прямо пропорциональна работе, совершенной при перемагничивании:

$$P_h = \frac{1}{4\pi} \oint H dB$$

По величинам  $H_c$  и  $P_h$  ферромагнетики подразделяются на *мягкие* ( $H_c$  порядка десятков эрстед, малая площадь  $P_h$ ) и *жесткие* ( $H_c$  порядка  $10^2 - 10^3$  эрстед,  $P_h$  велика).

13° Зависимость магнитной восприимчивости  $\kappa_m$  ферромагнетика от напряженности  $H$  внешнего намагничивающего поля называется *кривой Столетова* (рис. IV.9.4).

14° Температура Кюри  $\Theta_k$  для ферромагнетиков и  $\Theta_{ak}$  для антиферромагнетиков является точкой фазового перехода второго рода (стр. 198). При этой температуре теряются ферромагнитные (антиферромагнитные) свойства кристаллов и изменяются структура кристаллической решетки, теплоемкость, электропроводность и другие физические характеристики.

15° *Явлением магнитострикции* называется изменение формы и объема ферромагнетика при его намагничивании. Простейшей мерой магнитострикционного эффекта является *линейная магнитострикция*  $\Delta l/l$ , где  $\Delta l$  — удлинение образца,  $l$  — его первоначальная длина. Различаются самопроизвольная и истинная магнитострикция. *Самопроизвольная магнитострикция* в каждом домене связана с тем, что при появлении самопроизвольной намагниченности изменяются условия равновесия между узлами кристаллической решетки и происходит ее анизо-

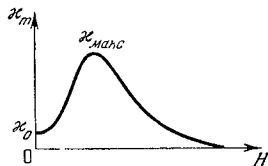


Рис. IV.9.4.

тропная деформация. Если ферромагнитный кристалл в целом не намагничен, то самопроизвольная магнитострикция не проявляется. Она обнаруживается при процессах технического намагничивания. *Истинной магнитострикцией* называется изменение длин ферромагнитных образцов в результате действия на них достаточно больших внешних магнитных полей. Она возникает в процессах технического намагничивания и связана с параллельной ориентацией векторов намагниченности доменов в результате изменения условий равновесия между узлами кристаллической решетки. *Магнитострикционными колебаниями* называются механические колебания, возникающие в ферромагнетиках при их намагничивании в периодически изменяющемся магнитном поле. Они используются в *ультразвуковых магнитострикционных вибраторах*. У ферромагнетиков наблюдается явление, обратное магнитострикции, — изменение намагниченности при деформациях.

16° Ферритами называются ферромагнитные полупроводники с общей химической формулой  $MOFe_2O_4$ , где  $M$  — двухвалентный ион какого-либо металла ( $Cu^{++}$ ,  $Zn^{++}$ ,  $Ni^{++}$  и т. д.). Они отличаются заметными ферромагнитными свойствами и являются плохими проводниками электричества. Употребляются для магнитных цепей в устройствах, работающих при высоких частотах (малые потери на вихревые токи, см. также стр. 457).

## 7. Сверхпроводимость

1° *Явлением сверхпроводимости* называется практически полное исчезновение удельного сопротивления некоторых металлов ( $Pb$ ,  $Zn$ ,  $Al$  и др.) и сплавов (висмута с золотом, карбидов молибдена и вольфрама, нитрида ниобия и др.) при некоторой температуре  $T_c$ , называемой *температурой перехода в сверхпроводящее состояние*. Вещества, обладающие таким свойством, называются *сверхпроводниками*. Температурная зависимость удельного сопротивления сверхпроводников (рис. IV.9.5) обнаруживает конечную ширину  $AB$  переходной области возникновения сверхпроводимости, зависящую от наличия примесей и внутренних напряжений. Для чистых

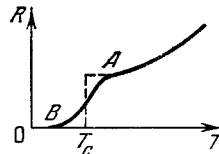


Рис. IV.9.5.

сверхпроводников  $AB$  имеет порядок  $10^{-3}$  град. Температуры  $T_c$  для чистых металлов лежат в пределах от  $0,35^\circ \text{K}$  (гафний) до  $8^\circ \text{K}$  (ниобий); у сплавов — от  $0,155^\circ \text{K}$  (BiPt) до  $18^\circ \text{K}$  (Nb<sub>3</sub>Sn).

2° Температуры  $T_c$  обратно пропорциональны квадратным корням из атомных весов изотопов (стр. 806) одного и того же сверхпроводящего металла (*изотопический эффект*).

3° Магнитное поле, действующее на сверхпроводник, снижает температуру  $T_c$  (п. 1°). На рис. IV. 9.6 изображены кривые зависимости сопротивления  $R$  белого олова

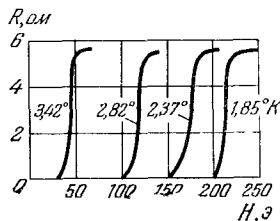


Рис IV 9 6

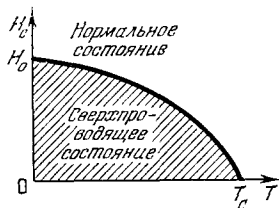


Рис IV 9 7.

от напряженности  $H$  магнитного поля при различных температурах. Магнитное поле, вызывающее при данной температуре переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное, называется *критическим полем*. С понижением температуры  $T$  сверхпроводника напряженность  $H$  критического поля увеличивается (рис. IV.9.7).

В первом приближении  $H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$ .

4° Сверхпроводящие свойства проводников исчезают при пропускании через них достаточно сильного тока. Это связано с действием на проводники магнитного поля токов, разрушающего сверхпроводящее состояние.

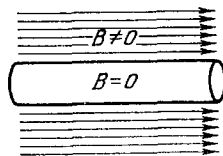


Рис. IV 9 8.

5° Магнитные поля, более слабые, чем критическое (п. 3°), не проникают в толщу сверхпроводника: магнитная индукция  $B$  в объеме сверхпроводника равна нулю. На рис. IV.9.8 однородное магнитное поле направлено вдоль оси сверхпроводника. Сверхпроводник явля-

ется идеальным диамагнетиком с магнитной восприимчивостью  $\kappa_m = -1$  (стр. 473). Убывание напряженности магнитного поля в плоском массивном сверхпроводнике по нормали к поверхности происходит по закону

$$H = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}},$$

где  $x$  — расстояние от поверхности,  $H_0$  — напряженность поля на поверхности,  $\delta$  — постоянная, определяющая глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник:

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi c^2 n_{\text{оп}}}} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $m$  — масса электрона,  $e$  — его заряд,  $c$  — скорость света в вакууме,  $n_{\text{оп}}$  — число электронов в единице объема, участвующих в сверхпроводящем токе. При  $T < T_c$ , величина  $\delta \approx 10^{-5}$  см; при  $T \rightarrow T_c$ ,  $\delta \rightarrow \infty$ . Это означает, что при температурах выше  $T_c$  сверхпроводящее состояние сменяется нормальным и магнитное поле распределяется по всему объему проводника.

6° В присутствии магнитного поля изотермический переход из сверхпроводящего состояния в нормальное связан с поглощением теплоты и скачкообразным изменением теплоемкости и теплопроводности вещества; обратный переход связан с выделением теплоты.

7° Согласно *термодинамической теории сверхпроводимости* сверхпроводящее и нормальное состояния являются двумя фазами вещества, переходящими одна в другую при определенных значениях параметров состояния — температуры  $T$  и напряженности  $H$  магнитного поля, соответствующих кривой  $H_c = f(T)$  (рис. IV.9.7). Переход сверхпроводника в нормальное состояние под действием магнитного поля, т. е. при  $T < T_c$ , является фазовым переходом первого рода (стр. 198). Переход сверхпроводника в нормальное состояние в отсутствие магнитного поля является фазовым переходом второго рода (стр. 198).

8° Современная теория сверхпроводимости рассматривает это явление как сверхтекучесть (стр. 264) электронов в металле. Особое взаимодействие между электронами (с порождением и поглощением фононов) может привести к их взаимному притяжению (образованию связанных

пар). Этот эффект в некоторых случаях может быть причиной перехода в сверхпроводящее состояние. В системе так взаимодействующих электронов все электроны проводимости в металле образуют связанный коллектив, который не может отдавать энергию малыми порциями, т. е. не происходит рассеяния электронов на тепловых колебаниях ионов (стр. 378). Для нарушения связи электрона с другими электронами коллектива необходимо затратить энергию, соответствующую средней энергии тепловых колебаний узлов решетки при температуре  $T_c$  (п. 1°). Поэтому при  $T > T_c$  связанные состояния не возникают и сверхпроводящие свойства не проявляются.

9° В некоторых сплавах при магнитных полях с напряженностью большей, чем  $H_c$  (стр. 480), может возникнуть сверхпроводящее состояние, связанное с тем, что магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде тонких нитей, пронизывающих образец. Вещество между нитями оказывается сверхпроводящим, и сопротивление всего образца равно нулю. Ряд сплавов (Nb<sub>3</sub>Sn, NbZn) остается сверхпроводящим при напряженностях полей до 100 э. Имеются сплавы, сохраняющие сверхпроводящие свойства в полях с напряженностью до 200 э. Это используется в технике получения сильных магнитных полей. Широкое распространение имеют магниты, основанные на сверхпроводящих соленоидах.

10° В современной теории сверхпроводимости теоретически обсуждается возможность явления сверхпроводимости в длинных органических молекулах. Так, если в длинной одномерной цепочке атомов, имеющей боковые сильно поляризующиеся отростки (модель Литтла), свободно перемещаются электроны, то, двигаясь вблизи отростка, электрон поляризует его и наводит на ближайшем к центральной цепочке конце отростка положительный заряд. Притяжение к этому заряду электронов основной цепочки может привести к эффективному притяжению между электронами, превышающему их кулоновское отталкивание. В системе так взаимодействующих электронов теоретически предсказывается сверхпроводящее состояние с температурой  $T_c$  перехода в сверхпроводящее состояние (стр. 479), близкой к 2000° К.

11° У ряда полупроводников экспериментально обнаружено явление сверхпроводимости (например, GeTe и титанат стронция SrTiO<sub>3</sub>). У титаната стронция при низких температурах велика относительная диэлектрическая

проницаемость, что сильно уменьшает кулоновское отталкивание между электронами и способствует возникновению связанных пар электронов, обеспечивающих сверхпроводимость.

## ГЛАВА 10

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

## 1. Колебательный контур

1° Колебательным контуром в общем случае называется электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора с емкостью  $C$ , катушки с индуктивностью  $L$  и электрического сопротивления  $R$  (рис. IV.10.1). Изменение электрического заряда  $q$  на обкладках конденсатора со временем описывается дифференциальным уравнением

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид (при  $R < 2\sqrt{L/C}$ )

$$q = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

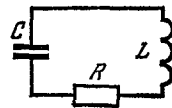


Рис. IV.10.1.

где  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  — циклическая частота колебаний. Это выражение показывает, что величина заряда конденсатора совершает затухающие колебания (стр. 117). Величина  $\beta = R/2L$  называется коэффициентом затухания. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

где  $A_0$  — начальная амплитуда.

Если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) заряд на обкладках конденсатора  $q = q_0$  и ток в цепи отсутствует, то

$$A_0 = \frac{q_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}.$$

Начальная фаза колебаний:

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\omega}{\beta} = \arctg \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}.$$

2° Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  между обкладками конденсатора:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Сила тока  $I$  в колебательном контуре:

$$I = -\frac{dq}{dt} = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ \frac{R}{2L} \sin(\omega t + \alpha_0) - \omega \cos(\omega t + \alpha_0) \right].$$

3° Период  $T$  затухающих колебаний в контуре (стр. 118):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

С увеличением сопротивления  $R$  контура  $T$  возрастает и при  $R = 2\sqrt{L/C}$  обращается в бесконечность.

4° При  $R > 2\sqrt{L/C}$  изменение заряда на обкладках не носит колебательного характера и разряд конденсатора называется *апериодическим*. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) t},$$

где  $q_0$  — заряд  $q$  при  $t = 0$ . Решение показывает, что заряд экспоненциально убывает со временем.

5° Периодическое изменение заряда на обкладках конденсатора вызывает переменный электрический ток  $I$ , переменную разность потенциалов на обкладках  $\Delta\varphi$ , переменные электрическое и магнитное поля. Свободные колебания  $q$ ,  $I$  и  $\Delta\varphi$  называются *свободными электромагнитными колебаниями*. При  $q = q_0$  в момент  $t = 0$  энергия колебаний равна электрической энергии поля конденсатора. За счет выделения джоулева тепла в контуре энергия электромагнитных колебаний уменьшается (рассеивается), и они затухают.

6° При  $R \rightarrow 0$  электромагнитные колебания в контуре становятся незатухающими ( $\beta = 0$ ). Для таких колебаний

$$q = A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

$$\Delta\varphi = \frac{A_0}{C} \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

$$I = -A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где  $\omega_0 = 1/LC$  — циклическая частота свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре. Сила тока отстает по фазе от разности потенциалов между обкладками на  $\pi/2$ .

7° Период  $T$  свободных незатухающих колебаний выражается *формулой Томсона*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

8° Амплитуда  $I_0$  силы тока и амплитуда  $\Delta\varphi_0$  разности потенциалов:

$$I_0 = A_0 \omega_0 = \frac{A_0}{\sqrt{LC}}, \quad \Delta\varphi_0 = \frac{A_0}{C}.$$

9° При свободных незатухающих электромагнитных колебаниях в контуре происходит периодический переход энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля электрического тока. В моменты времени  $t = 0, T/2, T$  и т. д. энергия электрического поля максимальна и равна  $C(\Delta\varphi_0)^2/2$ , а энергия магнитного поля равна нулю. В моменты времени  $t = T/4, 3/4T$  и т. д. энергия магнитного поля максимальна и равна  $LI_0^2/2$ , а энергия электрического поля равна нулю. Из условия

$$\frac{C(\Delta\varphi_0)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

следует:

$$I_0 = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{L/C}}.$$

Величина  $\sqrt{L/C}$  называется *волновым сопротивлением контура*.

## 2. Вынужденные электромагнитные колебания

1° В реальном колебательном контуре электрическое сопротивление  $R$  отлично от нуля и свободные электромагнитные колебания затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний к контуру необходимо подводить энергию, которая восстанавливала бы потери на джоулево тепло. Для поддержания в контуре таких вынужденных электромагнитных колебаний необходимо включить в него источник тока с периодически изменяю-

щейся, например синусоидальной, э. д. с. (рис. IV.10.2):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t,$$

где  $\mathcal{E}_0$  — амплитуда э. д. с.,  $\Omega$  — ее циклическая частота. Произвольная непрерывная э. д. с. в форме функции  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  может быть по теореме Фурье представлена в виде суммы (конечной или бесконечной) простых синусоидальных э. д. с. с различными амплитудами, начальными фазами и циклическими частотами.

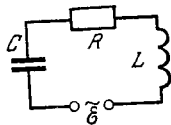


Рис. IV.10.2.

2° Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_0 \sin \Omega t;$$

обозначения указаны на стр. 483. Решение этого уравнения представляется в виде суммы двух членов: полного решения соответствующего уравнения без правой части (стр. 483) и частного решения уравнения. Первым членом, характеризующим свободные затухающие колебания в контуре, можно пренебречь по истечении некоторого времени после начала колебаний. Сила тока в цепи при установившихся вынужденных колебаниях:

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

где  $I_0$  — амплитуда силы тока в контуре:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z},$$

$\alpha$  — сдвиг фаз между силой тока и приложенной э. д. с.:

$$\alpha = \arctg \frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{R}.$$

3° Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}$$

называется *полным (эффективным) сопротивлением* электрической цепи переменного тока (колебательного контура). Оно состоит из *активного (омического) сопротивления*  $R$ , *индуктивного сопротивления*  $R_L = \Omega L$  и *емкостного сопротивления*  $R_C = 1/\Omega C$ . Чисто индуктивное сопротивление сдвигает фазу силы переменного тока в контуре

на  $\alpha = -\pi/2$  сравнительно с фазой приложенной э. д. с. Чисто емкостное сопротивление приводит к опережению по фазе на  $\alpha = \pi/2$  силы тока сравнительно с э. д. с.

4° Для переменного синусоидального тока в контуре (и в любой электрической цепи) среднее за период значение выделяющейся мощности

$$\bar{N} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \alpha,$$

где  $I_0$  и  $\mathcal{E}_0$  — амплитуды силы тока и э. д. с. в цепи,  $\alpha$  — сдвиг по фазе между током и э. д. с.

*Эффективными (действующими) значениями* силы тока  $I_{\text{эфф}}$  и электродвижущей силы  $\mathcal{E}_{\text{эфф}}$  называются значения этих величин для такого постоянного тока, который на том же омическом сопротивлении выделяет мощность, одинаковую с  $\bar{N}$  для переменного тока. Для синусоидального переменного тока

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{\text{эфф}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

5° Амплитуда силы тока  $I_0$  зависит не только от параметров контура ( $R$ ,  $L$  и  $C$ ) и амплитуды э. д. с.  $\mathcal{E}_0$ , но и от циклической частоты  $\Omega$ . На рис. IV.10.3 и IV.10.4

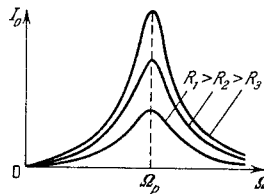


Рис. IV.10.3.

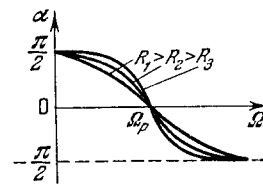


Рис. IV.10.4.

представлены зависимости  $I_0(\Omega)$  и  $\alpha(\Omega)$  при постоянных  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $\mathcal{E}_0$ .

Максимальное значение тока

$$I_{0\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

достигается при значении

$$\Omega = \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

где  $\omega_0$  — частота свободных незатухающих колебаний в контуре (стр. 485). При  $\Omega = \Omega_p$  полное эффективное сопротивление колебательного контура минимально и равно активному сопротивлению  $R$ . При этом  $\alpha = 0$ , т. е. сила тока и вынуждающая э. д. с. совпадают по фазе.

Резкое возрастание амплитуды силы тока в колебательном контуре при условии  $\Omega \rightarrow \Omega_p$  называется *резонансом в электрической цепи*. Частота  $\Omega_p$  называется *резонансной циклической частотой*. Кривая зависимости  $I_0$  от  $\Omega$  (рис. IV.10.3) называется *резонансной кривой*.  $\Omega_p$  не зависит от активного сопротивления  $R$ .

6° Амплитуды падений напряжения на индуктивности  $U_L$  и на емкости  $U_C$  при резонансе в контуре, изображенном на рис. IV.10.2, одинаковы:

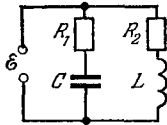


Рис. IV.10.5.

$$U_{0L} = U_{0C} = L\Omega_p I_0 = \frac{I_0}{\Omega_p C},$$

а фазы противоположны:  $U_L$  опережает  $U_C$  по фазе на  $\pi$ , так что  $U_L + U_C = 0$ . Полное падение напряжения в контуре (рис. IV.10.2) равно падению напряжения  $U_R$  на активном сопротивлении (*резонанс напряжений*).

7° В электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных емкости  $C$  и индуктивности  $L$ , при включении синусоидальной э. д. с. (рис. IV.10.5)  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \Omega t$  силы токов  $I_1$  и  $I_2$  в параллельных ветвях равны:

$$I_1 = I_{01} \sin (\Omega t + \alpha_1), \quad I_2 = I_{02} \sin (\Omega t + \alpha_2),$$

где

$$I_{01} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\Omega^2 C^2}}}, \quad I_{02} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \Omega^2 L^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\Omega C R_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\Omega L}{R_2}.$$

Сила тока в неразветвленной части цепи:

$$I = I_0 \sin (\Omega t + \alpha),$$

где

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos (\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{01} \sin \alpha_1 + I_{02} \sin \alpha_2}{I_{01} \cos \alpha_1 + I_{02} \cos \alpha_2}.$$

Если активные сопротивления параллельных ветвей

равны нулю ( $R_1 = R_2 = 0$ ), то

$$I_{01} = \frac{\varepsilon_0}{\Omega C}, \quad I_{02} = \frac{\varepsilon_0}{\Omega L}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\infty,$$

т. е.  $\alpha_1 = \pi/2$  и  $\alpha_2 = 3\pi/2$  — токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда тока во внешней (неразветвленной) цепи:

$$I_0 = |I_{01} - I_{02}| = \varepsilon_0 \left| \Omega C - \frac{1}{\Omega L} \right|.$$

При  $\Omega = \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   $I_{01} = I_{02}$  и  $I_0 = 0$ . Резкое уменьшение амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно соединенные индуктивное и емкостное сопротивления, при условии  $\Omega \rightarrow \Omega_p = 1/\sqrt{LC}$  называется *резонансом токов*.

8° При действии на колебательный контур э. д. с., представляющей собой сумму синусоидальных э. д. с. с различными циклическими частотами  $\Omega_i$ ,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{0i} \sin \Omega_i t,$$

благодаря явлению резонанса контур сильнее всего реагирует на ту составляющую э. д. с., частота которой  $\Omega_k$  равна или наиболее близка к резонансной частоте  $\Omega_p$  контура. В радиоприемных устройствах (стр. 580), основанных на этом принципе, резонансная частота изменяется за счет изменения емкости или индуктивности контура.

9° Влияние на колебательный контур вынуждающих э. д. с., частоты которых отличны от  $\Omega_p$ , тем слабее, чем острее резонансная кривая  $I_0(\Omega)$  вблизи значения  $\Omega = \Omega_p = \omega_0$ . Острота резонансной кривой характеризуется ее *относительной полушириной*  $\Delta \Omega / \Omega_p$ :

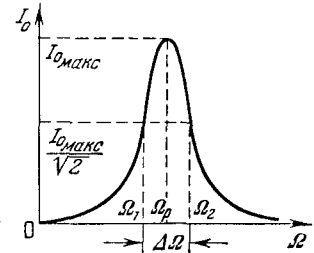


Рис. IV.10.6.

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_p} = \frac{2\beta}{\Omega_p},$$

где  $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$  — разность значений циклической частоты, соответствующих  $I_0^2 = \frac{1}{2} I_{0\max}^2$  (рис. IV.10.6),

$\beta$  — коэффициент затухания контура (стр. 483),  $\Omega_p$  — резонансная частота.

Величина

$$Q = \frac{\Omega_p}{2\beta} = \frac{\Omega_p R}{L}$$

называется *добротностью контура*.

Следовательно,

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{1}{Q}.$$

### 3. Электронные и полупроводниковые выпрямители и усилители

1° Для выпрямления переменного тока и усиления электромагнитных колебаний применяются электрические цепи, называемые *выпрямителями* и *усилителями*. Главной частью этих цепей являются электронные лампы и полупроводниковые устройства.

2° *Электронные лампы* основаны на явлении термоэлектронной эмиссии (стр. 421). Простейшая двухэлектродная электронная лампа — *диод* — схематически изображена на рис. IV.10.7. При постоянной температуре накала катода (нити) лампы

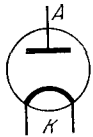


Рис. IV.10.7.

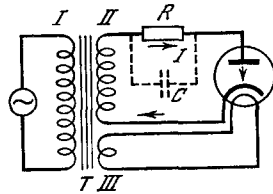


Рис. IV.10.8.

ток  $I_A$  в диоде зависит от анодного напряжения  $U_A$  (стр. 422).

3° Диоды обладают односторонней (*униполярной*) проводимостью: ток в лампе возможен при условии  $\varphi_A > \varphi_K$ , где  $\varphi_A$  и  $\varphi_K$  — потенциалы анода и катода; это позволяет применять их для выпрямления переменного тока. Вакуумная двухэлектродная электронная лампа, служащая для выпрямления переменного тока, называется *кентроном*.

4° На рис. IV.10.8 приведена схема простейшего *однопериодного* кентронного выпрямителя. Первич-

ная обмотка I трансформатора T соединена с источником переменного тока. Вторичная обмотка III питает *нить накала* кентрона. Концы вторичной обмотки II присоединены к аноду и катоду. Ток в лампе и потребителе R идет в одном направлении, указанном стрелками. Его численное значение изменяется (*пульсирующий ток*). Изменения пульсирующего тока за период показаны на рис. IV.10.9. В первую половину периода  $U_A < 0$  и  $I = 0$ . Сглаживание

пульсаций выпрямленного тока производится *фильтрами*

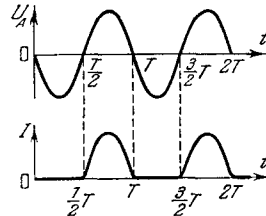


Рис. IV.10.9.

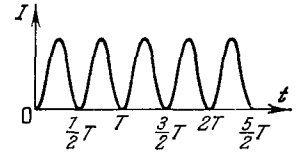


Рис. IV.10.10.

— конденсатором или *дресселем*, которые включаются параллельно или последовательно потребителю R; сглаживающее действие дросселя основано на явлении самоиндукции (стр. 457). В *двухполупериодных* кентронных выпрямителях используют диод с двумя анодами (*сдвоенный диод*). Они позволяют получить выпрямление тока в оба полупериода (рис. IV.10.10).

5° Действие полупроводниковых выпрямителей — *купрожского* (меднозакисного), селенового и германиевого — основано на односторонней (*вентильной*) проводимости p — n-перехода в месте контакта дырочного и электронного полупроводников (стр. 415). Условное обозначение полупроводникового диода дано на рис. IV.10.11, а

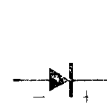


Рис. IV.10.11.

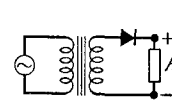


Рис. IV.10.12.

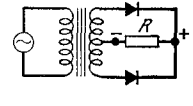


Рис. IV.10.13.

схемы однопериодного и двухполупериодного полупроводниковых выпрямителей — на рис. IV.10.12 и IV.10.13. Вентильное действие полупроводниковых

диодов чувствительно к изменениям температуры и снижается при ее повышении. Рабочий диапазон температуры для различных типов полупроводниковых диодов составляет от  $-60^\circ\text{C}$  до  $(50 \pm 90)^\circ\text{C}$ .

6° Для усиления электромагнитных колебаний применяются электронные и полупроводниковые *триоды*, а также многоэлектродные электронные лампы (*тетроды*, *пентоды*). В трехэлектродной лампе вблизи катода *K* между катодом и анодом *A* помещается *управляющая сетка C* (рис. IV.10.14). Зависимость анодного тока  $I_A$  от напряжения  $U_c$  между сеткой и катодом (*сеточное напряжение*)

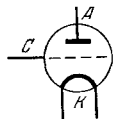


Рис. IV 10.14.

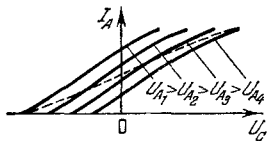


Рис. IV.10.15.

при постоянном значении напряжения  $U_A$  между анодом и катодом (*анодное напряжение*) и неизменном накале лампы называется *статической сеточной характеристикой* лампы. Статические сеточные характеристики триода при различных  $U_A$  изображены на рис. IV.10.15. Отрицательное сеточное напряжение, при котором анодный ток полностью прекращается, называется *напряжением запирания* лампы. Оно возрастает по абсолютной величине с ростом анодного напряжения.

Величина  $S$ , численно равная тангенсу угла наклона сеточной характеристики к оси  $U_c$ , называется *крутизной сеточной характеристики* триода:

$$S = \left( \frac{\partial I_A}{\partial U_c} \right)_{U_A}$$

7° Зависимость анодного тока  $I_A$  от анодного напряжения  $U_A$  при  $U_c = \text{const}$  и постоянном накале называется *статической анодной характеристикой* лампы. Семейство таких характеристик при различных  $U_c$  показано на рис. IV.10.16. Величина  $R_i$ , численно равная котангенсу угла наклона к оси  $U_A$ , касательной к статической анодной характеристике, называется *внутренним*

сопротивлением триода:

$$R_i = \left( \frac{\partial U_A}{\partial I_A} \right)_{U_c}$$

8° При постоянном напряжении накала

$$I_A = f(U_A, U_c).$$

Приращение анодного тока в триоде:

$$dI_A = \frac{1}{R_i} (dU_A + \mu dU_c),$$

где  $\mu = R_i S$  называется *статическим коэффициентом усиления* трехэлектродной лампы. Величина  $D = 1/\mu = 1/R_i S$  называется *прозрачностью* лампы.

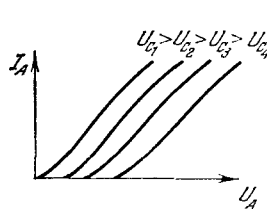


Рис IV 10.16.

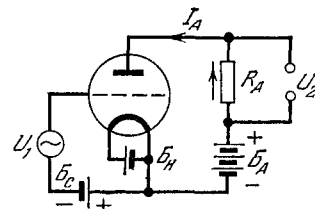


Рис IV.10.17.

9° Схема простейшего усилителя переменного напряжения приведена на рис. IV.10.17. Усиливаемое переменное напряжение  $U_1$  подается на сетку триода. Усиленное напряжение  $U_2$  снимается с концов активного сопротивления  $R_A$ , включенного в анодную цепь. Батареи  $B_C$  и  $B_A$  создают постоянное отрицательное напряжение  $U_{c0}$  между сеткой и катодом и положительное напряжение  $U_A$  между анодом и катодом:

$$U_c = U_{c0} + U_1 = -\mathcal{E}_1 + U_1, \quad U_A = \mathcal{E}_2 - I_A(R_A + r_A),$$

где  $\mathcal{E}_1$  — э. д. с. батареи  $B_C$ ,  $\mathcal{E}_2$  — э. д. с. батареи  $B_A$ ,  $r_A$  — ее внутреннее сопротивление,  $I_A$  — анодный ток. Так как  $r_A \ll R_A$ , то

$$U_A = \mathcal{E}_2 - I_A R_A = \mathcal{E}_2 - U_2.$$

При постоянных  $\mathcal{E}_2$  и  $R_A$  анодное напряжение уменьшается с ростом  $U_c$ . Зависимость  $I_A = f(U_c)$  при постоянных



$E_2$  и  $R_A$  называется динамической характеристикой триода (пунктирная линия на рис. IV.10.15).

10° Коэффициент усиления  $K$  есть отношение изменений выходного  $U_2$  и входного  $U_1$  напряжений:

$$K = \frac{dU_2}{dU_1} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_t}{R_A}};$$

при  $R_A \gg R_t$  коэффициент  $K \approx \mu$ .

11° Для увеличения статического коэффициента усиления уменьшают взаимную емкость  $C_{AK}$  анода и катода (выходная емкость). Для уменьшения  $C_{AK}$  между анодом и управляющей сеткой устанавливается экранирующая сетка (тетрод, рис. IV.10.18). Потенциал экранирующей сетки постоянен и более низок, чем потенциал анода; этим достигается ослабление электрического поля анода вблизи управляющей сетки и катода и увеличение  $\mu$ .

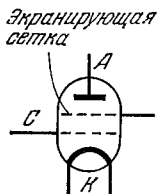


Рис. IV.10.18.

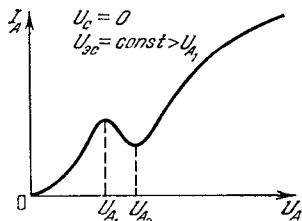


Рис. IV.10.19.

12° Зависимость анодного тока  $I_A$  от анодного напряжения  $U_A$  при постоянных напряжениях на управляющей ( $U_C$ ) и экранирующей ( $U_{ЭС}$ ) сетках, изображенная на рис. IV.10.19, не монотонна. При  $U_A \rightarrow U_{A1}$  вторичные электроны, выбиваемые из анода, устремляются к экранирующей сетке, уменьшая анодный ток  $I_A$  (динаatronный эффект). В области динаatronного эффекта от  $U_{A1}$  до  $U_{A2}$  усилимые сигналы искажаются и работа тетрода невозможна.

13° Для устранения динаatronного эффекта между анодом и экранирующей сеткой помещается третья, антидинаatronная сетка, соединенная с катодом (пентод,

рис. IV.10.20). Электрическое поле между антидинаatronной сеткой и анодом отталкивает вторичные электроны к аноду, обеспечивая монотонный рост анодного тока  $I_A$  с увеличением анодного напряжения  $U_A$ .

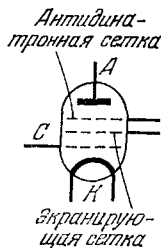


Рис. IV.10.20.

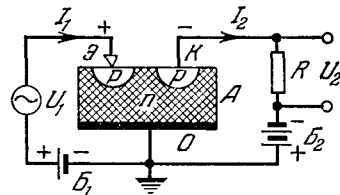


Рис. IV.10.21.

14° Полупроводниковые триоды (транзисторы) содержат два электронно-дырочных перехода (стр. 415). Схема точечного германиевого триода приведена на рис. IV.10.21.

Кристалл  $A$  германия, обладающий электронной проводимостью ( $n$ -типа) (стр. 402), припаян внизу к основанию  $O$  (базе). Вблизи двух точечных электродов – эмиттера  $\mathcal{E}$  и коллектора  $K$  – имеются области дырочной проводимости ( $p$ -типа) (стр. 403). Усиливаемое напряжение  $U_1$  подается на эмиттер. Усиленное напряжение  $U_2$  снимается с нагрузочного сопротивления  $R$ . Напряжение  $U_{EO}$  между эмиттером и основанием положительно, поэтому электрический ток  $I$  в цепи эмиттер – основание всегда идет через кристалл германия от  $\mathcal{E}$  к  $O$  в пропускном направлении  $p$  –  $n$ -перехода вблизи эмиттера (стр. 416). Напряжение  $U_{KO}$  между коллектором и основанием отрицательно, и электрический ток в цепи коллектор – основание идет через кристалл германия только от  $O$  к  $K$ , т. е. в направлении, соответствующем большому сопротивлению  $p$  –  $n$ -перехода вблизи коллектора (стр. 415).

15° Напряжение  $U_{EK}$  между эмиттером и коллектором положительно. Даже при малых значениях  $U_{EK}$  и  $U_{EO}$  вблизи острия эмиттера напряженность электрического поля велика и в прилегающем к эмиттеру  $p$ -германии

образуются положительные дырки (стр. 401). Переход дырок из  $p$ -германия в основную часть кристалла ( $n$ -типа) называется *инжекцией* (впрыскиванием) дырок. Эмиттер и прилегающий к нему  $p$ -германий являются источником подвижных носителей тока, т. е. играют роль катода в электронной лампе (стр. 490). Контакт  $p$ - и  $n$ -германия вблизи коллектора обладает малым сопротивлением для дырок. Увеличение тока  $I_2$  в цепи коллектора и падение напряжения на сопротивлении  $R$  зависят от числа дырок, поступающих за единицу времени к  $p$ - $n$ -переходу вблизи коллектора и снижающих высоту потенциального барьера. В свою очередь число дырок зависит от напряженности электрического поля вблизи эмиттера, т. е. изменится в соответствии с колебаниями усиляемого напряжения  $U_1$ . Таким образом, величина  $U_2$  выходного напряжения усилителя (рис. IV.10.21) зависит от входного напряжения  $U_1$ .

16° При температурах, близких к условиям возникновения собственной проводимости полупроводника (стр. 400; для германия — около  $100^\circ\text{C}$ ), число свободных носителей тока в полупроводнике резко возрастает и управление их числом, необходимое для работы усилителя, становится затруднительным. Верхний предел рабочей температуры германиевых триодов  $55 - 75^\circ\text{C}$ . Нижний предел рабочей температуры (обычно около  $-55^\circ\text{C}$ ) соответствует таким энергиям теплового движения частиц, при которых невозможно освобождение в объеме полупроводника необходимого числа носителей тока. Это приводит к увеличению сопротивления прибора и нарушению режима его работы.

17° В *плоскостных полупроводниковых триодах*, обладающих большими, чем у точечных триодов, выходными

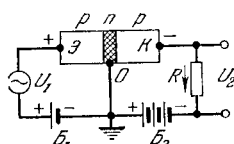


Рис. IV.10.22.

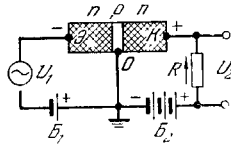


Рис. IV.10.23.

мощностями, с помощью примесей создаются либо прослойки  $n$ -полупроводника между двумя  $p$ -полупроводниками (триод на основе  $n$ -полупроводника, типа  $p - n - p$ ),

либо, наоборот, слой  $p$ -полупроводника между двумя  $n$ -полупроводниками (триод на основе  $p$ -полупроводника, типа  $n - p - n$ ); принцип действия таких триодов и схемы их включения показаны на рис. IV.10.22 и IV.10.23.

## ГЛАВА 11 ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕПОДВИЖНЫХ СРЕД

### 1. Общая характеристика теории Максвелла

1° *Теория Максвелла* является последовательным обобщением основных законов электрических и электромагнитных явлений: теоремы Остроградского — Гаусса (стр. 349), закона полного тока (стр. 437) и закона электромагнитной индукции (стр. 454). Являясь теорией электромагнитного поля, теория Максвелла позволяет решать задачи, связанные с отысканием электрических и магнитных полей, создаваемых заданным распределением электрических зарядов и токов.

2° Теория Максвелла является *феноменологической*. Электрические и магнитные свойства среды описываются в ней с помощью трех величин: относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , относительной магнитной проницаемости  $\mu$  и удельной электропроводности  $\gamma$ . Зависимость этих величин от свойств среды, внутренних механизмов явлений, происходящих в среде и вызывающих появление электрических и магнитных полей, в теории не рассматриваются.

3° Теория Максвелла является *макроскопической*. В ней рассматриваются поля, создаваемые макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах  $V \gg V_m$ , где  $V_m$  — объемы отдельных атомов и молекул. Кроме того, считаются выполненными условия:

а)  $r \gg d$ , где  $r$  — расстояния от источников полей до рассматриваемых точек пространства,  $d$  — линейные размеры атомов и молекул;

б)  $T \gg T_m$ , где  $T$  и  $T_m$  — характерные времена соответственно для изменений электрических и магнитных полей и внутримолекулярных процессов.

4° Макроскопические заряды и токи являются совокупностями микроскопических зарядов и токов, создающих переменные электрические и магнитные поля

(микрополя, стр. 506). В теории Максвелла рассматриваются усредненные поля. Усреднение производится по интервалам времени  $t \gg T_m$  для участков поля с объемами  $V \gg V_m$  (см. п. 3°).

5° Теория Максвелла является теорией ближнего действия. Согласно этой теории скорость распространения электрических и магнитных взаимодействий равна скорости света в данной среде. В теории Максвелла раскрывается электромагнитная природа света.

## 2. Первое уравнение Максвелла

1° Закон электромагнитной индукции в форме (стр. 456):

$$\left. \begin{aligned} \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) &= -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} & (\text{в СИ}), \\ \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} & (\text{в гауссовой системе}), \end{aligned} \right\} (1)$$

согласно Максвеллу, справедлив для любого замкнутого (не только проводящего) контура, произвольно выбранного в переменном магнитном поле. Переменное магнитное поле в любой точке пространства создает вихревое электрическое поле. Формулы (1) выражают первое уравнение Максвелла в интегральной форме.

2° С помощью соотношения для магнитного потока

$$\Phi_m = \int_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = \int_S B_n dS,$$

где  $B_n$  — проекция вектора магнитной индукции на направление единичной нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности  $dS$ , и теоремы Стокса:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}),$$

где  $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ , можно записать первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{в СИ}), \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{в гауссовой системе}). \end{aligned} \right\} (1')$$

## 3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

1° Закон полного тока в форме (стр. 438):

$$\left. \begin{aligned} \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) &= \sum_{k=1}^n I_k & (\text{в СИ}), \\ \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) &= \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n I_k & (\text{в гауссовой системе}) \end{aligned} \right\}$$

утверждает, что магнитное поле создается упорядоченно движущимися электрическими зарядами — токами проводимости и конвекционными токами (стр. 375);  $\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l})$  —

циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру  $L$ , охватывающему токи. Согласно Максвеллу, источником возникновения вихревого магнитного поля является также переменное электрическое поле, магнитное действие которого характеризуется током смещения.

2° Плотность тока смещения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{смещ}} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (\text{в СИ}), \\ \mathbf{j}_{\text{смещ}} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (\text{в гауссовой системе}). \end{aligned} \right\}$$

Ток смещения через произвольную поверхность  $S$ :

$$I_{\text{смещ}} = \int_S (\mathbf{j}_{\text{смещ}} d\mathbf{S}) = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$I_{\text{смещ}} = \int_S (\mathbf{j}_{\text{смещ}} d\mathbf{S}) = \int_S \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\Phi_e = \int_S D_n dS$  — поток вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$  через поверхность  $S$ . Токи смещения обеспечивают замкнутость цепей любых непостоянных токов. Например, между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки создается ток смещения, замыкающий цепь.

3° В диэлектрике (стр. 368)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mathbf{P}_e$  — вектор поляризации (стр. 364),  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная (стр. 342).

Плотность тока смещения в диэлектрике:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  — плотность тока смещения в вакууме (в СИ) или  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  (в гауссовой системе),  $\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$  — плотность тока поляризации. Ток смещения в вакууме не выделяет джоулевой теплоты. Ток поляризации выделяет теплоту, связанную с трением в процессе поляризации диэлектрика.

4° *Обобщенный закон полного тока:*

$$\left. \begin{aligned} \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) &= \sum_{k=1}^n I_k + I_{\text{смещ}} \quad (\text{в СИ}), \\ \oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) &= \frac{4\pi}{c} \left( \sum_{k=1}^n I_k + I_{\text{смещ}} \right) \quad (\text{в гауссовой системе}). \end{aligned} \right\} (2)$$

Формулы (2) — второе уравнение Максвелла в интегральной форме.

С помощью формулы Стокса  $\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \int_S \text{rot}_n \mathbf{H} dS$  и соотношения для полного тока

$$I_{\text{полн}} = \sum_{k=1}^n I_k + I_{\text{смещ}} = \int_S (j_n + j_{n \text{ смещ}}) dS,$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости, можно записать второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}), \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}). \end{aligned} \right\} (2')$$

#### 4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

1° Помимо уравнений (1), (2) в систему уравнений Максвелла входит теорема Остроградского — Гаусса для электрического и магнитного полей (в СИ):

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = q, \quad (3)$$

$$\Phi_m = \oint_S B_n dS = 0, \quad (4)$$

где  $\Phi_e$  и  $\Phi_m$  — соответственно потоки электрического смещения  $\mathbf{D}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  сквозь замкнутую поверхность, охватывающую свободный заряд  $q$ . Уравнение (4) выражает факт отсутствия свободных магнитных зарядов. Если ввести объемную плотность свободных зарядов  $\rho$ :  $q = \int_V \rho dV$  ( $dV$  — элемент объема  $V$ )

и воспользоваться теоремой Гаусса  $\oint_S A_n dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV$ ,

то из уравнений (3), (4) получаются *третье и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме* (в СИ):

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (3')$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4')$$

2° Полная система уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= \rho, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{в СИ}), \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{в гауссовой системе}) \quad (5')$$

дополняется *материальными уравнениями*, связывающими векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  с величинами, описывающими электрические и магнитные свойства среды:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{в гауссовой системе});$$

$\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость,  $\gamma$  — удельная электропроводность,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Среда здесь и в дальнейшем предполагается изотропной, не ферромагнитной (стр. 474) и не сегнетоэлектрической (стр. 370).

3° На границе раздела двух сред выполняются граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} D_{n_1} - D_{n_2} &= \sigma, \\ B_{n_1} &= B_{n_2}, \end{aligned} \right\} (6) \quad \left. \begin{aligned} E_{t_1} &= E_{t_2}, \\ H_{t_1} - H_{t_2} &= j_{\text{пов}}, \end{aligned} \right\} (7) \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} D_{n_1} - D_{n_2} &= 4\pi\sigma, \\ B_{n_1} &= B_{n_2}, \\ E_{t_1} &= E_{t_2}, \\ H_{t_1} - H_{t_2} &= \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} (6') \\ (7') \end{aligned} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе раздела, проведенный из среды 2 в 1,  $\mathbf{t}$  — вектор, касательный к границе.

Уравнения (6) выражают непрерывность нормальных составляющих вектора магнитной индукции и скачок нормальных составляющих вектора смещения. Уравнения (7) устанавливают непрерывность касательных составляющих вектора напряженностей электрического поля на границе раздела и скачок этих составляющих для напряженности магнитного поля ( $j_{\text{пов}}$  — проекция вектора плотности поверхностных токов проводимости на направление  $[\mathbf{tn}]$ ).

4° При заданных начальных условиях (значениях векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в начальный момент времени  $t = 0$ ) система уравнений Максвелла имеет единственное решение. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца (стр. 523).

### 5. Решение уравнений Максвелла методом запаздывающих потенциалов (при $\varepsilon, \mu = \text{const}$ )

1° Для решения системы уравнений Максвелла вводятся скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathbf{A}$  потенциалы:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Такое введение не является однозначным. Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  вводится с точностью до  $\text{grad } \psi$ , где  $\psi$  — произвольная скалярная функция точки:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \text{grad } \psi.$$

Скалярный потенциал вводится с точностью до производной от скалярной функции точки по времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Для однозначного определения потенциалов на  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  накладывается условие нормировки Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon' \mu' \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Оно выполняется, если  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi - \varepsilon' \mu' \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } \mathbf{A}_0 + \varepsilon' \mu' \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $\varphi_0$  и  $\mathbf{A}_0$  — частные значения потенциалов, удовлетворяющие уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} + \varepsilon' \mu' \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon' \mu' \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu' \mathbf{j}_{\text{пров}}, \\ \Delta \varphi + \text{div } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon'} \rho; \end{aligned} \right\} (\text{в СИ}),$$

$\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon$ ;  $\mu' = \mu_0 \mu$  — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\Delta$  — оператор Лапласа (стр. 320).

2° Векторный и скалярный потенциалы удовлетворяют уравнениям Даламбера:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu' \mathbf{j}_{\text{пров}}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon'} \end{aligned} \right\} (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}_{\text{пров}}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho \end{aligned} \right\} (\text{в гауссовой системе}).$$

Здесь  $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$  — скорость распространения электромагнитных волн в данной среде, а  $c$  — в вакууме,  $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{j}$  — плотность токов проводимости, в СИ  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$  м/сек, в гауссовой системе  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — электродинамическая постоянная (стр. 425).

3° Потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  могут рассматриваться как *завлаживающие*. Это означает, что учитывается конечная скорость  $v$  распространения электромагнитных сигналов:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{V'} \frac{e(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon'} \int_{V'} \frac{e(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu'}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (\text{в СИ}),$$

где  $x, y, z$  — координаты точки, в которой в момент  $t$  отыскиваются потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$ ;  $x', y', z'$  — текущие координаты произвольно расположенного элемента объема  $dV'$ ;  $r$  — расстояние элемента  $dV'$  до точки наблюдения. В точке, удаленной на  $r$  от зарядов и токов — источников поля, потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  в момент времени  $t$  будут определяться значениями  $e$  и  $\mathbf{j}$  в момент времени  $t - \frac{r}{v}$ .

## 6. Законы сохранения в электромагнитном поле

1° Закон сохранения электрических зарядов — утверждение о том, что электрические заряды не исчезают и не создаются, — устанавливает, что убыль зарядов  $q$  в замкнутом объеме  $V$  за единицу времени равна силе тока:

$$I = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Дифференциальная форма закона сохранения заряда — уравнение непрерывности для объемной плотности зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность токов проводимости,  $\rho$  — объемная плотность зарядов.

2° Энергия переменного электромагнитного поля, локализованная в пространстве с объемной плотностью  $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$  (стр. 464), распространяется с групповой скоростью (стр. 569). Количество энергии, переносимой через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения энергии, за единицу времени, определяется *вектором Пойнтинга* (мгновенной плотностью потока энергии):

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

*Закон сохранения энергии в электромагнитном поле* (в интегральной форме):

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = \int_V a dV + \oint_S P_n dS,$$

где  $a$  — объемная плотность тепловой мощности тока (стр. 379). Убыль энергии в объеме  $V$  поля расходуется на выделение джоулевой теплоты в проводниках, находящихся в поле, и на распространение энергии через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем. Дифференциальная форма закона сохранения энергии в поле (в отсутствие зарядов и токов) — уравнение непрерывности для объемной плотности энергии  $w$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

3° Вместе с энергией электромагнитного поля переносится импульс (количество движения) поля, распределенный в пространстве с объемной плотностью  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{c^2} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Полный импульс поля в объеме  $V$ :

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV.$$

Наличие импульса  $\mathbf{G}$  электромагнитного поля проявляется в световом давлении (стр. 705).

*Закон сохранения импульса электромагнитного поля:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{g} dV = -(\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) + \oint_S \mathbf{T}_n dS,$$

где  $\mathbf{F}_e$  и  $\mathbf{F}_m$  — силы, действующие соответственно на заряды и токи, находящиеся в объеме  $V$ ;  $\oint_S \mathbf{T}_n dS$  — импульс,

передаваемый за 1 сек через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем;  $\mathbf{T}_n$  — сила, действующая извне на единицу поверхности вдоль внешней нормали  $\mathbf{n}$  к ней. Закон сохранения импульса (количества движения) в электромагнитном поле выполняется при учете не только механического импульса  $\mathbf{K}$  (стр. 38), связанного с силами, действующими на заряды и токи:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m,$$

но и импульса электромагнитного поля  $\mathbf{G}$ . Если поверхность  $S$  охватывает все поле, то полный импульс в объеме  $V$

$$\mathbf{G} + \mathbf{K} = \text{const.}$$

## 7. Основные положения электронной теории. Система уравнений Лоренца

1° *Электронная теория* Лоренца является развитием теории электромагнитного поля Максвелла. Она исходит из определенных представлений о строении вещества (*микроскопическая теория*). Вещество в электронной теории рассматривается состоящим из движущихся заряженных частиц. Для описания электромагнитных явлений в средах электронная теория не использует величин  $\epsilon$  и  $\mu$  (стр. 501), характеризующих вещество в феноменологической теории Максвелла. Электрические и магнитные свойства вещества, все электромагнитные явления в средах объясняются характером расположения в пространстве, движения и взаимодействия электрических зарядов, из которых состоят атомы и молекулы.

2° В каждой точке пространства существуют *микрочастицы*: электрическое с напряженностью  $\mathbf{e}$  и магнитное с напряженностью  $\mathbf{h}$ , которые подчиняются *системе*

*уравнений Лоренца:*

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{e} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{e} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \text{rot } \mathbf{h} &= \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{e} &= 4\pi \rho, \\ \text{rot } \mathbf{h} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе).}$$

Плотность токов  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , где  $\rho$  — объемная плотность зарядов,  $\mathbf{v}$  — их скорость.

3° Система уравнений Лоренца дополняется выражением для объемной плотности силы Лоренца  $\mathbf{f}$  (стр. 442), действующей на заряды и токи:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho [\mathbf{v} \mu_0 \mathbf{h}] \quad \text{(в СИ),}$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \frac{\rho}{c} [\mathbf{v} \mathbf{h}] \quad \text{(в гауссовой системе).}$$

Для микрочастиц  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  справедливы законы сохранения (стр. 504).

4° Объемная плотность  $w$  энергии электромагнитного поля (стр. 464), мгновенная плотность  $\mathbf{P}$  потока энергии — вектора Пойнтинга (стр. 505) и объемная плотность  $\mathbf{g}$  импульса (стр. 505) для микрочастиц:

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 e^2 + \mu_0 h^2) \quad \text{(в СИ),}$$

$$w = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2) \quad \text{(в гауссовой системе);}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e} \mathbf{h}] \quad \text{(в СИ),}$$

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e} \mathbf{h}] \quad \text{(в гауссовой системе);}$$

$$\mathbf{g} = \frac{[\mathbf{e} \mathbf{h}]}{c^2} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad \text{(в СИ),}$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{e} \mathbf{h}] = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad \text{(в гауссовой системе).}$$

## 8. Усреднение уравнений микрополя

1° Макроскопические поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , которые наблюдаются экспериментально, могут быть получены в результате пространственно-временного усреднения микрополей  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  (стр. 506). Усредненная система уравнений

Лоренца имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\mu_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} &= \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} = 4\pi \bar{\rho}, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} &= \frac{4\pi}{c} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(в гауссовой системе),}$$

где черта обозначает усреднение соответствующих величин.

2° Заряды, существующие в среде, подразделяются на свободные и связанные (стр. 345):

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\text{своб}} + \bar{\rho}_{\text{связ}}.$$

Усредненная плотность связанных зарядов выражается через вектор поляризации  $\mathbf{P}_s$  (стр. 366):

$$\bar{\rho}_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}_s.$$

3° Усредненная плотность токов  $\bar{\mathbf{j}} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}$  состоит из плотности токов свободных зарядов  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} = \bar{\rho}_{\text{своб}} \bar{\mathbf{v}}$  и плотности токов связанных зарядов  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = \bar{\rho}_{\text{связ}} \bar{\mathbf{v}}$ :  $\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}}$ .

Средняя плотность токов связанных зарядов  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}}$  состоит из плотности токов поляризации  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{полпр}}$  и плотности токов намагничивания  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{намагн}}$ :  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{полпр}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{намагн}}$ . Ток поляризации имеет своей природой смещение зарядов в неполярных молекулах или поворот осей полярных молекул в процессе поляризации:  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{полпр}} = \frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t}$ .

Ток намагничивания появляется в результате существования замкнутых молекулярных токов (стр. 428), связанных с орбитальным движением электронов в атомах и молекулах:  $\bar{\mathbf{j}}_{\text{намагн}} = \operatorname{rot} \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — вектор намагниченности (стр. 467).

После подстановки выражений для  $\bar{\rho}_{\text{связ}}$  и  $\bar{\mathbf{j}}$  в систему уравнений Лоренца получаются уравнения для макро-

пических полей:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \bar{\mathbf{h}}), \\ \operatorname{rot} (\bar{\mathbf{h}} - \mathbf{I}) &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_s), \\ \operatorname{div} (\epsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_s) &= \rho, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} (\bar{\mathbf{h}} - 4\pi \mathbf{I}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{e}} + 4\pi \mathbf{P}_s), \\ \operatorname{div} (\bar{\mathbf{e}} + 4\pi \mathbf{P}_s) &= 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{(в гауссовой системе),}$$

где  $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов, а  $\mathbf{j}$  — плотность тока этих зарядов (макроскопических токов, стр. 428).

4° Из сравнения с уравнениями Максвелла усредненных уравнений Лоренца следуют формулы:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad \text{(в СИ),}$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B} \quad \text{(в гауссовой системе)}$$

и связь векторов поляризации  $\mathbf{P}_s$  и намагниченности  $\mathbf{I}$  с макроскопическими полями (стр. 368 и 473):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_s, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I} \quad \text{(в СИ),}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_s, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I} \quad \text{(в гауссовой системе).}$$

5° Электронная теория раскрывает физический смысл макроскопических постоянных  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  веществ, находящихся в различных постоянных и переменных электрических и магнитных полях.

6° Как и феноменологическая теория Максвелла, электронная теория рассматривает непрерывные электромагнитные поля. Все вопросы, где существенна дискретность полей (фотоэффект, стр. 699, тепловое излучение, стр. 695, эффект Комптона, стр. 702), в классической электронной теории не получают своего объяснения. Эти трудности преодолены в квантовой теории.

7° В классической электронной теории проводимости (стр. 376) рассматриваются свойства классического газа



свободных электронов. Это приводит к ряду трудностей (стр. 379), которые разрешены в статистике Ферми — Дирака для вырожденного электронного газа в металлах (стр. 230).

## ГЛАВА 12

## ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

## 1. Уравнения магнитной гидродинамики

1° *Магнитная гидродинамика* изучает взаимодействие электромагнитных полей с жидкими и газообразными средами, обладающими значительной электропроводностью. Примерами таких сред являются плазма (стр. 396) и жидкие металлы.

2° В задачах магнитной гидродинамики изучаемые среды предполагаются сплошными (стр. 310). Не делается различия между напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$  и магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  сред (в гауссовой системе единиц), так как для всех проводящих жидкостей и газов магнитная проницаемость  $\mu \approx 1$ . Предполагается также, что действительная часть диэлектрической проницаемости сред  $\varepsilon = \text{const}$ .

В отношении электропроводности сред  $\gamma$  делаются следующие предположения:

а) величина  $\gamma$  однородна и изотропна по всей среде,  $\gamma$  не зависит от  $H$ . Это справедливо при выполнении условия

$$\omega_L \tau \ll 1,$$

где  $\omega_L = eH/2mc$  — ларморова частота прецессии для электронов (стр. 466),  $\tau$  — среднее время свободного пробега электронов в среде. Нарушение этого условия может иметь место в очень разреженных средах и при весьма высоких напряженностях магнитного поля;

б) величина  $\gamma$  достаточно велика, так что

$$\frac{e}{4\pi} \frac{\omega}{\gamma} \ll 1,$$

где  $\omega$  — частота процессов, происходящих в среде, например электромагнитных волн, распространяющихся в плазме.

Предполагается также, что средняя длина свободного пробега электронов в среде много меньше некоторой характеристической длины в данной задаче, например расстояния между двумя проводящими пластинами, в пространстве между которыми движется жидкость под действием приложенного магнитного поля.

Это условие может не иметь места в сильно разреженных средах.

Наконец, в нерелятивистской магнитной гидродинамике предполагается, что движения среды совершаются со скоростями  $v$ , много меньшими скорости  $c$  света в вакууме.

3° Уравнения магнитной гидродинамики представляют собой совокупность уравнений Максвелла для электромагнитного поля (стр. 501), гидродинамических уравнений движения (стр. 318), термодинамических уравнений состояния среды (стр. 148) и уравнения закона сохранения энергии (стр. 325).

При движении электропроводящей среды в магнитном поле возникает индукционный ток, плотность которого равна

$$\mathbf{j}_{\text{инд}} = \frac{\gamma}{c} [\mathbf{vH}],$$

где  $\gamma$  — скорость движения среды. Действие магнитного поля на токи в среде вызывает в ней возникновение электромагнитной объемной силы с плотностью

$$\mathbf{f}_{\text{эл}} = e_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}],$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность полного тока:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{инд}} + e_0 \mathbf{v} + \gamma \mathbf{E},$$

где  $e_0$  — плотность электрических зарядов в среде,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля в среде. Величины  $\mathbf{j}_{\text{инд}}$  и  $\mathbf{f}_{\text{эл}}$  отражают связь между гидродинамическими и электромагнитными явлениями.

При предположениях стр. 510, п. 2°, в выражении для  $\mathbf{j}$  пренебрегают первыми двумя членами и сохраняют лишь плотность тока проводимости  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ . В нерелятивистской теории также пренебрегают первым членом в  $\mathbf{f}_{\text{эл}}$  и сохраняют лишь лоренцеву силу (стр. 442)  $\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]$ .

\*) В этой главе используется гауссова система единиц.

4° Полная система уравнений магнитной гидродинамики имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{vH}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad } \text{div } \mathbf{v} \end{aligned}$$

(аналог уравнения Навье – Стокса, стр. 319),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) &= 0 \quad (\text{уравнение неразрывности, стр. 318}), \\ p &= p(\rho, T) \quad (\text{уравнение состояния среды}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho u + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div } \mathbf{w} \quad (\text{уравнение закона сохранения энергии, стр. 325}),$$

где  $\mathbf{w}$  – плотность потока энергии:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \rho \mathbf{v} \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - K \text{grad } T + \\ &+ \eta \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div } \mathbf{v})^2 \left. \right\} \mathbf{v} + \\ &+ \zeta (\text{div } \mathbf{v})^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}[\mathbf{vH}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}]. \end{aligned}$$

В этих формулах  $\nu_m = c^2/4\pi\mu$  – коэффициент «магнитной вязкости»,  $\eta$  и  $\zeta$  – коэффициенты первой и второй вязкости среды (стр. 320),  $\rho$  – плотность среды,  $p$  – давление,  $u$  – удельная внутренняя энергия среды (стр. 312),  $K$  – коэффициент теплопроводности среды (стр. 210),  $T$  – абсолютная температура,  $\mathbf{v}$  – скорость движения среды.

Точные решения уравнений магнитной гидродинамики получены лишь в немногих случаях простейших движений среды.

5° Если  $L$  и  $V$  – характеристические линейный размер и скорость для рассматриваемой магнитогидродинамической задачи, то величина

$$\text{Re}_m = \frac{VL}{\nu_m}$$

называется магнитным числом Рейнольдса (стр. 332). Во

многих случаях  $\text{Re}_m \gg 1$  и можно пренебрегать электрическим сопротивлением среды и связанными с ним джоулевыми потерями (стр. 383), а также диссипацией энергии магнитного поля.

6° Для идеальной среды ( $\eta = \zeta = K = 0$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ ) в предположении, что теплообмен с окружением несуществен, т.е. движение среды совершается адиабатически, система уравнений магнитной гидродинамики принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{vH}], \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad p = p(\rho, T), \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s = 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении  $s$  – энтропия единицы массы среды (стр. 175), и оно выражает сохранение энтропии при адиабатическом движении среды (стр. 326).

7° Первое из уравнений п. 6° (при  $\gamma = \infty$ ) выражает закон сохранения магнитного потока через любую поверхность, движущуюся вместе со средой. Это позволяет ввести представление о магнитных силовых линиях, «скрепленных» со средой, «замороженных» в среду. В этом смысле магнитная силовая линия является линией, связанной с частицами среды и перемещающейся вместе с ними.

8° Для несжимаемой жидкости (стр. 311) уравнения магнитной гидродинамики с помощью переменных

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

записываются в симметричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{u} &= -\text{grad } \Phi + \Delta(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}), \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{w} &= -\text{grad } \Phi + \Delta(\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{u}), \end{aligned}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0,$$

где

$$\Phi = \frac{p}{\rho} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{w})^2}{8}, \quad \alpha = \frac{\nu + \nu_m}{2}, \quad \beta = \frac{\nu - \nu_m}{2},$$

$\nu = \eta/\rho$  – кинематическая вязкость (стр. 320),  $\nu_m$  – «магнитная вязкость» (стр. 512, п. 4°). В этой записи плотность

полной энергии имеет вид:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{4} (u^2 + w^2);$$

разность кинетической и магнитной энергий равна

$$\frac{\rho v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{2} (\mathbf{u}\mathbf{w}).$$

9° В магнитной гидродинамике не выполняется теорема Томсона о сохранении циркуляции скорости в идеальной жидкости (стр. 325). В присутствии магнитного поля циркуляция скорости по материальному контуру сохраняется лишь в том частном случае, если сила  $\mathbf{f}_{эл}$ , отнесенная к единице массы, обладает потенциалом:

$$\text{rot} \left\{ \frac{1}{\rho} [\text{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}] \right\} = 0.$$

## 2. Магнитогидродинамические волны

1° При взаимодействии электромагнитных и гидродинамических явлений малые нарушения стационарного движения среды распространяются в ней в виде *магнитогидродинамических волн*. В общем случае эти волны нельзя подразделять на продольные и поперечные (стр. 534).

2° В случае идеальной среды и малых амплитуд магнитогидродинамических волн их частоты  $\omega_0$  находятся из уравнения

$$\omega_0^2 [\omega_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{u})^2] [\omega_0^4 - k^2(c_{зв}^2 + u^2) \omega_0^2 + k^2 c_{зв}^2 (\mathbf{k}\mathbf{u})^2] = 0,$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор (стр. 541),  $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$ ,  $c_{зв}$  — скорость звука в среде в отсутствие магнитного поля (стр. 535). Это уравнение имеет четыре различных решения  $\omega_0$  и определяет четыре типа магнитогидродинамических волн, распространяющихся в среде каждая со своей фазовой скоростью  $V = \omega_0/k$  (стр. 540).

3° Решение

$$\omega_0 = 0$$

соответствует возмущению, неподвижному относительно среды, т. е. переносящемуся вместе со средой при ее движении. Такая волна называется *энтропийной*; в ней изменяются лишь плотность и энтропия среды. Появление волны в этом случае условно, так как скорость ее распространения  $V = 0$ .

4° Решение

$$\omega_0 = \pm (\mathbf{k}\mathbf{u}), \quad V = \pm \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и магнитного поля, соответствует нарушениям скорости движения среды и напряженности магнитного поля в ней; термодинамические характеристики среды в этом случае остаются неизменными. Такая волна называется *магнитогидродинамической* в узком смысле. Эти волны являются чисто поперечными; колебания в них происходят в направлениях, перпендикулярных к направлению первоначального магнитного поля. Распространение этих волн не сопровождается изменениями плотности и возможно как в сжимаемой, так и в несжимаемой среде. Групповая скорость (стр. 569) таких волн не зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  и всегда равна  $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$ . Следовательно, направление распространения магнитогидродинамической волны (понимаемое как направление переноса ее энергии), совпадает с направлением первоначального магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

5° Решения биквадратного уравнения и, 2° описывают также *магнитозвуковые волны*, распространяющиеся с двумя различными скоростями:

$$V_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ c_{зв}^2 + u^2 \pm \sqrt{(c_{зв}^2 + u^2)^2 - 4c_{зв}^2 u^2 \cos^2 \theta} \right\},$$

причем

$$\max(u^2, c_{зв}^2) \leq V_+^2 \leq c_{зв}^2 + u^2,$$

$$0 \leq V_-^2 \leq \min(u^2 \cos^2 \theta, c^2).$$

Первое из этих решений соответствует *ускоренной*, а второе — *замедленной* магнитозвуковой волне по сравнению с обычной звуковой или магнитогидродинамической волной. Единственной неизменной величиной в магнитозвуковых волнах является энтропия. Эти волны не являются ни чисто продольными, ни чисто поперечными.

При  $\theta = 0$  ускоренная магнитозвуковая волна переходит в обычную звуковую, если  $c_{зв} > u$ , или в магнитогидродинамическую, если  $c_{зв} < u$ ; замедленная магнитозвуковая волна в тех же условиях переходит, соответственно, в магнитогидродинамическую или звуковую волну. При  $\theta = \pi/2$  скорости распространения магнитогидродинамической и замедленной магнитозвуковой волн

обращаются в нуль и обе эти волны сводятся к слабому тангенциальному разрыву (стр. 517).

6° В общем случае волн значительной амплитуды или значительных магнитных полей разделение волн на магнитогиродинамические и обычные звуковые невозможно. В несжимаемой жидкости ( $c_{\text{зв}} \rightarrow \infty$ ) остается один тип плоских волн с двумя независимыми направлениями поляризации (стр. 568). Вектор  $\mathbf{v}$  скорости движения среды и вектор  $\mathbf{h}$  отклонения магнитного поля в среде от первоначального однородного поля перпендикулярны к волновому вектору  $\mathbf{k}$  и связаны соотношением

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

(волны Альфвена).

### 3. Разрывы и ударные волны

1° В магнитной гидродинамике *поверхностью разрыва* называется материальная поверхность в электропроводящей среде, на которой претерпевают скачок значения либо термодинамических, либо электромагнитных, либо и тех и других величин, характеризующих среду.

2° На поверхности разрыва в проводящей среде выполняются следующие соотношения:

$$\{v_n \mathbf{H}_\tau - v_\tau H_n\} = 0, \quad \{H_n\} = 0,$$

$$\left\{ \rho v_n \left( \frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} [H^2 v_n - (\mathbf{vH}) H_n] \right\} = 0,$$

$$\{\rho v_n\} = 0, \quad \left\{ p + \rho v_n + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0,$$

$$\left\{ \rho v_n v_\tau - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_\tau \right\} = 0,$$

где фигурные скобки обозначают разность соответствующих величин по обе стороны поверхности разрыва, обозначаемых индексами 1 и 2 (например, условие  $\{H_n\} = 0$  эквивалентно условию  $H_{1n} - H_{2n} = 0$  или  $H_{1n} = H_{2n}$ ); индексы  $n$  и  $\tau$  соответствуют нормальной и тангенциальной относительно поверхности разрыва компонентам векторов (или их проекциям на эти направления); прочие обозначения см. на стр. 512.

3° Если поверхность разрыва неподвижна относительно среды, т. е.  $v_n = 0$ , а  $H_n \neq 0$ , то

$$j = \rho v_n = 0, \quad \{v_\tau\} = 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad \{\mathbf{H}_\tau\} = 0.$$

Вместе с  $\rho$  испытывают скачки  $s$ ,  $T$  и другие термодинамические величины. Такой разрыв называется *контактным*. Поверхность разрыва представляет собой границу раздела между двумя неподвижными средами с различными значениями  $\rho$  и  $T$ .

4° Если  $v_n = 0$ ,  $H_n = 0$ , то имеют место соотношения:

$$j = 0, \quad \{v_\tau\} \neq 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \left\{ p + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad \{\mathbf{H}_\tau\} \neq 0.$$

Скорость и напряженность магнитного поля параллельны поверхности разрыва и могут испытывать на ней скачки, произвольные по величине и по направлению. Такой разрыв называется *тангенциальным*. Он возможен как в сжимаемой, так и в несжимаемой среде. Скачок давления связан со скачком напряженности магнитного поля соотношением

$$P_2 - P_1 = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}_2^2 - \mathbf{H}_1^2).$$

Скачки прочих термодинамических величин определяются через скачки  $p$  и  $\rho$  с помощью уравнения состояния (стр. 512).

5° При условии  $\{\rho\} = 0$  имеют место соотношения:

$$j \neq 0, \quad \{v_\tau\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad H_n \neq 0;$$

на поверхности раздела непрерывны все термодинамические величины, а также  $H_n^2$ . Такой разрыв называется *вращательным*. Магнитное поле поворачивается вокруг нормали к поверхности разрыва, не меняясь по абсолютной величине ( $|\mathbf{H}_\tau| = \text{const}$ ).

Возможны также разрывы, соединяющие в себе свойства тангенциальных и вращательных. В этих разрывах  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  остаются касательными к поверхности разрыва и лишь поворачиваются в своей плоскости, не меняясь по абсолютной величине.

6° Разрыв, в котором  $v_n \neq 0$ , называется *перпендикулярной ударной волной*. В ней выполняется условие:  $\{v_\tau\} = 0$ . Если  $H_n = 0$ , то можно записать соотношения на поверхности разрыва в системе координат, в которой

$\mathbf{v}_{1\tau} = \mathbf{v}_{2\tau} = 0$ , положив  $v = v_n$ ,  $H = H_\tau$ :

$$\left\{ \frac{H}{e} \right\} = 0, \quad \{ \rho v \} = 0,$$

$$\left\{ \frac{v^2}{2} + w + \frac{H^2}{4\pi e} \right\} = 0, \quad \left\{ p + \rho v^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0.$$

Разрыв представляет собой плоскую ударную волну сжатия, направление распространения которой перпендикулярно к направлению магнитного поля.

При  $H = 0$  перпендикулярная ударная волна переходит в обычную гидродинамическую ударную волну (стр. 559). Перпендикулярная ударная волна малой амплитуды совпадает с ускоренной магнитозвуковой волной (стр. 515), распространяющейся поперек магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ) со скоростью  $V_+^2 = c_{зв}^2 + u^2$ .

В случае  $H_n \neq 0$  в системе координат, в которой  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$  и которая движется параллельно поверхности разрыва со скоростью

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} - \frac{v_n}{H_n} \mathbf{H},$$

на поверхности разрыва выполняются соотношения:

$$\{ H_n \} = 0, \quad \left\{ -\frac{v^2}{2} + w \right\} = 0, \quad \{ \rho v_n \} = 0,$$

$$\left\{ p + \rho v_n^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_n \mathbf{v}_\tau - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_\tau \right\} = 0.$$

7° Разрыв, в котором плотность среды претерпевает скачок:

$$\{ \rho \} \neq 0, \quad j \neq 0,$$

называется *наклонной ударной волной*. В разрывах этого типа ударная волна сжатия сложным образом взаимодействует с магнитным полем. В случае  $\mathbf{H}_\tau = 0$ ,  $H_n \neq 0$  наклонная ударная волна переходит в *параллельную ударную волну*, распространяющуюся вдоль направления магнитного поля и не взаимодействующую с ним. В случае малых амплитуд наклонные ударные волны переходят в магнитозвуковые — либо в ускоренную, либо в замедленную (стр. 515).

8° Уравнение *ударной адиабаты* (адиабаты Гюгонно, стр. 560) в магнитной гидродинамике:

$$u_2 - u_1 + \frac{1}{2} (p_2 + p_1) \left( \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right) + \frac{1}{16\pi} \left( \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right) (H_{2\tau} - H_{1\tau})^2 = 0,$$

где  $u$  — удельная внутренняя энергия газа.

Скачок энтропии в ударной волне малой амплитуды:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T} \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{e}}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 - \frac{1}{16\pi T} \left( \frac{\partial \frac{1}{e}}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) (H_{2\tau} - H_{1\tau})^2.$$

## ГЛАВА 13

### ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### 1. Принцип относительности Эйнштейна

1° Принцип относительности утверждает, что все законы физики одинаковы во всех инерциальных координатных системах (стр. 33). Это означает, что если для одной из этих систем справедлив какой-либо закон физики, то в той же самой форме этот закон выражается во всех координатных системах, движущихся относительно первой прямолинейно и равномерно.

2° В классической механике Ньютона описание взаимодействия тел с помощью потенциальной энергии предполагает мгновенное распространение взаимодействий. В действительности существует максимальная конечная скорость  $c$  распространения взаимодействия, причем в природе невозможно взаимодействие со скоростью, превышающей  $c$ . Максимальная скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной, одинаковой во всех инерциальных системах; она равна скорости распространения света в вакууме (*инвариантность скорости света*). Соединение принципа относительности с утверждением о конечности максимальной скорости распространения взаимодействий называется *специальным принципом относительности Эйнштейна*.

3° В классической механике время (в отличие от координат) считается не зависящим от системы отсчета. Два события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, считаются одновременными в любой

другой инерциальной системе отсчета. Это противоречит специальному принципу относительности, из которого следует *относительность одновременности событий*. В самом деле, из закона сложения скоростей в классической механике (стр. 30), примененного к распространению света, следует, что скорость света должна быть различной в разных инерциальных системах. Она, например, должна быть различной в направлениях движения Земли и в противоположном направлении. Это противоречит опыту, который показывает, что скорость света не зависит от направления его распространения.

4° Согласно специальному принципу относительности время протекает различно в разных системах отсчета, и утверждение о промежутке времени между двумя событиями имеет смысл только при указании системы отсчета.

Например, пусть система координат  $X'Y'Z'$  движется с постоянной скоростью  $V$  относительно системы  $XYZ$  вдоль оси  $X$  (рис. IV.13.1). Световой сигнал, достигший одновременно (в системе  $X'Y'Z'$ ) равноудаленных от  $A$

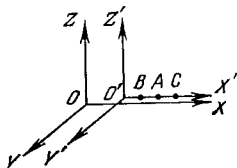


Рис. IV.13.1.

точек  $B$  и  $C$ , в системе  $XYZ$  достигнет точки  $B$ , движущейся к нему навстречу, раньше, чем точки  $C$ , которая «уходит» от него (скорость сигнала  $c$  в обеих системах координат во всех направлениях одинакова).

## 2. Интервалы

1° *Четырехмерным пространством* называется воображаемое пространство четырех измерений, на осях которого откладываются три координаты  $x, y, z$  и время  $t$ . Любое событие изображается точкой в четырехмерном пространстве (*мировая точка*). Движению некоторой частицы в пространстве и во времени соответствует линия в четырехмерном пространстве (*мировая линия*).

2° Если  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  — координаты двух событий в четырехмерном пространстве, то величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

называется *интервалом* между двумя событиями.

Интервал между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2},$$

где  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

Откладывая на оси времени вместо  $t$  переменную  $\tau = ict$ , можно величину  $-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2$  рассматривать как квадрат элемента длины в четырехмерном пространстве.

3° Интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета (*инвариантность интервала*). Инвариантность интервала является математическим выражением постоянства скорости света. Понятие интервала позволяет изучать пространственно-временные соотношения между событиями, устанавливать причинно-следственные связи между ними.

4° Если  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  — мировые точки двух событий в некоторой системе отсчета  $K$ , то при условии  $s_{12}^2 > 0$  (вещественность интервала) существует такая система отсчета  $K'$ , где оба события происходят в одном месте пространства ( $x'_1 = x'_2, y'_1 = y'_2, z'_1 = z'_2$ ). Вещественные интервалы называются *временноподобными*. Время  $t'_{12} = t_2 - t_1$ , прошедшее между обоими событиями в системе  $K'$ , равно  $t'_{12} = s_{12}/c$ . Условие

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{const} > 0,$$

где  $t_{12} = t_2 - t_1$ ,  $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ , можно представить графически в виде гиперболы, если по осям координат (рис. IV.13.2) отложить  $l = l_{12}$  и  $ct = ct_{12}$ , где  $l_{12}$  и  $t_{12}$  соответствуют двум данным событиям в произвольной инерциальной системе отсчета. Точки  $A$  и  $A_1$  отвечают событиям 2, происходящим в той же точке пространства, что и событие 1 (точка  $O$ ), но позже него (точка  $A$ ), либо раньше него (точка  $A_1$ ). Например, событие 2 — следствие события 1 (точка  $A$ ) — *причинная связь* событий. Если два события, происходящие в некоторой системе координат в одной точке про-

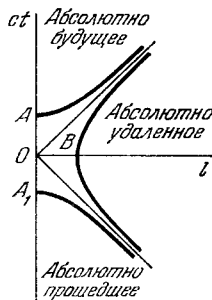


Рис. IV.13.2.

странства, причинно связаны, то и в любой другой инерциальной системе они связаны точно так же (например, включение в электрическую цепь гальванометра и отклонение его стрелки). Причинно связанные события могут происходить и не в одной точке пространства, но так, что следствие связано с причиной некоторым процессом распространения (например, включение электрического освещения и загорание лампочки). Двум причинно связанным событиям соответствует одна ветвь гиперболы. Область выше верхней асимптоты гиперболы называется «абсолютно будущим» по отношению к начальному событию  $O$ . Последовательность причин и следствий определяется направлением времени. Оно носит объективный характер, и, следовательно, теория относительности не противоречит объективному характеру причинности.

5° Существуют события, интервал между которыми мнимый:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 < 0.$$

Мнимые интервалы называются *пространственно-подобными*. Они связывают такие события, что  $c^2 t_{12}^2 < l_{12}^2$  (например, два события, происшедшие одновременно на двух планетах при условии  $ct_{12} < l_{12}$ ). Ни в одной системе координат такие события не происходят в одной и той же точке пространства. Они происходят в области, абсолютно удаленной относительно начала отсчета  $O$  (рис. IV.13.2). Временная последовательность таких событий неоднозначна: существуют такие системы координат, где одно из событий происходит позже другого, и такие системы, где первое событие опережает второе. В одной системе отсчета оба события происходят одновременно (точки  $O$  и  $B$  на рис. IV.13.2). Понятие одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства и разделенных мнимым интервалом, носит относительный характер. Например, событие  $B$  (рис. IV.13.2) лежит на гиперболе, которая относительно  $O$  находится и в прошлом, и в будущем. События  $O$  и  $B$  причинно не связаны.

6° Для асимптот к гиперболам  $l = \pm ct$  и  $s^2 = 0$ . Асимптоты описывают события, связанные распространением электромагнитных сигналов. Для таких событий в любых системах отсчета, в силу инвариантности скорости света,  $s = 0$ . Геометрическое место нулевых интервалов в четырехмерном пространстве  $(x, y, z, ict)$  называется *световым конусом* для заданной мировой точки  $O$ .

### 3. Преобразования Лоренца и их следствия

1° Релятивистские формулы преобразования координат, которые удовлетворяют требованию инвариантности интервала (стр. 520), называются *преобразованиями Лоренца*. Они выражают переход от инерциальной системы отсчета  $K$  к системе  $K'$ , которая движется относительно  $K$  со скоростью  $V$  вдоль положительного направления оси  $X$ . Преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Преобразования Лоренца симметричны и сохраняют свой вид при переходе от  $K'$  к  $K$  с переменной знака у  $V$ :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Преобразования Лоренца линейны и переходят при малых скоростях ( $V/c \ll 1$ ) в преобразования Галилея (стр. 45).

2° Инвариантность физической теории относительно преобразований Лоренца — *релятивистская инвариантность (лоренц-инвариантность)* — является необходимым условием правильности этой теории. Отсутствие релятивистской инвариантности какого-либо физического закона означает, что он должен различно формулироваться в разных инерциальных системах отсчета, что, в нарушение принципа относительности, делает инерциальные системы неравноценными. Нарушение лоренц-инвариантности физической теории указывает, что данная теория является в лучшем случае приближенной, справедливой с определенной точностью лишь при некоторых условиях. Например, уравнение Шредингера (стр. 718) — основное уравнение нерелятивистской квантовой механики (стр. 715) — релятивистски неинвариантно и имеет вполне определенную область применения. Уравнения релятивистской динамики (стр. 526) релятивистски инвариантны и при  $v \ll c$  переходят в уравнения механики Ньютона, релятивистски неинвариантной и справедливой лишь при  $v \ll c$ .

3° Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с системой, называется ее *собственным временем*. В этой системе отсчета  $ds = c dt'$ . Из формул Лоренца следует связь между промежутком собственного времени  $dt'$  и промежутком времени  $dt$  в системе отсчета, относительно которой рассматривается движение со скоростью  $V$ :

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Собственное время, отмечаемое движущимся наблюдателем, всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Для неподвижного наблюдателя движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пример. Среднее собственное время жизни положительного  $\mu$ -мезона (стр. 871) составляет  $2,20 \cdot 10^{-6}$  сек. Средний путь такой частицы, движущейся со скоростью, близкой к  $c$ , должен составлять в воздухе 660 м. В действительности средний путь в воздухе  $\mu$ -мезонов значительно больше, потому что среднее время жизни, измеренное в неподвижной системе, связанной с Землей (воздухом), значительно больше  $2,20 \cdot 10^{-6}$  сек.

4° Из преобразований Лоренца следует сокращение движущегося масштаба длины в направлении движения (*лоренцево сокращение*):

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где  $\Delta x$  — масштаб длины, покоящийся в системе  $K$ ;  $\Delta x'$  — тот же масштаб длины, измеренный в системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $V$  относительно системы  $K$ .

*Собственной длиной* называется линейный размер  $l_0$  тела в той системе координат, где оно покоится ( $l_0 = \Delta x$ ). Длина  $l$  того же тела, измеренная в движущейся относительно него системе отсчета  $K'$ , уменьшается в отношении  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поперечные размеры движущегося тела не изменяются, т. е.

$$\Delta y = \Delta y' \quad \text{и} \quad \Delta z = \Delta z'.$$

#### 4. Преобразование скорости

1° Проекции скорости  $v$  тела по осям координат в неподвижной системе  $K$  связаны с проекциями его скорости  $v'$  в системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $V$  вдоль положительного направления оси  $X$ :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

Эти формулы представляют собой *закон сложения скоростей в теории относительности*. При  $c \rightarrow \infty$  они переходят в закон сложения скоростей классической механики (стр. 30):

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z.$$

При движении тела вдоль оси  $X$  ( $v_x = v$ ,  $v_y = v_z = 0$ ,  $v'_x = v'$ ,  $v'_y = v'_z = 0$ )

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

Формулы перехода от  $v$  к  $v'$  отличаются от приведенных знаком при  $V$ . Если, в частности,  $v = c$ , то и  $v' = c$ . Сумма двух скоростей, меньших или равных  $c$ , есть скорость, не большая  $c$ . Из преобразования Лоренца следует, что всегда  $v < c$ . Исключение составляет скорость фотонов (стр. 698), равная  $c$ .

2° При  $V/c \ll 1$  и произвольной скорости  $v$ , с точностью до членов порядка  $V/c$ , справедлива приближенная формула

$$v = v' + V - \frac{1}{c^2} (Vv') v'.$$

#### 5. Четырехмерные скорость и ускорение

1° Вектором четырехмерной скорости (*четырёхскоростью*) называется вектор с компонентами:

$$u_j = \frac{dx_j}{ds} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = ict$ ,  $ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ,  $v$  — скорость тела.



$$\text{Например: } u_j = \frac{v_j}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (j = 1, 2, 3), \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Связь компонент четырехскорости:  $\sum_{j=1}^4 u_j^2 = -1$ . Четырехскорость есть величина безразмерная.

2° Четырехмерное ускорение (*четыреускорение*) определяется как вектор с компонентами

$$a_j = \frac{du_j}{ds} = \frac{d^2 x_j}{ds^2} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

### 6. Релятивистская динамика

1° Механика, основанная на специальном принципе относительности, инвариантная относительно преобразований Лоренца, называется *релятивистской*. Релятивистская механика переходит в классическую при условии  $v/c \ll 1$ , где  $v$  — скорость движущегося тела (частицы),  $c$  — скорость света в вакууме.

2° Функция Лагранжа (стр. 91) свободной частицы:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где  $m_0$  — масса частицы, измеренная в той системе координат, где частица неподвижна (*масса покоя*).

3° Вектор  $\mathbf{p}$  механического импульса (количества движения, стр. 38):

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Релятивистское выражение массы:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $m_0$  — масса покоя.

При  $v \rightarrow c$   $m \rightarrow \infty$  и  $p \rightarrow \infty$ , если только  $m_0 \neq 0$ . Зависимость массы от скорости изображена на рис. IV.13.3. Для фотона (стр. 698)  $v = c$  и  $m_0 = 0$ . Импульс фотона определяется в зависимости от его энергии (стр. 529). Скорость, большая  $c$ , приводит к мнимому импульсу (или мнимой массе), что физически бессмысленно.

При  $v/c \ll 1$  выражение для импульса (количества движения) переходит в классическое:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(различие  $m$  и  $m_0$  при  $v/c \ll 1$  несущественно).

В классической механике отношение силы  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$  к ускорению тела  $\mathbf{w}$  постоянно (стр. 39). В релятивистской механике

$$\text{при } \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \quad \mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{w},$$

$$\text{при } \mathbf{F} \parallel \mathbf{v} \quad \mathbf{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \mathbf{w}.$$

4° Полная энергия тела (или частицы) в теории относительности:

$$E = (\mathbf{p}\mathbf{v}) - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2.$$

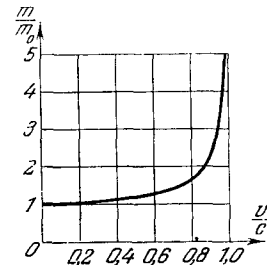


Рис. IV.13.3.

Это выражение называется *законом взаимосвязи массы и энергии* и играет фундаментальную роль в ядерной физике. В частности, при  $v = 0$  энергия покоящегося тела (*энергия покоя*)

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Энергия покоящегося тела, кроме  $\sum_{i=1}^N m_{0i} c^2$  ( $m_{0i}$  — массы покоя частиц тела), содержит кинетическую энергию частиц и потенциальную энергию их взаимодействия. Поэтому

$$m_0 c^2 \neq \sum_{i=1}^N m_{0i} c^2 \quad \text{и} \quad m_0 \neq \sum_{i=1}^N m_{0i}.$$

В релятивистской механике несправедлив закон сохранения массы покоя. Например, масса  $m_0$  частицы, способной к самопроизвольному распаду, больше суммы масс покоя продуктов распада  $m_{01}$  и  $m_{02}$ :

$$m_0 > m_{01} + m_{02}.$$

5° Кинетическая энергия тела (частицы):

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2.$$

При  $v/c \ll 1$  это выражение переходит в классическое:  $T = mv^2/2$  (различие  $m$  и  $m_0$  при  $v/c \ll 1$  несущественно).

6° Функция Гамильтона (стр. 95) для свободной частицы (полная энергия, выраженная через импульс):

$$E = H = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4};$$

при малых скоростях ( $p \ll m_0 c$ )

$$E = H \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}.$$

С точностью до энергии покоя — это классическое выражение функции Гамильтона свободной частицы. Для фотона, не имеющего массы покоя ( $m_0 = 0$ ),

$$E = pc.$$

7° Соотношение между полной энергией  $E$ , импульсом  $p$  и скоростью  $v$  свободной частицы:

$$p = \frac{E v}{c^2}.$$

8° Импульс  $p$  и полная энергия  $E$  в релятивистской механике могут быть представлены как компоненты четырехвектора  $p_i$ :

$$p_i = m_0 c u_i,$$

где  $m_0$  — масса покоя,  $c$  — скорость света в вакууме,  $u_i$  — четырехмерная скорость (стр. 525). Три компоненты четырехвектора  $p_i$  совпадают с компонентами импульса  $p$ , т. е.  $p_1 = p_x$ ;  $p_2 = p_y$  и  $p_3 = p_z$ . Четвертая (временная) компонента связана с полной энергией частицы:

$$p_4 = \frac{iE}{c}.$$

9° При переходе к неподвижной системе координат  $K$  от системы  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно вдоль оси  $X$  со скоростью  $V$ , справедливы преобразования Лоренца для компонент

импульса  $p$  и энергии  $E$ :

$$p_x = \frac{p'_x + E' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + p'_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где  $p_x, p_y, p_z$  — компоненты импульса в системе  $K$ ,  $p'_x, p'_y, p'_z$  — компоненты импульса в системе  $K'$ ,  $E$  и  $E'$  — энергии в системах  $K$  и  $K'$  соответственно.

## 7. Понятие о преобразованиях Лоренца для электромагнитного поля

1° Свойства электромагнитного поля различны в разных инерциальных системах отсчета. В частности, одно из полей — электрическое или магнитное — может отсутствовать в одной системе координат и присутствовать в другой.

2° Формулы преобразований Лоренца для компонент векторов  $E, H, D$  и  $B$  электрического и магнитного полей при переходе к неподвижной системе координат  $K$  от системы  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно вдоль оси  $X$  со скоростью  $V$ , имеют в гауссовой системе вид:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

В системе СИ:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + V B'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - V B'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - V D'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + V D'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$D_x = D'_x, \quad D_y = \frac{D'_y + \frac{V}{c^2} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad D_z = \frac{D'_z - \frac{V}{c^2} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для составляющих векторов, параллельных ( $\parallel$ ) и перпендикулярных ( $\perp$ )  $\mathbf{V}$ , формулы преобразований в векторном виде в системе СИ имеют вид:

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}'_{\parallel}, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{D}' - \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}\mathbf{H}']}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)_{\perp},$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{H}' + [\mathbf{V}\mathbf{D}']}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)_{\perp},$$

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{E}' - [\mathbf{V}\mathbf{B}']}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)_{\perp},$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}\mathbf{E}']}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)_{\perp}.$$

Штрихованные компоненты относятся к системе  $K$ , штрихованные — к системе  $K'$ .

3° При  $V/c \ll 1$ , с точностью до членов порядка  $V/c$ , формулы упрощаются. В векторной форме в системе СИ и в пренебрежении членом  $(\frac{V}{c})^2$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' - \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}\mathbf{H}'], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' + [\mathbf{V}\mathbf{D}'],$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - [\mathbf{V}\mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}\mathbf{E}'].$$

Формулы указывают, что вектор  $\mathbf{H}$  магнитного поля играет роль, аналогичную вектору  $\mathbf{D}$  в электрическом поле, а вектор  $\mathbf{B}$  аналогичен вектору  $\mathbf{E}$ .

В векторной форме в гауссовой системе:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}].$$

Если в системе  $K'$  отсутствует магнитное поле ( $\mathbf{H}' = 0$ ), то в системе  $K$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}].$$

Если же в системе  $K'$  отсутствует электрическое поле ( $\mathbf{E}' = 0$ ), то в системе  $K$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}].$$

В системе отсчета  $K$  напряженности электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны. Наоборот, при взаимной перпендикулярности напряженностей электрического и магнитного полей в некоторой системе отсчета  $K$  существует такая система отсчета  $K'$ , в которой электромагнитное поле имеет одну составляющую — оно либо чисто электрическое, либо чисто магнитное. Скорость  $V$  этой системы определяется по предыдущим формулам.

## 8. Излучение Вавилова — Черенкова

1° Согласно специальной теории относительности, скорость  $v$  движения электрона не может превосходить  $c$  — скорость света в вакууме:  $\beta = v/c < 1$ . При движении электрона (или другой заряженной частицы — протона, мезона и т. д.) в среде с показателем преломления  $n$  (стр. 585) его скорость  $v$  может оказаться больше фазовой скорости света  $c/n$  в данной среде (стр. 585), т. е.  $c/n < v < c$ . В этом случае наблюдается электромагнитное излучение, которое называется *свечением Вавилова — Черенкова*.

Излучение Вавилова — Черенкова аналогично ударным звуковым волнам Маха, возникающим при движении тел со скоростями, превышающими фазовые скорости упругих волн в данной среде (стр. 563).

2° Излучение Вавилова — Черенкова заключено внутри конуса, образующие которого составляют  $\theta$  направлений, вдоль которого движется электрон, угол  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\lambda}{2\lambda} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $\beta = v/c$ ,  $n$  — показатель преломления среды,  $\lambda = h/mv$  — длина де-бройлевской волны движущегося электрона (стр. 715),  $\lambda$  — длина волны излучаемого света.

Излучение возможно при условии  $\beta n > 1$  ( $v > c/n$ ) и ограничено со стороны малых длин волн значением

$\lambda_{\text{мин}}$ , при котором  $\cos \theta = 1$ . Энергия, излучаемая электроном в единицу времени, равна

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \omega \left[ 1 - \frac{1}{n^2 \beta^2} - \frac{1}{n \beta \lambda} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1^2}{4 \lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{n^4} \right) \right] d\omega,$$

где  $\omega = 2\pi c/n\lambda$  — циклическая частота излучения ( $\omega_{\text{макс}} = 2\pi c/n\lambda_{\text{мин}}$ ).

В нерелятивистском случае ( $v/c \ll 1$ ) условие  $\beta n > 1$  означает, что  $n \gg 1$ . В пренебрежении квантовыми поправками (отдачей, получаемой электроном при излучении)  $1/\lambda \rightarrow 0$  и предыдущие формулы упрощаются:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{c}{nv},$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \omega \left[ 1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right] d\omega.$$

$\omega_{\text{макс}}$  определяется из условия  $\beta n(\omega_{\text{макс}}) = 1$ , где  $n(\omega_{\text{макс}})$  учитывает дисперсионную зависимость  $n$  от  $\omega$  (стр. 673).

## 9. Явление Доплера в оптике

1° *Явлением Доплера в оптике* называется изменение частоты световых волн, воспринимаемых наблюдателем, вследствие взаимного движения наблюдателя и источника (о явлении Доплера в акустике см. стр. 552).

2° Если источник и приемник световых волн движутся равномерно по отношению к инерциальной системе отсчета (стр. 33), то наблюдаемая частота света  $\nu$  связана с частотой  $\nu_0$ , наблюдаемой в этой системе при неподвижных источнике и наблюдателе, соотношением

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta},$$

где  $\theta$  — угол между линией наблюдения и направлением движения источника относительно наблюдателя, измеренный в системе координат, связанной с наблюдателем,  $v$  — абсолютная величина скорости относительного движения источника,  $c$  — скорость света в вакууме.

3° При  $\theta = \pi/2$  или  $3\pi/2$  и  $v/c \ll 1$   $\nu = \nu_0$  и эффект Доплера не наблюдается. Если  $\theta = 0$  (взаимное удаление источника и наблюдателя), то  $\nu < \nu_0$ ,  $\lambda > \lambda_0$  — имеет место «красное смещение» спектра видимого света.

Если  $\theta = \pi$  (взаимное сближение источника и наблюдателя), то  $\nu > \nu_0$ ,  $\lambda < \lambda_0$  — происходит «фиолетовое смещение» спектра видимого света.

4° При  $v/c \approx 1$  эффект Доплера наблюдается и при  $\theta = \pi/2$  или  $3\pi/2$ :

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(*поперечный эффект Доплера*). Обнаружение его на опыте явилось одним из подтверждений теории относительности.

5° При  $v/c \approx 1$  эффект Доплера не наблюдается в направлениях, для которых  $\cos \theta = -\frac{1}{\beta} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$ , где  $\beta = v/c$ .

ГЛАВА I  
ОСНОВЫ АКУСТИКИ

1. Введение

1° Волнами называются распространяющиеся в веществе или поле возмущения состояния этого вещества или поля.

Упругими волнами называются распространяющиеся в упругой среде механические возмущения (деформации). Внешние тела, вызывающие эти возмущения в среде, называются источниками волн. Распространение упругих волн состоит в возбуждении колебаний все более и более удаленных от источника волн частиц среды. Важнейшее отличие упругих волн в среде от любого другого упорядоченного движения ее частиц состоит в том, что при малых возмущениях (линейное приближение) распространение волн не связано с переносом вещества <sup>1)</sup>.

2° Упругая волна называется продольной, если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Упругая волна называется поперечной, если частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Поперечные волны могут возникать только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т. е. способна сопротивляться деформации сдвига (стр. 284). Этим свойством обладают лишь твердые тела. Продольные волны связаны с объемной деформацией среды. Поэтому они могут распространяться как в твердых телах, так и в жидких или газообразных средах. Исключением из этого правила являются поверхностные волны, образующиеся на свободной поверхности жидкости или на поверхностях

<sup>1)</sup> В случае сильных возмущений имеет место малый перенос вещества, вызываемый нелинейным характером колебаний частиц среды.

раздела несмешивающихся жидкостей. При этом частицы жидкости одновременно совершают продольные и поперечные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории. Особые свойства поверхностных волн объясняются тем, что в их образовании и распространении определяющую роль играют силы тяжести и поверхностного натяжения.

3° Звуковыми или акустическими волнами называются распространяющиеся в упругой среде слабые возмущения — механические колебания с малыми амплитудами. Раздел физики, в котором рассматриваются свойства звуковых волн, закономерности их возбуждения, распространения и действия на встречные препятствия, называется акустикой.

2. Скорость распространения звуковых волн  
(скорость звука)

1° Скорость волн в жидкостях и газах равна

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где  $K$  — модуль объемной упругости (стр. 284),  $\rho$  — плотность невозмущенной среды. Процесс деформации жидкости или газа при распространении в них звуковых волн может считаться адиабатным (стр. 149). Для идеального газа модуль объемной упругости в адиабатном процессе  $K = \kappa p$ , где  $p$  — давление невозмущенного газа,  $\kappa$  — показатель адиабаты (стр. 160). Скорость звуковых волн в идеальном газе равна

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa B T},$$

где  $T$  — абсолютная температура газа,  $B$  — удельная газовая постоянная (стр. 151).

2° В изотропной твердой среде скорость поперечных волн равна

$$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность; скорость продольных волн равна

$$c_2 = \sqrt{\frac{E\mu}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

где  $E$  — модуль Юнга (стр. 282),  $\mu$  — коэффициент

Пуассона (стр. 283). В твердых средах скорость продольных волн всегда больше скорости поперечных волн.

Скорость продольных волн в тонком стержне, поперечные размеры которого во много раз меньше длины волны (стр. 541):

$$c_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Скорость распространения поперечных волн в струне — тонкой гибкой нити, в которой с помощью внешних сил создано большое натяжение:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{eS}},$$

где  $\sigma = F/S$  — нормальное напряжение,  $F$  — сила натяжения,  $S$  — площадь поперечного сечения струны,  $\rho$  — плотность материала струны.

3° В анизотропных твердых телах упругие свойства неодинаковы по разным направлениям. Поэтому скорости продольных и поперечных волн зависят от направления их распространения, а для поперечных волн — также от их *поляризации*, т. е. от ориентации плоскости, проведенной через вектор скорости волны и вектор смещения частиц среды в рассматриваемой точке (эта плоскость называется *плоскостью колебаний*).

### 3. Волновое уравнение

1° *Теорема Гельмгольца*: всякое однозначное и непрерывное векторное поле  $\mathbf{F}$ , обращающееся в нуль в бесконечности, может быть представлено, и притом единственным образом, в виде суммы градиента некоторой скалярной функции  $\varphi$  и ротора некоторой векторной функции  $\mathbf{A}$ , дивергенция которой равна нулю:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Функция  $\varphi$  называется *скалярным потенциалом поля*  $\mathbf{F}$ , а функция  $\mathbf{A}$  — *векторным потенциалом* этого поля.

2° В случае акустических волн в твердых средах скалярный потенциал  $\varphi$  векторного поля смещений  $\mathbf{S}$  частиц среды из положений их равновесия характеризует продольные упругие волны и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, называемому *волновым*

уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \text{т. е.} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

или

$$\square \varphi = 0,$$

где  $c_1$  — скорость продольных волн (стр. 535),  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\square = \Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  — оператор Даламбера.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  характеризует поперечные упругие волны и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

где  $c_1$  — скорость поперечных волн (стр. 535).

3° Акустические волны в жидкостях и газах<sup>1)</sup> характеризуются скалярным потенциалом  $\varphi$  скоростей  $\mathbf{v}'$  колебательного движения частиц среды (стр. 314):  $\mathbf{v}' = \text{grad } \varphi$ .

Из уравнения неразрывности (стр. 317) и уравнений движения (стр. 318) следует, что для акустических волн, распространяющихся в неподвижной однородной безграничной идеальной жидкости (стр. 311), на которую не действуют массовые силы (стр. 311), потенциал  $\varphi$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где  $c$  — скорость распространения волн (стр. 535). Такому же уравнению удовлетворяет каждая из компонент вектора  $\mathbf{v}'$ .

4° Давление  $p'$  в жидкости, избыточное над равновесным, связано с  $\varphi$  соотношением

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где  $\rho$  — равновесная плотность жидкости. Давление  $p'$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}.$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем под словом «жидкость» понимаются также и газы, которые в механике сплошных сред рассматриваются как сжимаемые жидкости.

5° Отклонение  $\rho'$  плотности жидкости от равновесного значения равно

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

причем для  $\rho'$  также справедливо волновое уравнение

$$\Delta \rho' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

6° Продольная волна называется *плоской*, если потенциал  $\varphi$  и другие величины, характеризующие волновое движение среды, зависят только от времени и одной из пространственных декартовых координат, например от  $x$ .

Волновое уравнение для продольной плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Его общее решение выражается следующим образом:

$$\varphi = f_1(ct - x) + f_2(ct + x),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции, причем  $f_1(ct - x)$  — потенциал для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , а  $f_2(ct + x)$  — потенциал для плоской волны, распространяющейся в противоположном направлении. Обе эти волны, в отличие от стоячих волн (стр. 549), называются *бегущими волнами*.

7° В продольной бегущей плоской волне  $\varphi = f(ct - x)$  вектор смещения частиц среды  $\mathbf{S} = S\mathbf{i}$ , где  $\mathbf{i}$  — орт оси  $Ox$ , а  $S$  — алгебраическое значение смещения, удовлетворяющее волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

В жидкости скорость  $v'$  колебательного движения частиц среды связана с избыточным давлением  $p'$  и изменением плотности  $\rho'$  соотношениями

$$p' = \rho c v' \quad \text{и} \quad \rho' = \frac{\rho v'}{c}.$$

Произведение  $\rho c$  плотности среды на скорость распространения в ней продольных волн называется *волновым сопротивлением среды*.

8° Продольная волна называется *сферической*, если потенциал  $\varphi$  и другие величины, характеризующие волновое движение среды, зависят только от времени и рас-

стояния  $r$  от некоторой точки пространства, называемой *центром волны*. Сферические волны возбуждаются в однородной и изотропной среде точечным источником волн — колеблющимся телом, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек среды.

Волновое уравнение для продольной сферической волны:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Его общее решение имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{r} f_1(ct - r) + \frac{1}{r} f_2(ct + r),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции, причем  $\frac{1}{r} f_1(ct - r)$  — потенциал для расходящейся сферической волны, а  $\frac{1}{r} f_2(ct + r)$  — потенциал для сферической волны, сходящейся к центру.

9° *Принцип суперпозиции волн*: если в среде одновременно распространяется система  $n$  различных волн, описываемых скалярными потенциалами  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  и векторными потенциалами  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ , то потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  результирующей волны равны суммам соответствующих потенциалов всех волн системы:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i.$$

Иными словами, каждая из волн распространяется в среде независимо от других, т. е. так, как если бы их не было. Результирующая скорость, смещение и ускорение каждой частицы среды равны векторным суммам соответствующих величин, обусловленных каждой из волн порознь.

Принцип суперпозиции упругих волн справедлив только для так называемых *линейных сред*, подчиняющихся закону Гука, т. е. в тех пределах, пока скорость распространения волн в среде не зависит от их интенсивности (стр. 544).

#### 4. Продольные синусоидальные волны

1° *Уравнением продольной волны* называется зависимость от координат и времени потенциала  $\varphi$  скорости возмущенного движения среды или какой-либо другой величины, однозначно характеризующей это движение.

2° Продольная волна называется *синусоидальной* (*гармонической*), если колебания частиц среды являются гармоническими с одинаковыми циклическими частотами  $\omega$  (стр. 103), так что

$$\varphi = a(x, y, z) \sin[\omega t - a(x, y, z)],$$

причем функции координат  $a$  и  $a$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta a_1 + k^2 a_1 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta a_2 + k^2 a_2 = 0,$$

где  $a_1 = a \cos \alpha$ ,  $a_2 = a \sin \alpha$ ,  $k = \omega/c$  — *волновое число*,  $c$  — скорость волны,  $\omega$  — циклическая частота волны.

Функция  $a(x, y, z)$  называется *амплитудой волны*, функция  $\Phi(x, y, z, t) = \omega t - a(x, y, z)$  называется *фазой волны*, а  $a(x, y, z)$  — *начальной фазой волны*.

Для синусоидальной волны справедливо уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

3° *Волновой поверхностью* или *фронтом волны* называется геометрическое место точек среды, в которых в рассматриваемый момент времени фаза волны имеет одно и то же значение. Различным значениям фазы соответствует семейство волновых поверхностей. В том случае, когда в среде распространяется кратковременное возмущение, фронтом волны называется граница между возмущенной и невозмущенной областями среды.

Уравнение семейства волновых поверхностей имеет вид

$$\omega t - a = C,$$

где  $C$  — константа, играющая роль параметра.

Волновые поверхности непрерывно перемещаются в среде и, вообще говоря, при этом деформируются. В случае однородной и изотропной среды скорость каждой точки волновой поверхности направлена по нормали к поверхности и численно равна скорости волны  $c$  (стр. 535), называемой *фазовой скоростью* волны.

4° Волновые поверхности плоской волны (стр. 538) представляют систему параллельных плоскостей. В однородной изотропной среде волновые поверхности плоской волны перпендикулярны к направлению распространения волны (направлению переноса энергии), называемому *лучом*. В анизотропных средах угол между лучом и волновой поверхностью равен  $90^\circ$  лишь для некоторых, вполне

определенных направлений распространения плоской волны.

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , имеет вид

$$\varphi = a \sin(\omega t - kx + a_0),$$

а для волны, распространяющейся в противоположном направлении,

$$\varphi = a \sin(\omega t + kx + a_0),$$

где  $a_0$  — начальная фаза колебаний точек среды, принадлежащих координатной плоскости  $yOz$ . Если волна распространяется в идеальной среде, лишенной внутреннего трения и теплопроводности, то амплитуда волны  $a$  не зависит от  $x$ .

5° Характеристикой синусоидальной волны является *длина волны*  $\lambda$ , равная расстоянию между двумя ближайшими точками среды, для которых разность начальных фаз волны равна  $2\pi$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT = \frac{c}{\nu},$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — *период волны*,  $\nu = 1/T$  — *частота волны*.

6° Экспоненциальная форма записи уравнения плоской синусоидальной волны:

$$\varphi = A e^{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]},$$

где  $A = ae^{i\alpha}$  — *комплексная амплитуда*,  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$ ,

$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$  — *волновой вектор*,  $\mathbf{n}$  — *единичный вектор*, указывающий направление распространения волны,  $\mathbf{r}$  — *радиус-вектор*, проведенный в рассматриваемую точку среды,  $i = \sqrt{-1}$ .

Экспоненциальная форма записи удобна для дифференцирования в волновых линейных уравнениях. Однако физический смысл имеет только вещественная часть экспоненциального выражения:

$$\varphi = \text{Re} \{ A e^{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]} \}$$

(символ  $\text{Re}$  означает вещественную часть комплексного выражения), к которой переходят при нахождении физических величин.

7° Произвольная волна может быть представлена в виде совокупности плоских синусоидальных волн с



различными волновыми векторами, частотами, амплитудами и начальными фазами. Такое представление основано на возможности разложения периодической функции в ряд Фурье или выражения непериодической функции с помощью интеграла Фурье (стр. 679), а также на принципе суперпозиции волн (стр. 539). Совокупность синусоидальных волн, в результате наложения которых получается рассматриваемая волна, называется *спектром* последней. Совокупности значений амплитуд и частот этих синусоидальных волн называются соответственно *спектром амплитуд* и *спектром частот*.

8° Волновые поверхности сферической волны (стр. 538) представляют собой систему концентрических сфер. Уравнение расходящейся синусоидальной сферической волны:

$$\varphi = \frac{a_0}{r} \sin(\omega t - kr + a_0),$$

где  $a_0$  — начальная фаза колебаний источника волны,  $r$  — расстояние от источника,  $a_0$  — амплитуда колебаний в точках среды, находящихса на расстоянии  $r_0 = 1$ .

В экспоненциальной форме уравнение сферической волны имеет вид

$$\varphi = A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r},$$

где  $\frac{A}{r} = \frac{a_0}{r} e^{ia}$  — комплексная амплитуда,  $a = \frac{\pi}{2} - a_0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Везде, кроме особой точки  $r = 0$ , функция  $\varphi$  удовлетворяет волновому уравнению  $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ .

9° Волна называется *цилиндрической*, если ее волновые поверхности имеют вид круговых цилиндрических поверхностей с общей осью симметрии. Вдали от этой оси уравнение расходящейся цилиндрической волны имеет вид

$$\varphi = \frac{a_0}{\sqrt{R}} \sin(\omega t - kR + a_0),$$

где  $R$  — расстояние от оси,  $a_0$  и  $a_0$  — постоянные величины,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. В экспоненциальной форме:

$$\varphi = A \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{\sqrt{R}},$$

где  $\frac{A}{\sqrt{R}} = \frac{a_0}{\sqrt{R}} e^{ia}$  — комплексная амплитуда,  $a = \frac{\pi}{2} - a_0$ .

## 5. Энергия акустических волн

1° Объемной плотностью  $w$  энергии среды называется предел отношения энергии  $\Delta W$  среды, заключенной в объеме  $\Delta V$ , к величине этого объема при  $\Delta V$ , стремящемся к нулю:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

2° Объемная плотность энергии акустических волн в жидкости равна разности между объемными плотностями энергии жидкости в возмущенном и невозмущенном состояниях. Она выражается следующей формулой:

$$w = \frac{\rho v'^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho} = \frac{\rho}{2} \left[ (\text{grad } \varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

где  $\rho$  — плотность невозмущенной жидкости,  $c$  — скорость волны,  $v'$  — скорость колебательного движения частиц жидкости. Первый член представляет собой объемную плотность кинетической энергии частиц жидкости, а второй — объемную плотность потенциальной энергии деформации жидкости.

3° В случае продольной плоской волны (стр. 538)

$$\rho v'^2 = \frac{c^2 \rho'^2}{\rho} \quad \text{и} \quad w = \rho v'^2.$$

Если плоская волна является синусоидальной, т. е.  $\varphi = a \sin(\omega t - kx + a_0)$ , то

$$w = \rho k^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + a_0) = \rho \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + a_0),$$

где  $a_s = a/c$  — амплитуда колебаний частиц среды.

Для произвольной продольной волны

$$\overline{w'^2} = \frac{c^2}{\rho} \overline{\rho'^2} \quad \text{и} \quad \overline{w} = \rho \overline{v'^2},$$

где

$$\overline{v'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v'^2 dt, \quad \overline{\rho'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho'^2 dt \quad \text{и} \quad \overline{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt$$

— средние значения в интервале времени, равном периоду  $T$  волны.

4° Распространение волн в неограниченной упругой среде представляет собой вовлечение в колебательное движение все более и более удаленных от источника волн областей среды. На это необходимо затрачивать энергию,

доставляемую источником воли и передаваемую от одних участков среды к другим.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \mathbf{U} = 0,$$

где  $\mathbf{U} = p' \mathbf{v}'$  — вектор плотности потока энергии акустических волн (*вектор Умова*);  $p'$  — давление в жидкости, избыточное над равновесным. Для плоской волны  $\mathbf{U} = w\mathbf{e} = \rho v'^2 \mathbf{e}$ , где  $\mathbf{e}$  — вектор скорости распространения волны.

5° *Интенсивностью  $I$  акустической волны (сила звука)* называется количество энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны:

$$I = |\bar{\mathbf{U}}| = |\overline{p' \mathbf{v}'}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T p' \mathbf{v}' dt \right|.$$

Интенсивность синусоидальной волны (стр. 540) пропорциональна квадрату ее амплитуды:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega | \text{grad } a | a^2 = \frac{1}{2} \rho c k | \text{grad } a | a^2,$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число. Для плоской и сферической синусоидальных волн  $| \text{grad } a | = k$  и

$$I = \frac{1}{2} \rho c k^2 a^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{c}{c} \omega^2 a^2, \quad I = \frac{p_{\text{max}}^2}{\rho c},$$

где  $p_{\text{эфф}} = \sqrt{p'^2} = \sqrt{p'_{\text{max}}^2/2}$  — *среднеквадратичное (эффективное) звуковое давление* синусоидальной волны,  $p'_{\text{max}}$  — амплитуда избыточного давления среды, обусловленного волновым движением последней.

6° *Потоком энергии волны* сквозь некоторую поверхность  $S$  называется количество энергии  $dS$ , передаваемой сквозь эту поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \int_S I dS \cos \beta = \int_S I dS_n,$$

где  $\beta$  — угол между нормалью к площадке  $dz$  и направлением распространения волны,  $dS_n = dS \cos \beta$  — площадь проекции площадки  $dS$  на плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны ( $dS_n < 0$  при  $\pi/2 < \beta < 3\pi/2$ ).

## 6. Отражение и преломление продольных акустических волн (в отсутствие дифракционных явлений)

1° Если акустическая волна, распространяющаяся в некоторой среде 1, достигает границы раздела этой среды с другой средой 2, то возникают отраженная и преломленная волны. *Отраженной* называется волна, распространяющаяся от границы раздела в той же среде 1, что и первичная (падающая) волна. *Преломленной* называется волна, распространяющаяся во второй среде.

*Углом падения* называется угол  $i$  (рис. V.1.1) между направлением распространения падающей волны (падающим лучом  $SO$ ) и перпендикуляром  $ON$  к поверхности раздела двух сред в рассматриваемой точке падения  $O$ . *Углом отражения* называется угол  $i'$  между направлением распространения отраженной волны (отраженным лучом  $OS'$ ) и перпендикуляром  $ON$ . *Углом преломления* называется угол  $r$  между направлением распространения преломленной волны (преломленным лучом  $OS''$ ) и перпендикуляром  $OM$ .

2° *Законы отражения:*

а) отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к поверхности раздела сред, проведенной в точке падения;

б) угол отражения равен углу падения:  $i' = i$ .

3° *Законы преломления:*

а) преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к поверхности раздела сред, проведенной в точке падения;

б) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей волн в первой и второй средах:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21},$$

где  $n_{21}$  — показатель преломления второй среды по отношению к первой (*относительный показатель преломления*).

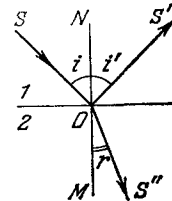


Рис. V.1.1.

4° Соотношения между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн определяются граничными условиями: на поверхности раздела двух жидких сред должны быть одинаковы значения избыточных давлений в обеих средах, а также значения нормальных компонент скоростей колебательного движения частиц.

Для плоских волн и плоской границы раздела имеют место следующие соотношения (в отсутствие поглощения):

$$\varrho_1(A_1 + A'_1) = \varrho_2 A_2, \quad \frac{\cos i}{c_1} (A_1 - A'_1) = \frac{\cos r}{c_2} A_2,$$

где  $A_1$ ,  $A'_1$  и  $A_2$  — комплексные амплитуды потенциалов скорости для падающей, отраженной и преломленной волн,  $i$  и  $r$  — углы падения и преломления,  $\varrho_1$  и  $\varrho_2$  — плотности сред,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости волн в этих средах;

$$A'_1 = \frac{\varrho_2 c_2 \cos i - \varrho_1 c_1 \cos r}{\varrho_2 c_2 \cos i + \varrho_1 c_1 \cos r} A_1, \quad A_2 = \frac{2\varrho_1 c_2 \cos i}{\varrho_2 c_2 \cos i + \varrho_1 c_1 \cos r} A_1,$$

или

$$A'_1 = \frac{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg} r}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \operatorname{ctg} i} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \operatorname{ctg} i} A_1$$

Если  $\varrho_1 = \varrho_2$ , то  $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)}$ . Если  $\varrho_1 c_1^2 = \varrho_2 c_2^2$  (одинаковы упругости сред), то  $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}$ .

5° Отраженная плоская волна полностью отсутствует при условии

$$\operatorname{ctg}^2 i = \frac{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2} = \frac{(c_1^2 - c_2^2) \varrho_1^2}{(\varrho_2 c_2)^2 - (\varrho_1 c_1)^2},$$

которое осуществимо, когда  $c_1 > c_2$ , а  $\varrho_2 c_2 > \varrho_1 c_1$  или, наоборот,  $c_1 < c_2$ , а  $\varrho_2 c_2 < \varrho_1 c_1$ . В случае нормального падения ( $i = r = 0$ )  $A'_1 = 0$ , если  $\varrho_2 c_2 = \varrho_1 c_1$ .

6° Преломленная плоская волна полностью отсутствует, если  $c_2 > c_1$  и  $i > i_{\text{пр}}$ , где  $i_{\text{пр}}$  — предельный (критический) угол, определяемый из соотношения

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}.$$

Это явление называется полным внутренним отражением.

7° Фазовые соотношения для случая нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела сред. Если  $\varrho_2 c_2 > \varrho_1 c_1$ , то на границе раздела сред разность фаз между отраженной и падающей волнами равна нулю для потенциалов скорости (их амплитуды  $A'_1$  и  $A_1$  совпадают по знаку) и избыточных давлений и равна  $\pi$  для скоростей колебательного движения частиц среды.

Если  $\varrho_2 c_2 < \varrho_1 c_1$ , то на границе раздела сред разность фаз между отраженной и падающей волнами равна  $\pi$  для потенциалов скорости (их амплитуды  $A'_1$  и  $A_1$  противоположны по знаку) и для избыточных давлений; она равна нулю для скоростей колебательного движения частиц среды.

Разность фаз для любых однородных величин в преломленной и падающей волнах равна нулю на границе раздела сред независимо от свойств этих сред и величины угла падения.

8° Коэффициентом отражения  $R$  называется отношение интенсивностей отраженной и падающей волн. Для плоской волны

$$R = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{(\varrho_2 \operatorname{tg} r - \varrho_1 \operatorname{tg} i)^2}{(\varrho_2 \operatorname{tg} r + \varrho_1 \operatorname{tg} i)^2} = \left( \frac{\varrho_2 c_2 \cos i - \varrho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \sin^2 i}{\varrho_2 c_2 \cos i + \varrho_1 \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin^2 i} \right)^2.$$

В случае нормального падения

$$R = \left( \frac{\varrho_2 c_2 - \varrho_1 c_1}{\varrho_2 c_2 + \varrho_1 c_1} \right)^2.$$

Если  $\varrho_2 c_2 \gg \varrho_1 c_1$  или  $\varrho_1 c_1 \gg \varrho_2 c_2$ , то  $R \approx 1$ .

Коэффициентом прохождения  $D$  называется отношение интенсивностей преломленной и падающей волн. Для плоской волны

$$D = \frac{\varrho_1 c_1 |A_2|^2}{\varrho_1 c_1 |A_1|^2} = \frac{4 \varrho_1 \varrho_2 c_1 c_2}{(\varrho_2 c_2 + \varrho_1 c_1 \frac{\cos r}{\cos i})^2} = \frac{4 \varrho_1 c_1}{\varrho_2 c_2 \left[ 1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \sin^2 i} \right]^2}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что в отсутствие поглощения

$$D \frac{\cos r}{\cos i} + R = 1.$$

В случае нормального падения  $D + R = 1$ .

Коэффициент  $R$  не изменяется по величине при обращении направления распространения волны, т. е. он одинаков для случаев падения плоской волны под углом  $i$  из первой среды на границу со второй и падения плоской волны под углом  $r$  из второй среды на границу с первой.

9° Давление  $p$ , производимое плоской волной на поверхность раздела двух сред, равно:

а) наклонное падение ( $i \neq 0$ )

$$p = \frac{I_1}{2c_1} [(1+R) \operatorname{ctg} i - (1-R) \operatorname{ctg} r] \sin 2i;$$

б) нормальное падение ( $i=0$ )

$$p = \frac{2I_1}{c_1} \frac{(c_1c_2)^2 + (c_2c_1)^2 - 2c_1c_2c_1}{(c_1c_1 + c_2c_2)^2},$$

где  $I_1 = \bar{w}_1 c_1$  — интенсивность падающей волны,  $c_1$  — скорость этой волны,  $\bar{w}_1$  — средняя объемная плотность энергии падающей волны.

10° При отражении сферической волны от плоской границы раздела двух сред отраженная волна также является сферической с центром в точке  $O'$ , симметричной относительно плоскости раздела  $MN$  центру  $O$  падающей волны (рис. V.1.2). Амплитуда отраженной волны обратно пропорциональна расстоянию от точки  $O'$ .

Если  $c_2 > c_1$ , то наряду с отраженной сферической волной в первой среде распространяется также боковая волна. Волновые поверхности боковой волны представляют собой усеченные конические поверхности, оси которых совпадают с перпендикуляром  $OO'$ , а образующие  $AB$  касаются соответствующих волновых поверхностей отраженной волны и образуют с плоскостью  $MN$  угол  $\gamma$ , удовлетворяющий условию  $\sin \gamma = c_1/c_2$ . Амплитуда боковой волны в произвольной точке  $C$  зависит от  $\angle OO'C$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r' = O'C$ .

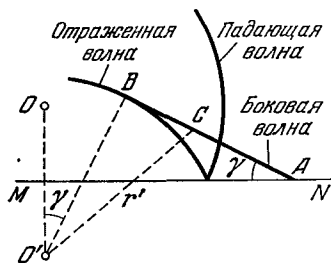


Рис. V.1.2.

членные конические поверхности, оси которых совпадают с перпендикуляром  $OO'$ , а образующие  $AB$  касаются соответствующих волновых поверхностей отраженной волны и образуют с плоскостью  $MN$  угол  $\gamma$ , удовлетворяющий условию  $\sin \gamma = c_1/c_2$ . Амплитуда боковой волны в произвольной точке  $C$  зависит от  $\angle OO'C$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r' = O'C$ .

## 7. Стоячие волны

1° *Стоячей волной* называется волна, возникающая в результате наложения двух волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях и удовлетворяющих следующим условиям: частоты волн одинаковы, амплитуды являются одинаковыми функциями координат. В случае поперечных волн необходима также одинаковая поляризация обеих волн (стр. 536). Возникновение стоячих волн является частным случаем явления интерференции волн (стр. 596).

2° Плоская продольная стоячая волна возникает, например, при наложении падающей и отраженной плоских волн, если угол падения равен нулю и коэффициент отражения  $R = 1$ , т. е. если отражение происходит от среды с очень большим или очень малым волновым сопротивлением (стр. 547). Уравнение плоской продольной синусоидальной стоячей волны, возникающей при наложении прямой волны  $\varphi_1 = a \sin(\omega t - kx + a_1)$  и обратной волны  $\varphi_2 = a \sin(\omega t + kx + a_2)$ , имеет вид

$$\varphi = 2a \cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2} - kx\right) \sin\left(\omega t + \frac{a_1 + a_2}{2}\right).$$

3° Амплитуда  $a_{ст}$  плоской стоячей волны является периодической функцией координаты  $x$  и не зависит от времени:

$$a_{ст} = 2a \left| \cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2} - kx\right) \right|.$$

Точки пространства, в которых  $a_{ст} = 0$ , называются *узлами стоячей волны*, а точки, в которых  $a_{ст}$  имеет максимальное значение ( $a_{ст})_{\max} = 2a$ , называются *пучностями стоячей волны*. Для узлов  $\frac{a_1 - a_2}{2} - kx = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ , для пучностей  $\frac{a_1 - a_2}{2} - kx = 2m \frac{\pi}{2}$ , где  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ .

4° *Длиной стоячей волны*  $\lambda_{ст}$  называется расстояние между двумя соседними узлами или пучностями:

$$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{2},$$

где  $\lambda$  — длина бегущих волн. Расстояние между соседними узлом и пучностью равно  $\lambda_{ст}/2 = \lambda/4$ . Узлы скорости и смещения частиц жидкости совпадают с пучностями потенциала скорости и давления.

5° В стоячей волне все частицы среды, находящиеся между двумя соседними узлами, колеблются в одной и той же фазе, но с разными амплитудами. При переходе через узел фаза колебаний скачкообразно изменяется на  $\pi$ , так как меняется знак  $\cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2} - kx\right)$ .

6° В отличие от бегущих волн, в стоячей волне отсутствует перенос энергии. Это, в частности, проявляется в том, что положения в пространстве узлов и пучностей не изменяются с течением времени (поэтому такие волны и называются стоячими). Отсутствие переноса энергии стоячей волной является следствием того, что образующие эту волну прямая и обратная волны переносят энергию в равных количествах и в противоположных направлениях.

7° Стоячая сферическая волна возникает при наложении расходящейся и сходящейся гармонических сферических волн:

$$\varphi_1 = \frac{a_0}{r} \sin(\omega t - kr + a_1) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{a_0}{r} \sin(\omega t + kr + a_2).$$

Уравнение этой волны имеет вид

$$\varphi = \frac{2a_0}{r} \cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2} - kr\right) \sin\left(\omega t + \frac{a_1 + a_2}{2}\right).$$

Условия для узлов и пучностей:

$$\frac{a_1 - a_2}{2} - kr = \begin{cases} (2m + 1) \frac{\pi}{2} - \text{узлы,} \\ 2m \frac{\pi}{2} - \text{пучности} \end{cases} \quad (m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$$

8° Если жидкость заполняет ограниченную часть пространства, то частоты ее свободных колебаний (стр. 112) могут принимать бесконечный ряд определенных дискретных значений, называемых *собственными частотами*. В этом случае в жидкости возникает сложная система стоячих волн, которая существенным образом зависит от формы и размеров сосуда.

Ниже указаны значения собственных частот колебаний для некоторых частных случаев.

а) Цилиндрический столб газа в трубе длиной  $l$ . Если оба конца трубы закрыты или открыты, то  $\nu = \frac{mc}{2l}$ ; если один конец трубы закрыт, а другой открыт, то  $\nu = \frac{c}{4l} (2m - 1)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $c$  — фазовая скорость волн

в газе). У закрытых концов трубы располагаются узлы скорости (а также смещения) частиц газа и пучности давления, а у открытых — узлы давления и пучности скорости.

Написанные выше условия для труб, открытых с одного или двух концов, являются приближенными, так как получены в предположении отсутствия потока энергии через открытые концы трубы. Эти условия выполняются, если радиус трубы  $R \ll \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны). В общем случае для трубы, открытой с обоих концов,

$$\nu = \frac{mc}{2l(1 + 2aR)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

и для трубы, открытой с одного конца,

$$\nu = \frac{(2m - 1)c}{4l(1 + aR)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где  $a = 0,63$ , если на открытых концах трубы нет фланцев, и  $a = 0,80$ , если есть фланцы.

б) Жидкость в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $d$ :

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}},$$

где  $m$ ,  $n$  и  $p$  — произвольные целые числа.

в) Собственная частота для резонатора с длиной тонкой трубкой:

$$\nu = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}},$$

где  $V$  — объем полости резонатора,  $S$  — площадь поперечного сечения трубки,  $l$  — длина трубки ( $l \gg a$ , где  $a$  — амплитуда колебаний газа в трубке). Полые сферические резонаторы такого типа называются *резонаторами Гельмгольца*.

9° Собственные частоты поперечных колебаний струны длиной  $l$  (стр. 536):

$$\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots$$

На концах струны — узлы смещения и пучности деформации и напряжения.

10° Собственные частоты продольных колебаний тонкого стержня длиной  $l$ .

а) Стержень закреплен в середине:

$$v = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$\rho$  и  $E$  – плотность и модуль Юнга материала стержня. На концах стержня находятся узлы деформации и пучности смещения.

б) Стержень закреплен на одном конце:

$$v = \frac{2n+1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

На закрепленном конце находится узел смещения (пучность деформации), на свободном – узел деформации (пучность смещения).

в) Стержень закреплен на обоих концах или свободно подвешен на неупругих нитях:

$$v = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots$$

В первом случае на концах стержня находятся узлы смещения (пучности деформации), во втором – узлы деформации (пучности смещения).

## 8. Явление Доплера

1° *Явлением Доплера* называется зависимость частоты волн, воспринимаемой приемником, от скоростей движения источника волн и приемника по отношению к среде, в которой распространяется волна. Если источник волн, колеблющийся с частотой  $\nu_0$ , движется относительно среды со скоростью  $u_1$ , а наблюдатель – со скоростью  $u_2$ , то частота  $\nu$ , воспринимаемая наблюдателем, равна

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{u_2}{c} \cos \theta_2}{1 + \frac{u_1}{c} \cos \theta_1},$$

где  $c$  – скорость волн в неподвижной среде, а  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – углы, образуемые векторами  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  с вектором  $\mathbf{R}$ , соединяющим приемник с источником волн.

2° В том случае, когда  $u_1/c \ll 1$  и  $u_2/c \ll 1$ , справедлива приближенная формула

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right),$$

где  $u$  – относительная скорость источника и приемника ( $u = u_1 - u_2$ ),  $\theta$  – угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{R}$ .

Если источник и наблюдатель сближаются, то угол  $\theta$  тупой,  $\cos \theta < 0$  и  $\nu > \nu_0$ ; если источник и наблюдатель удаляются друг от друга, то угол  $\theta$  острый,  $\cos \theta > 0$  и  $\nu < \nu_0$ .

Явление Доплера в оптике см. на стр. 532.

## 9. Поглощение и рассеяние звуковых волн

1° Распространение звуковых волн в однородной среде сопровождается диссипацией энергии (стр. 68), обусловленной внутренним трением и теплопроводностью. Это явление называется *поглощением звуковых волн*.

Амплитуда  $a$  и интенсивность  $I$  плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , зависят от  $x$  по экспоненциальному закону:

$$a(x) = a_0 e^{-\gamma x} \quad \text{и} \quad I(x) = I_0 e^{-2\gamma x},$$

где  $a_0$  и  $I_0$  – амплитуда и интенсивность в точке  $x = 0$ ,  $\gamma$  – коэффициент поглощения звука.

Для продольных волн в газах и жидкостях

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2c^3} \left[ \frac{4}{3} \eta + \zeta + K \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \right],$$

где  $\omega$  и  $c$  – циклическая частота и скорость волны;  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $K$  – плотность, динамическая вязкость (стр. 320), вторая вязкость (стр. 320) и коэффициент теплопроводности среды,  $c_p$  и  $c_v$  – удельные теплоемкости среды в изобарном и изохорном процессах. Указанные соотношения справедливы при условии  $\gamma c/\omega \ll 1$ , т. е. при малом относительном уменьшении амплитуды волны на расстоянии, равном длине волны.

2° Сильное поглощение происходит при отражении звуковой волны от твердой стенки. Оно обусловлено тем, что вблизи стенки градиенты температуры и касательной к стенке составляющей скорости частиц жидкости или газа (при наклонном падении звуковой волны) значительны по величине.

Доля энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твердой стенки, равна

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\sqrt{2}\omega}{c \cos i} \left[ \sqrt{\nu} \sin^2 i + \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \sqrt{\alpha} \right],$$

где  $\omega$  и  $c$  — циклическая частота и скорость падающей звуковой волны,  $i$  — угол падения,  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости жидкости или газа в изобарном и изохорном процессах,  $\nu$  и  $a$  — кинематическая вязкость (стр. 320) и коэффициент температуропроводности (стр. 272) жидкости или газа. Эта формула справедлива, если  $i \ll \pi/2$ , волновое сопротивление стенки много больше волнового сопротивления жидкости (газа) и температура стенки постоянна.

3° Затухание звука в закрытых помещениях после прекращения действия источника звука характеризуется временем реверберации, равным промежутку времени, в течение которого объемная плотность энергии звуковых волн уменьшается в  $10^6$  раз по сравнению с ее первоначальным значением.

4° Рассеянием звука называется процесс преобразования звуковой волны в множество волн, распространяющихся во всевозможных направлениях. Рассеяние звука возникает в результате взаимодействия звуковой волны с встречающимися на ее пути многочисленными препятствиями.

Отношение  $\sigma$  мощности рассеянных волн к интенсивности падающей (падающей на препятствие) волны называется полным эффективным сечением рассеяния звука. Если размеры препятствия малы по сравнению с длиной звуковой волны, то  $\sigma \propto \omega^4$ , где  $\omega$  — циклическая частота падающей волны.

## 10. Элементы физиологической акустики

1° Звуковые волны, частоты которых заключены в пределах от 16 до 20 000 гц, называются слышимыми звуками, так как, воздействуя на органы слуха человека, они способны вызывать звуковые ощущения (см. также п. 3°). Звуковые волны с частотами  $\nu < 16$  гц называются инфразвуковыми, а волны с частотами  $\nu > 2 \cdot 10^4$  гц — ультразвуковыми.

2° Характер восприятия звука органами слуха зависит от его спектра частот (стр. 542). Шумы обладают сплошным спектром, т. е. частоты содержащихся в них простых синусоидальных волн образуют непрерывный ряд значений, целиком заполняющих некоторый интервал. Музыкальные (тональные) звуки обладают линейчатым спектром частот: частоты  $\nu$ , входящих в их состав синусоидальных волн образуют ряд дискретных значений.

Музыкальным звукам соответствуют периодические или почти периодические колебания.

Каждая синусоидальная звуковая волна называется тоном (простым тоном). Высота тона зависит от частоты: чем больше частота, тем выше тон. Основным тоном сложного музыкального звука называется тон, соответствующий наименьшей частоте в его спектре. Тоны, соответствующие остальным частотам спектра, называются обертонами. Если частоты обертонов кратны частоте  $\nu_0$  основного тона, то обертоны называются гармоническими, причем основной тон с частотой  $\nu_0$  называется первой гармоникой, обертон со следующей по величине частотой  $2\nu_0$  — второй гармоникой и т. д.

Музыкальные звуки с одним и тем же основным тоном могут различаться тембром. Тембр определяется составом обертонов — их частотами и амплитудами, а также характером нарастания амплитуд в начале звучания и их спадаения в конце звучания.

3° Мерой силы слухового ощущения является громкость звука. Громкость звука зависит от его эффективного давления  $P_{эфф}$  (стр. 544) и частоты. Порогом слышимости называется то наименьшее значение  $p_0$  эффективного давления, при котором звук еще воспринимается органами слуха. Порог слышимости зависит от частоты звука, достигая минимального значения порядка  $2 \cdot 10^{-5}$  н/м<sup>2</sup> при частотах  $\nu = 700 \div 6000$  гц. Стандартный порог слышимости  $p_0^*$  принимается равным  $2 \cdot 10^{-5}$  н/м<sup>2</sup> при  $\nu = 1000$  гц.

Порогом болевого ощущения (порогом осязания) называется то наибольшее эффективное давление звука, при котором восприятие звука еще не вызывает болевого ощущения. Если эффективное давление звука превосходит эту величину, то нормальное восприятие звука становится невозможным. Порог болевого ощущения зависит от частоты звука.

4° Уровнем звукового давления синусоидальной звуковой волны называется величина  $L$ , пропорциональная десятичному логарифму отношения эффективного давления  $P_{эфф}$  этой волны к порогу слышимости  $p_0$  при данной частоте волны:

$$L = 2k \lg \frac{P_{эфф}}{p_0},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения  $L$ .

Выбор логарифмической зависимости  $L$  от  $p_{\text{эфф}}$  основывается на законе Вебера – Фехнера: прирост силы ощущения пропорционален логарифму отношения интенсивностей двух сравниваемых раздражений.

5° Закон Вебера – Фехнера является приближенным. В области энергий раздражения, близких к пороговым, он дает заметные расхождения с данными опытов. Применительно к физиологической акустике этот закон недостаточно точно учитывает также влияние частоты звука на его громкость. Поэтому для сравнения громкости звуковых волн всевозможных частот пользуются величиной, которая называется *уровнем громкости звука* и выражается следующим образом:

$$L^* = k \lg \frac{p_{\text{эфф}}^*}{p_0^*},$$

где  $p_0^*$  – стандартный порог слышимости, а  $p_{\text{эфф}}^*$  – эффективное давление звука стандартной частоты  $\nu = 1000$  гц, равногромкого с исследуемым звуком. Для звуковых волн с частотой 1000 гц уровень громкости совпадает с уровнем звукового давления.

## 11. Ультразвук

1° Ультразвуком называются упругие волны с частотами от  $2 \cdot 10^4$  до  $10^{13}$  гц. Ультразвуковые волны с частотами порядка  $10^9$  гц и выше иногда называют *гиперзвуковыми*. Верхний предел частот ультразвука ( $10^{12} \div 10^{13}$  гц в кристаллах и жидкостях и  $10^9$  гц в газах при нормальных условиях) соответствует частотам, при которых длина волны ультразвука становится соизмеримой с межмолекулярными расстояниями (в случае газов – со средней длиной свободного пробега молекул). Для генерирования ультразвуков применяются механические и электромеханические излучатели. Примером механического излучателя низкочастотных ультразвуков ( $\nu = 20 \div 200$  кгц) большой интенсивности служит сирена. «Звучание» сирены является результатом периодического прерывания мощной струи сжатого воздуха или пара при ее прохождении через отверстия в двух соосных дисках, один из которых (статор) неподвижен, а другой (ротор) вращается. Частота звука сирены  $\nu = N\omega/2\pi$ , где  $\omega$  – угловая скорость ротора,  $N$  – число отверстий, равномерно распределенных по окружности статора и ротора.

Электромеханические излучатели ультразвука делятся на два основных типа: магнитострикционные и пьезоэлектрические.

*Магнитострикционные излучатели* применяются для генерирования низкочастотных ультразвуков (до 200 кгц). Их действие основано на явлении магнитострикции (стр. 478) в переменном магнитном поле. Простейший излучатель такого типа представляет собой ферромагнитный стержень, являющийся сердечником соленоида, по которому пропускается высокочастотный переменный ток.

*Пьезоэлектрические излучатели* применяются для генерирования ультразвуков с частотами до 50 Мгц. Основным элементом пьезоэлектрического излучателя является пластинка из пьезоэлектрика, совершающая вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта (стр. 372) вынужденные механические колебания в переменном электрическом поле.

2° Для регистрации и анализа ультразвуков применяются пьезоэлектрические и магнитострикционные датчики. В первых используется прямой пьезоэлектрический эффект (стр. 371), который возникает в пластинке пьезоэлектрика, совершающей вынужденные колебания под действием регистрируемых ультразвуковых волн. Магнитострикционные датчики основаны на явлении изменения индукции магнитного поля ферромагнитного тела при деформации этого тела. Переменная деформация ферромагнитного стержня, на торцы которого действует ультразвуковая волна, вызывает возникновение переменной э. д. с. электромагнитной индукции в обмотке катушки, надетой на стержень.

3° Вследствие малости длины ультразвуковой волны ультразвуки, подобно свету, могут излучаться в виде узких направленных пучков. Отражение и преломление ультразвуковых пучков на границе раздела двух сред происходит по законам геометрической оптики (стр. 624).

Для изменения направления и фокусирования ультразвуковых лучей применяются зеркала различной формы, звуковые линзы, излучатели специальной формы и т. д. Зеркала должны возможно полнее отражать ультразвуковые волны, поэтому их изготавливают из веществ, акустические сопротивления которых во много раз больше акустического сопротивления окружающей среды. Звуковые линзы изготавливаются из веществ, акустические сопротивления которых близки к акустическому сопротивлению среды. Собирающие (рассеивающие) свойства



звуковых линз и зеркал подчиняются тем же закономерностям, что и для соответствующих оптических устройств.

4° Амплитуды скорости и ускорения колебательного движения частиц среды, а также амплитуда звукового давления в ультразвуковых волнах во много раз больше соответствующих величин для слышимых звуков. Благодаря большой амплитуде звукового давления, создаваемого мощными ультразвуковыми излучателями, в жидкостях возникает явление *кавитации* — в ней непрерывно образуются и исчезают внутренние разрывы сплошности. Исчезновение этих разрывов, имеющих вид мельчайших пузырьков, сопровождается кратковременным возрастанием давления до сотен и даже тысяч атмосфер. Поэтому ультразвуки обладают дробящим действием — они разрушают находящиеся в жидкости твердые тела, живые организмы, крупные молекулы и т. д.

5° Ультразвуки весьма сильно поглощаются газами и во много раз слабее — жидкостями. Например, коэффициент поглощения ультразвука в воздухе приблизительно в 1000 раз больше, чем в воде. Одна из причин этого различия состоит в том, что кинематическая вязкость воды значительно меньше кинематической вязкости воздуха.

6° Ультразвуки применяются в технике для контрольно-измерительных целей (гидролокации, дефектоскопия, измерение толщины стенок трубопроводов и слоя накипи и т. д.), а также для осуществления и ускорения различных технологических процессов.

7° *Принцип гидролокации* сходен с принципом радиолокации (стр. 582) и состоит в определении расстояния до тела, находящегося в толще воды, по величине промежутка времени между посылкой короткого ультразвукового сигнала и приемом *эхо-сигнала*, возникающего в результате рассеяния ультразвука телом. По изменению частоты *эхо-сигнала*, обусловленному эффектом Доплера (стр. 552), можно также определить лучевую скорость тела, т. е. проекцию скорости движения тела относительно наблюдателя на соединяющую их прямую.

8° *Ультразвуковой дефектоскопией* называется обнаружение внутренних дефектов (трещин, раковин, неоднородностей структуры) в твердых телах с помощью ультразвука. Она основана на явлении рассеяния ультразвуковых волн от поверхностей дефектных областей тела.

9° Дробящее действие ультразвуков используется в различных технологических процессах: для образования

эмульсий и суспензий, снятия пленок окислов и обезжиривания поверхностей деталей, стерилизации жидкостей, размельчения зерен фотоэмульсий и т. д. Разрушающее действие ультразвуковых волн в жидкости на поверхность твердого тела заметно увеличивается при введении в жидкость мелких абразивных частиц. Это явление используется для ультразвукового шлифования и полирования, а также «сверления» отверстий различных форм в стекле, керамике, сверхтвердых сплавах и кристаллах.

10° Ультразвуки ускоряют протекание процессов диффузии, растворения и химических реакций. Влияние ультразвука на ход химических реакций главным образом обусловлено тем, что при кавитации в жидкости образуются свободные ионы. Ультразвук используется для газоочистки, так как вызывает коагуляцию содержащихся в газах мельчайших твердых частиц и капелек жидкости.

11° Ультразвуковые волны широко используются в *молекулярной акустике* для исследования акустическими методами строения и свойств вещества.

## 12. Ударные волны в газах

1° *Ударной волной* называется распространение в газообразной, жидкой или твердой среде поверхности, на которой происходит скачкообразное повышение давления, сопровождающееся изменением плотности, температуры и скорости движения среды. Эта поверхность называется *поверхностью разрыва* или *скачком уплотнения*. Ударные волны возникают, например, при взрыве, детонации, движении тел в воздухе со сверхзвуковыми скоростями и т. д. Скорость распространения ударной волны относительно невозмущенной среды больше скорости звука в последней.

2° На поверхности разрыва в газах выполняются следующие соотношения:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad \frac{v_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{v_{2n}^2}{2} + h_2,$$

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2, \quad v_{1t} = v_{2t},$$

где  $\rho$  и  $p$  — плотность и давление газа,  $v_n$  и  $v_t$  — проекции скорости газа (в системе координат, жестко связанной с рассматриваемым элементом поверхности разрыва) на нормаль к элементу поверхности разрыва и касательную к ней плоскость,  $h$  — энтальпия (стр. 155) единицы массы газа, а индексы 1 и 2 относятся к состояниям

газа по разные стороны поверхности разрыва, т. е. до и после скачка уплотнения.

3° Скачок уплотнения называется *прямым*, если его поверхность нормальна к скорости набегающего потока газа:  $v_{1\tau} = 0$  и  $v_{1n} = v_1$ ,  $v_{2n} = v_2$ . В противном случае скачок уплотнения называется *косым*.

4° Некоторые соотношения для скачков уплотнения:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = (\rho_1 v_{1n})^2, \quad v_{1n} - v_{2n} = \sqrt{(p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}.$$

Уравнение ударной адиабаты (адиабаты Гюгонио):

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = 0,$$

или

$$u_1 - u_2 + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = 0,$$

где  $u$  — внутренняя энергия (стр. 153) единицы массы газа.

Для идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями  $c_p$  и  $c_v$  (стр. 160)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa + 1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa - 1)}{(\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa + 1)},$$

где  $\kappa = c_p/c_v$  — показатель адиабаты. При неограниченном возрастании скачка давления ( $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ ) отношение плотностей газа после и до скачка стремится к конечному пределу, равному  $\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$ . Этот результат является следствием необратимости процесса адиабатного сжатия газа ударной волной, сопровождающегося диссипацией энергии и возрастанием энтропии. Если течение газа перед ударной волной является потенциальным (стр. 316), то за ней оно становится вихревым (стр. 316).

Скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности пропорционален кубу скачка давления:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12 T_1} \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3,$$

где  $T_1$  — абсолютная температура газа перед ударной волной,  $s$  и  $\rho$  — удельная энтропия и плотность газа,  $\left( \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2} \right)_s > 0$ .

5° Прямой скачок уплотнения. После прямого скачка течение газа становится дозвуковым. Скорости газа перед ( $v_1$ ) и за ( $v_2$ ) скачком уплотнения удовлетворяют соотношениям:

$$v_1 v_2 = c_*^2, \quad v_1 > c_1 \quad \text{и} \quad v_2 < c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости звука до и после скачка,  $c_*$  — критическая скорость (стр. 339).

Для идеального газа

$$v_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{2\kappa} \left[ (\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa - 1) \right]},$$

$$v_2 = c_1 \frac{(\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa + 1)}{\sqrt{2\kappa \left[ (\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa - 1) \right]}},$$

$$c_* = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1} c_1^2 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2} = \sqrt{\frac{c_1^2}{2\kappa} \left[ (\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa + 1) \right]}.$$

Связь между параметрами состояния имеет вид:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_1^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1) M_1^2}{(\kappa - 1) M_1^2 + 2},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)][(\kappa - 1) M_1^2 + 2]}{(\kappa + 1)^2 M_1^2},$$

$$M_2 = \frac{v_2}{c_2} = \sqrt{\frac{(\kappa - 1) M_1^2 + 2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa - 1)}}, \quad \text{где } M_1 = v_1/c_1.$$

Изменения параметров состояния идеального газа и скорости:

$$p_2 - p_1 = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} p_1 (M_1^2 - 1) = \frac{2}{\kappa + 1} \rho_1 v_1^2 \left( 1 - \frac{1}{M_1^2} \right) = \rho_1 c_*^2 (M_{1*}^2 - 1),$$

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{M_1^2 - 1}{\frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 + 1} = \rho_1 \left( \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 + 1 \right)^{-1},$$

$$T_2 - T_1 = \frac{\kappa - 1}{2} T_1 M_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{M_1^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) \right] = \frac{(M_{1*}^2 - 1) T}{M_{1*}^2 \left( \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - M_{1*}^2 \right)},$$

$$v_2 - v_1 = c_* \frac{1 - M_{1*}^2}{M_{1*}},$$

где  $M_{1*} = \frac{v_1}{c_{*1}}$  — коэффициент скорости потока перед скачком, связанный с  $M_1$  соотношением

$$M_{1*} = \sqrt{\frac{(\kappa+1) M_1^2}{(\kappa-1) M_1^2 + 2}}$$

6° Косой скачок уплотнения (рис. V.1.3) в идеальном газе. Угол  $\alpha$  между вектором  $v_1$  скорости газа перед скачком и поверхностью скачка может быть любым в пределах от  $\alpha_0$  до  $\pi - \alpha_0$ , где  $\sin \alpha_0 = c_1/v_1$ . В результате прохождения через поверхность скачка линии тока «преломляются» ( $\beta \ll \alpha$ ):

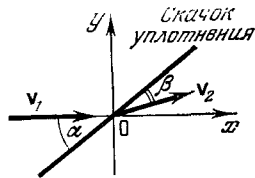


Рис. V.1.3.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{2(\kappa-1) M_1^2 \sin^2 \alpha + 4}{(\kappa+1) M_1^2 \sin 2\alpha}, \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{1 + M_1^2 \left( \frac{\kappa+1}{2} - \sin^2 \alpha \right)} \operatorname{ctg} \alpha; \end{aligned}$$

$\beta = \alpha$ , если  $\alpha = \pi/2$  (прямой скачок) или  $\alpha = \arcsin \frac{c_1}{v_1}$ .

Связь между составляющими скоростей, нормальными к поверхности разрыва:

$$v_{1n} v_{2n} = c_{*2}^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_1 \cos \alpha, \quad v_{1n} > c_1, \quad v_{2n} < c_2.$$

При этом в зависимости от величины касательной составляющей  $v_\tau = v_1 \cos \alpha$  скорость  $v_2$  за косым скачком может быть как дозвуковой, так и сверхзвуковой:

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\kappa-1) M_1^2}{2\kappa M_1^2 \sin^2 \alpha - (\kappa-1)}} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \alpha}{2 + (\kappa-1) M_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Отношение давлений газа:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}.$$

7° Ударной поларой называется кривая зависимости проекции  $v_{2y}$  скорости  $v_2$  за скачком уплотнения на ось  $Oy$ , перпендикулярную к скорости  $v_1$  до скачка, от проекции  $v_{2x}$  скорости  $v_2$  на ось  $Ox$ , параллельную  $v_1$ . Уравнение ударной полары имеет вид

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_{*2}^2}{\frac{2}{\kappa+1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_{*2}^2}.$$

Ударная полара изображена на рис. V.1.4. Она пересекает ось  $Ox$  в точках  $Q$  ( $v_{2x} = c_{*2}^2/v_1$ ) и  $P$  ( $v_{2x} = v_1$ ), первый из которых соответствует прямому скачку уплотнения, а второй — ударной волне нулевой интенсивности:  $v_2 = v_1$ . Произвольная точка  $A$  ударной полары соответствует косому скачку уплотнения, способ определения углов  $\alpha$  и  $\beta$  для которого ясен из рис. V.1.4; отрезок  $OA = v_2$ .

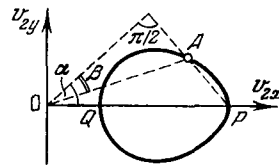


Рис. V.1.4.

8° Если тело движется в газе с дозвуковой скоростью ( $v < c$ ), то создаваемые этим телом слабые (звуковые) волны распространяются в газе по всем направлениям. В том числе они, опережая тело, охватывают также область газа, лежащую перед движущимся телом.

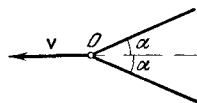


Рис. V.1.5.

В случае движения тела со сверхзвуковой скоростью ( $v > c$ ) звуковые волны охватывают лишь часть объема газа, лежащую позади движущегося тела и ограниченную некоторой поверхностью, называемой *характеристической поверхностью* или *поверхностью слабого разрыва*. При сверхзвуковом прямолинейном движении тела исчезающе малых размеров характеристическая поверхность имеет вид круговой конической поверхности (рис. V.1.5), вершина которой совпадает с движущимся телом  $O$ , а угол  $\alpha$  между образующими и траекторией тела удовлетворяет условию:  $\sin \alpha = c/v$ . Этот угол называется *углом слабых возмущений* или *углом Маха*. Поверхность слабого разрыва является предельным случаем косого скачка уплотнения. На ударной поларе она соответствует точке  $v_{2x} = v_1 = v$ .

## ГЛАВА 2

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### 1. Общая характеристика

1° Электромагнитными волнами называется распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле. Электромагнитные волны являются поперечными: векторы  $E$  и  $H$  напряженностей электрического

и магнитного поля волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{v}$  скорости распространения волны. Векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  образуют правинтовую систему: из конца вектора  $\mathbf{v}$  вращение от  $\mathbf{E}$  к  $\mathbf{H}$  по кратчайшему расстоянию видно происходящим против часовой стрелки, т. е.

$$\mathbf{v} = \frac{v(\mathbf{E}\mathbf{H})}{E\mathbf{H}}.$$

*Лучом* называется линия, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением распространения волны в этой точке, т. е. с направлением переноса энергии.

2° Связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в электромагнитной волне, распространяющейся в непроводящей среде, определяется уравнениями Максвелла (стр. 501), в которых  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  полагаются равными нулю:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе),}$$

где  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — электродинамическая постоянная (стр. 425). В случае рассматриваемой ниже однородной, изотропной, непроводящей среды, не обладающей ферромагнитными (стр. 474) или сегнетоэлектрическими (стр. 370) свойствами,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (в гауссовой системе),}$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  поля электромагнитной волны можно выразить через скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathbf{A}$  потенциалы (стр. 502):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

причем в обеих системах единиц

$$\Delta \varphi = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа (стр. 320), а величина  $c$  в Международной системе единиц (СИ) равна  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$  м/сек.

Таким образом,  $\varphi$  и каждая из проекций векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta s_i = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, \dots, 10),$$

где  $v = c/\sqrt{\epsilon \mu}$  — фазовая скорость электромагнитной волны,  $s_1 = \varphi$ ,  $s_2 = A_x$ ,  $s_3 = A_y$ , ...,  $s_{10} = H_z$ . В вакууме ( $\epsilon = \mu = 1$ )  $v = c$ . Для всех сред, кроме ферромагнитных (стр. 474),  $\mu \approx 1$  и  $v = c/\sqrt{\epsilon}$ .

3° Электромагнитная волна называется *плоской*, если векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят только от времени и одной декартовой координаты, например от  $x$ . В плоской волне все лучи параллельны друг другу.

Для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $Ox$  правой системы координат, имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= H_x = 0, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ H_x &= \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_y, & H_y &= -\sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_z, \end{aligned} \right\} \text{ (в СИ),}$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} [\mathbf{H} \mathbf{n}] = \frac{c}{v \epsilon \mu} [\text{rot } \mathbf{A} \mathbf{n}]$$

$$\left. \begin{aligned} E_x = H_x = 0, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ H_x = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y, \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z, \\ E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{Hn}] = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} [\text{rot } \mathbf{An}] \end{aligned} \right\} \text{(в гауссовой системе),}$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны. Следовательно, плоская волна может быть полностью определена с помощью одного лишь векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в вакууме

$$\begin{aligned} H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_z, \quad H_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y, \quad \sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\epsilon_0} E \quad (\text{в СИ}), \\ H_y = -E_z, \quad H_z = E_y, \quad H = E \end{aligned} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

4° Электромагнитная волна называется *монохроматической*, если компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электромагнитного поля волны совершают гармонические колебания (стр. 109) одинаковой частоты, называемой частотой волны. Монохроматическая волна не ограничена в пространстве и времени.

Произвольная немонохроматическая волна может быть представлена в виде совокупности монохроматических волн (стр. 541-542).

5° Векторный потенциал плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}))},$$

где  $\mathbf{A}_0$  — некоторый постоянный комплексный вектор,  $\omega$  — циклическая частота,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный в рассматриваемую точку поля,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор (стр. 541):

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} = \text{const},$$

$\mathbf{n}$  — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны,  $v$  — фазовая скорость волны,  $\lambda = vT$  — длина волны,  $T$  — период колебаний.

6° Напряженности электрического и магнитного полей плоской монохроматической волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}))} \}, \\ \mathbf{H} &= \text{Re} \{ \mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}))} \}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — постоянные комплексные векторы:

$$\mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{A}_0 = \frac{i\hbar c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{i}{\mu\mu_0} [\mathbf{kA}_0] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c} i \mathbf{A}_0 = \frac{ik}{\sqrt{\epsilon\mu}} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{i}{\mu} [\mathbf{kA}_0] \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Смысл символа  $\text{Re}$  см. на стр. 541.

7° Вектор  $\mathbf{E}_0$  также может быть записан в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_1 e^{-i\alpha_1} + \mathbf{a}_2 e^{-i\alpha_2},$$

где  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  — два взаимно перпендикулярных вещественных вектора, лежащих в плоскости, перпендикулярной к волновому вектору  $\mathbf{k}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — вещественные скаляры. Если ось  $Oy$  проведена вдоль вектора  $\mathbf{a}_1$ , а ось  $Ox$  — в направлении распространения волны, то

$$E_y = a_1 \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad E_z = \pm a_2 \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

где знак плюс (минус) относится к случаю, когда вектор  $\mathbf{a}_2$  совпадает с положительным (отрицательным) направлением оси  $Oz$ .

8° В каждой точке поля плоской монохроматической волны конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс, лежащий в плоскости  $yOz$ ; уравнение этого эллипса имеет вид

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} - 2 \frac{E_y E_z}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Такая плоская волна называется *эллиптически поляризованной*. Если  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\alpha_1 - \alpha_2 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots$ , то эллипс превращается в окружность и волна называется *циркулярно поляризованной*. Если порознь  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_2 = 0$ , либо  $\alpha_1 - \alpha_2 = m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots$ , то плоская волна называется *линейно поляризованной* (*плоскополяризованной*). В линейно поляризованной волне векторы  $\mathbf{E}$  во всех точках поля колеблются вдоль параллельных прямых. Плоскость, проведенная через вектор  $\mathbf{E}$  и луч (стр. 564), называется

плоскостью колебаний линейно поляризованной волны. *Плоскостью поляризации* называется плоскость, проведенная через вектор  $\mathbf{H}$  и луч. Плоскости колебаний и поляризации взаимно перпендикулярны (рис. V.2.1).

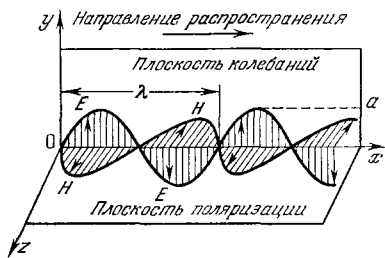


Рис V.2.1.

тической электромагнитной волны называется максимальное значение модуля вектора  $\mathbf{E}$ :  $a = |\mathbf{E}|_{\text{макс}}$ .

*Интенсивностью  $I$  электромагнитной волны* называется величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны. Интенсивность  $I$  связана с вектором Пойнтинга  $\mathbf{P}$  (стр. 505) соотношением

$$I = |\bar{\mathbf{P}}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \mathbf{P} dt \right|,$$

где  $T$  — период волны.

Для линейно поляризованной плоской монохроматической волны  $I \propto a^2$ , где  $a$  — амплитуда волны. Для произвольной плоской волны в однородной непоглощающей среде  $I = \text{const}$ .

10° Электромагнитная волна называется *сферической*, если ее интенсивность зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, называемой центром волны. Из закона сохранения энергии следует, что для сферической волны в однородной непоглощающей среде  $I = \text{const}/r^2$ .

11° Зависимость фазовой скорости электромагнитной волны в среде от частоты волны называется *дисперсией*. Среда, в которых наблюдается это явление, называются *диспергирующими* средами. Дисперсия электромагнитных волн отсутствует только в вакууме.

12° Реальные электромагнитные волны не являются монохроматическими, хотя бы уже потому, что они всегда имеют ограниченную протяженность в пространстве и ограниченную длительность во времени. Такие волны могут быть представлены в виде совокупности монохроматических волн и называются *группой волн* или *волновым пакетом*. В диспергирующей среде происходит искажение формы группы волн в процессе ее распространения, обусловленное различием фазовых скоростей отдельных монохроматических компонент группы. Для характеристики распространения групп волн и скорости переноса ими энергии, т. е. скорости распространения сигнала, понятия фазовой скорости недостаточно.

13° В первом приближении линейно поляризованный плоский волновой пакет, возбуждаемый синусоидально-модулированным по амплитуде источником и распространяющийся вдоль положительного направления оси  $Ox$ , может быть представлен в форме, соответствующей амплитудно-модулированным колебаниям поля в каждой точке пространства:

$$E = a[1 + m \cos(\Omega t - Kx)] \cos(\omega t - kx),$$

где  $m = a'/a \ll 1$ ,  $\Omega \ll \omega$ ,  $a'$  и  $\Omega$  — амплитуда и циклическая частота модуляции,  $a$  и  $\omega$  — амплитуда и циклическая частота модулируемой («несущей») волны,  $K = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$ ,  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — волновые числа, соответствующие монохроматическим волнам с частотами  $\omega$ ,  $\omega_1 = \omega + \Omega$  и  $\omega_2 = \omega - \Omega$ .

Линейная протяженность группы волн вдоль оси  $Ox$  равна

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K}.$$

Скорость переноса энергии группой волн называется *групповой скоростью  $u$* :

$$u = \frac{\Omega}{K} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

При малых значениях  $\Omega$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}},$$

где  $v$  — фазовая скорость модулируемой волны,  $\lambda = 2\pi v/\omega$  — ее длина.

В случае отсутствия дисперсии  $\frac{dr}{d\omega} - \frac{dv}{d\lambda} = 0$  и  $u = v$ . Нормальной дисперсии (стр. 673) соответствует

$$\frac{dr}{d\omega} < 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} > 0 \quad \text{и} \quad u < v.$$

Аномальной дисперсии (стр. 673) соответствует

$$\frac{dr}{d\omega} > 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} < 0 \quad \text{и} \quad u > v.$$

14° Результаты, приведенные в п. 13°, являются достаточно точными лишь в области

$$x \ll \frac{4\pi}{\left| \Omega^2 \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|} \quad \text{или} \quad x \ll \Delta x \left| \frac{u}{\Delta u} \right|,$$

где  $x$  — расстояние от источника волн,  $\Delta x$  — длина группы волн,  $\Delta u$  — разность значений групповой скорости при частотах  $\omega$  и  $\omega \pm \Omega$ . Вблизи частот поглощения средой электромагнитных волн  $\left| \frac{dv}{d\omega} \right|$  очень велико и понятие групповой скорости теряет смысл.

15° В зависимости от частоты  $\nu = \omega/2\pi$  (или длины волны в вакууме  $\lambda = c/\nu$ ) электромагнитные волны

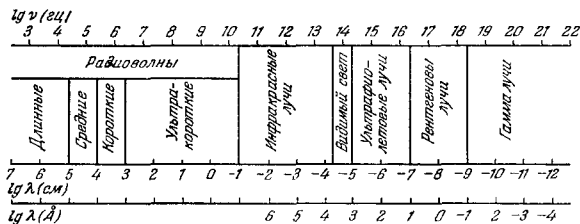


Рис. V.2 2

принято делить на несколько видов. Шкала электромагнитных волн приведена на рис. V.2.2. Границы между различными видами электромагнитных волн являются условными.

## 2. Излучение электромагнитных волн

1° Согласно классической электродинамике электромагнитные волны возбуждаются ускоренно движущимися электрическими зарядами. В веществе электро-

магнитные волны могут также возбуждаться зарядами, ускорения которых равны нулю, но скорости превосходят фазовую скорость света в этом веществе (излучение Вавилова — Черенкова, стр. 531). Процесс испускания электрической системой электромагнитных волн называется *излучением*, а сама система — *излучающей системой*. Электромагнитное поле волн, излучаемых системой, называется *полем излучения*. Ниже рассматриваются некоторые сведения для поля излучения в вакууме.

2° *Волновой зоной* называется область пространства, отстоящая от излучающей системы на расстояниях, которые значительно превосходят размеры излучающей системы и длину излучаемых ею волн. В пределах малых участков волновой зоны электромагнитные волны можно считать плоскими (стр. 565). В волновой зоне электромагнитное поле излучения системы может быть определено с помощью запаздывающего векторного потенциала  $\mathbf{A}$  (стр. 504).

Если начало координат выбрано в пределах излучающей системы, размеры которой малы по сравнению с длиной волны ее излучения, то в волновой зоне вектор-потенциала поля системы имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V \mathbf{j} \left( t' + \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})}{c} \right) dV' \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int_V \mathbf{j} \left( t' + \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})}{c} \right) dV' \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор рассматриваемой точки поля,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор элемента объема  $dV'$  системы и  $t' = t - R/c$ .

Так как  $(\mathbf{r}'\mathbf{n}) \ll R$ , то в выражении для  $\mathbf{A}$  обычно достаточно ограничиться одним (первое приближение) или двумя (второе приближение) членами разложения подынтегральной функции в ряд по степеням  $(\mathbf{r}'\mathbf{n})/c$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_V \mathbf{j}(t') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c R} \frac{\partial}{\partial t'} \int_V \mathbf{j}(t') (\mathbf{r}'\mathbf{n}) dV' \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int_V \mathbf{j}(t') dV' + \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial}{\partial t'} \int_V \mathbf{j}(t') (\mathbf{r}'\mathbf{n}) dV' \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Для системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$\int_V \mathbf{j} dV' = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{v}_i \quad \text{и} \quad \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}'\mathbf{n}) dV' = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — радиус-вектор и скорость заряда  $q_i$ .

З<sup>о</sup> В первом приближении излучение электрической системы обусловлено изменением во времени ее диполь-

ного электрического момента  $\mathbf{p}_e = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$ , где  $q_1, \dots, q_n$

— заряды, входящие в состав системы, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор заряда  $q_i$ . Это излучение называется *дипольным излучением* или *электрическим дипольным излучением*. В волновой зоне поле дипольного излучения системы зарядов, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме ( $v_i \ll c$ )<sup>1)</sup>, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right), \\ \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{R} \right] \mathbf{R}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{4\pi c R^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{R} \right] \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right), \\ \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{R} \right] \mathbf{R}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \mathbf{R} \right] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(в СИ),} \\ \text{(в гауссовой системе),} \end{array}$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из излучающей системы в рассматриваемую точку поля,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_e = \partial \mathbf{p}_e / \partial t$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_e = \partial^2 \mathbf{p}_e / \partial t^2$  и  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

В частности, для излучения точечного заряда  $q \mathbf{r}_e = q \mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_e = q \mathbf{w}$  и

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2} [[\mathbf{wR}]\mathbf{R}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{q}{4\pi c R^2} [\mathbf{wR}] \\ \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{q}{c^2 R^2} [[\mathbf{wR}]\mathbf{R}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{q}{c^2 R^2} [\mathbf{wR}] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(в СИ),} \\ \text{(в гауссовой системе),} \end{array}$$

где  $\mathbf{w}$  — ускорение заряда  $q$  в момент времени  $t - \frac{R}{c}$ .

<sup>1)</sup> Это условие эквивалентно тому, что размеры системы малы по сравнению с длиной волны ее излучения.

4° В волновой зоне вектор Пойнтинга для дипольного излучения

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right)$  и  $\mathbf{R}$ .

Мгновенная мощность дипольного излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  в направлении, определяемом углом  $\vartheta$ :

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left( t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе})$$

Мгновенная мощность дипольного излучения по всем направлениям:

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \right|^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$N = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \right|^2 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Пример 1. Излучение заряда  $q$ , движущегося с ускорением  $\mathbf{w}$ :

$$N = \frac{\mu_0 q^2 w^2}{6\pi c} \quad (\text{в СИ}),$$

$$N = \frac{2q^2 w^2}{3c^3} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

В случае гармонических колебаний заряда с циклической частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$  мгновенная ( $N$ ) и средняя ( $\bar{N}$ ) мощности излучения равны:

$$N = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{6\pi c} \sin^2 \omega t, \quad \bar{N} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (\text{в СИ}),$$

$$N = \frac{2q^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \sin^2 \omega t, \quad \bar{N} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Время релаксации  $\tau$ , т. е. промежуток времени, в течение которого амплитуда свободных колебаний заряда уменьшается в  $e$  раз вследствие потерь энергии на излучение, а также число  $\lambda$  полных колебаний, совершаемых



за время  $\tau$ , равны:

$$\tau = \frac{12\pi c m}{\mu_0 \omega^2 q^2}, \quad n = \frac{6c m}{\mu_0 \omega q^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\tau = \frac{3c^3 m}{\omega^2 q^2}, \quad n = \frac{3c^3 m}{2\pi \omega q^2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $m$  — масса заряженной частицы.

В классической теории излучения света атомом  $q = e$ , а величина  $\tau$  характеризует продолжительность излучения атомом одного пуга волны и называется *средним временем жизни излучающего атома*. Для частот видимого света ( $\omega \sim 4 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ )  $\tau \sim 10^{-8} \text{ сек}$  и  $n \sim 10^7$ .

При мер 2. *Вибратор (диполь) Герца* — короткий (по сравнению с длиной  $\lambda$  излучаемых волн) провод с одинаковыми сосредоточенными емкостями на концах и искровым промежутком посередине, к которому подводится переменное напряжение. Так как длина вибратора  $l \ll \lambda$ , то ток  $I = I_0 \sin \omega t$  в вибраторе можно считать *квазистационарным*, т.е. одинаковым во всей цепи;  $\dot{p}_e = l \frac{dI}{dt}$ , и средняя мощность излучения равна:

$$\bar{N} = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{12\pi c} I_0^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\bar{N} = \frac{l^2 \omega^2}{3c^3} I_0^2 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Расход энергии на излучение принято характеризовать с помощью величины  $R_{\text{изл}} = 2\bar{N}/I_0^2$ , называемой *сопротивлением излучения*:

$$R_{\text{изл}} = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{6\pi c} = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$R_{\text{изл}} = \frac{2l^2 \omega^2}{3c^3} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

5° Во втором приближении вектор-потенциал поля в волновой зоне системы точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , движущихся со скоростями  $v_i \ll c$ , можно представить в форме:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}_e(t') + \frac{\mu_0}{4\pi c R} [\dot{\mathbf{p}}_m(t') \mathbf{n}] + \frac{\mu_0}{24\pi c R} \ddot{\mathbf{D}}(t') \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}_e(t') + \frac{1}{cR} [\dot{\mathbf{p}}_m(t') \mathbf{n}] + \frac{1}{6c^2 R} \ddot{\mathbf{D}}(t') \quad (\text{в гаус-}$$

совой системе),

где  $t' = t - R/c$ ,  $\mathbf{p}_e(t') = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i(t')$  — дипольный электрический момент системы,  $\mathbf{p}_m(t')$  — магнитный момент системы:

$$\mathbf{p}_m(t') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i [\mathbf{r}_i(t') \mathbf{v}_i(t')] \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{p}_m(t') = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n q_i [\mathbf{r}_i(t') \mathbf{v}_i(t')] \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

$\mathbf{D}(t')$  — произведение единичного вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  на тензор квадрупольного электрического момента системы зарядов:

$$\mathbf{D}(t') = \sum_{i=1}^n q_i [3\mathbf{r}_i(\mathbf{n}\mathbf{r}_i) - r_i^2 \mathbf{n}];$$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} \quad \text{и} \quad \ddot{\mathbf{D}} = \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}.$$

Соответственно напряженности  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$  электромагнитного поля излучения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \left\{ [[\dot{\mathbf{p}}_e(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] + \frac{1}{c} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}_m(t')] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [[\ddot{\mathbf{D}}(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] \right\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{4\pi c R} \left\{ [\dot{\mathbf{p}}_e(t') \mathbf{n}] + \frac{1}{c} [[\ddot{\mathbf{p}}_m(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [\ddot{\mathbf{D}}(t') \mathbf{n}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R} \left\{ [[\dot{\mathbf{p}}_e(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] + [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}_m(t')] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [[\ddot{\mathbf{D}}(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] \right\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R} \left\{ [\dot{\mathbf{p}}_e(t') \mathbf{n}] + [[\ddot{\mathbf{p}}_m(t') \mathbf{n}] \mathbf{n}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [\ddot{\mathbf{D}}(t') \mathbf{n}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Второй и третий члены выражений для  $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$  характеризуют, соответственно, *магнитное дипольное* и *электрическое квадрупольное излучения* системы зарядов. Средняя мощность этих типов излучения приблизительно в  $c^2$  раз меньше средней мощности дипольного излучения системы. Поэтому магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучения играют существенную роль лишь в тех случаях, когда электрический дипольный момент системы равен нулю или постоянен, так что электрическое дипольное излучение полностью отсутствует.

6° В волновой зоне вектор Пойнтинга для магнитного дипольного излучения равен:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\vartheta$  — угол между вектором  $\ddot{\mathbf{p}}_m(t')$  и радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , проведенным из излучающей системы в рассматриваемую точку поля.

Мгновенная мощность магнитного дипольного излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  в направлении, определенном углом  $\vartheta$ :

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Мгновенная мощность магнитного дипольного излучения по всем направлениям:

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$N = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

**Пример 3. Рамочная антенна** — замкнутый контур переменного тока. В этом случае  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  ( $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока), и из закона сохранения заряда (стр. 504) следует, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , т. е. распределение зарядов и электрические дипольный и квадрупольный моменты системы неизменны во времени. Излучение обусловлено переменностью магнитного дипольного момента системы, т. е. представляет собой магнитное дипольное излучение.

В случае синусоидального тока  $I = I_0 \sin \omega t$  средняя мощность магнитного дипольного излучения рамочной антенны равна:

$$\bar{N} = \frac{\mu_0 S^2 \omega^4}{12\pi c^3} I_0^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{S^2}{12\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \quad (\text{в СИ}),$$

$$\bar{N} = \frac{S^2}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $S$  — площадь, ограниченная контуром, и  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  — длина волны излучения ( $\lambda \gg \sqrt{S}$ ).

Сопротивление излучения:

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\bar{N}}{I_0^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{S^2}{6\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \quad (\text{в СИ}),$$

$$R_{\text{изл}} = \frac{2S^2}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Для замкнутой системы, состоящей из заряженных частиц с одинаковыми удельными зарядами  $q_i/m_i$  ( $m_i$  — масса частицы),  $\ddot{\mathbf{p}}_e = \ddot{\mathbf{p}}_m = 0$ , т. е. такая система не создает ни электрического дипольного, ни магнитного дипольного излучения. Магнитное дипольное излучение отсутствует также в случае изолированной системы, состоящей всего лишь из двух частиц с произвольными зарядами и массами.

7° Излучение быстро движущегося заряда  $q$  (скорость соизмерима с  $c$ ).

Вдали от заряда  $q$ , движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  и ускорением  $\mathbf{w}$ , поле его излучения имеет вид:

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \left\{ \frac{\mathbf{n} \left[ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{w} \right]}{\left( 1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3} \right\}, \quad (\text{в СИ}),$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\mathbf{nE}]$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c^2 R} \left\{ \frac{\mathbf{n} \left[ \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{w} \right]}{\left( 1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} \right)^3} \right\}, \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}]$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  — единичный вектор, проведенный в направлении излучения, причем все величины, входящие в

правые части этих равенств, берутся в моменты времени  $t' = t - R/c$ .

Мгновенная мощность излучения в телесный угол  $d\Omega$ :

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \left\{ \frac{w^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{w})(\mathbf{v}\mathbf{w})}{c \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^5} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^6} \right\} d\Omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{w^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{w})(\mathbf{v}\mathbf{w})}{c \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^5} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^6} \right\} d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

В случае, когда скорость  $\mathbf{v}$  и ускорение  $\mathbf{w}$  заряда параллельны,

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{w^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} d\Omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{w^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\theta$  — угол между направлением излучения  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ ,  $\beta = v/c$ . Заряд не излучает в направлениях  $\theta = 0$ ,  $\pi$ .

В случае, когда  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ ,

$$dN = \frac{\mu_0 q^2 w^2}{16\pi^2 c} \left[ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \cos^2 \varphi \right] d\Omega \quad (\text{в СИ}),$$

$$dN = \frac{q^2 w^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \cos^2 \varphi \right] d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью, проходящей через векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$ , и плоскостью, проходящей через векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ . Заряд не излучает в направлениях  $\theta = \arccos \beta$ , лежащих в плоскости векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  ( $\varphi = 0$ ).

В ультрарелятивистском случае ( $1 - \beta \ll 1$ ) заряженная частица в основном излучает в направлении своего движения (в пределах углов  $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$ ).

8° Излучение заряда, равномерно движущегося с произвольной скоростью по окружности в однородном постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$ ). Усредненная за период обращения мощность излучения в телесный угол  $d\Omega$  в направлении  $\mathbf{n}$ , составляющем угол  $\alpha$  с

нормалью к плоскости орбиты, равна

$$dN = \frac{q^4 H^2 v^2 (1 - \beta^2)}{8\pi m_0^2 c^5} \left[ \frac{2 + \beta^2 \sin^2 \alpha}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} - \frac{(1 - \beta^2)(4 + \beta^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha}{4(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{7/2}} \right] d\Omega \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $m_0$  — масса покоя (стр. 526) заряженной частицы. Полная мощность излучения:

$$N = \frac{2q^4 H^2 v^2}{3m_0^2 c^5 (1 - \beta^2)} \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

При  $1 - \beta \ll 1$  излучение в основном сосредоточено вблизи плоскости орбиты в интервале углов  $\alpha = \pi/2 \pm \Delta\alpha$ , где  $\Delta\alpha \sim \sqrt{1 - \beta^2}$ . Основная часть излучения приходится на область циклических частот

$$\omega \sim \frac{qH}{m_0 c} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

и спектр излучения состоит из множества тесно расположенных линий. Такое излучение наблюдается при движении заряженных частиц в циклических ускорителях (стр. 445) и называется *бетатронным* или *синхротронным*.

9° Излучение, возникающее при прохождении электрона через поле атома или ядра, называется *тормозным*. Тормозное излучение имеет непрерывный спектр, ограниченный максимальной частотой  $\nu_0$ , которая при  $v/c \ll 1$  равна

$$\nu_0 = \frac{mv^2}{2h},$$

где  $v$  — начальная скорость электрона,  $m$  — его масса,  $h$  — постоянная Планка.

### 3. Радиосвязь, телевидение, радиолокация и радиоастрономия

1° *Радиосвязью* называется передача какой-либо информации с помощью *радиоволн*, т. е. электромагнитных волн, частота которых меньше  $3 \cdot 10^5$  Мгц. В *радиовещании* осуществляется передача речи, музыки и телеграфных сигналов, в *телевидении* — изображений.

Радиосвязь производится путем излучения радиочередатчиком модулированных электромагнитных волн и их *демодуляции* в радиоприемнике.

2° *Модуляцией электромагнитной волны* называется изменение ее параметров с частотами, значительно меньшими частоты самой электромагнитной волны. Модулируемая волна называется *несущей*, а ее частота  $\omega$  — *несущей частотой*. В соответствии с родом параметра несущей волны, изменяемого при модуляции, различают:

а) *амплитудную модуляцию* (АМ) — изменяется только амплитуда волны,  $a = a_0 (1 + m \cos \Omega t)$ ;

б) *частотную модуляцию* (ЧМ) — изменяется только частота волны,  $\omega = \omega_0 (1 + m_f \cos \Omega t)$ ;

в) *фазовую модуляцию* (ФМ) — изменяется начальная фаза волны,  $a = a_0 (1 + m_\alpha \cos \Omega t)$ , где  $\omega_0$  и  $\Omega$  — циклические частоты несущей волны и модуляции ( $\Omega \ll \omega_0$ ),  $m$  — коэффициент модуляции,  $\Delta\omega = m_f \omega_0$  — амплитуда колебаний частоты при ЧМ,  $\Delta a = a_0 m_\alpha$  — амплитуда колебаний начальной фазы при ФМ.

3° В случае радиовещания частота модуляции невелика, так как лежит в пределах частот слышимых звуков ( $16 \div 20\ 000$  гц). Поэтому нет жестких ограничений на выбор несущей частоты, который производится на основе особенностей распространения в атмосфере радиоволн различной длины и возможности обеспечения надежной ближней или дальней радиосвязи при минимальной мощности радиопередатчика. Широкое радиовещание производится на *длинных* ( $\lambda = 10^3 \div 10^4$  м,  $\nu = 30 \div 300$  кГц), *средних* ( $\lambda = 10^2 \div 10^3$  м,  $\nu = 0,3 \div 3$  МГц) и *коротких* ( $\lambda = 10 \div 100$  м,  $\nu = 3 \div 30$  МГц) радиоволнах.

4° Всякий *радиопередатчик* состоит из следующих основных элементов: *генератора* незатухающих электромагнитных колебаний несущей частоты, *модулятора* и *передающей антенны*, осуществляющей излучение радиоволн в нужном направлении.

Приемное устройство состоит из *приемной антенны* и *радиоприемника*. Приемная антенна преобразует энергию радиоволн в энергию высокочастотных электромагнитных колебаний. Радиоприемник выделяет из этих колебаний те, которые возбуждаются нужным радиопередатчиком, усиливает и демодулирует их, т. е. отделяет модулирующие колебания низкой частоты от высокочастотных (несущих) колебаний. Модулирующие колебания после их усиления подаются на воспроизводящее устройство (телефон, громкоговоритель, кинескоп телевизора и т. п.).

5° Передача изображения по телевидению осуществляется путем модуляции несущей электромагнитной волны в соответствии с яркостью различных малых участков

передаваемых объектов. Для этой цели в передающих телевизионных трубках используется явление внешнего или внутреннего фотоэффекта (стр. 699). Передача изображения (*кадра*) производится последовательно по строкам, а в каждой строке — по ее малым *элементам*. В СССР принята система, в которой каждый кадр разбивается на 625 строк по 833 элемента в строке. За одну секунду передается 25 различных кадров. Следовательно, частота модуляции (частота *видеосигналов*) равна примерно 6,5 МГц. Во избежание искажений видеосигналов необходимо, чтобы несущая частота была приблизительно в 10 раз больше. Поэтому для телевизионных передач используются *ультракороткие волны* метрового диапазона ( $\lambda = 1 \div 10$  м,  $\nu > 30$  МГц).

Для воспроизведения изображения в телевизионном приемнике применяется электронно-лучевая трубка — *кинескоп*, в которой используется явление катодолуминесценции (стр. 710). С помощью специального устройства производятся горизонтальная и вертикальная развертки электронного луча на экране кинескопа, осуществляемые синхронно с передачей телецентром соответствующих элементов кадра. Неодинаковая интенсивность свечения в различных точках экрана достигается путем модуляции интенсивности электронного луча в соответствии с модуляцией принимаемых электромагнитных волн.

6° На распространение радиоволн в атмосфере существенное влияние оказывают явления *дифракции радиоволн* (стр. 623) на поверхности Земли, поглощения в атмосфере и земной поверхностью, отражения от последней и поглощения, преломления и отражения от *ионосферы* — верхних частей атмосферы, сильно ионизованных под влиянием ультрафиолетового, рентгеновского и корпускулярного излучений Солнца. Ионосфера состоит из ряда слоев, расположенных на разных высотах. Интенсивности ионизации и высоты над поверхностью Земли этих слоев зависят от географической широты, времени суток и года, а также от уровня солнечной активности.

Наиболее устойчивая дальняя радиосвязь осуществляется на длинных радиоволнах, которые огибают земную поверхность вследствие дифракции и преломления (*рефракции*) в тропосфере, сравнительно слабо проникают в ионосферу и мало поглощаются ею.

Дальность радиоприема на средних волнах резко различна днем и ночью. Это связано с тем, что средние волны интенсивно поглощаются нижним слоем D

ионосферы и отражаются от более отдаленного слоя  $E$ . Ночью из-за отсутствия солнечного излучения слой  $D$  исчезает и дальность приема сильно возрастает.

Короткие радиоволны поглощаются слоем  $D$  и отражаются от слоя  $F$ , еще более удаленного, чем слой  $E$ . Благодаря этому возможна дальняя радиосвязь на коротких волнах.

Ультракороткие радиоволны с  $\lambda < 5$  м в обычных условиях не отражаются от ионосферы. Прямые волны, распространяющиеся вблизи поверхности Земли, сильно ею поглощаются. Поэтому надежный прием этих волн, например в телевидении, возможен лишь в пределах прямой видимости, т. е. расстояний, соизмеримых с дальностью прямой видимости антенны передатчика. Для осуществления дальнего телевидения применяется последовательная цепь *ретрансляционных станций*, осуществляющих прием, усиление и дальнейшую передачу сигналов.

$7^\circ$  *Радиолокацией* называется обнаружение и определение местонахождения различных предметов с помощью радиоволн. Радиолокация основана на явлении отражения или рассеяния радиоволн телами.

*Радиолокатор (радар)* представляет собой комбинацию ультракоротковолнового радиопередатчика и радиоприемника, имеющих общую приемно-передающую антенну, создающую остронаправленное излучение (*радиолуч*). Излучение осуществляется в виде коротких импульсов продолжительностью около  $10^{-6}$  сек. В промежутки времени между двумя последовательными импульсами излучения антенна автоматически переключается на прием сигнала, отраженного от цели. Расстояние до цели определяется по величине промежутка времени между посланной сигналом и приемом отраженного сигнала. В радиолокации применяются ультракороткие радиоволны дециметрового, сантиметрового и миллиметрового диапазонов, так как радиолокация наиболее эффективна, когда размеры лоцируемых тел во много раз больше длины волн  $\lambda$ .

Методы радиолокации используются в *радиолокационной астрономии* для уточнения движения планет солнечной системы и их спутников, а также для изучения орбит и скоростей движения метеоров. На основе радиолокации Венеры (1962 г., СССР) была уточнена величина *астрономической единицы*, т. е. среднего расстояния от Земли до Солнца:  $1 \text{ а. е.} = (149\,598\,100 \pm 750) \text{ км}$ .

$8^\circ$  *Радиоастрономией* называется раздел радиофизики и астрономии, посвященный исследованию космических объектов по их собственному ультракоротковолновому радиоизлучению (в основном в области сантиметровых и дециметровых волн, которые слабо поглощаются ионосферой и газами, содержащимися в земной атмосфере). Устройства, служащие для приема и исследования этого излучения, называются *радиотелескопами*. Благодаря большим эффективным площадям антенн чувствительность радиотелескопов значительно превосходит чувствительность самых крупных современных оптических телескопов. Например, эффективная площадь крестообразного радиотелескопа ФИАНа (г. Серпухов) порядка  $10^4 \text{ м}^2$ , а разрешающая способность порядка  $3'$ . Методами радиоастрономии можно определять температуру и физические свойства поверхностного слоя планет солнечной системы. Систематическое наблюдение радиоизлучения Солнца позволяет предсказывать увеличение солнечной активности, приводящее к возникновению на Земле магнитных бурь, нарушающих радиосвязь на коротких волнах.

Радиоастрономические методы являются единственным средством исследования ядра Галактики, а также *радиогалактик* — весьма удаленных от Земли частей Мегалактики, обладающих сравнительно большой радиосветимостью и недоступных наблюдению в самые совершенные оптические телескопы. Недавно с помощью радиоастрономических наблюдений были обнаружены совершенно новые внегалактические объекты Вселенной, названные *сверхзвездами* (*квазизвездами* или *квазарами*). Сверхзвезды имеют сравнительно небольшие угловые размеры и обладают переменной яркостью. По-видимому, они, подобно звездам, представляют собой самосветящиеся тела. Однако массы сверхзвезд очень велики (порядка  $10^8 \div 10^9$  масс Солнца), а их светимости на несколько порядков больше светимости всей нашей Галактики.

### ГЛАВА 3

## ПРОХОЖДЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

### 1. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

$1^\circ$  Согласно классической электронной теории вещество можно рассматривать как систему заряженных частиц. Переменное электромагнитное поле волны возбуждает вынужденные колебания этих частиц. В случае

высокочастотных волн, соответствующих видимому свету и ультрафиолетовым лучам, вынужденные колебания со сколько-нибудь значительными амплитудами могут совершать только электроны. Значительно более массивные заряженные частицы (ядра атомов, ионы) совершают вынужденные колебания под действием более низкочастотного инфракрасного излучения.

2° В изотропной среде сила, действующая на заряд  $q$  со стороны электромагнитного поля волны, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \left[ \frac{-\mathbf{v}_1}{c} [\mathbf{nE}] \right],$$

где  $\mathbf{v}_1$  — скорость заряда  $q$ ,  $v$  — фазовая скорость волны,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны. Так как  $v_1 \ll v$ , то второе слагаемое, представляющее собой силу Лоренца (стр. 442), мало по сравнению с первым. Сила, действующая на заряженные частицы вещества, в основном определяется электрическим полем, т. е. вектором  $\mathbf{E}$  электромагнитного поля волны. Поэтому  $\mathbf{E}$  иногда называют *световым вектором*.

Если молекулы вещества электрически изотропны, то вынужденные колебания электронов в молекулах совершаются в направлении, совпадающем с направлением колебаний вектора  $\mathbf{E}$  поля волны. Если молекулы анизотропны, то эти направления в общем случае различны.

Наиболее сильное воздействие на электроны оказывают световые волны, частоты которых близки к собственным частотам колебаний электронов в атомах или молекулах.

3° В процессе вынужденных колебаний заряженных частиц в молекулах вещества периодически изменяются (с частотой  $\nu$  падающего света) дипольные электрические моменты молекул. При этом молекулы излучают *вторичные электромагнитные волны* той же частоты  $\nu$ . Средние расстояния между молекулами во много раз меньше протяженности одного цуга волн. Поэтому в оптически однородной среде (стр. 684) вторичные волны, излучаемые весьма большим числом соседних молекул, несмотря на хаотическое тепловое движение последних, когерентны (стр. 595) как между собой, так и с первичной волной. При наложении эти волны интерферируют (стр. 596).

4° В оптически однородной и изотропной среде в результате интерференции первичной и вторичных волн образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты.

В случае падения электромагнитной волны на границу раздела двух различных оптически однородных и изотропных сред в результате интерференции первичной и вторичных волн образуются *отраженная волна*, распространяющаяся в той же среде, откуда пришла первичная волна, и *преломленная волна*, распространяющаяся во второй среде.

5° В макроскопической теории Максвелла задача о взаимодействии электромагнитной волны с веществом сводится к решению уравнений Максвелла (стр. 501) при определенных условиях на границе раздела сред, в которых распространяется волна. Электрические и магнитные свойства вещества, определяющие его поведение под действием световой волны, характеризуются относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , удельной проводимостью  $\gamma$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ . Для всех веществ в области оптических частот электромагнитных волн можно считать, что  $\mu = 1$ , а фазовая скорость этих волн

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

## 2. Отражение и преломление света диэлектриками

1° При падении световой волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков с разными значениями относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  световая волна частично отражается и частично преломляется.

2° Отношение скорости  $c$  света в вакууме к фазовой скорости  $v$  света в среде:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$$

называется *абсолютным показателем преломления* этой среды. Для любой среды, кроме вакуума, величина  $n$  зависит от частоты света (стр. 673) и состояния среды (ее температуры, плотности и т. д.). Для разреженных сред (например, газов при нормальных условиях)  $n \approx 1$ . В анизотропных средах абсолютный показатель преломления зависит также от направления распространения света и характера его поляризации (стр. 652). Для характерности поглощающих сред вводится комплексный показатель преломления (стр. 593).

*Относительным показателем преломления*  $n_{21}$  второй среды относительно первой называется отношение

фазовых скоростей света  $v_1$  и  $v_2$  соответственно в первой и второй средах:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления первой и второй сред. Если  $n_{21} > 1$ , то вторая среда называется *оптически более плотной*, чем первая среда.

3° Нижеприводимые формулы справедливы только для монохроматических волн, длины  $\lambda$  которых во много раз больше межмолекулярных расстояний в среде. Для волн оптического диапазона это условие выполняется даже в случае не слишком сильно разреженных газов. Кроме того, предполагается, что среды однородны, изотропны и не поглощают свет. Наконец, среды, в которых распространяются отраженная и преломленная волны, считаются полубесконечными, т. е. принимается, что на границе раздела сходятся только три волны — падающая, отраженная и преломленная (пренебрегается многократным отражением).

4° При падении световой волны на идеально плоскую границу раздела двух диэлектриков, размеры которой значительно превышают длину волны, угол между направлением распространения отраженной волны и нормалью к границе раздела  $i'$  (*угол отражения*) равен по абсолютной величине соответствующему углу для падающей волны  $i$  (*закон отражения*). Такое отражение называется *зеркальным*. Угол между направлением распространения преломленной волны и нормалью к границе раздела (*угол преломления  $r$* ) связан с углом падения  $i$  *законом Снеллиуса (законом преломления)*:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где  $n_{21}$  — относительный показатель преломления среды, в которой распространяется преломленный свет, относительно среды, в которой распространяется падающий свет.

5° Если световая волна из оптически более плотной среды 1 падает на границу раздела с оптически менее плотной средой 2 ( $n_{21} < 1$ ), то при углах падения  $i \geq i_{\text{пр}}$ , где  $\sin i_{\text{пр}} = n_{21}$ , преломленная волна отсутствует и свет полностью отражается от оптически менее плотной среды. Это явление называется *полным внутренним отражением*. Угол  $i_{\text{пр}}$  называется *предельным (критическим) углом полного внутреннего отражения*. При полном внутрен-

нем отражении электромагнитное поле световой волны частично заходит во вторую среду. Однако амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  поля во второй среде очень быстро убывают (по экспоненциальному закону) по мере удаления от поверхности раздела. Глубина проникновения сколько-нибудь заметного поля во вторую среду имеет величину порядка длины волны света. Поток энергии из первой среды во вторую в среднем равен нулю, так что энергия падающей электромагнитной волны полностью возвращается в первую среду.

6° Величина  $R$ , равная отношению интенсивностей отраженной и падающей волн, называется *коэффициентом отражения*. Величина  $T$ , равная отношению интенсивностей преломленной и падающей волн, называется *коэффициентом пропускания*. Для отражения и преломления света на границе раздела двух прозрачных сред (не поглощающих свет)  $R + T = 1$ . В случае полного внутреннего отражения  $R = 1$  и  $T = 0$ .

7° При падении под углом  $i^1$  на плоскую границу раздела двух сред плоской неполяризованной (естественный свет, стр. 652) световой волны коэффициент отражения

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)} \right],$$

где  $r$  — угол преломления. В случае  $i = r = 0$  (*нормальное падение света*)

$$R = \left( \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2,$$

где  $n_{21}$  — относительный показатель преломления.

8° При падении на плоскую границу раздела линейно поляризованной плоской волны (стр. 567), вектор  $\mathbf{E}$  которой колеблется в плоскости падения (*p-волна*), амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  в отраженной ( $a_p^r$ ) и преломленной ( $a_p^d$ ) волнах связаны с амплитудой вектора  $\mathbf{E}$  в падающей волне ( $a_p^0$ ) соотношениями (*формулы Френеля для p-волны*)<sup>1</sup>:

$$a_p^r = a_p^0 \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}, \quad a_p^d = a_p^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}.$$

В этих формулах  $a_p^r$  — величина алгебраическая в отличие от  $a_p^0$  и  $a_p^d$ , которые всегда положительны. Если  $a_p^r < 0$ , то отражение происходит без изменения фазы колебаний вектора  $\mathbf{E}$  (соответственно фаза вектора  $\mathbf{H}$  изменяется

<sup>1</sup> Если  $n_{21} < 1$ , то предполагается, что  $i < i_{\text{пр}}$  (стр. 586).

на  $\pi$ ); если  $a_p^r > 0$ , то при отражении фаза вектора  $\mathbf{E}$  изменяется на  $\pi$  (соответственно фаза вектора  $\mathbf{H}$  сохраняется).

Коэффициент отражения для  $p$ -волн:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}.$$

9° При падении на границу раздела линейно поляризованной плоской волны, в которой вектор  $\mathbf{E}$  колеблется в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения ( $s$ -волна), амплитуды  $a_s^r$ ,  $a_s^t$  и  $a_s^0$  связаны соотношениями (формулы Френеля для  $s$ -волн)<sup>1)</sup>:

$$a_s^r = -a_s^0 \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad a_s^t = a_s^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}.$$

В этих формулах  $a_s$  — величина алгебраическая в отличие от  $a_s^0$  и  $a_s^t$ , которые всегда положительны. Если  $a_s^r < 0$ , то при отражении происходит изменение фазы колебаний вектора  $\mathbf{E}$  на  $\pi$  (соответственно фаза вектора  $\mathbf{H}$  сохраняется); если  $a_s^r > 0$ , то при отражении фаза вектора  $\mathbf{E}$  сохраняется (соответственно фаза вектора  $\mathbf{H}$  изменяется на  $\pi$ ).

Коэффициент отражения для  $s$ -волн:

$$R_s = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Зависимость  $R_p$ ,  $R_s$  и  $R = \frac{1}{2}(R_p + R_s)$  от  $i$  для  $n_{21} = 1,52$  (воздух — стекло) приведена на рис. V.3.1.

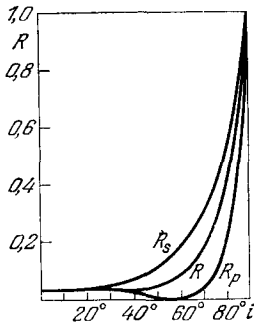


Рис. V.3.1.

10° В случае нормального падения ( $i = r = 0$ )  $p$ - и  $s$ -волн на границу раздела двух сред

$$a_p^r = a_p^0 \frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}, \quad a_s^r = -a_s^0 \frac{n_{21}-1}{n_{21}+1},$$

$$a_p^t = a_p^0 \frac{2}{n_{21}+1}, \quad a_s^t = a_s^0 \frac{2}{n_{21}+1},$$

$$R_p = R_s = \left( \frac{n_{21}-1}{n_{21}+1} \right)^2.$$

<sup>1)</sup> Если  $n_{21} < 1$ , то предполагается, что  $i < i_{\text{пр}}$  (стр. 586).

11° Фаза преломленной световой волны всегда совпадает с фазой падающей волны: на границе раздела векторы  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{E}^t$  колеблются в одной фазе. Фаза отраженной волны может отличаться на  $\pi$  от фазы падающей волны. В этом случае происходит отражение с потерей полуволны. В таблице указана разность фаз между отраженной и падающей волнами для  $p$ - и  $s$ -волн.

	$i+r > \frac{\pi}{2}$		$i+r < \frac{\pi}{2}$	
	$i > r$ ( $n_{21} > 1$ )	$i < r$ ( $n_{21} < 1$ )	$i > r$ ( $n_{21} > 1$ )	$i < r$ ( $n_{21} < 1$ )
$p$ -волна	0	$\pi$	$\pi$	0
$s$ -волна	$\pi$	0	$\pi$	0

При переходе  $i+r$  через значение  $\pi/2$  (т. е. угла падения  $i$  — через значение  $i_0$ , для которого  $i_0+r_0 = \pi/2$ ; угол  $i_0$  называется углом Брюстера, стр. 591) фаза отраженной  $p$ -волны скачком меняется на  $\pi$ .

Обычно  $i < i_0$ , т. е.  $i+r < \pi/2$ . В этих случаях, как видно из таблицы, независимо от характера поляризации падающего света отражение от оптически менее плотной среды ( $n_{21} < 1$ ) происходит без изменения фазы волны, а при отражении от оптически более плотной среды ( $n_{21} > 1$ ) — с изменением фазы на  $\pi$  (с потерей полуволны).

12° В случае полного внутреннего отражения ( $n_{21} < 1$  и  $i \geq i_{\text{пр}}$ ) отраженные  $p$ - и  $s$ -волны отстают по фазе от падающих  $p$ - и  $s$ -волн соответственно на  $\Delta\varphi_p$  и  $\Delta\varphi_s$ , причем

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos i} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\cos i} = n_{21}^2 \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p}{2}.$$

Разность  $\Delta\varphi_s - \Delta\varphi_p$  равна нулю только в двух предельных случаях: а)  $i = i_{\text{пр}}$  ( $\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_p = 0$ ); б)  $i = \frac{\pi}{2}$  ( $\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_p = \pi$ ).

13° Для уменьшения величины коэффициента отражения в оптических системах, где многократные отражения света существенно снижают интенсивность проходящего света и освещенность изображения, используют



интерференцию лучей, отраженных от передней и задней границ специального слоя, наносимого на линзы оптической системы. Толщина  $h$  и абсолютный показатель преломления  $n$  этого слоя подбираются так, чтобы оба отраженных луча имели оптическую разность хода (стр. 600)  $\lambda/2$  (разность фаз  $\pi$ ) и гасили друг друга:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2}.$$

Величина  $n$  при равных интенсивностях обоих отраженных лучей находится из соотношения (при нормальном падении из воздуха)

$$n = \sqrt{n_0},$$

где  $n_0$  — абсолютный показатель преломления материала линзы. Оптика с такими слоями называется *просветленной*.

14° *Диффузным (рассеянным) отражением* света называется отражение света во всех возможных направлениях. Оно наблюдается, например, при отражении света от шероховатой поверхности раздела двух сред. Поверхность называется *абсолютно матовой*, если она отражает свет равномерно по всем направлениям.

15° *Рефракцией света* называется искривление световых лучей вследствие преломления в оптически неоднородной среде с непрерывно изменяющимся от точки к точке показателем преломления. Примером рефракции света может служить *астрономическая рефракция* — искривление лучей света от небесных тел при прохождении сквозь атмосферу Земли, обусловленное уменьшением плотности атмосферы (а следовательно, также ее относительной диэлектрической проницаемости и абсолютного показателя преломления) по мере удаления от поверхности Земли. Вследствие астрономической рефракции кажущееся направление на какую-либо звезду составляет с нормалью к поверхности Земли в точке наблюдения несколько меньший угол, чем истинное направление на эту звезду. Искривление лучей света от удаленных земных источников, происходящее в слое атмосферы, прилегающем к поверхности Земли, называется *земной рефракцией*. При некоторых условиях в результате земной рефракции возникают *миражи* — ложные изображения удаленных объектов.

### 3. Поляризация света при отражении и преломлении

1° При произвольном угле падения  $i$  (кроме  $i = 0$  или  $\pi/2$ ) коэффициенты отражения от границы раздела двух изотропных диэлектриков различны для  $s$ - и  $p$ -волн:  $R_s > R_p$  (стр. 588). Поэтому, если падающая волна не поляризована (естественный свет, стр. 652), то отраженная и преломленная волны частично линейно поляризованы. В отраженной волне преобладают колебания вектора  $\mathbf{E}$ , перпендикулярные к плоскости падения ( $s$ -поляризация), а в преломленной — колебания вектора  $\mathbf{E}$ , совершающиеся в плоскости падения ( $p$ -поляризация). В случае отсутствия поглощения степени поляризации обеих волн соответственно равны:

$$\Delta = \frac{I'_s - I'_p}{I'_s + I'_p} = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}, \quad \Delta' = \frac{I_p^d - I_s^d}{I_p^d + I_s^d} = \frac{R_s - R_p}{2 - (R_s + R_p)},$$

где  $I'_s$  и  $I'_p$  — интенсивности отраженной и преломленной  $s$ -волн, а  $I_p^d$  и  $I_s^d$  — то же самое для  $p$ -волн.

2° Если угол падения удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21},$$

то  $R_p = 0$  и отраженный свет полностью поляризован в плоскости падения (*закон Брюстера*). Угол  $i_0$  называется *углом Брюстера*. При угле Брюстера  $i_0 + r_0 = \pi/2$ , т. е. отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. В этом случае

$$R_s = \sin^2 (i_0 - r_0) = \left( \frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2$$

и степень поляризации преломленного света достигает максимального значения

$$\Delta'_{\max} = \frac{(n_{21}^2 + 1)^2 - 4n_{21}^2}{(n_{21}^2 + 1)^2 + 4n_{21}^2}.$$

3° Степень поляризации  $\Delta$  проходящего света может быть значительно повышена путем многократного отражения и преломления в *стопе* плоскопараллельных пластин, установленных так, что угол падения света равен  $i_0$ . В отсутствие поглощения для стопы, состоящей из  $N$  пластин,

$$\Delta = \frac{1 - (1 - R_s)^{2N}}{1 + (1 - R_s)^{2N}}, \quad \text{где } R_s = \left( \frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2.$$

Так, например, для стопы стеклянных пластин ( $n_{21} = 1,5$ ) при  $N = 15$   $\Delta = 0,985$ .

4° Поляризованная  $p$ -волна (стр. 587) при падении на границу раздела диэлектриков под углом Брюстера совершенно не отражается и дает только преломленную волну.

5° При полном внутреннем отражении плоскополяризованного света ( $n_{21} < 1$  и  $i \geq i_{\text{пр}}$ ) между  $s$ - и  $p$ -компонентами отраженной волны возникает разность фаз  $\Delta\varphi$ , обусловленная различием разностей фаз соответствующих компонент отраженной и падающей волн  $\Delta\varphi_s$  и  $\Delta\varphi_p$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s}{2} = \frac{\cos i \sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\sin^2 i}.$$

В результате отраженная волна оказывается эллиптически поляризованной. При полном внутреннем отражении, соответствующем углу  $i_{\text{пр}}$ ,  $\sin i = n_{21}$ ,  $\Delta\varphi_p = \Delta\varphi_s$ , т. е. плоскополяризованный свет остается таким же. При  $\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s = \pi/2$  и  $a_s^0 = a_p^0$  отраженный свет циркулярно поляризован и граница раздела диэлектриков действует подобно «пластинке в четверть волны» (стр. 666).

#### 4. Основы металлооптики

1° Электромагнитная волна, падающая на поверхность металла, частично отражается, а частично проходит внутрь металла. Коэффициент отражения зависит от частоты волны, электропроводности металла и состояния его поверхности.

В случае волн не слишком высокой частоты (радиоволны, инфракрасные лучи и видимый свет) источниками вторичных волн (стр. 584) в металлах в основном являются электроны проводимости (стр. 376). При этом коэффициент отражения от чистых поверхностей металлов, обладающих хорошей проводимостью (натрий, серебро и т. д.), весьма близок к 1. Интенсивность волны, проходящей внутрь металла, невелика и быстро убывает до нуля в пределах тонкого поверхностного слоя вследствие потерь энергии на ленц-джоулеву теплоту. Для идеального проводника эти потери равны нулю и коэффициент отражения равен 1.

При более высоких частотах, соответствующих ультрафиолетовому излучению, существенную роль играют вынужденные колебания связанных электронов в ионах кри-

сталлической решетки. Это приводит к сильному уменьшению коэффициента отражения света металлами (до 0,04 у серебра при  $\nu = 10^{15}$  сек<sup>-1</sup>) и появлению значительной прозрачности тонких металлических пленок.

2° В классической макроскопической электродинамике задача об отражении и преломлении света на поверхности металла сводится к нахождению решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего граничным условиям на проводящей поверхности (стр. 502). Эта задача для однородных, изотропных и немагнитных металлов ( $\mu = 1$ ) может быть формально сведена к аналогичной задаче для границы раздела двух прозрачных диэлектриков путем введения комплексной относительной диэлектрической проницаемости металла:

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0\nu} i \quad (\text{в СИ}),$$

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{2\gamma}{\nu} i \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\gamma$  — удельная электропроводность металла,  $\epsilon$  — его вещественная относительная диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\nu$  — частота света и  $i = \sqrt{-1}$ .

3° Оптические свойства металла характеризуются комплексным абсолютным показателем преломления

$$n' = \sqrt{\epsilon'} = n(1 - i\kappa),$$

где

$$n^2(1 - \kappa^2) = \epsilon$$

и

$$n^2\kappa \begin{cases} \gamma/4\pi\epsilon_0\nu & (\text{в СИ}), \\ \gamma/\nu & (\text{в гауссовой системе}). \end{cases}$$

Действительные величины  $n$  и  $\kappa$  являются *оптическими характеристиками металла*. Они зависят от природы металла и частоты падающего света. Мнимая часть комплексного показателя преломления характеризует поглощение света в металле, происходящее в соответствии с законом Бугера—Ламберта (стр. 683). Она связана с линейным коэффициентом поглощения  $\mu$  (стр. 683) соотношением

$$n\kappa = \frac{c}{4\pi\nu} \mu = \frac{\lambda_0}{4\pi} \mu,$$

где  $c$  и  $\lambda_0$  — скорость и длина волны света в вакууме. Это соотношение, а также понятия комплексных диэлектрической проницаемости и показателя преломления в равной мере применимы не только к металлам, но и к любым другим проводящим или непроводящим средам, сильно поглощающим свет (например, к плазме, к диэлектрикам вблизи полос поглощения и т. д.). Для типичных металлов  $n\kappa \gg n$ ; поэтому поглощение какой-либо среды называется «металлическим», если для этой среды  $\kappa \gg 1$ .

4° Расчет комплексных амплитуд отраженных и преломленных  $s$ - и  $p$ -волн можно производить по формулам Френеля (стр. 587 и 588), где угол  $r$  комплексный (за исключением случая  $i = 0$ ) и связан с углом падения  $i$  соотношением

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n'.$$

Истинный угол  $r_n$  преломления света в металле равен

$$r = \arcsin \left( \frac{\sin i}{n_n} \right),$$

где

$$n_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n^2(1 - \kappa^2) + \sin^2 i + \sqrt{[n^2(1 - \kappa^2) - \sin^2 i]^2 + 4n^4\kappa^2}}.$$

Показатель преломления  $n_n$  зависит от угла падения, т. е. в поглощающей среде фазовая скорость света зависит от направления его распространения.

5° Для произвольного угла падения коэффициенты отражения  $s$ - и  $p$ -волн от поверхности металла равны:

$$R_s = \frac{|a_s^r|^2}{(a_s^0)^2} = \frac{(a - \cos i)^2 + b^2}{(a + \cos i)^2 + b^2},$$

$$R_p = \frac{|a_p^r|^2}{(a_p^0)^2} = \frac{(a - \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2}{(a + \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2} R_s,$$

где  $a = \sqrt{n_n^2 - \sin^2 i}$ ,  $b = \sqrt{n_n^2 - n^2(1 - \kappa^2)}$ ,  $|a_s^r|$  и  $|a_p^r|$  — модули комплексных амплитуд отраженных  $s$ - и  $p$ -волн.

Во всех случаях, кроме  $i = 0$  и  $\pi/2$ ,  $R_s > R_p$ , причем для металлов, в отличие от прозрачных диэлектриков, ни при одном угле падения  $R_p$  не равно нулю. Следовательно, при падении на металл естественного света отраженный свет никогда не может быть полностью линейно поляризован.

В случае нормального падения света  $R_s = R_p$ ,  $a = n_n = n$ ,  $b = n\kappa$  и коэффициент отражения

$$R = \frac{(n-1)^2 + n^2\kappa^2}{(n+1)^2 + n^2\kappa^2}.$$

6° При отражении от металла возникает сдвиг по фазе между отраженной и падающей волнами. Этот сдвиг неодинаков для  $s$ - и  $p$ -волн:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r = \frac{2b \cos i}{\cos^2 i - (a^2 + b^2)},$$

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r = \frac{2b \cos i (a^2 + b^2 - \sin^2 i)}{a^2 + b^2 - n^2(1 + \kappa^2) \cos^2 i},$$

где  $a$  и  $b$  имеют тот же смысл, что в п. 5°.

При падении на металл плоскополяризованной волны между  $s$ - и  $p$ -компонентами отраженной волны возникает сдвиг по фазе  $\Delta\varphi^r = \Delta\varphi_s^r - \Delta\varphi_p^r$ , причем

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi^r = \frac{2b \sin i \operatorname{tg} i}{a^2 + b^2 - \sin^2 i \operatorname{tg}^2 i}.$$

Поэтому при  $i \neq 0$  отраженный свет эллиптически поляризован. В случае нормального падения ( $i = 0$ )

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r = \operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r = \frac{2n\kappa}{1 - n^2(1 + \kappa^2)} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi^r = 0.$$

## ГЛАВА 4

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

#### 1. Когерентные волны

1° Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз не зависит от времени. Этому условию удовлетворяют монохроматические волны (стр. 566), частоты которых одинаковы.

Две волны называются *некогерентными*, если разность их фаз изменяется с течением времени. Монохроматические волны различных частот, а также волны, состоящие из ряда групп — *цугов волн*, начинающихся и обрывающихся независимо друг от друга со случайными значениями фаз в моменты начала и обрыва каждой группы, являются некогерентными.

2° При наложении двух волн, линейно поляризованных в одной плоскости, амплитуда  $A$  результирующей волны связана с амплитудами  $a_1$  и  $a_2$  и фазами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

суперпонируемых волн в рассматриваемой точке волнового поля соотношением

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2).$$

В случае наложения некогерентных волн с различными частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$  амплитуда  $A$  — периодическая функция времени с периодом  $T = \left| \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right|$ . Если, как это обычно имеет место в оптических опытах, наименьшая возможная продолжительность наблюдения  $\tau \gg T$ , то в эксперименте может быть зарегистрировано лишь среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны:  $A^2 = a_1^2 + a_2^2$ . Следовательно, при наложении некогерентных волн наблюдается суммирование их интенсивностей:  $I = I_1 + I_2$ .

3° В случае наложения когерентных волн, линейно поляризованных в одной плоскости,  $\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы суперпонируемых волн в рассматриваемой точке поля. Амплитуда  $A$  результирующей волны не зависит от времени и изменяется от точки к точке поля в зависимости от значения  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ :  $A_{\text{мин}} \leq A \leq A_{\text{макс}}$ , где

$$\begin{aligned} A_{\text{макс}} &= a_1 + a_2 & \text{при } \Delta\varphi = 2m\pi, \\ A_{\text{мин}} &= |a_1 - a_2| & \text{при } \Delta\varphi = (2m + 1)\pi, \end{aligned}$$

где  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Максимальная и минимальная интенсивности результирующей волны соответственно равны:

$$I_{\text{макс}} \sim (a_1 + a_2)^2 \quad \text{и} \quad I_{\text{мин}} \sim (a_1 - a_2)^2.$$

Если  $a_1 = a_2$ , то  $I_{\text{мин}} = 0$  и  $I_{\text{макс}} = 4I_1 = 4I_2$ , т. е.  $I_{\text{макс}}$  вдвое превосходит сумму интенсивностей суперпонируемых когерентных волн.

4° В результате наложения когерентных волн, линейно поляризованных в одной плоскости, происходит ослабление или усиление интенсивности света в зависимости от соотношения фаз складываемых световых волн. Это явление называется *интерференцией света*. Результат наложения когерентных волн, наблюдаемый на экране, фотопластинке и т. д., называется *интерференционной картиной*. При наложении некогерентных волн имеет место только усиление света, т. е. интерференция не наблюдается.

5° Каждый атом или молекула источника света излучает пуч волн в течение промежутка времени порядка  $10^{-8}$  сек (стр. 574). Протяженность пуча имеет величину порядка  $10^7$  длин волн, так что в первом приближении каждый такой пуч можно считать квазимонохроматичным. Однако при спонтанном излучении (стр. 745), которое осуществляется в обычных источниках света, электромагнитные волны испускаются атомами (молекулами) вещества независимо друг от друга, со случайными значениями начальных фаз. Поэтому за время  $\tau$  наблюдения в оптических опытах ( $\tau \gg 10^{-8}$  сек) волны, спонтанно излучаемые атомами (молекулами) любого источника света, некогерентны и при наложении не интерферируют.

Наряду со спонтанным излучением возможен другой тип излучения — индуцированное (вынужденное) излучение, возникающее под действием переменного внешнего электромагнитного поля (стр. 745). Индуцированное излучение когерентно с возбуждающим его монохроматическим излучением. Оно обладает той же частотой, направлением распространения и поляризацией. Эти особенности индуцированного излучения используются в квантовых генераторах — мазерах и лазерах (стр. 745).

6° Для получения когерентных световых волн и наблюдения их интерференции с помощью обычных источников спонтанного излучения применяют метод расщепления волны, излучаемой одним источником света, на две или большее число систем волн, которые после прохождения различных путей накладываются друг на друга. В каждом из двух таких систем волн имеются попарно когерентные между собой и одинаково поляризованные пучи, соответствующие одним и тем же актам излучения атомов источника. Результат интерференции указанных систем волн зависит от разности фаз, приобретаемой когерентными пучами волн вследствие прохождения ими различных расстояний от источника до рассматриваемой точки интерференционной картины.

7° На рис. V.4.1 изображена принципиальная схема интерференционных установок, в которых свет от источника  $S$  с линейным размером  $2b$ , малым по сравнению с длиной волны ( $2b \ll \lambda$ ), расщепляется на две системы когерентных волн с помощью зеркала, призмы и т. д. Здесь  $S_1$  и  $S_2$  — источники когерентных волн (действительные или мнимые изображения источника  $S$  в оптической системе установки),  $2\varphi$  — *апертура интерференции*, т. е. угол в точке  $S$  между крайними лучами, которые после

прохождения через оптическую систему сходятся в точке  $M$  — центре интерференционной картины на экране  $EE$ ,  $2\omega$  — угол схождения лучей в точке  $M$ .

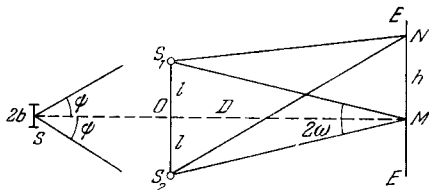


Рис. V.4.1.

8° Обычно  $S$  имеет вид щели, параллельной плоскости симметрии оптической системы. При  $EE \parallel S_1S_2$  интерференционная картина представляет собой полосы, параллельные щели.

В обозначениях  $S_1S_2 = 2l$ ,  $OM = D$  ( $D \gg 2l$ ),  $MN = h$  распределение интенсивностей в интерференционной картине для монохроматического света (стр. 566) длины волны  $\lambda$ ,

$$I = I_0 \cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda D} h,$$

имеет максимумы при

$$h = m \frac{\lambda D}{2l}$$

и минимумы при

$$h = (2m + 1) \frac{\lambda D}{4l},$$

где  $m$  — целое число, называемое *порядком интерференции*, а  $I_0$  — интенсивность в точке  $M$  (при  $h = 0$ ).

9° Расстояние между соседними максимумами или минимумами ( $\Delta m = 1$ ):

$$B = \frac{D\lambda}{2l} \approx \frac{\lambda}{2\omega}.$$

Величина  $B$  называется *шириной интерференционной полосы*. Интерференционная картина тем крупнее, чем меньше  $2l$  (или  $\omega$ ). *Угловая ширина полос интерференции*:

$$\beta = \frac{B}{D} = \frac{\lambda}{2l}.$$

10° Если размеры источника  $2b \ll \lambda$ , то наблюдается отчетливая интерференционная картина. Практически

$2b \gg \lambda$ , и интерференционная картина определяется наложением расщепленных когерентных волн (стр. 597) от разных точек источника. Интерференционная картина остается отчетливой при приближенном условии

$$2b \sin \psi \ll \frac{\lambda}{4},$$

где  $2\psi$  — апертура интерференции,  $\lambda$  — длина волны.

11° Контрастность интерференционной картины определяется из формулы

$$v = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{B}{2\pi b} \left| \sin \frac{2\pi b}{B} \right|,$$

где  $E_{\max}$ ,  $E_{\min}$  — освещенности экрана в местах максимумов и минимумов

картины, т. е. в центрах светлых и темных полос,  $B = \lambda D / 2l$  — ширина интерференционной полосы (п. 9°),  $2b$  — размеры источника. Величина  $v$  называется *видимостью полос*. Зависимость  $v = f(2b/B)$  показана на рис. V.4.2.

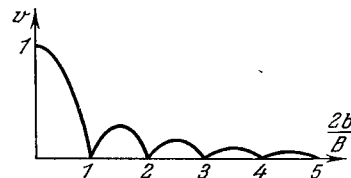


Рис. V.4.2.

12° Интерференционная картина в некогерентном свете, длины волн которого лежат в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , полностью смазывается, когда с интерференционными максимумами  $m$ -го порядка для излучения с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  совпадают максимумы  $(m+1)$ -го порядка для излучения с длиной волны  $\lambda$ :

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Для наблюдения интерференции порядка  $m$  должно выполняться условие

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

Чем больше порядок интерференции  $m$ , который необходимо наблюдать, тем некогерентнее должен быть свет. Даже для света с линейчатым спектром  $\Delta\lambda$  не может быть меньше естественной ширины спектральной линии  $\Delta\lambda_{\text{ест}}$  (стр. 681). Обычно из-за доплеровского и ударного уширения  $\Delta\lambda \gg \Delta\lambda_{\text{ест}}$  (стр. 681, 682).

## 2. Оптическая длина пути

1° *Оптической длиной пути* называется произведение геометрической длины  $d$  пути световой волны в данной среде на абсолютный показатель преломления этой среды  $n$  (стр. 585):

$$s = nd.$$

2° *Разность фаз*  $\Delta\varphi$  двух когерентных волн от одного источника, одна из которых проходит длину пути  $d_1$  в среде с абсолютным показателем преломления  $n_1$ , а другая — длину пути  $d_2$  в среде с абсолютным показателем преломления  $n_2$ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (s_2 - s_1),$$

где  $s_2 = n_2 d_2$ ,  $s_1 = n_1 d_1$ ,  $\lambda$  — длина волны света в вакууме.

3° Если оптические длины пути двух лучей равны,  $s_1 = s_2$ , то такие пути называются *таутохронными* (не вносящими разности фаз). В оптических системах, дающих стигматические изображения (стр. 625) источника света, условию таутохронности удовлетворяют все пути лучей, выходящих из одной и той же точки источника и собирающихся в соответствующей ей точке изображения.

4° Величина  $\Delta s = s_1 - s_2$  называется *оптической разностью хода* двух лучей. Разность хода  $\Delta s$  связана с разностью фаз  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s.$$

5° При  $\Delta s = \lambda/2$  разность фаз  $\Delta\varphi = \pi$ ; удлинению (или укорочению) оптической длины пути одной из волн относительно другой на  $\lambda/2$  соответствует запаздывание (или опережение) первой волны на  $\pi$ . При суперпозиции таких двух волн их амплитуды вычитаются друг из друга, и в случае равенства амплитуд обеих волн амплитуда результирующей волны равна нулю.

6° Наблюдение интерференции возможно лишь при не слишком больших разностях хода  $\Delta s$ . Если  $\Delta s \geq \tau c$  ( $\tau$  — средняя продолжительность одного акта излучения света атомом источника,  $c$  — скорость света в вакууме, а  $\tau c$  — средняя протяженность пуга волн в вакууме), то накладывающиеся волны заведомо некогерентны и не интерферируют.

Условие наблюдения интерференции при оптической разности хода  $\Delta s$  ( $\Delta s \ll \tau c$ ):

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda^2}{\Delta s},$$

т. е. для осуществления интерференции при больших значениях  $\Delta s$  необходима сильная монохроматизация света.

## 3. Интерференция в тонких пленках

1° При наблюдении интерференции монохроматического света, отраженного в вакуум от плоскопараллельной пластинки (рис. V.4.3), оптическая разность хода интерферирующих лучей

$$\begin{aligned} \Delta s &= n(AD + DC) - (BC) + i \\ &+ \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

$$\Delta s = 2hn \cos r + \frac{\lambda}{2},$$

где  $h$  — толщина пластинки,  $n$  — ее абсолютный показатель преломления (стр. 585),  $i$  — угол падения лучей на пластинку,  $r$  — угол преломления лучей в пластинке. Дополнительная разность хода  $\lambda/2$  связана с отражением света от передней поверхности пластинки (оптически более плотной среды), т. е. с изменением при отражении фазы волны на  $\pi$  (стр. 589).

2° Условия максимумов и минимумов для интерференционной картины, образуемой когерентными волнами, отраженными от обеих поверхностей пластинки:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{k\lambda}{2}.$$

Здесь  $k = 2m$ , где  $m$  — целое число, для минимумов и  $k = 2m + 1$  для максимумов. Если отражение от обеих поверхностей пластинки происходит с потерями  $\lambda/2$  (или без них), то интерференционная картина смещается на полшлюсы (стр. 598), т. е. значения  $k = 2m$  соответствуют интерференционным максимумам, а  $k = (2m + 1)$  — минимумам.

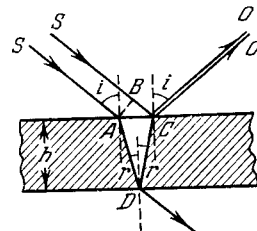


Рис. V.4.3.

3° При освещении плоскопараллельной пластинки параллельным пучком белого света пластинка приобретает в отраженном свете цветную окраску. В соответствии с условием п. 6° на стр. 601 интерференцию в белом свете можно наблюдать лишь на очень тонких пластинках (пленках), толщина которых не превосходит 0,01 мм. В монохроматическом свете можно наблюдать интерференцию и на значительно более толстых пластинках.

4° Если параллельный или почти параллельный ( $i \approx idem$ ) пучок лучей монохроматического света падает на пленку, толщина  $h$  которой неодинакова в разных местах, то в отраженном свете на верхней поверхности пленки видны темные и светлые интерференционные полосы. Эти полосы называют *полосами равной толщины*, так как каждая из них проходит через точки с одинаковыми значениями  $h$ . Полосы равной толщины, локализованные на поверхности пленки, можно наблюдать также и на экране, если на него спроецировать верхнюю поверхность пленки с помощью собирающей линзы. В белом свете наблюдается система цветных интерференционных полос равной толщины.

5° При интерференции на прозрачном клине полосы равной толщины параллельны ребру клина. Ширина интерференционных полос (стр. 598) при угле падения  $i = 0$

$$B = \frac{\lambda}{2na},$$

где  $a$  — угол при вершине клина ( $a \ll 1$  рад),  $n$  — абсолютный показатель преломления вещества клина.

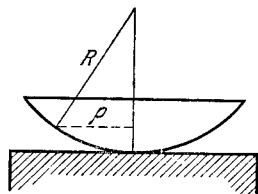


Рис. V.4.4.

В случае протяженного источника света интерференционная картина наблюдается только от той части клина, вблизи его вершины, для которой  $2hi \sin i \ll \lambda$ , где  $i$  — угол падения,  $\psi$  — угол, под которым виден протяженный источник из точки клина, соответствующей данному  $h$ .

6° При интерференции света в воздушном зазоре между плоским черным зеркалом и плотно прижатой к нему плоско-выпуклой линзой (рис. V.4.4, свет падает нормально на плоскую поверхность линзы, параллельную

плоскости черного зеркала) наблюдается система полос равной толщины воздушного зазора, имеющих вид концентрических колец (*кольца Ньютона*). Центры колец совпадают с точкой соприкосновения линзы и зеркала. В отраженном монохроматическом свете радиусы светлых и темных колец равны:

$$r_{\text{светл}} = \sqrt{(2m+1)R \frac{\lambda}{2}} \quad \text{и} \quad r_{\text{темн}} = \sqrt{mR\lambda},$$

где  $R$  — радиус кривизны нижней поверхности линзы,  $\lambda$  — длина волны света в вакууме (воздухе),  $m = 0, 1, 2, \dots$ . В центре интерференционной картины находится темное пятно.

В белом свете различным длинам волн  $\lambda$  соответствуют разные  $r$ , и получается система цветных колец со значительным наложением одних цветов на другие; при больших  $m$  интерференционная картина неразличима для глаза (стр. 599).

7° При освещении плоскопараллельной пластинки монохроматическим сходящимся или расходящимся пучком света каждому значению угла падения  $i$  соответствует свое значение оптической разности хода  $\Delta s$ . Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути света, отраженного пластинкой. Для монохроматического света интерференционная картина имеет вид чередующихся темных и светлых полос. Каждая из этих полос соответствует определенному значению угла падения  $i$ , поэтому их называют *полосами равного наклона*. Полосы равного наклона локализованы в бесконечности. При освещении плоскопараллельной пластинки белым светом полосы равного наклона различно расположены в зависимости от  $\lambda$  и являются цветными. По мере возрастания порядка интерференции  $m$  картина смазывается (стр. 599).

8° В случае интерференции  $N$  когерентных волн с одинаковыми амплитудами  $A_0$  и одинаковыми сдвигами по фазе  $\Delta\varphi_0$  между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -й волнами ( $\Delta\varphi_0$  не зависит от  $i$ ) амплитуда  $A$  и интенсивность  $I$  результирующей волны равны:

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \frac{N \Delta\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right|, \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N \Delta\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}},$$

где  $I_0$  — интенсивность каждой из интерферирующих волн.

Значения  $\Delta\varphi_0 = \pm 2m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) соответствуют *главным максимумам* ( $m$  — порядок главного максимума):  $A = NA_0$ . Интенсивность главного максимума пропорциональна квадрату числа интерферирующих волн:  $I = N^2 I_0$ .

Значения  $\Delta\varphi_0 = \pm \frac{p}{N} 2\pi$ , где  $p$  принимает любые целые положительные значения, кроме 0,  $N$ ,  $2N$  и т. д., соответствуют *интерференционным минимумам*:  $A = I = 0$ . Между каждой парой соседних минимумов находится один максимум (либо главный, либо значительно более слабый *побочный максимум*).

## ГЛАВА 5

### ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

#### 1. Принцип Гюйгенса — Френеля

1° *Дифракцией света* называют совокупность явлений, которые обусловлены волновой природой света и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями (например, при прохождении через отверстия в непрозрачных экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т. д.). В более узком смысле под дифракцией понимают явление огибания светом малых препятствий, т. е. отклонения от законов геометрической оптики (стр. 624).

Математически строгое решение дифракционных задач на основе волнового уравнения (стр. 565) с граничными условиями, зависящими от характера препятствий, как правило, представляет исключительные трудности. Поэтому применяются приближенные методы решения.

2° *Принцип Гюйгенса*: положение фронта распространяющейся волны (стр. 540) может быть в любой момент времени представлено огибающей всех вторичных (*элементарных*) волн. Источниками вторичных волн являются точки, до которых дошел фронт первичной волны в предшествующий момент времени. При этом предполагается, что вторичные волны излучаются только «вперед», т. е. в направлениях, составляющих острые углы с направлением внешней нормали к фронту первичной волны.

Принцип Гюйгенса позволяет объяснить законы отражения и преломления света, однако он недостаточен для объяснения дифракционных явлений.

3° Пусть  $S$  — источник света и  $\sigma$  — произвольная замкнутая поверхность, охватывающая  $S$ .

*Принцип Гюйгенса — Френеля*: в любой точке, находящейся вне поверхности  $\sigma$ , световая волна, возбуждаемая источником  $S$ , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, которые «излучаются» элементарными фиктивными (воображаемыми) источниками, непрерывно распределенными вдоль вспомогательной поверхности  $\sigma$ . Иными словами, вне поверхности  $\sigma$  действительно распространяющаяся (первичная) волна может быть заменена системой когерентных фиктивных вторичных волн, интерферирующих при наложении.

Амплитуда, начальная фаза и диаграмма направленности излучения вторичных волн, «возбуждаемых» элементарным участком  $d\sigma$  вспомогательной поверхности, зависят от характеристик первичной волны (ее амплитуды, фазы и направления распространения) в точках  $d\sigma$ . Обычно вспомогательную поверхность  $\sigma$  совмещают с положением в некоторый момент времени одной из волновых поверхностей первичной волны, так что начальные фазы всех вторичных волн одинаковы. В этом случае амплитуда элементарной вторичной волны, «возбуждаемой» элементом волновой поверхности площадью  $d\sigma$ , пропорциональна выражению  $\varphi \frac{A}{r} d\sigma$ , где  $A$  — амплитуда первичной волны в точках элемента  $d\sigma$ ,  $r$  — расстояние от  $d\sigma$  до рассматриваемой точки  $M$  поля, лежащей вне поверхности  $\sigma$ ,  $\varphi$  — неизвестная функция угла  $\alpha$  между направлением внешней нормали к элементу  $d\sigma$  волновой поверхности и направлением радиус-вектора  $r$ , проведенного из  $d\sigma$  в точку  $M$ . Согласно гипотезе Френеля функция  $\varphi$  максимальна при  $\alpha = 0$  и медленно убывает с ростом  $\alpha$ , обращаясь в нуль при  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$  1).

Для получения правильного значения фазы волны в точке  $M$  необходимо считать, что в точках поверхности  $\sigma$  вторичные волны опережают по фазе первичную волну на  $\pi/2$ .

4° Если между источником световых волн и точкой их наблюдения находится непрозрачный экран с отверстия-

1) В действительности, как показал Кирхгоф, функция  $\varphi \sim (1 + \cos \alpha)$ , т. е. обращается в нуль лишь при  $\alpha = \pi$ . Однако обычно в дифракционных задачах угол  $\alpha$  невелик, и это уточнение несущественно.



ми, то на поверхности экрана амплитуды вторичных волн (стр. 605) принимаются равными нулю, а в отверстиях — такими, как если бы экран отсутствовал. Тем самым предполагается, что материал экрана не играет роли. Это упрощение допустимо, если размеры отверстий велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Амплитуда волны, прошедшей экран, определяется расчетом в точке наблюдения интерференции вторичных волн от вторичных источников, располагающихся в отверстиях экрана.

5° В ряде дифракционных задач, обладающих осевой симметрией, расчет интерференции вторичных волн может быть сильно упрощен с помощью наглядного геометрического метода разбиения фронта волны на кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. Разбиение на зоны производится так, чтобы оптическая разность хода от сходственных границ (внутренних или внешних) каждой пары соседних зон до рассматриваемой точки  $T$  равнялась  $\lambda/2$ . Вторичные волны от сходственных точек двух соседних зон приходят в точку  $T$  в противоположных фазах и взаимно ослабляют друг друга при наложении.

На рис. V.5.1 показано построение зон Френеля в случае сферической волны, возбуждаемой источником  $S$ .

Участок 101 волновой поверхности называется первой (центральной) зоной Френеля, кольцевой участок 21 — второй зоной и т.д. Так как  $R$  и  $L \gg \lambda$ , то при не слишком большом  $i$  площади первых  $i$  зон Френеля одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i = \frac{\pi R L \lambda}{R + L}.$$

В случае плоского волнового фронта

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_i = \pi L \lambda.$$

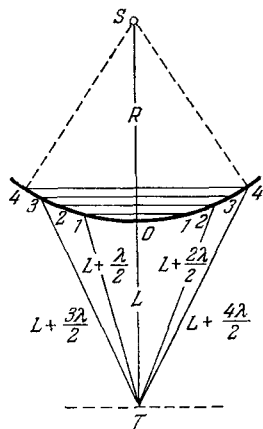


Рис. V.5.1.

## 2. Графическое сложение амплитуд вторичных волн

1° Амплитуду волны в точке наблюдения можно рассчитывать на основе графического метода векторных диаграм сложения одинаково направленных когерентных колебаний (стр. 110), возбуждаемых в этой точке всеми элементарными источниками вторичных волн. В пределах каждой зоны Френеля угол  $\alpha$  между внешней нормалью к фронту и направлением в точку наблюдения, а также расстояния  $r$  до точки наблюдения изменяются крайне незначительно. Поэтому векторная диаграмма, соответствующая одной зоне, имеет вид, близкий к полуокружности. Результирующая амплитуда вторичных волн от всех элементарных участков зоны равна диаметру этой полуокружности.

2° Результирующая амплитуда  $A_i$  вторичных волн от  $i$ -й зоны прямо пропорциональна площади этой зоны. Для равновеликих по площади зон (рис. V.5.1) амплитуда  $A_i$  уменьшается по мере увеличения номера  $i$  зоны благодаря возрастанию угла  $\alpha$  и расстояния  $r$ :  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ . В этом случае векторная диаграмма для системы зон имеет вид медленно скручивающейся спирали (рис. V.5.2).

3° Если сферическая или плоская волна распространяется в однородной среде, т. е. в отсутствие препятствий, так что фронт волны полностью открыт, то ее амплитуда в точке  $T$  (рис. V.5.1) определяется отрезком  $OK_0$  на рис. V.5.2. Этот отрезок равен половине амплитуды  $OK_1$ , соответствующей действию одной только центральной зоны Френеля. Радиус центральной зоны пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием  $ST = R + L$ . Поэтому можно считать, что в однородной среде свет от источника  $S$  распространяется в точку  $T$  вдоль луча  $ST$ , т. е. прямолинейно.

4° Амплитуду и интенсивность света в точке  $T$  можно значительно увеличить, если с помощью специального устройства, называемого *зонной пластинкой*, закрыть четные зоны Френеля, оставив открытыми нечетные зоны (либо наоборот). Если общее число зон Френеля, укладываемых на зонной пластинке, равно  $2k$ , то амплитуда

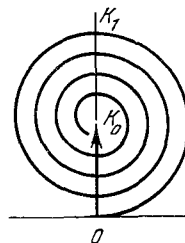


Рис. V.5.2.

да  $A$  световой волны в точке наблюдения  $T$  равна  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_{2k-1}$ . При не слишком больших  $k$   $A \approx kA_1$ , т. е. в  $2k$  раз больше, чем при беспрепятственном распространении света от источника в точку  $T$ .

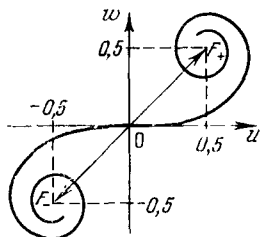


Рис. V.5.3.

произвести графически с помощью *спирали Корню* (рис. V.5.3), уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$u = \int_0^v \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi \quad \text{и} \quad w = \int_0^v \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi,$$

где параметр  $v = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(x - x_0)$ . Здесь  $\lambda$  — длина волны,  $L$  — расстояние от плоскости экрана до точки  $T$  (предполагается, что волна падает на экран нормально к его плоскости),  $x_0$  — координата точки наблюдения  $T$ ,  $x$  — текущая координата точек фронта волны, а ось  $Ox$  проведена в плоскости экрана перпендикулярно к его краю.

Спирали Корню состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат ( $v = 0$ ) и при  $v \rightarrow \pm \infty$  асимптотически навивающихся соответственно на полюс  $F_+(0,5; 0,5)$  и полюс  $F_-(-0,5; -0,5)$ .

Амплитуда  $A$  колебаний в точке  $T$ , возбуждаемых участком фронта волны, ограниченными прямыми  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , равна  $A_0 \cdot B_1 B_2 / F_- F_+$ , где  $A_0$  — амплитуда колебаний в точке  $T$  при полностью открытом фронте волны, а  $B_1 B_2$  — длина отрезка, соединяющего две точки спирали Корню, соответствующие значениям  $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(x_1 - x_0)$

и  $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(x_2 - x_0)$ . В пределе при  $x_1 \rightarrow -\infty$  и  $x_2 \rightarrow \infty$  (полностью открытый фронт волны)  $B_1 B_2 = F_- F_+ = \sqrt{2}$ .

При фиксированных значениях  $x_1$  и  $x_2$  величины  $v_1$  и  $v_2$  зависят от  $x_0$ , т. е. от положения точки  $T$  на плоскости наблюдения дифракционной картины. Поэтому отрезки  $B_1 B_2$ , соответствующие различным  $x_0$ , характеризуют значения *относительной амплитуды*  $A/A_0$  в различных точках дифракционной картины.

### 3. Дифракция Френеля

1° *Дифракцией Френеля* называют такие дифракционные задачи, в которых нельзя пренебрегать кривизной волновых поверхностей падающей и дифрагировавшей волн (либо только дифрагировавшей волны). Дифракция Френеля осуществляется в тех случаях, когда источник света и экран, служащий для наблюдения дифракционной картины, (либо только последний) находятся на конечных расстояниях от препятствия, вызвавшего дифракцию. При дифракции Френеля на экране получается «дифракционное изображение» препятствия. Аналитический расчет этих задач обычно труден. В простейших случаях, рассматриваемых ниже, вид дифракционной картины можно установить либо путем применения метода кольцевых зон Френеля, либо с помощью спирали Корню.

2° *Дифракция на круглом отверстии в непрозрачном экране* (рис. V.5.4). Дифракционная картина на плоскости  $PQ$ , параллельной экрану, имеет вид концентрических чередующихся темных и светлых дифракционных колец. Центры колец лежат в точке  $O$  пересечения с плоскостью  $PQ$  прямой, проведенной из источника  $S$  через центр отверстия. Если для точки  $O$  число зон Френеля, укладываемых в отверстие, нечетно  $(2k+1)$ , то амплитуда в точке  $O$  больше, чем в отсутствие экрана:

$$A \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_{2k+1}),$$

где  $A_1$  и  $A_{2k+1}$  — амплитуды, соответствующие действию 1-й и  $(2k+1)$ -й зон Френеля. Если число зон

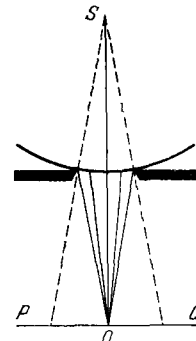


Рис. V.5.4.

четно ( $2k$ ), то амплитуда в точке  $O$  меньше, чем в отсутствие вие экрана:  $A \approx \frac{1}{2} (A_1 - A_{2k})$ . Вид дифракционных картин



Рис. V.5.5.

на плоскости  $PQ$  для этих двух предельных случаев показан на рис. V.5.5.

3° Дифракция на малом круглом экране (рис. V.5.6а). Интенсивность света в точке  $O$ , лежащей против центра экрана, равна четверти интенсивности волны от

первой открытой зоны. Если экран невелик ( $d \sim \sqrt{2L\lambda}$ ), то интенсивность света в точке  $O$  практически такая же, как и в отсутствие экрана. Дифракционная картина на плоскости  $PQ$  изображена на рис. V.5.6б)

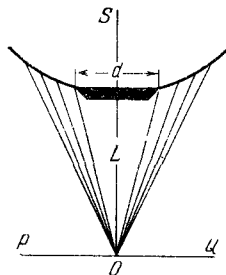


Рис V 5 6а

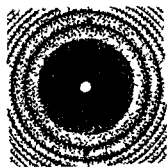


Рис. V.5.6б

4° Дифракция на прямолинейном крае плоского экрана (рис. V.5.7, а). Расчет дифракционной картины можно произвести с помощью спирали Корню (стр. 608). Амплитуда в точке  $T_0$ , лежащей против края экрана ( $B_1 B_2 = OF_+ = = 0,5 F_- F_+$ ), вдвое меньше, чем в отсутствие экрана. Распределение интенсивностей в соответственной точке экрана. Интенсивность света соответственно вчетверо меньше. Распределение интенсивностей на плоскости наблюдения, параллельной плоскости экрана, показано на рис. V.5.7, б.

5° Дифракция на прямолинейной щели (рис. V.5.8, а). Вид дифракционной картины зависит от величины волнового параметра  $p = \sqrt{\lambda L/a}$ , где  $a$  — ширина щели,  $L$  — расстояние от плоскости щели до параллельной ей плоскости наблюдения,  $\lambda$  — длина волны.

Если  $p \ll 1$  («широкая» щель), то амплитуда волны в точке наблюдения, лежащей против середины щели, определяется рассеянием  $F_- F_+$  между полюсами спирали Корню:  $A = A_0$ , т.е. такая же, как в отсутствие экрана. Распределение интенсивностей на плоскости наблюдения показано на рис. V.5.8, б. Вблизи точек  $T_1$  и  $T_2$ , лежащих против краев щели, оно подобно распределению интенсивностей вблизи точки  $T_0$  при дифракции на крае полубесконечного экрана (рис. V.5.7, б).

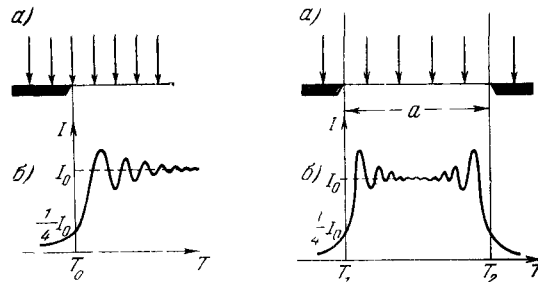


Рис V.5.7

Рис V.5.8

При  $p \sim 1$  колебания интенсивности охватывают всю область  $T_1 T_2$ , соответствующую изображению щели в геометрической оптике, а также наблюдаются и в области геометрической тени (в отличие от монотонного спада интенсивности вблизи краев тени при  $p \ll 1$ ). В зависимости от величины  $p$  в середине дифракционной картины может быть как максимум, так и минимум интенсивности.

При  $p \gg 1$  дифракционная картина имеет такой же вид, как при дифракции Фраунгофера на той же щели (рис. V.5.10). Против середины щели находится основной максимум интенсивности, который тем сильнее «размазан», чем уже щель (рис. V.5.11).

6° Дифракция на длинном прямоугольном экране (рис. V.5.9, а). Относительная амплитуда  $A/A_0$  (стр. 609) в произвольной точке  $T$  на плоскости наблюдения, параллельной экрану, может быть рассчитана с помощью спирали Корню:  $\frac{A}{A_0} = \frac{|a_1 - a_2|}{F_- F_+}$ . Здесь  $a_1$  и  $a_2$  — векторы, проведенные в полюсы спирали Корню  $F_+$  и  $F_-$  из точек

спирали, соответствующих значениям  $v_1$  и  $v_2$  параметра  $v$  (стр. 608) для края экрана.

Если волновой параметр  $p = \frac{\sqrt{\lambda L}}{a} \ll 1$  ( $a$  — ширина экрана), то вблизи границ геометрической тени от экрана либо  $\alpha_1 \approx 0$ , либо  $\alpha_2 \approx 0$ . Поэтому за экраном образуется область тени, на границах которой наблюдаются дифракционные полосы (рис. V.5.9, б), подобные полосам от края полубесконечного экрана (п. 4°).

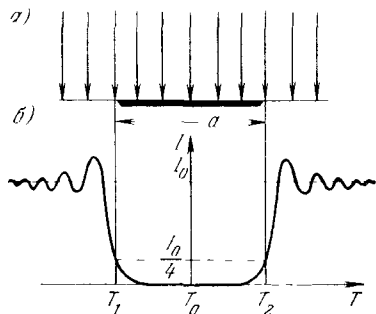


Рис. V.5.9.

Если  $p \gg 1$ , то позади экрана наблюдается система чередующихся темных и светлых полос, причем против середины экрана всегда находится светлая полоса.

7° Если форма краев экранов и отверстий в них отличается от геометрически идеальной, то дифракционные закономерности шп. 2°–6° не выполняются. Степень отклонения от этих закономерностей определяется величиной  $\Delta/\sqrt{\lambda L}$ , где  $\Delta$  — длина основания и высота выступов (шероховатостей) на краях экрана,  $L$  — расстояние от экрана до точки наблюдения,  $\lambda$  — длина волны:

а)  $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda L}} \ll 1$  — нарушения дифракционной картины практически отсутствуют;

б)  $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda L}} \sim 1$  — дифракционная картина сглаживается и может исчезнуть;

в)  $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda L}} \gg 1$  — дифракционные полосы или кольца повторяют конфигурацию выступов и впадин на внешних краях экранов или краях отверстий в них.

#### 4. Дифракция Фраунгофера

1° Дифракцией Фраунгофера или дифракцией в параллельных лучах называется дифракция плоских волн, т. е. такие дифракционные задачи, в которых источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, на котором происходит дифракция. Для практического осуществления этого типа дифракции источник света помещают в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину наблюдают в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной позади препятствия. Дифракционная картина представляет собой «дифракционное изображение» источника света. Этот вид дифракции обычно рассчитывают аналитически.

2° Два препятствия — экраны называют *дополнительными экранами*, если отверстиям в одном из них соответствуют точно такие же по форме, размерам и расположению непрозрачные участки во втором, и наоборот.

*Теорема (принцип) Бабине:* при фраунгоферовой дифракции на каком-либо экране интенсивность дифрагированного света в любом направлении, не совпадающем с направлением распространения первичной плоской волны, падающей на экран, должна быть такой же, как и при дифракции на дополнительном экране.

3° Дифракция на узкой длинной щели. Монохроматический свет падает на щель нормально к ее плоскости. Амплитуда волны в точке наблюдения — побочном фокусе собирающей линзы — равна

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{kX}{2} \sin \varphi\right)}{\frac{kX}{2} \sin \varphi} = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi},$$

где  $\varphi$  — угол дифракции, отсчитываемый от внешней нормали к фронту падающей волны, т. е. от нормали к плоскости щели,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $X$  — ширина щели,  $A_0$  — амплитуда в центре дифракционной картины (при  $\varphi = 0$ ).

Если угол  $\varphi$  мал, то

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin \frac{\pi X}{\lambda} \varphi}{\frac{\pi X}{\lambda} \varphi}.$$

Условие минимумов:

$$A(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \sin \varphi = \pm \frac{n\lambda}{X}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Условия максимумов:

для максимума нулевого порядка  $\varphi = 0$  и  $A = A_0$ ;

для остальных максимумов  $\sin \varphi = \pm \frac{k_m \lambda}{X}$ , где  $k_m$  —

корни уравнения  $\operatorname{tg} k_m \pi = k_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  — порядок максимума;  $k_1 = 1,43$ ,  $k_2 = 2,46$ ,  $k_3 = 3,47$ ,  $k_4 = 4,48$ , ...

Приближенное условие для всех максимумов, кроме нулевого:

$$\sin \varphi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2X} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

4° Распределение интенсивностей ( $I \propto A^2$ ):

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi \right)^2}.$$

Это распределение показано на рис. V.5.10.

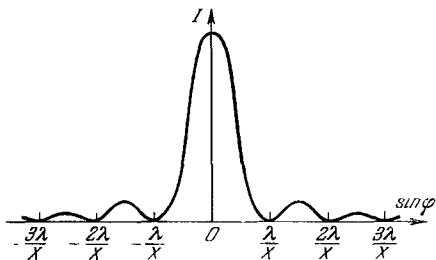


Рис. V.5.10.

Относительная интенсивность максимумов порядка  $m \geq 1$  удовлетворяет следующей приближенной формуле:

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{1}{\pi^2 (2m+1)^2}.$$

5° Расстояние от центра дифракционной картины до первого минимума растет с уменьшением  $X$ . Центральный максимум интенсивности при этом расширяется и уменьшается в высоте (рис. V.5.11). При  $X = \lambda$  первый

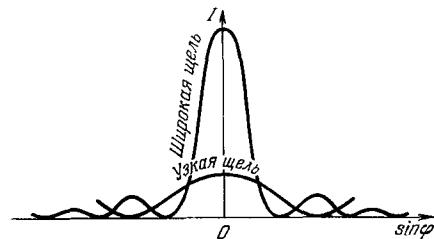


Рис. V.5.11.

минимум уходит в бесконечность. Интенсивность постепенно спадает от центра в плоскости наблюдения к ее краям. При увеличении  $X$  дифракционная картина сужается, главный максимум выделяется резче. При  $X \gg \lambda$  на экране получается четкое изображение источника света, соответствующее законам геометрической оптики.

6° Дифракция на прямоугольном отверстии шириной  $X$  и высотой  $Y$ . Направление распространения дифрагированного света можно задать с помощью двух углов  $\alpha$  и  $\beta$  между этим направлением и осями  $Ox$  и  $Oy$ , проведенными параллельно соответственно сторонам  $X$  и  $Y$  отверстия. В случае нормального падения света на плоскость отверстия направления, соответствующие минимумам интенсивности дифрагированного света, удовлетворяют условиям:

$$X \sin \varphi = \pm m\lambda \quad \text{и} \quad Y \sin \psi = \pm n\lambda,$$

где  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2} - \beta$ , а  $m$  и  $n$  — любые целые неотрицательные числа. Распределение интенсивностей:

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left( \frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi \right)^2} \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi Y}{\lambda} \sin \psi \right)}{\left( \frac{\pi Y}{\lambda} \sin \psi \right)^2}.$$

Интенсивность в направлениях, для которых  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\sin \psi \approx \psi$ :

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi X}{\lambda} \varphi}{\left(\frac{\pi X}{\lambda} \varphi\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi Y}{\lambda} \psi}{\left(\frac{\pi Y}{\lambda} \psi\right)^2},$$

где  $I_0$  — интенсивность света, идущего по направлению, определенному углами  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ .

7° Дифракция на круглом отверстии. В случае точечного источника света при нормальном падении света на плоскость отверстия дифракционная картина представляет собой чередование светлых и темных колец; распределение интенсивности показано на рис. V.5.12. Положения максимумов и минимумов удовлетворяют условию

$$\sin \varphi = \frac{k_m}{R} m \lambda,$$

где  $\varphi = \arctg(\varrho/F)$  — угол дифракции,  $F$  — фокусное расстояние линзы,  $\varrho$  — расстояние от центра дифракционной картины до рассматриваемой ее точки (радиус кольца),  $m = 1, 2, 3, \dots$  —

порядок максимума или минимума и  $R$  — радиус отверстия,  $\lambda$  — длина волны. Значения  $k_{\text{мин}}$ ,  $k_{\text{макс}}$  и относительные интенсивности максимумов  $I_{\text{отн}}$  для  $m = 1, 2, 3$  и 4 приведены в таблице.

$m$	$k_{\text{макс}}$	$k_{\text{мин}}$	$I_{\text{отн}}$
1	0	0,61	1
2	0,41	0,56	0,0175
3	0,44	0,54	0,0042
4	0,46	0,53	0,0016

Сужение отверстия приводит к расплыванию дифракционной картины. При увеличении  $R$  дифракционная картина сгущается в точку.

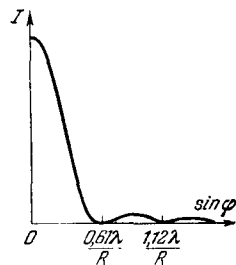


Рис. V.5.12.

8° Дифракция на двух одинаковых параллельных щелях (рис. V.5.13). Свет падает нормально к плоскости щелей. («Главные» минимумы интенсивности удовлетворяют тому же условию, что и для одной щели (стр. 613). Дополнительные минимумы соответствуют направлениям, в которых интерференция света от обеих щелей приводит к его гашению:

$$Z \sin \varphi = \pm (2l + 1) \frac{\lambda}{2},$$

$$l = 0, 1, 2, \dots;$$

здесь  $Z = X + Y$ ,  $X$  — ширина щели,  $Y$  — расстояние между щелями.

Положения главных минимумов:  $X \sin \varphi = \pm n \lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Положения главных максимумов:  $Z \sin \varphi = \pm m \lambda$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  — порядок главного максимума.

Распределение интенсивностей показано на рис. V.5.14. Дифракционные максимумы уже и ярче, чем в

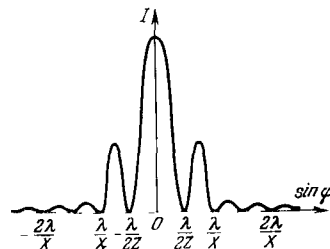


Рис. V.5.14.

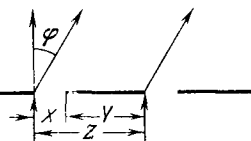


Рис. V.5.13.

случае дифракции на одной щели той же ширины  $X$  (п. 4°). Между двумя соседними главными максимумами располагается один добавочный минимум. При  $X \ll Z$  между двумя главными минимумами располагается значительно число новых минимумов и максимумов. Если  $Z/X$  — рациональное число, т. е.

$Z = \frac{k_1}{k_2} X$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа, не имеющие общих множителей, то главные максимумы порядка  $k_1, 2k_1$  и т. д. отсутствуют.

9° Дифракция на одномерной дифракционной решетке, т. е. на системе из  $N$  одинаковых параллельных щелей в плоском непрозрачном экране, расположенных на

равных расстояниях друг от друга. Величина  $Z = X + Y$ , где  $X$  — ширина щели, а  $Y$  — ширина непрозрачного промежутка между соседними щелями, называется *постоянной (периодом) дифракционной решетки*.

Если свет падает на решетку нормально к ее плоскости, то имеют место следующие условия:

для главных минимумов:  $Z \sin \varphi = \pm n\lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  
 для главных максимумов:  $Z \sin \varphi = \pm m\lambda$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  
 для добавочных минимумов:

$$Z \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{N}, \pm \frac{2\lambda}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\lambda}{N}, \pm \frac{(N+1)\lambda}{N}, \dots$$

Между двумя соседними главными максимумами располагаются  $N-1$  добавочных минимумов, разделенных вторичными максимумами. С увеличением числа щелей интенсивность главных максимумов растет пропорционально  $N^2$ , а энергия пропускаемого света увеличивается пропорционально  $N$ . В результате возникают резкие узкие максимумы, разделенные практически темными промежутками; наибольшая интенсивность вторичных максимумов составляет не более 5% от интенсивности главного максимума.

Угловая ширина  $\Delta\varphi$  главного максимума определяется разностью углов дифракции  $\varphi$ , которые соответствуют двум добавочным минимумам, ограничивающим этот максимум. При  $Z \gg \lambda$  и больших  $N$  угловая ширина главных максимумов не слишком высоких порядков

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\lambda}{NZ}.$$

10° Распределение интенсивности на плоскости наблюдения:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi NZ'}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi Z}{\lambda} \sin \varphi\right)},$$

где  $I_0$  — интенсивность по направлению  $\varphi = 0$  для одной щели. В главных максимумах интенсивность в  $N^2$  раз больше, чем дает в соответствующих местах одна щель. Распределение интенсивностей по главным максимумам ( $m$  — номер максимума):

$$I_m = I_0 \frac{N^2 \lambda^2}{\pi^2 X^2} \sin^2 \frac{\pi m X}{Z}.$$

Если  $Z/X$  — иррациональное число, то  $I_m$  монотонно убывает с ростом порядка максимума  $m$ . Если же  $Z/X$  — рациональное число:  $\frac{Z}{X} = \frac{k_1}{k_2}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа, не имеющие общих множителей, то  $I_m = 0$  при  $m = k_1, 2k_1, \dots$ , т. е. главные максимумы порядков, кратных  $k_1$ , отсутствуют.

В таблице приведены относительные интенсивности главных максимумов для разных порядков дифракции (различные числа  $m$ ) при двух значениях отношения  $Z/X$ .

$Z/X \backslash m$	0	1	2	3	4
2	1	0,4	0	0,045	0
3	1	0,675	0,17	0	0,042

11° Если плоская волна падает на дифракционную решетку под углом  $\theta$  (рис. V.5.15), то условие главных максимумов имеет вид:

$$Z(\sin \varphi_m - \sin \theta) = \pm m\lambda,$$

или

$$2Z \cos\left(\frac{\varphi_m + \theta}{2}\right) \times$$

$$\sin\left(\frac{\varphi_m - \theta}{2}\right) = \pm m\lambda,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Если  $Z \gg \lambda$ , то  $\varphi_m$  мало отличается от  $\theta$  и

$$Z(\varphi_m - \theta) \cos \theta = \pm m\lambda.$$

Дифракционная картина совпадает с наблюдаемой при нормальном падении волны на решетку, когда последняя имеет как бы уменьшенный период  $Z' = Z \cos \theta$ . При скользком падении света ( $\theta \approx \pi/2$ ) можно наблюдать дифракцию даже на очень грубых ( $Z \gg \lambda$ ) решетках.

12° Дифракция на большом числе одинаковых и одинаково ориентированных препятствий. Интенсивность

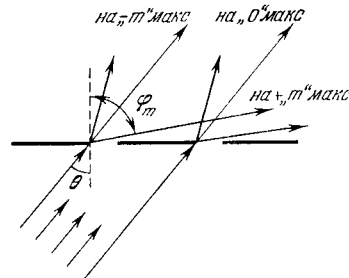


Рис. V.5.15.

$I$  света в произвольной точке дифракционной картины равна произведению двух функций:  $I = F \cdot f$ . Функция  $F$  равна интенсивности света в той же точке дифракционной картины при дифракции только на одном препятствии. Величина функции  $f$  зависит только от взаимного расположения и числа  $N$  препятствий. Так, для одномерной дифракционной решетки (п. 10°)  $F = I_0 \sin^2(aX)/(aX)^2$  и  $f = \sin^2(NaZ)/\sin^2(aZ)$ , где  $a = \frac{\pi}{\lambda} \sin \phi$ .

Если число препятствий велико и они расположены друг относительно друга совершенно хаотично, то  $f \approx N$  и дифракционная картина имеет такой же вид, как и при дифракции на одном препятствии, но ее интенсивность в  $N$  раз больше:  $I = NF$ .

### 5. Дифракционные явления на многомерных структурах

1° Оптически неоднородное тело, коэффициенты пропускания или отражения которого зависят от двух координат на его поверхности, называется *двумерной оптической структурой*. Простейшим примером периодической двумерной структуры является плоская ортогональная двумерная дифракционная решетка, представляющая собой скрещенные под прямым углом вдоль осей  $x$  и  $y$  одномерные дифракционные решетки (стр. 617) с периодами  $Z_1$  и  $Z_2$ .

2° В случае нормального падения света вдоль оси  $z$  на плоскую ортогональную двумерную решетку положения главных максимумов одновременно удовлетворяют двум условиям:

$$Z_1 \cos \alpha = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$Z_2 \cos \beta = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между осями  $x$  и  $y$  решеток и направлением на главный максимум порядка  $(m, n)$ . Угол  $\gamma$  между этим направлением и осью  $z$  определяется из условия

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

откуда

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{Z_1}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{Z_2}\right)^2}.$$

В общем случае падения плоской волны на плоскую ортогональную двумерную решетку вдоль произвольного направления, образующего с осями  $Ox$  и  $Oy$  решетки углы  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , положения главных максимумов одновременно удовлетворяют условиям:

$$Z_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$

$$Z_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа.

3° Тело, оптические свойства которого зависят от всех трех пространственных координат, представляет собой *трехмерную оптическую структуру*. Простейшим примером трехмерной оптической структуры — *пространственной дифракционной решетки* — может служить система одинаковых двумерных плоских решеток, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях вдоль оси, перпендикулярной к их плоскостям. Важным случаем пространственной дифракционной решетки являются кристаллические структуры твердых тел (стр. 266). Вообще говоря, дифракционная картина на трехмерной периодической структуре (пространственной кристаллической решетке) определяется видом симметрии решетки.

Направления на главные максимумы дифракции удовлетворяют *уравнениям Лауэ*:

$$Z_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$

$$Z_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$

$$Z_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = l\lambda,$$

где  $m, n$  и  $l$  — целые числа;  $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$  — периоды решетки вдоль трех ее осей;  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  и  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между осями решетки и соответственно падающими и дифрагированными лучами. Значения  $\cos \alpha, \cos \beta$  и  $\cos \gamma$  должны, кроме того, удовлетворять еще одному (геометрическому) соотношению, связанному с взаимным расположением осей решетки. Например, в случае ортогональной решетки  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Поэтому при заданном направлении падающих лучей, т. е. при фиксированных значениях  $\alpha_0, \beta_0$  и  $\gamma_0$ , наблюдение дифракционных максимумов порядка  $(m, n, l)$  возможно лишь при определенном зна-



чении длины волны. Так, в случае ортогональной решетки

$$\lambda = - \frac{\frac{m}{Z_1} \cos \alpha_0 + \frac{n}{Z_2} \cos \beta_0 + \frac{l}{Z_3} \cos \gamma_0}{\left(\frac{m}{Z_1} \cos \alpha_0\right)^2 + \left(\frac{n}{Z_2} \cos \beta_0\right)^2 + \left(\frac{l}{Z_3} \cos \gamma_0\right)^2}.$$

4° Второй, более простой метод расчета дифракции на кристаллической решетке основан на представлении кристалла в виде систем параллельных плоскостей. Каждая такая плоскость проходит через большое число узлов решетки и называется *сетчатой плоскостью*. Предполагается, что сетчатые плоскости зеркально отражают падающие на них волны. Для возникновения дифракционных максимумов необходимо, чтобы волны, отражаемые всеми параллельными сетчатыми плоскостями, усиливали друг друга при интерференции. Это условие выполняется только при таких соотношениях между длиной  $\lambda$  дифрагирующей волны и углом  $i$  ее падения на сетчатые плоскости, которые удовлетворяют *формуле (условию) Вульфа – Брэгга*:

$$2d \cdot \sin \theta = k\lambda,$$

где  $\theta = \frac{\pi}{2} - i$  – *угол скольжения*,  $d$  – расстояние между двумя соседними сетчатыми плоскостями,  $k = 1, 2, \dots$  – *порядок отражения*. Угол между направлением на дифракционный максимум и падающим лучом равен  $2\theta$ . Формула Вульфа – Брэгга согласуется с уравнениями Лауэ и может быть получена непосредственно из них.

5° Согласно формуле Вульфа – Брэгга на пространственных решетках могут дифрагировать только такие волны, длина которых  $\lambda < 2d$ . Следовательно, неравенство  $d < (\lambda/2)$  представляет собой *условие оптической однородности кристалла* для электромагнитных волн с длиной волны  $\lambda$ . У кристаллических решеток  $d \sim (10^{-7} \div 10^{-8})$  см. Поэтому кристаллы оптически однородны для видимого и ультрафиолетового излучения<sup>1)</sup>. На кристаллических решетках дифрагируют рентгеновские и  $\gamma$ -лучи, а также электроны, нейтроны и другие микрочастицы, длины волн де Бройля которых достаточно малы.

<sup>1)</sup> Это верно только для идеального кристалла, расстояния между узлами которого строго одинаковы. Благодаря тепловому движению реальные кристаллы нельзя считать полностью оптически однородными даже для видимого света. Их оптическая неоднородность проявляется, например, в явлении молекулярного рассеяния света в кристаллах.

6° Зная параметры решетки, можно по положению дифракционных максимумов определять длины  $\lambda$  дифрагирующих волн, т. е. осуществлять *спектральный анализ* последних (например, рентгеновских лучей). Наоборот, зная длину волн, дифрагирующих на исследуемом образце, а также вид дифракционной картины, можно выяснить структуру этого образца. Методы исследования структуры вещества, основанные на дифракции рентгеновских лучей, электронов и нейтронов, называют соответственно *рентгеноструктурным анализом*, *электронографией* и *нейтронографией*.

Электронография широко применяется, в частности, для исследования структуры поверхностного слоя вещества. Это связано с тем, что благодаря сильному взаимодействию электронов с веществом глубина их проникновения в исследуемый образец крайне невелика (порядка  $10^{-5} \div 10^{-7}$  см).

Взаимодействие рентгеновского излучения с веществом имеет электромагнитную природу. Амплитуда рассеяния (стр. 728) рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов возрастает с увеличением порядкового номера  $Z$  элемента. Рассеяние нейтронов веществом обусловлено главным образом их взаимодействием с ядрами атомов (ядерное взаимодействие). Амплитуда рассеяния медленных нейтронов (стр. 859) немонотонно изменяется с изменением  $Z$  и неодинакова для разных изотопов одного и того же элемента. Однако порядок ее величины во всех случаях один и тот же. Поэтому нейтронография обладает существенными преимуществами перед рентгеноструктурным анализом в тех случаях, когда вещество состоит из элементов с очень близкими или с очень сильно различающимися значениями  $Z$  (например, водородосодержащие вещества). Рассеяние нейтронов веществом может быть обусловлено также электромагнитным взаимодействием между магнитными моментами нейтронов и атомов вещества. Поэтому нейтронография применяется также для изучения магнитных материалов.

## 6. Дифракция радиоволн

1° Дифракция радиоволн рассматривается с помощью решения уравнений Максвелла при заданных условиях излучения радиоволн и при заданных граничных условиях (стр. 502) на поверхности раздела Земля – атмосфера.

В задачах дифракции радиоволн атмосфера в первом приближении принимается однородной, с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon = \mu = 1$ . Рефракция радиоволн (стр. 590) не учитывается.

2° Рассматривают обычно *дифракцию на поверхности Земли*, принимаемой идеально шарообразной и однородной по своим электрическим и магнитным свойствам, и *дифракцию на рельефе* поверхности Земли (горы, впадины и т. п.).

Дифракция на поверхности Земли соответствует заходу (приему) радиоволн в область геометрической тени за горизонтом, дифракция на рельефе поверхности Земли — огибанию радиоволнами препятствий, размеры которых сравнимы с длиной радиоволн или меньше ее.

Дифракция радиоволн на поверхности Земли обеспечивает возможность дальней радиосвязи на длинных волнах *«земным лучом»*, огибающим поверхность Земли.

## ГЛАВА 6

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

#### 1. Основные положения

1° *Геометрической (или лучевой) оптикой* называется предельный случай волновой оптики при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda$  — длина волны). В геометрической оптике отводятся от волновой природы света и связанных с ней дифракционных явлений. Это возможно, когда дифракционные эффекты пренебрежимо малы (например, при прохождении света через линзу, диаметр оправы которой  $d \gg \lambda$ ).

2° В геометрической оптике рассматривают и законы распространения света в прозрачных средах на основе представлений о свете как о совокупности *световых лучей* — линий, вдоль которых распространяется световая энергия. В оптически изотропной среде световые лучи ортогональны к волновым поверхностям и направлены в сторону внешних нормалей к этим поверхностям. В оптически однородной среде лучи прямолинейны. На границе раздела двух сред они подчиняются законам отражения и преломления (стр. 586). Пучки световых лучей могут пересекаться, не интерферируя и распространяясь после пересечения независимо друг от друга.

3° *Принцип Ферма*: действительный путь распространения света между двумя точками  $A$  и  $B$  есть такой путь, для прохождения которого свету требуется экстремальное время  $T$  по сравнению с любым другим мыслимым путем между этими точками:

$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{dl}{v} = 0, \quad \text{или} \quad \delta \int_A^B ds = 0,$$

где  $\delta$  — символ вариации (стр. 90),  $dl$  — элемент длины пути из  $A$  в  $B$ ,  $v = v(x, y, z)$  — скорость света в среде;  $ds = n \cdot dl$  — элемент оптической длины пути;  $n = n(x, y, z)$  — абсолютный показатель преломления среды.

4° Принцип Ферма вытекает как следствие из принципа Гюйгенса (стр. 604) при условии, что длина волны света бесконечно мала. Он представляет собой наиболее общий принцип геометрической оптики, из которого можно получить все основные законы геометрической оптики. Так, например, в случае оптически однородной среды

$$\delta \int_A^B ds = n \cdot \delta \int_A^B dl = 0,$$

т. е. из принципа Ферма следует *закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде*. Аналогичным образом выводятся законы отражения и преломления света.

Из принципа Ферма вытекает также *закон обратимости световых лучей (или закон взаимности)*: если луч падает из первой среды на границу со второй под углом  $i$ , преломляется и входит во вторую среду под углом  $r$ , то луч, падающий из второй среды на границу с первой под углом  $r$ , после преломления войдет в первую среду под углом  $i$ . Отсюда следует соотношение для относительных показателей преломления обеих сред:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления обеих сред.

5° В геометрической оптике каждая точка  $S$  источника света считается центром расходящегося пучка лучей, называемого *гомоцентрическим*. Если после отражений и преломлений в оптической системе пучок остается гомотрическим, то его центр  $S'$  называют *стигматическим*

изображением точки  $S$  в оптической системе. Изображение  $S'$  называют *действительным*, если в точке  $S'$  пересекаются сами лучи пучка, и *мнимым*, если в ней пересекаются продолжения этих лучей. Сходственные точки источника и его изображения, а также соответствующие лучи и пучки света называются *сопряженными*.

## 2. Плоское зеркало. Плоскопараллельная пластинка. Призма

1° Гомоцентрический пучок, выходящий из точки  $S$ , после отражения в плоском зеркале (рис. V.6.1) остается гомоцентрическим. Точка  $S^*$  является *мнимым изображением* источника  $S$ , так как оно образовано не самими отраженными лучами, а их продолжениями. Линия  $SS^*$  перпендикулярна к плоскости зеркала, причем  $A = A'$ , где  $A$  и  $A'$  — соответственно расстояния точки и ее изображения от зеркала. Геометрические размеры протяженного источника света и его мнимого изображения одинаковы.

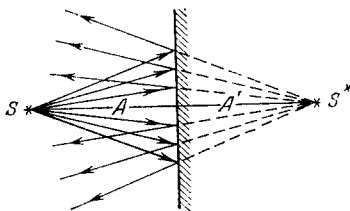


Рис. V.6.1.

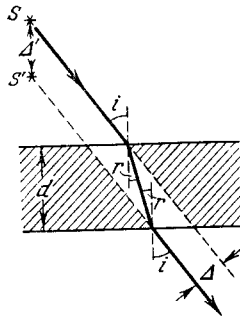


Рис. V.6.2.

2° В плоскопараллельной пластинке (рис. V.6.2) угол падения и угол выхода лучей света из пластинки равны друг другу. Пластинка смещает луч света параллельно самому себе на расстояние

$$\Delta = d \sin i \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right),$$

где  $d$  — толщина пластинки,  $i$  — угол падения лучей,  $n$  — относительный показатель преломления материала пластинки. Источник кажется приближенным к поверх-

ности пластинки на расстояние

$$\Delta' = d \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

При нормальном падении лучей ( $i = 0$ )  $\Delta = 0$  и  $\Delta' = d \frac{n-1}{n}$ .

3° В призме с основанием  $AB$  и преломляющим ребром  $C$  (рис. V.6.3) угол  $\alpha$  между гранями  $AC$  и  $BC$  называется *преломляющим углом призмы*. Луч света, падающий на призму в плоскости, перпендикулярной к ее ребрам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , после преломления отклоняется к основанию  $AB$  призмы на угол  $\varphi = i_1 + r_2 - \alpha$ , где  $i_1$  — угол падения луча на грань  $AC$  и  $r_2$  — угол преломления на грани  $BC$ . Если  $r_2 = i_1$ , то угол отклонения минимален ( $\varphi = \varphi_{\text{мин}}$ ).

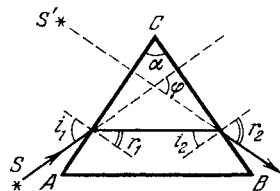


Рис. V.6.3.

Такое расположение призмы относительно источника света называется *установкой под углом наименьшего отклонения*; при этом

$$\sin \frac{\varphi_{\text{мин}} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

где  $n$  — показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.

## 3. Преломление и отражение на сферической поверхности

1° Если две среды имеют границу раздела сферической формы (рис. V.6.4), то после преломления на ней пучок останется гомоцентрическим только в том случае, когда угол раствора его невелик, точнее, когда расстояния  $SA \approx SO$ ,  $S'A \approx S'O_1$ , а точки  $O_1$  и  $O$  практически совпадают.

Прямую, проходящую через точечный источник света  $S$  и центр кривизны  $C$  сферической поверхности, называют *оптической осью сферической поверхности*.

2° Узкий конус световых лучей с осью, нормальной к сферической границе раздела, называется *параксиальным (приосевым) пучком*. Непараксиальные пучки не

дают стигматических изображений и после преломления перестают быть гомоцентрическими (стр. 625).

3° Если сферическая поверхность имеет радиус кривизны  $R$ , а среды по обе стороны от нее обладают абсолютными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , то для параксиальных пучков остается неизменной величина  $Q = n \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right)$ , называемая *нулевым инвариантом Аббе*:

$$Q = n_1 \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния до источника и его изображения,

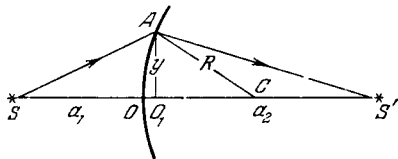


Рис. V.6.4.

отсчитываемые от границы раздела  $O$ , причем в направлении распространения света они считаются положительными, а в противоположном — отрицательными (на рис. V.6.4  $a_2 > 0$  и  $a_1 < 0$ ). Для выпуклой (по отношению к источнику света) поверхности раздела  $R > 0$ , для вогнутой  $R < 0$ .

4° Соотношение п. 3° для параксиальных пучков, записанное в форме

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad \text{или} \quad \frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1,$$

называют *формулой преломляющей сферической поверхности*. Здесь

$$f_1 = -\frac{n_1 R}{n_1 - n_2} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

— *переднее и заднее фокусные расстояния преломляющей сферической поверхности*. Точка  $F_1$ , для которой  $a_1 = f_1$ , и точка  $F_2$ , для которой  $a_2 = f_2$ , называются соответственно *передним и задним фокусами сферической поверхности*. Если источник света  $S$  находится в фокусе  $F_1$  ( $a_1 = f_1$ ), то его изображение получается в бесконечности ( $a_2 = \infty$ ), т. е. сходящийся параксиальный пучок с вершиной в точке  $F_1$  после преломления превращается в систему параллель-

ных лучей. Если источник  $S$  находится в бесконечности ( $a_1 = -\infty$ ), то его изображение получается в фокусе  $F_2$ .

Фокусы  $F_1$  и  $F_2$  действительные, если  $f_1 < 0$  и  $f_2 > 0$ , т. е. если либо  $R > 0$  и  $n_2 > n_1$ , либо  $R < 0$  и  $n_2 < n_1$ . В этом случае изображение  $S'$  источника  $S$  действительное ( $a_2 > 0$ ), если  $\frac{a_1}{f_1} > 1$ .

Положение источника  $S$  и его изображения  $S'$  можно также характеризовать с помощью расстояний  $x_1$  и  $x_2$  соответственно от  $F_1$  до  $S$  и от  $F_2$  до  $S'$ :  $x_1 = a_1 - f_1$  и  $x_2 = a_2 - f_2$ . Величины  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют *формуле Ньютона*:

$$x_1 x_2 = f_1 f_2 = -\frac{n_1 n_2 R^2}{(n_2 - n_1)^2}.$$

5° *Формула сферического зеркала*:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R},$$

где  $R$  — радиус кривизны зеркала,  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния от зеркала до источника света и его изображения (правило знаков для  $a_1$ ,  $a_2$  и  $R$  то же, что в п. 3°). Фокусное расстояние сферического зеркала  $f = R/2$ . Изображение в сферическом зеркале действительное, если оно находится по ту же сторону от зеркала, что и источник ( $a_2 < 0$ ), и мнимое — в противоположном случае ( $a_2 > 0$ ). Изображение в выпуклом зеркале ( $R > 0$ ) всегда мнимое, а в вогнутом ( $R < 0$ ) — действительное, если  $\frac{2a_1}{R} > 1$ , и мнимое, если  $\frac{2a_1}{R} < 1$ .

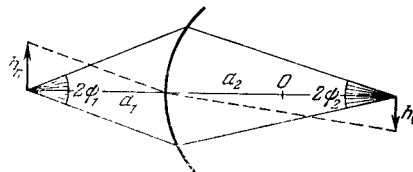


Рис. V.6.5.

6° Если светящийся предмет — небольшой отрезок размером  $h_1$  ( $h_1 \ll |a_1|$ ), перпендикулярный к оптической оси сферической поверхности (рис. V.6.5), то его изображение, полученное с помощью параксиальных лучей, также имеет вид небольшого отрезка, перпендикулярного к оптической оси.

Отношение поперечных линейных размеров изображения ( $h_{\text{и}}$ ) и предмета называют *линейным* или *поперечным увеличением*:

$$Y = \pm \frac{h_{\text{и}}}{h_{\text{п}}}.$$

Знак плюс, т. е.  $Y > 0$ , соответствует *прямому изображению*, а знак минус, т. е.  $Y < 0$ , — *перевернутому изображению* (этот случай изображен на рис. V.6.5).

Для преломления на сферической поверхности при указанных выше условиях

$$Y = \frac{n_1}{n_2} \frac{a_2}{a_1}.$$

Для отражения от сферического зеркала при тех же условиях

$$Y = -\frac{a_2}{a_1}.$$

В обоих случаях, если изображение действительное, то оно перевернутое, а если оно мнимое, то прямое.

Если  $2\psi_1$  и  $2\psi_2$  — максимальные углы раскрытия параaxиальных пучков света соответственно у источника и его изображения (рис. V.6.5), то при преломлении на сферической поверхности выполняется *уравнение (условие) Лагранжа — Гельмгольца*:

$$h_{\text{п}} n_1 \psi_1 = h_{\text{и}} n_2 \psi_2.$$

7° Плоскость предмета и плоскость его изображения называются *сопряженными* относительно сферической поверхности. Сопряженные плоскости, для которых  $Y = 1$ , называются *главными*. Для сферической поверхности обе главные плоскости совпадают с плоскостью, касательной к сферической поверхности в точке пересечения ее с оптической осью.

#### 4. Тонкие линзы

1° *Линзой* называется прозрачное тело, ограниченное двумя криволинейными или криволинейной и плоской поверхностями. В большинстве случаев применяются линзы, поверхности которых имеют сферическую форму.

2° Линза называется *тонкой*, если ее толщина  $d$  мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей  $R_1$  и  $R_2$ . В противном случае линза называется *толстой*.

3° *Главной оптической осью линзы* называют прямую, проходящую через центры кривизны ее поверхностей.

Можно считать, что в тонкой линзе точки пересечения главной оптической оси с обеими поверхностями линзы сливаются в одну точку  $O$  (рис. V.6.6), называемую *оптическим центром линзы*.

Тонкая линза имеет одну *главную ось* (стр. 630), общую для обеих поверхностей линзы и проходящую через оптический центр линзы перпендикулярно к ее главной оптической оси.

Все прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с ее главной оптической осью, называют *побочными оптическими осями линзы*.

Лучи, идущие вдоль оптических осей линзы (главной и побочных), не испытывают преломления.

4° *Формула тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $n_{21} = n_2/n_1$ ,  $n_2$  и  $n_1$  — абсолютные показатели преломления для материала линзы и окружающей среды,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны передней и задней (относительно предмета) поверхностей линзы,  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния до предмета и его изображения, отсчитываемые от оптического центра линзы вдоль ее главной оптической оси. Правило знаков для  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_1$  и  $a_2$  то же, что при преломлении на одной сферической поверхности (стр. 628). Формула тонкой линзы, написанная выше, справедлива только для параaxиальных лучей (стр. 627).

5° Величину

$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

называют *фокусным расстоянием линзы*. Точки, лежащие на главной оптической оси линзы по обе стороны от оптического центра на одинаковых расстояниях, равных  $f$ , называют *главными фокусами линзы*. Для переднего главного фокуса  $F_1$   $a_1 = -f$ , для заднего главного фокуса  $F_2$   $a_2 = f$ . Если источник монохроматического света нахо-

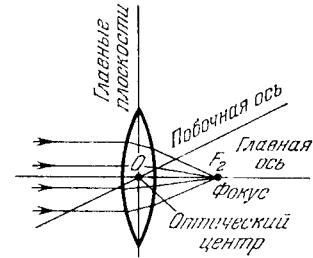


Рис. V.6.6.

дится в точке  $F_1$ , то его изображение получается в бесконечности ( $a_2 = \infty$ ). Наоборот, если источник монохроматического света находится в бесконечности ( $a_1 = -\infty$ ), то его изображение получается в точке  $F_2$ .

Плоскости, проходящие через главные фокусы  $F_1$  и  $F_2$  линзы перпендикулярно к ее главной оптической оси, называют *фокальными плоскостями линзы*. Точки пересечения побочных оптических осей с фокальными плоскостями линзы называют *побочными фокусами линзы*.

6° Линзу называют *собирающей (положительной)*, если ее фокусное расстояние  $f > 0$ . Линзу называют *рассеивающей (отрицательной)*, если ее фокусное расстояние  $f < 0$ .

Для  $n_2 > n_1$  собирающими линзами являются *двоояко-выпуклые, плоско-выпуклые и вогнуто-выпуклые (положительные менисковые линзы)*, утоньшающиеся от центра к краям; рассеивающими являются *двоояковогнутые, плоско-вогнутые и выпукло-вогнутые линзы (отрицательные мениски)*, утолщающиеся от центра к краям. Для  $n_2 < n_1$  классификация линз обратна случаю  $n_2 > n_1$ .

7° Если на собирающую линзу падает пучок параллельных монохроматических лучей, то после преломления в линзе все лучи пересекаются в побочном фокусе линзы, соответствующем побочной оптической оси, параллельной падающим лучам. Если такой же пучок лучей падает на рассеивающую линзу, то после преломления в линзе он превращается в пучок расходящихся лучей, продолжения которых пересекаются в соответствующем побочном фокусе линзы. Поэтому фокусы собирающей линзы действительные, а рассеивающей — мнимые.

8° Для линзы справедлива формула

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{d} = \pm \frac{1}{|f|}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f},$$

где  $s = |a_1|$ ,  $d = a_2$ ,  $f = f_2$  — фокусное расстояние линзы, знак плюс соответствует собирающей линзе, знак минус — рассеивающей.

Величина

$$\Phi = \frac{1}{f},$$

называется *оптической силой линзы*. Для собирающих линз  $\Phi > 0$ , для рассеивающих  $\Phi < 0$ . Оптическая сила линз выражается в *диоптриях*; размерность диоптрий —  $m^{-1}$ .

9° Тонкая линза дает неискаженное изображение предмета, если свет монохроматический, а предмет мал (или достаточно удален от линзы), так что лучи от него идут в непосредственной близости от главной оптической оси линзы (параксиальны).

10° Построение изображения предмета в линзе осуществляется с помощью двух лучей от каждой точки предмета; изображение точки находится в месте пересечения этих лучей после прохождения сквозь линзу (в случае мнимого изображения — в месте пересечения продолжений лучей, прошедших сквозь линзу). Обычно пользуются любыми двумя лучами из следующих трех: лучом, проходящим без преломления через оптический центр линзы; лучом, падающим на линзу параллельно ее главной оптической оси (после преломления в линзе этот луч или его продолжение проходит через задний главный фокус линзы), и, наконец, лучом (либо его продолжением), который проходит через передний главный фокус линзы, а после преломления в линзе идет параллельно ее главной оптической оси.

11° Линейное увеличение тонкой линзы  $Y = a_2/a_1$ . Для действительных изображений  $Y < 0$ , т. е. они перевернуты; для мнимых изображений  $Y > 0$ , т. е. они прямые. При  $a_2 = -a_1$  линза дает действительное перевернутое равное изображение предмета. Это возможно, только когда предмет и изображение оба находятся на двойных фокусных расстояниях от центра линзы.

12° Изображением предметов с помощью линз присущи многочисленные искажения (стр. 641). Для уменьшения этих искажений собирают группы разных линз, называемые *оптическими системами*.

## 5. Центрированные оптические системы

1° Оптическая система называется *центрированной*, если центры кривизны всех ее преломляющих поверхностей лежат на одной прямой, называемой *главной оптической осью системы*.

2° Оптическая система, в которой сохраняется гомоцентричность пучков и изображение геометрически подобно предмету, называется *идеальной оптической системой*. Идеальными можно приближенно считать (стр. 646) центрированные оптические системы, в которых изображения получаются с помощью монохроматических и параксиальных пучков света.

3° Всякая идеальная оптическая система обладает двумя главными и двумя фокальными плоскостями. Главные плоскости перпендикулярны к главной оптической оси системы и в общем случае не совпадают друг с другом. Они представляют собой сопряженные плоскости, соответствующие линейному увеличению  $Y = +1$ . Фокальные плоскости перпендикулярны к главной оптической оси системы и пересекают ее в фокусах. Точки  $H_1$  и  $H_2$  пересечения главных плоскостей с главной оптической осью

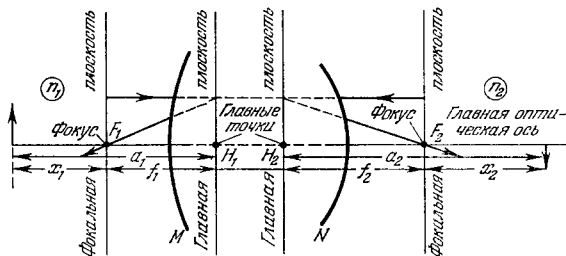


Рис. V.6.7.

системы (рис. V.6.7) называются *главными точками системы*. Расстояния от них до фокусов называются *фокусными расстояниями системы*.

4° Если  $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния оптической системы, положение сопряженных точек (стр. 626) определено их расстояниями  $a_1$  и  $a_2$  до соответствующих главных плоскостей (с учетом правила знаков, стр. 628), а  $x_1$  и  $x_2$  — расстояния соответственно от предмета до переднего фокуса и от изображения до заднего фокуса системы ( $x_1 = a_1 - f_1$ ,  $x_2 = a_2 - f_2$ ), то справедливы формулы:

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1; \quad x_1 x_2 = f_1 f_2; \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}; \quad Y = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления сред, в которых расположены соответственно предмет и его изображение.

Если эти среды одинаковы ( $n_1 = n_2$ ), то

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}; \quad x_1 x_2 = -f^2; \quad f_2 = -f_1 = f.$$

5° Оптическую систему характеризуют *угловым увеличением Z*:

$$Z = \frac{\operatorname{tg} \psi_2}{\operatorname{tg} \psi_1},$$

где  $\psi_1$  — угол раскрыва пучка лучей у точки предмета (стр. 630),  $\psi_2$  — то же для сопряженной точки изображения. В случае перевернутого изображения знаки  $\psi_1$  и  $\psi_2$  считаются различными и  $Z < 0$ , в случае прямого изображения  $Z > 0$ . Линейное (стр. 630) и угловое увеличения связаны соотношением

$$ZY = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если предмет и его изображение находятся в одной среде ( $n_1 = n_2$ ), то

$$ZY = 1.$$

6° Сопряженные точки, для которых  $Z = 1$ , называются *узлами оптической системы*. Сопряженные лучи, проходящие через узлы, параллельны друг другу. Узлы отстоят от фокусов  $F_1$  и  $F_2$  соответственно на расстояниях  $x_1 = f_2$  и  $x_2 = f_1$ . Две плоскости, проходящие через узлы перпендикулярно к главной оптической оси, называются *узловыми плоскостями*.

7° Оптическая система также характеризуется *продольным увеличением X* =  $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$ :

$$X = -\frac{n_2}{n_1} Y^2; \quad XZ = Y.$$

8° Две главные, две фокальные и две узловые плоскости и соответственно точки составляют шесть *кардинальных плоскостей* и *точек системы*. При  $n_1 = n_2$   $f_1 = -f_2$ , узловые точки и плоскости сливаются с главными и остаются лишь четыре кардинальные плоскости и точки. Переход от оптической системы к тонкой линзе приводит к слиянию двух главных плоскостей и точек в одну. Тонкая линза характеризуется тремя кардинальными точками — двумя фокусами и оптическим центром — и соответствующими им кардинальными плоскостями.

9° Для толстой сферической линзы, находящейся в воздухе ( $n_1 = n_2 = 1$ ), фокусное расстояние

$$f = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n} \frac{d}{n} \right)},$$

где  $n$  — абсолютный показатель преломления материала линзы,  $d$  — толщина линзы вдоль главной оптической оси,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы (правило знаков см. на стр. 628).

Передняя ( $H_1$ ) и задняя ( $H_2$ ) главные точки толстой линзы находятся на расстояниях

$$h_1 = -\frac{R_1 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d} \quad \text{и} \quad h_2 = -\frac{R_2 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d},$$

отсчитываемых в направлении распространения света соответственно от точек  $O_1$  и  $O_2$  пересечения главной оптической оси линзы с ее передней и задней поверхностями. Например, для двояковыпуклой ( $R_1 > 0$ ,  $R_2 < 0$ ) или двояковогнутой ( $R_1 < 0$ ,  $R_2 > 0$ ) линзы  $h_1 > 0$  и  $h_2 < 0$ , т. е. главная точка  $H_1$  лежит правее точки  $O_1$ , а главная точка  $H_2$  — левее точки  $O_2$ .

Если  $(n-1)d \ll n|R_2 - R_1|$ , то можно пользоваться приближенными формулами:

$$h_1 = \frac{R_1 d}{n(R_1 - R_2)} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{R_2 d}{n(R_1 - R_2)}.$$

10° Оптическая сила  $\Phi$  и фокусное расстояние  $f$  центрированной системы из двух тонких линз с оптическими силами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, равны:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 d, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

где  $f_1 = 1/\Phi_1$  и  $f_2 = 1/\Phi_2$  — фокусные расстояния обеих линз. Положения главных точек (см. п. 9°):

$$h_1 = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = \frac{f d}{f_1 + f_2 - d},$$

$$h_2 = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{f d}{f_1 + f_2 - d},$$

где  $h_1$  и  $h_2$  отсчитываются от оптических центров соответственно первой и второй линз. В частности, для двух тонких линз, сложенных вплотную ( $d = 0$ ),

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2; \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}; \quad h_1 = h_2 = 0.$$

## 6. Основные оптические приборы

1° Назначением оптических приборов является получение на экране или в светочувствительных устройствах (глаз, фотопленка и др.) четких изображений удаленных

крупных предметов, близких мелких предметов, мелких деталей близких крупных предметов, нормальных предметов в глазу с аномальными оптическими свойствами, предметов, спроектированных на большие экраны. В соответствии с этим оптические приборы подразделяются на зрительные трубы (в том числе телескопы), лупы и микроскопы, очки, проекционные аппараты.

2° Оптические приборы увеличивают угол зрения для изображения по сравнению с углом зрения, соответствующим рассматриваемому предмету. Углом зрения называется угол, под которым в оптическом центре глаза сходятся лучи от крайних точек предмета или его изображения. Увеличение оптического прибора:

$$N = \frac{\text{tg } \varphi_{\text{и}}}{\text{tg } \varphi_{\text{п}}},$$

где  $\varphi_{\text{и}}$  и  $\varphi_{\text{п}}$  — соответственно углы зрения для предмета и его изображения.

3° Оптические приборы обычно дают двумерное (плоское) изображение трехмерных (пространственных) предметов (*объектов*). Ограничение угла раскрытия пучков света (стр. 630) от предмета, необходимое для получения достаточно четкого изображения, осуществляется с помощью *апертурной диафрагмы*. Роль апертурной диафрагмы может играть либо круглое отверстие в непрозрачном экране, либо оправа одной из линз системы.

4° *Входным* и соответственно *выходным зрачками* оптического прибора называются те из отверстий в нем (или их изображений), которые сильнее всего ограничивают углы раскрытия входящих в прибор и выходящих из него пучков света (рис. V.6.8). Если апертурная диафрагма находится внутри прибора, то ее изображение в передней по отношению к предмету части прибора служит входным зрачком, а изображение в задней части прибора — выходным зрачком.

5° Угол, под которым виден диаметр входного зрачка из точки пересечения главной оптической оси прибора с плоскостью предмета, называется *апертурным углом*. Угол, под которым виден диаметр выходного зрачка из точки пересечения главной оптической оси с плоскостью изображения, называется *углом проекции*.

Для ограничения поля зрения (в плоскости предмета), помимо апертурной диафрагмы, применяется *диафрагма поля зрения*, роль которой может также играть оправа



одной из линз системы. Действительный контур диафрагмы поля зрения или его изображение в части системы, расположенной между этой диафрагмой и предметом, называется *люком* (*входным окном*). Наиболее резкое диафрагмирование поля зрения осуществляется тогда, когда плоскости люка и предмета совпадают.

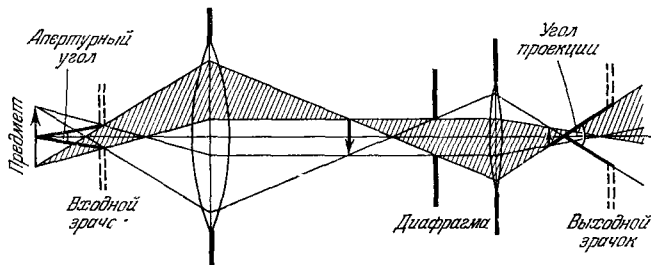


Рис. V.6.8.

6° Отношение площади входного зрачка к квадрату фокусного расстояния передней (по отношению к предмету) линзы — объектива оптического прибора — называется *светосилой* (*геометрической светосилой*)  $I$  объектива. Освещенность (стр. 650) изображения удаленного предмета  $E \sim I$ .

Отношение диаметра входного зрачка к фокусному расстоянию объектива называется *относительным отверстием объектива*  $\Omega$ . Освещенность изображения удаленного предмета

$$E \propto \Omega^2.$$

7° *Луна* представляет собой систему из одной или нескольких линз с небольшим фокусным расстоянием ( $f = 10 \div 100$  мм). Предмет обычно располагают вблизи переднего фокуса линзы, так что его прямое мнимое увеличенное изображение в лупе получается в бесконечности, т. е. рассматривается глазом без усилия аккомодации. Увеличение лупы  $N = D/f$ , где  $D$  — *расстояние наилучшего зрения* (для нормального глаза  $D = 250$  мм).

8° *Микроскоп* представляет собой комбинацию двух систем (из одной или нескольких линз) — *объектива*, разделенных значительным, по сравнению с расстоянием. Малый объект помещается

вблизи переднего фокуса объектива, дающего его увеличенное действительное перевернутое изображение, которое рассматривается с помощью окуляра, играющего роль лупы.

Увеличение микроскопа:

$$N = \frac{\Delta}{f_1} \frac{D}{f_2},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния объектива и окуляра,  $\Delta$  — расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра,  $D$  — расстояние наилучшего зрения.

Для малых  $f_1$  и  $f_2$  величина  $N$  может иметь порядок  $10^3$ . Пределы величины  $N$  кладутся дифракционными явлениями (стр. 646). Освещение предмета в микроскопе широкими пучками света (для увеличения разрешающей способности микроскопа, стр. 647) производится с помощью *конденсора*, фокус которого расположен в плоскости предмета. Объектив должен удовлетворять условию апланатизма (стр. 643) для точек возле его фокуса, а также должен быть ахроматизирован (стр. 645). Значение угла раствора пучка света, поступающего от предмета в объектив микроскопа, ограничено явлением полного внутреннего отражения света на верхней поверхности покровного стекла. Для увеличения этого угла, а также разрешающей способности микроскопа применяют иммерсионные объективы (стр. 647).

9° *Телескоп* представляет собой комбинацию двух оптических систем (из одной или нескольких линз) — объектива и окуляра. Действительное уменьшенное перевернутое изображение удаленного предмета, даваемое объективом, рассматривается через окуляр как лупу. Для этого передняя фокальная плоскость окуляра совмещается с задней фокальной плоскостью объектива (*телескопическая система*).

Увеличение телескопической системы:

$$N = \frac{f_1}{f_2},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния объектива и окуляра.

В *зрительных трубах*, предназначенных для рассматривания удаленных земных предметов, вводится еще одна дополнительная оптическая система. Эта система осуществляет преобразование перевернутого изображения предмета в прямое.

Диаметр выходного зрачка зрительных труб и телескопов не должен превосходить диаметра  $d_0$  зрачка глаза ( $d_0 \approx 6 \div 8$  мм при ночных наблюдениях и  $d_0 \approx 2 \div 3$  мм при дневных наблюдениях), так как в противном случае часть света, прошедшего через оптическую систему, не попадает в глаз наблюдателя. Оптимальное соотношение между диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  объектива и окуляра телескопической системы:  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{f_1}{f_2} = N$ , где  $d_2 \leq d_0$ . В этом случае диаметры входного и выходного зрачков равны соответственно  $d_1$  и  $d_2$ . Верхний предел увеличения  $N$  телескопа с заданным диаметром объектива лимитируется дифракцией света на выходном зрачке, диаметр которого поэтому не должен быть меньше 1 мм.

1° *Спектральными приборами* называют оптические приборы, служащие для получения и исследования спектрального разложения по частотам (или длинам волн) электромагнитного излучения оптического диапазона (т. е. инфракрасного, видимого и ультрафиолетового).

Оптическая система спектральных приборов с пространственным разложением состоит из источника света — узкой входной щели, на которую падает исследуемое излучение, переднего объектива (*коллиматора*), диспергирующего элемента и заднего объектива (*камерного объектива*). В качестве диспергирующих элементов применяют призмы, дифракционные решетки, эталон Фабри — Перо, эшелон Майкельсона и т. д. Соответственно спектральные приборы называют *призмными*, *дифракционными* и *интерференционными*. В призмных спектральных приборах призмы обычно располагают под углом наименьшего отклонения (стр. 627). Коллиматор преобразует расходящийся пучок света от входной щели в параллельный пучок, падающий на диспергирующий элемент. В задней фокальной плоскости камерного объектива образуется *спектр* — система изображений входной щели в монохроматическом свете различных частот. В *спектрографах* спектр регистрируется визуально, а в *спектрометрах* — путем фотографирования. В *спектрометрах* производится измерение интенсивности излучения, которое выходит из узкой щели, расположенной в фокальной плоскости камерного объектива.

11° *Угловой дисперсией спектрального прибора* называется величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где  $d\varphi$  — угловое расстояние, т. е. разница в углах на выходе из призмы (или дифракционной решетки) между лучами света с длинами волн в вакууме, равными  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ . Угловая дисперсия дифракционной решетки в спектре  $m$ -го порядка (стр. 618):

$$D = \frac{m}{Z \cos \varphi},$$

где  $Z$  — период решетки.

*Линейной дисперсией спектрального прибора* называется величина

$$D^* = \frac{dl}{d\lambda},$$

где  $dl$  — расстояние между линиями спектра, соответствующими свету с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ . Линейная дисперсия спектрального прибора зависит от его угловой дисперсии и фокусного расстояния  $f_2$  камерного объектива:  $D^* = D \cdot f_2$ .

## 7. Погрешности оптических систем

1° Искажения изображений в оптических системах, вызываемые использованием широких светосильных пучков лучей, а также применением непохроматического света, называются *абберациями*.

*Геометрическими абберациями* называются погрешности изображения, возникающие в оптической системе из-за использования широких или наклонных пучков монохроматического света. *Хроматическими абберациями* называются искажения изображения, обусловленные явлением дисперсии света (стр. 673) в линзах оптической системы при использовании белого света.

2° Использование широких пучков лучей в оптических системах вызывает *сферическую абберацию* и *кому* изображений.

В результате сферической абберации точка  $S$  предмета (рис. V.6.9), лежащая на главной оптической оси системы, изображается в виде *кружка рассеяния*. Радиус этого кружка называется *поперечной сферической абберацией*  $\rho$ . Расстояние  $\sigma$  между изображениями  $S'$  и  $S''$  точки  $S$ , даваемыми соответственно параксиальными лучами (стр. 627) и крайними лучами пучка, пропускаемого входным зрачком системы (стр. 637), называется *продольной сферической абберацией*.

Поверхность, огибающую все лучи преломленного пучка, называют *каустической поверхностью* (*каустикой*), а ее сечение плоскостью, проходящей через луч, — *каустической линией*. В случае сферической аберрации каустическая поверхность имеет ось симметрии.

3° Сферические аберрации линзы для изображения, получающегося в ее главном фокусе (т. е. для изображения удаленного предмета, получающегося с помощью широкого пучка лучей, параллельного главной оптической оси линзы), называются *главными сферическими аберрациями линзы*.

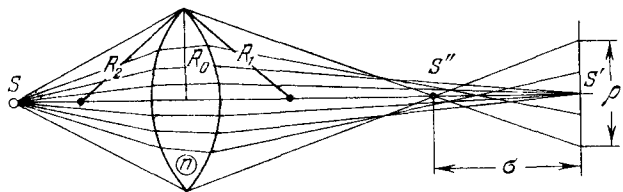


Рис. V.6.9.

Для двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > 0$ ;  $R_2 < 0$ ) главные сферические аберрации равны:

$$\varrho = KR_0^3, \quad \sigma = -f_2KR_0^3,$$

где

$$K = \frac{n^2}{2} \left\{ \frac{1}{R_1^3} \left[ 1 - \frac{2(n^2-1)}{n^3} \right] + \frac{1}{R_1R_2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 2 \right) + \frac{1}{R_2^3} \right\},$$

$R_0$  — радиус линзы,  $n$  — относительный показатель преломления линзы,  $f_2$  — главное фокусное расстояние. С увеличением  $n$  при данной форме линзы абсолютная величина  $\sigma$  уменьшается. Аберрация уменьшается также, если линза обращена к источнику поверхности с большей кривизной ( $R_1 < |R_2|$ ). Если  $R_1 = -R_2 = R$ , то

$$K = \frac{1}{R^2} \left( 2n^2 - 2n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right).$$

Для плоско-выпуклой линзы, обращенной выпуклой стороной к предмету ( $R_1 = R$ ;  $R_2 = \infty$ ),

$$K = \frac{n^2}{2R^2} \left[ 1 - \frac{2(n^2-1)}{n^3} \right].$$

Аберрация наименьшая, когда

$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{4+n-2n^2}{2n^2+n}.$$

4° Для собирающей линзы  $\sigma < 0$ , для рассеивающей  $\sigma > 0$ . Поэтому сферическая аберрация может быть значительно уменьшена путем замены простой линзы системой соответствующим образом подобранных собирающих и рассеивающих линз.

5° *Комой* называют геометрическую аберрацию, возникающую при прохождении через оптическую систему широких пучков света от точки предмета, находящейся на некотором расстоянии от главной оптической оси системы. Изображение этой точки имеет вид вытянутого и неравномерно освещенного пятна, напоминающего комету. Кроме соответствует каустика (стр. 642), имеющая только одну плоскость симметрии, которая проходит через рассматриваемую внеосевую точку предмета и оптическую ось системы.

6° Если для точки  $S$ , лежащей на главной оптической оси системы, устранена сферическая аберрация, то может быть устранена и кома для всех точек небольшого предмета, лежащих вблизи  $S$  в плоскости, перпендикулярной к главной оптической оси. Для этого необходимо, чтобы выполнялось *условие синусов Аббе*:

$$y_1n_1 \sin \psi_1 = y_2n_2 \sin \psi_2.$$

Здесь  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления сред, в которых находятся предмет и его изображение,  $y_1$  и  $y_2$  — расстояния от рассматриваемой точки предмета и ее изображения до главной оптической оси системы, а  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — максимальные углы между главной оптической осью и сопряженными лучами (рис. V.6.5). Условие синусов вытекает из требования таутохронности (стр. 600) путей всех лучей, с помощью которых получается изображение каждой точки предмета. Для параксиальных лучей углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  малы, так что  $\sin \psi_1 = \psi_1$ ,  $\sin \psi_2 = \psi_2$  и условие синусов переходит в уравнение Лагранжа — Гельмгольца (стр. 630).

Условие синусов может быть выполнено только для одной пары сопряженных плоскостей системы, называемых *аплатическими*. Следовательно, безаберрационное изображение малого предмета с помощью широкого пучка света может быть получено только при вполне определенном (расчетном) расстоянии от предмета до оптической

системы. Поэтому *апланатические линзы (апланаты)* широко используют в качестве объективов микроскопов, в которых исследуемый небольшой предмет всегда помещают вблизи переднего главного фокуса объектива.

7° Использование наклонных (в том числе и узких) пучков лучей от точек предмета, удаленных от оптической оси системы, вызывает астигматизм наклонных пучков, искривление и дисторсию изображения.

8° *Астигматизм наклонных пучков* заключается в том, что они не дают стигматических изображений (стр. 625). Если ось пучка лежит в меридиональной плоскости, т. е. в плоскости, проходящей через оптическую ось системы, то изображение точки предмета имеет вид *эллипса рассеяния*, эксцентриситет которого зависит от расстояния плоскости изображения от главного фокуса системы. При некоторых положениях плоскости изображения эллипс вырождается в отрезок прямой, расположенной в меридиональной плоскости, либо в отрезок прямой, расположенной в сагиттальной плоскости, перпендикулярной к меридиональной, либо в кружок рассеяния.

9° *Искривление плоского изображения* проявляется в том, что изображение внеосевых точек плоского предмета не является плоским, а имеет некоторую кривизну, тем более значительную, чем дальше находятся точки от оптической оси системы. Обычно исправляется вместе с астигматизмом в специальных системах линз — *анастигматах*.

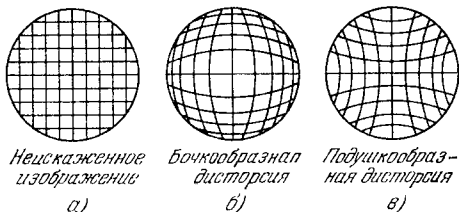


Рис. V.6.10.

10° Переменная величина увеличения  $Y$  по полю изображения приводит к искажению изображения — *дисторсии*. Если  $Y$  убывает от центра поля изображения к периферии, то имеет место *бочкообразная дисторсия* (рис. V.6.10, б), если наоборот, то *подушкообразная ди-*

*сторсия* (рис. V.6.10, в). Оба вида дисторсии устраняются специальными системами линз.

11° Хроматическая aberrация (стр. 641) присуща некорректированным оптическим системам, содержащим преломляющие свет элементы (линзы и призмы). Различают *хроматическую aberrацию положения (продольную хроматическую aberrацию)* и *хроматическую aberrацию увеличения*. Аберрация положения связана с зависимостью положения главного фокуса оптической системы от длины волны света. Она проявляется в том, что изображение точечного осевого источника белого света, получаемое даже с помощью параaxиального пучка, имеет вид концентрических цветных колец. Последовательность цветов колец зависит от положения экрана, на котором получается изображение. Хроматическая разность увеличений проявляется в том, что в белом свете изображение небольшого объекта, перпендикулярного к главной оптической оси, окружено цветной каймой.

Хроматическая разность увеличений связана с хроматической aberrацией положения и одновременно устраняется вместе с последней только в тонкой линзе, положение главной плоскости которой не зависит от длины волны света. В толстой линзе совмещение главных фокусов для длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  устраняет для этих волн лишь хроматическую aberrацию положения. При этом для других длин волн сохраняется *остаточная хроматическая aberrация положения (вторичный спектр)*.

12° Объектив, у которого устранена для двух длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  хроматическая aberrация положения, а также сферическая aberrация, называется *ахроматическим (ахроматом)*. Система из двух тонких линз, склеенных между собой, будет ахроматизирована, если для света с длиной волны  $\lambda$  оптические силы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  первой и второй линз связаны с оптической силой  $\Phi$  системы соотноше-

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{1 - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{\Phi}{1 - \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}},$$

причем  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления материалов линз для света с длиной волны  $\lambda_1$ , а  $n_1 + \Delta n_1$  и  $n_2 + \Delta n_2$  — то же для света с длиной волны  $\lambda_2$  (предполагается, что система находится в воздухе).

Более совершенными являются *апохроматические объективы (апохроматы)*, у которых продольная хромати-

ческая аберрация устранена для трех различных значений  $\lambda$ . Апохроматические объективы имеют во много раз меньшую остаточную хроматическую аберрацию, чем ахроматические объективы.

## 8. Разрешающая способность оптических приборов

1° В любой оптической системе изображение предмета получается с помощью пучка лучей, ограниченного входным зрачком (стр. 637), т. е. представляет собой результат дифракции света в системе. Поэтому изображение не может быть абсолютно стигматичным даже в оптической системе, свободной от каких бы то ни было аберраций. Вследствие дифракции любая точка светящегося предмета изображается в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми интерференционными кольцами (стр. 616). Это явление ограничивает возможность обнаружения на изображении мелких деталей предмета.

2° *Критерий Рэлея*: изображения двух близких самосветящихся (некогерентных) точек можно еще считать раздельными, если центр дифракционного пятна, соответствующего одной точке, совпадает с первым дифракционным минимумом для второй точки.

В соответствии с критерием Рэлея наименьшее угловое расстояние  $\delta\varphi$  между двумя удаленными точечными источниками, изображения которых в объективе телескопа или зрительной трубы можно еще считать раздельными, равно

$$\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $d$  — диаметр входного зрачка. Величину

$$R_0 = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{d}{1,22 \lambda}$$

называют *разрешающей силой* (*разрешающей способностью*) *объектива*. Разрешающая способность  $R_{оп}$  всего прибора зависит также от разрешающей способности  $R_{п}$  приемника (глаза, слоя фотозульсии и т. д.). Приближенно можно считать, что

$$\frac{1}{R_{оп}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_{п}}.$$

*Разрешающая способность глаза* ограничена зернистым строением сетчатки, а также адифракцией света на зрачке.

При хорошей освещенности диаметр зрачка  $d \approx 2$  мм и предельный угол разрешения, обусловленный дифракцией света на зрачке,  $\delta\varphi = 1'$ , что совпадает с разрешающей способностью сетчатки глаза. Разрешающая способность слоя фотозульсии лимитируется размерами зерен и рассеянием света, связанным с сильным различием показателей преломления желатина и кристаллов галоидного серебра.

Увеличение окуляра телескопа или зрительной трубы подбирают так, чтобы все детали предмета, разрешаемые объективом, разрешались бы и приемником.

3° *Разрешающую способность микроскопа* характеризуют величиной  $\delta l$  наименьшего расстояния между двумя точками предмета, видимыми на изображении раздельно. Для самосветящегося предмета эти точки можно рассматривать как независимые (некогерентные) источники света и

$$\delta l = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin \psi},$$

где  $n$  — абсолютный показатель преломления среды, находящейся между предметом и объективом,  $\lambda_0$  — длина волны света в вакууме,  $2\psi$  — апертурный угол, а  $n \sin \psi$  — *числовая апертура объектива*. Обычно в микроскоп рассматривают не самосветящиеся, а освещенные объекты. Поэтому в зависимости от условий освещения свет, рассеиваемый различными точками объекта, в большей или меньшей степени когерентен. Однако и в этом случае при оптимальных условиях освещения наименьшее расстояние между двумя разрешаемыми точками объекта

$$\delta l = \frac{0,5\lambda_0}{n \sin \psi}.$$

Разрешающая способность микроскопа может быть увеличена за счет: а) уменьшения  $\lambda_0$  (*ультрафиолетовая микроскопия*); б) увеличения числовой апертуры объектива путем заполнения пространства между покровным стеклом и объективом жидкостью с большим абсолютным показателем преломления (*иммерсионный объектив*), обычно для иммерсионных жидкостей  $n = 1,4 - 1,6$ .

4° Указанные выше значения разрешающих способностей оптических приборов являются теоретически предельными. Практически они всегда меньше вследствие влияния аберраций, возникающих в оптических системах приборов, а также отсутствия идеального контраста между объектом и окружающим его фоном. Разрешающая

способность глаза, кроме того, уменьшается при недостаточной освещенности объекта.

5° Оптические приборы можно использовать за пределами их разрешающей способности, но уже не столько для установления точной формы или деталей наблюдаемых объектов, сколько для обнаружения этих объектов и наблюдения за их движением.

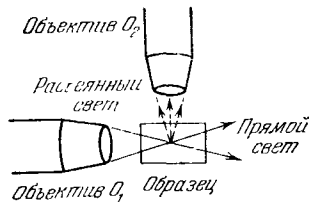


Рис. V.6.11.

6° Очень мелкие (порядка  $10^{-6}$  см) коллоидные частички, размеры которых  $d \ll \lambda$ , наблюдаются в ультрамикроскопе по методу затемненного поля. В этом методе направление наблюдения перпендикулярно к направлению освещения объекта и наблюдаются не прямые, а рассеянные микрочастицами лучи света (явление Тиндалля, стр. 685). Схема ультрамикроскопа показана на рис. V.6.11.

7° В соответствии с критерием Рэля две близкие спектральные линии, получаемые в спектральном приборе, можно еще считать разрешенными, если расстояние между максимумами интенсивностей для этих линий не меньше ширины самих линий (стр. 681).

*Разрешающая способность спектрального прибора*

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

причем  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$  — длины волн линий, которые еще способны разрешить этот спектральный прибор. Величина  $R$  определяется свойствами диспергирующего элемента и приемника, дифракционными явлениями и абберациями оптической системы.

8° *Разрешающая способность призмы* призмного спектрального прибора, в котором роль апертурной диафрагмы играет сама призма, равна

$$R = d_2 \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где  $\varphi$  — угол отклонения призмой света с длиной волны  $\lambda$ , а  $d_2$  — ширина пучка света на выходе из призмы (измеренная в плоскости, перпендикулярной к преломляющему ребру призмы). Если, кроме того, призма

установлена под углом наименьшего отклонения, то

$$R = a \frac{dn}{d\lambda},$$

где  $a$  — длина основания призмы, а  $n$  — ее абсолютный показатель преломления.

## 9. Основы фотометрии

1° *Фотометрией* называется область оптики, в которой рассматриваются измерения энергии, переносимой электромагнитными волнами оптического диапазона (длины волн от  $10^{-8}$  до  $3,4 \cdot 10^{-3}$  м).

В более узком смысле, рассматриваемом ниже, под фотометрией понимают раздел оптики, посвященный измерению действия видимого света на глаз человека (*световые измерения*). Для характеристики этого действия вводятся *световые величины*: световой поток, сила света, освещенность, светимость, яркость.

2° Действие видимого света на глаз зависит не только от физических характеристик света (плотности потока энергии, частоты или спектрального состава), но и от *спектральной чувствительности глаза (видности)  $V_\lambda$* , равной отношению светового потока данного монохроматического излучения к потоку энергии (*лучистому потоку*) этого излучения. Величина  $K_\lambda = V_\lambda / (V_\lambda)_{\text{макс}}$  называется *относительной спектральной чувствительностью глаза (относительной видностью)*. Для нормального глаза  $K_\lambda = 1$  при  $\lambda = 5,55 \cdot 10^{-7}$  м = 5550 Å. Зависимость  $K_\lambda$  от  $\lambda$  (*кривая видности*) приведена на рис. V.6.12.

3° *Световым потоком  $\Phi$*  называют мощность светового (видимого) излучения, оцениваемую по его действию на нормальный глаз. Световой поток измеряют в *люменах* (стр. 909). Для монохроматического излучения, соответствующего максимуму видности ( $\lambda = 5550$  Å), световой поток равен 683 лм, если мощность излучения равна 1 Вт,

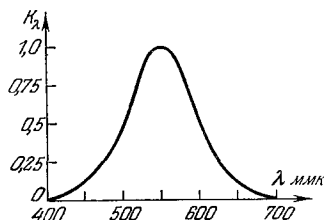


Рис. V.6.12

Световой поток  $\Phi_{\text{полн}}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность, охватывающую источник света, равен мощности светового излучения последнего и называется *полным световым потоком источника света*. Величина  $\Phi_{\text{полн}}$ , характеризующая источник света, не может быть увеличена никакими оптическими системами. Действие последних сводится только к перераспределению светового потока по избранным направлениям за счет других.

*Спектральной плотностью световой мощности источника монохроматического излучения* называют величину  $d\Phi/d\lambda$ ;  $d\Phi$  — полный световой поток источника, приходящийся на интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ .

4° *Точечным источником света* называется источник, излучающий сферические волны (стр. 568). *Силой света точечного источника* называется величина  $I$ , численно равная световому потоку, излучаемому источником в единичный телесный угол. Если точечный источник излучает равномерно по всем направлениям, то его сила света

$$I = \frac{\Phi_{\text{полн}}}{4\pi}.$$

В случае произвольного источника сила света  $I$  малого элемента его поверхности  $dS$  в данном направлении равна

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

где  $d\Phi$  — световой поток, излучаемый элементом поверхности  $dS$  в заданном направлении в телесный угол  $d\Omega$ .

*Средней сферической силой света* произвольного источника называется величина

$$\bar{I} = \frac{\Phi_{\text{полн}}}{4\pi},$$

где  $\Phi_{\text{полн}}$  — полный световой поток источника. Если источник излучает по всем направлениям равномерно (изотропно), то  $\bar{I} = I$ . Сила света измеряется в *свечах* (стр. 909).

5° *Освещенностью  $E$  поверхности* называется отношение приходящегося на нее светового потока  $d\Phi$  к ее площади  $dS$ :

$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

В случае точечного источника света

$$E = I \frac{(\mathbf{nR})}{R^2} = \frac{I \cos \varphi}{R^2},$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из источника к элементу  $dS$  освещаемой поверхности,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к площадке  $dS$ ,  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{n}$  (угол падения).

Если на поверхность падает плоская световая волна, то

$$E = E_0 \cos \varphi,$$

где  $E_0$  — освещенность поверхности, нормальной к направлению распространения волны,  $\varphi$  — угол между этой и рассматриваемой поверхностями. Освещенность измеряется в *люксах и фотах* (стр. 909).

6° *Количество освещения (экспозиция)  $H$*  есть произведение освещенности  $E$  поверхности на продолжительность  $t$  ее освещения (в фотографии — *время экспонирования, или выдержка*):

$$H = Et.$$

7° *Яркостью  $B_\varphi$*  называется поверхностная плотность силы света в заданном направлении, равная отношению силы света к площади проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную к этому направлению:

$$B_\varphi = \frac{dI}{dS \cos \varphi} = \frac{d^2\Phi}{dS d\Omega \cos \varphi},$$

где  $dI$  — сила света элемента  $dS$  светящейся поверхности в направлении, составляющем угол  $\varphi$  с нормалью к элементу  $dS$ ,  $d^2\Phi$  — световой поток, излучаемый элементом  $dS$  в телесный угол  $d\Omega$  в том же направлении. Яркость измеряется в *нитах и стильбах* (стр. 909).

Источник света, для которого  $B_\varphi$  не зависит от  $\varphi$ , называется *подчиняющимся закону Ламберта*. Строго говоря, этому условию удовлетворяет только абсолютно черное тело (стр. 690) и поверхности или среды, равномерно рассеивающие свет по всем направлениям (*идеально рассеивающие*).

8° *Светимостью (светностью)  $R$*  называется поверхностная плотность светового потока излучения, испускаемого поверхностью, равная отношению светового потока  $d\Phi$  к площади  $dS$  светящейся поверхности:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Светимость выражается в люксах и фотах (стр. 909).

Связь между светимостью и яркостью:

$$R = 2\pi \int_0^{\pi/2} B_{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

Для источников, подчиняющихся закону Ламберта,  $R = \pi B$ .

## ГЛАВА 7 ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

### 1. Способы получения поляризованного света

1° Свет, в котором в равной мере представлены электромагнитные волны со всевозможными направлениями колебаний векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (удовлетворяющими условиям взаимной перпендикулярности и перпендикулярности к направлению распространения волны), называется *неполяризованным* или *естественным светом*.

Каждая волновая группа (стр. 569), испущенная атомом в одном акте излучения, плоскополяризована. Совокупное спонтанное излучение множества атомов представляет собой естественный свет.

2° Во всех способах преобразования естественного света в поляризованный из естественного света полностью или частично отбираются составляющие с вполне определенной ориентацией плоскости поляризации. В первом случае получается плоскополяризованная волна (стр. 567), во втором — частично поляризованная волна, в которой имеется преимущественная ориентация плоскости поляризации.

Устройства, служащие для преобразования естественного или частично поляризованного света в свет плоскополяризованный, называют *поляризаторами*. Их действие основано либо на явлении поляризации света при отражении и преломлении на границе раздела двух изотропных прозрачных диэлектриков (стр. 591), либо на явлении оптической анизотропии и связанного с ним двойного лучепреломления (стр. 659), а также на явлении дихроизма (стр. 662).

3° Среду называют *оптически анизотропной*, если ее оптические свойства (в частности, фазовая скорость света и абсолютный показатель преломления) зависят от направления распространения световой волны и характера ее поляризации. Закономерности распространения света в

среде в конечном счете определяются интерференцией первичной и вторичных волн, излучаемых молекулами, атомами или ионами среды вследствие их электронной поляризации под действием поля световой волны. Поэтому оптические свойства среды полностью обусловлены электрическими свойствами этих элементарных излучателей, их взаимным расположением и взаимодействием. Атомы и молекулы в зависимости от их строения могут быть электрически изотропными (поляризуемость не зависит от направления) или анизотропными.

4° При обычных условиях газы, жидкости и аморфные твердые тела оптически изотропны, так как хотя молекулы многих из них электрически и анизотропны, но зато их ориентация полностью хаотична. Всякое упорядочение ориентаций анизотропных молекул в этих средах приводит к возникновению оптической анизотропии (*искусственная оптическая анизотропия*, стр. 662-664).

Оптическая анизотропия кристаллов может быть обусловлена как электрической анизотропией образующих их частиц, так и анизотропией поля сил взаимодействия частиц. Характер этого поля связан с симметрией кристаллической решетки. Все кристаллы, кроме кристаллов кубической системы, оптически анизотропны независимо от электрических свойств образующих их частиц.

В области оптических частот большинство кристаллов *немагнитно*, т. е. их относительная магнитная проницаемость  $\mu \approx 1$ .

Оптическая анизотропия немагнитных, оптически неактивных (стр. 674) и прозрачных (т. е. не поглощающих свет) кристаллов обусловлена анизотропией диэлектрической восприимчивости  $\kappa_e$  и относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 1 + \kappa_e$  (СИ).

### 2. Элементы кристаллооптики

1° Для оптически неактивного, немагнитного, прозрачного, оптически однородного анизотропного кристалла зависимость относительной диэлектрической проницаемости от направления может быть представлена графически. Если из произвольной точки  $O$  кристалла проводить по всевозможным направлениям радиус-векторы  $\mathbf{r}$ , модули которых  $r = \sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость кристалла в направлении  $\mathbf{r}$ , то



концы векторов  $\mathbf{g}$  будут лежать на поверхности эллипсоида, называемого *оптической индикатрисой* (рис. V.7.1). Оси симметрии этого эллипсоида определяют три взаимно перпендикулярных *главных направления в кристалле*.

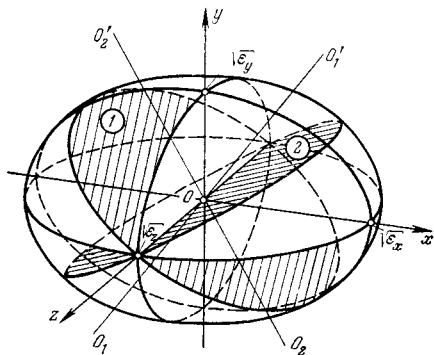


Рис. V.7.1.

В прямоугольной декартовой системе координат, оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  которой проведены вдоль главных направлений, уравнение оптической индикатрисы имеет вид

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1,$$

где  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  — значения  $\epsilon$  вдоль главных направлений, называемые *главными значениями диэлектрической проницаемости кристалла*. Во всех точках однородного кристалла, удовлетворяющего указанным выше требованиям, оптические индикатрисы тождественны, т. е. ориентация и размеры их полуосей одинаковы.

2° В случае оптически изотропного кристалла  $\epsilon$  не зависит от направления ( $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ ) и оптическая индикатриса вырождается в сферу радиуса  $r = \sqrt{\epsilon} = n$ , где  $n$  — абсолютный показатель преломления изотропного кристалла.

*Оптической осью* (или *бинормалью*) анизотропного кристалла в точке  $O$  называют прямую, проходящую через точку  $O$  перпендикулярно к плоскости кругового сечения оптической индикатрисы. В общем случае оптическая индикатриса имеет вид трехосного эллипсоида

( $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ ), так что через точку  $O$  можно провести два различных круговых сечения (плоскости 1 и 2 на рис. V.7.1) и две соответствующие им оптические оси  $O_1O_1'$  и  $O_2O_2'$ . Такой кристалл называют *двуосным*. Если  $\epsilon_x > \epsilon_y > \epsilon_z$  (рис. V.7.1), то оптические оси лежат в плоскости  $xOy$  симметрично относительно оси  $Oy$ . Сходственные оптические оси в различных точках кристалла попарно параллельны друг другу, т. е. характеризуют два избранных направления в двуосном кристалле.

3° Если оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид вращения, то кристалл имеет только одну оптическую ось, совпадающую с осью вращения эллипсоида, и называется *одноосным*. Одноосный кристалл называют *оптически положительным*, если его оптическая ось совпадает с большой осью эллипсоида оптической индикатрисы (эллипсоид вытянут вдоль оси вращения), и *оптически отрицательным*, если она совпадает с малой осью эллипсоида оптической индикатрисы (эллипсоид сжат вдоль оси вращения).

4° В оптически неактивном, немагнитном, прозрачном кристалле связь между проекциями векторов электрического смещения  $\mathbf{D}$  и напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля на главные направления имеет вид:

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z \quad (\text{в СИ}),$$

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z \quad (\text{в гауссовой системе}).$$

Вектор  $\mathbf{D}$  совпадает по направлению с  $\mathbf{E}$  только в тех случаях, когда вектор  $\mathbf{E}$  параллелен одному из главных направлений.

5° Вследствие несовпадения направлений векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  линейно поляризованная плоская монохроматическая волна в анизотропном кристалле характеризуется двумя тройками взаимно перпендикулярных векторов:  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{v}'$  (рис. V.7.2). Скорость  $\mathbf{v}'$  совпадает по направлению с вектором Пойнтинга

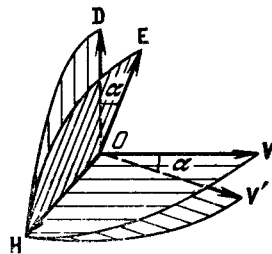


Рис. V.7.2.

(стр. 505) и равна скорости переноса энергии волной. Ее называют *лучевой скоростью волны*. Скорость  $\mathbf{v}$  назы-

вают *нормальной скоростью волны*. Она равна скорости распространения фазы и фронта волны по направлению нормали к последнему. Связь  $v$  и  $v'$ :

$$v' = \frac{v}{\cos \alpha},$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Если  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали к фронту волны, а  $\mathbf{S}$  — единичный вектор луча (т. е. совпадающий по направлению с вектором Пойнтинга), то в гауссовой системе (в СИ надо  $n^2$  заменить на  $\epsilon_0 n^2$ )

$$\mathbf{D} = n^2\{\mathbf{E} - \mathbf{N}(\mathbf{E}\mathbf{N})\}$$

и

$$\mathbf{E} = \frac{1}{n^2 \cos^2 \alpha} \{\mathbf{D} - \mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{S})\},$$

где  $n = c/v$  — абсолютный показатель преломления в направлении  $\mathbf{N}$ .

Если  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты главных направлений кристалла, то  $\mathbf{N} = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}$  и нормальная скорость волны  $v$  в направлении вектора  $\mathbf{N}$  удовлетворяет *уравнению нормалей Френеля*:

$$\frac{N_x^2}{v^2 - b_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - b_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - b_z^2} = 0.$$

Соответственно для показателя преломления  $n$  в направлении  $\mathbf{N}$

$$\frac{N_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{N_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{N_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}} = 0.$$

Здесь  $b_x = c/n_x$ ,  $b_y = c/n_y$  и  $b_z = c/n_z$  — *главные фазовые скорости волны*, равные нормальным скоростям волн, у которых векторы  $\mathbf{D}$  параллельны соответствующим главным направлениям;  $c$  — скорость света в вакууме, а  $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$ ,  $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$  и  $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$  — *главные показатели преломления кристалла*.

Для лучевой скорости  $v'$  в направлении, определяемом единичным вектором  $\mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} + S_z \mathbf{k}$ ,

$$\frac{b_x^2 S_x^2}{v'^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 S_y^2}{v'^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 S_z^2}{v'^2 - b_z^2} = 0.$$

Соответственно показатель преломления кристалла для луча  $n' = c/v'$  можно найти из уравнения

$$\frac{S_x^2}{n'^2 - n_x^2} + \frac{S_y^2}{n'^2 - n_y^2} + \frac{S_z^2}{n'^2 - n_z^2} = 0.$$

6° Из уравнения нормалей Френеля следует, что в общем случае в произвольном направлении  $\mathbf{N}$  имеются два различных значения  $v_1$  и  $v_2$  нормальной скорости волны. Если оси координат выбраны так, что  $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$ , т. е.  $b_x > b_y > b_z$ , то направление  $\mathbf{N}$ , вдоль которого возможно только одно значение нормальной скорости  $v$  ( $v_1 = v_2$ ), удовлетворяет условию:

$$N_x^2 = \frac{b_x^2 - b_y^2}{b_x^2 - b_z^2}, \quad N_y = 0 \quad \text{и} \quad N_z^2 = \frac{b_y^2 - b_z^2}{b_x^2 - b_z^2}.$$

Всего имеется четыре таких направления  $\mathbf{N}$ , соответствующих двум биномалиям — оптическим осям двусносного кристалла (стр. 654). В одноосном кристалле имеется два указанных направления  $\mathbf{N}$ , соответствующих его единственной оптической оси.

Если из точки  $O$  провести по всевозможным направлениям  $\mathbf{N}$  векторы  $v$  соответствующих им нормальных скоростей, то концы этих векторов будут лежать на поверхности, называемой *поверхностью нормалей*. Ее уравнение в прямоугольной декартовой системе координат с началом в точке  $O$  и осями, проведенными вдоль главных направлений кристалла, имеет вид

$$(b_y^2 - r^2)(b_z^2 - r^2)x^2 + (b_z^2 - r^2)(b_x^2 - r^2)y^2 + (b_x^2 - r^2)(b_y^2 - r^2)z^2 = 0,$$

где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ . Это уравнение двухполостной поверхности шестой степени относительно координат. Две полости соответствуют двум значениям нормальной скорости для данного направления  $\mathbf{N}$ . Эти полости пересекаются в четырех точках, лежащих на двух биномалиях двусносного кристалла.

В случае одноосного кристалла с оптической осью  $Oz$  ( $b_y = b_x = v_0$  и  $b_z = v_{eo}$ ) одна из полостей поверхности нормалей имеет вид сферы  $r^2 = v_0^2$ , а вторая — овалоида  $(v_0^2 - r^2)x^2 + (v_{eo}^2 - r^2)(y^2 + z^2) = 0$ . Оваллоид касается сферы в двух точках ее пересечения с оптической осью.

7° Геометрическое место точек, удаленных от точки  $O$  на расстояние  $r = v'$ , где  $v'$  — лучевая скорость в данном направлении, называют *лучевой поверхностью* или *поверхностью волны*. Она представляет собой поверхность

равной фазы, т. е. волновую поверхность для волн, распространяющихся в анизотропном кристалле от точечного источника, расположенного в точке  $O$ . Лучевая поверхность описывается уравнением четвертой степени относительно координат:

$$\frac{b_x^2 x^2}{r^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 y^2}{r^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 z^2}{r^2 - b_z^2} = 0,$$

или

$$r^2(b_x^2 x^2 + b_y^2 y^2 + b_z^2 z^2) - b_x^2(b_y^2 + b_z^2)x^2 - b_y^2(b_x^2 + b_z^2)y^2 - b_z^2(b_x^2 + b_y^2)z^2 + b_x^2 b_y^2 b_z^2 = 0.$$

Эта поверхность также двулопастная, так как каждому направлению единичного вектора  $\mathbf{S}$  луча в общем случае соответствуют два различных значения лучевой скорости  $v'$ . Полости лучевой поверхности пересекаются друг с другом в четырех точках, попарно лежащих на двух прямых, пересекающихся в точке  $O$ . Эти прямые называют *бирадиальми* или *оптическими осями первого рода*.

Для одноосного кристалла имеется одна бирадиаль, которая совпадает с его оптической осью  $Ox$ . В этом случае одна из полостей лучевой поверхности имеет вид сферы  $r^2 = v_o^2 = b_x^2 = c^2/\epsilon_x$ , а вторая — эллипсоида вращения вокруг оптической оси  $Ox$ :

$$\frac{x^2}{v_o^2} + \frac{y^2 + z^2}{v_{eo}^2} = 1,$$

где  $v_o^2 = b_y^2 = b_z^2 = \frac{c^2}{\epsilon_y} = \frac{c^2}{\epsilon_z}$ . Сфера и эллипсоид касаются друг друга в двух точках пересечения их с оптической осью. Если  $v_o > v_{eo}$  (оптически положительный кристалл), то сфера описана вокруг эллипсоида; если  $v_o < v_{eo}$  (оптически отрицательный кристалл), то сфера вписана в эллипсоид.

8° В анизотропном кристалле в произвольном направлении нормали  $\mathbf{N}$  могут распространяться только две плоские волны, линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Направления векторов  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  этих волн совпадают с осями эллипса, получающегося при пересечении оптической индикатрисы с плоскостью, проведенной через точку  $O$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{N}$ . Нормальные скорости этих волн  $v_1$  и  $v_2$  связаны с полуосями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  эллиптического сечения соотношениями:  $v_1 = c/\sqrt{\epsilon_1}$  и  $v_2 = c/\sqrt{\epsilon_2}$ . Векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$

этих волн также лежат в перпендикулярных плоскостях (рис. V.7.3), причем им соответствуют два различных по направлению лучевых вектора  $\mathbf{S}_1$  и  $\mathbf{S}_2$  и два различных значения лучевой скорости  $v'_1 = v_1/\cos \alpha_1$  и  $v'_2 = v_2/\cos \alpha_2$ .

Аналогично для заданного направления луча (вектор  $\mathbf{S}$ ) возможны только два взаимно перпендикулярных направления колебаний вектора  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ ), соответствующие двум значениям  $v'_1$  и  $v'_2$  лучевой скорости в направлении  $\mathbf{S}$  (рис. V.7.4).

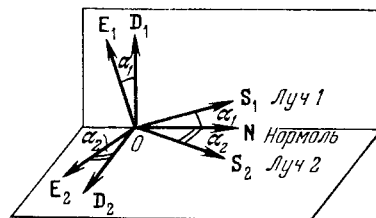


Рис. V.7.3.

### 3. Двойное лучепреломление

1° Зависимость лучевой скорости плоской волны в анизотропном кристалле от направления распространения и характера поляризации волны приводит к тому, что лучи света, преломляясь на поверхности кристалла, раздваиваются. Это явление называют *двойным лучепреломлением*, а анизотропные кристаллы — *двойкопреломляющими кристаллами*.

2° В двuosном кристалле оба преломленных луча не подчиняются обычным законам преломления света на границе раздела двух изотропных сред (стр. 586). В одноосном кристалле один из преломленных лучей, называемый *обыкновенным*, подчиняется этим законам, а второй — им не подчиняется и потому называется *необыкновенным лучом*. В общем случае необыкновенный луч не лежит в плоскости падения и к нему неприменим закон Снеллиуса (стр. 586).

3° Плоскость, проходящую через луч и пересекающую оптическую ось одноосного кристалла, называют *главной плоскостью* (*главным сечением*) кристалла для этого луча.

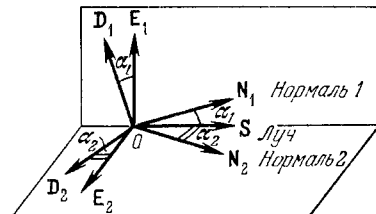


Рис. V.7.4.

Обыкновенный луч поляризован в главной плоскости, т. е. вектор  $\mathbf{E}$  обыкновенного луча перпендикулярен к главной плоскости. Необыкновенный луч поляризован в плоскости, перпендикулярной к главной плоскости: вектор  $\mathbf{E}$  колеблется в главной плоскости. В общем случае плоскости поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей не вполне перпендикулярны друг к другу, так как главные плоскости кристалла для этих лучей могут не совпадать. Однако обычно угол между главными плоскостями для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответствующих одному и тому же падающему лучу, мал. Он в точности равен нулю, если оптическая ось кристалла лежит в плоскости падения.

4° Вектор  $\mathbf{E}$  обыкновенного луча всегда перпендикулярен к оптической оси, т. е. совпадает с главным направлением в одноосном кристалле. Поэтому показатель преломления кристалла для обыкновенного луча не зависит от направления луча в кристалле и равен  $n_o$  (стр. 658).

Вектор  $\mathbf{E}$  необыкновенного луча может составлять с оптической осью любые углы от 0 до  $\pi/2$ . Поэтому показатель преломления кристалла для необыкновенного луча  $n'_e$  зависит от направления этого луча по отношению к оптической оси.

Вдоль оптической оси скорости обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковы ( $n'_e = n_o$ ). В направлении, перпендикулярном к оптической оси,  $n'_e = n_e$  (стр. 658), т. е. наиболее сильно отличается от  $n_o$ . Для оптически положительного кристалла  $n'_e \geq n_o$ , для оптически отрицательного кристалла  $n'_e \leq n_o$ .

5° Если на плоскую поверхность одноосного кристалла падает неполяризованная монохроматическая плоская световая волна, то в кристалле распространяются две линейно поляризованные плоские волны — обыкновенная и необыкновенная. Их волновые поверхности можно найти по принципу Гюйгенса, т. е. как огибающие волновых поверхностей соответствующих вторичных волн. Волновые поверхности вторичных волн определяются их лучевыми скоростями. Для обыкновенных волн они имеют сферическую форму, а для необыкновенных — эллипсоид вращения вокруг прямых, проведенных через точечные источники вторичных волн в направлении оптической оси кристалла.

Графический метод построения с помощью принципа Гюйгенса фронтов обыкновенной и необыкновенной плос-

ких преломленных волн в оптически отрицательном одноосном кристалле, а также соответствующего им обыкновенного и необыкновенного лучей показан на рис. V.7.5. На этом рисунке  $AB$  — фронт плоской волны, падающей на плоскую поверхность  $AC$  кристалла;  $MN$  — направление оптической оси (лежит в плоскости падения);  $Co$  — фронт обыкновенной волны,  $Ce$  — фронт необыкновенной волны;  $AS_o$  — обыкновенный луч,  $AS_e$  — необыкновенный луч. Направления колебаний векторов  $\mathbf{E}$  в обыкновенном и необыкновенном лучах показаны соответственно точками и поперечными черточками, нанесенными на лучи.

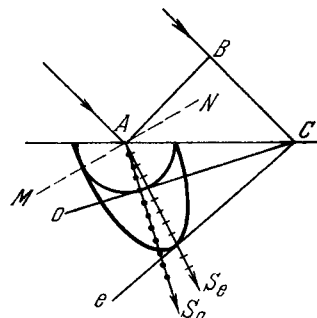


Рис. V.7.5.

Для обыкновенной волны направления луча и нормали к фронту всегда совпадают. Для необыкновенной волны они, вообще говоря, различны. Нормаль к фронту необыкновенной волны, в отличие от необыкновенного луча, всегда лежит в плоскости падения.

6° Закономности распространения света в кристаллической пластинке, вырезанной из одноосного кристалла, зависят от ориентации оптической оси по отношению к поверхности пластинки и падающему лучу.

а) Пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси. Если луч света направлен вдоль оптической оси, то двойное лучепреломление отсутствует и свет остается неполяризованным. Если луч света направлен под углом  $i$  к оптической оси, то происходит двойное лучепреломление. Отношение  $\sin i / \sin r_o$ , где  $r_o$  — угол преломления обыкновенного луча, постоянно. Отношение  $\sin i / \sin r_e$ , где  $r_e$  — угол преломления необыкновенного луча, меняется в зависимости от угла падения  $i$ .

б) Пластинка вырезана параллельно оптической оси. Если плоскость падения света параллельна оптической оси кристалла, то обыкновенный и необыкновенный лучи лежат в той же плоскости. Нормаль к фронту необыкновенной волны преломлена слабее (сильнее), чем нормаль к

фронту обыкновенной волны в отрицательном (положительном) кристалле. Для соответствующих лучей закоммерности могут быть иными. Если плоскость падения составляет угол  $\alpha$  с оптической осью ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), то обыкновенный луч остается в плоскости падения, а необыкновенный выходит из нее. Если плоскость падения перпендикулярна к оптической оси, то обыкновенный и необыкновенный лучи остаются в плоскости падения. В этом случае показатель преломления необыкновенного луча не зависит от его направления и равен  $n_{eo}$ .

7° Если на одноосный кристалл падает естественный свет, то интенсивности обыкновенной  $I_o$  и необыкновенной  $I_e$  волн на входе в кристалл одинаковы:

$$I_o = I_e = \frac{1}{2} I,$$

где  $I$  — интенсивность падающего света.

8° В поглощающих анизотропных кристаллах поглощение света, вообще говоря, также анизотропно, т. е. различно в зависимости от ориентации электрического вектора волны по отношению к кристаллографическим осям. Это явление называют *дихроизмом* (или *плеохроизмом*). Так, например, одноосный кристалл турмалина поглощает обыкновенный луч во много раз сильнее, чем необыкновенный. Поглощение зависит также от частоты света. Поэтому при освещении дихроичного кристалла белым светом кристалл по-разному окрашен в зависимости от направления наблюдения.

#### 4. Искусственное двойное лучепреломление

1° Оптически изотропное тело при его деформации становится оптически анизотропным. В случае одностороннего сжатия или растяжения оптические свойства тела подобны оптическим свойствам одноосного кристалла, направление оптической оси которого совпадает с направлением деформации. Максимальное различие в показателях преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей соответствует направлению лучей, перпендикулярному к оптической оси, и зависит от степени деформации:

$$n_o - n_{eo} = k\sigma,$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение (стр. 282),  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств тела.

Обнаружение искусственной анизотропии является очень чувствительным методом оценки напряжений в твердых телах (*поляризационно-оптический метод*).

2° Оптически изотропный диэлектрик (твердый, жидкий или газообразный) может стать оптически анизотропным при внесении его во внешнее однородное электрическое поле. Это явление называют *эффектом Керра*. Под действием поля диэлектрик по своим оптическим свойствам становится подобным одноосному кристаллу, оптическая ось которого параллельна направлению поля.

Для монохроматического света, распространяющегося в веществе в направлении, перпендикулярном к вектору  $E_{вн}$  напряженности внешнего однородного электрического поля, разность показателей преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей

$$n_{eo} - n_o = kE_{вн}^2.$$

Величина  $B = k/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны света в вакууме, называется *постоянной Керра*. Значение  $B$  зависит от природы вещества, длины волны  $\lambda$  и температуры, как правило, быстро уменьшаясь с ростом последней.

При комнатной температуре и  $\lambda = 589 \text{ нм}$  абсолютная величина постоянной Керра для жидкостей порядка  $(10^{-14} \div 10^{-12}) \text{ м/в}^2 \sim (10^{-7} \div 10^{-5}) \text{ СГСЭ}$ , а для газов порядка  $(10^{-19} \div 10^{-16}) \text{ м/в}^2 \sim (10^{-12} \div 10^{-9}) \text{ СГСЭ}$ . Для большинства веществ  $B > 0$ , т. е. эти вещества по своим оптическим свойствам в однородном электрическом поле подобны оптически положительным одноосным кристаллам.

Часто пользуются другой константой Керра  $K = B\lambda/n$ , где  $n$  — абсолютный показатель преломления вещества в отсутствие внешнего электрического поля. Величина  $K$  численно равна относительной разности показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей  $(n_{eo} - n_o)/n$  во внешнем электрическом поле единичной напряженности. Явление Керра практически безынерционно: запаздывание в изменении  $n_{eo} - n_o$  по сравнению с изменением  $E_{вн}$  меньше  $10^{-9} \text{ сек}$ .

3° В газах с неполярными электрически анизотропными молекулами эффект Керра обусловлен поляризацией этих молекул во внешнем электрическом поле и нарушением полной хаотичности в расположении этих молекул. В результате совместного влияния ориентирующего действия электрического поля на наведенные дипольные моменты молекул и соударений между молекулами в процессе их теплового движения в газе возникает преимуще-

щественная ориентация молекул. При этом относительная диэлектрическая проницаемость газа  $\epsilon$  максимальна в направлении вектора  $\mathbf{E}_{\text{вн}}$ , так что  $n_{e0} > n_o$  и  $B > 0$ .

В газах с полярными электрически анизотропными молекулами во внешнем электрическом поле возникает преимущественная ориентация постоянных дипольных моментов молекул по направлению  $\mathbf{E}_{\text{вн}}$ . Однако направление максимальной поляризуемости молекул может составлять некоторый угол  $\alpha$  с направлением ее постоянного дипольного момента. Если  $\alpha = 0$ , то  $n_{e0} > n_o$  и  $B > 0$ ; если  $\alpha = \pi/2$ , то  $n_{e0} < n_o$  и  $B < 0$ .

Для жидкостей эта классическая ориентационная теория Ланжевена — Борна описывает явление Керра лишь качественно, так как в ней не учитываются силы межмолекулярного взаимодействия, которые в жидкостях играют существенную роль.

4° Возникновение искусственной оптической анизотропии у изотропных веществ (жидкостей, стекол, коллоидов) под действием сильного однородного внешнего магнитного поля называется *эффектом Коттона — Мутона*. При этом оптической осью является направление магнитного поля. Разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном к оптической оси, зависит от напряженности магнитного поля  $H_{\text{вн}}$ :

$$n_{e0} - n_o = k' H_{\text{вн}}^2.$$

Величина  $C = k'/\lambda$  называется *постоянной Коттона — Мутона*; она зависит от природы вещества, длины волны  $\lambda$  и температуры.

### 5. Анализ поляризованного света. Эллиптическая и круговая поляризация света

1° Для исследования характера и степени поляризации света применяются устройства, называемые *анализаторами*. В качестве анализаторов используются те же устройства, которые служат для получения линейно поляризованного света (поляризаторы).

2° Если световая волна, входящая в анализатор, линейно поляризована, то для интенсивности волны, выходящей из анализатора, справедлив *закон Малюса*:

$$I = k_a I_0 \cos^2 \gamma,$$

где  $I_0$  — интенсивность входящего света,  $k_a$  — *коэффициент прозрачности анализатора*,  $\gamma$  — угол между плоскостями поляризации входящего света и света, пропускаемого анализатором.

3° Если плоская, монохроматическая, линейно поляризованная световая волна падает в направлении, перпендикулярном к поверхности двоякопреломляющей кристаллической пластинки, вырезанной параллельно оптической оси, то сквозь пластинку по одному направлению с различной скоростью распространяются два луча (обыкновенный и необыкновенный), электрические колебания в которых происходят взаимно перпендикулярно (стр. 660). Разность фаз  $\Delta\varphi$ , возникшая между этими лучами после прохождения через пластинку толщиной  $d$ , равна

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_{e0}) d,$$

где  $\lambda$  — длина световой волны в вакууме,  $n_o$  и  $n_{e0}$  — соответственно показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей.

4° Амплитуды колебаний электрических векторов  $\mathbf{E}_o$  и  $\mathbf{E}_{e0}$  необыкновенного и обыкновенного лучей в условиях п. 3° соответственно численно равны:

$$a = A \cos \alpha, \quad b = A \sin \alpha,$$

где  $A$  — амплитуда падающей волны,  $\alpha$  — угол между направлением колебаний вектора  $\mathbf{E}$  в падающем поляризованном свете и направлением оптической оси кристалла (стр. 654). Вышедшая из пластинки результирующая волна описывается уравнением эллипса

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - \frac{2E_x E_y}{ab} \cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi),$$

где  $E_x$  — напряженность электрического поля необыкновенного луча,  $E_y$  — то же для обыкновенного луча,  $a$  и  $b$  — соответственно амплитуды обоих лучей,  $\Delta\varphi$  — разность фаз между обоими лучами (направления колебаний в обоих лучах, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях  $x$ ,  $y$ , перпендикулярны к направлению  $z$  распространения волны, стр. 563). При  $n_o > n_{e0}$  обыкновенный луч отстает по фазе от необыкновенного, при  $n_o < n_{e0}$  — опережает его по фазе. Таким образом, плоскополяризованная волна после прохождения через пластинку в общем случае становится эллиптически поляризованной (стр. 567).

5° Если угол  $\alpha = 0^\circ$ , то в пластинке будет распространяться только необыкновенный луч. Если  $\alpha = 90^\circ$ , то в пластинке будет распространяться только обыкновенный луч. В обоих случаях волна выйдет из пластинки без изменения поляризации.

6° Если толщина пластинки  $d$  такова, что оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами  $\Delta s = (2m+1)\lambda/4$  (пластинка в четверть волны) и разность фаз между этими лучами  $\Delta\varphi = -(2m+1)\pi/2$ , где  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ , то для результирующей волны (при  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1;$$

оси эллипса поляризации совпадают с главными направлениями в пластинке. В частном случае  $\alpha = 45^\circ$  амплитуды обыкновенного и необыкновенного лучей равны друг другу и

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2,$$

т. е. волна является циркулярно поляризованной (стр. 567). При  $\Delta\varphi = -\pi/2$  свет идет *влево*, при  $\Delta\varphi = \pi/2$  — *правая круговая поляризация*.

7° Если толщина пластинки  $d$  такова, что оптическая разность хода между обоими лучами  $\Delta s = (2m+1)\lambda/2$  (пластинка в полволны), то  $\Delta\varphi = -(2m+1)\pi$  и (при  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )

$$\frac{E_x}{a} + \frac{E_y}{b} = 0,$$

т. е. свет остается плоскополяризованным. Плоскость его поляризации при этом поворачивается на угол  $180^\circ - 2\alpha$ .

8° Если толщина пластинки  $d$  такова, что оптическая разность хода обоих лучей  $\Delta s = m\lambda$  (пластинка в целую волну), то  $\Delta\varphi = -2m\pi$  и (при  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )

$$\frac{E_x}{a} - \frac{E_y}{b} = 0,$$

т. е. свет остается плоскополяризованным без изменения направления поляризации.

9° Если входящая в анализатор световая волна эллиптически поляризована, то интенсивность света на выходе из анализатора зависит от ориентации главной плоскости анализатора (т. е. плоскости поляризации пропускаемого им света) относительно осей эллипса, характеризующего эллиптически поляризованный свет. При вращении главной плоскости анализатора вокруг направления па-

дающих на него лучей эллиптически поляризованного света интенсивность света, проходящего через анализатор, изменяется. Аналогичная закономерность наблюдается и в том случае, если падающий свет не эллиптически, а частично поляризован, т. е. если в нем имеется преимущественная ориентация направлений колебаний векторов **E** и **H**. Если входящая в анализатор волна циркулярно поляризована, то вращение главной плоскости анализатора не влияет на интенсивность прошедшего через него света.

## 6. Интерференция поляризованных лучей

### А. В параллельных лучах

1° Естественный свет состоит из множества элементарных некогерентных пучков волн, соответствующих различным актам спонтанного излучения атомов или молекул источника света. Эти пучки линейно поляризованы во всевозможных плоскостях. Обыкновенная волна, распространяющаяся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, в основном образуется за счет тех пучков волн, плоскости поляризации которых наклонены к главной плоскости кристалла под углами  $\alpha < \pi/4$ . Соответственно необыкновенная волна в основном образуется за счет тех пучков, у которых  $\alpha > \pi/4$ . Поэтому обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, некогерентны.

Обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него линейно поляризованного света, когерентны, так как содержат попарно когерентные составляющие, соответствующие каждому из пучков волн, прошедших через поляризатор.

2° При нормальном падении плоской, монохроматической, линейно поляризованной волны на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси, на выходе из пластинки между обыкновенной и необыкновенной волнами возникает разность фаз (стр. 665):

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_{eo}) d.$$

Хотя эти волны когерентны и распространяются по одному и тому же направлению, они не могут интерферировать,

так как поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. В результате их наложения получается эллиптически поляризованный свет.

Для получения интерференционного усиления или ослабления этих двух волн необходимо с помощью анализатора (стр. 664) выделить из них составляющие, поляризованные в одной плоскости и способные поэтому интерферировать (рис. V.7.6).

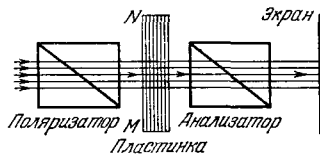


Рис. V.7.6.

от угла  $\alpha$  между его плоскостью поляризации и оптической осью пластинки, а также от взаимной ориентации направлений плоскостей I и II поляризации света, пропускаемого поляризатором и анализатором.

Анализатор и поляризатор называются *скрещенными*, если угол  $\beta$  между плоскостями I и II равен  $\pi/2$ , и *параллельными*, если  $\beta = 0$ .

3° *Интерференция в монохроматическом свете.* Схематически результат интерференции представлен в таблице.

$\Delta\varphi$	$\beta$	$\alpha$	Результат интерференции на экране
$(2m+1)\pi$	0	$\pi/4$	темнота
	0	$0; \pi/2$	свет
	$\pi/2$	$\pi/4$	свет
$m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$	$\pi/2$	$0; \pi/2$	темнота
	0	$\pi/4$	свет
$2m\pi$	0	$\pi/4$	свет
	0	$0; \pi/2$	свет
	$\pi/2$	$\pi/4$	темнота
$m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$	$\pi/2$	$0; \pi/2$	темнота

4° *Интерференция в белом свете.* Величина  $\Delta\varphi$  для света разных длин волны оказывается различной. Поэтому

из соотношений п. 3° для монохроматических составляющих белого света следует, что при любых значениях  $\Delta\varphi$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  экран освещен, за исключением случаев  $\beta = \pi/2$  и  $\alpha = 0$  или  $\pi/2$ , когда свет через анализатор не проходит. Если  $\beta = 0$  и  $\alpha = 0$  или  $\pi/2$ , то экран освещен белым светом, во всех остальных случаях экран освещен окрашенным светом, причем при  $\alpha = \pi/4$  изменение угла  $\beta$  с 0 на  $\pi/2$  изменяет окраску экрана на противоположную.

5° Если пластинка имеет переменную толщину  $d$ , то значения разности фаз  $\Delta\varphi$  оказываются различными в разных местах пластинки. При освещении монохроматическим светом на экране наблюдается система темных и светлых интерференционных полос, каждая из которых соответствует точкам равной толщины пластинки (полосы равной толщины, стр. 602). В случае освещения белым светом на экране наблюдаются разноцветные полосы равной толщины.

### Б. В сходящихся лучах

1° При падении на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси, сходящегося пучка лучей монохроматического света, прошедшего через поляризатор и собирающую линзу (рис. V.7.7), разность фаз на выходе из

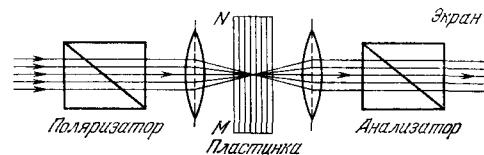


Рис. V.7.7.

пластинки между обыкновенным и необыкновенным лучами, идущими в пластинке вдоль одного и того же направления,

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{\cos \psi} (n_o - n_e'),$$

где  $\lambda$  — длина световой волны в вакууме,  $d$  — толщина пластинки вдоль нормали к ее поверхности,  $n_o$  и  $n_e'$  — показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, составляющем угол  $\psi$  с



нормалью к плоскости пластинки. Если ось конуса сходящихся лучей нормальна к поверхности пластинки, то интерференционная картина, даваемая анализатором при скрещении его с поляризатором ( $\beta = \pi/2$ , стр. 668), имеет вид, показанный на рис. V.7.8.

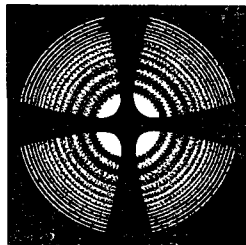


Рис V.7.8.

Интерференционные максимумы образуют систему концентрических темных и светлых колец. Если освещение производится белым светом, то наблюдается система концентрических *изохроматических колец* всевозможных цветов. Кольца пересекаются темным или светлым прямоугольным крестом, положение которого соответствует пересечению с плоскостью экрана плоскостей поляризации и колебаний света, пропущенного

поляризатором. При  $\alpha = 0$  или  $\pi/2$  и  $\beta = 0$  крест светлый, при  $\alpha = 0$  или  $\pi/2$  и  $\beta = \pi/2$  крест темный.

Если сходящийся пучок белого света проходит через плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно оптической оси, то *изохроматические кривые* близки к гиперболам (рис. V.7.9).

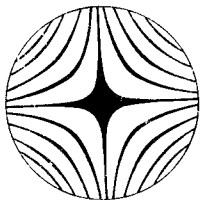


Рис. V.7.9.

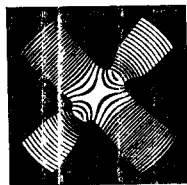


Рис. V.7.10.

2° Для двуосного кристалла *изохроматические кривые* имеют вид гипербола, если пластинка вырезана параллельно оптическим осям, и *лемнискат*, через полюсы которых проходят две гипербола (вместо креста для одноосного кристалла), если пластинка вырезана перпендикулярно к биссектрисе угла между осями (рис. V.7.10).

## 7. Вращение плоскости поляризации

1° *Вращение плоскости поляризации* заключается в повороте плоскости поляризации световой волны при прохождении ее через некоторые вещества, называемые *оптически активными*.

Оптической активностью обладают некоторые кристаллы, в том числе и не обнаруживающие явления двойного лучепреломления (стр. 659), многие чистые жидкости, растворы и газы. Все вещества, оптически активные в жидком состоянии (в том числе в растворах), обладают в большей или меньшей степени этим же свойством в кристаллическом состоянии. Обратное положение не всегда имеет место.

2° В анизотропных кристаллах вращение плоскости поляризации в чистом виде наблюдается для света, распространяющегося вдоль оптической оси. Для других направлений распространения света явление усложняется благодаря двойному лучепреломлению.

Для большинства оптически активных кристаллов обнаружено существование двух модификаций, осуществляющих вращение плоскости поляризации соответственно по и против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу). Первая модификация называется *правовращающей* или *положительной*, вторая — *левовращающей* или *отрицательной*.

3° В твердых телах угол  $\varphi$  поворота плоскости поляризации прямо пропорционален длине  $d$  пути светового луча в теле:

$$\varphi = ad,$$

где  $a$  — *вращательная способность* (*удельное вращение*), зависящая от рода вещества, температуры и длины волны. Эта формула остается справедливой и для двоякопреломляющего кристалла, если свет в нем распространяется вдоль оптической оси (стр. 654); значения  $a$  в двуосном кристалле могут быть неодинаковыми для разных оптических осей. Для лево- и правовращающих модификаций вращательные способности одинаковы по величине.

4° Для растворов угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi = [a] cd = [a] \rho Kd,$$

где  $[a]$  — *удельное вращение*,  $c$  — *объемно-весовая концентрация* оптически активного вещества в растворе (отношение массы этого вещества к объему раствора),  $\rho$  —

плотность раствора и  $K = c/\rho$  — весовая концентрация (отношение массы оптически активного вещества к массе всего раствора).

Величина  $[\alpha]$  зависит от природы оптически активного вещества и растворителя, температуры и длины волны света. Весьма чувствительный метод определения концентрации  $c$  или  $K$ , основанный на этом соотношении, называется *поляриметрией* (*сахариметрией*).

5° Теория Френеля представляет линейно поляризованный свет до входа в оптически активное вещество как совокупность двух циркулярно поляризованных волн с одинаковыми частотами и амплитудами и объясняет вращение его плоскости поляризации существованием двух фазовых скоростей света в оптически активном веществе, соответствующих его правой и левой круговым поляризациям. Если фазовые скорости в веществе для поляризованных указанным образом волн соответственно равны  $v_d$  (показатель преломления  $n_d$ ) и  $v_g$  (показатель преломления  $n_g$ ), то по прохождении пути  $d$  в веществе угол поворота плоскости поляризации (рис. V.7.11) равен

$$\varphi = \frac{\varphi_d - \varphi_g}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} (n_g - n_d),$$

где  $\lambda$  — длина волны света в вакууме. Правовращающими являются вещества с  $n_g > n_d$ , левовращающими — с  $n_g < n_d$ .

6° Оптически неактивные вещества под действием магнитного поля приобретают способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль направления поля. Это явление называется *эффектом Фарадея*. Угол поворота плоскости поляризации равен

$$\varphi = V d B,$$

где  $B$  — индукция однородного магнитного поля (стр. 425),  $d$  — длина пути света в веществе,  $V$  — *постоянная Верде* (*удельное магнитное вращение*), зависящая от природы вещества, температуры и длины волны света. Направленные вращения плоскости поляризации зависят только от природы вещества и направления магнитного поля. Знак вращения отсчитывается для наблюдателя, смотрящего

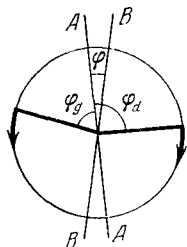


Рис. V.7.11

вдоль магнитного поля. Большинство веществ дает правое, положительное, вращение: все диамагнитные (стр. 468) и некоторые парамагнитные (стр. 468) вещества дают правое вращение; левое, отрицательное, вращение дают некоторые парамагнитные вещества.

7° Естественная оптическая активность вещества в некристаллическом состоянии обусловлена асимметрией молекул. В кристаллических веществах оптическая активность может быть также обусловлена особенностями расположения частиц в решетке.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникновением асимметрии оптических свойств вещества под действием магнитного поля.

8° Зависимость вращения плоскости поляризации от длины волны света называется *вращательной дисперсией*. В первом приближении в области достаточно длинных волн, удаленной от полос поглощения света веществом (стр. 684), угол вращения плоскости поляризации обратно пропорционален квадрату длины волны (*закон Био*):

$$\varphi \sim \lambda^{-2}.$$

## ГЛАВА 8

### МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

#### 1. Дисперсия света

1° *Дисперсией света* называют явление зависимости абсолютного показателя преломления вещества  $n$  от частоты  $\omega$  света (или от длины волны в вакууме  $\lambda = c/\nu$ ):

$$n = f(\lambda) = \varphi(\omega),$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  — циклическая частота световой волны. Дисперсия света называется *нормальной* в случае, если показатель преломления монотонно возрастает с увеличением частоты (убывает с увеличением длины волны);

в противном случае дисперсия света называется *аномальной* (рис. V.8.1). Нормальная дисперсия света наблюдается

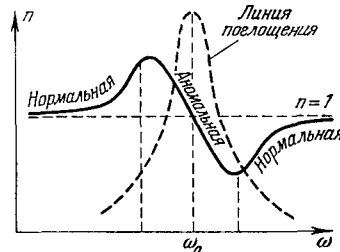


Рис. V.8.1.

вдали от полос или линий поглощения света веществом (стр. 684), аномальная — в пределах полос или линий поглощения.

2° Согласно классической электронной теории дисперсия света обусловлена взаимодействием света с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны. Для видимого света частота столь велика ( $\nu \sim 10^{15}$  гц), что существуют лишь вынужденные колебания внешних (наиболее слабо связанных) электронов атомов, молекул или ионов. Эти электроны называют *оптическими электронами*. В процессе вынужденных колебаний оптических электронов в поле монохроматической волны с частотой  $\nu$  периодически изменяются дипольные электрические моменты молекул и последние излучают вторичные электромагнитные волны той же частоты  $\nu$ .

Средние расстояния между молекулами во много раз меньше протяженности одного дуга волн. Поэтому вторичные волны, излучаемые весьма большим числом соседних молекул оптически однородной среды (стр. 684), когерентны как между собой, так и с первичной волной. При наложении они интерферируют, причем результат интерференции зависит от соотношения их амплитуд и начальных фаз. В оптически однородной и изотропной среде при этом образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты, а направление распространения совпадает с направлением распространения первичной волны.

3° Для изотропной среды

$$n'^2 = \epsilon' = 1 + \kappa'_e \quad (\text{в СИ}),$$

$$n'^2 = \epsilon' = 1 + 4\pi\kappa'_e \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $n' = n(1 - i\kappa)$  — комплексный показатель преломления среды (стр. 593),  $\epsilon'$  — комплексная относительная диэлектрическая проницаемость и  $\kappa'_e$  — комплексная диэлектрическая восприимчивость среды. Комплексность  $\kappa'_e$  и  $\epsilon'$  обусловлена тем, что в поглощающей среде векторы поляризации  $\mathbf{P}_e$  и напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля колеблются со сдвигом по фазе. В непоглощающей среде этот сдвиг фаз равен нулю. Поэтому такая среда характеризуется действительными значениями  $\kappa_e$ ,  $\epsilon$  и  $n$  ( $\kappa = 0$ ).

Если  $N_0$  — число молекул в единице объема, то

$$n'^2 = 1 + \frac{N_0}{\epsilon_0} \frac{p_e}{E} \quad (\text{в СИ}),$$

$$n'^2 = 1 + 4\pi N_0 \frac{p_e}{E} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $p_e$  — наведенный дипольный момент молекулы в поле волны напряженностью  $E$ .

4° В классической электронной теории каждая молекула рассматривается как совокупность линейных осцилляторов (стр. 112) — заряженных частиц с зарядами  $q_k$  и массами  $m_k$ . Собственные циклические частоты осцилляторов  $\omega_{0k}$  соответствуют набору циклических частот поглощения света рассматриваемым веществом. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний осциллятора:

$$\ddot{s}_k + 2\delta_k \dot{s}_k + \omega_{0k}^2 s_k = \frac{q_k}{m_k} E_{\text{эфф}} \phi,$$

где  $s_k$  — смещение заряда  $q_k$  из положения равновесия,  $\delta_k$  — коэффициент затухания свободных колебаний заряда,  $E_{\text{эфф}}$  — напряженность эффективного поля (стр. 365). В газах при обычных условиях  $E_{\text{эфф}}$  практически совпадает с напряженностью поля  $E$  световой волны. Для монохроматического света  $E = E_0 e^{i\omega t}$ , и в газах

$$p_e = \sum_k q_k s_k = \sum_k \frac{q_k^2 E}{m_k} \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i 2\delta_k \omega} = \\ = \frac{e^2 E}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i 2\delta_k \omega},$$

где  $m$  и  $e$  — масса и абсолютная величина заряда электрона, а

$$f_k = \left(\frac{q_k}{e}\right)^2 \frac{m}{m_k}$$

— сила  $k$ -го осциллятора. Отсюда следует, что для газов

$$\left. \begin{aligned} n^2(1 - \kappa^2) &= 1 + \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2}, \\ n^2 \kappa &= \frac{N_0 e^2 \omega}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{\delta_k f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} (\text{в СИ}),$$

$$\left. \begin{aligned} n^2(1-\kappa^2) &= 1 + \frac{4\pi N_0 e^2}{m} \sum_k \frac{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2}, \\ n^2 \kappa &= \frac{4\pi N_0 e^2 \omega}{m} \sum_k \frac{\delta_k f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} \text{(в гауссовой системе).}$$

5° Влияние поглощения существенно лишь при частотах, близких к  $\omega_{0k}$ , вне этих областей частот  $\delta_k^2 \omega^2 \ll (\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2$ , и для газов ( $n^2 + 1 \approx 2n$ )

$$n \approx 1 + \frac{N_0 e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \quad \text{(в СИ),}$$

$$n \approx 1 + \frac{2\pi N_0 e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \quad \text{(в гауссовой системе).}$$

Значения  $f_k$  и  $\omega_{0k}$  в классической теории дисперсии считаются известными из экспериментов. Их теоретический расчет возможен только в квантовой теории.

6° В изотропной среде, поляризация которой в высокочастотном поле световой волны имеет чисто электронную природу, напряженность эффективного поля

$$E_{\text{эфф}} = \frac{\epsilon' + 2}{3} E = \frac{n'^2 + 2}{3} E,$$

где  $E$  — напряженность поля волны. В этом случае справедлива формула Лоренца — Лоренца:

$$\frac{n'^2 - 1}{n'^2 + 2} = \frac{N_0 e^2}{3m} \alpha_e \quad \text{(в СИ),}$$

$$\frac{n'^2 - 1}{n'^2 + 2} = \frac{4\pi N_0 e^2}{3m} \alpha_e \quad \text{(в гауссовой системе),}$$

где  $\alpha_e$  — электронная поляризуемость молекулы (стр. 362).

В отсутствие поглощения эта формула имеет вид:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N_0 e^2}{3m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \quad \text{(в СИ),}$$

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N_0 e^2}{3m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \quad \text{(в гауссовой системе).}$$

7° Величина

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho},$$

где  $\rho$  — плотность, называется *удельной рефракцией* вещества. Для данного вещества  $r$  не зависит от  $\rho$ . Величины  $A_i r_i$  и  $\Omega = \mu r$ , где  $A_i$  — атомный вес,  $r_i$  — удельная рефракция атомов  $i$ -го сорта в молекуле с молекулярным весом  $\mu$ , называются соответственно *атомными* и *молярной (молекулярной) рефракциями* (стр. 369). Часто молярная рефракция аддитивно складывается из атомных:  $r = \frac{1}{\mu} \sum_i k_i A_i r_i$ , где  $k_i$  — числа атомов  $i$ -го сорта в молекуле.

8° В классической теории дисперсии света в металлах учитывают как свободные электроны, так и электроны, связанные в ионах металла. Для свободных электронов частоты  $\omega_{0k} = 0$ . Поэтому

$$n'^2 - 1 = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{N_e}{2i\delta_e \omega - \omega^2} + N_0 \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i2\delta_k \omega} \right] \quad \text{(в СИ),}$$

$$n'^2 - 1 = \frac{4\pi e^2}{m} \left[ \frac{N_e}{2i\delta_e \omega - \omega^2} + N_0 \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i2\delta_k \omega} \right] \quad \text{(в гауссовой системе),}$$

где  $N_e$  — число свободных электронов в единице объема,  $\delta_e$  — коэффициент, учитывающий потери энергии при вынужденных колебаниях свободных электронов. В области малых частот ( $\omega \ll \delta_e$ )

$$n'^2 - 1 \approx \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_e}{2i\delta_e \omega} \quad \text{(в СИ)}$$

и

$$n^2 \kappa \approx \frac{e^2 N_e}{4m\epsilon_0 \delta_e \omega} \quad \text{(в СИ).}$$

Последнее выражение совпадает с приведенным на стр. 593, если

$$\delta_e = \frac{e^2 N_e}{2m\gamma} = \frac{1}{\tau},$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость металла, а  $\tau$  — средняя продолжительность свободного пробега электронов в металле.

## 2. Спектральный анализ

1° Произвольный, периодический во времени физический процесс, зависимость которого от времени описывается периодической с циклической частотой  $\omega$  функцией  $\varphi(t)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле, может быть представлен в виде суперпозиции бесконечного числа

гармонических колебательных процессов, частоты которых образуют дискретную последовательность. Эта сумма называется *рядом Фурье*:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — коэффициенты Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \cos n\omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \sin n\omega t dt,$$

$T = 2\pi/\omega$ , а начальный момент времени  $t_0$  произволен.

Ряд Фурье может быть также записан в виде

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \psi_n).$$

Совокупность величин  $C_n$  образует *спектр амплитуд функции*  $\varphi(t)$ , а совокупность  $\psi_n$  — *спектр начальных фаз*; *спектр интенсивностей* определяется совокупностью величин  $C_n^2$ .

2° Произвольный, непериодический во времени физический процесс может быть представлен в виде ряда Фурье (п. 1°) в интервале времени (в течение которого процесс удовлетворяет условиям Дирихле)  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , где величины  $t_0$  и  $T > 0$  произвольны. Однако вне указанного интервала времени ряд Фурье не будет равен представляемой им функции. Представление же рядом Фурье периодического во времени процесса имеет силу в любой момент времени.

3° Произвольный непериодический во времени физический процесс, зависимость которого от времени описывается функцией  $f(t)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном интервале времени, причем

интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  сходится, может быть представлен

в виде бесконечной суммы периодических во времени колебательных процессов, циклические частоты которых  $\omega$  образуют непрерывную последовательность. Эта сумма

называется *интегралом Фурье*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

или

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

где

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi = A(\omega) - iB(\omega),$$

а символ  $\operatorname{Re}$  означает действительную часть следующего за ним комплексного выражения. Величины

$$C = \frac{1}{\pi} C(\omega) d\omega$$

имеют смысл бесконечно малых комплексных амплитуд синусоидальных колебаний с циклическими частотами от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , из которых составляется  $f(t)$ . Соответственно величину  $C(\omega)$  называют *спектральной плотностью амплитуды*. Величину

$$g^2(\omega) = C(\omega) C^*(\omega) = |C(\omega)|^2,$$

где  $C^*(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$  — функция, комплексно сопряженная  $C(\omega)$ , называют *спектральной плотностью интенсивности*. Она характеризует распределение энергии в спектре.

4° Примером ограниченного во времени колебательного процесса может служить акт излучения цуга волн. Функция  $f(t)$ , соответствующая простейшему цугу волн в виде оборванной синусоиды (рис. V.8.2), излучаемому источником, который колеблется с циклической частотой  $\omega^*$ , имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\tau/2, \\ a \sin \omega^* t & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t > \tau/2, \end{cases}$$

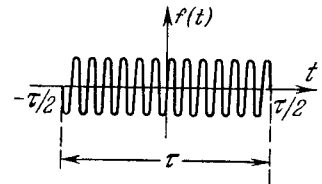


Рис. V.8.2.

где  $\tau$  — продолжительность излучения цуга,  $a$  — амплитуда.

Представление  $f(t)$  в виде интеграла Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

где

$$B(\omega) = 2a \int_0^{\tau/2} \sin \omega^* \xi \sin \omega \xi d\xi = a \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} - \frac{\sin \left[ (\omega^* + \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* + \omega} \right\}.$$

В случае, когда  $\omega^* \tau \gg 2\pi$ , т. е. длительность излучения во много раз больше периода колебаний источника волн, функция  $g^2(\omega) = [B(\omega)/\pi]^2$ , характеризующая *распределение интенсивности в спектре*  $f(t)$ , выражается следующей приближенной формулой:

$$g^2(\omega) = \frac{a^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin \left[ (\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} \right\}^2.$$

График этой функции приведен на рис. V.8.3. Центральный максимум соответствует  $\omega = \omega^*$  и равен  $(a\tau/2\pi)^2$ .

Расстояние  $\tilde{\Delta}\omega$  между двумя нулевыми значениями  $g^2(\omega)$ , ограничивающими центральный максимум, равно  $4\pi/\tau$ . Следовательно,

$$\tilde{\Delta}\omega \cdot \tau = 4\pi$$

и

$$\tilde{\Delta}\omega \cdot \Delta x = 4\pi c,$$

где  $\Delta x = \tau \cdot c$  — пространственная протяженность цуга в вакууме. Чем короче цуг, тем шире его спектр, т. е. тем сильнее цуг отличается от монохроматической волны.

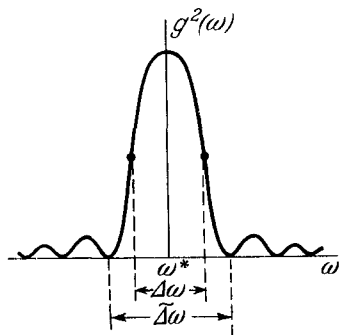


Рис. V.8.3.

5° Спектр волны называют *сплошным*, если спектральная плотность ее интенсивности  $g^2(\omega)$  — непре-

рывная функция  $\omega$ , отличная от нуля в широком интервале частот. Сплошной спектр имеет, например, свет, излучаемый раскаленными твердыми телами и жидкостями. Свет со сплошным спектром можно рассматривать как совокупность монохроматических волн, частоты которых образуют непрерывную последовательность.

Спектр волны называют *линейчатым*, если  $g^2(\omega)$  практически отлична от нуля лишь в узких дискретных интервалах частот  $\omega_i \pm \frac{1}{2} \tilde{\Delta}\omega_i$  ( $\tilde{\Delta}\omega_i \ll \omega_i$ ), каждому из которых соответствует своя *спектральная линия*. Свет с линейчатым спектром излучают, например, атомы раскаленных разреженных газов. В первом приближении такой свет можно рассматривать как совокупность монохроматических волн с частотами  $\omega_i$ .

Спектр волны называют *полосатым*, если соответствующие ему спектральные линии образуют дискретные группы — *полосы*, которые состоят из множества тесно расположенных линий.

6° *Шириной (полушириной) спектральной линии* называют интервал частот  $\Delta\omega$  (или длин волн  $\Delta\lambda$ ) между точками ее контура, для которых  $g^2 = \frac{1}{2} g_{\text{макс}}^2$  (рис. V.8.3). *Естественная ширина* спектральных линий связана с конечной длительностью каждого акта излучения атома ( $\tau \sim 10^{-8}$  сек), обусловленной потерями энергии на излучение (*радиационное затухание*):

$$\Delta\omega_{\text{ест}} \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1} \text{ и } \Delta\lambda_{\text{ест}} \sim 10^{-4} \text{ \AA}.$$

7° *Ширина спектральных линий*, наблюдаемая в опытах, обычно значительно превосходит их естественную ширину. Это связано, во-первых, с тем, что излучающие атомы, участвуя в хаотическом тепловом движении, перемещаются по отношению к измерительному прибору со скоростями, различными по величине и направлению. Поэтому вследствие эффекта Доплера (стр. 532) должно возникнуть уширение спектральных линий тем большее, чем интенсивнее тепловое движение, т. е. чем выше температура газа. Это явление называют *доплеровским уширением спектральных линий*.

Величина доплеровского уширения

$$\Delta\omega_{\text{доп}} \approx 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \ln 2,$$

где  $m$  — масса атома,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\omega$  — циклическая частота спектральной линии. Доплеровское уширение наиболее велико для легких атомов и в условиях газовых разрядов при  $\sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim (10^3 \div 10^4)$  м/сек для видимого света составляет

$$\Delta\lambda_{\text{Доп}} \sim (10^{10} \div 10^{11}) \text{ сек}^{-1} \quad \text{и} \quad \Delta\lambda_{\text{Доп}} \sim (0,01 \div 0,1) \text{ \AA}.$$

8° Вторая причина уширения спектральных линий связана с уменьшением продолжительности  $\tau$  излучения возбужденных атомов вследствие их взаимодействия с другими атомами. Это явление называют *ударным уширением спектральных линий*. Оно зависит от типа взаимодействия частиц, их концентрации и других причин. В условиях газового разряда ударное уширение имеет тот же порядок, что и доплеровское уширение, или даже превосходит последнее. Ударное уширение сопровождается также возникновением некоторой асимметрии в распределении энергии в пределах спектральной линии, максимум интенсивности которой несколько смещается, как правило, в сторону больших частот.

9° Спектр электромагнитных волн, излучаемых каким-либо веществом, называется *спектром испускания* (*эмиссионным спектром*) этого вещества. Спектр электромагнитных волн, поглощаемых каким-либо веществом, называется *спектром поглощения* (*абсорбционным спектром*) этого вещества.

### 3. Поглощение света

1° *Поглощением света* называют явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе, происходящее вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества или в энергию вторичного излучения, имеющего иной спектральный состав и иные направления распространения (фотолюминесценция, стр. 710). В результате поглощения света могут происходить: нагревание вещества, ионизация атомов или молекул, фотохимические реакции, фотолюминесценция и т. д. Поглощение света («истинное поглощение») не следует смешивать с явлением уменьшения энергии проходящей световой волны в оптически неоднородной среде вследствие рассеяния света (стр. 684).

2° Поглощение света в веществе описывается *законом Бугера—Ламберта*:

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

где  $I_0$  и  $I$  — интенсивности плоской монохроматической световой волны на входе в слой поглощающего вещества толщиной  $d$  и на выходе из него,  $\mu$  — *линейный коэффициент поглощения* (*показатель поглощения*) света веществом. Показатель поглощения численно равен толщине слоя вещества, после прохождения которого интенсивность света уменьшается в  $e = 2,718 \dots$  раз. Значение  $\mu$  зависит от частоты (длины волны) света, химической природы и состояния вещества. Связь  $\mu$  с комплексным показателем преломления поглощающего вещества (стр. 674) имеет вид

$$\mu = -\frac{4\pi}{\lambda} n_k,$$

где  $\lambda$  — длина волны в вакууме.

Для некоторых веществ при достаточно больших интенсивностях света наблюдаются отступления от закона Бугера—Ламберта: коэффициент поглощения  $\mu$  убывает с ростом  $I_0$ . Это явление объясняется квантовой теорией поглощения света (стр. 741). Оно связано с тем, что при больших интенсивностях света в веществе, у которого сравнительно велико время жизни молекул в возбужденном состоянии (стр. 742), доля возбужденных молекул может быть значительной и тем большей, чем больше  $I_0$ .

3° Для разбавленных растворов поглощающего вещества в непоглощающем растворителе справедлив *закон Бера*:

$$\mu = Ac,$$

и закон *Бугера—Ламберта—Бера* имеет вид

$$I = I_0 e^{-Ac d},$$

где  $c$  — концентрация растворенного вещества,  $A$  — постоянная, зависящая от свойств растворенного вещества и частоты света.

При больших концентрациях закон Бера нарушается, так как из-за влияния взаимодействия между близко расположенными молекулами поглощающего вещества величина  $A$  начинает зависеть от концентрации раствора.

4° Вид спектра поглощения света веществом определяется характером зависимости  $\mu$  от частоты. Разреженный газ, состоящий из атомов, которые находятся на значительных средних расстояниях друг от друга, имеет

простейший — *линейчатый спектр поглощения*. Частоты линий поглощения совпадают с частотами линий в спектре испускания этого же газа. Разреженный молекулярный газ имеет *полосатый спектр поглощения*. Структура полос поглощения определяется структурой энергетических уровней молекул (стр. 797-800). Жидкие и твердые диэлектрики имеют *сплошные спектры поглощения*, состоящие из сравнительно широких полос частот, для которых коэффициент поглощения  $\mu \neq 0$ . За пределами этих частот диэлектрики прозрачны ( $\mu \approx 0$ ). *Избирательным поглощением* объясняется окраска многих минералов и растворов красителей.

О поглощении света металлами см. стр. 592.

#### 4. Рассеяние света

1° *Рассеянием света* называют процесс преобразования света веществом, сопровождающийся изменением направления распространения света и проявляющийся как несобственное свечение вещества. Несобственное свечение обусловлено вынужденными колебаниями электронов в атомах, молекулах или ионах рассеивающей среды, возникающими под действием падающего света. Рассеяние света происходит при его распространении в оптически неоднородной среде.

2° *Оптически однородной* называется среда, в которой показатель преломления не зависит от координат и является постоянным по всему объему среды. Под действием падающего света оптические электроны молекул среды совершают вынужденные колебания и излучают вторичные волны. Малые по сравнению с длиной волны  $\lambda$  участки объема среды, содержащие, однако, еще достаточно большое число молекул, можно рассматривать как источники вторичных когерентных волн (рассеивающие центры). Вследствие равномерного распределения молекул оптически однородной среды по ее объему рассеяние света в такой среде отсутствует: для всех направлений, отличных от направления первичного пучка света, вторичные волны взаимно погашаются в результате их интерференции.

3° *Оптически неоднородной* называется среда, показатель преломления которой не остается постоянным, а нерегулярно изменяется от точки к точке среды (например, за счет флуктуаций плотности, присутствия в среде инородных малых частиц и т.п.). Вторичные волны в

этом случае имеют некогерентные составляющие, благодаря чему наблюдается рассеяние света. Появление некогерентных вторичных волн связано с тем, что рассеяние света осуществляется на «некогерентных», т.е. не связанных друг с другом, неоднородностях, которые, кроме того, хаотически перемещаются в среде вследствие теплового движения. Тем самым хаотически изменяются разности хода между вторичными волнами, излучаемыми отдельными неоднородностями. Примерами оптически неоднородных сред могут служить *мутные среды* — аэрозоли (дым, туман), эмульсии, коллоидные растворы и т.п., содержащие мелкие частицы, показатель преломления которых отличен от показателя преломления окружающей среды.

4° Рассеяние света в мутных средах с размерами неоднородностей не выше  $(0,1 \div 0,2)\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны света, называют *рэлеевским рассеянием* или *явлением Тиндалля*. Если частицы мутной среды электрически изотропны и не поглощают свет, то при рэлеевском рассеянии естественного света (стр. 652) интенсивность света, рассеиваемого единицей объема среды под углом  $\vartheta$  к направлению распространения падающего света,

$$I_{\vartheta} = a \frac{N_0 V^2}{R^2 \lambda^4} I_0 (1 + \cos^2 \vartheta),$$

где  $V$  — объем одной частицы,  $N_0$  — число частиц в единице объема среды,  $R$  — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения,  $\lambda$  — длина волны света,  $I_0$  — интенсивность падающего света,  $a$  — коэффициент, зависящий от степени неоднородности мутной среды, т.е. от показателей преломления  $n$  и  $n_0$  частиц и той среды, в которой они находятся (при  $n = n_0$   $a = 0$ ). Из этой формулы видно, что при прочих равных условиях интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна  $\lambda^4$  (*закон Рэлея*). Поэтому при прохождении монохроматического света через мелкодисперсную мутную среду в рассеянном свете преобладает коротковолновое излучение, а в проходящем — длинноволновое.

Зависимость интенсивности рассеянного света от угла рассеяния  $\vartheta$  в случае рэлеевского рассеяния естественного света на электрически изотропных частицах имеет вид

$$I_{\vartheta} = I_{\pi/2} (1 + \cos^2 \vartheta),$$

где  $I_{\pi/2}$  — интенсивность света, рассеянного под углом  $\vartheta = \pi/2$ .



Зависимость  $I_\vartheta$  от  $\vartheta$ , изображенная в сферических координатах, называется *индикатрисой рассеяния*. Индикатриса рэлеевского рассеяния изображена на рис. V.8.4. Она имеет вид поверхности вращения, симметричной как относительно направления падающего пучка света ( $\vartheta = 0$ ), так и относительно плоскости  $\vartheta = \pi/2$ , проходящей через начало координат — центр индикатрисы. Свет, рассеянный под углом  $\vartheta = \pi/2$ , полностью поляризован в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи.

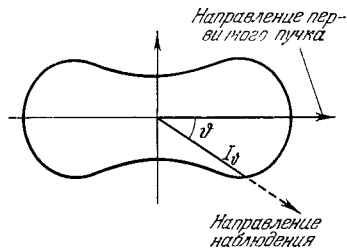


Рис V.8.4.

Если линейные размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны или больше ее, то зависимость интенсивности рассеянного света  $I$  от  $\lambda$  становится более слабой:  $I \sim \lambda^{-p}$ , где  $p < 4$  и убывает с увеличением размеров неоднородностей. Благодаря интерференции света, рассеиваемого отдельными участками каждой неоднородности, зависимость  $I_\vartheta$  от угла  $\vartheta$  становится более сложной, чем при рэлеевском рассеянии. Индикатриса имеет лишь одну ось симметрии, совпадающую с направлением падающего света. С увеличением размеров частиц рассеяние вперед (т. е. в область острых углов  $\vartheta$ ) все сильнее преобладает над рассеянием назад (т. е. в область тупых углов  $\vartheta$ ).

Это явление называют *эффектом Ми*. Свет, рассеянный под углом  $\vartheta = \pi/2$ , поляризован лишь частично, причем степень его поляризации зависит от формы и размеров рассеивающих частиц.

6° Рассеяние наблюдается также в *оптически чистых средах*, т. е. в средах, не содержащих каких-либо ионородных частиц (например, в чистых газах и жидкостях, истинных растворах, стр. 262). Это явление называют *молекулярным рассеянием света*. Оно обусловлено флуктуациями плотности (стр. 239), возникающими в процессе хаотического теплового движения молекул. Дополнительными причинами возникновения оптической неоднородности в чистых средах с электрически анизотропными молекулами являются флуктуации ориентаций молекул

(флуктуации анизотропии), а в истинных растворах, кроме того, — флуктуации концентрации.

Флуктуации плотности в газе особенно велики в критической точке (стр. 251). Наблюдаемое при этом сильное молекулярное рассеяние называют *критической опалесценцией*.

7° Согласно статистической теории флуктуаций (стр. 237) размеры участков среды, соответствующих сколь угодно значительным флуктуациям плотности (а следовательно, и показателя преломления), при обычных условиях значительно меньше длин волн видимого света. Поэтому зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны  $\lambda$  и угла рассеяния  $\vartheta$  для молекулярного рассеяния такая же, как и для рэлеевского рассеяния в мелкодисперсных мутных средах. Для молекулярного рассеяния естественного света интенсивность  $I_\vartheta$  света, рассеянного под углом  $\vartheta$  единицей объема среды, молекулы которой электрически изотропны,

$$I_\vartheta = \frac{2\pi^2 k T}{R^2 \lambda^4} \beta \left( \rho n \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) I_0,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\beta$  — термодинамический коэффициент сжимаемости вещества среды (стр. 187),  $\rho$  — плотность среды,  $n$  — показатель преломления среды для длины волны  $\lambda$ ,  $R$  — расстояние от рассматриваемого объема до точки наблюдения рассеянного света. В частности, для молекулярного рассеяния естественного света в идеальном газе

$$I_\vartheta = \frac{2\pi^2 (n-1)^2}{R^2 N_0 \lambda^4} (1 + \cos^2 \vartheta) I_0,$$

где  $n$  — показатель преломления газа,  $N_0$  — число молекул газа в единице объема. Сильным рассеянием коротких световых волн в атмосфере объясняется голубой цвет неба, а также голубоватая окраска света, рассеиваемого газом, освещаемым белым светом.

Рассеяние света на флуктуациях анизотропии значительно слабее рассеяния на флуктуациях плотности.

8° При молекулярном рассеянии естественного света (стр. 652) происходит его частичная поляризация. При угле рассеяния  $\vartheta = \pi/2$  в случае электрически изотропных неполярных молекул (стр. 362) рассеянный свет полностью поляризован в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи. В случае электрически неизотропных молекул рассеянный свет при том же угле

рассеяния поляризован лишь частично. Мерой неполноты поляризации рассеянного света является величина

$$\Delta = \frac{2I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}},$$

где  $I_{\parallel}$  и  $I_{\perp}$  — интенсивности составляющих рассеянных волн, соответствующих поляризации в указанной выше и перпендикулярной к ней плоскости.

9° В результате рассеяния света в оптически неоднородной среде интенсивность плоской световой волны постепенно уменьшается по мере распространения волны в среде. Эта зависимость аналогична закону Бугера — Ламберта (стр. 683):

$$I = I_0 e^{-hd},$$

где  $d$  — толщина слоя рассеивающей среды, а  $h$  — коэффициент экстинкции. Если рассеивающая среда, кроме того, поглощает свет, то

$$I = I_0 e^{-(\mu+h)d},$$

где  $\mu$  — линейный коэффициент поглощения (стр. 683). Коэффициентом рассеяния света называют величину

$$K_{\vartheta} = \frac{I_{\vartheta}}{I_0} \frac{R^2}{V},$$

где  $V$  — рассеивающий объем,  $R$  — расстояние от этого объема до точки наблюдения, в которой интенсивность света, рассеянного под углом  $\vartheta$ , равна  $I_{\vartheta}$ ;  $I_0$  — интенсивность падающего света. Для молекулярного рассеяния на флуктуациях плотности среды с электрически изотропными молекулами (смысл обозначений см. в п. 7°)

$$K_{\vartheta} = \frac{2\pi^2}{\lambda^4} \left( \rho n \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)^2 \beta k T (1 + \cos^2 \vartheta) = K_{\pi/2} (1 + \cos^2 \vartheta).$$

В частности, для идеального газа

$$K_{\vartheta} = \frac{2\pi^2(n-1)^2}{N_0 \lambda^4} (1 + \cos^2 \vartheta) = K_{\pi/2} (1 + \cos^2 \vartheta).$$

Коэффициент экстинкции

$$h = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} K_{\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{16}{3} \pi K_{\pi/2}.$$

О комбинационном рассеянии света см. стр. 800.

## ГЛАВА 9

## ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

## 1. Тепловое излучение

1° Нагретые тела излучают электромагнитные волны. Это излучение осуществляется за счет преобразования энергии теплового движения частиц тела в энергию излучения. Электромагнитное излучение тела, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, называют *тепловым (температурным) излучением*<sup>1)</sup>. Такое равновесное излучение осуществляется, например, если излучающее тело находится внутри замкнутой полости с непрозрачными стенками, температура которых равна температуре тела.

В теплоизолированной системе тел, находящихся при одной и той же температуре, теплообмен между телами путем испускания и поглощения теплового излучения не может привести к нарушению термодинамического равновесия системы, так как это противоречило бы второму началу термодинамики. Поэтому для теплового излучения тел должно выполняться *правило Прево*: если два тела при одной и той же температуре поглощают разные количества энергии, то и их тепловое излучение при этой температуре должно быть различным.

2° *Лучеиспускательной (излучательной) способностью или спектральной плотностью энергетической светимости тела* называют величину  $E_{\nu, \tau}$ , численно равную поверхностной плотности мощности теплового излучения тела в интервале частот единичной ширины:

$$E_{\nu, \tau} = \frac{dW}{d\nu},$$

где  $dW$  — энергия теплового излучения с единицы площади поверхности тела за единицу времени в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Лучеиспускательная способность  $E_{\nu, \tau}$  является спектральной характеристикой теплового излучения тела. Она зависит от частоты  $\nu$ , абсолютной температуры  $T$  тела, а также от его материала, формы и состояния поверхности. В системе СИ  $E_{\nu, \tau}$  измеряется в Дж/м<sup>2</sup>.

<sup>1)</sup> Иногда под тепловым излучением понимают не только равновесное, но также и неравновесное излучение тел, обусловленное их нагреванием.

3° *Поглощательной способностью* или *монохроматическим коэффициентом поглощения тела* называют величину  $A_{\nu, T}$ , показывающую, какая доля энергии  $dW_{\text{пад}}$ , доставляемой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , поглощается телом:

$$A_{\nu, T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}.$$

$A_{\nu, T}$  — величина безразмерная. Она зависит, помимо частоты излучения и температуры тела, от его материала, формы и состояния поверхности.

4° Тело называется *абсолютно черным*, если оно при любой температуре полностью поглощает все падающие на него электромагнитные волны:  $A_{\nu, T}^{\text{черн}} \equiv 1$ .

Реальные тела не являются абсолютно черными, однако некоторые из них по оптическим свойствам близки к абсолютно черному телу (сажа, платиновая чернь, черный бархат в области видимого света имеют  $A_{\nu, T}$ , мало отличающиеся от единицы). Наиболее совершенной моделью абсолютно черной поверхности может служить небольшое отверстие в непрозрачной стенке замкнутой полости. Электромагнитное излучение, проходящее извне в полость через отверстие, после многократных отражений от внутренней поверхности полости практически полностью ею поглощается независимо от того, из какого материала сделаны стенки полости.

Тело называют *серым*, если его поглощательная способность одинакова для всех частот  $\nu$  и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела ( $A_{\nu, T}^{\text{сер}} = A_T$ ).

5° Между лучеиспускательной  $E_{\nu, T}$  и поглощательной  $A_{\nu, T}$  способностями любого непрозрачного тела существует соотношение (*закон Кирхгофа в дифференциальной форме*):

$$\frac{E_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = \varepsilon_{\nu, T}.$$

Для произвольной частоты и температуры отношение лучеиспускательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел и равно лучеиспускательной способности  $\varepsilon_{\nu, T}$  абсолютно черного тела, являющейся функцией только частоты и температуры (*функция Кирхгофа*).

Из закона Кирхгофа следует, что если тело при данной температуре  $T$  не поглощает излучения в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  ( $A_{\nu, T} = 0$ ), то оно не может при температуре  $T$  и равновесно излучать в этом интервале частот:  $E_{\nu, T} = A_{\nu, T} \varepsilon_{\nu, T} = 0$ .

6° *Интегральная излучательная способность* (*энергетическая светимость*) тела:

$$E_T = \int_0^{\infty} E_{\nu, T} d\nu$$

представляет собой поверхностную плотность мощности теплового излучения тела, т. е. энергию излучения всех возможных частот, испускаемого с единицы поверхности тела за единицу времени.

Интегральная излучательная способность  $\varepsilon_T$  абсолютно черного тела:

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu, T} d\nu.$$

Соотношение между интегральной излучательной способностью серого тела и его поглощательной способностью  $A_T$ :

$$E_T^{\text{сер}} = A_T \varepsilon_T.$$

*Закон Кирхгофа в интегральной форме* (для серых тел): отношение интегральной излучательной способности серого тела к его поглощательной способности равно интегральной излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

7° Интегральная излучательная способность любого тела:

$$E_T = \int_0^{\infty} A_{\nu, T} \varepsilon_{\nu, T} d\nu,$$

или

$$E_T = a \varepsilon_T,$$

где  $a$  — *степень черноты тела*:

$$a = \frac{\int_0^{\infty} A_{\nu, T} \varepsilon_{\nu, T} d\nu}{\varepsilon_T} = \frac{\int_0^{\infty} A_{\nu, T} \varepsilon_{\nu, T} d\nu}{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu, T} d\nu};$$

$\alpha$  зависит от температуры, материала и состояния поверхности тела.

Поглощательная способность тел  $A_{\nu, T}$  может изменяться в пределах от 0 до 1. Поэтому  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Для абсолютно черного тела  $\alpha = 1$ . Непрозрачные тела, у которых степень черноты  $\alpha = 0$ , не излучают и не поглощают электромагнитных волн ( $E_{\nu, T} = A_{\nu, T} = 0$ ). Падающее на них излучение они полностью отражают. Если при этом отражение происходит в соответствии с законами геометрической оптики, то тело называется *зеркальным*.

## 2. Законы излучения абсолютно черного тела

1° Законы излучения абсолютно черного тела устанавливают зависимость  $\epsilon_T$  и  $\epsilon_{\nu, T}$  от частоты и температуры.

*Закон Стефана – Больцмана:*

$$\epsilon_T = \sigma T^4.$$

Интегральная излучательная способность  $\epsilon_T$  абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

Величина  $\sigma$  — универсальная *постоянная Стефана – Больцмана*, равная  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}^4$ .

2° Распределение энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, т. е. зависимость  $\epsilon_{\nu, T}$  от частоты при различных температурах, имеет вид, изображенный

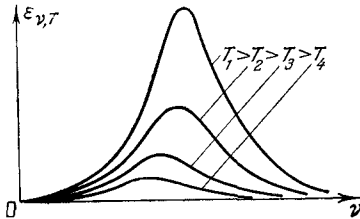


Рис. V.9.1.

на рис. V.9.1. При малых частотах  $\epsilon_{\nu, T}$  пропорциональна произведению  $\nu^2 T$ , а в области больших частот  $\epsilon_{\nu, T}$  пропорциональна  $\nu^3 \cdot e^{-\frac{a\nu}{T}}$ , где  $a$  — некоторая постоянная.

Площадь  $S$ , ограниченная кривой зависимости  $\epsilon_{\nu, T}$  от  $\nu$

и  $\nu$  осью абсцисс, пропорциональна  $\epsilon_T$ :

$$S \propto \epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu, T} d\nu.$$

По закону Стефана – Больцмана эта площадь пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры.

3° *Закон Вина:*

$$\epsilon_{\nu, T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

где  $c$  — скорость света в вакууме, а  $f(\nu/T)$  — универсальная функция отношения частоты излучения абсолютно черного тела к его температуре.

Частота излучения  $\nu_{\text{макс}}$ , соответствующая максимальному значению лучеиспускательной способности  $\epsilon_{\nu, T}$  абсолютно черного тела, согласно закону Вина равна

$$\nu_{\text{макс}} = b_1 T,$$

где  $b_1$  — постоянная величина, зависящая от вида функции  $f(\nu/T)$ .

*Закон смещения Вина:* частота, соответствующая максимальному значению лучеиспускательной способности  $\epsilon_{\nu, T}$  абсолютно черного тела, прямо пропорциональна его абсолютной температуре.

4° Связь лучеиспускательной способности  $\epsilon_{\nu, T}$ , отнесенной к интервалу частот  $d\nu$ , с лучеиспускательной способностью  $\epsilon_{\lambda, T}$ , отнесенной к интервалу длин волн  $d\lambda$ :

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{c}{\lambda^2} \epsilon_{\nu, T}.$$

Другая форма закона Вина:

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Длина волны  $\lambda_{\text{макс}}$ , соответствующая максимальному значению лучеиспускательной способности  $\epsilon_{\lambda, T}$ :

$$\lambda_{\text{макс}} = \frac{b}{T}.$$

Другая форма *закона смещения Вина:* длина волны, соответствующая максимальному значению лучеиспускательной способности  $\epsilon_{\lambda, T}$  абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре. Величина  $b$  — *постоянная Вина*, равная  $0,002898 \text{ м} \cdot \text{град}$ .

Закон смещения объясняет, почему при понижении температуры нагретых тел в их спектре все сильнее преобладает длинноволновое излучение.

Значения  $\lambda_{\text{макс}}$  и  $\nu_{\text{макс}}$  не связаны формулой  $\lambda = c/\nu$ , так как максимумы  $\epsilon_{\nu, T}$  и  $\epsilon_{\lambda, T}$  расположены в разных частях спектра.

5° Равновесное излучение в замкнутой полости с теплоизолированными стенками называют *черным излучением*, так как независимо от материала стенок полости оно тождественно с тепловым излучением абсолютно черного тела при той же температуре. Это излучение изотропно, т. е. его можно рассматривать как совокупность элементарных неполяризованных и некогерентных плоских волн с частотами от 0 до  $\infty$ , распространяющихся в равной мере по всем возможным направлениям. Объемная плотность энергии  $w$  поля черного излучения одинакова во всех точках и зависит только от температуры:

$$w = \frac{4\epsilon_T}{c} = \frac{4\sigma}{c} T^4,$$

где  $\epsilon_T$  — интегральная излучательная способность абсолютно черного тела,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана.

Спектральная плотность объемной плотности энергии поля черного излучения:

$$w_\nu = \frac{dw}{d\nu} = \frac{4}{c} \epsilon_{\nu, T},$$

где  $dw$  — объемная плотность энергии поля излучения в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ,  $\epsilon_{\nu, T}$  — лучеиспускательная способность абсолютно черного тела.

Давление, производимое черным излучением на стенки полости:

$$p = \frac{w}{3} = \frac{4}{3c} \sigma T^4.$$

6° С энергетической точки зрения черное излучение эквивалентно излучению системы бесконечно большого числа не взаимодействующих друг с другом гармонических осцилляторов, называемых *радиационными осцилляторами*. Если  $\bar{\epsilon}(\nu)$  — средняя энергия радиационного осциллятора с собственной частотой  $\nu$ , то

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\epsilon}(\nu) \quad \text{и} \quad \epsilon_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{\epsilon}(\nu).$$

Согласно классическому закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы (стр. 223)  $\bar{\epsilon}(\nu) = kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, и

$$\epsilon_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Это соотношение называют *формулой Рэлея — Джинса*.

В области больших частот она приводит к резкому расхождению с опытом, носящему название *ультрафиолетовой катастрофы*:  $\epsilon_{\nu, T}$  монотонно возрастает с ростом частоты, не имея максимума, а интегральная лучеиспускательная способность абсолютно черного тела обращается в бесконечность.

7° Причина вышеуказанных трудностей, возникших при отыскании вида функции Кирхгофа  $\epsilon_{\nu, T}$ , связана с одним из основных положений классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, т. е. может принимать любые сколь угодно близкие значения.

По квантовой теории Планка энергия радиационного осциллятора с собственной частотой  $\nu$  может принимать лишь определенные дискретные (квантованные) значения, отличающиеся на целое число элементарных порций — *квантов энергии*:

$$\epsilon_0 = h\nu;$$

$h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·сек — *постоянная Планка (квант действия)*. В соответствии с этим излучение и поглощение энергии частицами излучающего тела (атомами, молекулами или ионами), обменивающимися энергией с радиационными осцилляторами, должно происходить не непрерывно, а дискретно — отдельными порциями (квантами).

8° Средняя энергия радиационного осциллятора:

$$\bar{\epsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

*Формула Планка* для лучеиспускательной способности абсолютно черного тела:

$$\epsilon_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

Другой вид формулы Планка:

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{k\lambda T} - 1}.$$

Формула Планка хорошо согласуется с результатами экспериментов по измерению распределения энергии в спектре абсолютно черного тела при различных темпе-

ратурах. Как частный случай в ней содержится закон Рэлея — Джинса (при  $h\nu \ll kT$ ). В области больших частот ( $h\nu \gg kT$ ) формула Планка дает

$$\epsilon_{\nu, T} \approx \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Из формулы Планка следует закон смещения Вина и закон Стефана — Больцмана. Постоянная Стефана может быть выражена через постоянную Планка:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}.$$

Численное значение постоянной Планка находится по известным значениям  $k$ ,  $\sigma$  и  $c$ . Ее можно также выразить через постоянную Вина  $b$ .

### 3. Понятие об оптической пирометрии

1° *Оптической пирометрией* называется совокупность методов измерения высоких температур, основанных на использовании зависимости между температурой и лучеиспускательной способностью (интегральной и спектральной) для исследуемого тела. Применяемые для этой цели приборы называют *пирометрами излучения*. В *радиационных пирометрах* регистрируется интегральное излучение исследуемого нагретого тела, а в *оптических пирометрах* — его излучение в одном или двух узких участках спектра. Применение пирометров излучения для измерения температуры твердых, жидких или газообразных тел возможно, лишь если с достаточной степенью точности можно считать, что эти тела находятся в состоянии термодинамического равновесия (или в состоянии, достаточно близких к равновесному).

2° *Радиационной температурой*  $T_p$  данного тела называют температуру такого черного тела, суммарное излучение которого совпадает с излучением исследуемого тела. Истинная температура тела:

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\alpha_T}},$$

где  $\alpha_T = E_T/\epsilon_T$  — степень черноты тела (стр. 691) при температуре  $T$ . Так как  $\alpha_T \leq 1$ , то  $T \geq T_p$ .

3° *Цветовой температурой*  $T_c$  нечерного тела называют температуру  $T$  такого черного тела, которое имеет распределение энергии в спектре, наиболее близкое к распределению энергии испытуемого тела при данной температуре. Ее измерение сводится к определению значений лучеиспускательной ( $E_{\lambda, T}$ ) и поглощательной ( $A_{\lambda, T}$ ) способностей исследуемого тела для двух различных длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда в соответствии с упрощенной формулой Планка

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} e^{-hc/k\lambda T},$$

справедливой при  $\lambda T \ll \frac{hc}{k}$ ,

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_c} = \frac{hc}{\lambda_1 \lambda_2} \ln \frac{A_{\lambda_1, T}}{A_{\lambda_2, T}}.$$

Для серых тел  $A_{\lambda_1, T} = A_{\lambda_2, T}$  и  $T_c = T$ . Для тел, сильно отличающихся от серых (например, обладающих селективным поглощением и испусканием), понятие цветовой температуры не имеет смысла.

4° *Яркостной температурой*  $T_\pi$  тела называют температуру абсолютно черного тела, спектральная плотность энергетической яркости которого для длины волны  $\lambda_0$  (обычно  $\lambda_0 = 660$  нм) равна спектральной плотности энергетической яркости исследуемого тела для той же длины волны и в направлении нормали к его поверхности.

Спектральная плотность энергетической яркости излучающего тела температуры  $T$ :

$$b(\lambda, T) = \frac{dE_\lambda}{d\lambda},$$

где  $dE_\lambda$  — энергия, излучаемая с единицы площади поверхности тела за единицу времени в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  в единичный телесный угол в заданном направлении. Для излучающего тела, подчиняющегося закону Ламберта (стр. 651),

$$b(\lambda, T) = \frac{1}{\pi} E_{\lambda, T},$$

где  $E_{\lambda, T}$  — лучеиспускательная способность тела. В частности, для абсолютно черного тела

$$b_0(\lambda, T) = \frac{1}{\pi} \epsilon_{\lambda, T}.$$

Если  $\lambda_0 T \ll \frac{hc}{k}$  (см. п. 3°), то истинная температура тела связана с его яркостной температурой (при  $\lambda = \lambda_0$ ) соотношением

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Я}} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln \frac{b(\lambda_0, T)}{b_0(\lambda_0, T)}.$$

В частности, если исследуемое тело подчиняется закону Ламберта, то

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Я}} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln A_{\lambda, T},$$

где  $A_{\lambda, T}$  — поглощательная способность тела. Для всех тел, кроме абсолютно черного,  $T > T_{Я}$ .

## ГЛАВА 10

### ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

#### 1. Фотоэлектрический эффект

1° Свет имеет двойственную, *корпускулярно-волную природу*: с одной стороны, он обладает волновыми свойствами, обуславливающими явления интерференции, дифракции, поляризации, с другой стороны, представляет собой поток частиц — *фотонов*, обладающих нулевой массой покоя и движущихся со скоростью, равной скорости света в вакууме. Энергия  $W$  фотона и его импульс  $p$  для соответствующей ему электромагнитной волны с частотой  $\nu$  и длиной волны в вакууме  $\lambda$  равны:

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

где  $h$  — постоянная Планка (стр. 695).

Фотон обладает спином  $\hbar$  (см. таблицу на стр. 871). Фотоны подчиняются квантовой статистике Бозе — Эйнштейна (стр. 225). При малых частотах  $\nu$  преобладающую роль играют волновые свойства, при больших  $\nu$  — корпускулярные свойства света.

Фотоны возникают (излучаются) в процессах перехода атомов, молекул, ионов и атомных ядер из возбужденных состояний (стр. 751) в состояния с меньшей энергией, а также в результате ускорения и торможения заряженных частиц, при распадах и аннигиляции (стр. 882) частиц. В процессах излучения (поглощения) фотона из системы уносится (вносится в нее) момент импульса фотона, равный  $m\hbar$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

2° *Фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом)* называется процесс взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, в результате которого энергия фотонов передается электронам вещества. Для конденсированных систем (твердых и жидких тел) различают *внешний фотоэффект*, при котором поглощение фотонов сопровождается вылетом электронов за пределы тела, и *внутренний фотоэффект*, при котором электроны, оставаясь в теле, изменяют в нем свое энергетическое состояние. В газах фотоэффект состоит в ионизации атомов или молекул под действием излучения (*фотоионизация*, стр. 804).

Особым видом фотоэффекта является поглощение фотонов жестких гамма-лучей атомными ядрами, сопровождающееся вылетом из ядер составляющих их нуклонов (*ядерный фотоэффект*, см. стр. 857).

3° Электроны, вылетающие из вещества при внешнем фотоэффекте, называются *фотоэлектронами*. Если между облучаемым телом и некоторым проводником (анодом) создать электрическое поле с разностью потенциалов  $\varphi$ , ускоряющее фотоэлектроны, то возникает упорядоченное движение этих электронов, называемое *фотоэлектрическим током (фототоком)*. При некотором значении  $\varphi > 0$  фототок  $I$  достигает насыщения ( $I = I_{н}$ ), когда все электроны, покидающие облучаемое тело (катод), достигают анода. Для прекращения фототока между анодом и катодом необходимо создать задерживающее поле с разностью потенциалов  $\varphi_1$ , равной

$$\varphi_1 = -\frac{W_{к макс}}{e} < 0,$$

где  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $W_{к макс}$  — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов. Для фотоэффекта, вызываемого видимым светом и ультрафиолетовыми лучами, максимальная начальная скорость фотоэлектронов  $v_{макс} \ll c$  и  $W_{к макс} = mv_{макс}^2/2$ , где  $m$  — масса покоя электрона.

4° Из закона сохранения энергии следует *уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*:

$$h\nu = A + W_{к макс},$$

где  $A = e\varphi_0$  — работа выхода электрона из облучаемого вещества (стр. 405),  $\varphi_0$  — потенциал выхода,  $h\nu$  — энергия фотона. Величины  $A$  и  $\varphi_0$  зависят от начального энергетического состояния фотоэлектрона.

В соответствии с законами сохранения энергии и импульса поглощение фотона свободными электронами невозможно, и фотоэффект возможен только на электронах, связанных в атомах, молекулах и ионах, а также на электронах кристаллических твердых тел.

5° Законы внешнего фотоэффекта.

а) Максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты света и не зависит от его интенсивности.

б) Число фотоэлектронов, вырываемых из катода за единицу времени, пропорционально интенсивности света. Фототок насыщения (п. 3°) пропорционален энергетической освещенности катода. Число фотоэлектронов, ежесекундно покидающих катод, пропорционально числу фотонов, поглощаемых веществом за единицу времени. Последнее, при постоянном спектральном составе излучения, пропорционально энергетической освещенности катода.

в) Для каждого вещества существует *красная граница фотоэффекта* (*порог фотоэффекта*) — минимальная частота  $\nu_0 = \frac{A}{h}$ , при которой еще возможен внешний фотоэффект. Величина  $\nu_0$  зависит от химической природы и состояния поверхности. Длина волны  $\lambda_0 = \frac{ch}{A}$ , соответствующая частоте  $\nu_0$ , для большинства металлов находится в ультрафиолетовой части спектра.

Фотоэффект практически безынерционен.

6° Число фотоэлектронов, приходящееся на один падающий фотон, называется *квантовым выходом*  $I$  фотоэффекта. Квантовый выход зависит от свойств вещества и длины волны излучения. Зависимость квантового выхода внешнего фотоэффекта в металлах от энергии фотонов, выраженной в эв, называется *спектральной характеристикой фотоэффекта*. Вблизи красной границы  $\nu_0$  (п. 5°)  $I$  для металлов по порядку величины составляет  $10^{-4}$  и растет пропорционально  $(\nu - \nu_0)^2$ . При энергиях фотонов порядка  $10$  эв  $I$  начинает резко возрастать и достигает максимума порядка  $(0,1 \div 0,15)$  при  $h\nu \sim 18$  эв. Максимум квантового выхода соответствует той области частот, в которой наблюдается минимум коэффициента отражения света от металла.

7° Явление заметного возрастания квантового выхода (и фототока насыщения) в определенных диапазонах частот падающего излучения называется *селективным*

(*избирательным*) *фотоэффектом*. В этом случае квантовый выход сильно зависит от угла падения излучения и от его поляризации. В случае излучения, поляризованного в плоскости падения, селективный фотоэффект отсутствует. Если излучение поляризовано в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, то селективный фотоэффект максимален и зависит от угла падения  $i$ , возрастающая при его увеличении от  $0$  до  $\pi/2$ . Указанные особенности свидетельствуют о влиянии волновых свойств света на внешний фотоэффект.

8° В случае *сложных катодов* (соединения щелочных металлов с сурьмой или висмутом; катоды с полупроводниковыми слоями) внешний фотоэффект обусловлен поглощением фотонов электронами, находящимися либо в заполненной зоне, либо на примесных уровнях (стр. 402). Вследствие малой работы выхода квантовый выход сложных катодов в области видимой части спектра значительно превосходит квантовый выход металлических катодов.

9° Внешний фотоэффект, вызванный фотонами рентгеновского или гамма-излучения, заключается в поглощении энергии фотона атомом и выбрасывании электрона из какой-либо внутренней оболочки атома. При этом атом оказывается возбужденным и фотоэффект сопровождается испусканием фотона вторичного рентгеновского излучения или добавочного фотоэлектрона в том случае, если энергия возбуждения атома передается одному из его электронов (*эффект Оже*, стр. 779).

10° В кристаллических полупроводниках и диэлектриках помимо внешнего фотоэффекта наблюдается внутренний фотоэффект (*фотопроводимость*), заключающийся в увеличении электропроводности этих веществ за счет возрастания в них числа свободных носителей тока (электронов проводимости и дырок). При энергии фотона  $h\nu_0 \geq W_a$ , где  $W_a$  — энергия активации проводимости в беспримесных веществах (разность между энергиями на нижнем уровне зоны проводимости и верхнем уровне валентной зоны), может происходить переброс электрона из заполненной валентной зоны в зону проводимости (стр. 400).  $\nu_0$  называется *красной границей фотопроводимости*. Пары разноименно заряженных носителей (электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне) способны под действием внешнего электрического поля приходить в упорядоченное движение, создавая электрический ток. Электропроводность вещества пропорциональна интенсивности монохроматического света.



Введение в полупроводник примесей приводит к снижению частоты  $\nu_0$  вследствие того, что при этом происходит перебор электронов в зону проводимости с донорных примесных уровней или перебор из валентной зоны на акцепторные примесные уровни (стр. 403). Фотопроводимость электронного  $n$ -полупроводника (стр. 402) имеет чисто электронный характер. Фотопроводимость дырочного  $p$ -полупроводника (стр. 403) является чисто дырочной. Сильное поглощение света может вызвать снижение проводимости полупроводника вследствие того, что фотоны интенсифицируют процессы рекомбинации электронов и дырок и тем снижают концентрацию свободных зарядов в соседних участках полупроводника.

11° *Вентильный фотоэффект* (фотоэффект в запирающем слое) состоит в возникновении электродвижущей силы вследствие внутреннего фотоэффекта вблизи поверхности контакта между металлом и полупроводником или двумя полупроводниками  $p$ - и  $n$ -типа. Такой контакт имеет одностороннюю проводимость, связанную с обеднением слоев полупроводников, прилегающих к поверхности контакта, носителями тока (электронами проводимости и дырками) (стр. 401). Внутренний фотоэффект в полупроводниках вызывает нарушение равновесного распределения носителей тока в области контакта (стр. 408) и приводит к изменению контактной разности потенциалов по сравнению с равновесной, т. е. к возникновению *фотоэлектродвижущей силы* (*фото-э. д. с.*). Величина фото-э. д. с., возникающая под действием монохроматического света, пропорциональна его интенсивности. Красная граница вентильного фотоэффекта определяется величиной  $W_A$  (п. 10°). Вентильный фотоэффект в  $p$ - $n$ -переходе представляет непосредственное преобразование энергии электромагнитного излучения в энергию электрического тока. Это явление используется в *фотоэлектрических источниках тока* (кремниевые, германиевые и другие фотоэлементы).

## 2. Эффект Комптона

1° *Эффектом Комптона* называется изменение частоты или длины волны фотонов при их рассеянии электронами и нуклонами. Эффект Комптона отличается от фотоэффекта тем, что фотон передает частицам вещества свою энергию не полностью. Частными случаями эффекта Комптона являются рассеяние рентгеновских лучей на

электронных оболочках атомов и рассеяние гамма-лучей на атомных ядрах. В простейшем случае эффект Комптона представляет собой рассеяние монохроматических рентгеновских лучей легкими веществами (графит, парафин и др.), и при теоретическом рассмотрении комптоновского эффекта в этом случае электрон считается свободным.

2° Рассеяние фотона на свободном электроне можно рассматривать как процесс их упругого столкновения. Рассмотрение обычно проводится в лабораторной системе координат (стр. 728), в которой электрон вначале предполагается покоящимся, а после столкновения — движущимся со скоростью  $v$ , не малой по сравнению со скоростью  $c$  налетающего фотона. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2,$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — длины волн, соответствующие первичному и вторичному (рассеянному) фотонам,  $m_0$  — масса покоя электрона,  $m = m_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  — релятивистская масса электрона (стр. 526), и из закона сохранения импульса (стр. 107) при столкновении:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между направлениями первичного и рассеянного фотона (рис. V.10.1), получается следующая зависимость для изменения длины волны  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Величина

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2,426 \cdot 10^{-10} \text{ см}$$

называется *комптоновской длиной волны* для электрона.

Формула Комптона для частоты фотона после рассеяния:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \varepsilon(1 - \cos \theta)},$$

где  $\varepsilon = \frac{h\nu}{m_0c^2}$  — энергия первичного фотона в единицах  $m_0c^2 = 511 \text{ кэВ}$  энергии покоя электрона.

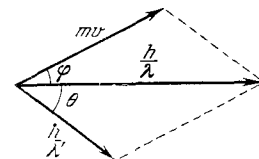


Рис. V.10.1.

3° Изменение (смещение) длины волны в эффекте Комптона зависит от угла рассеяния фотонов  $\theta$  и имеет наибольшую величину для обратного рассеяния ( $\theta = 180^\circ$ ). При наблюдении вдоль первоначального направления движения фотонов ( $\theta = 0^\circ$ ) эффект отсутствует.

При условии  $h\nu \gg m_0c^2$  ( $\lambda \ll \lambda_c$ ) длина волны  $\lambda'$  излучения, рассеянного назад,  $\lambda' = 2\lambda_c$  независимо от длины волны  $\lambda$  падающего излучения. Угловое распределение неполяризованного излучения, испытывающего рассеяние на свободном покоящемся электроне, дается формулой Клейна – Нишины – Тамма (см. также стр. 843):

$$d\sigma(\theta) = \frac{r_e^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \epsilon(1 - \cos \theta)]^2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \epsilon(1 - \cos \theta)]} \right\} d\Omega.$$

Здесь  $d\sigma(\theta)$  – дифференциальное эффективное поперечное сечение для рассеяния фотона под углом  $\theta$  внутри элементарного телесного угла  $d\Omega$ ,  $r_e = \frac{e^2}{m_0c^2}$  – классический радиус электрона (стр. 912). Интенсивность  $I$  рассеянного излучения на расстоянии  $R$  от рассеивающего центра связана с интенсивностью  $I_0$  первичного пучка:

$$I = \frac{I_0}{R^2} \frac{v'}{v} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega},$$

где отношение  $v'/v$  дается формулой Комптона (п. 2°). При  $h\nu \gg m_0c^2$   $d\sigma(\theta)$  быстро убывает с ростом  $\theta$  и рассеянное излучение практически направлено вперед, вдоль первичного пучка света. При  $h\nu \ll m_0c^2$  формула Клейна – Нишины – Тамма переходит в классическую формулу Дж. Томсона для рассеяния на электроне:

$$d\sigma(\theta) = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega$$

(см. также стр. 843). Формула Клейна – Нишины – Тамма применяется для расчета рассеяния света на любых заряженных частицах со спином  $\frac{1}{2} \hbar$  и магнитным моментом  $\frac{e\hbar}{2Mc}$  ( $M$  – масса частицы).

4° Рассеивающий электрон, приобретший скорость при столкновении с фотоном в эффекте Комптона, называется *электроном отдачи*.

Распределение по углам рассеянных электронов отдачи:

$$d\sigma_e(\varphi) = 4r_e^2 \frac{(1 + \epsilon)^2 \cos \varphi}{(1 + 2\epsilon + \epsilon^2 \sin^2 \varphi)^2} \left\{ 1 + \frac{2\epsilon^2 \cos^4 \varphi}{(1 + 2\epsilon + \epsilon^2 \sin^2 \varphi)(1 + \epsilon(\epsilon + 2) \sin^2 \varphi)} - \frac{2(1 + \epsilon)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{[1 + \epsilon(\epsilon + 2) \sin^2 \varphi]^2} \right\} d\Omega_\varphi,$$

где  $d\sigma_e(\varphi)$  – дифференциальное эффективное поперечное сечение для рассеяния электронов под углом  $\varphi$  внутри элементарного телесного угла  $d\Omega_\varphi$ ,  $r_e$  – классический радиус электрона. Смысл  $\epsilon$  см. в п. 2°.

Кинетическая энергия электрона отдачи:

$$T_- = h\nu \frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon + (1 + \epsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

причем  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  для всех углов  $\theta$ . Из законов сохранения энергии и импульса при комптон-эффекте следует, что

$$(1 + \epsilon) \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Максимальное значение  $T_{\max}$  достигается при  $\theta = 180^\circ$  ( $\varphi = 0^\circ$ ):

$$T_{\max} = h\nu \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon}.$$

### 3. Давление света

1° *Давлением света* называется механическое действие, производимое электромагнитными волнами при падении на какую-либо поверхность.

2° Согласно электромагнитной теории света давление света объясняется возникновением механических сил, действующих на электроны, находящиеся на поверхности освещаемого тела, со стороны электрической и магнитной компонент поля световой волны. Электрическое поле световой волны вызывает колебания зарядов в поверхностном слое тела. Магнитное поле действует на эти заряды с лоренцевой силой (стр. 442), направление которой совпадает с направлением вектора Пойнтинга световой волны (стр. 505). Величина давления света, оказываемого на некоторую поверхность нормально падающим на нее параллельным пучком света, определяется абсолютной величиной вектора Пойнтинга (стр. 505).

3° Если  $P$  – энергия электромагнитного излучения, падающего нормально на некоторую поверхность единичной площади за 1 сек,  $c$  – скорость распространения световой волны в вакууме,  $R$  – коэффициент отражения света поверхностью (стр. 587), то давление  $p$  света на эту поверхность равно:

$$p = \frac{P}{c} (1 + R) = w(1 + R).$$

Здесь  $w$  — объемная плотность энергии электромагнитного излучения.

Давление света:

$$p = \begin{cases} P/c & \text{для абсолютно поглощающего (абсолютно} \\ & \text{черного) тела } (R = 0), \\ 2P/c & \text{для абсолютно отражающего тела } (R = 1). \end{cases}$$

Давление изотропного равновесного излучения (стр. 694), заполняющего некоторый объем:

$$p = \frac{1}{3} w.$$

4° Квантовая теория света объясняет световое давление как результат передачи фотонами своего импульса атомам или молекулам на поверхности тела. Световой поток с частотой  $\nu$ , передающий  $1 \text{ см}^2$  поверхности тела за  $1 \text{ сек}$  энергию  $P$ , состоит из  $N = P/h\nu$  фотонов, причем импульс каждого фотона равен  $h\nu/c$  (стр. 698). При своем поглощении фотон отдает импульс  $h\nu/c$ , при отражении (упругом рассеянии) — импульс  $2h\nu/c$ , так как его импульс при этом меняется с  $+h\nu/c$  на  $-h\nu/c$ . Общий переданный фотонами импульс при коэффициенте отражения  $R$ :

$$(1+R)N \frac{h\nu}{c} = \frac{P}{c} (1+R).$$

Таким образом, результаты электромагнитной и квантовой теории света в расчете светового давления совпадают.

5° Световое давление, существование которого было экспериментально доказано опытами П. Н. Лебедева, является одной из причин, обуславливающих появление хвостов у комет при значительном приближении их к Солнцу. Ввиду малых размеров частиц вещества в кометах их отталкивание световым давлением, пропорциональное площади поверхности частиц, превышает их притяжение гравитационным полем Солнца, пропорциональное объему частиц.

#### 4. Химические действия света

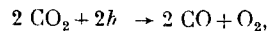
1° Действие света на поглощающие его вещества может вызвать химические превращения веществ, называемые *фотохимическими реакциями*. Различаются первичный фотохимический акт и вторичные реакции. К числу таких реакций относятся разложение сложных молекул, радикалов, многоатомных ионов на их составные части, образование сложных молекул из более простых, а также об-

разование комплексов одинаковых молекул (полимеризация, стр. 291).

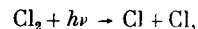
2° Разложение под действием света сложных молекул на более простые или на отдельные составляющие их атомы называется *фотохимической диссоциацией молекул* (*фотодиссоциация, фотолиз, фотораспад*). Результатом фотодиссоциации являются атомы, радикалы, ион-радикалы. Одна из частиц при этом находится в возбужденном состоянии и принимает на себя разность между энергией поглощенного света и энергией диссоциации. Фотодиссоциация становится возможной при частоте света  $\nu$ , удовлетворяющей условию

$$\nu \geq \nu_0 = \frac{D}{h},$$

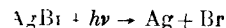
где  $\nu_0$  — граничная частота фотодиссоциации,  $D$  — энергия фотодиссоциации, которая обычно меньше энергии диссоциации основного состояния системы. Примерами фотохимических реакций служат разложение углекислоты под действием солнечного света:



диссоциация молекул хлора на свету:



разложение бромистого серебра в фотографических материалах при их освещении:



Фотодиссоциация может происходить по механизму преддиссоциации (стр. 802).

3° Для фотохимических реакций имеет место *закон эквивалентности Эйнштейна*: для каждого акта фотохимического превращения требуется один квант поглощенного света. Количество прореагировавших молекул связывается с энергией поглощенных квантов. Число  $N$  молекул вещества, претерпевших фотохимическое превращение при поглощении единицы энергии света,  $N \sim \frac{1}{h\nu} = \frac{\lambda}{hc}$ . Масса прореагировавшего вещества  $M = Nm$ , где  $m$  — масса молекулы.

*Закон Бунзена — Роско (закон взаимозаменяемости)*: количество вещества  $m$ , прореагировавшего в фотохими-

ческой реакции, пропорционально мощности излучения  $\Phi$  и времени освещения  $t$ :

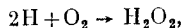
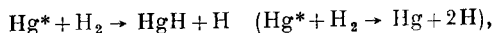
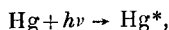
$$m = k\Phi t,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от рода реакции (предполагается, что спектральный состав света постоянен и обеспечивает осуществление реакции).

Согласно закону Бунзена — Роско  $m = \text{const}$  при условии  $(\Phi_1 t_1)_{c=\text{const}} = (\Phi_2 t_2)_{c=\text{const}}$ , где  $c$  — концентрация образовавшегося продукта фотохимической реакции. Закон нарушается, если первичный фотохимический акт осложняется вторичными нефотохимическими реакциями. В галлоидносеребряных фотографических слоях закон Бунзена — Роско выполняется в диапазонах выдержек  $(10^{-2} \div 10^{-1}) \text{сек}$ ,  $10^{-5} \text{сек}$ .

4° Если частота  $\nu$  света, которым облучается вещество, лежит вне полосы поглощения вещества, то поглощения света и соответственно фотохимической реакции не происходит. Однако она может быть вызвана добавлением к данному веществу другого вещества — *сенсibilизатора*, полоса поглощения которого содержит частоту  $\nu$ . Фотон поглощается молекулой сенсibilизатора, а полученная энергия передается молекуле исследуемого вещества при межмолекулярном столкновении. Такие фотохимические реакции называются *сенсibilизированными*. Для их осуществления необходимы частые соударения между молекулами сенсibilизатора и исследуемого вещества, т. е. достаточно большое давление.

Примером такой реакции является образование перекиси водорода  $\text{H}_2\text{O}_2$  из  $\text{H}_2$  и  $\text{O}_2$  при сенсibilизации атомами ртути и освещении их смеси светом с длиной волны  $2537 \text{ \AA}$ , соответствующей линии поглощения атомов ртути. Реакция идет по следующей возможной схеме:



где  $\text{Hg}^*$  означает возбужденный атом ртути. Возбуждение атома ртути снимается при передаче энергии возбуждения молекуле водорода.

## Г Л А В А 11 ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

### 1. Классификация процессов люминесценции и их протекание

1° *Люминесценцией* называется излучение света телами, избыточное над тепловым (стр. 689) при той же температуре и имеющее длительность, значительно превышающую периоды излучений в оптическом диапазоне спектра. Это излучение может быть вызвано бомбардировкой вещества электронами и другими заряженными частицами, пропусканьем через вещество электрического тока (не-тепловое действие), освещением вещества видимым светом, рентгеновскими и гамма-лучами, а также некоторыми химическими реакциями в веществе.

2° В отличие от равновесного теплового излучения (стр. 689), люминесцентное излучение не имеет равновесного характера. Оно вызывается сравнительно небольшим числом атомов, молекул или ионов. Под действием источника люминесценции они переходят в возбужденное состояние, и их последующее возвращение в нормальное или менее возбужденное состояние сопровождается испусканием люминесцентного излучения. Длительность свечения обусловлена длительностью возбужденного состояния, которое, помимо свойств люминесцирующего вещества, зависит от окружающей среды. Если возбужденное состояние метастабильно, то время пребывания в нем частицы может достигать  $10^{-4} \text{сек}$ , что соответственно увеличивает и длительность люминесценции.

3° Люминесценция, сразу прекращающаяся после окончания действия возбудителя свечения, называется *флуоресценцией*. Люминесценция, сохраняющаяся длительное время после прекращения действия возбудителя свечения, называется *фосфоресценцией*.

Флуоресценция обусловлена переходами атомов, молекул или ионов из возбужденного состояния в нормальное. Фосфоресценция обусловлена наличием метастабильных возбужденных состояний атомов и молекул, переход из которых в нормальное состояние затруднен по тем или иным причинам (стр. 743). Переход из метастабильного состояния в нормальное возможен лишь в результате дополнительного возбуждения, например теплового. Разграничение на флуоресценцию и фосфоресценцию является

достаточно условным. Люминесценция под действием света называется *фотолюминесценцией*, под действием бомбардировки электронами — *катодолюминесценцией*, под действием электрического поля — *электролюминесценцией*, под действием химических превращений — *хемилюминесценцией*. Люминесцирующие вещества называются *люминофорами*.

4° В зависимости от характера элементарных процессов, приводящих к люминесцентному излучению, различают спонтанные, вынужденные и рекомбинационные процессы люминесценции, а также резонансную флуоресценцию. *Резонансная флуоресценция* наблюдается в парах атомов и состоит в спонтанном высвечивании с того же энергетического уровня, на котором оказался излучающий атом при поглощении энергии от источника люминесценции. При возбуждении резонансной флуоресценции светом имеет место *резонансное излучение*, переходящее в *резонансное рассеяние* при увеличении плотности паров. *Спонтанная люминесценция* состоит в том, что под действием источника люминесценции вначале происходит возбуждение атомов (молекул или ионов) на промежуточные возбужденные энергетические уровни. Далее с этих уровней происходят излучательные, а чаще безызлучательные переходы на уровни, с которых излучается люминесцентное свечение. Такой вид люминесценции наблюдается у сложных молекул в парах и растворах, у примесных центров в твердых телах (стр. 401). Наблюдается также при переходах из экситонных состояний (стр. 739).

*Вынужденная (метастабильная) люминесценция* характерна тем, что под действием источника люминесценции происходит переход на метастабильный уровень, а затем следует переход на уровень люминесцентного излучения. Примером является фосфоресценция органических веществ. *Рекомбинационная люминесценция* представляет собой рекомбинационное излучение, которое возникает при воссоединении тех частиц, которые были разделены при поглощении энергии от источника люминесценции (в газах — радикалы или ионы, в кристаллах — электроны и дырки) (стр. 401).

Рекомбинационная люминесценция может происходить на дефектных или примесных центрах (*центры люминесценции*), когда дырки захватываются на основной уровень центра, а электроны — на его возбужденный уровень.

5° При электронном возбуждении люминесценции энергия бомбардирующих электронов передается электронам атомов (или молекул, ионов) и переводит их в возбужденное состояние. Передача энергии возможна лишь при условии, что кинетическая энергия бомбардирующего электрона

$$T = \frac{mv^2}{2} \geq E_B - E_H,$$

где  $E_H$  и  $E_B$  — полная энергия атома (молекулы, иона) соответственно в нормальном и ближайшем к нему возбужденном состояниях. Атом (молекула, ион) возвращается из возбужденного состояния в нормальное, испустив квант света (фотон) частоты  $\nu$ :

$$h\nu = E_B - E_H.$$

При достаточных энергиях возбуждения возвращение атома (молекулы, иона) из возбужденного в нормальное состояние может происходить в несколько этапов через все менее возбужденные состояния. Этому соответствует испускание нескольких фотонов различных частот, причем суммарная их энергия равна энергии начального возбуждения.

6° Фотолюминесценция возбуждается светом видимой или ультрафиолетовой области спектра. Для сложных люминесцирующих веществ (сложные молекулы, конденсированные среды) спектральный состав фотолюминесценции не зависит от длины волны света, вызывающего люминесценцию, и подчиняется правилу Стокса (стр. 712).

Наблюдаются линейчатые, полосатые и сплошные спектры фотолюминесценции. Ее характер существенно зависит от агрегатного состояния вещества. У ряда кристаллофосфоров с увеличением частоты возбуждающего света квантовый выход (стр. 713) растет при условии  $h\nu > 2\Delta W$ , где  $\Delta W$  — ширина запрещенной зоны (стр. 735) (размножение фотонов при фотолюминесценции).

7° Электролюминесценция в газах вызывается электрическим разрядом, в котором энергия возбуждения сообщается молекулам газа механизмом электронного или ионного удара (стр. 804). Возбужденное состояние при электролюминесценции всегда вызывается прохождением какого-либо тока и, таким образом, связано с наличием электрического поля. Электролюминесценция в твердых телах наблюдается, в частности, на  $p$ - $n$ -переходе в полупроводниках (стр. 415).

8° Хемилюминесценция сопровождается некоторыми экзотермическими химическими реакциями. Химические превращения в веществе сопровождаются перестройкой внешних электронных оболочек атомов. Излучение света приводит к образованию химического соединения с более устойчивой в данном окружении и при данных условиях электронной конфигурацией (стр. 760). Хемилюминесценция часто сопровождается процессами окисления с образованием более устойчивых продуктов сгорания.

Свечение при хемилюминесценции вызывается молекулами (атомами, ионами) продуктов реакции в возбужденных электронных, колебательных и вращательных состояниях. Примерами хемилюминесценции являются свечение высокотемпературных и низкотемпературных пламен, свечение при рекомбинации перекисных радикалов в цепном окислении жидких углеводородов.

## 2. Закономерности люминесценции

1° *Правило Стокса:* длина волны фотолюминесценции, как правило, больше, чем длина волны возбуждающего света. В более общей формулировке: максимум спектра люминесценции смещен в длинноволновую сторону от максимума спектра поглощения. С квантовой точки зрения правило Стокса означает, что энергия  $h\nu$  кванта возбуждающего света частично расходуется на неоптические процессы:

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + W, \quad \text{т. е. } \nu_{\text{люм}} < \nu \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{люм}} > \lambda,$$

где  $W$  — энергия, затраченная на различные процессы, кроме фотолюминесценции.

2° В некоторых случаях фотолюминесцентное излучение имеет в своем спектре длины волн, меньшие длины волны возбуждающего света (*антистоксова излучение*). Это явление объясняется тем, что к энергии возбуждающего фотона добавляется энергия теплового движения атомов, молекул или ионов люминофора:

$$h\nu_{\text{люм}} = h\nu_{\text{погл}} + akT,$$

где  $a$  — коэффициент, зависящий от природы люминофора,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура люминофора. Антистоксова излучение проявляется все отчетливее по мере повышения температуры люминофора.

3° Отношение энергии люминесценции к энергии, поглощенной в стационарных условиях люминофором от источника, возбуждающего люминесценцию, называется *энергетическим выходом люминесценции*.

*Квантовым выходом фотолюминесценции* называется отношение числа фотонов люминесцентного излучения к числу поглощенных фотонов возбуждающего света при фиксированной энергии последнего. Энергетический выход фотолюминесценции возрастает прямо пропорционально длине волны  $\lambda$  поглощаемого излучения, а затем, достигая в некотором интервале при  $\lambda \sim \lambda_{\text{макс}}$  максимального значения, быстро спадает до нуля при дальнейшем увеличении  $\lambda$  (*закон Вавилова*). С увеличением длины волны возбуждающего света растет число фотонов с энергией  $h\nu$ , содержащихся в данной энергии первичного излучения. Поскольку каждый фотон может вызвать появление кванта  $h\nu_{\text{люм}}$ , то с увеличением длины волны происходит возрастание энергетического выхода фотолюминесценции. Резкое уменьшение энергетического выхода при  $\lambda > \lambda_{\text{макс}}$  объясняется тем, что энергия поглощаемых фотонов становится недостаточной для возбуждения частиц люминофора.

Согласно закону Вавилова квантовый выход фотолюминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света в стоксовой области ( $\nu_{\text{возб}} > \nu_{\text{люм}}$ ) (п. 1°) и резко падает в области антистоксова излучения (п. 2°) ( $\nu_{\text{возб}} < \nu_{\text{люм}}$ ).

Величины квантового и энергетического выходов сильно зависят от природы люминофора и внешних условий. Это связано с возможностью безызлучательных переходов частиц из возбужденного в нормальное состояние (*тушение люминесценции*). Основную роль в процессах тушения играют столкновения второго рода, в результате которых энергия возбуждения переходит во внутреннюю энергию теплового движения без излучения. Имеет место также резкое уменьшение интенсивности флуоресценции при чрезмерно большой концентрации молекул люминесцирующего вещества (*концентрационное тушение*). В этом случае из-за сильной связи между частицами невозможно образование центров люминесценции.

4° Интенсивность свечения для спонтанной и метастабильной люминесценции (п. 4°, стр. 710) изменяется

с течением времени по экспоненциальному закону:

$$I_t = I_0 e^{-t/\tau},$$

где  $I_t$  — интенсивность свечения в момент времени  $t$ ,  $I_0$  — интенсивность свечения в момент прекращения возбуждения люминесценции,  $\tau$  — средняя продолжительность возбужденного состояния атомов или молекул люминофора. Величина  $\tau$  имеет обычно порядок  $10^{-9}$  —  $10^{-8}$  сек. В отсутствие тушащих процессов  $\tau$  слабо зависит от условий и определяется в основном внутри-молекулярными процессами.

5° Интенсивность рекомбинационного люминесцентного свечения (п. 4°, стр. 710) изменяется с течением времени по гиперболическому закону:

$$I_t = \frac{I_0}{(1+at)^n},$$

где  $a$  и  $n$  — постоянные, величина  $a$  лежит в пределах от долей  $\text{сек}^{-1}$  до многих тысяч  $\text{сек}^{-1}$ ;  $a \propto \sqrt{I_0}$ , где  $I_0$  — интенсивность рекомбинационной люминесценции в момент ее возбуждения;  $n$  заключено в пределах от 1 до 2.

## О Т Д Е Л VI

# АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

### Г Л А В А I

## ЭЛЕМЕНТЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### 1. Волновые свойства частиц. Волновая функция

1° *Квантовой (волновой) механикой* называется раздел теоретической физики, изучающий законы движения частиц в области микромира (в масштабах  $10^{-6}$  —  $10^{-13}$  см). При движении частиц со скоростями  $v \ll c$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, применяется нерелятивистская квантовая механика; при  $v \sim c$  она заменяется релятивистской квантовой механикой. Объектами изучения волновой механики являются кристаллы, молекулы, атомы, атомные ядра и элементарные частицы.

2° В основе квантовой механики лежат представления Планка о квантах энергии (стр. 695), Эйнштейна о фотонах, данные о существовании дискретных значений некоторых физических величин, характеризующих состояния частиц микромира (например, энергии) (стр. 718), гипотеза де Бройля о волновых свойствах частиц вещества. *Формула де Бройля:*

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p},$$

где  $m$  — масса движущейся частицы,  $v$  — ее скорость,  $h$  — постоянная Планка (стр. 695),  $\lambda$  — длина волны, связанная с движущейся частицей вещества. Эти волны называются *волнами де Бройля*. Другая форма соотношения де Бройля:

$$p = \frac{h}{2\pi} \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda$  — волновой вектор,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны.

Длина волны де Бройля электрона после прохождения им ускоряющего напряжения  $U$ :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \sqrt{\frac{150,5}{U}} \text{ \AA} \quad (U \text{ в вольтах}).$$

У макроскопических тел волновые свойства не проявляются вследствие того, что длины волн де Бройля оказываются исчезающе малы.

3° Формула де Бройля, позволившая перенести представления о двойственной, корпускулярно-волновой природе электромагнитного излучения (стр. 698) на частицы вещества — *корпускулярно-волновой дуализм* частиц микромира — подтверждается опытами по отражению и прохождению электронов и других частиц через кристаллы. В этих опытах наблюдается дифракционная картина, наличие которой служит признаком волнового процесса. Этот эффект наблюдается, когда длина электронной волны имеет порядок межатомного расстояния в кристалле (стр. 621). Метод исследования строения вещества, основанный на дифракции электронов, называется *электронографией*.

4° Согласно статистической интерпретации волны де Бройля имеют особый физический смысл *волн вероятности*. Каждому свободному электрону пучка, падающего на кристалл, сопоставляется плоская волна де Бройля. Взаимодействие электронов с узлами кристаллической решетки вызывает рассеяние электронов, которое можно рассматривать как дифракцию плоской волны на трехмерной структуре. Дифракционная картина в этом случае есть проявление статистической закономерности, согласно которой электроны с наибольшей вероятностью попадают в определенные места пластинки (темные кольца) и с меньшей вероятностью — в другие места (светлые кольца). Плоская падающая волна соответствует равной вероятности нахождения электрона в любом месте пространства. Если пучок электронов испускается точечным источником, то пучку сопоставляется расходящаяся сферическая волна. *Интенсивность волн вероятности* служит мерой вероятности обнаружить частицу в данном месте пространства.

5° Вероятность нахождения частицы в данном месте пространства в данный момент времени характеризуется функцией  $\psi(x, y, z, t)$ , называемой *волновой функцией* (или  *$\psi$ -функцией*). Эта функция может быть как действительной, так и комплексной. Физический смысл имеет лишь квадрат ее модуля  $I = |\psi|^2 = \psi\psi^*$ , где  $\psi^*$  — функция, комплексно сопряженная  $\psi$ . Величина  $I$  имеет смысл *плотности вероятности*. Вероятность  $w(x, y, z, t)$  обнаружить частицу в объеме  $dV = dx dy dz$ :

$$w(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV.$$

6° В квантовой механике вводится понятие *средней плотности физической величины*. Например, средняя плотность заряда:

$$\rho = e |\psi|^2,$$

средняя плотность тока частиц с зарядом  $e$  и массой  $m$ :

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar e}{4\pi m} (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi).$$

Для  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  справедлив закон сохранения электрического заряда (уравнение непрерывности, стр. 504).

7° Свободной частице сопоставляется плоская волна:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{i(2\pi\nu t - \mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где  $\nu$  — частота ( $\nu = c/\lambda$ ),  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, характеризующий положение частицы в пространстве. Частота  $\nu$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  связаны с энергией и импульсом частицы формулой де Бройля (стр. 715):

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{2\pi}$$

и таким же выражением, которое справедливо для квантов света:

$$E = h\nu.$$

Для волн де Бройля, в отличие от электромагнитных волн, существует дисперсия (стр. 568) даже для частицы в вакууме. Фазовая скорость волн де Бройля

$$v = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{2\pi E}{\hbar k} = \sqrt{c^2 + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^4}{k^2 \hbar^2}} > c$$

превышает скорость света в вакууме и является функцией  $k$  (дисперсия).

Групповая скорость волн де Бройля:

$$V = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{2\pi m} = \tilde{v},$$

где  $\tilde{v}$  — скорость частицы. Дисперсия приводит к тому,



что группы волн де Бройля (волновые пакеты, стр. 569) расплываются со временем. Это не позволяет представлять частицы в виде групп волн де Бройля.

## 2. Уравнение Шредингера

1° Основное уравнение квантовой механики, определяющее вид функции  $\psi$  для различных случаев движения и взаимодействия микрочастиц, называется *уравнением Шредингера*. Для одной частицы в отсутствие магнитного поля оно имеет вид

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $U(x, y, z, t)$  — потенциальная энергия (стр. 64), которая связана с силовой функцией (стр. 64), если силы, действующие на частицу, являются потенциальными,  $m$  — масса частицы,  $i = \sqrt{-1}$ . Уравнение Шредингера записывается также в виде

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

где  $H$  — гамильтониан, или оператор Гамильтона (стр. 95).

2° В случае свободного движения частицы ( $U = 0$ ) уравнение Шредингера имеет решение

$$\psi(x, y, z, t) = ae^{-\frac{2\pi i}{\hbar}(E t - p_x x - p_y y - p_z z)},$$

описывающее плоскую волну (стр. 565).

3° Случай  $\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = 0$  соответствует *стационарным*, т. е. неизменным во времени, *состояниям движения* частиц. Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} [E - U(x, y, z)] \psi = 0$$

или

$$H\psi = E\psi,$$

где  $H$  — гамильтониан, совпадающий с оператором полной энергии. Решения этого уравнения, называемые *собственными функциями*, существуют только при определенных значениях  $E$ , называемых *собственными значениями*. Совокупность собственных значений  $E$  называется *энергетическим спектром* частицы (или системы частиц). Если  $U$  — монотонная функция и  $U \rightarrow 0$  на бес-

конечности, то в области  $E < 0$  собственные значения образуют дискретный спектр.

Важнейшей задачей квантовой механики является нахождение собственных значений и собственных функций частицы (или системы частиц).

4° Собственные функции нормированы тем условием, что вероятность обнаружить частицу во всем пространстве равна единице, как вероятность достоверного события:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

## 3. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

1° К микрочастицам, обладающим волновыми свойствами (стр. 715), в ограниченной степени можно применить понятия классической механики, например понятия координаты частицы и ее импульса. Поскольку понятие «координата волны» лишено физического смысла, в квантовой механике лишено также физического смысла понятие траектории частицы. В классической механике каждому определенному значению координаты частицы соответствует точное значение ее импульса. В квантовой механике существует принципиальные неточности в определении пространственного положения и величины импульса частицы, связанные с неклассической природой микрочастиц.

2° Неточность  $\Delta x$  в определении координаты  $x$  частицы связана с неточностью  $\Delta p_x$  в определении проекции  $p_x$  ее импульса *соотношением неопределенностей Гейзенберга*:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4\pi}.$$

Аналогично  $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{4\pi}$  и  $\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{4\pi}$ .

Чем точнее определены координаты частицы (т. е. чем меньше  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$ ), тем менее точно определены значения проекций ее импульса (т. е. тем больше  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  и  $\Delta p_z$ ). Точно определенным координатам частицы соответствует полная неопределенность в значениях проекций ее импульса.

Ни при каких обстоятельствах невозможно измерить одновременно абсолютно точно и координаты и импульсы частиц.

3° С помощью средних квадратичных отклонений (стр. 237)  $\overline{\Delta x^2}$  и  $\overline{\Delta p_x^2}$  для оценки степени отклонения измеренных в каждом отдельном случае величин  $x$  и  $p_x$  от их средних значений соотношение Гейзенберга записывается в форме

$$\overline{\Delta p_x^2} \overline{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar^2}{16\pi^2}.$$

4° Конечность величины кванта действия  $\hbar$  (стр. 695) приводит, согласно соотношению Гейзенберга, к тому, что всякая попытка измерить некоторую физическую величину, характеризующую микробъект, приводит к определяемому этим соотношением изменению другой величины, характеризующей свойства этого объекта. Соотношения Гейзенберга имеют место для любой пары канонически сопряженных величин (стр. 104). Соотношение для энергии  $E$  и времени  $t$ :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2\pi}.$$

Энергия частицы в каком-либо состоянии может быть определена тем точнее, чем дольше частица находится в этом состоянии.

5° В основе соотношения неопределенностей Гейзенберга лежит сложное взаимоотношение корпускулярных и волновых свойств микрочастиц, для описания которого оказываются неадекватными заимствованные из классической физики понятия координат и импульсов частиц.

Корпускулярные свойства частиц можно было бы описывать с помощью классических понятий, если бы на эти свойства неотделимо от них не накладывались волновые свойства. Корпускулярно-волновой дуализм частиц микромира есть проявление наиболее общей взаимосвязи двух основных форм материи, изучаемых физикой, — вещества и поля (стр. 882).

6° В квантовой механике существенно изменяется (по сравнению с классической физикой) понятие о процессе измерения и измерительном приборе. Процесс измерения в микромире неизбежно связан с существенным влиянием прибора на ход измеряемого явления. Например, для определения положения электрона его необходимо «осветить» квантом малой длины волны. Но с уменьшением длины волны кванта растут его частота и энергия, в результате чего соударение кванта с электроном существенно изменяет импульс последнего, и притом на неопределенную (порядка  $\hbar/2\pi\Delta x$ ) величину.

7° Соотношения Гейзенберга отнюдь не являются утверждением о принципиальной ограниченности наших знаний о микромире. Они отражают лишь ограниченную применимость понятий классической физики в области микромира.

#### 4. Простейшие задачи квантовой механики

Волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , описывающая произвольное состояние микрочастицы, гамильтониан которой не зависит явно от времени, может быть представлена в виде суперпозиции полного набора волновых функций стационарных состояний:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}, t),$$

или

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i E_n t}{\hbar}},$$

где  $c_n$  — постоянные коэффициенты,  $\psi_n(\mathbf{r})$  — волновые функции стационарных состояний, являющиеся решениями стационарного уравнения Шредингера,  $E_n$  — собственные значения, дающие энергетический спектр состояний частицы или системы. Суммирование производится по всем стационарным состояниям. Отыскание спектра собственных значений  $E_1, \dots, E_n$  является важнейшей задачей квантовой механики.

#### А. Гармонический осциллятор

1° *Одномерным (линейным) гармоническим осциллятором* называется частица с массой  $m$ , колеблющаяся с собственной циклической частотой  $\omega_0$  (стр. 114) под действием упругой силы (стр. 114) вдоль некоторого направления.

Потенциальная энергия осциллятора, колеблющегося вдоль оси  $x$ :

$$U = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2.$$

Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi = 0.$$

## 2° Совокупность уровней энергии:

$$E_n = h\nu_0 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ . Уровни  $E_n$  расположены на равных расстояниях друг от друга. Наименьшая энергия

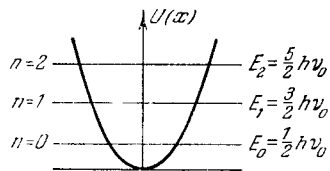


Рис. VI.1.1.

мая  $\omega_0$ , по этому нельзя осуществить никакими внешними воздействиями. В нуль  $E_0$  не обращается ни при каких температурах, в том числе при  $T = 0^\circ \text{К}$ . Схема квантовых уровней энергии и ход потенциальной энергии гармонического осциллятора показаны на рис. VI.1.1.

## 3° Собственные (волновые) функции:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_0},$$

где  $x_0 = \sqrt{\hbar/2\pi m \omega_0}$ ,  $H_n$  — полином Чебышева — Эрмита  $n$ -го порядка:

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

Для  $n = 0, 1, 2$ :

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2x_0^2},$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0} \sqrt{\pi}} \frac{2x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2},$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0} \sqrt{\pi}} \left( \frac{4x^2}{x_0^2} - 2 \right) e^{-x^2/2x_0^2}.$$

Число узлов функции  $\psi_n$ , т. е. ее значений, равных нулю, равно квантовому числу  $n$  (стр. 726).

4° Соотношение плотности вероятностей нахождения частицы, колеблющейся с амплитудой  $a$  относительно

положения равновесия по гармоническому закону, вычисленных по квантовой (при  $n=1$ ) и классической механике, приведено на рис. VI.1.2. Максимумы волновой функции располагаются вблизи точек максимального отклонения, но все же отличаются от них ( $\sqrt{\hbar/2\pi m \omega_0}$  в отличие от  $\sqrt{3\hbar/2\pi m \omega_0}$  в классическом случае). В квантовой механике вероятность найти частицу при  $x > a$ , т. е. в области, где потенциальная энергия частицы больше ее полной энергии, не обращается в нуль. Это не противоречит закону сохранения энергии, так как по соотношению неопределенностей Гейзенберга (стр. 719) величины кинетической и потенциальной энергии частицы (в том числе гармонического осциллятора) не являются одновременно точно измеримыми, так как кинетическая энергия зависит от скорости или импульса, а потенциальная — от координат частицы.

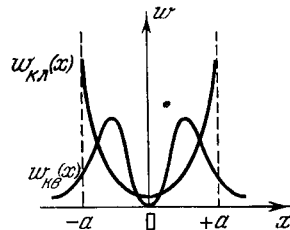


Рис. VI.1.2.

5° С увеличением квантового числа  $n$  квантовые плотности вероятностей линейного гармонического осциллятора все более приближаются к классическим. В этом находит свое выражение *принцип соответствия*, установленный Бором: при больших квантовых числах выводы и результаты квантовой механики должны переходить в классические результаты. В более общей формулировке принцип соответствия требует, чтобы между любой теорией, которая является развитием классической, и первоначальной классической теорией существовала закономерная связь — в определенных предельных случаях новая теория должна переходить в старую. Так, при условии, что  $\lambda \rightarrow 0$ , где  $\lambda$  — длина волны (стр. 541), волновая оптика переходит в геометрическую, формулы кинематики и динамики теории относительности переходят в формулы классической механики при малых скоростях  $v$  движения, таких, что  $(\frac{v}{c})^2 \rightarrow 0$ , где  $c$  — скорость света в вакууме.

6° Для состояния с  $\nu = E_n$  (нулевые колебания) классической вероятностью обнаружить частицу равна 1 для

$x=0$  (осциллятор покоится в положении равновесия), а квантовая вероятность при  $x=0$  имеет максимум, постепенно спадая по обе его стороны и обращаясь в нуль лишь на бесконечности.

### Б. Ротатор

1° Жестким ротатором называется материальная точка с массой  $m$ , вращающаяся в пространстве на постоянном расстоянии от неподвижного центра.

Волновую функцию ротатора представляют в виде произведения радиальной  $R_m(r)$  и сферической  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  функций:

$$\Psi_m(r, \vartheta, \varphi) = R_{ml}(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

$r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  имеют обычный смысл координат сферической системы.

Уравнение Шредингера для радиальной функции  $u(r) = rR(r)$  при  $U=0$ :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[ E - \frac{h^2l(l+1)}{8\pi^2mr^2} \right] u = 0.$$

Уравнения для орбитальной и азимутальной функций:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi),$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left( \lambda - \frac{m_l^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0,$$

где  $\lambda$  — постоянная величина.

2° Энергетический спектр ротатора:



$$E_l = \frac{h^2l(l+1)}{8\pi^2I_l} = \frac{p_l^2}{2I_l},$$

где  $I_l$  — момент инерции ротатора,  $l$  — орбитальное квантовое число, совпадает с классическим выражением для кинетической энергии вращательного движения (стр. 63). Момент импульса  $p_l$  различен для разных квантовых чисел  $l$ . Расстояния между энергетическими уровнями растут с увеличением  $l$ . Уровни энергии ротатора показаны на рис. VI.1.3.

Рис. VI.1.3.

3° Орбитальная и азимутальная волновые функции ротатора:

$$\Theta(\vartheta) = c(1-x^2)^{|m_l|/2} \frac{d^{l+|m_l|}}{dx^{l+|m_l|}} (x^2-1)^l,$$

$$x = \cos \vartheta,$$

$$\Phi = e^{im_l\varphi},$$

где  $c = \text{const}$ ,  $m_l$  — целое число, называемое магнитным квантовым числом (стр. 764),  $-l < m_l < l$ , так что каждому состоянию с данным  $l$  соответствует  $2l+1$  подсостояний с  $m = \pm l, \pm(l-1), \pm(l-2), \dots, \pm 1, 0$ .

В. Движение электрона в кулоновском поле ядра (водородоподобные системы)

1° Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия (стр. 352) единственного электрона  $-e$  и ядра  $+Ze$  водородоподобной системы (стр. 806):

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

где  $r$  — расстояние между электроном и центром ядра,  $Z$  — порядковый номер ядра (стр. 806).

В системе СИ:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

2° Уравнение Шредингера для радиальной части  $u(r) = rR(r)$  полной волновой функции  $\psi(r, \vartheta, \varphi)$  (стр. 724):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left[ E - \frac{h^2l(l+1)}{8\pi^2mr^2} + \frac{Ze^2}{r} \right] u = 0$$

(в гауссовой системе).

В системе СИ изменяется лишь вид  $U(r)$  (см. п. 1°).

При  $E < 0$  уравнение Шредингера имеет дискретный спектр собственных значений (уровней энергии) и непрерывный спектр уровней энергии при  $E > 0$ . Случай  $E = 0$  соответствует ионизации атома;  $E > 0$  соответствует свободному электрону.

3° При  $E < 0$  непрерывные конечные и однозначные решения  $u(r)$  или  $R(r)$  уравнения Шредингера существуют лишь для следующих собственных значений  $E_n$ :

$$E_n = -\frac{2\pi^2Z^2e^4m}{h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{R_hZ^2}{n^2} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$E_n = -\frac{Z^2e^4m}{8h^2\epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2R_h}{n^2} \quad (\text{в СИ}),$$

VI.1.3.

образующих энергетический спектр водородоподобной системы. Здесь  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  называется *главным квантовым числом*,  $R$  — *постоянная Ридберга* (стр. 746). Энергия водородоподобной системы не зависит от орбитального квантового числа, принимающего значения  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  (стр. 750), т. е. все состояния с разными  $l$  при одном и том же  $n$  вырождены.

Учет релятивистских эффектов и спина электрона (стр. 464) приводит к мультиплетной структуре энергетических уровней водородоподобной системы. Дополнительная энергия, связанная с этими эффектами, дает формулу тонкой структуры:

$$E_{n,l} = -\frac{RhZ^2}{n^2} \left[ 1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) \right],$$

где  $l \pm 1/2$  — внутреннее квантовое число (стр. 758),  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}$  — *постоянная тонкой структуры*.

Релятивистские эффекты и спин-орбитальное взаимодействие (стр. 760) снимают вырождение энергетических уровней.

4° Радиальные волновые функции  $R_n$ :

$$R_n(\xi) = N_n e^{-\xi} \xi^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\xi),$$

где  $\xi = 2Zr/a_0 = 2Zr/na_0$ ,  $a_0$  — радиус первой орбиты электрона в атоме водорода (см. ниже),

$$L_{n-l-1}^{2l+1}(\xi) = \frac{d^{2l+1}}{d\xi^{2l+1}} \left[ e^{-\xi} \frac{\xi^{2l+1}}{(2l+1)!} (e^{-\xi} \xi^{n-l-1}) \right]$$

— присоединенные полиномы Лагерра. Множитель  $N_n$  определяется из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_n^2 r^2 dr = 1$$

5° Уравнения для орбитальной и азимутальной волновых функций аналогичны уравнениям для этих функций в случае ротатора (стр. 724). Волновые функции для ряда значений  $n$  и  $l$ :

$n = 1, l = 0$  (1s-подгруппа, стр. 770)

$$\psi_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0};$$

$n = 2, l = 0$  (2s-подгруппа)

$$\psi_{20} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/2a_0};$$

$n = 2, l = 1, m_l = 0$  (2p-подгруппа)

$$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{5/2} r e^{-Zr/2a_0} \cos \vartheta;$$

$n = 2, l = 1, m_l = \pm 1$  (2p-подгруппа)

$$\psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{5/2} r e^{-Zr/2a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi},$$

где  $a_0 = h^2/4\pi^2 me^2$  — *первый боровский радиус* в гауссовой системе,  $m_l$  — магнитное квантовое число (стр. 764).

В системе СИ:

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}.$$

## Г. Рассеяние частиц в поле центральной силы

1° *Рассеянием в силовом поле*, обладающем центральной симметрией, называется отклонение частиц от первоначального направления их движения в результате взаимодействия с *рассеивающим центром*. В частности, этим центром может быть атом или ион.

Число частиц, рассеянных в единицу времени под углом  $\theta$  относительно направления  $z$  их первоначального движения внутрь телесного угла  $d\Omega$ , равно

$$dN = \sigma(\theta) n d\Omega,$$

где  $n$  — число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения в первоначальном пучке частиц (*интенсивность пучка*).

Величина  $\sigma$ , имеющая размерность площади, называется *дифференциальным эффективным поперечным сечением рассеяния* внутрь телесного угла  $d\Omega$ . Величина

$$\tilde{\sigma} = \int_0^{4\pi} \sigma(\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta$$

называется *полным эффективным сечением рассеяния* частиц. Иногда дифференциальное поперечное сечение обозначают  $d\sigma$ , а полное —  $\sigma$ . Полное эффективное сечение определяется как общее число частиц, рассеянных

за единицу времени из падающего пучка единичной интенсивности.

Если рассеяние происходит без потери кинетической энергии частицей, оно называется *упругим*, в противном случае — *неупругим*.

2° Если рассеивающий центр не неподвижен, то столкновение рассматривается в одной из двух систем координат: *лабораторной* (л. с. к.), относительно которой учитываются движения и рассеивающей и рассеиваемой частицы, или *системе центра масс* (центра инерции) (стр. 37) сталкивающихся частиц (*с-система*).

Если в системе л. с. к. рассеивающий центр с массой  $M$  до столкновения покоится и на него налетает частица с массой  $m$  и скоростью  $v_0$ , то кинетическая энергия обеих частиц

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

а скорость движения центра масс частиц относительно л. с. к.

$$v_c = \frac{\sqrt{2mE_0}}{M+m}.$$

В *с-системе* кинетическая энергия относительного движения обеих частиц

$$E = E_0 \frac{M}{M+m}; \quad E = \frac{1}{2} E_0 \quad \text{при} \quad M = m.$$

Энергия частицы в системе л. с. к. после рассеяния связана с ее энергией до рассеяния:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{M^2 + m^2 + 2Mm \cos \theta}{(M+m)^2};$$

$E_{1\text{мин}}$  =  $\frac{(M-m)^2}{(M+m)^2} E_0$  при  $\theta = 180^\circ$ , т. е. при центральном ударе ( $\theta$  — угол рассеяния). Соотношения между углами рассеяния частицы  $m$  в *с-системе* ( $\theta$ ) и в системе л. с. к. ( $\vartheta$ ):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{M \sin \theta}{m + M \cos \theta}, \quad \cos \vartheta = \frac{m + M \cos \theta}{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM \cos \theta}}.$$

3° Если потенциал  $U$  рассеивающего центра имеет сферическую симметрию, то поток рассеянных частиц представляется в виде расходящейся сферической волны:

$$\psi = a(\theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

где  $a(\theta)$  называется *амплитудой рассеяния*;  $|a(\theta)|^2 = \sigma(\theta)$ .

4° Уравнение Шредингера для рассеяния в поле силового центра частиц с массой  $m$  имеет вид, указанный на стр. 725. Рассматриваются решения при  $E > 0$ , соответствующие свободному движению частиц (стр. 725). Потенциал сил при этом считается достаточно быстро убывающим с  $r$  (не менее быстро, чем  $1/r$ ).

5° Амплитуда рассеяния для упругих столкновений:

$$a(\theta)_s = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\cos \theta),$$

$a(\theta)$  — комплексная функция. Интенсивность рассеяния  $I(\theta)$  определяется квадратом модуля  $a(\theta)$ :

$$I(\theta) = A^2 + B^2,$$

где

$$A = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\cos 2\eta_l - 1) P_l(\cos \theta),$$

$$B = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin 2\eta_l \cdot P_l(\cos \theta).$$

Полное эффективное сечение:

$$\tilde{\sigma} = 2\pi \int_0^\pi |a(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l,$$

где  $k^2 = 8\pi^2 mE/h^2$  — квадрат волнового числа налетающей частицы,  $l$  — квантовые числа, определяющие момент импульса частиц (стр. 758),  $P_l(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра,  $\eta_l$  — так называемые *фазы рассеяния*, зависящие от свойств рассеивающего поля. Отдельные члены ряда называются *парциальными эффективными сечениями рассеяния*  $\sigma_l$ . Максимальное парциальное сечение:

$$\tilde{\sigma}_{l\text{макс}} = \frac{4\pi^2}{k^2} (2l+1).$$

Рассеяние при  $l = 0$  сферически симметрично, при  $l = 1$  имеет симметрию диполя, при  $l = 2$  — симметрию квадруполья и т. д.

Эффективные сечения для неупругого рассеяния имеют сложный вид, зависящий от структуры частиц, проявляющейся при их столкновении, а также от их энергии.

6° Если  $U$  можно рассматривать как слабое возмущение, мало изменяющее первоначальное движение частиц

(этому случаю соответствует малость всех фаз рассеяния,  $\eta_i \ll \pi/2$ ), то для  $\sigma(\theta)$  при упругих столкновениях применяется *формула Борна*:

$$d\sigma = \frac{64\pi^4 m^2}{h^4} \left| \int_0^\infty U(r) \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 dr \right|^2 d\Omega,$$

где  $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$  — модуль вектора, связывающего импульсы рассеянных и падающих на центр частиц,  $d\Omega$  — телесный угол.

Борновское приближение теории столкновений справедливо при любых скоростях  $v$  рассеиваемой силовым центром частицы при условии  $|U(a)| \ll \frac{h^2}{4\pi^2 m a^2}$ , где  $a$  — линейные размеры области, где сказывается действие центра на частицу. Если предыдущее условие не выполняется, то формула Борна справедлива только для быстрых частиц, удовлетворяющих условию  $\frac{h\nu}{2\pi a} \gg |U(a)|$ . Для быстрых частиц, таких, что  $v \gg \frac{h}{2\pi m a}$ , полное эффективное сечение  $\bar{\sigma}$  (стр. 727) обратно пропорционально энергии падающей частицы.

7° Дифференциальное эффективное поперечное сечение для упругого рассеяния достаточно быстрых частиц с массой  $m$ , скоростью  $v$  и зарядом  $e_1$  атомом с зарядом ядра  $Z_2$  и объемной плотностью  $\rho$  электрического заряда ядра электронов:

$$\sigma(\theta) = \frac{e_1^2 e^2}{4m^2 v^4} [Z - F(\theta)]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2},$$

где

$$F(\theta) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 dr$$

— так называемый *атомный фактор рассеяния*,  $\theta$  — угол рассеяния в  $s$ -системе (стр. 728). Если  $\rho$  экспоненциально спадает с увеличением расстояния от центра атома:

$$\rho = \rho_0 e^{-r/a},$$

где  $a$  имеет смысл, указанный в п. 6°, т. е. является «радиусом» атома, то

$$F(\theta) = \frac{Z}{(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}$$

и

$$\sigma(\theta) = \frac{e_1^2 e^2 Z^2}{4m^2 v^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \right]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

Для быстрых частиц ( $ka \gg 1$ ) и не слишком малых углов рассеяния справедлива *формула Резерфорда*:

$$\sigma(\theta) = \frac{Z^2 e_1^2 e^2}{4m^2 v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

#### Д. Прохождение частиц сквозь потенциальный барьер

1° При взаимодействиях двух частиц, в которых участвуют два рода сил — далекодействующие силы отталкивания и близкодействующие силы притяжения, потенциал результирующих сил взаимодействия имеет вид, показанный на рис. VI.1.4 (такой потенциал соответствует, например, взаимодействию  $\alpha$ -частицы с ядром атома, стр. 826).

2° *Потенциальной ямой* называется область ( $r < r_{\text{макс}}$ ) возле притягивающего центра, в которой потенциальная энергия частицы  $U < U_{\text{макс}}$  (рис. VI.1.4). Для частицы, находящейся в потенциальной яме, полная энергия  $E < U_{\text{макс}}$  и уровни ее энергии в соответствии с этим дискретны. Область под потенциальной кривой называется *потенциальным барьером*. Его высота  $h$  и ширина  $a$  зависят от энергии  $E$  частицы в потенциальной яме. Для того чтобы частица могла выйти из потенциальной ямы или же проникнуть в нее извне, согласно классической механике ей нужно сообщить энергию, равную или большую разности высоты барьера и ее энергии ( $|U_{\text{макс}} - E| = h$ ).

3° Поведение частицы в потенциальной яме описывается стационарным уравнением Шредингера для  $E < U_{\text{макс}}$  с потенциальной энергией  $U(r)$ , зависящей от формы потенциальной ямы. Частица в яме может участвовать,

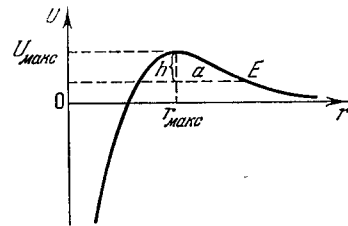


Рис. VI.1.4.

помимо поступательного, в колебательном движении (осциллятор, стр. 721), вращательном движении (ротатор, стр. 724) и в комбинации этих движений. Все эти движения не свободны и происходят в поле притягивающего центра.

4° Волновая функция частицы  $\psi(x)$  в одномерной потенциальной яме в случае, когда яма ограничена барьером конечной высоты и ширины, не обращается в нуль на стенках потенциального барьера и вне его. Вопреки тому, что следовало бы ожидать по классической физике, в квантовой механике существует отличная от нуля вероятность нахождения частицы вне потенциальной ямы даже в том случае, когда энергия частицы в яме недостаточна для преодоления ею барьера (стр. 723). Если потенциальный барьер разделяет две потенциальные ямы, то вероятность прохождения частицы через барьер отлична от нуля только в том случае, когда по другую сторону барьера имеется уровень или ряд уровней с той же или меньшей энергией. Переход через барьер на уровень равной энергии называется *резонансным переходом*.

5° В простейшем случае одномерного потенциального барьера прямоугольной формы зависимость потенциала от координаты (рис. VI.1.5) имеет вид:

$$-\infty < x < 0 \quad U = 0 \quad (\text{область I}),$$

$$0 < x < a \quad U = U_0 \quad (\text{область II}),$$

$$a < x < +\infty \quad U = 0 \quad (\text{область III}).$$

Условие  $U_I = -aU$ ,  $U_{II} = 0$ ,  $U_{III} = -bU$  (рис. VI.1.6) соответствует барьеру между двумя ямами различной глубины. Можно рассматривать частицу, налетающую на барьер при свободном ее движении, а также частицу, налетающую на барьер из ямы. Первый случай соответствует проникновению частицы в яму, второй — освобождению ее из ямы.

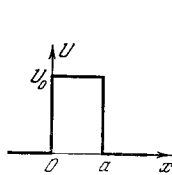


Рис. VI.1.5.

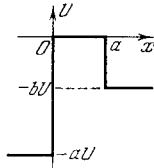


Рис. VI.1.6.

6° В соответствии с тремя областями  $U$  уравнение Шредингера для задачи о прохождении сквозь барьер имеет три различных решения. Для потока свободных

частиц, падающих на барьер, решение дает не только отраженную волну, учитывающую отражение от барьера частиц с энергией, меньшей его высоты, но и прошедшую («преломленную») волну, отвечающую проникновению частиц сквозь барьер.

7° Величина

$$D = \frac{I_{\text{прох}}}{I_{\text{пад}}}$$

называется *прозрачностью потенциального барьера*, где  $I_{\text{пад}}$  и  $I_{\text{прох}}$  — интенсивности падающей и проходящей волн (стр. 716).

8° Прозрачность прямоугольного барьера:

$$D = D_0 e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)} a},$$

где  $a$  — ширина,  $U_0$  — высота потенциального барьера,  $E$  — энергия частицы (обе отсчитываются от общего нуля, соответствующего дну потенциальной ямы),  $m$  — масса частицы,  $D_0$  — коэффициент, близкий к 1. Если барьер имеет не прямоугольную, а более сложную форму, то

$$D = D_0 e^{-\frac{4\pi}{h} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — координаты точек начала и конца барьера для данного значения  $E$ . Прозрачность прямоугольного барьера становится существенной, когда

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} a \approx 1.$$

9° Явление прохождения («просачивания») частиц сквозь потенциальные барьеры называется *туннельным эффектом*. Согласно классической физике частицы могут проходить только над барьерами, т. е. при энергии  $E > U_0$ . В области, где  $U(x) > E$ , поскольку  $E = T + U = p^2/2m + U$ , оказывается, что  $p^2/2m < 0$ , т. е. импульс частицы становится мнимой величиной. Бессмысленность этого и означает классический запрет для частицы пройти через барьер при  $U(x) > E$ . Величина  $D$  при  $\hbar \rightarrow 0$  (переход к классической физике), когда  $U > E$ , обращается в нуль, т. е. барьер становится непрозрачным для частиц.



Туннельный эффект является чисто квантовым явлением, связанным с невозможностью одновременного точного определения кинетической и потенциальной энергий частицы (стр. 723). Неточности  $\Delta x^2$  в определении координаты частицы, проходящей сквозь барьер ( $\Delta x^2 \leq a^2$ , где  $a$  — ширина барьера), соответствует такая неточность  $\Delta p_x^2$  импульса частицы, что  $|p_x|/2m \geq U - E$ , т. е. изменение кинетической энергии частицы, вызванное неопределенностью ее координаты, превышает ту энергию, которой недостает частице для прохождения над барьером. В результате частица получает возможность пройти через барьер «классическим» способом.

### Е. Движение электронов в периодических полях

1° Свойство периодичности потенциального поля  $U(x, y, z)$ , обладающего трехмерной периодичностью выражается равенствами:

$$U(x + a, y, z) = U(x, y, z);$$

$$U(x, y + b, z) = U(x, y, z);$$

$$U(x, y, z + c) = U(x, y, z),$$

где величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  характеризуют период поля соответственно по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Подобное поле реализуется внутри идеальных кристаллов, где ядра атомов и средний электрический заряд распределяются периодически. Потенциал электрического поля в этом случае является трехмерно периодическим. Движение электронов в кристаллах является примером движения в трехмерном периодическом поле. Точное решение задачи о таком движении (*многоэлектронная задача*) оказывается невозможным и заменяется решением приближенной задачи о движении одного электрона в некотором внешнем периодическом поле кристаллической решетки; решение при этом обладает многими существенными особенностями решения точной задачи.

2° Для одномерной задачи волновая функция электрона выбирается в форме плоской волны в импульсном представлении Фурье:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(k) e^{ikx} dk,$$

где  $k = k_x = \frac{2\pi p_x}{h}$ ,  $p = p_x$  — импульс электрона по оси  $Ox$ ,  $c(k)$  — амплитуда в импульсном представлении. Потенциальная энергия  $U(x)$  электрона в кристалле представляется в виде ряда Фурье

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{-\frac{2\pi i n x}{a}},$$

где  $a$  — параметр, описывающий периодичность потенциала поля в кристалле по оси  $Ox$ . Отыскиваются величины  $c(k)$  и  $E_n$ , соответствующие данному виду  $U(x)$ .

3° Уровни энергии электрона в периодическом поле образуют отдельные полосы:

$$E = E_i(k), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

в которых энергия зависит от волнового числа (квази-непрерывный энергетический спектр в полосе). Эти полосы называются *зонами дозволённой энергии* или *разрешёнными зонами*. Разрешённые зоны отделены друг от друга интервалами запрещённых значений энергии (*запрещённые зоны*). По мере увеличения номера зоны  $i$  запрещённые зоны суживаются (возможно также перекрытие разрешённых зон), пока не возникает полностью непрерывный спектр (при  $i = \infty$ ). На границе зоны энергия электрона претерпевает разрыв. Общий ход энергии в совокупности зон показан на рис. VI.1.7.

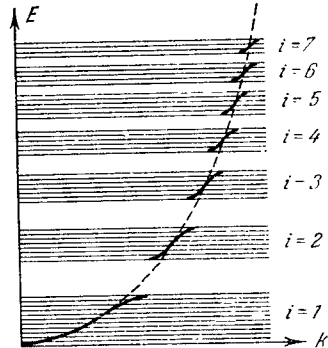


Рис. VI.1.7.

4° Образование зонного энергетического спектра электронов в кристалле вытекает из соотношения неопределенностей (стр. 720). В изолированном атоме ввиду конечности времени  $\tau$  жизни электрона в возбужденном состоянии ( $\tau \approx 10^{-8}$  сек) естественная ширина  $\Delta E$  энергетического уровня составляет  $\Delta E \approx \frac{h}{2\pi\tau} \approx 10^{-7}$  эв.

В кристалле валентные электроны атомов, слабее связанные с ядрами, чем внутренние электроны, могут переходить от одного атома к другому с помощью туннельного эффекта просачивания сквозь потенциальный барьер (стр. 733), разделяющий атомы в кристалле. Это приводит к тому, что  $\tau$  существенно уменьшается и энергетические уровни таких электронов расширяются в зоны (полосы) дозволённых значений энергии.

Частота  $\nu$  просачивания электрона сквозь барьер прямоугольной формы, выражаемая произведением

$$\nu = \frac{v}{d} D,$$

где  $v$  — скорость электрона в атоме,  $d$  — линейный размер атома,  $D$  — прозрачность барьера, приводит к величине  $\tau$  среднего времени жизни электрона у данного атома  $\tau \approx 10^{-16}$  сек, откуда по соотношению неопределённости  $\Delta E \approx 1$  эв.

Значит, вместо естественной ширины  $\Delta E \approx 10^{-7}$  эв электронного энергетического уровня в изолированном атоме, в кристалле возникает зона дозволённых значений энергии с шириной порядка единиц электрон-вольт.

Волновые функции электрона, движущегося в периодическом одномерном поле:

$$\begin{aligned} \psi_{jk}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_j(k + \frac{2\pi n}{a}) \frac{e^{i(k + 2\pi n/a)x}}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_j(k') \frac{e^{\frac{2\pi n}{a}x}}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

где  $k' = k + 2\pi n/a$  соответствуют плоским волнам, модулированным с периодичностью потенциала (с периодом  $a$ ). Вид действительной части  $\psi(x)$  показан на рис. VI.1.8

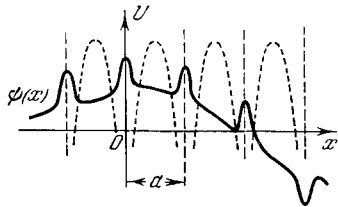


Рис. VI.1.8.

Вблизи значений  $x$ , соответствующих положениям ионов в решетке,  $\psi(x)$  близка к волновым функциям атомных электронов.

5° Энергия электрона в кристалле является периодической функцией  $k$  и может быть представлена рядом

Фурье:

$$E_j(k) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{jm} \cos(mak),$$

где коэффициенты  $E_{jm}$  зависят от вида потенциальной энергии  $U(x)$ . Если ограничиться в этом ряде двумя первыми членами ( $m = 0$  и  $m = 1$ ), то

$$E_j(k) = E_{j0} + E_{j1} \cos(ka).$$

В центре зоны при  $k \approx 0$  можно разложить  $E_j(k)$  по степеням  $k$ :

$$E_j(k) = E_{j0} + E_{j1} \left( 1 - \frac{k^2 a^2}{2} + \dots \right)$$

и представить в виде

$$E_j(k) = \text{const} + \frac{\hbar^2 k^2}{8\pi^2 m^*}.$$

Из сравнения с энергией свободного движения электрона

$$E_k = \text{const} + \frac{\hbar^2 k^2}{8\pi^2 m}$$

видно, что отличие движения электрона в кристалле от свободного его движения учитывается введением вместо обычной массы  $m$  электрона *эффективной массы*. Эффективные массы электрона в середине и на «потолке» зоны имеют противоположные знаки. Обычно в центре зоны  $m^* > 0$ , а на «потолке» ее  $m^* < 0$ . Импульс электрона в кристалле

$$p = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{m}{m^*} k$$

отличается от импульса свободного электрона коэффициентом  $\frac{m}{m^*}$ . Под действием электрического поля, приложенного к кристаллу, электроны, имевший энергию, соответствующую границе зоны, начинают двигаться так, как если бы он имел *эффективный заряд*  $e^*$ :

$$e^* = e \frac{m}{m^*}.$$

Знак эффективного заряда противоположен обычному (так как  $\frac{m}{m^*} < 0$ ).

## 738 НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА [VI.1

6° На основе изложенных закономерностей построена *зонная теория твердых тел*, объясняющая многие особенности металлов и неметаллических кристаллов (полупроводников и изоляторов). Модуляция плоской волны периодическим потенциалом поля кристаллической решетки приводит к изменению плотности вероятности (стр. 717)  $|\psi|^2$  электронов в решетке по сравнению с движением свободных электронов. В случае нарушения строгой периодичности потенциала поля решетки, вызванного тепловыми ангармоническими колебаниями ее атомов (стр. 271) и дефектами структуры решетки, возникает *рассеяние электронных волн*, в результате чего изменяются в данном направлении величина  $|\psi|^2$  и плотность тока электронов  $\mathbf{j}$  (стр. 717). Рассеяние электронных волн обуславливает сопротивление электрическому току (стр. 380). Степень этого рассеяния пропорциональна величине и числу нарушений периодичности потенциала; увеличение амплитуды колебаний атомов (с ростом температуры) и числа искажений структуры решетки (например, примесями) приводит к росту электрического сопротивления. Вблизи абсолютного нуля температуры тепловое рассеяние электронных волн стремится к нулю, но часть рассеяния, обусловленная дефектами решетки, при этом не уменьшается и дает *остаточное сопротивление*, зависящее от индивидуальных свойств кристалла. Сопротивление, обусловленное тепловым рассеянием электронных волн, не зависит от свойств кристалла.

7° Зоны энергии в кристаллах подразделяются на: а) полностью занятые электронами зоны (*валентные зоны*), образованные из энергетических уровней электронов внутренних оболочек свободных атомов;

б) частичные или целиком незаполненные зоны (*зоны проводимости*), уровни энергии в которых соответствуют энергиям внешних коллективизированных электронов изолированных атомов (или ионов). Переход электрона из одной зоны в другую осуществляется путем поглощения или отдачи им энергии, достаточной для переброса электрона через запрещенную зону.

8° В металлах при комнатной температуре ( $T \sim 300^\circ \text{K}$ ) энергетические уровни в зоне проводимости заняты не полностью (стр. 377), что обуславливает хорошую электропроводность металлов. В изоляторах первая незаполненная зона отделена от нижней целиком заполненной зоны широкой запрещенной зоной. Пробой изолятора поэтому возможен только в сильных электрических полях.

Кристаллические полупроводники принадлежат к типу твердых тел, у которых, в отличие от изоляторов, запрещенная зона между полностью заполненной (валентной) зоной и первой незаполненной зоной не очень велика, так что возможен переброс электронов путем теплового возбуждения. Поэтому при  $T > 0$  в них возможен электрический ток и верхняя зона оказывается зоной проводимости.

*Экситоном* называется элементарное электрически нейтральное возбуждение, имеющее характер *квазичастицы* в полупроводниках и диэлектриках. Экситон возникает при образовании пары электрон — дырка в кристаллах при переходе электронов из валентной зоны (стр. 738) в зону проводимости (стр. 738). Если энергия возбуждения меньше, чем ширина запрещенной зоны, то электрон и дырка не могут независимо перемещаться в кристалле, а находятся в связанном состоянии электрически нейтральной квазичастицы — экситона. Перемещаясь по кристаллу, экситон переносит энергию. Ему приписываются определенные квантовые числа, он имеет зонный энергетический спектр (стр. 735). Экситоны имеют целый спин (в единицах  $\hbar$ ), т. е. являются бозонами (стр. 225).

9° При наложении однородного магнитного поля на металл или полупроводник электроны, находящиеся в зоне проводимости вещества, начинают описывать окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля, либо же спирали (если электроны обладают компонентами скорости вдоль магнитного поля). Частота обращения по окружности (или спирали) равна

$$\nu_{\text{ц}} = \frac{eB}{2\pi m^*} \quad (\text{в СИ}),$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m^*$  — эффективная масса электрона (стр. 737),  $B$  — индукция магнитного поля в веществе,  $\nu_{\text{ц}}$  — ларморова частота электронов в металле или полупроводнике (стр. 466). При одновременном приложении к веществу переменного электрического поля наблюдается сильное избирательное поглощение энергии поля при частоте  $\nu_{\text{ц}}$ , называемое *циклотронным резонансом* (ввиду сходства траекторий электронов при наложении на вещество магнитного поля с траекториями их в циклотроне, стр. 446). С помощью циклотронного резонанса можно определять эффективные массы  $m^*$  электронов в полупроводниках и металлах, длины свободного пробега электронов (стр. 378) и т. д.

### 5. Квантовые переходы

1° Изменение состояния микрочастицы или системы микрочастиц под действием каких-либо внутренних или внешних причин называется *квантовым переходом* частицы или системы из начального состояния  $A$  (в момент времени  $t = 0$ ) в конечное состояние  $B$  (в момент времени  $t = T$ ). Квантовый переход обычно связан с изменением энергии частицы (или системы частиц).

2° Изменение состояния системы характеризуется величиной  $P_{BA}$ , называемой *вероятностью перехода* из состояния  $A$  в состояние  $B$ . Вычисляются вероятности перехода в непрерывном спектре уровней энергии, в дискретном спектре, а также из непрерывного спектра в дискретный и наоборот.

3° Вычисление вероятностей квантовых переходов может быть проведено в случае, когда причина, вызывающая изменение состояния системы, действует в течение конечного промежутка времени. Решение уравнения Шредингера (стр. 718), определяющего  $\psi(x, y, z, t)$  по волновой функции в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $\psi(x, y, z, 0)$  представляет значительные трудности и может быть доведено до конца лишь в случаях, когда переход системы вызывается взаимодействиями, слабыми по сравнению с силами, действующими в системе. В этих случаях слабые воздействия на систему рассматриваются как *малые возмущения*.

4° В теории возмущений гамильтониан системы (стр. 94) представляется в виде суммы гамильтониана невозмущенной системы  $H^0$  и возмущающего члена  $W(r, t)$ , причем  $W \ll H^0$ . Задача решается последовательными приближениями: сначала отыскивается решение соответствующего уравнения для  $H^0$ , а затем в это решение вносятся поправки  $W$ , имеющие порядок малости, отвечающий первому приближению, и т. д.

5° Уравнение Шредингера, рассматриваемое в первом приближении теории возмущений для движения вдоль оси  $x$ :

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H^0(x)\psi + W(x, t)\psi,$$

с помощью разложения  $\psi(x, t)$  по волновым функциям стационарных состояний (стр. 721) невозмущенной системы:

$$\psi(x, t) = \sum_k c_k(t) \psi_k(x) e^{-i2\pi E_k t / \hbar}$$

приводится к виду

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{dc_m}{dt} = \sum_k W_{mk}(t) e^{i\omega_{mk} t} c_k(t),$$

где

$$W_{mk}(t) = \int \psi_m^*(x) W(x, t) \psi_k(x) dx$$

называется *матричным элементом энергии возмущения* (*матричным элементом перехода*), а  $\omega_{mk} = 2\pi(E_m - E_k)/\hbar$ ,  $\omega_{mk} = 2\pi\nu_{mk}$  называется боровской частотой перехода  $E_m \rightarrow E_k$  для данного вида возмущения. Если при  $t = 0$  система находится в состоянии  $n$ , то коэффициенты  $c_k(t)$  удовлетворяют условию:

$$c_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

6° Вероятность найти систему в момент времени  $t$  в состоянии  $m$  с энергией  $E_m$  равна  $|c_m(t)|^2$ . Поэтому величина

$$P_{mn}(t) = |c_m(t)|^2$$

называется вероятностью перехода из состояния с энергией  $E_n$  в состояние с энергией  $E_m$  к моменту времени  $t$ . В первом приближении теории возмущений (когда  $c_n^{(0)} = 0$  при  $t = 0$  и  $c_n^{(1)}$  мало) для квантовых переходов в дискретном спектре

$$P_{mn} = \frac{64\pi^4}{\hbar^2} |W_{mn}(\omega_{mn})|^2.$$

Переход возможен, если возмущение содержит в своем спектре частоту  $\nu_{mn}$ , соответствующую переходу, поскольку  $P_{mn}$  отлична от нуля только при  $W_{mn}(\nu_{mn}) \neq 0$ . Формула для  $P_{mn}$  относится к дискретному спектру энергий ( $E_m, E_n < 0$ ) и может быть обобщена на случаи: переходов в непрерывном спектре ( $E > 0$ ), переходов из непрерывного спектра в дискретный и обратно и переходов под влиянием возмущения, не зависящего от времени.

7° Примером квантовых переходов системы под влиянием слабых возмущений являются взаимодействия атомов с электромагнитным полем. Поглощение атомами фотонов сопровождается переходом атомных электронов из одного состояния с энергией  $E_n$  в другое с энергией  $E_m$ . Если падающая на атом электромагнитная волна имеет в своем спектре частоту  $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$  (*условие частоты Бора*), то переход наступает при частоте  $\nu = \nu_{mn}$ .

8° Если длина волны излучения, падающего на атом, много больше размеров атома, то напряженность электрического поля в волне  $\mathcal{E}$  в пределах атома почти постоянна. Энергия возмущения  $W = -\mathcal{E}er$ , где  $er = p_e$  — дипольный момент атомного электрона.

Матричный элемент перехода:

$$W_{mn}(\omega_{mn}) = -\mathcal{E}(\omega_{mn})p_{mn},$$

где

$$p_{mn} = -e \int \psi_m^* r \psi_n dV$$

— матричный элемент дипольного момента.

Вероятность перехода:

$$P_{mn} = \frac{64\pi^4}{h^2} |\mathcal{E}(\omega_{mn})|^2 |p_{mn}|^2.$$

Вероятность перехода атома из состояния  $E_n$  в состояние  $E_m$  в единицу времени равна вероятности поглощения кванта излучения с частотой  $\nu_{mn}$  в единицу времени:

$$B_{mn} = \frac{8\pi^3}{3h^2} \sum_{m,n} |p_{mn}|^2,$$

где суммирование производится по различным комбинациям  $E_n$  и  $E_m$  вырожденных уровней, дающим одну и ту же  $\nu_{mn}$  по условию Бора (стр. 741). Величина  $B_{mn}$  называется коэффициентом Эйнштейна для поглощения света с частотой  $\nu_{mn}$ .

9° Соответствующая величина для обратного самопроизвольного перехода  $E_n \rightarrow E_m$ , сопровождающегося испусканием кванта света той же частоты, равна

$$A_{nm} = \frac{64\pi^4 \nu_{mn}^3}{3hc^3} \sum_{m,n} |p_{mn}|^2.$$

$A_{nm}$  называется коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения света с частотой  $\nu_{mn}$ . Связь между  $A_{nm}$  и  $B_{mn}$ :

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \nu_{mn}^3}{c^3} \frac{g_m}{g_n} B_{mn},$$

где  $g_m$  и  $g_n$  — статистические веса состояний  $m$  и  $n$  (числа различных квантовых состояний с энергиями  $E_m$  и  $E_n$ ).

Величина  $A_{nm}$  определяет время жизни  $\tau_{nm}$  системы в состоянии  $n$  по отношению к спонтанному переходу

из этого состояния в другое состояние  $m$ :

$$\tau_{nm} = \frac{1}{A_{nm}}.$$

Ввиду конечного значения  $\tau_{nm}$  соответствующая ему энергия состояния  $n$  имеет некоторую неточность в соответствии с соотношением Гейзенберга (стр. 720):

$$\Delta E_n \geq \frac{h}{2\pi\tau_{nm}}.$$

Величина  $\Delta E_n = \Gamma_n$  называется шириной уровня  $E_n$ . Значение  $\Gamma_n$  определяет естественную ширину спектральной линии (стр. 681):

$$\Delta\nu_{nm} = \frac{c}{\lambda_{nm}} |\Delta\lambda_{nm}| = \frac{\Gamma_n}{\nu} \geq \frac{1}{2\pi\tau_{nm}}.$$

Любая причина, уменьшающая  $\tau_{nm}$ , уширяет уровни, соответствующие этому состоянию, и соответствующие спектральные линии (стр. 681).

Для электромагнитных взаимодействий атомов величина  $\tau_{nm}$  имеет порядок  $10^{-8}$  сек. В тех случаях, когда  $A_{nm}$  мало ( $\tau_{nm} \gg 10^{-8}$  сек), соответствующее состояние с энергией  $E_n$  называется метастабильным (стр. 751).

10° Метастабильным состояниям системы соответствуют переходы, запрещенные в той или иной степени. Этот запрет связан с тем, что из числа мыслимых переходов из состояния  $E_n$  в состояние  $E_m$  и обратно могут реализоваться лишь те, для которых матричный элемент  $W_{mn}(\omega_{mn}) > 0$ . Это условие приводит к так называемым правилам отбора (стр. 750), которые формулируются в виде соотношений между квантовыми числами, характеризующими начальное и конечное состояния системы при переходе под действием данного возмущения.

11° Существование правил отбора связано с тем, что матричный элемент дипольного момента (или момента иной мультипольности, стр. 742) и вероятность перехода  $P_{mn}$  имеют наибольшее значение, когда волновые функции  $\psi_n$ ,  $\psi_m$  начального и конечного состояний системы при переходе существенно перекрываются в какой-либо области пространства. Переходы между состояниями, для которых матричный элемент пренебрежимо мал, называются запрещенными для данного вида матричного элемента (данного вида возмущения). Этот запрет, однако, не абсолютен, а говорит лишь о том, что запрещенные переходы имеют матричный элемент и вероятность,

весьма малые по сравнению с переходами, *разрешенными* правилами отбора.

12° Например, волновые функции гармонического осциллятора (стр. 722), соответствующие разным значениям квантового числа  $n$ , перекрываются в значительной области пространства, что дает существенную вероятность перехода из состояния с каким-либо  $n'$  в состояние с  $n''$ , причем  $n''$  может значительно отличаться от  $n'$  (стр. 722). Если же осциллятору во время этого перехода сообщено некоторое дополнительное возмущение, существенно изменяющее  $\psi_{n'n}$ , то переход может стать очень маловероятным. Интенсивности линий, разрешенных правилами отбора, будут наибольшими в том случае, когда внешние причины не изменяют заметным образом состояния системы в момент перехода (*адиабатическое приближение*). В применении к электронным переходам в молекулах, ядра которых совершают колебательное движение, это положение называется принципом *Франка — Кондона* (стр. 798).

13° Взаимодействие электромагнитного поля с атомами лежит в основе теории спектров излучения и поглощения света атомными системами. Вид спектра (положение спектральных линий) определяется схемой уровней энергии квантовой системы. Длины волн связаны с частотами перехода соотношением

$$\lambda_{mn} = \frac{c}{\nu_{mn}},$$

а интенсивности спектральных линий связаны с общим числом атомов в излучающей системе, их статистическим распределением по состояниям и с вероятностями соответствующих переходов:

$$I_{mn} = \alpha_n A_{nm} = \beta_m B_{mn},$$

где  $\alpha_n$ ,  $\beta_m$  — некоторые коэффициенты, различные для испускания и поглощения излучения (стр. 742); в них учтены также статистические веса состояний (стр. 742).

Отыскание значений  $E_n$  квантовой системы (*схемы уровней энергии*) по виду спектра путем комбинирования различных наблюдаемых значений  $\nu_{mn}$  называется *комбинационным принципом Ритца*.

14° В отсутствие внешних воздействий квантовая система (например, атом) находится в стационарном состоянии с наименьшей энергией  $E_m$ . При воздействии на систему (например, электромагнитным излучением) она переходит на более высокий уровень с энергией  $E_n$ , погло-

щая кванты излучения с вероятностью, определяемой коэффициентом Эйнштейна  $B_{mn}$  (п. 8°).

С этого более высокого уровня система может вернуться на исходный уровень либо спонтанно, с вероятностью, определяемой коэффициентом  $A_{nm}$ , либо вынужденно (индуцированно), с вероятностью, зависящей от *коэффициента вынужденного излучения*  $B_{nm} = B_{mn}$ . В состоянии равновесия числа актов поглощения и излучения атомами за 1 сек квантов  $h\nu_{nm}$  равны друг другу (условие детального равновесия):

$$N_m B_{mn} \varrho_{nm} = N_n (B_{nm} \varrho_{nm} + A_{nm}),$$

где  $N_m$  и  $N_n < N_m$  — числа атомов на уровнях энергии  $E_m$  и  $E_n$ ,  $\varrho_{nm} = \varrho_{mn}$  — объемная плотность энергии излучения с частотой  $\nu_{mn}$ .

Если  $\varrho_{nm} B_{nm} \gg A_{nm}$ , то с помощью специальных методов можно перевести систему в состояние с  $N_n > N_m$ . Такое «инверсное» распределение по состояниям можно условно описывать распределением Больцмана (стр. 224) с отрицательной абсолютной температурой (стр. 148), равной

$$T = - \frac{E_n - E_m}{k \ln (N_n / N_m)}.$$

При воздействии на такую систему либо внешним электромагнитным полем с частотой  $\nu_{mn}$ , либо спонтанным излучением соседних атомов можно получить индуцированное излучение большого числа атомов системы за малый промежуток времени, которое обладает высокой когерентностью (стр. 595), мощностью и узкой направленностью.

Соответствующие устройства, работающие в диапазоне ультракоротких радиоволн, называются *мазерами*, работающие в оптическом диапазоне — *лазерами*.

## ГЛАВА 2

### АТОМ

#### 1. Атомы и ионы с одним валентным электроном

1° *Атомом* называется наименьшая частица химического элемента, обладающая его химическими свойствами. Атом состоит из положительно заряженного *ядра* и *электронов*, движущихся в его кулоновском поле. В атоме заряд ядра (стр. 806) равен по абсолютной величине

суммарному заряду всех его электронов. Ионом данного атома называется электрически заряженная частица, образующаяся при потере или приобретении электронов атомом.

2° Простейшей атомной системой является атом водорода, состоящий из одного электрона, движущегося в кулоновском поле одного протона. *Водородоподобными (изовалентными водороду)*, т. е. имеющими также по одному электрону, являются ионы  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ ,  $\text{Be}^{+++}$ ,  $\text{B}^{4+}$ ,  $\text{C}^{5+}$  и т. д. К числу атомов с одним валентным электроном, не входящим в состав заполненных электронных оболочек (стр. 770), относятся атомы Li, Na, K, Rb и Cs.

3° Спектр излучения атома водорода является линейчатым (дискретным). Частоты линий этого спектра описываются формулой Бальмера – Ридберга:

$$\nu = cR' \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{h^3} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

$$R = \frac{m_e c^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \quad (\text{в СИ}).$$

Величины  $R$  и  $R'$  называются *постоянной Ридберга* (соответственно в  $\text{сек}^{-1}$  и  $\text{см}^{-1}$  или  $\text{м}^{-1}$ ). Значение  $R = 3,288 \times 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ ; значение  $R'$  см. на стр. 751. Величины  $n$  и  $m$  называются *главными квантовыми числами* (стр. 726), причем  $m = n+1$ ,  $n+2$  и т. д. Группа линий с одинаковым  $n$  называется *серией*. При  $n = 1$  получается *серия Лаймана*, при  $n = 2$  – *серия Бальмера*, при  $n = 3$  – *серия Пашена*, при  $n = 4$  – *серия Бреккетта*, при  $n = 5$  – *серия Пфунда*, при  $n = 6$  – *серия Хэмфри*. Первая из них лежит в далекой ультрафиолетовой области, вторая охватывает видимую область, остальные спектральные серии водорода лежат в инфракрасной области. Для изовалентных водороду ионов справедлива серийная формула Бальмера – Ридберга:

$$\nu = Z^2 R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где  $Z$  – порядковый номер элемента в периодической таблице Менделеева (стр. 770).

4° Наибольшей частоте для каждого  $n$  в формуле Бальмера (при  $m = \infty$ ) соответствует *граница серии*. Частота.

соответствующая границе серии, называется *термом* и обозначается  $T_n$ :

$$T_n = \frac{R}{n^2} \quad (\text{для водорода}).$$

Терм для изовалентного водороду иона:  $T_n = Z^2 R/n^2$ .

5° Соответствующая терму энергия водородоподобного иона:

$$E_n = -\frac{hRZ^2}{n^2}; \quad T_n = \frac{|E_n|}{h}.$$

Абсолютная величина  $E_n$  называется *энергией связи электрона в атоме*, находящегося в состоянии с данным  $n$ . Наименьшее из  $E_n$ ,

$$E_{\text{мин}} = -hRZ^2,$$

отвечает *основному, или нормальному, состоянию системы*. Наибольшее,  $E_{\text{макс}} = 0$ , соответствует ионизации атома или иона, т. е. отрыву от него электрона. Энергия ионизации равна по абсолютной величине энергии связи электрона в атоме или ионе. Потенциал ионизации (стр. 389)  $\varphi = hRZ^2/e$ , где  $e$  – абсолютная величина заряда электрона. Схема уровней энергии в атоме водорода показана на рис. VI.2.1. Спектр водорода объясняется постулатами Бора.

6° *Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)*: существуют некоторые стационарные состояния атома, находясь в которых он не излучает энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. При движении по стационарным орбитам электроны, несмотря на наличие у них ускорения, не излучают электромагнитных волн (стр. 573).

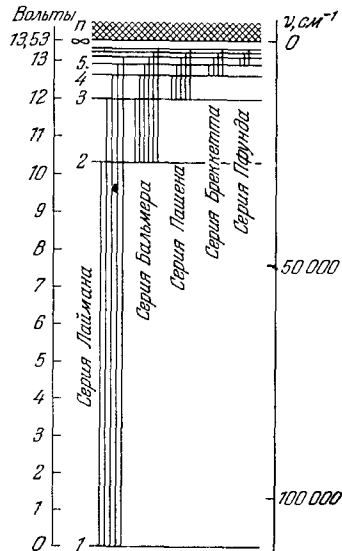


Рис. VI.2.1.

**Второй постулат Бора (правило квантования орбит):** в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию:

$$m_e v_n r_n = \frac{n\hbar}{2\pi},$$

где  $r_n$  — радиус  $n$ -й орбиты,  $m_e v_n r_n$  — момент импульса (количества движения) электрона на этой орбите,  $n$  — целое число ( $n \neq 0$ ).

**Третий постулат Бора (условие частот Бора, стр. 741):** атом излучает (поглощает) квант электромагнитной энергии, когда электрон переходит с орбиты с большим (меньшим) на орбиту с меньшим (большим)  $n$ . Энергия кванта равна разности энергий электрона на орбитах до и после перехода:

$$E = h\nu_{mn} = E_m - E_n;$$

частота кванта (фотона), возникающего или поглощаемого при переходе, равна

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

7° Постулаты Бора не следуют ни из каких положений классической физики и получают объяснение на основе квантовой механики. Стационарные состояния электронов, вводимые первым постулатом Бора, представляют собой стационарные состояния движения электронов в кулоновском поле, даваемые решением соответствующего уравнения Шредингера (стр. 718). Возможность излучения и поглощения квантов является результатом квантовых переходов электрона из одного стационарного состояния в атоме в другое. Вероятность этих переходов дается формулой, приведенной на стр. 742, а частота — условием частот (стр. 741), совпадающим с требованием третьего постулата Бора. Волновая механика позволила рассчитать интенсивности спектральных линий, чего не смогла сделать теория Бора.

8° Понятие *электронной орбиты* в атоме, вводимое теорией Бора, является условным вследствие волновой природы электрона и соотношения Гейзенберга (стр. 719), как и вообще понятие траектории микрочастицы, обладающей волновыми свойствами. Электроны в атоме в соответствии с общими свойствами их волновых функций (стр. 716) представляются в виде заряженных «облаков», плотность которых (плотность вероятности, стр. 717) ма-

ксимальна на расстояниях  $r$  от ядра, называемых радиусами «орбит». Среднее расстояние электрона от ядра в водородоподобной системе (для  $Z > 1$ ) для состояния электрона с квантовыми числами  $n$  и  $l$  (стр. 726):

$$r_{nl} = \frac{a_0}{Z^2} [3n^2 - l(l+1)].$$

Эта формула приближенная, так как не учитывает отсутствия сферической симметрии у «орбит» с  $l \neq 0$ . Величина  $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$  см называется радиусом первой борвской орбиты в атоме водорода (стр. 727).

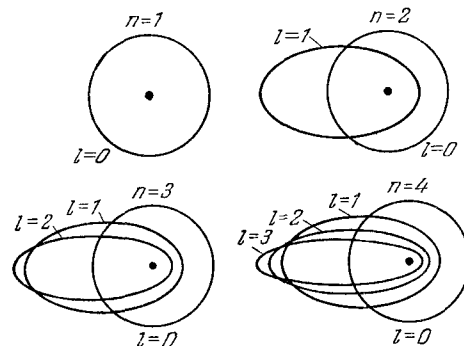


Рис. VI.2.2.

9° Для нахождения термов атомов с одним валентным электроном принимается, что действительные электроны заполненных оболочек атома на валентный (внешний) электрон может быть заменено *экранированием* ими положительного заряда ядра. Рассматривается движение одного валентного электрона в поле *атомного остатка (остова)*, состоящего из ядра и заполненных электронных оболочек. Состояниям электрона с различными значениями  $l$  соответствуют, согласно квантовой механике, электронные «облака» различного вида симметрии. Например, при  $l=0$  «облако» сферически симметрично. Вид «орбит» (в смысле квантовой механики) зависит от величин орбитального квантового числа  $l$  (стр. 750). При  $l=0$  «орбита» имеет вид окружности, при  $l=1, 2, 3, \dots$  она переходит в эллипс, все более вытянутый с ростом  $l$  (рис. VI.2.2).



«Орбиты» с  $l=1, 2, 3, \dots$ , проникая в область пространства, где проходят «орбиты» электронов заполненных оболочек, испытывают дополнительное взаимодействие с «орбитами» атомного остатка. Энергетические уровни  $E_n$  атомов с одним внешним электроном вычисляются по приближенной формуле:

$$E_n = -\frac{\hbar R Z^*{}^2}{(n-\Delta)^2},$$

где *эффективный заряд ядра*

$$Z^* = Z - \sigma,$$

$\sigma$  — так называемая *постоянная экранирования*, увеличивающаяся с ростом  $Z$ , а

$$\Delta = \frac{3}{4} \frac{\alpha Z^*{}^2}{a} \frac{1 - \frac{l(l+1)}{3n^2}}{(l-1/2)(l+1/2)(l+1)(l+3/2)}$$

называется *квантовый дефектом*; здесь  $a$  — поляризуемость атома (стр. 362),  $a_0$  — первый борковский радиус атома водорода (стр. 727),  $l$  — *орбитальные квантовые числа*, связанные с главными квантовыми числами условием

$$l = n-1, n-2, \dots, 0.$$

10° Обозначения термов, которым соответствуют различные  $l$ :

$l$	0	1	2	3	4
Терм	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$

Буквы  $s, p, d, f$  соответствуют английским наименованиям спектральных серий атомов с одним внешним электроном;  $s$  — sharp (*резкая*),  $p$  — principal (*главная*),  $d$  — diffuse (*диффузная*),  $f$  — fundamental (*фундаментальная*). Правила отбора (стр. 743) для орбитального квантового числа:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Переходы возможны лишь между термами  $T_{n,l}$  и  $T_{m,l\pm 1}$ , причем на числа  $m$  и  $n$  правила отбора не накладывают никаких ограничений. Комбинироваться поэтому могут только  $s$ - и  $p$ -термы,  $p$ - и  $d$ -термы и т. д.

11° Любой из термов может быть как начальным, так и конечным для перехода. Поскольку

$$|E_{n,l} - E_{m,l\pm 1}| = |E_{m,l\pm 1} - E_{n,l}|,$$

где  $E_n \cong E_m$ , то при комбинировании получаются одинаковые частоты как для спектров поглощения ( $E_m < E_n$ ).

так и для спектров испускания ( $E_m > E_n$ ). Интенсивности соответствующих линий обоих спектров в общем случае не равны из-за неодинаковости условий возбуждения спектров поглощения и испускания.

12° Состояние атома, в котором он имеет энергию, большую, чем в основном состоянии (стр. 747), называется *возбужденным*. Спектры поглощения соответствуют переходам атома из основного в возбужденное состояние, спектры испускания — переходам из возбужденного в основное или менее возбужденное состояние. Степень возбуждения оценивается разностью энергий между возбужденным и нормальным состояниями. Возбужденное состояние, характеризующееся большим временем жизни атома в нем, называется *метастабильным* (стр. 743).

13° Наличие стационарных возбужденных состояний в атомах доказано опытами Франка и Герца, в которых газ бомбардировался электронами определенной энергии. Одновременно измерялись потери энергии электронами и наблюдался спектр свечения газа, вызванного электронной бомбардировкой. Опыты с парами ртути установили, что электроны с энергией  $E < 4,9$  эв не вызывают свечения газа и отражаются атомами газа упруго. При  $E \geq 4,9$  эв появляются медленные электроны, что указывает на полную передачу электронами с  $E = 4,9$  эв своей энергии атомам ртути; одновременно возникает спектральная линия ртути с  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ , частота которой по правилу Бора соответствует разности энергий возбужденного и нормального состояния атома ртути. Этот результат означает, что атом ртути, переведенный электронным ударом в возбужденное состояние, возвращается в основное состояние, высвечивая квант с длиной волны  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ .

14° С учетом движения в атоме водорода и электрона и ядра относительно общего центра инерции в серийной формуле (стр. 746) под  $m_e$  следует понимать приведенную массу системы электрон — ядро:

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}},$$

где  $M$  — масса ядра,  $m_e$  — масса электрона. При учете движения ядра постоянная Ридберга имеет наименьшее значение для атома водорода,  $R'_H = 109\,677,6 \text{ см}^{-1}$ ; предельного значения она достигает при  $M = \infty$ ,  $R'_\infty = 109\,737,3 \text{ см}^{-1}$ .

Вследствие различия значений  $R$  для разных  $M$  в спектрах проявляется *изотопический эффект* (см. также стр. 798), связанный с существованием нескольких изотопов одного и того же химического элемента (стр. 806). Для смеси изотопов этот эффект состоит в наличии дополнительных спектральных линий к линиям атомов, ядра которых принадлежат изотопу с наибольшей распространенностью. Интенсивности этих линий относятся, как процентные содержания изотопов в веществе, а длины волн смещены друг относительно друга для изотопов с массами  $M'$  и  $M''$  на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{m_e \Delta M}{M^2},$$

где  $\Delta M = M'' - M'$  — разность масс изотопов,  $M$  — средняя масса. С другой стороны,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_1 - R_2}{R_1}.$$

$R_1$  и  $R_2$  — постоянные Ридберга (стр. 746) для обоих изотопов.

15° При взаимодействии отрицательных мюонов (стр. 871) с веществом атомные ядра могут захватывать мюоны на орбиты, образуя с ними *мезоатомы*. Поведение мюонов в атомах существенно не отличается от поведения электронов, за исключением малой продолжительности жизни мюонов. Радиус мюонной орбиты в мезоатоме приблизительно в 207 раз меньше радиуса соответствующей электронной орбиты, так как  $m_\mu / m_e \approx 207$  (стр. 871). Поэтому атомные электроны не оказывают сильного влияния на движение мюона в атоме. Малый радиус мюонной орбиты и его уменьшение с ростом заряда ядра (стр. 749) приводят к тому, что уже при  $Z \approx 30$  мюоны должны проникать в ядро. На энергетических уровнях мюона поэтому сказываются размеры и структура ядра, которое в этом случае уже нельзя считать точечным, как это делается при решении уравнения Шредингера для атома (стр. 718).

16° При замедлении позитронов (стр. 871) в веществе иногда образуется *позитроний* — система из позитрона и электрона, движущихся вокруг общего центра тяжести. Позитрон нельзя считать неподвижным, так как его масса равна массе электрона. Радиусы орбит в позитронии вдвое больше радиусов соответствующих орбит в атоме водорода, а энергия связи позитрония вдвое меньше энергии связи атома водорода.

В зависимости от ориентации спинов (стр. 464) электрона и позитрона возникают два состояния позитрония: *орто*состояние при параллельной ориентации спинов и *пара*состояние при их антипараллельной ориентации (см. также стр. 757). Ортопозитроний имеет среднюю продолжительность жизни  $1,4 \cdot 10^{-7}$  сек и вследствие аннигиляции электрона и позитрона (стр. 882) превращается в три гамма-фотона, что обусловлено законом сохранения импульса (количества движения, стр. 43, 107) и наличием у фотона спина  $\hbar$  (стр. 698). Парапозитроний имеет среднюю продолжительность жизни  $1,25 \cdot 10^{-10}$  сек и в процессе аннигиляции превращается в два гамма-фотона. Основной энергетический уровень ортопозитрония (триплетное состояние, стр. 760) лежит на  $0,84 \cdot 10^{-3}$  эв выше основного уровня парапозитрония (синглетное состояние, стр. 760). При столкновениях позитрония с молекулами, имеющими нечетное число электронов и малое расстояние между ядрами с различной ориентацией результирующего спина (например, у молекул  $\text{No} - 13,6 \cdot 10^{-3}$  эв), при комнатной температуре возможен переход ортопозитрония в парапозитроний.

## 2. Многоэлектронные атомы

1° *Многоэлектронными* атомами называются атомы с двумя и более электронами. Уравнение Шредингера (стр. 718) для многоэлектронных атомов:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \sum_{i=1}^N \frac{Ze^2}{r_i} - U \right] \psi = 0,$$

где  $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$ ,  $r_i$  — расстояние  $i$ -го электрона от ядра,  $U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^N \frac{e^2}{r_{ik}}$  — потенциальная энергия взаимодействия между  $i$ -м и всеми остальными электронами; суммирование распространяется на  $N$  электронов атома; для нейтрального атома  $N = Z$ ;  $Ze^2/r_i$  — потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -го электрона с ядром,  $E$  — полная энергия атома. Остальные обозначения см. на стр. 718.

2° Уравнение Шредингера для многоэлектронного атома может быть решено только приближенными методами, прежде всего методами теории возмущений. В основе решения лежит представление энергии взаимодействия

между электронами  $U$  как малого возмущения по сравнению с энергией взаимодействия электронов с ядром. В качестве нулевого приближения получаются собственные значения  $E_n$  и собственные функции  $\psi_n$ , соответствующие решению с  $U = 0$ :

$$E_n = \sum_{i=1}^N E_{ni}, \quad \psi_n = \prod_{i=1}^N \psi_{ni};$$

знак  $\prod_{i=1}^N$  означает произведение  $N$  волновых функций  $\psi_{ni}$ . Решение уравнения Шредингера методами теории возмущений практически возможно только при малых значениях  $N$ .

3° С увеличением  $N$  даже приближенное решение уравнения Шредингера методом теории возмущений становится затруднительным. В приближении центрального поля в атоме для отыскания решения используются в основном два метода: метод Хартри и метод Томаса — Ферми.

*Метод Хартри* основан на замене электрического поля ядра и всех электронов атома, кроме одного выделенного, некоторым постоянным по времени *самосогласованным полем*, в котором движется выделенный электрон. Внесение потенциала этого поля в уравнение Шредингера позволяет найти для каждого выделенного электрона значения квантовых чисел  $n$  и  $l$  и тем самым энергетические состояния электронов. Метод Хартри может быть уточнен учетом квантовых обменных эффектов (*метод Хартри — Фока*).

*Метод Томаса — Ферми* основан на так называемой *статистической модели атома*, в которой предполагается непрерывное распределение электрических зарядов в атоме с плотностью, удовлетворяющей уравнению Пуассона (стр. 354) для потенциала электрического поля. Плотность электрических зарядов вычисляется независимо с помощью квантовой статистики (стр. 226) и принципа Паули (стр. 769).

Метод Томаса — Ферми применим как к атому, так и к иону, но при этом по-разному задается потенциал на границе (атома или иона).

В случае нейтрального атома для функции  $\varphi(x)$ , связанной с потенциалом атома  $V(x)$ ,

$$V(x) = \frac{Ze}{r} \varphi(x), \quad \text{где } x = \frac{r}{\mu}, \quad \mu = \frac{0,885a_0}{Z^{1/3}},$$

из статистической теории атома следует уравнение Томаса — Ферми

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}};$$

здесь  $r$  — расстояние от ядра атома,  $a_0$  — первый боровский радиус атома водорода,  $Ze$  — заряд ядра. Уравнение Томаса — Ферми хорошо описывает распределение электронов в тяжелых атомах.

4° Уравнение Шредингера для  $N = 2$  (атом гелия):

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi = 0,$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — операторы Лапласа,  $E$  — полная энергия атома,  $Ze^2/r_1$  и  $Ze^2/r_2$  — потенциальные энергии взаимодействия каждого из электронов с ядром,  $r_{12}$  — расстояние между электронами,  $e^2/r_{12}$  — энергия взаимодействия между электронами.

Уровни энергии и собственные функции в нулевом приближении, в котором пренебрегается взаимодействием электронов:

$$E = E_{n_1} + E_{n_2}, \quad \psi_n = \psi_{n_1}\psi_{n_2},$$

где  $E_n = -2\pi^2me^4Z^2/hn^2$  и  $\psi_n$  — водородоподобная волновая функция электрона (стр. 726).

В первом приближении теории возмущений нормальное состояние атома гелия вычисляется с учетом энергии взаимного отталкивания электронов, описываемых волновыми функциями нормального состояния водородоподобного типа. Полная энергия основного состояния двух-электронной системы в нулевом приближении:

$$E_0 = 2Z^2E_H.$$

В первом приближении:

$$E_1 = \left( 2Z^2 - \frac{5}{4}Z \right) E_H,$$

где  $E_H$  — энергия атома водорода в нормальном состоянии.

5° При решении задачи о произвольном состоянии электронов в атоме гелия необходимо учитывать неразличимость электронов (стр. 225). Вследствие того, что оба электрона атома гелия неотличимы друг от друга, собственные функции могут быть двух видов:

$$\Psi = \psi_{n_1}(1)\psi_{n_2}(2) \quad \text{и} \quad \Psi = \psi_{n_1}(2)\psi_{n_2}(1),$$

где цифры в скобках означают «номер» электрона. Поскольку энергия  $E_n$ , соответствующая этим двум случаям, одна и та же, то  $\Psi$  описывает дважды вырожденное состояние (стр. 207). Вырождение уровней энергии, связанное с неразличимостью атомных электронов (и вообще любых одинаковых микрочастиц), называется *обменным*. Оно типично для квантовых систем.

6° Общее решение уравнения Шредингера для атома гелия может быть представлено в виде линейной комбинации (суммы или разности) его частных решений:

$$\Psi_A = \psi_{n_1}(1) \psi_{n_2}(2) - \psi_{n_1}(2) \psi_{n_2}(1)$$

либо

$$\Psi_S = \psi_{n_1}(1) \psi_{n_2}(2) + \psi_{n_1}(2) \psi_{n_2}(1).$$

Волновая функции  $\Psi_A$  изменяет знак при перестановке местами цифр (электронов) 1 и 2 и называется *антисимметричной*. Волновая функции  $\Psi_S$  при этом не меняет знака и называется *симметричной*.

7° При учете возмущения  $e^2/r_{12}$ , т. е. взаимного отталкивания электронов, обменное вырождение снимается и двукратно вырожденное состояние расщепляется на два с энергиями  $E_S$  и  $E_A$ . Средняя энергия возмущения  $\Delta E$ , вызванная взаимодействием двух электронов в атоме гелия:

$$\Delta E = \iint |\Psi|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dV_1 dV_2,$$

при нормировке волновой функции (стр. 719)

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV_1 dV_2 = 1$$

выражается через симметричную и антисимметричную волновые функции следующим образом:

$$\Delta E = \iint |\Psi|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dV_1 dV_2 / \iint |\Psi|^2 dV_1 dV_2 = C \pm A,$$

где

$$|\Psi|^2 = \{ |\psi_{n_1}(1)|^2 |\psi_{n_2}(2)|^2 \pm \psi_{n_1}(1) \psi_{n_2}(1) \psi_{n_1}^*(2) \psi_{n_2}^*(2) \};$$

при этом первый интеграл в знаменателе равен 1 в силу нормировки волновых функций, а второй — 0 в силу их ортогональности. Первое слагаемое интеграла в числителе соответствует кулоновскому взаимодействию электронов, представляя собой произведение плотностей вероятности

ности для каждого из электронов, и называется *кулоновским интегралом*. Второе слагаемое не имеет аналогии в классической физике и связано с обменным взаимодействием электронов, обусловленным их неразличимостью; оно называется *обменным интегралом* (см. также стр. 783).

8° Существование спина (стр. 464) как новой независимой переменной, описывающей наряду с координатами состояние микрочастиц, приводит к усложнению волновых функций. С учетом спина их записывают в виде

$$\Psi = \Psi(x, y, z, \pm \frac{\hbar}{2}, t), \quad \text{где } \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Обычно из  $\Psi$  выделяют отдельно *спиновую волновую функцию*  $S_\alpha(p_\alpha)$ :

$$\Psi = \psi(x, y, z, t) S_\alpha(p_\alpha),$$

где индекс  $\alpha = \pm 1/2$ , а  $p_\alpha = \pm \hbar/2$  (стр. 464). Аргумент этой функции имеет только два значения; сама функция определяется следующим образом:

$$S_\alpha(p_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \pm 1/2 \text{ при } p_\alpha = \pm \hbar/2, \\ 0, & \text{если } \alpha = \mp 1/2 \text{ при } p_\alpha = \pm \hbar/2. \end{cases}$$

Спиновая функция обладает определенными свойствами симметрии. Для двухэлектронной системы возможны 4 спиновые функции:

$$S_S = S_\alpha(1) S_\alpha(2),$$

$$S_S = S_\beta(1) S_\beta(2),$$

$$S_S = S_\alpha(1) S_\beta(2) + S_\alpha(2) S_\beta(1),$$

$$S_A = S_\alpha(1) S_\beta(2) - S_\alpha(2) S_\beta(1),$$

где индексы  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют спинам электронов, равным  $\hbar/2$  и  $-\hbar/2$ , а цифры обозначают «номера» электронов. Первые три функции являются симметричными и относятся к трехкратно вырожденному *ортосостоянию* атома, характеризующемуся суммарным спином  $S = 1$  (в единицах  $\hbar$ , стр. 758); последняя функция является антисимметричной и относится к *парасостоянию* с суммарным спином  $S = 0$  (в единицах  $\hbar$ ).

В соответствии с принципом Паули (стр. 769) полные волновые функции, отвечающие состояниям двухэлектронной системы, должны быть антисимметричными:  $\Psi_A = \psi_S S_A$  (или  $\Psi_A = \psi_A S_S$ ).

## 3. Векторная модель атома

1° Для целей систематики сложных спектров многоэлектронных атомов и изучения тонкой структуры спектров (стр. 760) применяется *векторная модель атома*. В этой модели момент, соответствующий орбитальному движению каждого электрона, представляется вектором  $l$ , момент, соответствующий спину электрона, — вектором  $s$  (см. стр. 428).

Проекции векторов  $l$  и  $s$  на некоторое направление (совпадающее с направлением внешнего магнитного поля) квантованы и принимают значения, кратные  $\hbar$ . Это называется *пространственным квантованием* орбитального и спинного моментов электрона в атоме.

Проекция вектора  $l$  принимает значения (в единицах  $\hbar$ )  $l, l-1, \dots, 0, \dots, -l$ , т. е. всего  $2l+1$  значения; проекция вектора  $s$  принимает значения  $+1/2$  и  $-1/2$  (в единицах  $\hbar$ ). Модули векторов  $l$  и  $s$  равны  $|l| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$  и  $|s| = (\sqrt{3}/2) \hbar$ .

Сумма  $j = l + s$ , где  $|j| = \sqrt{j(j+1)} \hbar$ , называется *полным вектором момента импульса электрона*;  $j$  называется *внутренним квантовым числом*, величины  $l$  и  $s$  называются соответственно *орбитальным* и *спиновым квантовыми числами*.

2° В атоме (ионе) с двумя и более электронами орбитальные и спинные моменты всех его электронов могут складываться двумя способами. Первый способ осуществляется, когда взаимодействие орбитальных

моментов  $l_i$  и  $l_k$  электронов и спинных моментов  $s_i$  и  $s_k$  друг с другом сильнее, чем взаимодействие моментов  $l_i$  и  $s_i$ . Связь орбитального и спинного моментов в этом случае называется *слабой (рассел-саундеровской, LS-) связью*. Она является наиболее распространенной в легких атомах. Векторы орбитального и спинного моментов электронов складываются в этом случае порознь, образуя вектор *суммарного орбитального момента атома* (рис. VI.2.3):

$$L = \sum_{i=1}^N l_i, \quad |L| = \sqrt{L(L+1)} \hbar$$

и вектор *суммарного спинового момента атома*:

$$S = \sum_{i=1}^N s_i, \quad |S| = \sqrt{S(S+1)} \hbar,$$

где  $N$  — число электронов в атоме. Оба суммарных момента складываются в *суммарный полный момент атома*:

$$J = L + S, \quad |J| = \sqrt{J(J+1)} \hbar.$$

Величина  $J$  вектора  $J$ , выраженная в единицах  $\hbar$ , называется *суммарным внутренним квантовым числом атома*, величины  $L$  и  $S$  — соответственно *суммарным орбитальным* и *спиновым квантовыми числами атома*. Ввиду различной возможной ориентации векторов  $L$  и  $S$  квантовое число  $J$  принимает следующие значения:

$$J = L + S, \quad L + S - 1, \dots, |L - S|,$$

т. е.  $J$  имеет  $2S+1$  значение при  $L \geq S$  и  $2L+1$  значение при  $L \leq S$ . Геометрическому сложению векторов  $L$  и  $S$  соответствует алгебраическое сложение  $L$  и  $S$ .

3° Вторым способом сложения орбитальных и спинных моментов атомных электронов осуществляется, когда взаимодействие  $l_i$  и  $s_i$  для каждого из электронов сильнее, чем взаимодействие порознь орбитальных и спинных моментов различных электронов между собой. Связь моментов атомных электронов в этом случае называется *сильной связью* или *jj-связью*. Эта связь существует преимущественно в тяжелых атомах. Векторы орбитального и спинного моментов каждого электрона атома складываются, давая вектор полного момента электрона (рис. VI.2.4):

$$j_i = l_i + s_i.$$

Суммарный полный момент атома образуется сложением полных моментов каждого из электронов:

$$J = \sum_{i=1}^N j_i, \quad |J| = \sqrt{J(J+1)} \hbar.$$

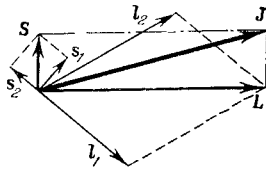


Рис. VI.2.3.

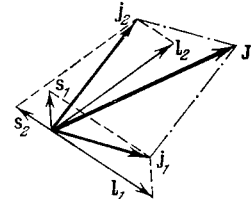


Рис. VI.2.4.

4° Для атома с двумя внешними электронами при слабой связи суммарный орбитальный момент

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2, \text{ т. е. } L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|;$$

максимальное значение  $L$  отвечает параллельной, а минимальное — антипараллельной ориентации орбитальных моментов обоих внешних электронов в векторной модели. Суммарный спиновый момент

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \text{ т. е. } S = s_1 \pm s_2 = 1 \text{ или } 0,$$

соответственно при параллельной и антипараллельной ориентации спиновых моментов.

5° Величина  $2S+1$  называется *мультиплетностью термина* (стр. 747). Она показывает, на какое число компонент распадается каждый спектральный терм вследствие дополнительного к кулоновскому взаимодействию (электронов с ядром и друг с другом) взаимодействия спиновых и орбитальных моментов атома (*спин-орбитальное взаимодействие*) — тонкая структура спектральных линий.

В соответствии с двумя значениями  $S$  для атома с двумя внешними электронами получаются два вида мультиплетов:

*синглеты* (одиночные термы) при  $S = 0$ ,

*триплеты* (тройные термы) при  $S = 1$ .

Мультиплетность термина  $2S+1$  совпадает с мультиплетностью системы, которой принадлежит данный терм, только при  $L \geq S$

*Оптически разрешенными* являются квантовые переходы (стр. 740) между термами с одинаковыми  $S$ , т. е. при  $\Delta S = 0$ , и *оптически запрещенными* — переходы между термами с разными  $S$  (*интеркомбинационный запрет*). Этот запрет жестко выполняется только в легких атомах.

6° Для характеристики термов многоэлектронного атома принято обозначение

$$(n_1 l_1)^{k_1} (n_2 l_2)^{k_2} \dots {}^{2S+1} L_J,$$

где вначале указываются *электронные конфигурации* атома, соответствующие данному его терму, т. е. числа электронов  $k_1, k_2, \dots$  в состояниях с данными главными и орбитальными квантовыми числами электронов  $n_i, l_i$ ; указываются также мультиплетность термина  $2S+1$ , обозначение термина  $L$  атома и значение полного квантового числа атома  $J$ . Для обозначения величин, характеризующих

состояние атома, используются прописные символы, для отдельных электронов — строчные.

7° Взаимодействие магнитных моментов электронов и атомного ядра вызывает возникновение *сверхтонкой структуры* спектральных термов. Магнитный момент ядра, складывающийся из магнитных моментов составляющих его нуклонов (стр. 806), имеет порядок величины ядерного магнетона (стр. 812),  $\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2cM_p}$ , где  $M_p$  — масса протона (стр. 871). В соответствии с малостью ядерного магнетона по сравнению с магнетонам Бора (стр. 465) сверхтонкая структура спектральных линий характеризуется расщеплениями линий, в тысячи раз меньшими, чем в тонкой структуре.

Магнитное взаимодействие электронов и ядра, подобное взаимодействию самих электронов, в векторной модели атома выражается с помощью вектора ядерного момента  $\mathbf{I}$  (спина):

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}, \quad |\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar,$$

где  $\mathbf{J}$  — вектор суммарного полного момента количества движения электронов атома,  $\mathbf{F}$  — вектор полного момента количества движения атома (включая его ядро). Соответствующее  $F$  квантовое число  $F$  может принимать значения (при фиксированном  $J$ )

$$F = J + I, J + I - 1, \dots, |J - I|.$$

Систематика спектральных линий при сверхтонкой структуре не отличается от принятой для тонкой структуры в случае слабой связи.

О векторной модели молекулы см. на стр. 787.

#### 4. Эффект Зеемана и явления резонанса

1° *Эффектом Зеемана* называется расщепление энергетических уровней и спектральных линий под действием на излучающее вещество внешнего магнитного поля. Различаются эффекты Зеемана: *нормальный* и *аномальный*, а также *продольный* и *поперечный*. Продольный эффект наблюдается вдоль направления магнитного поля, поперечный — в направлениях, перпендикулярных к направлению магнитного поля.

2° При нормальном продольном эффекте Зеемана каждая спектральная линия расщепляется на две компоненты (*нормальный зеемановский дублет*) с частотами  $\nu \pm \Delta\nu$ , где  $\nu$  — частота линии в отсутствие магнитного поля.

При нормальном поперечном эффекте Зеемана наряду с указанным дублетом наблюдается несмещенная линия, т. е. всего три линии (*нормальный зеемановский триплет*) с частотами  $\nu$ ,  $\nu \pm \Delta\nu$ . В продольном эффекте линия с  $\nu - \Delta\nu$  имеет левую круговую поляризацию (стр. 567), линия с  $\nu + \Delta\nu$  — правую круговую поляризацию. В поперечном эффекте двум смещенным компонентам соответствует плоскость поляризации (стр. 568), параллельная направлению внешнего магнитного поля ( $\sigma$ -компоненты), несмещенной линии — плоскость поляризации, перпендикулярная к этому направлению ( $\pi$ -компонента). В продольном эффекте линия с частотой  $\nu - \Delta\nu$  называется *красной*, с частотой  $\nu + \Delta\nu$  — *фиолетовой* (рис. VI.2.5).

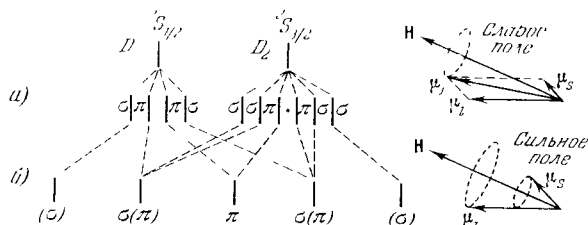


Рис. VI.2.5

3° Эффект Зеемана, наблюдаемый в спектрах поглощения, называется *обратным*. Закономерности обратного эффекта Зеемана аналогичны закономерностям прямого. Вследствие того, что частоты компонент близки к частоте основной линии в диспергирующей среде, имеет место дисперсия показателя преломления, и последний для красной линии продольного эффекта имеет иное значение, чем для фиолетовой. Поскольку обе эти линии имеют противоположную по знаку круговую поляризацию, то при распространении света этих частот в веществе происходит отставание одной из них по фазе от другой, т. е. вращение плоскости поляризации (стр. 672, п.5°).

4° В классической теории нормального эффекта Зеемана движение электрона в атоме рассматривается как гармоническое колебание линейного гармонического осциллятора (стр. 721).

Произвольное линейно поляризованное колебание электрона (стр. 128) может быть разложено на дв

колебания: одно, происходящее вдоль магнитного поля, а другое — в плоскости, перпендикулярной к направлению поля. Это последнее можно разложить на два колебания, поляризованных по кругу (стр. 128), с противоположными направлениями вращения, происходящими с частотой прецессии Лармора (стр. 466). Для кругового колебания с направлением вращения, совпадающим с направлением прецессии, частота колебаний излучающего электрона будет  $\nu + \Delta\nu$  (фиолетовая линия), а для колебания с противоположным направлением вращения получится частота  $\nu - \Delta\nu$  (красная линия). Вдоль магнитного поля линейно поляризованное колебание электрона, совпадающее с направлением поля, не дает излучения, ибо гармонический осциллятор вдоль своей оси не излучает (стр. 573). Таким образом, в продольном эффекте Зеемана наблюдаются лишь два колебания, поляризованных по кругу, смещенных относительно первоначальной частоты на  $\Delta\nu$ . В поперечном эффекте Зеемана все три колебания дают линейно поляризованные излучения с частотами  $\nu$  и  $\nu \pm \Delta\nu$ .

Расщепление линий  $\Delta\nu$  в нормальном эффекте Зеемана совпадает с ларморовой частотой:

$$\Delta\nu = \frac{u_0 e H}{4\pi m} \quad (\text{в СИ}),$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{eH}{mc} \quad (\text{в гауссовой системе}),$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $H$  — напряженность магнитного поля. Величина  $\Delta\nu$  обычно весьма мала; при  $H \sim 10^6 \frac{\text{а}}{\text{м}}$   $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-5}$ . Эффект Зеемана можно наблюдать лишь с помощью приборов с высокой разрешающей способностью (стр. 646).

5° Нормальный эффект Зеемана наблюдается только в сильных магнитных полях. В слабых магнитных полях имеет место аномальный эффект Зеемана. В этом эффекте расщепление спектральных линий является значительно более сложным, чем в нормальном. Число компонент линий нередко значительно превышает их число в нормальном эффекте, распределение интенсивности в системе компонент (*зеемановское мультиплет*) оказывается весьма сложным. Расстояния между компонентами линий определяются по-прежнему величиной напряженности магнитного поля  $H$ . На рис. VI.2.5 показаны

линии, соответствующие дублету натрия в случае аномального (а) и нормального (б) эффектов Зеемана, а также переход от первого ко второму. Переход от аномального к нормальному эффекту Зеемана при увеличении напряженности внешнего магнитного поля называется *эффектом Пащенко - Бака*.

6° Классическая теория не дает объяснения аномальному эффекту Зеемана. Квантовая теория эффекта Зеемана (нормального и аномального) рассматривает его как результат изменения энергетических уровней атомных электронов вследствие взаимодействия их спинового и орбитального моментов между собой и с внешним магнитным полем (силная или  $J$ -связь, стр. 759). Для описания этого взаимодействия привлекается векторная модель атома (стр. 758). Различаются случаи *слабого* и *сильного* магнитных полей.

7° Слабым называется магнитное поле с напряженностью  $H$ , которое вызывает расщепление  $\mu_0 \mu_B H$  уровней в нормальном эффекте Зеемана, удовлетворяющее условию:

$$\mu_0 \mu_B H \ll |E_1 - E_2| \quad (\text{в СИ}),$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора (стр. 465),  $E_1$  и  $E_2$  — энергия двух соседних уровней в отсутствие магнитного поля. Условие сильного поля в эффекте Зеемана:

$$\mu_0 \mu_B H \gg |E_1 - E_2| \quad (\text{в СИ}).$$

В слабом магнитном поле взаимодействие орбитального магнитного момента со спиновым сильнее, чем взаимодействие каждого из них с полем (см. рис. VI.2.5). Последнее взаимодействие рассматривается как малое возмущение, вызывающее изменение энергии  $\Delta E$  атома в магнитном поле с напряженностью  $H$ :

$$\Delta E = g \mu_B \mu_0 H \quad (\text{в СИ}),$$

где  $m$  — магнитное квантовое число,  $\mu_B$  — магнетон Бора (стр. 465),  $g$  — так называемый *фактор* (множитель) *расщепления Ланде*:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

(обозначения см. на стр. 759). Если спин отсутствует ( $S = 0$ ,  $J = L$ ), то  $g = 1$ ; если  $L = 0$ , то  $g = 2$ . Число компонент мультиплета определяется соотношением между  $L$  и  $S$ .

Величина расщепления при аномальном эффекте Зеемана:

$$\Delta \nu = (m_1 g_1 - m_2 g_2) \nu_L,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — магнитные квантовые числа,  $g_1$  и  $g_2$  — факторы Ланде,  $\nu_L = \mu_0 e H / 4 \pi m$  — ларморова частота. Для света, линейно поляризованного параллельно вектору  $\mathbf{H}$ ,  $m_1 = m_2$ ; для света с круговой поляризацией, перпендикулярной к  $\mathbf{H}$ ,  $m_1 = m_2 \pm 1$ .

8° В сильном магнитном поле взаимодействие орбитального и спинового моментов электрона разрушается, и каждой из этих моментов порознь взаимодействует с магнитным полем. При увеличении напряженности магнитного поля расщепление линий растет, пока не начинают сливаться друг с другом компоненты мультиплетов соседних спектральных линий. Наконец, из всех компонент мультиплетов остаются только три линии (для поперечного эффекта Зеемана) или две линии (для продольного эффекта) с частотами

$$\nu = \nu_0 + \frac{\mu_0 e H}{4 \pi m} (m_1 - m_2) \quad (\text{в СИ}),$$

где  $\nu_0$  — частота несмещенной линии,  $\mu_0 e H / 4 \pi m$  — ларморова частота,  $m_1$  и  $m_2$  — магнитные квантовые числа. Для последних существует правило отбора:

$$m_1 - m_2 = \pm 1, 0,$$

откуда получается зеемановский триплет. В сильных полях результаты классического и квантового расчетов эффекта Зеемана совпадают.

9° Наличие спина приводит к тому, что каждый энергетический уровень электрона в атоме дважды вырожден (стр. 219). Наложение магнитного поля на атом снимает это вырождение, и каждая спектральная линия расщепляется минимум на две (*спиновый дублет*).

10° *Электронным парамагнитным резонансом* называется избирательное поглощение электромагнитного излучения веществом, связанное с переходами его атомных электронов между зеемановскими уровнями энергии, которые возникают при наложении на вещество постоянного магнитного поля. Для переходов, подчиняющихся правилу отбора по магнитному квантовому числу (п. 8°)  $\Delta m = \pm 1$ , резонансная частота равна

$$\nu_{\text{вц}} = \frac{g \mu_B \mu_0 H}{h} \quad (\text{в СИ}),$$



где  $g$  — фактор Ланде (п. 7°), равный 2 для свободных электронов (электронов проводимости в металлах),  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $H$  — напряженность постоянного магнитного поля, наложенного на вещество,  $h$  — постоянная Планка.

11° Накладываемое на вещество магнитное поле обычно достаточно велико для того, чтобы снять спиновое вырождение магнитных подуровней (п. 9°). Одновременно с ним на вещество накладывается вызывающее переходы слабое электромагнитное поле, магнитный вектор которого перпендикулярен к вектору постоянного магнитного поля.

Величина  $\nu_{\text{эфр}}$  для  $H \sim 10^{10} \frac{\text{а}}{\text{м}}$  имеет порядок  $10^8 \text{ Мгц}$  и требует для своего наблюдения радиоизмерительной техники (в диапазоне сантиметровых волн).

12° Форма и интенсивность линий, наблюдаемых в электронном парамагнитном резонансе, зависят от взаимодействия спинов атомных электронов друг с другом и с решеткой твердого вещества.

*Спин-спиновое взаимодействие* атомов обусловлено наличием не равного нулю полного спинового магнитного момента атома (стр. 759). В общем случае оно добавляется к взаимодействию атомов с внешним магнитным полем, приводя к уширению резонансных линий. Это взаимодействие быстро убывает с ростом расстояния между атомами и может быть сделано пренебрежимо малым при разведении парамагнитного вещества в немагнитных растворителях.

13° *Спин-решеточное взаимодействие* обязано тому, что орбитальный магнитный момент атома, связанный  $LS$ -связью (стр. 758) со спиновым моментом атома, связан вместе с тем электрическими силами с внутрикристаллическим полем (спин непосредственно с решеткой не взаимодействует). Это взаимодействие обуславливает то, что спины атомов ориентируются по направлению внешнего магнитного поля не мгновенно, а постепенно. Это явление называется *спин-решеточной релаксацией* и характеризуется периодом  $\tau$ , связанным с энергией атомного перехода соотношением неопределенностей Гейзенберга (стр. 720). Переход атома на более высокий (поглощение) или на более низкий (излучение) уровень зеемановского расщепления происходит не раньше, чем соседние атомы в решетке смогут отдать или воспринять квант энергии  $h\nu_{\text{эфр}} = \Delta E$ .

## VI.2.4] ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА И ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА 767

Если спин-решеточная релаксация осуществляется путем обмена с решеткой фононами (стр. 274), то время релаксации для водородоподобных систем (с суммарным спиновым квантовым числом  $S = 1/2$ , стр. 758)

$$\tau \propto \frac{C}{H^4 T^2}.$$

Эта формула обычно имеет место при  $T > \Theta_D$ , где  $\Theta_D$  — дебаевская температура кристалла (стр. 276).

Если спин-решеточная релаксация осуществляется путем рассеяния атомами акустических волн в решетке, то

$$\tau \propto \frac{C}{H^2 T^3}.$$

Эта формула обычно имеет место при  $T \ll \Theta_D$ . Здесь  $\tau$  — период релаксации,  $H$  — напряженность магнитного поля,  $C$  — множитель пропорциональности, зависящий от силы  $jj$ -связи (стр. 759) и от расщепления орбитальных уровней во внутрикристаллическом поле,  $T$  — абсолютная температура вещества. Эти формулы справедливы при пренебрежении спин-спиновым взаимодействием.

14° Электронный резонанс в ферромагнетиках, помимо перечисленных выше факторов, зависит также от наличия размагничивающих полей. В общем случае резонансная частота для перехода с  $\Delta m = \pm 1$  равна

$$\nu_{\text{эфр}} = \frac{g\mu_B}{h} \sqrt{[H_x + (N_y - N_z)I_z][H_x + (N_x - N_z)I_z]},$$

где  $N_x, N_y, N_z$  — так называемые размагничивающие факторы для осей  $x, y, z$ ;  $I_z$  — намагниченность образца в направлении приложенного магнитного поля  $H_x$ . Предполагается, что магнитная компонента электромагнитного высокочастотного поля направлена вдоль оси  $x$ , а также что образец намагничен однородно и что фактор Ланде  $g$  одинаков по всему образцу.

Если постоянное магнитное поле и магнитная компонента переменного поля параллельны плоской поверхности образца, то

$$\nu_{\text{эфр}} = \frac{g\mu_B}{h} \sqrt{BH},$$

где  $B$  — индукция магнитного поля в образце. Если же

постоянное магнитное поле перпендикулярно, а переменное — параллельно плоской поверхности образца, то

$$\nu_{\text{эфр}} = \frac{g\mu_B}{h} (H - 4\pi I),$$

где  $I$  — намагниченность образца.

Для малых сферических образцов

$$\nu_{\text{эфр}} = \frac{g\mu_B}{h} H.$$

Для длинных круговых цилиндров при направлении постоянного магнитного поля вдоль оси цилиндра и при перпендикулярной к ней магнитной компоненте высокочастотного поля

$$\nu_{\text{эфр}} = \frac{g\mu_B}{h} (H + 2\pi I).$$

Эти соотношения справедливы при условии, что глубина проникновения высокочастотного поля в образец на резонансной частоте (глубина скин-слоя, стр. 461) сравнима с размерами образца. Формулы п.14° в гауссовой системе.

### 5. Эффект Штарка в водородоподобных системах

1° *Эффектом Штарка* называется расщепление спектральных линий под действием на излучающее вещество внешнего электрического поля. Поскольку даже очень сильные внешние электрические поля слабы по сравнению с внутриатомными, их действие на движение атомных электронов можно рассматривать как небольшое возмущение. Соответственно штарковское расщепление линий очень мало и для наблюдения требует приборов с высокой разрешающей способностью (стр. 646). Линии расщепляются на ряд компонент (*сателлитов*), располагающихся в случае водорода симметрично по обе стороны от основной линии.

2° В водороде и водородоподобных системах в первом приближении теории возмущений (стр. 740) имеет место *линейный эффект Штарка*, частично снимающий вырождение между уровнями единичного атомного электрона (стр. 725). Расщепление (в гауссовой системе):

$$\Delta\nu_1 = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h}{m_0 e^2 Z} (n_1 - n_2) n \mathcal{E},$$

где  $\mathcal{E}$  — напряженность однородного электрического поля,  $n_1$  и  $n_2$  — так называемые *параболические квантовые*

числа,  $n_1 + n_2 < n$ , где  $n$  — главное квантовое число (стр. 726). Наличие линейного эффекта Штарка означает, что система обладает средним дипольным моментом

$$P_0 = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h^2}{m_0 e^2 Z} (n_1 - n_2) n,$$

вызванным поляризацией ее в электрическом поле.

3° После частичного снятия вырождения в линейном эффекте Штарка остается вырождение состояний, отличающихся значениями магнитного квантового числа  $m$ . Дальнейшее снятие вырождения происходит в эффекте второго приближения — *квадратичном эффекте Штарка*. В достаточно сильных электрических полях с напряженностью  $\mathcal{E}$ , превосходящей  $10^5$  в/см, наблюдается расщепление (в гауссовой системе):

$$\Delta\nu_2 = B_0 \left(\frac{n}{Z}\right)^4 [17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9m^2 + 19] \mathcal{E}^2,$$

где

$$B_0 = -\frac{h^5}{1024\pi^4 m_0^2 e^6},$$

зависящее, помимо прочих квантовых чисел, также от магнитного квантового числа  $m$ . Квадратичный эффект Штарка всегда отрицателен и смещает энергетические уровни в сторону меньших энергий.

### 6. Принцип Паули. Периодическая система элементов

1° Квантовая механика на основе принципа тождественности одинаковых частиц (стр. 225) приводит к выводу о двух типах частиц, зависящих только от их природы. В природе существуют: а) частицы, обладающие спином, равным целому числу единиц  $\hbar$  (бозоны, стр. 225), описываемые симметричными полными волновыми функциями  $\Psi_s$  (стр. 756); б) частицы, имеющие спин, равный полному числу единиц  $\hbar$  (фермионы, стр. 226), описываемые антисимметричными полными волновыми функциями  $\Psi_A$  (стр. 757).

2° Для всех частиц, обладающих полуцелым спином (в единицах  $\hbar$ , фермионов), справедливо утверждение: в данной квантовой системе в одном и том же квантовом состоянии не может находиться более одного фермиона. Это утверждение называется *принципом исключения* или *принципом Паули*. Квантовомеханическая формулировка принципа Паули состоит в требовании антисимметричности полных волновых функций для систем частиц, подчиняющихся этому принципу.

19) Б. М. Яворский, А. А. Детлаф

3° В применении к атому, в котором электропное состояние однозначно определяется набором четырех квантовых чисел: главного  $n$ , орбитального  $l$ , магнитного орбитального  $m_l$  и магнитного спинового  $m_s$ , принцип Паули гласит: в атоме каждый электрон обладает своим набором квантовых чисел  $n, l, m_l$  и  $m_s$ , отличным от набора этих чисел для любого другого электрона.

4° Принцип Паули лежит в основе систематики заполнения электронных состояний в атомах и дает объяснение периодичности свойств химических элементов — *периодической системе элементов Д. И. Менделеева*.

Общее число электронных состояний в многоэлектронном атоме при данном главном квантовом числе  $n$  равно

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2.$$

Электроны, занимающие совокупность состояний с одинаковым значением числа  $n$ , образуют *электропную оболочку*.

Главное квантовое число $n$ . . . . .	1	2	3	4	5	6	7
Максимальное число возможных электронных состояний . . . . .	2	8	18	32	50	72	98
Символ оболочки . . . . .	$K$	$L$	$M$	$N$	$O$	$P$	$Q$

5° В каждой из оболочек электроны распределяются по *подгруппам*, или *подоболочкам*, соответствующим данному значению  $l$  ( $l < n$ , стр. 750). Максимальное число электронных состояний в подоболочке с данным  $l$  равно  $2(2l+1)$ .

Значение орбитального квантового числа $l$ . . . . .	0	1	2	3	4	.....
Число возможных электронных состояний . . . . .	2	6	10	14	18	.....
Символ подгруппы . . . . .	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	.....

6° Порядок заполнения электронных состояний в оболочках, а в пределах одной оболочки — в подгруппах следует порядку расположения энергетических уровней с данными  $n$  и  $l$ . Сначала заполняются состояния с наименьшей возможной энергией, затем состояния со все более высокой энергией. Для легких атомов этот порядок соответствует тому, что сначала заполняется оболочка с меньшим  $n$  и лишь затем начинается заполнение элек-

тронами следующей оболочки. В пределах одной оболочки сначала заполняются состояния с  $l = 0$ , а затем состояния с большими  $l$ , до  $l = n - 1$ .

7° Начиная с калия ( $Z = 19$ ) указанный порядок заполнения электронных оболочек часто нарушается, так как оказывается, что некоторым состояниям электронов с большим значением  $n$  соответствует меньшая энергия, чем в еще не занятых состояниях с меньшим  $n$ . Это относится к состояниям  $(n+1)s$  и  $(n+1)p$  (сравните с состояниями  $nd$  и  $nf$ ). Элементы, у которых происходит достройка предыдущих оболочек (подоболочки  $3d, 4d, 4f, 5d$  и  $5f$ ) при уже частично заполненных последующих оболочках, называются *переходными*.

8° В нижеследующей таблице указано распределение электронов по состояниям (оболочкам и подоболочкам) в атомах различных химических элементов, а также основные термы соответствующих атомов.

Распределение электронов в атомах

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
1	H	1							$^2S_{1/2}$
2	He	2							$^1S_0$
3	Li	2	1						$^2S_{1/2}$
4	Be	2	2						$^1S_0$
5	B	2	2	1					$^2P_{1/2}$
6	C	2	2	2					$^3P_0$
7	N	2	2	3					$^4S_{3/2}$
8	O	2	2	4					$^3P_2$
9	F	2	2	5					$^4P_{3/2}$
10	Ne	2	2	6					$^1S_0$

Продолжение

Z	Элемент	K		L		M		N		O		P		Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s							
11	Na	2	2 6	1											$2S_{1/2}$
12	Mg	2	2 6	2											$1S_0$
13	Al	2	2 6	2 1											$2P_{1/2}$
14	Si	2	2 6	2 2											$3P_0$
15	P	2	2 6	2 3											$1S_0$
16	S	2	2 6	2 4											$3P_2$
17	Cl	2	2 6	2 5											$1S_0$
18	Ar	2	2 6	2 6											$1S_0$
19	K	2	2 6	2 6	1										$2S_{1/2}$
20	Ca	2	2 6	2 6	2										$1S_0$
21	Sc	2	2 6	2 6 1	2										$2D_{3/2}$
22	Ti	2	2 6	2 6 2	2										$1S_0$
23	V	2	2 6	2 6 3	2										$4F_{3/2}$
24	Cr	2	2 6	2 6 5	1										$7S_0$
25	Mn	2	2 6	2 6 5	2										$6S_{6/2}$
26	Fe	2	2 6	2 6 6	2										$5D_4$
27	Co	2	2 6	2 6 7	2										$4F_{1/2}$
28	Ni	2	2 6	2 6 8	2										$3F_4$
29	Cu	2	2 6	2 6 10	1										$2S_{1/2}$
30	Zn	2	2 6	2 6 10	2										$1S_0$
31	Ga	2	2 6	2 6 10	2 1										$1P_{1/2}$
32	Ge	2	2 6	2 6 10	2 2										$3P_0$

Продолжение

Z	Элемент	K		L		M		N		O		P		Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s							
33	As	2	2 6	2 6 10	2 3										$4S_{3/2}$
34	Se	2	2 6	2 6 10	2 4										$3P_2$
35	Br	2	2 6	2 6 10	2 5										$2P_{3/2}$
36	Kr	2	2 6	2 6 10	2 6										$1S_0$
37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1									$2S_{1/2}$
38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2									$1S_0$
39	Y	2	2 6	2 6 10	2 6 1	2									$2D_{3/2}$
40	Zr	2	2 6	2 6 10	2 6 2	2									$3F_2$
41	Nb	2	2 6	2 6 10	2 6 4	1									$6D_{1/2}$
42	Mo	2	2 6	2 6 10	2 6 5	1									$7S_1$
43	Tc	2	2 6	2 6 10	2 6 5	2									$6S_{1/2}$
44	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 7	1									$5F_5$
45	Rh	2	2 6	2 6 10	2 6 8	1									$4F_{9/2}$
46	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10										$1S_0$
47	Ag	2	2 6	2 6 10	2 6 10	1									$2S_{1/2}$
48	Cd	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2									$1S_0$
49	In	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 1									$2P_{1/2}$
50	Sn	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 2									$3P_0$
51	Sb	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 3									$4S_{1/2}$
52	Te	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 4									$3P_2$
53	I	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 5									$2P_{3/2}$
54	Xe	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6									$1S_0$



9° *Внешними (валентными) электронами* атома называются электроны, входящие в состав  $s$ - и  $p$ -подгруппы оболочки с наибольшим числом  $n$  для данного атома. Этими электронами определяются химические и оптические свойства атомов.

10° В заполненной  $s$ -подгруппе компенсированы магнитные спиновые моменты электронов; в заполненных  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -, ... подгруппах компенсированы также магнитные орбитальные моменты электронов. Поэтому магнитный момент атома с заполненными подгруппами равен нулю, и соответствующий элемент обладает диамагнитными свойствами (стр. 469). В атомах с незаполненными подгруппами некомпенсированный (не равный нулю) магнитный момент обуславливает парамагнетизм (стр. 470), а в ряде случаев — ферромагнетизм или антиферромагнетизм (стр. 474).

11° Заполнение  $nd$ -подгруппы и  $nf$ -подгруппы в атомах происходит при почти неизменной электронной конфигурации  $(n+1)$   $s$ - и  $(n+1)$   $p$ -подгрупп и поэтому почти не влияет на химические свойства переходных элементов, которые в пределах данной группы элементов являются сходными. Заполнение  $nd$ - и  $nf$ -подгрупп, однако, существенно сказывается на рентгеновских спектрах (стр. 777) атомов, связанных с электронными переходами во внутренних оболочках атома.

12° Суммарное число электронов в  $s+p$ -подгруппе равно 8 (стр. 770). Механизм отдачи или присоединения валентных (внешних) электронов лежит в основе большинства химических реакций (см. также стр. 780). Энергетически оказываются выгодными отдача электронов атомами с менее чем наполовину занятой  $s+p$ -подгруппой и присоединение электронов атомами с более чем наполовину занятой  $s+p$ -подгруппой. Атомы с наполовину занятой  $s+p$ -подгруппой могут в зависимости от ряда условий либо отдавать, либо приобретать электроны.

## 7. Рентгеновские лучи

1° Существуют два типа рентгеновского излучения — с линейчатым спектром (стр. 681), называемое *характеристическим*, и со сплошным спектром (стр. 680), называемое *белым*. Белое рентгеновское излучение вызывается торможением быстрых электронов при их движении в веществе (тормозное излучение, стр. 579). Характеристическое излучение связано с электронными перехода-

ми во внутренних оболочках средних и тяжелых атомов. Для этих оболочек разности энергий  $E_m - E_n$  значительно больше, чем разности энергий для внешних оболочек. Поэтому частоты характеристических рентгеновских спектров на несколько порядков больше частот оптических спектров.

2° Характеристическое излучение возникает в результате вырывания электрона с одной из близких к ядру оболочек атома. На освободившееся место переходит электрон из более удаленных от ядра оболочек (с большими значениями главного квантового числа  $n$ ). Это приводит к возникновению рентгеновского фотона с частотой  $\nu$ :  $\nu = (E_m - E_n)/h$ . Если ионизация осуществляется благодаря соударениям быстрых электронов с атомами, то рентгеновское излучение называется *первичным*. Рентгеновское излучение называется *вторичным* или *флуоресцентным*, если оно возникает в результате фотоионизации атомов (стр. 805) под действием поглощаемых атомами рентгеновских фотонов.

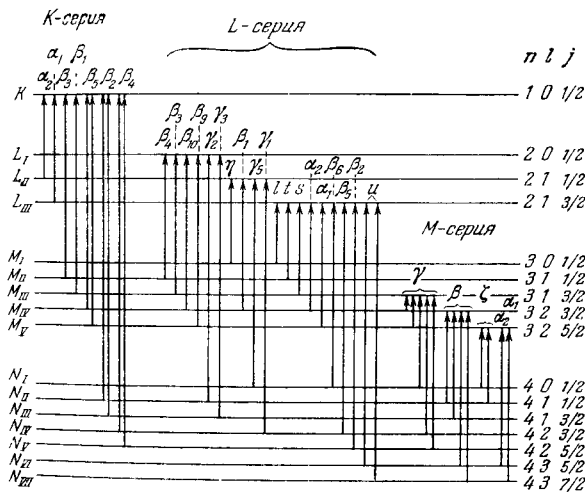


Рис. VI.2.6

3° При выбивании электрона из  $K$ -оболочки становятся возможными переходы в эту оболочку из  $L$ - ( $n=2$ ),

$M$ - ( $n = 3$ ) оболочки и т. д., с последующими электронными переходами на освобождающиеся места в этих оболочках, пока этот процесс не закончится полным перераспределением электронов по состояниям в атоме. Возникающие при этих переходах фотоны и образуют характеристическое рентгеновское излучение. На рис. VI.2.6 показана общая схема этих переходов, удовлетворяющих следующим правилам отбора:  $|\Delta l| = 1$ ,  $|\Delta j| = 0, 1$  для дипольного излучения,  $|\Delta l| = 0, 2$ ,  $|\Delta j| = 0, 1, 2$  для значительно более слабого квадрупольного излучения.

Спектральные линии, обусловленные переходами электронов в  $K$ -,  $L$ - и т. д. оболочки атома, образуют  $K$ -,  $L$ - и т. д. *серии характеристического спектра*. Линии каждой серии обычно обозначают греческими буквами с подстрочными индексами (например,  $K_{\alpha_1}$ ,  $K_{\beta_2}$ ,  $L_{\alpha_2}$  и т. п.).

4° *Закон Мозли* для характеристических частот спектра:

$$\sqrt{\frac{\nu_{mn}}{R}} = a(Z - \sigma),$$

для волновых чисел:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda R'}} = a(Z - \sigma),$$

где  $R$  и  $R'$  — постоянные Ридберга в  $\text{сек}^{-1}$  и  $\text{см}^{-1}$  (стр. 746),  $Z$  — атомный номер химического элемента,  $\sigma$  — постоянная экранирования (стр. 750),  $a$  — постоянная, зависящая от квантовых чисел оболочек, между которыми совершается переход.

5° Непрерывный рентгеновский спектр тормозного излучения ограничен со стороны малых длин волн некоторой наименьшей длиной волны  $\lambda_{\text{мин}}$ , называемой *границей сплошного спектра*. Появление границы связано с тем, что максимальная энергия  $h\nu_{\text{макс}}$  рентгеновского кванта, возникшего за счет энергии электрона  $W_{\text{к}}$ , не может превышать этой энергии:

$$W_{\text{к}} = e\varphi_0 = h\nu_{\text{макс}},$$

где  $\varphi_0$  — разность потенциалов, за счет которой электрону сообщена энергия  $W_{\text{к}}$ .

$$\lambda_{\text{мин}} = \frac{c}{\nu_{\text{макс}}} = \frac{ch}{e\varphi_0} = \frac{ch}{W_{\text{к}}}.$$

Измерение коротковолновой границы рентгеновского сплошного спектра дает значение  $h$ , являющееся одним из наиболее точных.

6° Рентгеновские спектры поглощения, в отличие от оптических, не содержат отдельных линий поглощения. Коэффициент поглощения (стр. 845) рентгеновских лучей веществом убывает с увеличением их частоты. Эта монотонная зависимость скачкообразно нарушается (*скачки поглощения*) в областях частот, при которых энергии рентгеновских квантов становится достаточной для освобождения из атома электрона с  $K$ -,  $L$ -,  $M$ -, ... оболочки.

7° При поглощении атомом рентгеновского кванта может происходить автоионизация возбужденного атома — *эффект Оже*, вызванный внутренним перераспределением энергии возбуждения. Эффект Оже является двухстадийным. Вначале при поглощении рентгеновского кванта происходит возбуждение атома, при котором освобождается электрон одной из глубоких оболочек (обычно из  $K$ -оболочки, стр. 770). Далее на освободившееся место переходит электрон из менее глубокой оболочки ( $L$ -,  $M$ - или  $N$ -оболочки). Однако разность энергий  $\Delta E$  выделяется не в виде нового рентгеновского кванта, а вызывает удаление из атома электрона, находящегося в одной из внешних оболочек. Эффект Оже, не сопровождающийся излучением, является примером *безрадиационного* или *безызлучательного перехода*.

## ГЛАВА 3 МОЛЕКУЛА

### 1. Ионные молекулы

1° *Молекулой* называется наименьшая устойчивая частица данного вещества, обладающая его основными химическими свойствами и состоящая из одинаковых или различных атомов, соединенных в одно целое химическими связями (*химическими силами*). Химические силы имеют в своей основе различные взаимодействия внешних электронов атомов.

2° Большой класс молекул образуют *ионные молекулы*, состоящие из ионов химических элементов, входящих в молекулу. Общая сумма положительных и отрицательных зарядов ионов в молекуле равна нулю, вследствие чего

ионные молекулы электрически нейтральны. Силы, обеспечивающие устойчивость молекулы, имеют в основном электрическую природу.

3° Образование ионных молекул определяется повышенной устойчивостью внешней восьмиэлектронной  $s+p$ -подгруппы в атомах (стр. 776). Атомы, внешняя оболочка которых насчитывает более четырех электронов, стремятся приобрести электроны, необходимые для дополнения их внешней оболочки до восьмиэлектронной (обладают так называемой *электроотрицательностью*). Особая устойчивость восьмиэлектронной конфигурации объясняется тем, что при заполнении всех восьми состояний в  $s+p$ -подгруппе она становится мало восприимчивой к внешним воздействиям ввиду полной компенсации орбитальных и спиновых моментов электронов (стр. 776).

4° Образование ионной молекулы при сближении атомов осуществляется путем перехода внешних электронов от электроположительных к электроотрицательным атомам с образованием соответственно положительных и отрицательных ионов этих атомов. Различают *положительную валентность* элемента (*валентность по отношению к водороду*), максимальная величина которой равна числу внешних электронов элемента  $N$ . По этой причине внешние электроны атома называются иногда *валентными электронами*.

*Отрицательная валентность* элемента (*валентность по отношению к фтору*) определяется числом замещаемых атомов фтора или удвоенным числом замещаемых атомов кислорода (*отрицательная валентность по отношению к кислороду*). Максимальная отрицательная валентность элемента равна  $8-N$ .

5° Потенциальная энергия двухатомной ионной молекулы типа  $\text{NaCl}$ , образованной однозарядными ионами  $\text{A}^-$  и  $\text{B}^+$ , равна

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{br^2}{r^3} - \frac{ep_{e1}}{r^2} - \frac{ep_{e2}}{r^2} - \frac{2p_{e1}r_{e2}}{r^3} + \frac{p_{e1}^2}{2\alpha_1} + \frac{p_{e2}^2}{2\alpha_2}$$

(в гауссовой системе),

где  $r$  — расстояние между центрами ионов,  $p_{e1}$  и  $p_{e2}$  — дипольные моменты каждого из ионов (стр. 362),  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — поляризуемости ионов (стр. 362),  $b$  — постоянная. При диссоциации молекулы на ионы ( $r \rightarrow \infty$ )  $U = 0$ . Первый член справа учитывает энергию кулоновского притяжения разноименно заряженных ионов, второй член — энергию взаимного отталкивания ионов, третий и чет-

вертый члены — энергию притяжения свободных зарядов ионов диполями с дипольными моментами  $p_{e1}$  и  $p_{e2}$ , образовавшимися вследствие взаимной поляризации электронных оболочек ионов, пятый член — взаимодействие самих индуцированных дипольных моментов, шестой и седьмой члены — энергию деформации квазиупругих диполей (квазиупругую энергию).

6° Потенциальная энергия ионной молекулы  $U$  имеет минимум  $U_{\text{мин}}$  при  $r = r_e$ , соответствующем *равновесному расстоянию* между ионами (рис. VI.3.1):

$$U_{\text{мин}} = -\frac{e^2}{r_e} \left[ \frac{8}{9} + \frac{5(\alpha_1 + \alpha_2)}{18r_e^3} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{9r_e^2} \right].$$

Величина  $r_e$  находится из условия  $\frac{dU}{dr} \Big|_{r=r_e} = 0$ , означающего условие минимума потенциальной энергии молекулы. Приближенное уравнение для  $r_e$  имеет вид (если в разложении  $p_{e1}$  и  $p_{e2}$  по степеням  $1/r$  отбросить члены с  $r$  выше  $r^3$ )

$$1 + \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{r_e^3} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{r_e^2} = \frac{9b}{r_e^2}.$$

7° Распад молекулы на составляющие ее ионы называется *диссоциацией молекулы*. Величина  $U_e$  связана с энергией  $D_{\text{и}}$  диссоциации молекулы на два иона соотношением

$$D_{\text{и}} = -U_e.$$

С энергией диссоциации  $D$  молекулы на нейтральные атомы величина  $D_{\text{и}}$  связана соотношением

$$D_{\text{и}} = D + e\varphi - E,$$

где  $\varphi$  — потенциал ионизации электроположительного атома (стр. 780),  $E$  — энергия сродства к электрону электроотрицательного атома.

8° Примерами типичных ионных молекул могут служить молекулы щелочно-галогидных солей, образованные ионами атомов элементов I и VII групп периодической системы:  $\text{NaCl}$  ( $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ ),  $\text{RbBr}$ ,  $\text{CsJ}$  и т. п. Поскольку

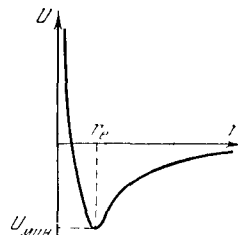


Рис. VI.3.1.



ионные молекулы могут быть образованы лишь из ионов атомов различных химических элементов, связь ионов в таких молекулах называется также *гетерополярной* (от греческого «гетеро» — «разный»).

## 2. Атомные молекулы

1° *Атомными* молекулами называются молекулы, в которых основное состояние соответствует нормальным состояниям (стр. 747) нейтральных атомов. Силы, обеспечивающие устойчивость атомных молекул, являются обменными (стр. 757) и имеют специфически квантовый характер. Они действуют между внешними электронами атомов в молекуле (стр. 776).

2° В простейшем случае молекулы водорода, образованной из двух одинаковых атомов, уравнение Шредингера (стр. 753) имеет вид

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где

$$U = \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{1,II}} - e^2 \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{r_{1i}} + \frac{1}{r_{IIi}} \right).$$

Первый член в  $U$  соответствует кулоновскому взаимодействию между электронами атомов I и II, второй — кулоновскому взаимодействию между ядрами атомов I и II (приближенно полагают  $r_{I,II} = \text{const}$ , т. е. считают ядра I и II закрепленными), третий член учитывает кулоновское взаимодействие электрона атома I с ядром атома II и электрона атома II с ядром атома I.

3° В нулевом приближении при решении задачи о молекуле водорода считают  $r_{I,II} = \infty$ , т. е. пренебрегают возмущением в атоме I, вызванным присутствием атома II, и обратно. Уравнение Шредингера при этом распадается на два уравнения для изолированных атомов водорода. Решением их в этом приближении служит волновая функция вида

$$\psi_0 = \psi_I(I)\psi_{II}(2),$$

отвечающая связи каждого из электронов со своим ядром. При сближении атомов I и II становится возможной, вследствие неразличимости обоих электронов, волновая функция вида  $\psi = \psi_I(2)\psi_{II}(1)$ , отвечающая связи каждого из электронов с чужим ядром. Полная волновая

функция имеет вид

$$\psi_{A,s} = N_{A,s} [\psi_I(I)\psi_{II}(2) \pm \psi_I(2)\psi_{II}(I)],$$

где  $N_{A,s}$  — нормирующий множитель, индекс  $A$  и знак минус отвечают антисимметричной волновой функции, индекс  $S$  и знак плюс — симметричной.

Волновая функция  $\psi_{A,s}$ , являющаяся точным решением уравнения Шредингера для молекулы водорода при больших расстояниях между атомами, считается приближенным решением при малых расстояниях  $r_{I,II}$ :

$$|\psi_{A,s}|^2 = N_{A,s}^2 [|\psi_I(I)|^2 |\psi_{II}(2)|^2 + |\psi_I(2)|^2 |\psi_{II}(I)|^2 \pm 2\psi_I(I)\psi_{II}(2)\psi_I(2)\psi_{II}(I)]$$

и дает распределение электронной плотности в молекуле. Первые два члена соответствуют электронам, находящимся в соответствующих ядрах. Этим членам соответствует электростатическая (кулоновская) часть энергии взаимодействия атомов. Третьему члену соответствует обменная энергия (см. также стр. 757).

Обменное взаимодействие электронов в молекуле водорода можно понимать в том смысле, что электрон каждого из ее атомов проводит некоторую долю времени у ядра другого атома, осуществляя тем самым связь обоих атомов в молекулу.

Потенциальная энергия молекулы водорода:

$$U = \frac{C \pm A}{1 \pm S},$$

где

$$S = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_I(I)\psi_{II}(I)\psi_I(2)\psi_{II}(2) dV_1 dV_2,$$

$C$  — кулоновский интеграл (стр. 757),

$$C = e^2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{r_{II1}} - \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{II1}} \right] = \\ = |\psi_I(I)|^2 |\psi_{II}(2)|^2 dV_I dV_{II},$$

$A$  — обменный интеграл (стр. 757),

$$A = e^2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{r_{II1}} - \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{II1}} \right] \times \\ \times \psi_I(I)\psi_{II}(2)\psi_I(2)\psi_{II}(I) dV_I dV_{II}.$$

4° Интегралы  $C$  и  $A$  отрицательны, причем  $|A| > |C|$ ; интеграл  $S < 1$ . Для двух знаков в выражении для  $U$ :

$$U_+ = \frac{C+A}{1+S} < 0, \quad U_- = \frac{C-A}{1-S} > 0.$$

Величина  $U_+$  соответствует устойчивому состоянию молекулы водорода, а величина  $U_-$  — неустойчивому состоянию. Вид  $U_+$  и  $U_-$  в зависимости от расстояния между ядрами атомов в молекуле изображен на рис. VI.3.2. Кривая  $U_+(r)$  сходна с потенциальной кривой для ионных молекул. Соответствующие устойчивому и неустойчивому

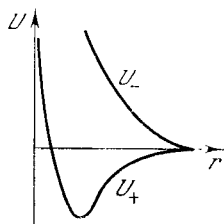


Рис. VI.3.2.

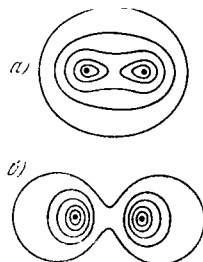


Рис. VI.3.3.

состояниям молекулы водорода распределения электронной плотности (величины  $e|\psi|^2$ ) показаны на рис. VI.3.3. Согласно принципу Паули (стр. 769) в устойчивом состоянии молекулы спины электронов антипараллельны и суммарный спин обоих электронов  $S = 0$ ; этому состоянию соответствует симметричная орбитальная волновая функция (*синглетное состояние*). В неустойчивом состоянии молекулы водорода спины электронов параллельны и суммарный спин обоих электронов  $S = 1$ ; орбитальная волновая функция антисимметрична (*триплетное состояние*).

5° В общем случае в образовании молекул участвуют и ионная и атомная связи. В случае ионных молекул типа  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CsJ}$  и т. п. на первый план выступает кулоновское взаимодействие ионов; в случае молекул типа  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$  и т. п. основную роль играет обменное взаимодействие атомов.

6° Химические связи в молекулах осуществляются электронами  $s$ - и  $p$ -подгрупп оболочки с наибольшим

значением главного квантового числа  $n$  (стр. 726). В молекулах отсутствует индивидуализация описания состояний валентных электронов, т. е. невозможно описать состояние каждого валентного электрона в молекуле волновой функцией, свойственной исключительно этому состоянию и отличной от волновых функций для других валентных электронов. Валентные электроны молекулы находятся не в  $s$ - или  $p$ -состояниях, а в смешанном  $s-p$ -состоянии, которое описывается волновой функцией, представляющей собой линейную комбинацию функций, отвечающих  $s$ - и  $p$ -состояниям. Такое смешанное состояние называется *гибридным*.

7° В случае простой химической связи между атомами, называемой также *сигма* ( $\sigma$ )-*связью*, электронная плотность валентных электронов распределена симметрично вокруг линии, соединяющей ядра атомов в молекуле. Сигма-связь может осуществляться как  $s$ -, так и  $p$ -электронами атомов. Она имеет место во всех молекулах с насыщенными валентностями. Вследствие симметрии сигма-связи возможно вращение одной части молекулы относительно другой с осью вращения, совпадающей с осью симметрии связи. В непредельных и ароматических соединениях с ненасыщенными валентностями имеют место *пи* ( $\pi$ )-*связи*, образуемые  $p$ -электронами и не обладающие осевой симметрией.

В результате взаимного перекрытия электронных облаков двух  $\pi$ -электронов по обе стороны от линии, соединяющей ядра, образуются две «перемычки», сообщающие  $\pi$ -связи жесткость. Двойная связь (например, связь атомов углерода в молекуле этилена  $\text{H}_2\text{C} = \text{CH}_2$ ) состоит из одной  $\sigma$ - и одной  $\pi$ -связи (рис. VI.3.4). Электронное облако  $\pi$ -связи имеет две плоскости симметрии, проходящие через линию, соединяющую ядра. В силу асимметрии электронной плотности при этом виде связей вращение частей молекулы друг относительно друга невозможно. Это проявляется, например, в *цис-транс-изомерии*, т. е. в существовании веществ одинакового состава, но различной геометрической структуры, связанной с различным относительным расположением частей молекулы. Это приводит к различию физико-химических свойств *изомеров*.

Свойства симметрии электронных плотностей, соответствующих электронам, осуществляющим  $\pi$ -связи, определяют *направленность валентностей*, которая лежит в основе *стереохимии* — учения о пространственном

строении химических соединений. Установлено, что по своей геометрической форме молекулы различаются: прямолинейные и плоские, треугольные и пирамидальные, молекулы тетраэдрической формы, зигзагообразные,

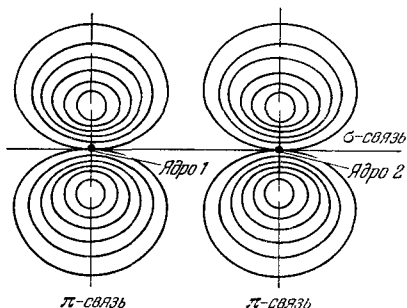


Рис. VI 3.4.

цепочечные, молекулы кольчатой формы и др. Пространственное строение молекул, обусловленное направленностью валентностей, выявляется в случае молекул с числом атомов, большим двух. Например, молекула воды имеет форму равнобедренного треугольника с углом Н—О—Н, равным 105°.

8° Атомные молекулы в ряде случаев образованы одинаковыми атомами. Поэтому связь атомов в таких молекулах называется также *гомеополарной* (от греческого слова «гомео» — «одинаковый») или *ковалентной*. Гомеополлярными являются молекулы Н<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, молекулы гидридов, например LiH, PdH и т. д., боридов металлов и т. д., образованные из атомов элементов первых трех групп периодической системы.

### 3. Электронные спектры молекул

1° В соответствии с возможными типами движений в молекуле (стр. 232) волновая функция молекулы может быть приближенно представлена в виде произведения трех волновых функций, отвечающих электронным движениям, колебаниям и вращениям молекулы, при условии

взаимной независимости этих движений:

$$\Psi = \psi_a \psi_R \psi_B.$$

При подстановке  $\Psi$  в соответствующее уравнение Шредингера оно может распасться на три уравнения, решение каждого из которых дает энергетический спектр соответствующего движения:  $E_a$ ,  $E_R$ ,  $E_B$ . Полная энергия молекулы приближенно равна

$$E = E_a + E_R + E_B.$$

По порядку величины  $E_a \gg E_R \gg E_B$  (см. также стр. 233).

2° *Электронные термы молекул* не отличаются по своему происхождению от электронных термов изолированных атомов (стр. 747). Число электронных термов значительно превышает число этих термов в атомах. Любой атом в молекуле находится в электрическом поле остальных ее атомов (*внутримолекулярное электрическое поле*). Оно вызывает расщепление электронных уровней атомов в молекуле, аналогичное тому, которое происходит в атомах, находящихся в электрическом поле. Электронные уровни молекул образованы из электронных уровней ее атомов, расщепленных на многочисленные подуровни в результате эффекта Штарка (стр. 768) во внутримолекулярном поле.

3° Энергетические электронные уровни молекулы определяются ее электронной конфигурацией, т. е. совокупностью квантовых чисел, соответствующих состояниям всех электронов молекулы. В основу систематики этих уровней и спектров молекул кладется *векторная модель молекулы*, являющаяся обобщением векторной модели атома (стр. 758).

4° В подавляющем большинстве случаев основой систематики электронных уровней двухатомных и линейных многоатомных молекул является *орбитальное квантовое число молекулы*:

$$A = \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

где суммирование производится по всем электронам молекулы. Число  $A$  определяет значение проекции полного (суммарного) орбитального момента молекулы на какое-либо направление (например, на ось молекулы). Величина  $\lambda_i$  определяет проекцию орбитального момента  $i$ -го электрона на ось молекулы.

Термы, соответствующие  $A = 0, 1, 2, 3, \dots$ , обозначаются  $\Sigma, \Pi, \Delta$  и т. д. В молекулах имеет место слабая связь (стр. 758), так что вектор орбитального момента количества движения молекулы  $\mathbf{L}$  представляется в виде

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^m \mathbf{L}_k,$$

где  $\mathbf{L}_k$  относятся к отдельным атомам молекулы, число которых равно  $m$ .

5° Аналогично вводится *спиновое квантовое число молекулы*, определяющее проекцию  $\Sigma$  ее полного спинового момента  $\mathbf{S}$  на некоторое направление (например, на ось молекулы):

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^m \mathbf{S}_k,$$

причем

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N s_i.$$

Суммирование по  $N$  и  $m$  проводится, как указано в п. 4°. Вводится также *внутреннее квантовое число молекулы*:

$$\Omega = A \pm \Sigma.$$

Систематика электронных термов молекулы по числам  $\Omega, A, \Sigma$  является обобщением систематики электронных термов атома по числам  $J, L, S$ . Для обозначения молекулярного терма применяется символ  $^{2\Sigma+1}A_{\Omega}$ . При  $A = 0$  (для  $\Sigma$ -термов) спин не имеет ориентации относительно оси молекулы и квантовые числа  $\Sigma$  и  $\Omega$  терпят смысл.

6° Векторная модель молекулы принимает во внимание также вращение молекулы, в результате которого возникает внутримолекулярное магнитное поле. При систематике молекулярных термов учитывается, что электрическое поле молекулы, обуславливающее расщепление соответствующих атомных термов, не всегда настолько сильно, чтобы нарушить связь  $\mathbf{L}_i$  и  $\mathbf{S}_i$  в отдельных атомах. Это обобщение систематики молекулярных термов приводит к трем типам *гундовских термов* двухатомной молекулы.

1-й тип. Взаимодействие спиновых моментов атомов в молекуле ( $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_k$ ) и взаимодействие различных  $\mathbf{L}_i$  с полем ( $\mathbf{L}_i, \mathcal{E}$ ) велики по сравнению с взаимодействиями ( $\mathbf{L}_i, \mathbf{S}_i$ ),

где  $\mathcal{E}$  — напряженность электрического внутримолекулярного поля, которое велико. Комбинации векторов

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{L} + \mathbf{\Sigma}$$

соответствует систематика молекулярных термов, указанная в п. 4° и 5°. Вектор  $\mathbf{\Omega}$  складывается с вектором момента количества движения ядер  $\mathbf{Y}$  (вращение молекулы без учета ядерных спинов), давая суммарный вектор

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{Y}.$$

Отвечающее вектору  $\mathbf{J}$  квантовое число  $J$  принимает целые значения, когда  $\Omega$  и  $Y$  целые.

2-й тип. Взаимодействие ( $\mathbf{L}_i, \mathbf{Y}$ ) велико по сравнению с ( $\mathbf{L}_i, \mathbf{S}_i$ ), а также ( $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_k$ ). Квантовое число  $\Sigma$ , а с ним  $\Omega$  утрачивают смысл. Вместо них систематику ведут по числу  $K$ , соответствующему вектору

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} + \mathbf{Y}.$$

Этот вектор вместе с вектором спинов  $\mathbf{S}$  дает вектор полного момента молекулы

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} + \mathbf{S}.$$

При достаточно больших  $K$  вводят квантовое число  $\mathcal{S} = \pm S, \pm(S-1), \dots$ , соответствующее проекции спина атомов на ось вращения молекулы. При усилении вращения ядер (возрастание  $\mathbf{K}$ ) тип 2 переходит в тип 1.

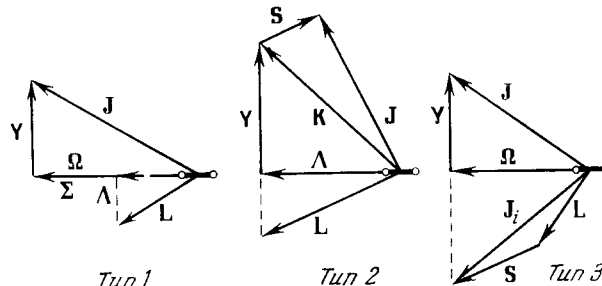


Рис. VI.3.5.

3-й тип. Спин-орбитальное взаимодействие для отдельных атомов ( $\mathbf{L}_i, \mathbf{S}_i$ ) велико по сравнению с остальными взаимодействиями. Этот случай имеет место в слабом

электрическом поле и соответствует случаю сильной связи в атоме (стр. 759). Получают смысл вектор  $\mathbf{J}$ , атомного полного момента и число  $\Omega$ , определяющее проекцию  $\mathbf{J}_z$  на ось молекулы, числа же  $A$  и  $\Sigma$  перестают быть применимыми. Комбинация векторов  $\mathbf{\Omega}$  и  $\mathbf{Y}$  дает полный вектор

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{Y}.$$

Векторные диаграммы, соответствующие трем типам гундовских термов молекулы, приведены на рис. VI.3.5.

7° Электронные термы, соответствующие данной паре начального и конечного уровней перехода (их число определяется числом возможных комбинаций  $L_i$  для отдельных атомов, дающих данное суммарное число  $A$ ), называются *положительными*, если соответствующая им волновая функция симметрична ( $\psi_+$ ), и *отрицательными* в случае антисимметричной функции ( $\psi_-$ ). В соответствии с величиной суммы орбитальных квантовых чисел  $\sum l_i$  для каждого из атомных термов, из которых возникают молекулярные термы, последние называются *четными* (обозначаются символом  $\{L\}_g$ ) при  $\sum l_i = 2n$  и *нечетными* (обозначаются символом  $\{L\}_u$ ) при  $\sum l_i = 2n + 1$ , где  $n$  — целое число. Расщепление термов на положительные и отрицательные соответствует двукратному вырождению соответствующих уровней. При наличии вращения молекулы внутримолекулярное магнитное поле снимает это вырождение и общее число термов с  $A > 0$  удваивается (так называемое *A-раздвоение*). Вырождение также снимается в молекулах, образованных из различных изотопов одних и тех же атомов, например в молекулах HD, O<sup>16</sup>O<sup>18</sup>, Cl<sup>35</sup>Cl<sup>37</sup> и т. д. В случае электронных молекулярных термов, происходящих из одних и тех же атомных термов одинаковых атомов, A-раздвоения числа термов не происходит.

8° Для электронных спектров молекул существуют правила отбора, аналогичные правилам для атомных спектров (стр. 750):

$$\Delta A = 0, \mp 1;$$

в соответствии с этими правилами допустимы лишь комбинации термов  $\Sigma \leftrightarrow \Sigma$ ,  $\Pi \leftrightarrow \Pi, \dots$ , а также  $\Sigma \leftrightarrow \Pi$ ,  $\Pi \leftrightarrow A, \dots$ ;

$$\Delta \Sigma = 0,$$

т. е. допускаются лишь комбинации термов с одинаковыми полными спиновыми числами, а также

$$\Delta \Omega = 0, \pm 1.$$

Кроме указанных существует правило интеркомбинационного запрета (стр. 760):

$$\Delta S = 0,$$

согласно которому запрещены комбинации между термами различной мультиплетности (этот запрет строго выполняется только для молекул с малым суммарным зарядом ядер), а также правила отбора, связанные с симметрией молекулярных термов, согласно которым возможны только комбинации положительных термов с отрицательными и четных с нечетными.

#### 4. Колебательные спектры молекул

1° При смещении из равновесных положений атомов в молекуле могут возникать их колебания около положений равновесия (*внутримолекулярные колебания*). Колебания атомов в молекуле могут быть рассмотрены в рамках аналитической механики (стр. 121). В квантовой теории внутримолекулярные колебания рассматриваются как причина возникновения колебательных спектров молекул. Колеблющиеся атомы в молекуле рассматриваются во многих случаях как ангармонические осцилляторы (стр. 113).

2° В простейшем случае двухатомной молекулы ее потенциальную энергию записывают с помощью *потенциала Леннарда — Джонса*:

$$U(r) = \left( \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^{12}} \right),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, или *потенциала Морзе*:

$$U(\varrho) = D(1 - e^{-a\varrho})^2,$$

где  $\varrho = \frac{r-r_e}{r_e}$ ,  $a$  — постоянная,  $r_e$  — равновесное расстояние между атомами, соответствующее минимуму  $U(r)$ ;  $\varrho$  — относительное смещение атомов из их равновесных положений. Величина  $D$  имеет смысл энергии диссоциации молекулы на атомы (стр. 781),  $D = U(\infty) - U(0)$ . Уравнение Шредингера для колебаний молекулы:

$$\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{8\pi^2 I_e}{h^2} [E_K - U(\varrho)]\psi = 0,$$

где  $I_e$  — момент инерции молекулы в равновесном состоянии (стр. 793),  $E_K$  — колебательная энергия молекулы.

3° При малых колебаниях молекулы  $U(\rho) \approx Da^2 \rho^2$  и уравнение Шредингера сводится к уравнению для гармонического осциллятора (стр. 721). Колебательный энергетический спектр:

$$E_v = h\nu \left( v + \frac{1}{2} \right),$$

где

$$\nu = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{2D}{I_e}};$$

$\nu$  — частота собственных колебаний осциллятора, а  $v = 0, 1, 2, 3, \dots$  называется *колебательным квантовым числом*, для которого имеет место правило отбора

$$\Delta v = \pm 1.$$

Величина

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu$$

называется *нулевой колебательной энергией* (стр. 722). Колебательные энергетические уровни рассматриваемых молекул находятся на одинаковом расстоянии друг от друга.

4° В случае ангармонических колебаний двухатомной молекулы ее энергетический колебательный спектр

$$E_v = h\nu \left( v + \frac{1}{2} \right) - h x \nu \left( v + \frac{1}{2} \right)^2,$$

где

$$x = \frac{h\nu}{4I_e} \ll 1$$

называется *постоянной ангармоничности*. Колебательный энергетический спектр двухатомной молекулы показан на рис. VI.3.6. Расстояние между двумя соседними энергетическими уровнями

$$\Delta E = h\nu - 2(v+1)xh\nu$$

убывает с ростом  $v$ . В этом случае правил отбора для

$v$  не существует. Интенсивность линий спектра быстро убывает с ростом  $\Delta v$ . Энергетические уровни сходятся к границе  $E = 0$ , для которой

$$v_{\text{макс}} = \frac{1}{2x} - 1$$

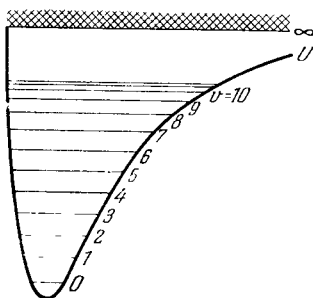


Рис. VI 3 6.

и

$$E_{\text{макс}} = \frac{h\nu}{4x} (1 - x^2) = D(1 - x^2).$$

Ввиду того, что  $x^2 \ll 1$ ,  $E_{\text{макс}}$  переходит в выражение

$$E_{\text{макс}} = \frac{h\nu}{4x} = D,$$

т. е. максимальная колебательная энергия молекулы равна ее энергии диссоциации  $D$ .

5° Если различные пространственные положения атомов в молекуле разделены потенциальными барьерами, то внутреннее вращение молекулы (стр. 793) полностью заторможено и возможно лишь ее крутильные колебания (стр. 116); энергетический спектр для малых амплитуд колебаний симметричных молекул ( $C_2H_4$ ,  $C_2H_6$  и др.) представляется формулой (п. 3°), в которой

$$\nu = \frac{n}{\pi} \sqrt{U_0 B}.$$

Здесь  $U_0$  — высота потенциального барьера, разделяющего равновесные конфигурации атомов в молекуле,  $n$  — число одинаковых минимумов  $U$ ,  $B$  — вращательная постоянная (стр. 234).

## 5. Вращательные спектры молекул

1° Возможны два основных вида вращения молекул: вращение молекулы как целого вокруг некоторого направления или точки и вращение одних частей молекулы относительно других — *внутреннее вращение*. Существование внутреннего вращения следует из поворотной изомерии и ряда других физико-химических свойств молекул с  $\sigma$ -связями (стр. 785).

2° Характер вращения молекулы как целого определяется пространственным расположением атомов в молекуле, т. е. формой молекулы, которая может быть охарактеризована подобно твердому телу тремя главными моментами инерции (стр. 73), отвечающими трем главным осям молекулы (стр. 73):

$$I_k = \sum_k m_k r_k^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $m_k$  — масса  $k$ -го атома в молекуле, а  $r_k$  — его расстояние от соответствующей главной оси. Главные оси симметричных молекул совпадают с их осями симметрии, а плоскость симметрии всегда перпендикулярна к одной

из главных осей. Если все  $I_i$  молекулы равны друг другу, то она называется *сферическим волчком*; если равны друг другу два момента инерции относительно главных осей, перпендикулярных оси молекулы, то молекула называется *симметричным волчком*; если все три  $I_i$  различны, то молекула называется *асимметричным волчком*. К первому типу относятся молекулы  $P_4$ ,  $CH_4$ ,  $CCl_4$  и т. п., ко второму типу —  $NH_3$ ,  $PCl_3$ ,  $BCl_3$  и т. п., к третьему —  $H_2O$  и т. п.

3° Внутреннее вращение молекулы обычно затруднено наличием потенциального барьера между различными положениями равновесия при вращении, соответствующими определенной симметрии молекулы. В тех случаях, когда это вращение практически невозможно, допустимо лишь кручение молекулы, сопровождаемое крутильными колебаниями (стр. 116). Если энергия крутильных колебаний достаточно велика, то молекула может, преодолев потенциальный барьер, перейти в соседнее равновесное состояние.

4° Энергетический спектр вращения двухатомной молекулы как целого при предположении, что расстояния между ядрами ее атомов неизменны и равны равновесным  $r_e$ , находится путем решения уравнения Шредингера для жесткого ротатора (стр. 724):

$$E_B = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I_e} J(J+1) = hBJ(J+1),$$

где  $I_e = Mr_e^2$  — момент инерции молекулы,  $B$  — *вращательная постоянная молекулы* (стр. 234),  $J$  — *вращательное квантовое число*. Такой же вид имеет энергетический спектр вращения молекул типа сферического волчка. Проекция вектора полного момента  $J$  на заданное направление вращения молекулы определяется квантовым числом

$$M_J = \pm J, \pm(J-1), \dots, 0,$$

принимаям  $2J + 1$  значение. Если  $J$  проектируется на направление магнитного поля, то  $M_J$  имеет смысл магнитного квантового числа (стр. 725). Число  $J$  подчиняется правилу отбора:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad \text{при } A \neq 0,$$

$$\Delta J = \pm 1 \quad \text{при } A = 0.$$

Учет растяжения молекулы (нежесткости ротатора) при ее вращении видоизменяет энергетический вращательный спектр молекулы:

$$E_B = hBJ(J+1) + hD_e J^2(J+1)^2,$$

где  $D_e = \text{const} \ll B$  — постоянная, характеризующая нежесткость ротатора.

5° При вращении молекулы возникает внутримолекулярное магнитное поле, в котором вырожденные термы, отвечающие значениям  $\pm A$ , расщепляются на два — положительный и отрицательный. Снятие вырождения имеет место только при  $A > 0$  (при  $A = 0$  вырождения нет) и называется  $A$ -раздвоением (стр. 790).

6° Волновые функции, характеризующие вращательные состояния, соответствующие данному электронному состоянию в молекуле, представляются в виде  $\psi = \psi_a \psi_B$ , где  $\psi_a$  — электронная волновая функция, а  $\psi_B$  — вращательная волновая функция соответствующего вида. Каждая из функций  $\psi_a$  и  $\psi_B$  может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, изменяется ли знак функции  $\psi_a$  при перемене знака координат всех электронов и ядер и знак функции  $\psi_B$  при перемене знака координат одних ядер. Функции  $\psi_B$ , отвечающие четным значениям  $J$ , являются положительными, а нечетным — отрицательными. В случае положительной электронной функции  $\psi_{a+}$  все вращательные термы с четными  $J$  положительные:  $\psi_+ = \psi_{a+}\psi_0, \psi_{a+}\psi_2, \psi_{a+}\psi_4, \dots, \psi_{a+}\psi_{2n}$ . Термы, отвечающие нечетным  $J$ , являются отрицательными:  $\psi_- = \psi_{a+}\psi_1, \psi_{a+}\psi_3, \dots, \psi_{a+}\psi_{2n+1}$ . Для отрицательной электронной функции  $\psi_{a-}$  четным  $J$  соответствуют отрицательные вращательные термы:  $\psi_- = \psi_{a-}\psi_0, \psi_{a-}\psi_2, \dots, \psi_{a-}\psi_{2n}$ , а нечетным  $J$  — положительные вращательные термы  $\psi_+ = \psi_{a-}\psi_1, \psi_{a-}\psi_3, \psi_{a-}\psi_5, \dots, \psi_{a-}\psi_{2n+1}$ . При заданной  $\psi_B$  положительность или отрицательность терма зависит от симметрии  $\psi_a$ . Для молекул, состоящих из одинаковых атомов, различают *симметричные (s) термы*, к которым относятся все положительные и четные, а также отрицательные и нечетные термы, и *антисимметричные (a) термы*, к которым относятся все отрицательные и четные, а также положительные и нечетные термы. Комбинироваться могут только положительные термы с отрицательными (стр. 791), а также только симметричные или только антисимметричные термы. Ввиду невозможности комбинации вращательных термов в молекулах с одинаковыми ядрами вращательные спектры у одноизотопных молекул вида  $X_2$  отсутствуют.

7° В силу запрета комбинаций симметричных термов с антисимметричными вращательные термы молекул с одинаковыми ядрами разбиваются на две взаимно некомбинирующиеся группы. Учет ядерного спина и свойств симметрии полной волновой функции молекулы (стр. 783) приводит к образованию двух систем термов, одной из которых соответствуют четные, а другой — нечетные значения вращательного числа  $J$ . В соответствии с тем, что величина  $2J+1$  определяет статистический вес данного вращательного состояния (стр. 742), а значит, и интенсивность спектральных линий (стр. 744), линии, относящиеся к каждой из систем термов, имеют разную интенсивность (*чередование интенсивностей*). Термы с большим значением  $2J+1$  называются *ортотермами*, термы с меньшим  $2J+1$  — *паратермами*. Например, в случае молекулы  $H_2$  паратермы с  $J=0$  симметричны, а ортотермы с  $J=1$  антисимметричны. Отношение интенсивностей спектральных линий ортоводорода и параводорода равно

$$\frac{2J_{\text{орто}}+1}{2J_{\text{пара}}+1} = 3:1.$$

8° В общем случае распределение интенсивности между отдельными линиями во вращательном спектре связано с распределением молекул по вращательным состояниям, характеризуемым числами  $J$ . Если это распределение является бальмановским (стр. 224), то

$$N(J) = N \frac{(2J+1)e^{-\frac{hBJ(J+1)}{kT}}}{\sum_{J=0}^{\infty} (2J+1)e^{-\frac{hBJ(J+1)}{kT}}},$$

где  $N(J)$  — число молекул, находящихся на  $J$ -м вращательном уровне,  $N$  — общее число молекул.

9° Энергетический спектр молекулы типа симметричного волчка:

$$E_B = hBJ(J+1) + h(A-B)K^2 + h \frac{A_1 A_2}{4} (k_1 - k_2 \frac{A}{A_1})^2,$$

где

$$A = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}}, \quad B = \frac{h}{4\pi I_{\perp}}, \quad A_1 = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}^{(1)}}, \quad A_2 = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}^{(2)}},$$

$I_{\parallel}$  — момент инерции молекулы относительно ее оси,  $I_{\parallel}^{(1)}$

и  $I_{\parallel}^{(2)}$  — моменты инерции вращающихся друг относительно друга частей молекулы по отношению к ее оси,  $I_{\perp}$  — момент инерции относительно осей, перпендикулярных к оси молекулы,  $J$ ,  $K$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — вращательные квантовые числа, принимающие значения:

$$J = K, \quad K+1, \quad K+2, \dots; \quad K = 0, 1, 2, \dots;$$

$$k_2 = \pm K; \quad k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Первые два члена формулы относятся к вращению молекулы как целого, третий — к внутреннему вращению молекулы (см. также стр. 794).

## 6. Электронно-колебательные спектры молекул

1° *Электронно-колебательные спектры молекул* связаны с электронными переходами в атомах молекулы, колеблющихся около своих равновесных положений. Наложение колебательного спектра на электронный проявляется в том, что каждой линии электронного перехода соответствует ряд колебательных линий, образующих *полосу*.

2° Для нулевой линии (см. п. 3°) полосы колебательной структуры электронного спектра двухатомной молекулы в пренебрежении вращательными частотами справедлива *формула Деландра*:

$$\nu_{\text{эл}} = \nu + \nu' \left( \nu' + \frac{1}{2} \right) - \nu \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2 - \nu \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + \nu x \left( \nu + \frac{1}{2} \right)^2,$$

где штрих относится к верхнему уровню перехода, а величины  $\nu$  и  $x$  даются формулами стр. 792.

3° Полосы, выражаемые формулой Деландра, разбиваются на поперечные и продольные серии полос. Частоты спектра, соответствующие  $\nu = \text{const}$  (т. е. фиксированному нижнему уровню перехода), образуют *поперечную серию Деландра*; они характерны для спектров поглощения молекул. Частоты, соответствующие  $\nu' = \text{const}$  (фиксированному верхнему уровню перехода), образуют *продольную серию Деландра*, характерную для спектров испускания молекул. Характерной константой каждой серии полос является *нулевая линия* этой полосы, соответствующая переходу  $\nu = 0 \leftrightarrow \nu' = 0$ , называемая также *нулевой полосой*. Частота нулевой линии нулевой полосы не совпадает с частотой  $\nu_0$  ввиду наличия нулевой колебательной энергии молекулы (стр. 792).



4° В электронно-колебательных спектрах полосы, соответствующие различным значениям  $\Delta v = v' - v$ , имеют сравнимую интенсивность в большом диапазоне  $\Delta v$ . Это связано с тем, что вероятности переходов в электронных спектрах определяются изменением электронной конфигурации молекулы — так называемого *переходного момента молекулы*. В случае незапрещенного электронного перехода возможны любые значения  $\Delta v$ . Электронные переходы в молекулах совершаются настолько быстро, что за время переходов не успевают существенно измениться ни расстояния между ядрами в молекуле, ни их импульсы. Электронные переходы происходят при практически постоянном расстоянии между ядрами. Такой стационарности внешних условий в течение перехода соответствует большая его вероятность, а значит, и интенсивность соответствующих спектральных линий (*принцип Франка — Кондона*).

5° Различие частот собственных колебаний и постоянных ангармоничности (стр. 792) молекул изотопов является причиной *колебательного изотопического эффекта* в электронно-колебательных спектрах молекул. Различные моменты инерции изотопных молекул приводит к *вращательному изотопическому эффекту*. Для нулевой полосы электронно-колебательного спектра изотопическое колебательное смещение линий равно

$$\Delta\nu_0 = (y-1) \left[ \nu' \left( v' + \frac{1}{2} \right) - \nu \left( v + \frac{1}{2} \right) \right] - (y^2-1) \left[ \nu' x' \left( v' + \frac{1}{2} \right)^2 - \nu x \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

где  $y = \sqrt{\mu'/\mu}$ ,  $\mu'$ ,  $\mu$  — приведенные массы молекул двух изотопных составов,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $m_1$  и  $m_2$  — массы каждого из атомов в молекуле (в двухатомной молекуле),  $x$  имеет значение, указанное на стр. 792. В выражение для  $\nu$  входит момент инерции  $I = \mu R^2$ , где  $R$  — приведенный радиус молекулы.

## 7. Вращательно-колебательные спектры молекул

1° *Вращательно-колебательные спектры молекул* образуются при изменении колебательного состояния, которое практически всегда сопровождается изменением их вращательного состояния. Частоты вращательного спектра по порядку величины в сотни и тысячи раз меньше частот

колебательного спектра. В результате наложения малых вращательных частот на колебательные, линии колебательного спектра превращаются в *полосы*, представляющие собой группы вращательных линий. В результате возникает *линейчато-полосатая структура* вращательно-колебательного спектра. Поскольку  $E_0 \gg E_v$ , то на спектр, соответствующий электронным переходам, вращение молекулы практически не влияет.

2° Частота  $\nu_{\text{вк}}$  вращательно-колебательного спектра в пренебрежении взаимодействием колебаний с вращением и с учетом неизменности электронной энергии молекулы:

$$\nu_{\text{вк}} = \nu_v + \nu_K = \frac{E'_v - E_v}{h} + \frac{E'_K - E_K}{h},$$

где штрихами обозначены верхние энергетические состояния в каждом из переходов.

3° При наложении вращательно-колебательного спектра на электронный частоты  $\nu_{\text{вк}0}$  спектра двухатомной молекулы с учетом ангармоничности осциллятора (стр. 792) и жесткости ротатора (стр. 795) равны

$$\nu_{\text{вк}0} = \nu_0 + \left[ \nu \left( v + \frac{1}{2} \right) - \nu x \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + [B_v J(J+1) + D_v J^2(J+1)^2],$$

где

$$B_v = B - \alpha_e \left( v + \frac{1}{2} \right) + \gamma_e \left( v + \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$D_v = D_e + \beta_e \left( v + \frac{1}{2} \right),$$

$\alpha_e$ ,  $\beta_e$ ,  $\gamma_e$  — эмпирические константы, соответствующие равновесному состоянию молекулы (остальные обозначения см. на стр. 792 и 795). При этом  $x \ll 1$ ,  $D_v \ll B_v$ , так что влияние вторых членов в квадратных скобках существенно лишь при очень больших значениях  $v$  и  $J$ .

4° *Колебательная (полосатая) структура* вращательно-колебательного спектра двухатомных молекул характеризуется частотами

$$\nu_{\text{вк}}^K = \nu(1-x) \left( v' - v \right) - \nu x (v'^2 - v^2),$$

где  $v' - v = \Delta v$  — разность колебательных квантовых чисел верхнего и нижнего уровней перехода. Структура

имеет вид серий линий, номер серии определяется значением  $\nu$  для начального уровня. Линии каждой серии сходятся к граничной частоте  $\nu_{\text{гр}}(\nu_{\text{макс}})$ , соответствующей диссоциации молекулы (стр. 781). Интенсивность линий быстро уменьшается с ростом  $\Delta\nu$ .

5° *Вращательная структура* вращательно-колебательного спектра характеризуется частотами

$$\nu_{\text{вк}}^{(B)} = \nu_{\text{вк}}^{(R)} + B_0[J'(J'+1) - J(J+1)],$$

которые получаются из выражения вращательной энергии

$$E_{\text{в}} = h[B_0J(J+1) - D_0J^2(J+1)^2]$$

в предположении жесткости молекулы ( $D_0 = 0$ ) и при замене  $B_0 = B_0$ . В соответствии с правилом отбора  $\Delta J = 0, \pm 1$  (стр. 794) для молекул, нормальное состояние которых есть  $\Sigma$ -состояние, получают следующие группы линий:

$$J' = J+1, \quad \nu_{+1} = \nu_{\text{к}} + 2B_0(J+1) \quad - \text{положительная},$$

или *R-ветвь* полосы;

$$J' = J-1, \quad \nu_{-1} = \nu_{\text{к}} - 2B_0J \quad - \text{отрицательная},$$

или *P-ветвь* полосы.

Линии этой ветви начинаются с  $J = 1$ . *R*- и *P*-ветви данной полосы образуют ряд равноотстоящих друг от друга линий с выпадающей линией  $\nu_{\text{к}}$ , называемой нулевой линией полосы. Расстояние между соседними линиями составляет  $\Delta\nu = 2B_0$ .

## 8. Комбинационные спектры молекул

1° *Явление комбинационного рассеяния* состоит в том, что в спектре света, рассеянного каким-либо жидким или твердым телом, наблюдаются наряду с частотами излучения источника света также смещенные частоты. Линии спектра, которым соответствуют  $\nu_c = \nu_0 - \nu$ , называются *стоксовыми*, линии с  $\nu_a = \nu_0 + \nu$  — *антискотковскими*, где  $\nu_0$  — первоначальная частота света. Линии  $\nu_c, \nu_a$  образуют *комбинационный спектр молекул*.

2° Простейшее объяснение возникновения комбинационного рассеяния сводится к следующим двум схемам

взаимодействия кванта с рассеивающей молекулой:

$$h\nu_0 + E(1) \rightarrow h\nu_c + E(2),$$

$$h\nu_0 + E(2) \rightarrow h\nu_a + E(1),$$

где  $E(1)$  и  $E(2)$  — энергии колебательных состояний молекулы, причем  $E(1) < E(2)$ . В первом случае за счет энергии фотона  $h\nu_0$  молекула переходит в более высокое колебательное энергетическое состояние и возникает рассеянный фотон с меньшей частотой  $\nu_c$ . Во втором случае взаимодействие кванта с возбужденной молекулой приводит к появлению рассеянного фотона с большей частотой  $\nu_a$ , равной

$$\nu_a = \nu_0 + \frac{E(2) - E(1)}{h},$$

и переходу молекулы в более низкое колебательное состояние.

3° Спектры комбинационного рассеяния наблюдаются колебательные, вращательные, а также вращательно-колебательные. Кроме того, возможен спектр комбинационного рассеяния, в котором разность частот представляет собой энергию электронного возбуждения молекулы. В спектрах комбинационного рассеяния, в отличие от обычных спектров, правила отбора могут не соблюдаться и заменяются новыми. Так, для электронных спектров иногда наблюдаются комбинационные линии, нарушающие запрет  $\Delta\Sigma = 0$ , для вращательных спектров возникает правило отбора  $\Delta J = 0, \pm 2$ .

## 9. Сплошные и диффузные спектры молекул

1° *Сплошные (истинно непрерывные) спектры молекул* характеризуются тем, что их нельзя разделить на отдельные линии или полосы (стр. 797) при высокой разрешающей способности спектрального прибора. Сплошные спектры молекул связаны с переходом молекулы из дискретного состояния с  $E < 0$  в непрерывное состояние с  $E > 0$ . Этому переходу соответствует как ионизация молекулы, так и ее диссоциация на ионы или нейтральные атомы. Диссоциация молекулы может быть вызвана увеличением колебательной энергии молекулы до таких пределов, при которых колебательным переходам в молекуле будут соответствовать квантовые числа

$v \geq v_{\text{макс}}$  (стр. 792). В результате таких переходов молекула, перейдя в неустойчивое возбужденное состояние, уже не возвращается в исходное состояние, а диссоциирует. Диссоциация молекулы может быть также вызвана соударением ее с достаточно быстрой частицей (например, нейтроном), а также поглощением молекулой кванта излучения, обладающего достаточной энергией (*фотодиссоциация*).

2° Возникновение сплошного спектра может быть также вызвано нагреванием вещества. В результате нагревания молекулы приобретают большие скорости движения. Возникающее при этом доплеровское уширение частот спектральных линий (стр. 681) приводит к перекрыванию линий и даже слиянию отдельных линий в полосы. Другой причиной превращения дискретного спектра молекулы в непрерывный является ударное уширение линий (стр. 682), проявляющееся преимущественно во вращательных спектрах и вызываемое существенным уменьшением времени жизни молекулы в возбужденном состоянии и соответственным увеличением ширины линии. В результате ударного уширения вращательные линии в полосе могут перекрываться настолько, что исчезнет ее вращательная структура, а при еще более высоких давлениях и температурах вещества ударное уширение может привести и к перекрыванию отдельных полос.

3° *Диффузные спектры молекул* характеризуются размытостью полос, вызванной сильным уширением вращательных линий даже при обычных давлениях и температурах. Соответствующие этому уширению времена жизни молекулы в возбужденном состоянии на один-два порядка меньше периода вращения молекулы, в результате чего исчезает квантованность вращения и связанная с ней дискретная вращательная структура полос спектра. Это явление вызывается так называемой *преддиссоциацией* молекулы. Отличие ее от диссоциации состоит в том, что последняя происходит непосредственно из дискретного устойчивого в неустойчивое состояние молекулы, характеризующееся частью потенциальной кривой (стр. 781), соответствующей отталкиванию атомов в молекуле, тогда как преддиссоциация возникает из возбужденного состояния молекулы. Преддиссоциация происходит в два этапа: сначала имеет место переход молекулы из нормального в возбужденное состояние, а затем происходит переход молекулы из возбужденного состояния не в нормальное, а в неустойчивое.

Вероятности перехода молекулы в нормальное состояние с испусканием кванта излучения и перехода преддиссоциацией в неустойчивое состояние определяют время жизни молекулы в возбужденном состоянии. При большой вероятности безызлучательного перехода время жизни молекулы в возбужденном состоянии оказывается малым и соответствующая ширина спектральных линий — большой.

## 10. Молекулярная спектроскопия

1° Изучение электронных спектров молекул дает сведения того же характера, что и изучение атомных спектров. Дополнительными являются сведения об электронных уровнях в молекуле, о распределении плотности электронов в молекулах и природе химических связей. Особый интерес для исследования структуры молекул представляет изучение колебательных и вращательных спектров молекул.

2° Колебательные и вращательные спектры молекул дают сведения о пространственном расположении атомов в молекулах, о возможных их равновесных конфигурациях, о распределении молекул по этим конфигурациям. Знание формы молекул позволяет понять природу валентных связей в них и тем самым выяснить реакционные способности молекул. Вращательные спектры обычно находятся в инфракрасной области, и обнаружение и исследование их требует специальной техники инфракрасной спектроскопии.

3° Благодаря простоте методов спектроскопии комбинационного рассеяния обладает рядом преимуществ перед инфракрасной спектроскопией. Из комбинационных спектров находятся частоты собственных колебаний молекул (по колебательным спектрам), моменты инерции и форма молекул (по вращательным спектрам), а также те структурные изменения, которые претерпевают молекулы при изменениях агрегатного состояния вещества.

4° Новая область молекулярной спектроскопии — *радиоспектроскопия* — основана на эффекте Зеемана (стр. 761) — расщеплении спектральных линий во внешнем магнитном поле. Радиоспектроскопия исследует, в отличие от оптической спектроскопии, не спектральные линии, обуславливаемые переходами с какого-либо уровня на подуровни другого уровня, а спектральные линии, вызванные пере-

ходами между самими этими подуровнями. Частоты этих спектральных линий (стр. 763) лежат обычно в области ультракоротких радиоволн (от десятков *Мгц*). Спектральная картина в радиоспектрах молекул оказывается во много раз проще, чем в оптических спектрах, что имеет большое значение для анализа сложных молекулярных спектров, которые подчас состоят в оптической области из многих тысяч линий. Это обстоятельство, наряду с высокой чувствительностью радиоспектроскопических методов, во много раз превышающей чувствительность оптических методов, обеспечивает радиоспектроскопии большие преимущества в области молекулярных спектров.

### 11. Ионизация атомов и молекул

1° Ионизация, т. е. отрыв электронов от атомов или молекул, вызывается многими причинами. *Термическая ионизация* вызвана увеличением энергии теплового движения атомов или молекул и происходит при нагревании вещества в результате соударений атомов или молекул с достаточной энергией. *Ионизация электронным или ионным ударом* обычно происходит в сильных электрических полях, в которых ионы или электроны приобретают достаточную для ионизации энергию, например при газовом разряде (стр. 390). К этому же виду относится ионизация, вызываемая корпускулярными излучениями (альфа-частицами, протонами, дейтронами и т. д.) при их прохождении в веществе. *Фотоионизация* вызывается поглощением атомами и молекулами квантов электромагнитного излучения с достаточной энергией.

2° Энергия ионизации атома зависит от величины заряда его ядра и от той оболочки, из которой выбивается электрон, возрастая приблизительно квадратично с увеличением атомного номера  $Z$  и уменьшаясь по мере увеличения номера оболочки  $n$ . Численно энергия ионизации равна энергии связи электрона с атомом на данном уровне (стр. 747).

3° При термической ионизации, наблюдающейся чаще всего в пламенах, в результате столкновения атомов или молекул кинетическая энергия их относительного движения превращается в работу ионизации:

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал ионизации (стр. 389). Степень ионизации  $\alpha$ , равная отношению парциального давления (стр. 152) газа ионов к сумме давлений газа ионов и газа нейтральных атомов, подсчитывается в условиях термодинамического равновесия в пламенах по формуле Саха для константы ионизационного равновесия  $K_p$  (стр. 201 и 202):

$$K_p = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} p = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-e\varphi/kT},$$

где  $p$  — давление газа,  $m$  — масса электрона,  $\varphi$  — потенциал ионизации,  $k$  — постоянная Больцмана (стр. 51),  $T$  — абсолютная температура. Формула Саха приближенная, так как не учитывает распределения электронов по различным состояниям в атомах газа, а также процессов возбуждения атомов без ионизации и безызлучательных переходов (стр. 779).

4° В случае молекул, наряду с ионизацией атомов, может иметь место также *диссоциативная ионизация*, т. е. распад молекулы с одновременной ионизацией продуктов диссоциации. Диссоциативная ионизация имеет место преимущественно в случае многоатомных молекул. Возникающие при этом ионы могут соединиться с нейтральными атомами или молекулами, приводя к образованию комплексных ионов. Степень ионизации при данной энергии ионизирующих частиц связана с распределением атомов и молекул по энергетическим состояниям.

5° Фотоионизация происходит при энергиях фотонов, равных или превышающих энергию ионизации:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \geq e\varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал ионизации,  $\nu$  — частота фотона Красная граница фотоионизации:

$$\nu_0 = \frac{e\varphi}{h}.$$

Фотоионизация жесткими (гамма, рентгеновскими) фотонами связана главным образом с отрывом от атомов электронов, входящих в глубокие электронные оболочки, фотоионизация оптическими фотонами — с отрывом от атома внешних, валентных электронов. Возможны также процессы *фотонейтрализации отрицательных ионов*, связанные с отрывом от них внешних, избыточных электронов.

ГЛАВА 4  
АТОМНОЕ ЯДРО <sup>1)</sup>

### 1. Состав и размеры атомных ядер

1° Все атомные ядра состоят из элементарных частиц (стр. 865), называемых *протонами* и *нейтронами*. Протоны имеют положительный заряд, равный по абсолютной величине заряду электрона, нейтроны электрически нейтральны. Протон и нейтрон считают двумя различными зарядовыми состояниями (стр. 868) одной и той же частицы, имеющей *нуклоном*.

2° Количество протонов в ядре называется *зарядом* данного ядра  $Z$ ; оно равно атомному номеру соответствующего химического элемента в периодической системе Д. И. Менделеева (стр. 770). К настоящему времени известны ядра с  $Z$  от 1 (водород) до  $Z = 104$  (курчатовий). Последний элемент открыт в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне летом 1964 г. Количество нейтронов в ядре обозначается  $N$ . Для всех ядер  $N \geq Z$  (за исключением  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^2_2\text{He}$  и других недавно открытых *нейтрондефицитных ядер*). Для легких ядер отношение  $N/Z \approx 1$ ; для ядер, отвечающих элементам в конце периодической системы,  $N/Z \approx 1,6$ .

3° Полное число нуклонов в ядре  $A = N + Z$  называется *массовым числом ядра*. Ядра, имеющие одно и то же  $Z$  при разных  $A$  (т. е. при разных  $N$ ), называются *изотопами*. Ядра, имеющие одно и то же  $A$  при разных  $Z$ , называются *изобарами*. Конкретное ядро с данными  $A$  и  $Z$  иногда называется *нуклидом*. Общий символ для обозначения ядра:  ${}_Z X^A$  или  $X^A_Z$ ,  $X$  — символ соответствующего данному  $Z$  химического элемента.

4° К настоящему времени известно около 300 устойчивых и свыше 1000 неустойчивых (радиоактивных) изотопов. Устойчивые изобары большей частью встречаются *парами*. Среди легких ядер устойчивые изобары не встречаются. Устойчивые изобарные пары, за исключением пар с  $A = 113$  и 123, имеют четные  $A$ ,  $Z$  и  $N$ , причем для членов пары  $Z$  отличаются на две единицы.

Известно 59 устойчивых изобарных пар и 5 изобарных *триад*.

### Изобарные пары

A	Пара	A	Пара	A	Пара
36	${}^{16}\text{S}$ ${}^{18}\text{Ar}$	104	${}^{44}\text{Ru}$ ${}^{46}\text{Pd}$	152	${}^{62}\text{Sm}$ ${}^{64}\text{Gd}$
40	${}^{18}\text{Ar}$ ${}^{20}\text{Ca}$	106	${}^{46}\text{Pd}$ ${}^{48}\text{Cd}$	154	${}^{62}\text{Sm}$ ${}^{64}\text{Gd}$
46	${}^{20}\text{Ca}$ ${}^{22}\text{Ti}$	108	${}^{46}\text{Pd}$ ${}^{48}\text{Cd}$	156	${}^{64}\text{Gd}$ ${}^{66}\text{Dy}$
48	${}^{20}\text{Ca}$ ${}^{22}\text{Ti}$	110	${}^{46}\text{Pd}$ ${}^{48}\text{Cd}$	158	${}^{64}\text{Gd}$ ${}^{66}\text{Dy}$
54	${}^{24}\text{Cr}$ ${}^{26}\text{Fe}$	112	${}^{48}\text{Cd}$ ${}^{50}\text{Sn}$	160	${}^{64}\text{Gd}$ ${}^{66}\text{Dy}$
58	${}^{26}\text{Fe}$ ${}^{28}\text{Ni}$	113	${}^{48}\text{Cd}$ ${}^{49}\text{In}$	162	${}^{66}\text{Dy}$ ${}^{68}\text{Er}$
64	${}^{28}\text{Ni}$ ${}^{30}\text{Zn}$	114	${}^{48}\text{Cd}$ ${}^{50}\text{Sn}$	164	${}^{66}\text{Dy}$ ${}^{68}\text{Er}$
70	${}^{30}\text{Zn}$ ${}^{32}\text{Ge}$	116	${}^{48}\text{Cd}$ ${}^{50}\text{Sn}$	168	${}^{68}\text{Er}$ ${}^{70}\text{Yb}$
74	${}^{32}\text{Ge}$ ${}^{34}\text{Se}$	120	${}^{50}\text{Sn}$ ${}^{52}\text{Te}$	170	${}^{68}\text{Er}$ ${}^{70}\text{Yb}$
76	${}^{32}\text{Ge}$ ${}^{34}\text{Se}$	122	${}^{50}\text{Sn}$ ${}^{52}\text{Te}$	174	${}^{70}\text{Yb}$ ${}^{72}\text{Hf}$
78	${}^{34}\text{Se}$ ${}^{36}\text{Kr}$	123	${}^{51}\text{Sb}$ ${}^{52}\text{Te}$	176	${}^{70}\text{Yb}$ ${}^{72}\text{Hf}$
80	${}^{34}\text{Se}$ ${}^{36}\text{Kr}$	126	${}^{52}\text{Te}$ ${}^{54}\text{Xe}$	180	${}^{72}\text{Hf}$ ${}^{74}\text{W}$
82	${}^{34}\text{Se}$ ${}^{36}\text{Kr}$	128	${}^{52}\text{Te}$ ${}^{54}\text{Xe}$	184	${}^{74}\text{W}$ ${}^{76}\text{Os}$
84	${}^{36}\text{Kr}$ ${}^{38}\text{Sr}$	132	${}^{54}\text{Xe}$ ${}^{56}\text{Ba}$	186	${}^{74}\text{W}$ ${}^{76}\text{Os}$
86	${}^{36}\text{Kr}$ ${}^{38}\text{Sr}$	134	${}^{54}\text{Xe}$ ${}^{56}\text{Ba}$	190	${}^{76}\text{Os}$ ${}^{78}\text{Pt}$
92	${}^{40}\text{Zr}$ ${}^{42}\text{Mo}$	138	${}^{56}\text{Ba}$ ${}^{58}\text{Ce}$	192	${}^{76}\text{Os}$ ${}^{78}\text{Pt}$
94	${}^{40}\text{Zr}$ ${}^{42}\text{Mo}$	142	${}^{58}\text{Ce}$ ${}^{60}\text{Nd}$	196	${}^{78}\text{Pt}$ ${}^{80}\text{Hg}$
98	${}^{42}\text{Mo}$ ${}^{44}\text{Ru}$	144	${}^{60}\text{Nd}$ ${}^{62}\text{Sm}$	198	${}^{78}\text{Pt}$ ${}^{80}\text{Hg}$
100	${}^{42}\text{Mo}$ ${}^{44}\text{Ru}$	148	${}^{60}\text{Nd}$ ${}^{62}\text{Sm}$	204	${}^{80}\text{Hg}$ ${}^{82}\text{Pb}$
102	${}^{44}\text{Ru}$ ${}^{46}\text{Pd}$	150	${}^{60}\text{Nd}$ ${}^{62}\text{Sm}$		

### Изобарные триады

A	Триада	A	Триада
50	${}^{22}\text{Ti}$ ${}^{23}\text{V}$ ${}^{24}\text{Cr}$	130	${}^{52}\text{Te}$ ${}^{54}\text{Xe}$ ${}^{56}\text{Ba}$
96	${}^{40}\text{Zr}$ ${}^{42}\text{Mo}$ ${}^{44}\text{Ru}$	136	${}^{54}\text{Xe}$ ${}^{56}\text{Ba}$ ${}^{58}\text{Ce}$
124	${}^{50}\text{Sn}$ ${}^{52}\text{Te}$ ${}^{54}\text{Xe}$		

5° Ядра, состоящие из четного (нечетного) числа протонов и четного (нечетного) числа нейтронов, называются *четно-четными* (*нечетно-нечетными*). Ядра, состоящие из четного (нечетного) числа протонов и нечетного (четного) числа нейтронов, называются *четно-нечетными* (*нечетно-четными*).

6° Ядра не имеют резко выраженной границы. Поэтому *радиус ядра* имеет условный смысл. Эмпирическая формула для радиуса ядра:

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad \text{где } R_0 = (1,3 \div 1,7) \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Объем ядра пропорционален числу нуклонов в нем.

<sup>1)</sup> Все формулы этой главы в гауссовой системе

Плотность ядерного вещества постоянна для всех ядер, ее значение по порядку величины равно  $\delta \sim 10^{14}$  г/см<sup>3</sup> =  $10^8$  т/см<sup>3</sup>. Предположение, что ядра имеют сферическую форму, справедливо не всегда (стр. 813).

## 2. Энергия связи ядер, Ядерные силы

1° Энергией связи ядра  $\Delta W$  ( $A, Z$ ) (энергией связи нуклонов в ядре) называется разность между энергией протонов и нейтронов в ядре и их энергией в свободном состоянии:

$$\Delta W(A, Z) = \{M_{\text{яд}} - [ZM_p + (A-Z)M_n]\}c^2,$$

где  $M_{\text{яд}}$  — масса ядра,  $M_p$  и  $M_n$  — массы протона и нейтрона. Если  $\Delta W$  выражено в  $M\text{эв}$ , а  $M_{\text{яд}}$ ,  $M_p$  и  $M_n$  — в атомных единицах массы (стр. 910), то

$$\Delta W(A, Z) = 931,141\{M_{\text{яд}} - [1,0075957Z + 1,008982(A-Z)]\}$$

или

$$\Delta W(A, Z) = 931,141\{M - [1,0081445Z + 1,008982(A-Z)]\},$$

где  $M$  — масса атома. Энергия связи ядра отрицательна и по абсолютной величине равна работе, которую нужно затратить для расщепления ядра на составляющие его нуклоны. Очень часто под энергией связи ядра понимают положительную величину  $-\Delta W$ .

Энергия связи ядра, выраженная через массу нейтрального атома:

$$\Delta W = \{M_{\text{ат}}(A, Z) - [ZM_H + (A-Z)M_n]\}c^2,$$

где  $M_H$  — масса атома водорода  ${}^1_1\text{H}$ .

Удельной энергией связи ядра называется величина  $\Delta W/A$ , равная средней энергии связи, приходящейся на один нуклон.

2° Дефектом массы <sup>1)</sup> называется разность между массой атома, измеренной в а. е. м., и массовым числом:

$$\Delta = M - A.$$

Экспериментально наблюдаемая зависимость  $\Delta(A)$  удовлетворительно описывается уравнением

$$\Delta \approx [0,01(A-100)^2 - 64] \cdot 10^{-3} \text{ а.е.м.}$$

<sup>1)</sup> Под дефектом массы часто понимают величину  $-\Delta W(A, Z)/c^2$ .

### Упаковочный множитель

$$P = \frac{\Delta}{A} = \frac{M}{A} - 1$$

представляет «удельный» (в расчете на один нуклон) дефект массы. Зависимость удельной энергии связи, дефекта массы и упаковочного множителя от массового числа  $A$  ядра приведена на рис. VI.4.1.

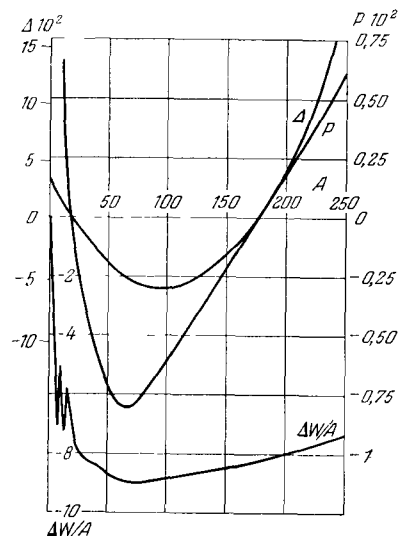


Рис. VI.4.1.

3° Величина энергии связи ядра определяет его *устойчивость относительно распада*. В случае, когда для атомов соседних изобаров (стр. 806)

$$M(A, Z) > M(A, Z+1),$$

где  $M$  — масса атома, так что для энергий связи ядер

$$\Delta W(A, Z) > \Delta W(A, Z+1) + (M_H - M_n)c^2,$$

где  $M_H$  — масса атома водорода  ${}^1_1\text{H}$ ,  $(M_H - M_n)c^2 = 0,782$  Мэв, ядро  ${}_Z^AX^A$  неустойчиво по отношению

к электронному распаду (стр. 827):  ${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z+1} Y^A + e^- + \bar{\nu}_e$ , где  $e^-$  — электрон,  $\bar{\nu}_e$  — электронное антинейтрино (стр. 871). В случае, когда

$$M(A, Z, +1) > M(A, Z) + 2m_0,$$

так что

$$\Delta W(A, Z+1) > \Delta W(A, Z) + 2m_0 c^2 - (M_{\text{Я}} - M_{\text{н}})c^2,$$

где  $m_0$  — масса электрона, ядро  ${}_{Z+1} Y^A$  неустойчиво по отношению к позитронному распаду (стр. 827):  ${}_{Z+1} Y^A \rightarrow {}_Z X^A + e^+ + \nu_e$ , где  $e^+$  — позитрон,  $\nu_e$  — электронное нейтрино (стр. 871). В случае, когда

$$M(A, Z+1) > M(A, Z) + \frac{\epsilon}{c^2},$$

так что

$$\Delta W(A, Z+1) > \Delta W(A, Z) + \epsilon - (M_{\text{н}} - M_{\text{Я}})c^2,$$

где  $\epsilon$  — энергия связи электрона в атоме (стр. 810), возможен захват ядром электрона с атомной оболочки ( $E$ -захват, стр. 827):  ${}_{Z+1} Y^A + e^- \rightarrow {}_Z X^A$ . Ядра, неустойчивые относительно позитронного распада, неустойчивы и относительно  $E$ -захвата. О других видах неустойчивости ядер см. стр. 825, 857.

4° Изобарные ядра  ${}_Z X^A$  и  ${}_{Z+1} Y^A$  устойчивы при энергии связи ядра, находящейся в интервале

$$\Delta W(A, Z) + (M_{\text{н}} - M_{\text{Я}})c^2 + \epsilon > \Delta W(A, Z+1) > \Delta W(A, Z) + (M_{\text{н}} - M_{\text{Я}})c^2.$$

5° Ядро, имеющее наименьшую возможную энергию, равную энергии связи, называют находящимся в *основном состоянии*. Если ядро имеет энергию  $E > E_{\text{мин}}$ , то говорят о *возбужденном состоянии ядра*. Случай  $E = 0$  соответствует диссоциации ядра на составляющие его нуклоны.

6° Из факта существования устойчивых ядер следует, что между составляющими его нуклонами действуют некоторые силы, связывающие их в ядро. Эти силы называются *ядерными силами*. Энергия ядерных сил и кулоновского взаимодействия протонов в ядре равна энергии связи. Ядерные силы обладают следующими свойствами:

а) *свойство зарядовой независимости*: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или между двумя нейтронами, или же между протоном и нейтроном, оди-

наковы. Отсюда вытекает, что ядерные силы имеют не-электрическую природу;

б) *свойство насыщения*: каждый нуклон взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Это следует из характера зависимости энергии связи и дефекта массы от массового числа (стр. 808 и 809). При отсутствии насыщения должно было бы быть  $\Delta W \propto A(A-1)$ ;

в) ядерные силы являются силами притяжения;

г) ядерные силы являются короткодействующими, т. е. проявляются на расстояниях между нуклонами, сравнимых по порядку величины с размерами самих нуклонов. Эти расстояния называются радиусом  $R$  действия ядерных сил ( $R \approx 1,5 \cdot 10^{-13}$  см);

д) ядерные силы имеют нецентральный характер, а их потенциал лишен сферической симметрии;

е) ядерные силы зависят от ориентации спинов взаимодействующих нуклонов.

7° В современном варианте обменной теории ядерных сил предполагается, что взаимодействие между нуклонами осуществляется путем обмена  $\pi$ -мезонами (стр. 871).

8° Обменный вариант ядерных сил (п. 7°) объясняет их короткодействующий характер. При этом существенно наличие у  $\pi$ -мезона отличной от нуля массы покоя. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга (стр. 720) время обмена нуклонов  $\pi$ -мезонами не может превышать  $\Delta t$ , для которого

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar,$$

где  $\Delta E = m_{\pi} c^2$  — энергия покоя  $\pi$ -мезона. Расстояние, на которое за время  $\Delta t$  может удалиться  $\pi$ -мезон от нуклона в ядре, даже двигаясь со скоростью, близкой к скорости света в вакууме, составляет  $R_0 \approx \hbar/m_{\pi} c \approx 1,2 \cdot 10^{-13}$  см, т. е. примерно совпадает со значением радиуса ядра (стр. 807) и по порядку величины совпадает с радиусом действия ядерных сил. (Для фотонов  $m_{\pi} = 0$  и  $R_0 = \infty$ , т. е. электромагнитное поле имеет бесконечно большой радиус действия; см. также стр. 882.)

С другой стороны, предполагая, что за время  $\Delta t$   $\pi$ -мезон проходит расстояние  $R_0$ , равное радиусу действия ядерных сил (п. 6°), можно подсчитать массу покоя  $\pi$ -мезона:  $m_{\pi} = \hbar/R_0 c \approx 250 m_e$ , где  $m_e$  — масса покоя электрона (стр. 871). Это согласуется со значениями масс  $\pi$ -мезонов (стр. 871).

### 3. Магнитные и электрические свойства ядер

1° Нуклоны в ядре обладают орбитальным и спиновым магнитными и механическими моментами (стр. 464 и 465). Нуклоны являются фермионами (стр. 226), их спин равен  $\hbar/2$ . Орбитальный  $\mu_l$  и спиновый  $\mu_s$  магнитные моменты нуклонов равны:

$$\mu_l = g_l \mathbf{l}, \quad \mu_s = g_s \mathbf{s}, \quad \mu_l = g_l \mathbf{l} \hbar, \quad \mu_s = g_s \mathbf{s} \hbar,$$

где  $l$  и  $s$  — орбитальное и спиновое квантовые числа,  $g_l$  и  $g_s$  — соответствующие *гиромагнитные отношения*, причём

$$g_l \mu_{\text{яд}} = \begin{cases} 1 & \text{для протона,} \\ 0 & \text{для нейтрона,} \end{cases} \quad g_s \mu_{\text{яд}} = \begin{cases} +5,585 & \text{для протона,} \\ -3,826 & \text{для нейтрона.} \end{cases}$$

Здесь

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2M_p c} = 5,050 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/с}$$

— так называемый *ядерный магнетон* ( $M_p$  — масса протона) в гауссовой системе.

2° В ядерной физике *спином ядра* называется его полный момент импульса (стр. 758). Он геометрически складывается из полных моментов нуклонов, составляющих ядро (см. ниже). Соответственно внутренним квантовые числа нуклонов складываются алгебраически и дают суммарное целое число (0, 1, 2, 3, ...) при четном массовом числе  $A$  и суммарное полуцелое число ( $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ) при нечетном  $A$ . В первом случае ядра подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, во втором — статистике Ферми — Дирака (стр. 225 и 226).

3° Изложенное в п. 2° является следствием того, что в ядрах осуществляется сильная ( $jj$ ) связь (стр. 759) между спиновым и орбитальным моментами каждого нуклона. Поэтому каждый нуклон характеризуется полным моментом импульса:

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}.$$

Спин  $\mathbf{J}$  и магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  ядра равны:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^A \mathbf{j}_i, \quad \boldsymbol{\mu} = g \mu_{\text{яд}} \mathbf{J}, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar,$$

где  $g$  — величина, аналогичная фактору Ланде для атома (стр. 764).

Классификация состояний ядра по значениям суммарных орбитального и спинового чисел  $L$  и  $S$  (в случае сильной связи эти числа имеют условный смысл, стр. 759) производится так же, как в векторной модели атома. Для обозначения этих состояний используется спектроскопическая символика (стр. 760). Квантовое число  $J$  принимает целые значения (в единицах  $\hbar$ ) при четных  $A$  и полуцелые (в тех же единицах) при нечетных  $A$ .

4° Магнитные моменты четно-четных ядер (стр. 807) равны нулю. Магнитные моменты четно-нечетных и нечетно-четных ядер (стр. 807) могут быть рассмотрены в *однонуклонной модели ядра*. В ней предполагается, что магнитные моменты таких ядер обусловлены движением одного «валентного» нуклона около остальной части ядра, состоящей из четного числа нуклонов, векторная сумма орбитальных и спиновых моментов которых равна нулю. В этом случае

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\mu} = g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}.$$

По абсолютной величине магнитные моменты ядер равны:

$$\mu_{\text{н.ч.}} = \begin{cases} \frac{J^2 - 1,293J}{J+1} \mu_{\text{яд}} & \text{для } l = J + \frac{1}{2}, \\ (J + 2,293) \mu_{\text{яд}} & \text{для } l = J - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\mu_{\text{ч.н.}} = \begin{cases} -1,913 \mu_{\text{н.ч.}} & \text{для } l = J + \frac{1}{2}, \\ \frac{1,913}{J+1} \mu_{\text{яд}} & \text{для } l = J - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где индексы «н. ч.» и «ч. н.» соответствуют нечетно-четным и четно-нечетным ядрам.

5° Электрический заряд нуклонов (протонов) в ядре в общем случае распределен асимметрично. Мерой отклонения этого распределения от сферической симметрии служит *квадруполярный электрический момент ядра*  $Q_0$ . Распределение заряда в ядре приближенно представляют в виде эллипсоида вращения. Квадруполярный момент ядра:

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z e (b^2 - a^2),$$

где  $b$  и  $a$  — полуоси эллипсоида. Для ядра, вытянутого вдоль направления спина, соответствующего полуоси  $b$ ,  $Q_0 > 0$ ; для ядра, сплюсченного в этом направлении,  $Q_0 < 0$ . Для сферического распределения заряда в ядре  $Q_0 = 0$ ; это имеет место при спине ядра, равном 0 или  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ).



6° Дипольный электрический момент (стр. 346) ядра в основном состоянии равен нулю.

7° Во внешнем магнитном поле происходит квантование спина ядра (пространственное квантование, стр. 758) и каждый энергетический уровень расщепляется на  $2J + 1$  подуровень (зеемановское расщепление ядерных уровней).

Избирательное поглощение электромагнитного излучения веществом, связанное с переходами его ядер между различными зеемановскими подуровнями энергии, называется *ядерным парамагнитным резонансом*. Резонансные частоты для переходов, подчиняющихся правилу отбора для магнитного (внутреннего) квантового числа  $m_J$  (стр. 765),  $\Delta m_J = \pm 1$ , равны

$$\nu_{\text{ядр}} = \frac{g \mu_{\text{яд}} H}{h},$$

где  $g$  — фактор расщепления для ядра, введенный в п. 3° и получаемый из спинового и орбитального гиромагнитных отношений (стр. 812),  $\mu_{\text{яд}}$  — ядерный магнетон,  $H$  — напряженность внешнего постоянного магнитного поля,  $h$  — постоянная Планка (в гауссовой системе).

Частоты ядерного парамагнитного резонанса при одном и том же значении  $H$  по порядку величины в  $\mu_{\text{Я}}/\mu_{\text{эл}} \sim \sim m_{\text{Я}}/m_{\text{эл}} \sim 10^4$  раз меньше частот электронного парамагнитного резонанса (стр. 765) и лежат в области  $10^5 - 10^6$  гц для обычно применяемых магнитных полей ( $\sim 10^3$  э).

Спин-решеточная релаксация ядерных спинов (стр. 766) ввиду слабого взаимодействия ядерных спинов с решеткой имеет периоды, достигающие многих часов; они в тысячи раз больше, чем в электронном парамагнитном резонансе.

8° Если ядро имеет квадрупольный электрический момент (стр. 813), то вследствие его взаимодействия с внутримолекулярным или внутрикристаллическим электрическим полем возникает иттарковское расщепление (стр. 768) уровней ядра на ряд подуровней. Избирательное поглощение веществом электромагнитного излучения, связанное с переходами его ядер между иттарковскими подуровнями энергии, называется *ядерным квадрупольным резонансом*. Ядерный квадрупольный резонанс (я. кв. р.) является эффективным методом изучения структуры молекул и кристаллов на основе определения положения и интенсивностей линий я. кв. р.

#### 4. Модели ядра

##### А. Капельная модель

1° Ввиду незнания точного характера сил, действующих в атомном ядре, для изучения и теоретического предсказания его свойств пользуются *моделями ядра*, основанными на внешней аналогии свойств атомных ядер со свойствами жидкой капли, электронной оболочки атома и т. д. Соответственно этому модели ядер называются капельной, оболочечной и т. д.

2° В *капельной модели ядра* силы, действующие в ядре, предполагаются аналогичными молекулярным силам в капле жидкости (стр. 253). Энергия притяжения нуклонов, обусловленная ядерными силами, соответствует энергии молекулярного притяжения молекул жидкости в капле. Второй вклад в энергию ядра дает кулоновское отталкивание одноименно заряженных протонов, растущее с увеличением их числа в ядре; это соответствует снижению устойчивости капли с ростом ее массы, т. е. числа молекул в капле. Нуклоны, находящиеся на поверхности ядра, испытывают одностороннее притяжение ядерными силами, которое характеризуется коэффициентом «поверхностного натяжения»  $\sigma$  (стр. 257).

3° Полная положительная энергия связи ядра (стр. 808) выражается полуэмпирической *формулой Вейцзеккера*:

$$\Delta W = aA - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2 A^{-1/3} - \epsilon \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + \delta,$$

где  $a = 15,75$  Мэв,  $\beta = 17,8$  Мэв,  $\gamma = 0,71$  Мэв,

$$\epsilon = 94,8$$
 Мэв,  $|\delta| = 34A^{-3/4}$  Мэв;

$\delta = \begin{cases} +|\delta| & \text{для четно-четных ядер; } A - \text{массовое число;} \\ 0 & \text{для нечетных } A; \\ -|\delta| & \text{для нечетно-нечетных ядер; } Z - \text{заряд ядра.} \end{cases}$

Первый член указывает на пропорциональность энергии связи величине  $A$ , второй — на уменьшение  $\Delta W$  (за счет одностороннего притяжения поверхностных нуклонов ядра капли) на величину, пропорциональную поверхности капли, т. е.  $A^{2/3}$  (поверхностное натяжение). Третий член учитывает кулоновское отталкивание протонов, пропорциональное  $Z^2/r$ , т. е.  $Z^2 A^{-1/3}$ . Четвертый член отражает тенденцию к симметрии в строении ядер, стремление к равенству в них числа протонов и нейтронов и учитывает отклонение от равенства  $Z = \frac{A}{2}$  в ту или иную

сторону. Этот член не вытекает из капельной модели и появляется из-за подчинения нуклонов принципу Паули (стр. 769). Последний член вводится для учета различной устойчивости четно-четных, нечетно-четных и нечетно-нечетных ядер. Для этих типов ядер последовательно убывает их устойчивость. Характер последнего члена связан с зависимостью ядерных сил от ориентации спинов нуклонов. Из сопоставлений формулы Вейцеккера с экспериментом следует ее универсальный характер. В частности, из нее следует для всех ядер величина радиуса ядра:  $R = (1,45 - 1,5) \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  см.

### Б. Оболочечная модель

1° В *оболочечной модели ядра* принимается, что энергетическая структура (уровни энергии нуклонов) ядра подобна энергетической структуре электронной оболочки атома.

Сильное взаимодействие нуклонов в ядре и малый радиус этого взаимодействия позволяют рассматривать нуклоны движущимися независимо друг от друга в поле, обладающем сферически симметричным потенциалом. При этом нуклоны могут находиться в различных энергетических состояниях. Основному состоянию ядра должно соответствовать заполнение всех нижних уровней. Потеря нуклоном энергии при межнуклонных столкновениях не может перевести его в более низкое состояние, ибо все они заняты в соответствии с принципом Паули (стр. 769). Это приводит к тому, что длина свободного пробега нуклона в невозбужденном ядре становится больше радиуса ядра. Это означает возможность рассматривать нуклоны в рамках данной модели невзаимодействующими и несталкивающимися. Движение невзаимодействующих нуклонов в поле сферического потенциала, где орбитальный момент импульса является интегралом движения, характеризуется тем, что всем  $2l+1$  возможным ориентациям вектора  $l$  соответствует одинаковый энергетический уровень. На этом уровне размещаются  $2(2l+1)$  нуклонов данного типа. Таким образом, в оболочечной модели нуклоны располагаются в определенном количестве на энергетических *нуклонных оболочках*. Каждый нуклон характеризуется индивидуальной волновой функцией и индивидуальными квантовыми числами  $n$  и  $l$  (стр. 726). Существуют две системы нуклонных состояний — одна для протонов, другая для нейтронов; обе системы уровней

заполняются нуклонами независимо друг от друга. Ядра, имеющие только заполненные нуклонные оболочки, должны обладать повышенной устойчивостью (проявляющейся, например, в их большей распространенности в природе), а также должны иметь сферически симметричное распределение заряда (близкий к нулю квадрупольный момент, стр. 813).

2° Порядок заполнения нуклонных оболочек с ростом  $A$  сходен с порядком заполнения электронных оболочек с ростом  $Z$ . Ввиду сильной спин-орбитальной связи все уровни с  $l \neq 0$  расщепляются на два подуровня с  $j = l \pm 1/2$ , заполняющихся независимо.

3° Предсказания оболочечной модели в общем соответствуют действительности. Наиболее устойчивыми по сравнению с соседними ядрами являются ядра со значениями  $N$  или  $Z$ , равными 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 и 152. Эти числа названы *магическими*. Распространенность в природе таких ядер наиболее велика, а квадрупольные моменты их близки к нулю. Ядра, у которых магические числа являются и  $N$  и  $Z$ , называются *двойды магическими*. Эти ядра ( ${}^2_2\text{He}^4$ ,  ${}^{16}_8\text{O}^{16}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}^{40}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}^{208}$ ) обладают особой устойчивостью, проявляющейся, в частности, в том, что они являются наиболее распространенными в природе изотопами этих элементов.

4° С одной стороны, аналогия нуклонных оболочек в ядре и электронных оболочек атома имеет внешний характер. Электроны атома движутся в центральном кулоновском поле ядра, тогда как поле, в котором движутся нуклоны, не имеет центрального характера. Электроны в атоме не испытывают столкновений друг с другом — только при этом условии можно говорить о числе  $l$ , определяющем систему атомных уровней энергии, как о точном квантовом числе, соответствующем стационарному движению. При высокой же плотности ядерного вещества нуклоны должны испытывать частые столкновения друг с другом, так что квантование их движения, казалось бы, невозможно.

С другой стороны, успех оболочечной модели говорит о том, что для ядер  $l$  имеет смысл точного квантового числа. Это, по-видимому, связано с тем, что нуклоны в основном состоянии ядра не могут испытывать столкновений друг с другом (п. 1°).

5° Оболочечная модель ядра хорошо оправдывается для легких ядер и ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.

## В. Обобщенная (коллективная) модель

1° *Обобщенная (коллективная) модель ядра* представляет собой синтез капельной и оболочечной моделей. В этой модели принимается, что нуклоны ядра движутся в некотором усредненном самосогласованном поле (стр. 754), действующем на выделенный нуклон со стороны остальных. Эта усредненность поля теряется вблизи «поверхности» ядра вследствие того, что нуклоны, не входящие в состав заполненных нуклонных оболочек («валентные» нуклоны), вызывают у «поверхности» ядра флуктуации потенциала самосогласованного поля, что проявляется в «деформации» ядерной «поверхности». Эти деформации возникают тем более легко, что в ядре нет центрального тела, которое стабилизировало бы движение системы нуклонов. В результате деформаций нарушается сферическое распределение заряда в ядре и оно приобретает квадрупольный электрический момент (стр. 813).

2° Оболочечная и капельная модели рассматриваются как предельные случаи обобщенной модели ядра. Оболочечный аспект обобщенной модели состоит в том, что в ней сохраняют смысл индивидуальные состояния нуклонов и нуклонные оболочки. Вместе с тем эти состояния определяются не непосредственным взаимодействием нуклонов, а их коллективным взаимодействием, как в капельной модели, через нарушение потенциала взаимодействия «деформациями» ядерной поверхности. Капельный аспект обобщенной модели проявляется при больших возбуждениях ядра (сильных «деформациях» и сильных искажениях самосогласованного поля), когда теряется индивидуализация состояний отдельных нуклонов. При очень высоких возбужденных состояниях из ядра могут «испаряться» отдельные нуклоны.

## 5. Радиоактивность

1° *Радиоактивностью* называется самопроизвольное превращение неустойчивых изотопов (стр. 806) одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц (например, ядер гелия). Часто под радиоактивностью понимаются также взаимные превращения одних элементарных частиц в другие (например, нейтронов и гиперонов (стр. 871)).

*Естественной радиоактивностью* называется радиоактивность, наблюдающаяся у неустойчивых изотопов, существующих в природе.

*Искусственной радиоактивностью* называется радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций (см. также стр. 865). Свойства данного изотопа не зависят от способа его получения.

С учетом возможности образования составного ядра в ядерных реакциях (стр. 854) радиоактивность можно определять как самопроизвольное изменение состава ядра, происходящее путем испускания элементарных частиц или ядер из основного или метастабильного состояния ядра за время, существенно превышающее время жизни возбужденного составного ядра в ядерных реакциях. Минимальное время жизни радиоактивных изотопов принимается за  $10^{-12} - 10^{-13}$  сек.

2° Таблица основных типов радиоактивности:

Тип радиоактивности	Изменение заряда ядра Z	Изменение массового числа A	Характер процесса
Альфа-распад	$Z-2$	$A-4$	Вылет $\alpha$ -частицы, представляющей собой систему двух протонов (p) и двух нейтронов (n), связанных воедино
Бета-распад	$Z \pm 1$	A	Взаимное превращение в ядре нейтрона (n) и протона (p):
$\beta^-$ -распад	$Z+1$	A	} электронное нейтрино и антинейтрино: в скобки заключены вылетающие из ядра частицы
$\beta^+$ -распад	$Z-1$	A	
Электронный захват (E-захват)	$Z-1$	A	
Спонтанное деление	$Z-1/2 Z$	$A-1/2 A$	Деление ядра обычно на два осколка, имеющие приблизительно равные массы и заряды
Протонная радиоактивность	$Z-1$	$A-1$	Вылет из ядра протона
Двухпротонная радиоактивность	$Z-2$	$A-2$	Одновременный вылет из ядра двух протонов

3° Перечисленные пять основных типов радиоактивности характеризуются относительно большой продолжительностью превращений ядер, которая обеспечивается или характером взаимодействия (слабые взаимодействия) при  $\beta$ -распаде, стр. 867), или задержкой испускания положительно заряженных частиц кулоновским потенциальным барьером в ядре ( $\alpha$ -распад, спонтанное деление, одно- и двухквотонная радиоактивность). Обычно все типы радиоактивности сопровождаются испусканием *гамма-лучей*, представляющих собой потоки фотонов жестких электромагнитных излучений с длиной волны порядка  $10^{-9}$ – $10^{-11}$  см.  $\gamma$ -лучи являются наиболее распространенной формой снятия избыточной энергии возбужденных продуктов радиоактивного распада. Ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется *материнским*, возникающее ядро – *дочерним*. Если последнее также распадается, то иногда говорят о «внучатном» ядре.

4° *Самостоятельный (спонтанный) распад атомных ядер* следует закону

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где  $N_0$  – количество ядер в данном объеме вещества в момент времени  $t = 0$ ,  $N$  – количество ядер в том же объеме к моменту времени  $t$ ,  $\lambda$  – *постоянная распада*. Постоянная  $\lambda$  имеет смысл вероятности распада ядра за 1 сек: она равна доле ядер, распадающихся за 1 сек. Величина  $1/\lambda$  называется *средней продолжительностью жизни радиоактивного изотопа*. Для характеристики устойчивости ядер относительно распада пользуются понятием о *периоде полураспада*  $T_{1/2}$ , равном времени, в течение которого исходное количество ядер данного вещества распадается наполовину. Связь величин  $\lambda$  и  $T_{1/2}$ :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Если радиоактивный изотоп имеет несколько типов радиоактивности (п. 2°), то общая постоянная распада  $\lambda = \sum_k \lambda_k$ , где суммирование производится по всем типам

радиоактивности,  $\lambda_k$  являются *парциальными постоянными распада*. Число распадов ядер данного препарата в единицу времени называется *активностью* препарата; отнесенное к единице массы препарата, это число называется *удельной активностью* вещества препарата.

Активность:

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

5° Если получающееся в результате распада исходного ядра новое ядро также радиоактивно и, распадаясь, дает устойчивое или вновь радиоактивное ядро и т. д., то имеет место *цепочка радиоактивных превращений*. В этом случае суммарная активность ядер, образующихся в цепочке, при измерении ее каким-либо прибором (см., например, стр. 849) зависит от времени по более сложному закону, поскольку постоянные распада для различных звеньев цепочки не равны друг другу и, кроме того, прибор имеет различную эффективность регистрации различных излучений от каждого из звеньев цепочки превращений.

Если  $\lambda_i$  – постоянная распада ядра в  $i$ -м звене цепочки, а  $k_i$  – восприимчивость детектора излучения к излучению  $i$ -го звена, то суммарная активность

$$A = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i N_i.$$

В случае цепочки из двух звеньев ( $n = 2$ )

$$A = k_1 \lambda_1 N_{10} \left[ \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right) \right];$$

индекс «нуль» относится к моменту времени  $t = 0$ .

6° Устойчивость ядер (в среднем) снижается с возрастанием их массового числа (стр. 806). Естественная радиоактивность легких и средних ядер – редкое явление (наблюдаемое у ядер  ${}_{19}\text{K}^{40}$ ,  ${}_{37}\text{Rb}^{87}$ ,  ${}_{40}\text{In}^{115}$ ,  ${}_{57}\text{La}^{138}$ ,  ${}_{63}\text{Sm}^{147}$ ,  ${}_{71}\text{Lu}^{176}$  и  ${}_{75}\text{Re}^{187}$ ). Среди тяжелых атомов (начиная от  $A > 200$ ) естественная радиоактивность есть универсальное явление. Эти ядра образуют 3 естественно- и 1 искусственно-радиоактивных семейства, называемых по наиболее долгоживущему (с наибольшим  $T_{1/2}$ , стр. 820) «родоначальнику» семейства: *семейство урана* (от  ${}_{92}\text{U}^{238}$ ), *семейство тория* (от  ${}_{90}\text{Th}^{232}$ ), *семейство актиния* (от  ${}_{89}\text{Ac}^{235}$ ) и *семейство нептуния* (от  ${}_{93}\text{Np}^{237}$ , получаемого искусственно). Массовые числа членов каждого из радиоактивных семейств характеризуются формулой

$$A = 4n + a,$$

где  $n$  – целое число,  $a = 0$  для семейства тория,  $a = 1$  для семейства нептуния,  $a = 2$  для семейства урана,  $a = 3$  для семейства актиния. Переход от одного члена



семейства к другому осуществляется цепочкой последовательных альфа- и бета-распадов и заканчивается на устойчивом ядре, которым для семейства с  $a = 0$  является  ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ , для  $a = 1 - {}_{83}\text{Bi}^{209}$ , для  $a = 2 - {}_{84}\text{Po}^{210}$  и для  $a = 3 - {}_{85}\text{At}^{211}$ . Последовательность радиоактивных превращений в этих семействах показана на рис. VI.4.2, где вертикальные стрелки, параллельные оси  $A$ , соответствуют альфа-распадам, а горизонтальные стрелки — бета-распадам. Для этой последовательности превращений в радиоактивных семействах справедлив закон смещения Фаянса — Содди (см. также табл. на стр. 819):

$$\left. \begin{array}{l} A' = A - 4 \\ Z' = Z - 2 \end{array} \right\} \alpha\text{-распад}, \quad \left. \begin{array}{l} A' = A \\ Z' = Z + 1 \end{array} \right\} \beta\text{-распад},$$

где  $(A, Z)$  и  $(A', Z')$  — материнское и дочернее ядра.

7° В настоящее время известно двенадцать элементов с  $Z > 92$ , называемых *трансурановыми*. Все они в природных условиях, по-видимому, не существуют и получены искусственным путем (стр. 855). Всем трансурановым элементам присуща радиоактивность с периодами полураспада, быстро уменьшающимися при возрастании  $Z$ . К трансурановым элементам относятся нептуний ( ${}_{93}\text{Np}^{237}$ ), плутоний ( ${}_{94}\text{Pu}^{244}$ ), америций ( ${}_{95}\text{Am}^{243}$ ), кюрий ( ${}_{96}\text{Cm}^{248}$ ), берклий ( ${}_{97}\text{Bk}^{247}$ ), калифорний ( ${}_{98}\text{Cf}^{249}$ ), эйнштейний ( ${}_{99}\text{Es}^{254}$ ), фермий ( ${}_{100}\text{Fm}^{253}$ ), менделевий ( ${}_{101}\text{Md}^{250}$ ), побелий ( ${}_{102}\text{No}^{257}$ ), лоуренсий ( ${}_{103}\text{Lw}^{257}$ ), а также открытый летом 1964 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований, курчатовий (заряд ядра  $Z = 104$ ). Приведенные массовые числа в большинстве случаев соответствуют наиболее долгоживущему изотопу данного элемента. Для короткоживущих элементов массовые числа определены лишь ориентировочно. Например, у Np насчитывается 11 изотопов с  $A = 231 - 241$ , у Pu — 14 с  $A = 232 - 246$ , у Am — 10 с  $A = 237 - 246$ , у Cm — 13 с  $A = 238 - 250$ , у Bk — 8 с  $A = 243 - 250$ , у Cf — 11 с  $A = 244 - 254$ , у Es — 11 с  $A = 246 - 256$ , у Fm — 7 с  $A = 250 - 256$ .

Основным видом радиоактивного превращения трансурановых элементов является альфа-распад. Изотопы трансурановых элементов тем устойчивее, чем меньше для них число нейтронов  $N$  при данном числе протонов  $Z$ ; изотопы с заполненными ядерными оболочками (стр. 816) имеют большие  $T_{1/2}$ , чем соседние с ними. Трансурановые элементы неустойчивы по отношению к спонтанному делению ядер (стр. 857).

## 6. Альфа-распад

1° Альфа-распад (стр. 819) испытывают только тяжелые ядра с  $A > 200$ . Вылетающие из ядер альфа-частицы имеют дискретный спектр энергий и составляют несколько групп. Обычно наиболее интенсивной является группа с наибольшей энергией альфа-частиц. Наличие нескольких групп альфа-частиц называется *тонкой структурой альфа-спектра*. В спектрах альфа-радиоактивных ядер с весьма малыми периодами полураспада  $T_{1/2}$  наблюдаются также группы альфа-частиц с энергиями, превышающими энергию наиболее интенсивной группы (*длиннопробежные альфа-частицы*). Периоды полураспада альфа-излучателей с ростом энергии альфа-частиц от примерно 4 до 9 Мэв уменьшаются от  $\sim 10^9$  лет до  $\sim 10^{-2}$  сек. Всего известно около 25 естественных и около 100 искусственных альфа-радиоактивных ядер.

2° Альфа-распад рассматривается как проникновение альфа-частиц сквозь потенциальный барьер ядра (туннельный эффект, стр. 733). Потенциал ядерных сил представляется в виде потенциальной ямы, соответствующей устойчивому состоянию ядра. Яма отделена от области вне радиуса действия ядерных сил потенциальным барьером конечной ширины и высоты; высота потенциального барьера обычно превышает энергии испускаемых ядром альфа-частиц. Дискретный спектр альфа-частиц свидетельствует о наличии для них в ядре дискретных энергетических уровней, набор которых различен для разных альфа-радиоактивных ядер.

3° Энергия  $\alpha$ -частицы равна разности энергетических уровней материнского и дочернего ядер. Она тем больше, чем менее возбужденным оказывается дочернее ядро. При сильно возбужденном  $\alpha$ -радиоактивном дочернем ядре с малым периодом полураспада (стр. 820) просачивание  $\alpha$ -частицы сквозь потенциальный барьер происходит раньше, чем испускание  $\gamma$ -кванта (стр. 833). Возникает длиннопробежная  $\alpha$ -частица с длиной пробега, большей по сравнению с пробегом обычных частиц.

4° В процессе альфа-распада различаются две стадии: образование  $\alpha$ -частицы из нуклонов ядра и испускание  $\alpha$ -частицы ядром. Первая стадия процесса изучена значительно менее, чем вторая. Образование  $\alpha$ -частиц происходит с заметной вероятностью, и поэтому время жизни  $\alpha$ -радиоактивных ядер определяется в основном второй, гораздо более медленной, стадией  $\alpha$ -распада. Обособлению

двух протонов и двух нейтронов в  $\alpha$ -частицу способствует насыщение ядерных сил (стр. 811), так что сформировавшаяся  $\alpha$ -частица подвержена меньшему действию ядерных сил притяжения и вместе с тем большему действию кулоновских сил отталкивания от протонов ядра, чем отдельные нуклоны.

Этим объясняется тот факт, что альфа-распад представляет собой значительно более вероятный тип радиоактивности, чем одно- и двухпротонная радиоактивность (стр. 819).

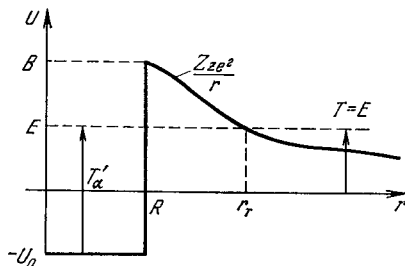


Рис. VI.4.3.

5° Прозрачность  $D$  потенциального барьера (стр. 733) для  $\alpha$ -частицы в ядре (рис. VI.4.3):

$$D = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_T} \sqrt{2m \left( \frac{Zze^2}{r} - E \right)} dr \right\}.$$

Здесь  $E = T$  — кинетическая энергия  $\alpha$ -частицы ( $z = 2$ ),  $R$  — радиус ядра,  $r_T = \frac{Zze^2}{T}$  — точка поворота, которая находится из условия  $U_{\kappa}(r_T) = T$ , где  $U_{\kappa}(r) = \frac{Zze^2}{r}$  — кулоновский потенциал между  $\alpha$ -частицей и ядром с зарядом  $Ze$ ;  $m$  — масса  $\alpha$ -частицы. Кинетическая энергия  $T'$   $\alpha$ -частицы внутри ядра больше, чем вне его:  $T' > T = E$ .

Результат вычислений для  $D$ :

$$D = e^{-2g\gamma},$$

где

$$g = \frac{R}{\lambda_B}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{B}{T}} \arccos \sqrt{\frac{T}{B}} - \sqrt{1 - \frac{T}{B}},$$

$B = U_{\kappa}(R) = \frac{Zze^2}{R}$  — высота кулоновского барьера,  $\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mB}}$  — длина волны де Бройля (стр. 716), соответствующая кинетической энергии частицы, равной высоте барьера ( $T = B$ ). Значение  $\lambda_T$  для нуклонов с кинетической энергией  $T$ :

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \approx \frac{4,5 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T(\text{Мэв})}} \text{ см.}$$

6° Постоянная альфа-распада (стр. 820)  $\lambda$  связана с величиной  $D$  соотношением

$$\lambda = \frac{vD}{2R},$$

где  $R$  — радиус ядра ( $2R$  — ширина потенциальной ямы),  $v$  — скорость альфа-частицы в ядре.

7° Эмпирическая формула, связывающая пробег  $\tilde{R}_\alpha$  альфа-частиц в веществе (стр. 842) с постоянной  $\lambda$  альфа-распада ядра:

$$\ln \lambda = A \ln \tilde{R}_\alpha + B,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, имеющие различные значения для каждого из радиоактивных семейств, называется *законом Гейгера — Неттола*. Она указывает, что с ростом пробега, т. е. энергии альфа-частиц,  $\lambda$  возрастает и соответственно  $T_{1/2}$  быстро уменьшается.

## 7. Бета-распад

1° Под понятием бета-распада объединяют три вида ядерных превращений: *электронный ( $\beta^-$ ) распад*, *позитронный ( $\beta^+$ ) распад* и *электронный захват ( $E$ -захват)* (стр. 819). Условия устойчивости ядер относительно разных типов бета-распада см. на стр. 810. К настоящему времени известно около 900 бета-радиоактивных изотопов. Из них только около 20 являются естественными, остальные получены искусственным путем (стр. 819). Подавляющее большинство этих изотопов испытывает  $\beta^-$ -распад. В каждом акте  $\beta^-$ -распада испускается один электрон. Теоретически возможен *двойной бета-распад*, в каждом акте которого испустились бы два электрона (позитрона);

двойной бета-распад экспериментально до сих пор не наблюдался.

2° При бета-распаде спектр энергий испущенных электронов или позитронов является непрерывным, простираясь от  $E = 0$  до  $E = E_0$ , где величина  $E_0$  называется *верхней границей бета-спектра*.

Средняя энергия электронов  $\bar{E}$ , испускаемых тяжелыми ядрами,  $\bar{E} \approx 1/3 E_0$ ; для естественных  $\beta^-$ -радиоактивных элементов  $\bar{E} = (0,25 \div 0,45) Mэв$ . Для легких ядер энергетический спектр электронов (позитронов) более симметричен:  $\bar{E} \approx 1/2 E_0$ . Периоды полураспада для  $\beta^-$ -распадов заключены в широком интервале времени — от  $2,5 \cdot 10^{-2}$  сек до  $4 \cdot 10^{12}$  лет, несоизмеримо большем характерного ядерного времени ( $\sim 10^{-21} \div 10^{-22}$  сек). Это указывает на то, что  $\beta^-$ -распад обуславливается слабым взаимодействием (стр. 867). Бета-распад обычно сопровождается испусканием гамма-лучей, которые имеют дискретный спектр энергий. Вид спектра бета-частиц показан на рис. VI.4.4.

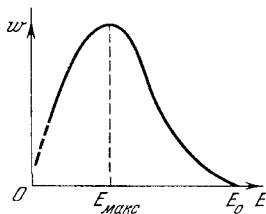


Рис. VI.4.4.

3° При бета-распаде вместе с электроном испускается электронное антинейтрино, а вместе с позитроном испускается электронное нейтрино (стр. 871). Электронное нейтрино (антинейтрино) имеет ничтожно малые взаимодействия с ядрами по сравнению с взаимодействием нуклонов в ядре (ядерными взаимодействиями). Электрон (позитрон) и электронное антинейтрино (нейтрино) имеют при бета-распаде равные по величине и противоположно направленные спины, так что изменение спина ядра при этом равно нулю. Сплошной спектр бета-частиц обязан различному распределению энергии между электроном (позитроном) и электронным антинейтрино (нейтрино), причем сумма энергий обеих частиц равна  $E_0$ .

4° Согласно современным представлениям электрон (позитрон) и электронное антинейтрино (нейтрино) не существуют в атомных ядрах, а образуются в момент вылета из ядра в результате слабого (стр. 867) взаимодействия между нуклонами ядра. Поскольку при бета-

распаде происходит рождение новых частиц, к нему неприменимы методы нерелятивистской квантовой механики, и задача рассматривается методами квантовой теории поля.

5° Энергетическая схема процессов бета-распада представлена на рис. VI.4.5. Процессу бета-распада соответствует переход ядра из одного дискретного энергетического состояния в другое. По оси ординат отложены энергии покоя атомов за вычетом энергии покоя системы, состоящей из дочернего иона и электрона, которые образуются из атома  $(A, Z)$  при  $\beta^-$ -распаде. Переход из состояния I ( $E(Z) > 0$ ) дает  $\beta^-$ -распад, в котором  $E(Z) > E(Z+1)$ . Переход в состояние II соответствует превращению  $Z+1 \rightarrow Z$ , т. е.  $E$ -захвату. В зависимости от электронной оболочки, с которой захвачен электрон, различают  $K$ -,  $L$ -,  $M$ -захват и т. д. Образующееся при  $E$ -захвате дочернее возбужденное ядро переходит в основное состояние, испуская квант гамма-лучей с соответствующей энергией (стр. 833). Переход ядра в состояние III ( $E(Z) < -2m_0c^2$ ) соответствует превращению  $Z+1 \rightarrow Z$  посредством либо  $E$ -захвата, либо  $\beta^+$ -распада; в первом из этих превращений испускается также гамма-квант. Бета-распад, в котором дочерние ядра возникают в единственном энергетическом состоянии, называется *простым*. Если дочерние ядра возникают в нескольких состояниях, то бета-распад называется *сложным*.

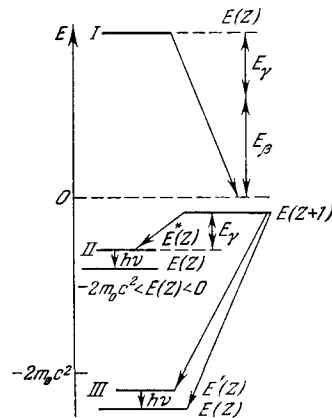


Рис. VI.4.5.

6° В теории  $\beta^-$ -распада рождение электрона и электронного антинейтрино (позитрона и электронного нейтрино) рассматривается как результат взаимодействия ядерного нуклона с электронным (позитронным) и нейтринными полями. Помимо рождения  $e^-$  и  $\bar{\nu}_e$  (или  $e^+$  и  $\nu_e$ ) частиц (стр. 871) при этом  $n^1$  переходит в  $p^1$  (или, наоборот,  $p^1 \rightarrow$



$\rightarrow_0 p^1$ ). Интенсивность указанного взаимодействия характеризуется константой  $g$  слабого взаимодействия (константа связи нуклонного и электронно-позитронного полей),  $g \approx 1,4 \cdot 10^{-49}$  эрг·см<sup>3</sup>.

Вероятность  $\beta$ -распада характеризуется ядерным матричным элементом перехода  $|H_{ik}|$ , содержащим: волновую функцию нуклона в начальном состоянии  $i$ ; волновые функции нуклона, электрона (позитрона) и электронного антинейтрино (нейтрино) в конечном состоянии  $k$ ; энергию взаимодействия, соответствующую переходу  $i \rightarrow k$ , и, наконец, величину, определяющую плотность числа конечных состояний системы. Для  $\beta$ -распада существуют правила отбора, которые устанавливают значительно большую вероятность для разрешенных переходов и малую вероятность так называемых запрещенных  $\beta$ -переходов.

7° Для изучения  $\beta$ -распада существенное значение имеет анализ энергетического спектра  $N(E)$ , числа  $N$  испущенных электронов (позитронов). По характеру кривых распределения  $N(E)$   $\beta$ -спектры разделяются на разрешенные (фермиевские спектры) и запрещенные. В свою очередь запрещенные спектры различаются по степени запрета. Для разрешенных  $\beta$ -спектров в предположении, что масса нейтрино равна нулю,

$$N(E) dE \approx F(Z, E) p E (E_0 - E)^2 dE,$$

где  $p$  и  $E$  — импульс и энергия электронов в единицах  $m_e c$  и  $m_e c^2$ ,  $m_e$  — масса покоя электрона (стр. 526),  $E_0$  — граничная, максимальная энергия электронов (позитронов)  $\beta$ -спектра (стр. 828). Функция  $F(Z, E)$  учитывает влияние поля ядра на форму кривой  $N(E)$ . Для запрещенных  $\beta$ -спектров  $N(E)$  содержит множитель, зависящий от  $E_0$ ,  $E$  и степени запрета.

Для суждения о принадлежности данного  $\beta$ -спектра к числу фермиевских или запрещенных строится график Ферми (график Кюри)

$$K(E) = \left[ \frac{N_{\text{эксп}}(E)}{p E F(Z, E)} \right]^{1/2}, \text{ где } N_{\text{эксп}}(E) \text{ — наблюдаемая кривая } \beta\text{-спектра.}$$

Для фермиевских  $\beta$ -спектров  $K(E)$  является прямой, пересекающей ось абсцисс при  $E = E_0$ . Отклонение  $K(E)$  от прямолинейности указывает на то, что данный  $\beta$ -спектр принадлежит к числу запрещенных.

8° Постоянная распада  $\lambda$  для  $\beta$ -распада (стр. 820):

$$\lambda = C \int_0^{E_0} N(E) dE = CF(Z, E_0).$$

Множитель  $C$  вычисляется в теории  $\beta$ -распада (п. 6°):

$$C = \frac{g^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |H_{ik}|^2.$$

Здесь  $g$  — константа слабого взаимодействия,  $|H_{ik}|$  — ядерный матричный элемент (п. 6°). Поскольку  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ , где  $T_{1/2}$  — период полураспада (стр. 820), то

$$F(Z, E_0) T_{1/2} = T_{1/2} \text{ прив} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{|H_{ik}|^2}.$$

Произведение  $F(Z, E_0) T_{1/2}$  называется *приведенным периодом полураспада*.  $T_{1/2} \text{ прив}$  зависят только от характера взаимодействия нуклонов ядра с электронно-нейтринным полем. Их значения, полученные из экспериментальных данных, позволяют определить  $|H_{ik}|$ .

9° Классификация типов  $\beta$ -распада по значениям  $T_{1/2} \text{ прив}$ :

$\lg T_{1/2} \text{ прив} \approx 3,5$  — *сверхразрешенные переходы*:  $\beta$ -распад нейтрона,  ${}^1_1\text{H}^3$  и переходы между зеркальными ядрами [ $(N-Z) = 1$  для начального ядра и  $N-Z = -1$  для конечного], а также переходы, для которых  $N-Z = \pm 1$  для одного изобара (стр. 806) и  $N-Z = \pm 2$  для другого ( $N$  — число нейтронов в ядре)]. Для сверхразрешенных переходов  $|H_{ik}|$  близки к максимальным значениям;

$\lg T_{1/2} \text{ прив} \approx 5$  — *нормально разрешенные переходы*;

$\lg T_{1/2} \text{ прив} \approx 9, \approx 13, \approx 18$  — *запрещенные переходы* соответственно 1-го, 2-го, 3-го порядков запрещения. Последним случаям соответствует резкое снижение вероятности  $\beta$ -распада, обусловленное большими изменениями момента импульса ядра, а в ряде случаев и изменением четности его состояния (п. 11°).

10° Постоянная распада  $\lambda_E$  для случая разрешенного  $E$ -захвата:

$$\lambda_E = \frac{g^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |H_{k1}|^2 F_E(\epsilon_0, Z),$$

где

$$F_{\kappa}(\epsilon_0, Z) = 2\lambda \left( \frac{2\pi Z e^2}{\hbar c} \right)^3 \left[ \epsilon_0 + 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi Z e^2}{\hbar c} \right)^2 \right]^2,$$

$$\epsilon_0 = \frac{E_0}{m_e c^2}.$$

Эта формула не учитывает релятивистских эффектов, которые становятся существенными, когда величина  $E_0$  (стр. 828) приближается к энергии покоя электрона, равной  $0,511 \text{ Мэв}$ .

11° Состояние квантовой системы называется *четным*, если соответствующая ему волновая функция не меняет своего знака при изменении знаков всех координат частицы системы (*при инверсии*), и *нечетным* в противном случае.

Сохранение знака волновой функции при пространственной инверсии может также характеризоваться *положительной четностью*  $P$  ( $P = +1$ ). Если при изменении знаков координат волновой функции она изменяет свой знак на противоположный, то четность считается *отрицательной* ( $P = -1$ ). Понятия четности состояния и волновой функции связаны с симметрией пространства, т. е. с равнозначностью в нем правого и левого направлений, верха и низа и т. д.

Любая система частиц, если число частиц в ней остается неизменным или же меняется на четное число, может находиться в состоянии с определенной четностью.

Из свойств уравнения Шредингера (стр. 718) следует, что, если сохраняется постоянная энергия частицы (или системы частиц), то сохраняется и ее четность (*закон сохранения четности*). Системе частиц до бета-распада и после бета-распада должны соответствовать волновые функции одинаковой четности (ядро — до распада; ядро, бета-частица и (анти)нейтрино — после распада).

12° Выяснилось, что при слабых взаимодействиях (стр. 867), которые, в частности, вызывают бета-распад, четность волновой функции системы при распаде может изменяться (*несохранение четности*). Наряду с состоянием, описываемым, скажем, четной функцией, может возникнуть и нечетное состояние. Впервые это явление было обнаружено при бета-распаде К-мезонов (стр. 874); оно заключается в том, что при этом распаде могут из одного К-мезона возникать как два, так и три  $\pi$ -мезона. В бета-распаде нарушение сохранения четности проявляется в асимметрии пространственных направлений

электронов, испущенных ядрами: в направлении спина ядер вылетает меньше электронов, чем в противоположном. Из этой асимметрии вытекает определенная связь направления спина частицы с направлением ее движения в пространстве.

Спины нейтрино и антинейтрино должны быть всегда ориентированы параллельно (антипараллельно) направлению их движения — у антинейтрино вдоль направления движения, а у нейтрино — противоположно ему (*продольная поляризация*). Если уподобить спину вращению, то движение антинейтрино соответствует движению правого спина, а нейтрино — левого. В соответствии с этим различается *правая спиральность антинейтрино* и *левая спиральность нейтрино*. Подробнее о нарушении сохранения четности см. стр. 870.

## 8. Гамма-излучение

1° *Гамма-излучением* называется жесткое электромагнитное излучение, энергия которого высвобождается при переходах ядер из возбужденного в основное или в менее возбужденное состояние, а также при ядерных реакциях.

В первом случае энергия гамма-квантов равна разности энергий конечного и начального уровней ядра. В каждом акте перехода ядро излучает один гамма-квант. В связи с дискретностью энергетических уровней ядра гамма-излучение имеет линейчатый спектр. Частоты гамма-квантов связаны с разностью энергий условной частоты Бора (стр. 741).

2° В соответствии с законом сохранения момента импульса (стр. 79) гамма-квант уносит из ядра момент импульса  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ , равный разности моментов импульса  $J$  ядра в конечном ( $k$ ) и начальном ( $i$ ) состояниях.

При этом

$$|J_i - J_k| \leq l \leq |J_i + J_k|.$$

По закону сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях (стр. 832)

$$P_k P_f = P_i,$$

где  $P_k$  и  $P_i$  — четности состояний ядра,  $P_f$  — четность гамма-кванта.

Момент импульса гамма-кванта и его четность определяют мультиплетность излучения.

3° Величина  $l$  называется *порядком мультиплетности*. Четности  $\gamma$ -кванта  $(-1)^{l+1}$  соответствует *магнитное излучение*, четности  $(-1)^l$  — *электрическое излучение*.

Величина  $2^l$  определяет полноту излучения ( $l = 1$  — дипольное,  $l = 2$  — квадрупольное,  $l = 3$  — октупольное и т. д.). Электрические излучения данной полноты обозначаются  $E_l$ , магнитные  $M_l$ . Эти названия выбраны потому, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне, соответствующей гамма-кванту с данными  $l$  и  $P_j$ , направлены так же, как в поле излучения электрического диполя, магнитного диполя и т. д. Связь между значением  $l$ , характером мультиплетности ( $E$  или  $M$ ), четностью  $P_j$  фотона и изменением четности состояния ядра:

$l$	Четность состояния ядра не меняется; $P_j = +1$	Четность состояния ядра меняется; $P_j = -1$
1	$M_1$	$E_1$
2	$E_2$	$M_2$
3	$M_3$	$E_3$
4	$E_4$	$M_4$
5	$M_5$	$E_5$

После того как гамма-квант излучен и приобрел определенное направление, ему не приписывается данная мультиплетность. Он описывается плоской волной, которая представляет собой наложение всех мультиплетностей с порядками от 1 до  $\infty$ .

4° Правилами отбора либо полностью запрещаются, либо делаются весьма маловероятными  $\gamma$ -переходы, не удовлетворяющие определенным требованиям. Абсолютно запрещенными являются переходы, не удовлетворяющие условиям п. 2°. Маловероятными оказываются переходы ядра между уровнями, соответствующие большому различию в спинах, т. е. переходы с большим значением  $l$ . С ростом порядка мультиплетности вероятность  $\gamma$ -переходов ядер быстро уменьшается: обычно в  $10^5$ – $10^8$  раз при переходе от  $l$  к  $l+1$ . Обычно гамма-излучения ядер имеют порядок мультиплетности  $E_1$ ,  $M_1$ ,  $E_2$ . Этим порядкам мультиплетности соответствует излучение гамма-фотона за время  $10^{-8}$ – $10^{-15}$  сек (время жизни возбужденного состояния ядра) в зависимости от энергии перехода.

Наряду с радиационным переходом ядра, при котором излучается гамма-квант, существует конкурирующий с ним безызлучательный процесс, называемый *внутренней конверсией гамма-излучения* и наблюдаемый при энергиях переходов, меньших чем  $0,2$ – $0,5$  Мэв. В этом процессе энергия, освобождающаяся при ядерном переходе, передается без посредства гамма-кванта одному из атомных электронов, вызывая ионизацию атома. Внутреннюю конверсию формально, для облегчения расчетов, считают идущей в две стадии: на первой стадии ядро как бы излучает гамма-квант, который на второй стадии поглощается электроном и передает ему свою энергию (*конвертирует*).

5° Отношение вероятностей вылета  $K$ -электрона из атома при внутренней конверсии и испускания гамма-кванта за этот же промежуток времени называется *парциальным коэффициентом конверсии* на  $K$ -оболочке атома. Аналогично вводятся парциальные коэффициенты для внутренней конверсии с  $L$ -,  $M$ -, ... оболочек атома:

$$w_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_\gamma}, \quad w_L = \frac{\lambda_L}{\lambda_\gamma}, \quad w_M = \frac{\lambda_M}{\lambda_\gamma}, \dots$$

Сумма парциальных коэффициентов называется *полным коэффициентом внутренней конверсии*:

$$w = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} = w_K + w_L + w_M + \dots,$$

где  $\lambda_e$  — вероятность испускания конвертированных электронов из всех оболочек атома. Величина  $\lambda_e$  растет с уменьшением энергии возбуждения ядра и с увеличением мультиплетности гамма-излучения.

6° Когда энергия, освобождающаяся при ядерном переходе, превышает удвоенную энергию покоя (стр. 527) электрона  $2m_0c^2 = 1,02$  Мэв, становится возможной внутренняя конверсия с *образованием пар* электрон — позитрон (стр. 883). Соответствующий коэффициент конверсии возрастает с увеличением энергии ядерного перехода и уменьшением мультиплетности  $\gamma$ -излучения.

7° В ряде случаев время жизни ядра в возбужденном состоянии может значительно превышать обычно наблюдаемые времена (стр. 834). Для таких метастабильных состояний ядра оно может доходить до многих лет. В зависимости от свойств уровней энергии ядер и раз-

ности энергий между уровнями, величина времени жизни ядра в метастабильном состоянии может изменяться в очень широких пределах. Например, у  $\text{Np}$  известно время жизни возбужденного ядра, соответствующее периоду полураспада 5500 лет. Разновидности одного и того же изотопа, обнаруживающие наряду с периодом полураспада, соответствующим обычному гамма-переходу, также период, отвечающий гамма-переходу из метастабильного возбужденного состояния, называются *ядерными изомерами*. Как правило, ядерные изомеры данного изотопа имеют различные значения спина.

8° *Явление ядерной изомерии* объясняется оболочечной моделью ядра (стр. 816) возникновением в ядрах с почти заполненными шуклонными оболочками (при  $N$  и  $Z$  вблизи магических чисел, стр. 817) возбужденных состояний с квантовыми числами  $l$ , сильно отличающимися от  $l$  для основных состояний ядер. В связи со значительным различием волновых функций возбужденного и основного состояний в этом случае вероятность перехода между ними оказывается малой (стр. 743), а время жизни в возбужденном состоянии — большим. Опыт показывает, что ядерная изомерия действительно наблюдается лишь для  $N$  и  $Z$ , имеющих значения вблизи (меньше) чисел 50, 82, 126 (стр. 817), где возникает *острова изомерии*.

9° Ядро в метастабильном возбужденном состоянии может отдавать свою энергию двумя путями. Ядро может перейти в основное состояние, испуская гамма-кванты или электроны внутренней конверсии, а затем испускается  $\beta$ -частицы с таким же энергетическим спектром, что и у  $\beta$ -частиц, образующихся при обычном  $\beta$ -распаде. Однако в этом случае из-за того, что время жизни метастабильного состояния больше периода полураспада  $\beta$ -распада, наблюдается больший период  $\beta$ -распада. Во втором случае, если вероятность радиационного перехода соизмерима с вероятностью  $\beta$ -распада, то  $\beta$ -распад может происходить из метастабильного состояния. Однако энергетический спектр  $\beta$ -частиц отличен от спектра в первом случае.

10° При испускании ядром гамма-кванта само ядро, вследствие закона сохранения импульса, приобретает противоположно направленный импульс (*отдача*). Если ядра, испускающие гамма-кванты, находятся в твердом теле, то спектр гамма-лучей состоит из двух компонент: а) компоненты с естественной шириной гамма-линии  $\Gamma$ ,

определяемой временем жизни ядер в данном возбужденном состоянии (стр. 681), и с энергией  $E$ ; б) компоненты с шириной линии  $\Gamma_R \sim E \frac{\bar{u}}{c} \gg \Gamma$ , где  $\bar{u}$  — средняя квадратичная скорость теплового движения (стр. 207) гамма-радиоактивных ядер в твердом теле; эта компонента имеет энергию, смещенную относительно значения  $E$  на величину энергии отдачи

$$R = \frac{E^2}{2M_0c^2},$$

где  $M_0$  — масса излучающего ядра (если считать его свободным и движущимся со скоростью  $\bar{u} \ll c$ ).

В результате линии гамма-излучения и поглощения (той же линии) сильно размываются и, кроме того, сдвинуты по энергии друг относительно друга на величину  $\sim 2R$ . Ввиду того, что для гамма-излучения  $R$  в общем не мало по сравнению с  $E$ , явление резонансного поглощения гамма-лучей ( $E_{\text{изл}} = E_{\text{погл}}$  или  $\nu_{\text{изл}} = \nu_{\text{погл}}$ ) обычно практически не наблюдается.

11° При определенных условиях удается добиться того, что излучаемый гамма-квант передает импульс не одному излучающему ядру, а всему кристаллу в целом. В результате излучаемой линии соответствует энергия отдачи  $R \approx 0$  ( $M$  велико) и  $\Gamma_R \approx \Gamma$ , т. е. ширина линий приближается к естественной, а сдвиг по энергии практически исчезает. Это явление названо *эффектом Мёссбауэра*. Одним из условий его четкого проявления является условие

$$R \ll 2k\Theta_D,$$

где  $\Theta_D$  — дебаевская температура кристалла (стр. 276),  $k$  — постоянная Больцмана (стр. 151). При  $R \ll k\Theta_D$  гамма-переходы «без отдачи» можно наблюдать уже при комнатной температуре; при  $R \sim k\Theta_D$  необходимо для наблюдения применять низкие температуры.

12° Чрезвычайная малость естественных шириин многих гамма-линий по сравнению с энергией гамма-переходов позволяет использовать эффект Мёссбауэра для проведения тончайших экспериментов (с чувствительностью порядка  $\Gamma/E$ , достигающей  $10^{-16}$ ). Этот эффект нашел применение для измерения сдвига частот фотонов в гравитационном поле, для измерения весьма малого всемановского расщепления (стр. 761) ядерных уровней энергии и т. п.

### 9. Прохождение заряженных частиц и гамма-излучения через вещество

1° Заряженные частицы и гамма-лучи, проходя через вещество, взаимодействуют с электронными оболочками и ядрами его атомов. Эти взаимодействия приводят к упругому рассеянию частиц и квантов (стр. 728), неупругому рассеянию (стр. 728), сопровождающемуся возбуждением и ионизацией атомов, возбуждением ядерных реакций (стр. 852), а также к нарушениям структуры вещества, называемым *радиационными повреждениями*.

2° Потери энергии заряженными частицами при прохождении в веществе на ионизацию и возбуждение атомов называются *ионизационными*; потери энергии на тормозное (стр. 579) излучение называются *радиационными*. Обычно рассчитываются удельные потери энергии частицами на единицу пути их в веществе:  $-\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)$ , где  $E$  — полная энергия частицы.

Удельные ионизационные потери  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}}$  для тяжелой заряженной частицы (протоны,  $\alpha$ -частицы) при энергиях  $E \ll \frac{M}{m_e} Mc^2$ , где  $M$  — масса частицы,  $m_e$  — масса электрона:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} = \frac{4\pi n_e e^4 z^2}{m_e v^2} \left[ \ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right],$$

где  $n_e$  — плотность электронов в веществе,  $ze$  — заряд частицы, пролетающей со скоростью  $v$ ;  $I$  — средняя энергия ионизации атомов вещества;  $I = 13,5 \cdot Z \text{ эв}$ ,  $Z$  — атомный номер вещества,  $\beta = v/c$ .

Удельные ионизационные потери заряженной частицы не зависят от массы  $M$  частицы, пропорциональны концентрации электронов в веществе и зависят от скорости частицы:  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} \propto z^2 n_e \varphi(v)$ , где  $\varphi(v) \propto \frac{1}{v^2}$ . С ростом энергии частицы ее удельные ионизационные потери сначала быстро падают (как  $\frac{1}{E}$ ). Затем спадание замедляется. Пройдя через минимум при  $E = Mc^2$ , ионизационные потери начинают логарифмически возрастать.

Зависимость  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}}$  от параметров частицы и среды позволяет пересчитывать потери на другие среды:  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} \propto$

VI.4.9] ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО 839  $\propto n_e = n_n Z$ , где  $Z$  — заряд ядер среды,  $n_n$  — их концентрация. Так как  $n_n \approx \text{const}$  для всех веществ, то  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} Z_2 = \frac{Z_2}{Z_1} \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} Z_1$ , где  $Z_1$  и  $Z_2$  — заряды ядер первой и второй сред.

Сравнительные величины удельных ионизационных потерь для протонов, движущихся с различными энергиями в воздухе и свинце

$E, \text{ Мэв}$	$\left(\frac{dE/d\xi}{\text{Мэв/г}\cdot\text{см}^{-2}}\right)_{\text{возл}}$	$\left(\frac{dE/d\xi}{\text{Мэв/г}\cdot\text{см}^{-2}}\right)_{\text{Pb}}$	$E, \text{ Мэв}$	$\left(\frac{dE/d\xi}{\text{Мэв/г}\cdot\text{см}^{-2}}\right)_{\text{возл}}$	$\left(\frac{dE/d\xi}{\text{Мэв/г}\cdot\text{см}^{-2}}\right)_{\text{Pb}}$
1	300	150	100	7,5	5
10	50	30	1000	2,3	1,6

Удельные ионизационные потери могут быть отнесены к единице  $\xi = xe$ , где  $\rho$  — плотность среды.  $\xi$  выражает толщину вещества в граммах на квадратный сантиметр ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ ).

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{dE}{dx} \frac{1}{\rho}$$

3° Удельные ионизационные потери электронов:

$$\left(-\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{ион}} = \frac{2\pi e^4 n_e}{m_e v^2} \left\{ \left[ \ln \frac{m_e v^2 T_e}{2I^2(1-\beta^2)} - \ln 2 \left( 2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2 \right) + 1 - \beta^2 \right] \right\},$$

где  $T_e$  — релятивистская кинетическая энергия электрона. Остальные обозначения см. в п. 2°.

В области релятивистских энергий различие в удельных ионизационных потерях для электронов и тяжелых частиц велико.

4° Удельные радиационные потери энергии на тормозное излучение  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}}$  пропорциональны квадрату ускорения  $a$  заряженной частицы с массой  $M$ . В кулоновском поле ядер атомов вещества  $a \propto \frac{1}{M}$ , поэтому  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{рад}} \propto \frac{1}{M^2}$ . Для тяжелых частиц потери на тормозное излучение даже в веществах с большим атомным номером  $Z$

невелики. Для электронов высоких энергий ввиду малости массы  $m_0$  электрона потери на тормозное излучение являются основным видом потерь энергии. Потери энергии с расстоянием в этом случае описываются экспоненциальным законом. Расстояние  $L$ , на котором энергия электрона убывает в  $e$  раз вследствие тормозного излучения, называется *радиационной длиной*.

Удельные радиационные потери электронов:

$$\left(-\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{рац}} = nE_0\Phi(Z, E_0),$$

где  $n$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$ ,  $E_0$  — начальная кинетическая энергия электрона,

$$\Phi(Z, E_0) = \begin{cases} 5,79 \cdot 10^{-28} Z(Z+1) \left[ 4 \ln \left( \frac{2E_0}{m_0 c^2} \right) - 4/3 \right] & \text{при } m_0 c^2 \leq E_0 \ll \frac{137 m_0 c^2}{Z^{1/2}}, \\ 5,79 \cdot 10^{-28} Z(Z+\xi) \left[ 4 \ln (183 \cdot Z^{-1/3}) + \frac{2}{9} \right] & \text{при } E_0 \gg 137 \frac{m_0 c^2}{Z^{1/2}}. \end{cases}$$

Здесь  $\xi = 1,2 + 1,4$  — поправка на излучение в поле атомных электронов. При уменьшении энергии электронов их тормозные потери убывают  $\propto E_0$ , а ионизационные потери изменяются незначительно. При некоторой *критической энергии*  $E_{\text{кр}}$  радиационные потери равны ионизационным. При  $E_0 < E_{\text{кр}}$  ионизационные потери преобладают над радиационными. Соотношение между радиационными и ионизационными потерями электрона с энергией  $E_e$  ( $M\text{эв}$ ) в среде с зарядом ядра  $Z$ :

$$\frac{\left(\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{рац}}}{\left(\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{ион}}} \approx \frac{E_e Z}{800}.$$

5° Потери энергии заряженной частицей на черепковское излучение (стр. 531):

$$\left(-\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{чер}} = \frac{4\pi^2 e^2}{c^2} \int \left[ 1 - \frac{1}{(\beta n)^2} \right] \nu d\nu,$$

где  $\nu$  — частота излучения,  $n(\nu)$  — показатель преломления среды для данной частоты,  $\beta = \frac{v}{c}$ . Интегрирование

производится по частотам  $\nu$ , для которых  $\beta n(\nu) > 1$ . Существенными оказываются частоты в видимой области и ближнем ультрафиолете. В плотных средах  $\left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\text{чер}}$  составляет  $10^{-3}$  от полной потери энергии частицей. В газообразных средах со средними и большими значениями  $Z$  эта доля возрастает до  $10^{-2}$ , а в легких газах (водород, гелий) — до  $10^{-1}$  от полной потери энергии.

6° Для данной среды и частицы с определенной массой и зарядом  $ze$  величина удельных ионизационных потерь является функцией только кинетической энергии (п. 2°):

$$\frac{dE}{dx} = \varphi(T).$$

Отсюда находится *пробег частицы*, т. е. длина ее пути в веществе до полной остановки.

Пробег  $R$  частицы с кинетической энергией  $T_1$ :

$$R(T_1) = \int_0^{T_1} \frac{dT}{\varphi(T)}.$$

Используя формулу п. 2°, можно привести выражение для  $R$  к виду

$$R = \frac{m}{(ze)^2} \int_0^{v_1} \frac{v}{\varphi(v)} dv,$$

где  $m$  — масса частицы,  $ze$  — ее заряд.

Для двух частиц, имеющих равные скорости в данной среде,

$$R_1 : R_2 = \frac{m_1}{z_1^2} : \frac{m_2}{z_2^2}.$$

Пробег  $R$  и кинетическая энергия  $T$  частицы с зарядом  $ze$  выражаются через пробег  $R_p$  и кинетическую энергию  $T_p$  протона в той же среде:

$$R = \frac{m}{m_p z^2} R_p, \quad T = \frac{m}{m_p} T_p.$$

7° Эмпирические формулы связи пробегов с энергиями для некоторых тяжелых частиц и сред.

Для протонов в фотоэмульсии  $T_p = aR_p^n$ , где  $a = 0,25$ ,  $n = 0,58$ . Значения  $a$  и  $n$  несколько варьируются для различных типов фотоэмульсий.  $T_p$  измеряется в  $M\text{эв}$ ,  $R_p$  — в  $мкм$ .

Для произвольной тяжелой заряженной частицы в фотоэмульсии  $T = a \left( \frac{m}{m_p} \right)^{1-n} z^{2n} R^n$ . Значения  $a$  и  $n$  сохраняются предыдущие.

Для  $\alpha$ -частиц, испускаемых естественными  $\alpha$ -источателями в воздухе,  $\bar{R} = 0,318 T^{3/2}$  ( $\bar{R}$  в см,  $T$  эв). Формула справедлива при  $3 < \bar{R}_\alpha < 7$  см.

Для  $\alpha$ -частиц с энергией до 200 Мэв в воздухе  $\bar{R} = \left( \frac{T_\alpha}{37,2} \right)^{1,8} (\bar{R}_\alpha$  в м,  $T$  в Мэв).

Для протонов с такой же энергией в воздухе  $\bar{R}_p = \left( \frac{T_p}{9,3} \right)^{1,8} (\bar{R}_p$  в м,  $T_p$  в Мэв).

Часто пользуются также эмпирическими формулами, связывающими первоначальную энергию частицы с длиной ее пути в веществе до полной остановки, называемой *пробегом частицы*.

Альфа-частицы при энергиях, соответствующих большинству альфа-радиоактивных ядер, в основном вызывают ионизацию атомов вещества, а также ряд ядерных реакций (стр. 852). Наряду с этим происходит упругое рассеяние альфа-частиц на ядрах атомов, описываемое формулой Резерфорда (стр. 731).

8° Электроны при прохождении через вещество испытывают неупругое и упругое рассеяния. Ионизация на единицу длины пробега электрона в первом приближении пропорциональна  $q N_A Z / A v_0^2$ , где  $q$  — пл. часть,  $A$  — атомный вес,  $N_A$  — число Авогадро,  $Z$  — атомный номер среды,  $v_0$  — начальная скорость электрона.

9° Связь между пробегом  $R_e$  и кинетической энергией  $T_e$  электронов в алюминии:

$$R_e = 0,407 T_e^{1,38} \text{ г} \cdot \text{см}^{-2} \text{ для } 0,15 < T_e < 0,8 \text{ Мэв};$$

$$R_e = (0,542 T_e - 0,133) \text{ г} \cdot \text{см}^{-2} \text{ для } T_e > 0, \text{ Мэв}.$$

Формулы могут быть использованы и для других сред. Для более грубых оценок применима формула

$$R_e (\text{г} \cdot \text{см}^{-2}) = 0,5 T_e \text{ Мэв} - 0,1.$$

Наряду с  $R_e$  вводится также *толщина слоя половинного ослабления*  $d_{1/2}$ , для которой интенсивность в веществе ослабляется вдвое. Величина  $d_{1/2}$  в общем случае неодинакова для разных глубин поглощающего вещества.

10° При прохождении гамма-лучей через вещество они взаимодействуют с атомами (молекулами). Основными видами взаимодействия являются фотоэффект (стр. 699), комптон-эффект (стр. 702) и образование электронно-позитронных пар (стр. 883). Кроме того, возможны ядерные реакции под действием  $\gamma$ -лучей (ядерный фотоэффект, стр. 857). При фотоэффекте под действием  $\gamma$ -кванта из  $i$ -оболочки атома выбрасывается электрон с кинетической энергией  $T_e = E_\gamma - I_i$ , где  $E_\gamma$  — энергия  $\gamma$ -кванта,  $I_i$  — энергия ионизации  $i$ -оболочки атома. Освободившееся место заполняется электронами из вышерасположенных оболочек с испусканием рентгеновских лучей или испусканием электронов Оже (стр. 779).

Сечение фотоэффекта  $\sigma_{\text{ф}}$  зависит от порядкового номера  $Z$  атома и энергии  $E_\gamma$  гамма-кванта:

$$\sigma_{\text{ф}} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma^3} \text{ при } E_\gamma \gg I_K; \quad \sigma_{\text{ф}} \propto \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}} \text{ при } E_\gamma > I_K,$$

где  $I_K$  — энергия ионизации с  $K$ -оболочки атома.

11° Дифференциальное сечение комптоновского рассеяния выражается формулой Клейна — Нишини — Тамма:

$$\sigma_K = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \left[ \frac{2(1+\epsilon)}{1+2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \ln(1+2\epsilon) \right] + \frac{1}{2\epsilon} \ln(1+2\epsilon) - \frac{1+3\epsilon}{(1+2\epsilon)^2} \right\},$$

где  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$  — классический радиус электрона,  $\epsilon = \frac{h\nu}{m_e c^2} =$

$= \frac{E_\gamma}{0,511 \text{ Мэв}}$  — отношение энергии гамма-кванта к энергии покоя электрона.

а) При  $\epsilon \ll 1$   $\sigma_K = \sigma_{\text{томс}} (1 - 2\epsilon + \frac{26}{5} \epsilon^2 + \dots)$ , где

$\sigma_{\text{томс}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$  — классическое сечение рассеяния, рассчитанное на один электрон (*томсоновское сечение рассеяния*). При малых значениях  $E_\gamma$   $\sigma_K$  линейно убывает с ростом энергии.

б) При  $\epsilon \gg 1$   $\sigma_K = \pi r_e^2 \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} + \ln 2\epsilon \right)$ , т. е. при  $E_\gamma \gg m_e c^2$   $\sigma_K \sim \frac{1}{E_\gamma}$ . С учетом наличия  $Z$  электронов в атоме полное сечение  $\sigma_K$ , рассчитанное на атом,  $\sigma_K \propto \frac{Z}{E_\gamma}$ .

12° Если процесс образования электронно-позитронной пары происходит в кулоновском поле ядра, то энергия ядра отдачи незначительна и пороговая энергия  $E_{0\gamma}$ , необходимая для образования пары,

$$E_{0\gamma} \approx 2m_0c^2 = 1,02 \text{ Мэв.}$$

При образовании пары в кулоновском поле электрона  $E_{0\gamma} \approx 4m_0c^2 = 2,04 \text{ Мэв.}$

Электронно-позитронные пары, возникающие под действием двух фотонов, образуются при условии  $E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} > 2m_0c^2$ .

Условие образования пары при соударении двух электронов:  $E_e > 7m_0c^2$ , где  $E_e$  — полная энергия движущегося электрона.

Сечение  $\sigma_{\text{пар}}$  образования пары в поле ядра:

$$\sigma_{\text{пар}} \sim Z^2 \ln E_{\gamma} \text{ при } 5m_0c^2 < E_{\gamma} < 50m_0c^2.$$

При  $E_{\gamma} < 5m_0c^2$  и  $E_{\gamma} > 50m_0c^2$   $\sigma_{\text{пар}}$  растет с увеличением энергии более медленно. В ультрарелятивистском случае  $\sigma_{\text{пар}}$  не зависит от  $E_{\gamma}$ .

13° Суммарное сечение  $\sigma$  для взаимодействия  $\gamma$ -лучей с веществом:

$$\sigma = \sigma_{\text{ф}} + \sigma_{\text{к}} + \sigma_{\text{пар}}.$$

Формулы для сечений отдельных процессов приведены в пп. 10°–12°.

В области энергий  $\gamma$ -лучей  $E_{\gamma} < E_1$ , где  $E_1$  имеет порядок  $(10^{-2} \div 10^{-1}) \text{ Мэв}$ , основным процессом взаимодействия  $\gamma$ -лучей с веществом является фотоэффект; в области энергий  $E_1 <$

$< E_{\gamma} < E_2$ , где  $E_2$  по порядку величины составляет  $(1 \div 10) \text{ Мэв}$ , основным является комптон-эффект; в области больших энергий  $E_{\gamma} > E_2$  — процесс образования электронно-позитронных пар. На рис. VI.4.6 при-

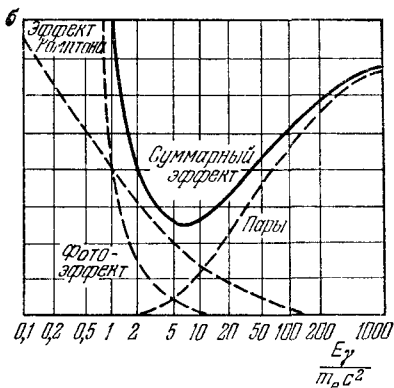


Рис. VI.4.6.

ведена зависимость сечений взаимодействия  $\gamma$ -лучей в свинце от энергии гамма-кванта для каждого из процессов и для суммарного сечения.

14° Ослабление интенсивности гамма-лучей в веществе при условии, что пучок гамма-лучей очень узок, происходит по закону

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где  $I$  — интенсивность на глубине  $x$ ,  $I_0$  — интенсивность до входа в вещество. Для широких пучков гамма-лучей

$$I = I_0 e^{-\mu x} B(\mu x, E_{\gamma}, Z),$$

где  $B$  — так называемый *фактор накопления излучения*,  $B \approx (1 + \mu x)^n > 1$ ,  $n \approx 2 \div 3$ . Величина  $\mu$  называется *линейным коэффициентом ослабления* излучения и имеет смысл обратной длины, на которой излучение ослабляется в  $e$  ( $\approx 2,718$ ) раз. Поскольку ослабление гамма-лучей в веществе строго пропорционально его плотности  $\rho$ , часто наряду с  $\mu$  вводят *массовый коэффициент поглощения*  $\mu/\rho$ . Пользуются также *слоем половинного ослабления* для гамма-лучей:  $d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,69}{\mu}$ . Проникающая способность гамма-лучей определяется их первоначальной энергией, плотностью вещества и атомным номером вещества. Для очень жестких гамма-лучей, с энергиями порядка  $10^8 - 10^9 \text{ эв}$ , проникающая способность может достигать нескольких метров (в конденсированных средах).

Линейные коэффициенты ослабления  $\gamma$ -излучения в различных средах

Энергия, Мэв	Линейный коэффициент ослабления $\mu$ , см <sup>-1</sup>		
	воздух	вода	свинец
0,1	$1,98 \cdot 10^{-4}$	0,172	5,99
0,5	$1,11 \cdot 10^{-4}$	0,096	1,67
1,0	$0,81 \cdot 10^{-4}$	0,070	0,75

15° При расчетах интенсивности гамма-лучей в данном веществе, если источник излучения находится в другой среде, необходимо учитывать отражение излучения на границе двух сред (стр. 585), а также самопоглощение излучения в самом источнике вследствие его конечных размеров. Фактор, учитывающий эти обстоятельства,



называется *альбедо*. Величина альбедо быстро возрастает с уменьшением энергии гамма-лучей.

16° Единицы активности радиоактивных веществ определяются числом атомных ядер, распадающихся в единицу времени. Единица *кюри* определяется как активность препарата, в котором в одну секунду происходит  $3,700 \cdot 10^{10}$  актов распада.

Применяются также кратные и дольные единицы: *микрокюри* ( $10^{-6}$  *кюри*), *милликюри* ( $10^{-3}$  *кюри*), *килокюри* ( $10^3$  *кюри*), *мегакюри* ( $10^6$  *кюри*). Наряду с *кюри* применяется (реже) *резерфорд* (rd) — активность препарата, в котором в одну секунду совершается  $10^6$  актов распада;

$$1 \text{ кюри} = 3,7 \cdot 10^4 \text{ rd.}$$

Дольные единицы: миллирезерфорд — mrd, микро-резерфорд —  $\mu$ rd.

$$1 \text{ rd} = 10^3 \text{ mrd} = 10^6 \mu\text{rd},$$

$$1 \mu\text{rd} = 1 \text{ расп/сек.}$$

Единицами *кюри* или rd обычно пользуются для характеристики  $\alpha$ - или  $\beta$ -активности радиоактивных веществ.

17° В жидкостях и газах употребляются следующие единицы концентрации радиоактивных веществ:

$$1 \text{ кюри/л} = 2,2 \cdot 10^{12} \text{ расп/мин} \cdot \text{л};$$

$$1 \text{ эман} = 10^{-10} \text{ кюри/л} = 220 \text{ расп/мин} \cdot \text{л};$$

$$1 \text{ махе} = 3,64 \cdot 10^{-10} \text{ кюри/л} = 780 \text{ расп/мин} \cdot \text{л}.$$

Для урана, тория и радия объемные концентрации выражаются также в г/л.

18° Единицей  $\gamma$ -активности является миллиграмм-эквивалент (*мг-эке*) радия — активность радиоактивного препарата,  $\gamma$ -излучение которого при идентичных условиях измерения создает в воздушно эквивалентной ионизационной камере такую же ионизацию, какую создает 1 мг радия Государственного эталона радия СССР. Точечный источник в 1 мг радия, находящийся в равновесии с продуктами распада, после начальной фильтрации 0,5 мм платины создает на расстоянии 1 см в воздухе мощность физической дозы 8,4 рентгена в час (*р/час*) (см. п. 20°). 1 мг-эке радия соответствует  $\gamma$ -активность любого радиоактивного вещества, точечный источник которого создает на расстоянии 1 см мощность физической дозы 8,4 *р/час*.

Применяется также рентген-час-метр (*р/ч.м*):  $\gamma$ -активность такого источника, который создает на расстоянии 1 м мощность дозы (см. п. 20°) 1 *р/час*. Источник с  $\gamma$ -активностью 1,2 мг-эке радия создает мощность дозы 1 *р/ч.м*.

19° Интенсивность *I* гамма-излучения определяется количеством энергии  $\gamma$ -лучей, проходящей в единицу времени через единицу площади поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению распространения  $\gamma$ -лучей. *I* измеряется в *Мэв/см<sup>2</sup>·сек*, *эрг/см<sup>2</sup>·сек* или *вт/см<sup>2</sup>*.

20° Мерой действия излучения в какой-либо среде являются величины, называемые *дозами излучения*. Различаются:

а) *Доза облучения* — величина, характеризующая количество излучения в среде и измеряемая по ионизирующему его действию в воздухе. Для рентгеновских и  $\gamma$ -лучей доза облучения измеряется в *рентгенах*, для других ионизирующих излучений — в физических эквивалентах рентгена — *бэрах*.

*Рентгеном* (*р*) называется доза, при которой в  $0,001293$  г воздуха образуются ионы с суммарным зарядом в одну электростатическую единицу количества электричества каждого знака. Это соответствует образованию  $2,083 \cdot 10^9$  пар одновалентных ионов в  $1 \text{ см}^3$  воздуха при нормальных условиях (стр. 151) и связано с затратой 0,11 *эрг*, или  $6,8 \cdot 10^4$  *Мэв* энергии в  $1 \text{ см}^3$  воздуха. При пересчете на 1 г воздуха 1 *р* соответствует образованию  $1,61 \cdot 10^{12}$  пар одновалентных ионов и затрате энергии 84 *эрг*, или  $6,8 \cdot 10^4$  *Мэв*.

1 *фэр* есть доза любого ионизирующего излучения, при котором энергия, поглощенная в 1 г облучаемого вещества, равна потере энергии на ионизацию, создаваемую в 1 г воздуха дозой в 1 *р* рентгеновских или  $\gamma$ -лучей.

$$1 \text{ фэр} = 84 \text{ эрг/г} = 1,61 \cdot 10^{12} \text{ пар ионов/г} = 5,3 \times 10^7 \text{ Мэв/г.}$$

б) *Доза поглощенная* — энергия любого вида излучения, поглощенная единицей массы облучаемого вещества. Для всех ионизирующих излучений поглощенная доза измеряется в *радах* (rad).

1 rad соответствует поглощению 100 *эрг* энергии в 1 г облученного вещества: 1 rad = 1,19 *фэр*; 1 *фэр* = 0,84 rad.

в) *Доза биологическая* — величина, определяющая биологическое воздействие излучения на организм и измеренная в биологических эквивалентах рентгена — *бэрах*.

*Бэр* есть количество энергии, поглощенное тканью, биологически эквивалентное 1 *p* рентгеновских или  $\gamma$ -лучей. При облучении биологической ткани дозой  $\gamma$ -лучей в 1 *p* в 1 г ткани поглощается около 93 *эрг* энергии излучения.

г) *Доза интегральная* — общая доза ионизирующего излучения любого типа, поглощенная всей массой (или объемом) вещества. Измеряется в *грамм-рентгенах* или *грамм-радах*.

21° Доза излучения, отнесенная к единице времени, называется *мощностью дозы N*.

Связь между мощностью дозы *N*  $\gamma$ -лучей (в *p/сек*) и их интенсивностью *I* (в *эрг/см<sup>2</sup>·сек*) (п. 19°):

$$N = \frac{I\mu}{0,11} \text{ p/сек} = nh\nu \frac{1,6 \cdot 10^{-6} \mu}{0,11} \text{ p/сек},$$

где  $\mu$  — линейный коэффициент ослабления (п. 14°), *n* — число фотонов, пересекающих площадь в 1 *см<sup>2</sup>* за 1 *сек*, *hν* — энергия фотона в *Мэв*, 0,11 — энергетический эквивалент рентгена в воздухе (п. 20°).

Некоторые данные о дозах излучения:

Источник облучения	Доза излучения или ее мощность
Естественный фон (космические лучи, радиоактивность окружающей среды и тела человека) . . . . .	0,1 бэр/год
Дозы излучения, применяемые в медицине (местное облучение) . . . . .	до 10 000 бэр
Дозы излучения, приводящие к общему облучению всего тела (лучевая болезнь со смертельным исходом) . . . . .	100 500 бэр

22° Биологическая эффективность различных видов излучений:

Вид излучения	1 фэр соответствует:	1 бэр соответствует:
$\beta$ -лучи и $\gamma$ -лучи . . . . .	1 бэр	1 фэр
$\alpha$ -частицы и протоны . . . . .	10 бэр	0,1 фэр
Тепловые нейтроны . . . . .	5 бэр	0,2 фэр
Быстрые нейтроны (<40 Мэв) . . . . .	10 бэр	0,1 фэр

## 10. Методы наблюдения и регистрации ионизирующих частиц и квантов излучения

1° Для регистрации и исследования различных излучений, как вызывающих ионизацию, так и неионизирующих, применяется *ионизационная камера*.

В случае неионизирующих излучений ионизация является вторичным процессом, происходящим за счет вторичных заряженных частиц, возникающих при взаимодействии излучения с веществом. Ионизационная камера представляет собой замкнутый объем с окошком для выпуска излучения, в который введены два электрода. Под действием приложенного напряжения ионы, созданные излучением в газе, движутся к электродам. Ионный ток обычно слаб и требует для своего измерения усиления чувствительности *электрометров*. Напряжение на электродах выбирается с таким расчетом, чтобы камера работала в режиме насыщения своей вольтамперной характеристики (стр. 390).

2° Для наблюдения следов отдельных ионизирующих частиц при различных их взаимодействиях с атомами и ядрами применяются камера Вильсона, метод ядерной фотографической эмульсии и пузырьковые камеры.

3° В *камере Вильсона* находятся насыщенные пары (стр. 250) какой-либо жидкости. Периодически путем резкого расширения объема камеры пары делаются пересыщенными (стр. 251). Если в момент расширения в камеру влетает ионизирующая частица, то образованные ею ионы становятся центрами конденсации (стр. 251) молекул пересыщенного пара. При освещении рабочего объема камеры в этот момент сильным пучком света и одновременном стереофотографировании фиксируются ионные следы (*треки*) траекторий ионизирующих частиц в камере.

Помещение камеры в магнитное поле (*метод Вильсона — Скобельцына*) позволяет по изучению параметров следа сделать заключение о природе и свойствах частицы. Так, кривизна трека частицы в магнитном поле определяет знак ее заряда. Длина и толщина трека, отклонения его от прямолинейности (без поля) за счет многократного рассеяния, количество капель на единицу длины трека позволяют производить *идентификацию*, или *отождествление, частиц*. Пуск камеры может также производиться по сигналу от счетчика (п. 8°), зарегистрировавшего появление частицы в схеме совпадений (п. 11°).

4° Метод ядерной фотографической эмульсии (в частности, толстослойных фотопластинок) основан на том, что, проходя через эмульсию, заряженная частица ионизирует атомы и молекулы среды, составляющей эмульсию. В частности, кристаллы галлоидного серебра фотопластинок разрушаются под действием ионизирующих частиц и становятся способными к проявлению. Созданное частицами скрытое фотографическое изображение становится видимым после проявления пластинок и изучается стереографически на послойных срезах фотоэмульсии. Метод ядерной фотографической эмульсии имеет преимущество перед камерами Вильсона в большой задерживающей способности, т. е. в сильном торможении частиц, позволяя изучать взаимодействия частиц очень больших энергий (стр. 888).

5° Преимущества получения непосредственно пространственной картины треков частиц с высокой задерживающей способностью для частиц высоких энергий соединяет в себе пузырьковая камера. Она представляет собой сосуд, наполненный какой-либо прозрачной перегретой жидкостью. Ионизирующая частица, попадая в камеру, вызывает резкое вскипание жидкости в узком канале вдоль своего пути. Возникающая при этом цепочка пузырьков пара фотографируется, как в камере Вильсона. Наиболее употребительными чистыми рабочими жидкостями для пузырьков камер являются жидкий водород, пропан  $C_3H_8$ , а также семейства фреонов ( $CClF_3$ ,  $CClF_2$ , бромистый фреон  $CBrF_3$  и др.). В камере с жидким водородом изучаются эффекты столкновений частиц высоких энергий с ядрами водорода (протоны). Помимо чистых жидкостей применяются пересыщенные растворы газов в жидкостях, а также смеси жидкостей, позволяющие работать при комнатных температурах.

6° Для регистрации ионизирующих частиц при невысокой активности их источников применяются счетчики: пропорциональный, Гейгера — Мюллера, искровой и сцинтилляционный. Не позволяя непосредственно идентифицировать частицы, счетчики дают возможность определить плотности их потока и распределение частиц по энергиям в потоке.

7° Пропорциональный счетчик представляет собой обычно цилиндрический сосуд, заполненный каким-либо газом, с двумя concentрическими электродами, один из которых (анод) является проволокой, натянутой по оси цилиндра, а другой (катод) образует внешнюю металлическую

оболочку рабочего объема счетчика. При попадании ионизирующей частицы в счетчик, вследствие того что он работает на линейной части вольтамперной характеристики рабочего газа (стр. 390), в счетчике возникает самостоятельный разряд (стр. 390). Возле анода из-за самого градиента напряженности электрического поля возникает ударная ионизация (стр. 390) молекул газа первичными ионами, и появляется импульс тока, величина которого пропорциональна первичной ионизации, т. е. энергии влетевшей в счетчик частицы.

8° Счетчик Гейгера — Мюллера не отличается существенно по конструкции и по принципу действия от пропорционального счетчика, но работает на участке насыщения вольтамперной характеристики наполняющего его газа (так называемом *плато*), вследствие чего создает одинаковые импульсы тока независимо от первичной ионизации, т. е. непосредственно считает число ионизирующих частиц.

9° Работа сцинтилляционного счетчика основана на явлении люминесценции (стр. 709). Световая вспышка, возникающая при попадании заряженной частицы в сцинтиллирующий кристалл, воспринимается фотомножителем и подсчитывается электронной схемой. Высота импульса зависит от интенсивности вспышки, а последняя определяется энергией частицы. Поэтому счетчик позволяет определять распределение частиц по энергиям.

10° В случаях, когда ионизация, создаваемая частицей в рабочем объеме счетчика или ионизационной камеры, незначительна либо же вовсе отсутствует (для нейтральных частиц), перед регистрирующими приборами или внутри них устанавливаются вещества, из которых первичные частицы выбивают заряженные частицы. Например, для регистрации гамма-лучей, создающих слабую ионизацию в газах и веществах с малыми атомными номерами, используются тонкие металлические фольги, и счетчик регистрирует выбитые из фольг фотоэлектроны. Для регистрации нейтронов используются водородосодержащие вещества, причем счетчик регистрирует протоны, выбитые из них нейтронами.

11° Для наблюдения за движением какой-либо одной частицы в потоке или для наблюдения за движением частиц одного сорта в потоке, состоящем из ряда сортов частиц, используются несколько счетчиков или камер, связанных в *схему совпадений*. В этой схеме импульсы счетчиков засчитываются только в том случае, если

ионизация последовательно зарегистрирована за малый промежуток времени во всех счетчиках. Метод совпадений дает возможность устанавливать направления движения частиц, их скорости, распределение потоков в пространстве, а также генетическую связь между первичными и образовавшимися в результате взаимодействий вторичными частицами в веществе и т. д.

12° Если в единицу времени счетчик регистрирует большое число частиц, то для счета числа его импульсов механические нумераторы непригодны вследствие их инерционности. В этих случаях перед нумератором устанавливаются *пересчетные схемы* — специальные электронные устройства, пересчитывающие число импульсов счетчика в отношении 1:2<sup>n</sup> либо в отношении 1:10<sup>m</sup> (более распространены схемы первого типа с  $n = 6$ , т. е. с пересчетом на 64).

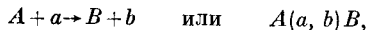
## ГЛАВА 5

### ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

#### 1. Основные понятия

1° *Ядерными реакциями* называются превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействиями с элементарными частицами или друг с другом. В большинстве ядерных реакций участвуют два ядра и две частицы; одна пара ядро — частица называется исходной, а другая — конечной.

2° Ядерные реакции символически записываются в виде



где  $A$  и  $B$  — исходное и конечное ядра,  $a$  и  $b$  — исходная и конечная частицы в реакции. Ядерная реакция характеризуется *энергией ядерной реакции*. Она равна разности кинетических энергий конечной и исходной пар в реакции. При  $Q < 0$  реакции идут с поглощением энергии и называются *эндотермическими*; при  $Q > 0$  реакции идут с выделением энергии и называются *экзотермическими*.

3° Эндотермические ядерные реакции становятся возможными при *пороговой* кинетической энергии вызывающих их частиц:

$$E_{\text{порог}} = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q|,$$

где  $M_A$  — масса неподвижного ядра (*мишени*),  $M_a$  — масса налетающей на ядро частицы.

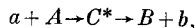
4° Взаимодействие исходной пары ядро — частица (п. 1°) может заключаться: 1) в *упругом рассеянии*, при котором происходит только перераспределение кинетической энергии соударяющихся частиц; 2) в *неупругом рассеянии*, при котором из ядра вылетает частица  $b = a'$ , тождественная с налетающей на мишень, но обладающая меньшей энергией. Ядро мишени при этом переходит в возбужденное состояние ( $A = A^*$ ). Символическая запись неупругого рассеяния:  $a + A \rightarrow A^* + a'$  или  $A(a, a')A^*$ ; 3) в *ядерной реакции*, в результате которой возникают новые ядро  $B \neq A$  и новая частица  $b \neq a$ , так что процесс происходит согласно схеме  $a + A \rightarrow B + b$  или  $A(a, b)B$ . Ядерная реакция приводит к изменению свойств и состава исходной пары или к превращению элементарных частиц. Во всех ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения: суммарного электрического заряда и числа нуклонов (барионного заряда, стр. 869), энергии, импульса, момента импульса и четности (стр. 832), а также изотопического спина (стр. 869) или его проекции.

5° Ядерные реакции изучаются методами теории столкновений. Вероятность ядерной реакции характеризуется величиной эффективного сечения  $\sigma$  (стр. 727). Наряду с эффективным сечением, ядерные реакции характеризуются *выходом* — отношением числа ядерных превращений к числу исходных частиц  $a$ . Функция, описывающая зависимость  $\sigma$  от энергии бомбардирующих частиц, называется *функцией возбуждения ядерной реакции*. Ядерные реакции можно рассматривать как квантовые переходы системы ( $a + A$ ) в систему ( $b + B$ ).

В ряде случаев ядерная реакция может происходить неоднозначно, т. е., наряду со схемой  $a + A \rightarrow B + b$ , она может протекать по схеме  $a + A \rightarrow C + c$ , т. е.  $A(a, c)C$ , и по другим схемам. Возможные пути протекания ядерной реакции называются ее *каналами*. Начальный этап реакции называется *входным каналом*.

6° В соответствии с характером взаимодействия частицы  $a$  с мишенью  $A$  различаются *прямые взаимодействия*, когда ядерная реакция происходит в один этап, и *ядерные реакции*, происходящие в два этапа. На первом этапе налетающая частица застревает в ядре-мишени. Энергия влетевшей в ядро частицы быстро распределяется между нуклонами ядра, и ни один из них не получает достаточной энергии для вылета из ядра. Проходит большое

время сравнительно с характерным ядерным временем ( $10^{-22} \div 10^{-23}$  сек), пока энергия в ядре вновь концентрируется на одной частице и следует вылет ее из ядра (второй этап ядерной реакции). Такие ядра, образовавшиеся в результате поглощения частицы и находящиеся в возбужденном состоянии, называются *промежуточными, составными (компаунд-ядра)*. Ядерная реакция при этом идет как бы в два этапа:



где  $C^*$  — составное ядро. Время жизни составных ядер достигает  $10^{-15} \div 10^{-16}$  сек.

7° Характер распада составного ядра не зависит от того, каким образом оно образовалось. Различные возможные способы распада имеют ту или иную вероятность, определяемую *парциальной шириной  $\Gamma_i$* , соответствующей данному способу распада. Вероятность  $w_b$  распада составного ядра с испусканием частицы  $b$  (п. 4°)

$w_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma}$ , где  $\Gamma_b$  — парциальная ширина данного типа распада,  $\Gamma$  — полная ширина, равная сумме всех ширин, соответствующих всем возможным способам распада.

Ширина уровня  $\Gamma = \sum \Gamma_b$  здесь есть мера неопределенности энергии ядра в данном состоянии, связанная с соотношением неопределенности для энергии и времени (стр. 720). Эффективное сечение  $\sigma(a, b)$  ядерной реакции  $A(a, b)B$  (п. 4°)  $\sigma(a, b) = \sigma(a)w_b$ , где  $\sigma(a)$  — эффективное

сечение образования промежуточного ядра:  $\sigma(a) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\lambda^2}{4\pi} D_l \eta_l$ . Здесь  $l$  — момент импульса налетающих частиц,  $\lambda$  — длины их дебройлевских волн (стр. 715),  $D_l$  — вероятность прохождения через потенциальный барьер налетающей частицы с моментом импульса  $l$ ,  $\eta_l$  — вероятность прилипания этой частицы к ядру-мишени, определяемая ядерным взаимодействием  $a$  и  $A$  (п. 4°).

В капельной модели ядра (стр. 815) налетающая частица рассматривается как источник повышения «температуры» ядра-капли, а вылетевшая из ядра частица — как результат «испарения» из капли ядерного вещества.

8° Эффективное сечение  $\sigma_n$  ядерной реакции образования составного ядра под действием нейтрона с нулевым моментом импульса ( $l=0$ ) вблизи одного из уровней этого ядра (для изолированного уровня) выражается

формулой Брейта — Вигнера:

$$\sigma_n \approx \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где  $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ ,  $\lambda$  — дебройлевская волна нейтрона,  $\Gamma$  — полная ширина уровня,  $\Gamma_n$  — нейтронная ширина,  $E$  — энергия нейтрона,  $E_0$  — резонансная энергия нейтрона, равная энергии уровня составного ядра. При  $\Gamma = \Gamma_n$  в резонансе ( $E = E_0$ ) сечение достигает максимального значения  $\sigma_n \approx 4\pi \lambda^2$  (спиновый множитель опущен).

## 2. Общая классификация ядерных реакций

1° Ядерные реакции классифицируются: а) по энергии вызывающих их частиц; б) по роду участвующих в них частиц; в) по роду участвующих в них ядер; г) по характеру происходящих ядерных превращений.

2° Различают ядерные реакции при малых, средних и высоких энергиях. Реакции при малых энергиях (порядка  $\text{эВ}$ ) происходят в основном с участием нейтронов. Реакции при средних энергиях (до нескольких  $M\text{эВ}$ ) вызываются также заряженными частицами, гамма-квантами и вторичными космическими лучами (стр. 888). Реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи  $M\text{эВ}$ ) приводят к разложению ядер на составляющие их нуклоны и к рождению отсутствующих в свободном виде элементарных частиц (мезонов, гиперонов и др.) (стр. 871).

3° По роду участвующих в ядерных реакциях частиц различают: а) реакции под действием нейтронов, б) реакции под действием заряженных частиц — протонов, дейтронов (ядер тяжелого водорода), альфа-частиц (ядер гелия) и многозарядных ионов тяжелых химических элементов; источниками заряженных частиц являются: естественно-радиоактивные элементы (стр. 818), ускорители заряженных частиц (стр. 445), космические лучи (стр. 887); в) реакции под действием гамма-квантов.

4° По роду участвующих в ядерных реакциях ядер различают: реакции на легких ядрах (с массовыми числами  $A < 50$ ), реакции на средних ядрах ( $50 < A < 100$ ) и реакции на тяжелых ядрах ( $A > 100$ ).

5° Для реакций под действием заряженных частиц характерно наличие кулоновского потенциального барьера, который должны преодолеть частицы, чтобы проникнуть в ядро и вызвать реакцию. Благодаря туннельному

эффекту (стр. 733) такие реакции начинаются при энергиях частиц, меньших высоты потенциального барьера. Сходство механизмов ядерных реакций под действием заряженных частиц и нейтронов заключается в образовании возбужденного составного ядра (стр. 854) с его последующим распадом. Различие ядерных реакций на заряженных частицах и нейтронах сказывается за пределами ядра и связано с разной проникаемостью кулоновского барьера для частиц, имеющих заряд и нейтроны. В области малых энергий наиболее вероятно неупругое рассеяние протона  $p$  или альфа-частицы  $\alpha$ , т. е. реакции  $(p, p)$  и  $(\alpha, \alpha)$ . В области средних энергий ( $E \sim 1$  Мэв) становятся возможными реакции  $(p, n)$ ,  $(\alpha, n)$ ,  $(\alpha, 2n)$  и  $(\alpha, 3n)$  с вылетом в каждом акте реакции соответственно одного, двух и трех нейтронов  $n$ .

6° Особым видом реакции является реакция срыва на дейтронах  $d$  типа  $(d, p)$  или  $(d, n)$ .

Ввиду слабой связи протона с нейтроном в дейтроне, а также благодаря большим размерам дейтрона при его приближении к ядру-мишени нейтрон проникает в ядро, а протон находится вне его. В результате образуется ядро, являющееся изотопом ядра-мишени. Такие ядерные реакции, происходящие при энергиях  $d$  порядка нескольких Мэв, называются *реакциями срыва*. При этом реакция  $(d, p)$  оказывается более вероятной, чем  $(d, n)$ , и ядро характеризуется небольшой энергией возбуждения, часто меньшей, чем энергия связи нейтрона, определяющая возможность его распада (стр. 872). При больших энергиях дейтронов ядерные реакции срыва остаются преобладающим типом реакций на дейтронах. Однако в этом случае как нейтрон, так и протон дейтрона могут проникать в ядро, в то время как другая часть дейтрона остается вне мишени. Поэтому при больших энергиях дейтронов существует одинаковая вероятность реакций  $(d, p)$  и  $(d, n)$ .

7° Для реакций под действием нейтронов характерна заметная вероятность уже в области тепловых энергий нейтронов ( $E_n \sim 0,025$  эв) в силу отсутствия для нейтронов потенциального барьера для проникновения в ядро. Реакции с нейтронами при малых энергиях идут с образованием составного ядра и являются резонансными. Распространенной реакцией для медленных нейтронов на ядрах, за исключением самых легких, является *радиационный захват* нейтронов протонами ядер  $(p, \gamma)$ , в результате которого составного ядра не образуется, а ядро возвра-

щается из возбужденного в основное состояние, испустив гамма-квант (стр. 833). Наряду с радиационным захватом нейтронов происходит их испускание с первоначальной энергией (*упругое рассеяние* нейтронов). Для быстрых нейтронов имеет место *неупругое* их *рассеяние* с испусканием гамма-квантов  $(n, \gamma)$ . Нейтроны также вызывают реакции деления ядер (подробнее см. п. 9°).

8° При взаимодействиях ядер с налетающими гамма-квантами происходит *фотоядерная реакция* (*ядерный фотозффект*). Виды этой реакции: испускание ядром протона, нейтрона, а также деление (*фотоделение*) ядер. Одной из распространенных реакций является *фоторассечение дейтрона*:  $d + \gamma \rightarrow p + n$ , которое становится возможным, когда энергия гамма-кванта превысит энергию связи протона и нейтрона в дейтроне ( $2,23$  Мэв). Ядерный фотозффект объясняется с помощью представления о составном ядре, возбужденном поглощением гамма-кванта. В этой реакции наиболее вероятно испускание нейтрона. Наряду с этим (для тяжелых ядер) существует процесс выбивания протона из ядра прямым «ударом» гамма-кванта, при котором вылетающий протон забирает почти всю энергию  $\gamma$ -кванта (*прямой ядерный фотозффект*). Эффективные сечения фотоядерных реакций характеризуются очень широким максимумом в области энергий  $E_\gamma = 10 \div 20$  Мэв почти для всех ядер (так называемый *гигантский резонанс*). При  $E_\gamma \geq 2m_\pi c^2$ ,  $E_\gamma \geq 2m_{p,n} c^2$  происходят *реакции фоторозведения* мезонов, нуклонов и т. д. ( $m_\pi$  — масса покоя  $\pi$ -мезона,  $m_{p,n}$  — масса покоя нуклона). Область фоторождения соответствует энергиям  $10^8 - 10^{10}$  эв.

9° *Ядерные реакции деления* (а также *самопроизвольное*, или *спонтанное*, *деление ядер*) возможны лишь для очень тяжелых ядер элементов, расположенных в конце периодической системы. Неустойчивость ядер относительно деления связана с большим количеством в них протонов и связанным с ним увеличением кулоновских сил отталкивания, особенно вблизи границ ядра. Поэтому потенциальный барьер для развала ядра на две и более крупные части (*осколки*) оказывается невысоким и может быть преодолен уже при небольших энергиях активации, сообщаемых ядру попаданием в него нейтронов даже с малой кинетической энергией. В результате резонансный захват нейтрона ядром с образованием составного ядра сопровождается делением последнего. Указанный потенциальный барьер может быть также

преодолен посредством туннельного эффекта (спонтанное деление ядер).

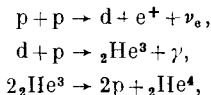
10° В рамках обобщенной модели ядра (стр. 818) деление ядра рассматривается как результат такой деформации ядерной поверхности, при которой возникает ее неустойчивость, приводящая к возникновению «перетяжки» и последующему отделению друг от друга двух и более частей ядра по разные стороны «перетяжки» (подобно дроблению жидкой капли). Капельная модель ядра (стр. 815) приводит к следующему условию, определяющему возможность деления ядра:  $\frac{Z^2}{A} \geq 17$ . Величина  $\frac{Z^2}{A}$  называется *параметром деления*. Это условие выполняется для всех ядер, начиная с серебра  ${}_{47}\text{Ag}^{108}$ , для которого параметр деления  $\approx 20$ . Из капельной модели следует, что ядра, для которых  $(Z^2/A)_{\text{крит}} \geq 49$  (*критический параметр деления*), совершенно неустойчивы относительно деления (потенциальный барьер для деления исчезает) и в природе существовать не могут. Для открытого летом 1964 г. в Дубне элемента курчатовия ( $Z = 104$ ) параметр деления  $\frac{Z^2}{A} \approx 41$ , т. е. приближается к критическому значению. Энергетическая неустойчивость тяжелых ядер по отношению к делению связана с тем, что удельная энергия связи (стр. 808) в тяжелых ядрах составляет  $\approx 7,6 \text{ Мэв}$ , в то время как для ядер атомов середины периодической системы энергия связи на один нуклон  $\approx 8,7 \text{ Мэв}$ .

11° Наиболее вероятным в реакции деления является деление ядра на две части. При делении тепловыми нейтронами и спонтанном делении отношение масс осколков примерно 3:2. Вероятность деления ядра на три части составляет  $10^{-2} - 10^{-6}$  от вероятности деления на две части. Деление ядра на еще большее число частей имеет пренебрежимо малую вероятность при обычных энергиях частиц. Оба образующихся осколка перегружены нейтронами и вследствие этого находятся в сильно возбужденных состояниях, из которых они приходят в основное состояние в ряд стадий, испытывая несколько бета-распадов (стр. 819) и испуская нейтроны (так называемые *запаздывающие нейтроны*). Реакции деления ядер обычно являются экзотермическими с количеством выделившейся энергии  $Q \sim 10^8 \text{ эв}$  в каждом акте реакции. Энергия реакции освобождается в виде кинетической энергии оскол-

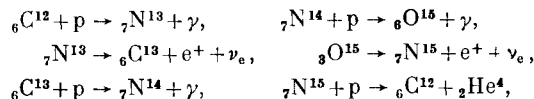
ков и нейтронов, вылетающих непосредственно в момент реакции из делящегося ядра (*мгновенные нейтроны*).

12° Особым видом ядерных реакций являются экзотермические *реакции синтеза* легких ядер, эффективно протекающие при сверхвысоких температурах (порядка  $10^7 - 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ ) и самопродолжающиеся за счет значительного выделения в них энергии. Такие реакции названы *термоядерными*. Высокие температуры в них необходимы для того, чтобы кинетическая энергия теплового движения ядер оказалась достаточной для преодоления кулоновского потенциального барьера ядер и последующего возбуждения реакции синтеза. Термоядерные реакции начинаются при энергиях теплового движения ядер, несколько меньших высоты потенциального барьера (туннельный эффект, см. также стр. 864, п. 15°).

13° Термоядерные реакции являются, по-видимому, основными источниками энергии звезд. Известны два *термоядерных цикла*, в которых энергосодержание происходит за счет превращения ядер водорода в ядра гелия. В одном из вариантов *протонно-протонного цикла*:



ядро гелия образуется из 4 протонов и выделяется энергия. В одном из вариантов *углеродно-азотного цикла*:



т. е.  $4p \rightarrow {}_2\text{He}^4 + 2e^+ + 2\nu_e$  ( $\nu_e$  — электронное нейтрино,  $\gamma$  — гамма-квант), ядро углерода  ${}_6\text{C}^{12}$  играет роль катализатора; этот цикл также сопровождается большим выделением энергии.

### В. Физические основы ядерной энергетики

1° Зависимость эффективного сечения ядерной реакции деления от энергии вызывающих ее нейтронов различна для разных ядер. Для одной группы ядер (например,  $U^{233}$ ,  $U^{235}$ ,  $\text{Pu}^{239}$ ) эффективное сечение реакции имеет максимумы для медленных нейтронов ( $E \sim 0,025 \text{ эв}$ ), а также для промежуточных нейтронов ( $E \sim 1 - 10^3 \text{ эв}$ ). Для

другой группы ядер (например,  $\text{Th}^{232}$ ,  $\text{U}^{233}$ ) эффективное сечение реакции деления является наибольшим для быстрых нейтронов ( $E \sim 10^6 \text{ эв}$ ). Это связано с различной энергией связи нейтронов в ядрах с четным или нечетным числом нуклонов в ядре. В случае захвата нейтрона ядром  ${}_{92}\text{U}^{235}$  захваченный нейтрон является четным и его энергия связи больше, чем энергия связи нейтрона, захваченного ядром  ${}_{92}\text{U}^{238}$  и являющегося нечетным.

2° В каждом акте реакции деления тяжелых ядер из сильно возбужденных ядер испускаются от 2 до 3 мгновенных нейтронов (стр. 859). Нейтроны деления, взаимодействуя с соседними ядрами делящегося вещества, в свою очередь вызывают в них реакцию деления, и происходит лавинообразное нарастание числа актов деления. Такая реакция деления называется *цепной* по аналогии с цепными химическими реакциями, под которыми понимаются реакции, продукты которых могут вновь вступать в соединения с исходными веществами. Особенностью подобных реакций является непрерывное восстановление активных центров. Появление каждого нового центра сопровождается большим числом повторяющихся звеньев (*цепей*) реакции. В цепной ядерной реакции деления роль активных центров играют нейтроны деления.

3° Скорость цепной реакции деления  $v$  равна числу актов деления ядер в веществе за единицу времени:

$$v = \frac{\sigma v_0}{1 - \mu\alpha} [1 - e^{-(v_1 + v_2)(1 - \mu\alpha)t}],$$

Здесь  $v_1$  — удельная скорость реакции (в расчете на один исходный нейтрон),  $v_0$  — скорость зарождения нейтронов в делящемся веществе,  $v_2$  — удельная скорость убыли числа нейтронов, участвующих в реакции,  $\alpha$  — вероятность захвата нейтрона, испущенного в предшествующем акте реакции, делящимся ядром,  $\mu$  — коэффициент размножения нейтронов в реакции,  $t$  — время.

Величина  $v_0$  определяется в основном вероятностью спонтанного деления (стр. 857) ядер данного изотопа при отсутствии внешнего облучения вещества нейтронами. Величина  $v_2$  определяется скоростью утечки нейтронов за пределы делящегося вещества и скоростью их выхода из реакции вследствие поглощения их (не сопровождаемого делением) ядрами примесей к делящемуся веществу и другими изотопами делящегося элемента.

Коэффициент размножения нейтронов  $\mu$  равен отношению числа нейтронов, возникших в некотором звене

цепной реакции, к числу таких нейтронов в предшествующем звене цепи. Необходимым условием осуществления цепной реакции является условие  $\mu \geq 1$ ; при  $\mu > 1$  цепная реакция называется *ускоряющейся* (*развивающейся*), а ее режим называется *надкритическим*. При  $\mu = 1$  цепная реакция называется *самоподдерживающейся*, а ее режим — *критическим*. При условии  $\mu < 1$  осуществляется *затухающая* цепная реакция, происходящая в *подкритическом режиме*. Коэффициент размножения нейтронов определяется геометрической конфигурацией объема, в котором происходит реакция, его размерами, а также размерами и веществом *замедлителя* и *отражателя нейтронов* (стр. 862).

Кроме того,  $\mu$  определяется соотношением вероятностей различных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами делящегося вещества и примесей в нем. Для возможности осуществления цепной реакции большое значение имеют размеры *активной зоны* — того пространства, где происходит цепная реакция. С уменьшением размеров активной зоны увеличивается доля нейтронов, выходящих за ее пределы, и уменьшается возможность дальнейшего развития цепной реакции. Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называются *критическими размерами*. Масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, называется *критической массой*.

4° Удельная скорость реакции деления:

$$v_1 = \sigma(v) v N,$$

где  $\sigma(v)$  — эффективное сечение реакции деления данного изотопа при скорости  $v$  нейтронов,  $N$  — число ядер делящегося изотопа в веществе.

При  $\mu\alpha < 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{\sigma v_0}{1 - \mu\alpha}$$

и происходит *стационарная* цепная реакция деления. При  $\mu\alpha > 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_1 v_0}{A} e^{At} = \infty,$$

т. е.  $A = (v_1 + v_2)(\mu\alpha - 1)$ , т. е. цепная реакция оказывается *саморазгоняющейся*.

5° Форсировать ядерную реакцию можно либо путем увеличения  $v_1$ , либо путем уменьшения  $v_2$ . Первое, в частности, достигается повышением массы делящегося



вещества. Второе осуществляется быстрым замедлением нейтронов до энергий, при которых максимально сечение деления основной массы вещества, а также отражением нейтронов от вещества отражателя.

В *атомной бомбе* возникает неуправляемая ядерная цепная реакция на быстрых нейтронах,носящая ввиду очень быстрого выделения больших количеств энергии характер взрыва. Ее реализация осуществляется превышением массы делящегося вещества над критической (п. 3°) путем быстрого соединения нескольких частей бомбы.

6° Устройство, в котором может происходить самоподдерживающаяся ядерная цепная реакция деления ядер тяжелых элементов под действием нейтронов, называется *ядерным реактором*. Ядерные реакторы состоят из пяти основных элементов: делящегося вещества, замедлителя быстрых нейтронов, отражателя нейтронов, систем охлаждения, систем безопасности и регулирования.

7° В качестве делящегося вещества используются обычно изотопы урана  $U^{233}$ ,  $U^{235}$ ,  $U^{238}$ , изотоп тория  $Th^{232}$ , а также изотопы плутония  $Pu^{239}$ ,  $Pu^{240}$ ,  $Pu^{241}$ .

8° В качестве замедлителя нейтронов применяются материалы, имеющие большое сечение для неупругого рассеяния нейтронов и вместе с тем малое сечение для захвата нейтронов. В качестве замедлителей нейтронов обычно применяются графит, тяжелая вода ( $D_2O$ ), а также бериллий, окись бериллия, гидриды металлов, органические жидкости. Ядра указанных веществ слабо поглощают нейтроны.

9° В качестве отражателей нейтронов, окружающих активную зону реактора, в которой находятся делящееся вещество и замедлитель, применяются те же вещества, что и для замедлителя. Эффективность отражателя быстро возрастает с увеличением его толщины и достигает предела, когда эта толщина в несколько раз превышает среднюю длину свободного пробега (стр. 209) нейтронов в нем.

10° Система охлаждения предназначена для отвода из активной зоны реактора выделяющейся в ней энергии деления (обычно в виде определенной количества теплоты), в которую переходит кинетическая энергия осколков деления при их торможении в делящемся веществе и замедлителе. Через активную зону реактора прокачивается теплоноситель (вода, водяной пар, He,  $CO_2$ , воздух, некоторые жидкие металлы и сплавы) который затем через теплообменник передает тепло во вторичную теплообменную систему реактора.

11° Системы регулирования и безопасности обеспечивают возможность управления цепной реакцией, недопущения ее самопроизвольного разгона (стр. 862), а также обеспечивают защиту окружающего реактор пространства от интенсивных потоков нейтронов и гамма-лучей, существующих в активной зоне реактора. Для первой цели применяются вдвигаемые в активную зону стержни из вещества с высоким сечением поглощения нейтронов (бор, кадмий). Вторая цель достигается окружением реактора массивными слоями веществ, сильно поглощающих нейтроны и гамма-лучи (например, комбинацией бетона и свинца), а также полной замкнутостью цепей теплоносителя и отсутствием утечек в них.

12° Ядерные реакторы различаются по характеру ядерного горючего, замедлителя и теплоносителя. В качестве сырьевых и делящихся веществ используются  ${}_{92}U^{235}$ ,  ${}_{94}Pu^{239}$ ,  ${}_{92}U^{233}$ ,  ${}_{95}U^{238}$ ,  ${}_{90}Th^{232}$ . Замедлители и теплоносители — см. пп. 8° и 10°.

По расположению в активной зоне ядерного топлива и замедлителя ядерные реакторы делятся на *гомогенные*, в которых оба вещества равномерно смешаны друг с другом, и *гетерогенные*, в которых оба вещества располагаются порознь в виде блоков. По области энергий нейтронов различают реакторы *тепловые*, *промежуточные* и *быстрые*. В последних используются непосредственно нейтроны деления и замедлитель отсутствует.

По назначению ядерных реакторов их подразделяют на энергетические, исследовательские, испытательные, реакторы для производства новых делящихся материалов, создания радиоактивных изотопов и другие виды.

По совокупности всех перечисленных признаков различают ядерные реакторы: *уран-графитовые*, *водо-водяные*, *кипящие* и др.

13° В *реакторе-размножителе* ядра одного делящегося вещества превращаются в результате ядерных реакций в ядра другого делящегося вещества, причем вследствие различного изотопного состава делящихся элементов количество воспроизводимого делящегося изотопа превышает количество первоначального изотопа. В *бридерных реакторах* воспроизводимое и первоначальное вещества представляют собой изотопы одного и того же химического элемента (например, «сжигается»  $U^{235}$ , воспроизводится  $U^{233}$ ), в *реакторах-конверторах* — изотопы разных химических элементов (например, «сжигается»  $U^{235}$ , воспроизводится  $Pu^{239}$ ).

14° Для создания высокой температуры в неуправляемой термоядерной реакции ( $T \sim 5 \cdot 10^7$  °K) применяется атомная бомба (стр. 862), дающая такую температуру при взрыве на весьма малый ( $\sim 10^{-6}$  сек) промежуток времени, за который, однако, успевает произойти термоядерная реакция в массе изотопов водорода (*водородная бомба*).

15° В основе термоядерной энергетики лежит использование энергии экзотермических реакций синтеза легких ядер (стр. 859). Наиболее доступной по области необходимых температур является реакция между ядрами дейтерия и трития:  ${}_1^2\text{D} + {}_1^3\text{T} \rightarrow {}_2^4\text{He} + \text{n}$ . В этой реакции выделяется 17,6 Мэв. Энерговыведение, рассчитанное на один нуклон в такой реакции, составляет  $\approx 3,5$  Мэв/нуклон, в то время как при делении ядра  ${}_{92}\text{U}^{238}$  эта величина составляет 0,85 Мэв/нуклон.

Управляемая термоядерная реакция, самоподдерживаясь за счет выделения энергии, сможет длительное время протекать в контролируемых масштабах. Нагрев и управление поведением термоядерной смеси при этом определяются тем обстоятельством, что смесь при сверхвысоких температурах переходит в состояние плазмы (стр. 396). Для такого нагрева скорость подвода энергии к смеси должна превышать скорость утечки энергии из нее. Основными видами утечек являются тепло, уходящее через стенки реактора, а также тормозное излучение (стр. 579) в плазме.

Важнейшей задачей практического осуществления управляемых термоядерных реакций является создание таких условий, при которых высокотемпературная плазма устойчиво удерживается с помощью магнитных полей в состоянии термоизоляции. Для этой цели применяются *магнитные ловушки* и специальные тороидальные разряды, в которых имеется продольное магнитное поле. Магнитные ловушки представляют собой весьма сложные по конфигурации магнитные поля, удерживающие плазму от контакта со стенками реактора. Удержание плазмы осуществляется в системах с *плазменными шнурами*, в которых происходит стягивание плазмы в шнур магнитным полем тока, протекающего в плазме.

16° Образование возбужденных ядер в реакциях с нейтронами приводит к распаду ядер спустя значительное время после окончания реакции, вызванной нейтронным облучением. Излучение таких ядер, состоящее обычно из бета-частиц и гамма-лучей, является примером *искусственной радиоактивности*. Периоды полураспада искус-

венно-радиоактивных ядер лежат в интервале от долей секунды до тысяч лет. В настоящее время можно получать искусственно-радиоактивные изотопы, обладающие высокой удельной активностью (стр. 846), что позволяет создавать весьма компактные источники радиоактивного излучения, широко применяемые в различных областях науки и техники в методе, известном под названием *метода меченых атомов* или *метода радиоактивных изотопов*.

## ГЛАВА 6

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

#### 1. Основные сведения об элементарных частицах

1° *Элементарными частицами* называются частицы, которым на современном уровне развития физики нельзя приписать такой внутренней структуры, которая была бы простым соединением других частиц. Элементарная частица при взаимодействии с другими частицами и полями ведет себя как единое целое. Вопрос о структуре элементарных частиц рассматривается двояким образом. В ряде случаев элементарные частицы рассматриваются бесструктурными, т. е. материальными точками, обладающими определенными свойствами: массой покоя, электрическим, барионным и лептонным зарядами (стр. 868), спином, изотопическим спином и его проекцией (стр. 868), странностью (стр. 869), преобладающей схемой распада (стр. 872). Представление о точечной элементарной частице находится в согласии с требованиями теории относительности. Протяженная частица, будучи единой, должна деформироваться, иначе окажутся возможными независимые движения отдельных частей единого целого. Внешнее воздействие на протяженную элементарную частицу должно мгновенно передаваться от одних ее частей к другим, что противоречит специальному принципу относительности Эйнштейна (стр. 519).

Рассматривать элементарные частицы бесструктурными допустимо лишь в области таких энергий частиц, при которых их структура не влияет на результаты взаимодействия между ними. Соответствующая такому рассмотрению область энергий элементарных частиц лежит ниже  $2m_0c^2$ , где  $m_0$  — масса покоя (стр. 526) частицы.

2° В настоящее время имеется несколько групп элементарных частиц, различающихся своими свойствами

и характером взаимодействия. Важнейшие свойства элементарных частиц приведены в таблице на стр. 871—872. По значениям масс покоя различаются: лептоны (легкие частицы), мезоны (средние, промежуточные частицы) и барионы (тяжелые частицы). По знаку электрического заряда различаются положительные, отрицательные частицы, насыщенные заряд  $|e|$  и электрически нейтральные. До настоящего времени частицы с электрическим зарядом  $|e| > 1$  обнаружены среди резонансов (п. 3°). Высказано предположение о возможном существовании частиц с дробным электрическим зарядом (*кварки и антикварки*). Большинство элементарных частиц, имеющих в таблице (стр. 871—872), имеет спин  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ). Существуют также бесспиновые частицы (пионы и каоны), а также частицы со спином, равным  $\hbar$  (фотон). Частицами со спином  $3/2 \hbar$ , по-видимому, являются *омега-минус-гиперон* и ее античастица — *анти-омега-минус-гиперон* ( $\Omega^-$ - и  $\bar{\Omega}^-$ -гипероны).

3° Объединение положительного  $\mu^+$ -мезона с электроном может привести к образованию *мюония* — своеобразного атома, в котором электрон вращается вокруг  $\mu^+$ -мезона. У мюония экспериментально обнаружена сверхтонкая структура — сверхтонкое расщепление энергетических уровней и спектральной линии мюония, связанное с возможностью параллельной и антипараллельной ориентации спинов электрона и  $\mu^+$ -мюона в мюонии. Величина сверхтонкого расщепления совпадает с вычисленной в предположении, что  $\mu^+$ -мезон имеет характеристики, приведенные в таблице 1 и 2 на стр. 871—872.

4° Помимо элементарных частиц, помещенных в таблице (стр. 871), в последние годы обнаружено большое количество новых частиц, которые называются *резонансными частицами*, *резонансными состояниями* или *резонансами* (*резонансами*). Эти короткоживущие образования со временем жизни, характерным для сильных взаимодействий (стр. 867), имеют определенные свойства, перечисленные в п. 1°, а также некоторые импульсы и энергии, позволяющие рассматривать резонансы как частицы. Характеристики барионных и мезонных резонансов приведены в таблицах на стр. 876—879.

5° Считается, что между элементарными частицами существуют три типа взаимодействий: сильные, электромагнитные и слабые, характеризующиеся каждое своей величиной константы взаимодействия и характерным временем протекания (таблица на стр. 867).

6° *Сильные взаимодействия* характеризуют процессы, происходящие с барионами, антибарионами, а также пионами и каонами (стр. 871—872). Этими взаимодействиями обусловлены ядерные силы между нуклонами в ядрах и процессы образования и распада мезонов и гиперонов в ядерных взаимодействиях при высоких энергиях. Интенсивность сильных взаимодействий характеризуется *константой Ферми*  $f^2/\hbar c \approx 1$ , где  $f$  — «заряд» поля ядерных сил. Процессы, в которых проявляются сильные взаимодействия, называются *быстрыми* и имеют характерное время протекания (*временная постоянная взаимодействия*)  $10^{-23}$ — $10^{-22}$  сек. Сильно взаимодействующие частицы называются *адронами* (крупные, массивные частицы).

7° *Электромагнитные взаимодействия* происходят между частицами, имеющими электрические заряды (например, кулоновое взаимодействие заряженных частиц, процессы рождения электронов и позитронов гамма-квантами и др.). Интенсивность взаимодействия характеризуется *постоянной тонкой структуры*  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  (стр. 912). Соответствующие процессы называются *электромагнитными* и протекают за время порядка  $10^{-20}$ — $10^{-18}$  сек.

8° *Слабые взаимодействия* характерны для лептонов (взаимодействие мюонов с ядрами, электронов и позитронов, нейтрино и антинейтрино с ядрами, процессы бета-распадов ядер). Интенсивность взаимодействия определяется константой  $g^2/\hbar c \approx 10^{-14}$ , где  $g$  имеет смысл «заряда», соответствующего гипотетическому полю слабых взаимодействий. Соответствующие процессы называются *медленными* и протекают за время порядка  $10^{-10}$ — $10^{-8}$  сек. Сравнительная величина различных типов взаимодействий между элементарными частицами приведена в таблице.

Тип взаимодействия	Сравнительная величина	Характерное время протекания, сек
Сильное . . . . .	1	$10^{-23}$ — $10^{-22}$
Электромагнитное . . . . .	$1/137$	$10^{-20}$ — $10^{-18}$
Слабое . . . . .	$10^{-14}$	$10^{-10}$ — $10^{-8}$

9° Для всех типов взаимодействий элементарных частиц выполняются законы сохранения физических величин, характеризующих свойства частиц до и после данного вида взаимодействия и протекание физических процессов, — законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда.

10° Для того чтобы отличить элементарные частицы, входящие в группу лептонов, им приписывается характеристика, называемая лептонным зарядом  $L$ . Принимается, что все лептоны (таблица на стр. 871—872) имеют  $L = +1$ , антилептоны  $L = -1$ . Для остальных элементарных частиц  $L = 0$ . Процессы, в которых участвуют лептоны, происходят так, что алгебраическая сумма лептонных зарядов сохраняется постоянной (*закон сохранения лептонного заряда*).

11° *Зарядовая независимость* в сильных взаимодействиях заключается в том, что характер этих взаимодействий не зависит от наличия или отсутствия у частиц электрического заряда.

Так, сильные взаимодействия в ядрах между протонами и нейтронами, протонами и протонами и нейтронами между собой одинаковы.

Развитие представлений о зарядовой независимости в сильных взаимодействиях приводит к характеристике элементарных частиц, называемой *изотопическим спином*  $T$ . Близкие по массе частицы представляют собой различные *зарядовые состояния* одной и той же частицы. Например, нуклонные состояния являются дублетом, состоящим из протона и нейтрона, а  $\pi$ -мезоны являются триплетом из  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонов. Число зарядовых состояний в данном мультиплете равно  $2T+1$ . Для индивидуальной характеристики каждого члена в зарядовом мультиплете вводится *проекция  $T_z$  изотопического спина* на некоторую «ось».  $T_z$  принимает  $2T+1$  значение:  $T, T-1, \dots, 0, \dots, -T$ . Понятия о векторе  $T$  и его проекции  $T_z$  не связаны с ориентацией  $T$  и  $T_z$  в обычном пространстве и вводятся для описания свойств (а также и превращений) элементарных частиц.

Для известных к настоящему времени элементарных частиц (таблицы на стр. 871—872) либо  $T = 1/2$  (зарядовый дублет из протона и нейтрона), либо  $T = 1$  (зарядовый триплет из  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонов), либо  $T = 0$ . Значение  $T > 1$  обнаружено у некоторых резонансов (таблица на стр. 876).

Компоненты зарядового мультиплета с равными по величине, но противоположными по знаку  $T_z$  соответствуют *частице* и ее *античастице*. Для заряженных частиц разные знаки  $T_z$  отвечают разным знакам электрического заряда частицы и античастицы. Для нейтральных частиц разные знаки  $T_z$  отвечают противоположным знакам магнитного момента и ряда других характеристик частиц. Частицы, свойства которых полностью тождественны свойствам их античастиц, называются *истинно нейтральными*.

Во всех процессах, связанных с превращениями элементарных частиц, обусловленными зарядово-независимыми сильными взаимодействиями (стр. 867), выполняется *закон сохранения изотопического спина*: полный изотопический спин  $T$  всех частиц изолированной системы не изменяется при всех превращениях, вызванных сильными взаимодействиями. Проекция  $T_z$  изотопического спина сохраняется как при сильных, так и при электромагнитных взаимодействиях.

12° Для характеристики элементарных частиц, входящих в группу барионов, вводится понятие *барионного или ядерного (нуклонного) заряда  $B$* . Принимается, что для барионов (таблица, стр. 871—872)  $B = 1$ , антибарионов  $B = -1$ , для остальных элементарных частиц  $B = 0$ . При всех ядерных превращениях в изолированной системе алгебраическая сумма барионных зарядов сохраняется неизменной (*закон сохранения барионного заряда*).

13° Особенности рождения и превращений  $K$ -мезонов (каонов), а также  $\Lambda$ -,  $\Sigma$ - и  $\Xi$ -гиперонов выделили их в особые, так называемые *странные частицы*. Характерные признаки странных частиц:

а) рождение их вызывается сильным взаимодействием (стр. 867);

б) распадаясь на ядерно-активные  $\pi$ -мезоны,  $K$ -мезоны имеют время жизни, характерное для слабых взаимодействий;

в) рождаются парами и не в любых комбинациях, например,  $K^+$ -мезон возникает в паре как с  $K^-$ -мезоном, так и с гиперонами, а  $K^-$ -мезон возникает только в паре с  $K^+$ -мезоном.

Для теоретического объяснения свойств странных частиц введена особая характеристика элементарных частиц — *странность  $S$* , связанная с электрическим (в единицах  $e$ ) зарядом  $Z$ , барионным зарядом  $B$  и проекцией изотопического спина  $T_z$  формулой Гелл-Манна и

Ниниджисмы:

$$S = 2(z - T_z) - B,$$

где  $S = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  — величина странности элементарной частицы. Она отлична от нуля только для странных частиц и равна нулю для всех остальных частиц. Величина  $Y = B + S = 2z$ , где  $z$  — средний электрический заряд зарядового мультиплета, называется *гиперонным зарядом (гиперзарядом)* данного мультиплета частиц.

При сильных и электромагнитных взаимодействиях алгебраическая сумма странностей всех частиц в изолированной системе сохраняется постоянной (*закон сохранения странности*).

14° Законы сохранения в физике связаны с общими свойствами пространства и времени. Именно, изотропность и однородность пространства и времени — основных форм существования материи — приводят к законам сохранения момента импульса, из однородности хода времени — закон сохранения энергии, из симметричности пространства относительно преобразования инверсии — закон сохранения четности состояния (стр. 832).

15° При слабых взаимодействиях частиц нарушаются закон сохранения четности и закон сохранения странности. Во всех распадах мезонов и гиперонов  $\Delta S = 0; \pm 1$ .

16° *Преобразованием зарядового сопряжения* называется переход от частицы к ее античастице. В таком переходе одновременно в соответствующих уравнениях заменяются на противоположные знаки всех зарядов, магнитных моментов и других характеристик частиц. Преобразование зарядового сопряжения изменяет на противоположные знаки  $z, T_z, B, L, S$  и  $Y$ .

17° Несохранение четности при слабых взаимодействиях указывает на несимметричность пространственных свойств частиц относительно инверсии (стр. 832), что, однако, противоречит изотропности пространства при слабых взаимодействиях ввиду сохранения момента импульса в таких взаимодействиях. Противоречие устраняется *принципом Ландау — Ли — Янга*. Этот принцип гласит, что при слабых взаимодействиях, в отличие от сильных, закон сохранения четности, а также инвариантность относительно преобразования зарядового сопряжения (инверсии частиц) могут порознь не выполняться, но должна иметь место инвариантность

Основные свойства элементарных частиц<sup>1)</sup>

Класс	Частица	Линейный спин	Изотопический спин	Проекция изотопического спина	Странность S	Масса покоя, Мэв	Среднее время жизни, сек	
							Стабилен	н Стабилен
Фотон	$\gamma$	1	—	—	0	0 ( $< 0,2$ экв)	Стабилен	Стабилен
	$\nu_e$	$1/2$	—	—	0	0 ( $< 4$ )	Стабилен	Стабилен
	$\bar{\nu}_e$	$1/2$	—	—	0	$0,511006 \pm 0,000002$	Стабилен	Стабилен
Лептоны	$\nu_\mu$	$1/2$	—	—	0	$105,658 \pm 0,002$	Стабилен	Стабилен
	$\bar{\nu}_\mu$	$1/2$	—	—	0	$105,658 \pm 0,002$	Стабилен	Стабилен
	$\mu^+$	$1/2$	—	—	0	$105,658 \pm 0,002$	Стабилен	Стабилен
Мезоны	$\pi^0$	0	1	(0,0)	0	$135,01 \pm 0,05$	Стабилен	Стабилен
	$\pi^+$	0	1	(+1, -1)	0	$139,60 \pm 0,05$	Стабилен	Стабилен
	$K^+$	0	$1/2$	(+1/2, -1/2)	(+1, -1)	$493,8 \pm 0,2$	Стабилен	Стабилен
Нуклоны	$K^0$	0	$1/2$	(-1/2, +1/2)	(+1, -1)	$498,0 \pm 0,5$	Стабилен	Стабилен
	$p$	$1/2$	$1/2$	(+1/2, -1/2)	0	$938,256 \pm 0,005$	Стабилен	Стабилен
	$n$	$1/2$	$1/2$	(-1/2, +1/2)	0	$939,550 \pm 0,005$	Стабилен	Стабилен
Гипероны	$\Lambda^0$	$1/2$	0	(0,0)	(-1, +1)	$1115,40 \pm 0,11$	Стабилен	Стабилен
	$\Sigma^+$	$1/2$	1	(+1, -1)	(-1, +1)	$1189,41 \pm 0,14$	Стабилен	Стабилен
	$\Sigma^0$	$1/2$	1	(0,0)	(-1, +1)	$1192,3 \pm 0,3$	Стабилен	Стабилен
	$\Sigma^-$	$1/2$	1	(-1, +1)	(-1, +1)	$1197,08 \pm 0,19$	Стабилен	Стабилен
	$\Xi^0$	$1/2$	$1/2$	(+1/2, -1/2)	(-2, +2)	$1314,3 \pm 1,0$	Стабилен	Стабилен
Гипероны	$\Xi^-$	$1/2$	$1/2$	(-1/2, +1/2)	(-2, +2)	$1320,8 \pm 0,2$	Стабилен	Стабилен
	$\Omega^-$	$3/2$ (?)	0 (?)	0	(-3, +3)	$1675 \pm 3$	Стабилен	Стабилен

<sup>1)</sup> См. A. H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galati, W. H. Barkas, P. L. Bastien, J. Kirz, M. Roos, Rev. Mod. Phys. **36**, № 4, 977 (1964).

Таблица 2

Основные типы распада, энерговыделение  $Q$  и вероятности распада мезонов и барионов <sup>1)</sup>

Частица	Тип распада	Энерговыделение $Q$ , Мэв	Относительная вероятность распада
$\mu^- \rightarrow$	$e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	105,66	100 %
$\pi^+ \rightarrow$	$\mu^+ + \nu_\mu$ $e^+ + \nu_e$ $\mu^+ + \nu_\mu + \gamma$ $\pi^0 + e^+ + \nu_e$	33,95 139,60 33,94 4,08	$\sim 100\%$ $(1,24 \pm 0,05) \cdot 10^{-4}$ $(1,24 \pm 0,25) \cdot 10^{-4}$ $(1,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-8}$
$\pi^0 \rightarrow$	$\gamma + \gamma$ $e^+ + e^- + \gamma$	135,01 133,99	98,8 % $(1,19 \pm 0,5) \%$
$K^+ \rightarrow$	$\mu^+ + \nu_\mu$ $\pi^+ + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ $\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$ $\pi^0 + e^+ + \nu_e$ $\pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$ $\pi^+ + \pi^+ + e^- + \nu_e$	388,1 219,2 75,0 84,2 253,1 358,3 214,1 214,1	$(63,1 \pm 0,5) \%$ $(21,5 \pm 0,4) \%$ $(5,3 \pm 0,1) \%$ $(1,7 \pm 0,1) \%$ $(3,4 \pm 0,2) \%$ $(4,8 \pm 0,2) \%$ $(4,3 \pm 0,9) \cdot 10^{-5}$ $< 0,1 \cdot 10^{-5}$
$K_L^0 \rightarrow$	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0$	218,8 228,0	$(69,4 \pm 5,4) \%$ $(30,6 \pm 1,1) \%$
$K_S^0 \rightarrow$	$\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ $\pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $\pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$ $\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ $\pi^- + e^+ + \nu_e$ $\pi^+ + \pi^-$	93,0 83,8 252,7 357,9 218,8	$(27,1 \pm 3,6) \%$ $(12,7 \pm 1,7) \%$ $(26,6 \pm 3,2) \%$ $(33,6 \pm 3,3) \%$ $\sim 2 \cdot 10^{-3}$
$p \rightarrow$	$p + e^- + \bar{\nu}_e$	0,78	100 %
$\Lambda^0 \rightarrow$	$p + \pi^-$ $n + \pi^0$ $p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $p + e^- + \bar{\nu}_e$	37,5 40,9 71,5 176,6	$(67,7 \pm 1,0) \%$ $(31,6 \pm 2,6) \%$ $< 1 \cdot 10^{-4}$ $(0,88 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$

<sup>1)</sup> См. A. H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtrieri, W. H. Barkas, P. L. Bastien, J. Kirz, M. Roos, Rev. Mod. Phys. 36, № 4, 977 (1964).

Продолжение

Частица	Тип распада	Энерговыделение $Q$ , Мэв	Относительная вероятность распада
$\Sigma^+ \rightarrow$	$p + \pi^0$ $n + \pi^+$ $n + \pi^+ + \gamma$ $\Lambda^0 + e^+ + \nu_e$ $p + \gamma$ $n + \mu^+ + \nu_\mu$ $n + e^+ + \nu_e$	116,1 110,3 110,3 73,5 251,1 144,2 219,3	$(51,0 \pm 2,4) \%$ $(49,0 \pm 2,4) \%$ $\sim 0,4 \cdot 10^{-4}$ $\sim 0,2 \cdot 10^{-4}$ $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ $\leq 2,3 \cdot 10^{-4}$ $\leq 1,0 \cdot 10^{-4}$
$\Sigma^0 \rightarrow$	$\Lambda^0 + \gamma$	77,0	100 %
$\Sigma^- \rightarrow$	$n + \pi^-$ $n + \pi^- + \gamma$ $n + \mu^- + \nu_\mu$ $n + e^- + \bar{\nu}_e$ $\Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	117,9 117,9 151,9 257,0 81,2	$\sim 100\%$ $\sim 0,1 \cdot 10^{-4}$ $(0,66 \pm 0,14) \cdot 10^{-3}$ $(1,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ $(0,75 \pm 0,28) \cdot 10^{-4}$
$\Xi^0 \rightarrow$	$\Lambda^0 + \pi^0$ $p + \pi^-$ $p + e^- + \bar{\nu}_e$ $\Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ $\Sigma^- + e^+ + \nu_e$	76,9 249,4 388,5 137,4 129,7	$\sim 100\%$ $\sim 0,4 \%$ $\leq 0,4 \%$ $\leq 0,3 \%$ $\leq 0,25\%$
$\Xi^- \rightarrow$	$\Lambda^0 + \pi^-$ $\Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ $n + \pi^-$	65,8 204,9 214,7	$\sim 100\%$ $(3,0 \pm 1,7) \cdot 10^{-3}$ $\leq 5 \cdot 10^{-3}$
$\Omega^- \rightarrow$	$\Xi^- + \pi^0$ $\Lambda^0 + K^-$	221 66	? ?

относительно совокупности обоих преобразований, называемой *комбинированной инверсией*. При такой инвариантности асимметрия проявляется только в зарядах частиц, пространство же остается симметричным ( $G$  — четность).

$18^\circ$  Говорить о сохранении четности можно только для истинно нейтральных (стр. 869) частиц, так как прочие частицы при комбинированной инверсии переходят в отличные от них античастицы. Для истинно нейтральных частиц закон сохранения комбинированной чет-

ности совпадает с законом сохранения обычной четности. Нарушение четности при распаде  $K^0$ -мезонов объясняется тем, что нейтральные  $K^0$ - и  $\bar{K}^0$ -мезоны образуют друг с другом две комбинации:  $K_1^0$  и  $K_2^0$ , для одной из которых комбинированная четность равна  $+1$ , а для другой  $-1$ . Сохранение комбинированной четности приводит к тому, что  $K_1^0$ - и  $K_2^0$ -мезоны имеют различные времена жизни и схемы распадов. Зарегистрирован распад  $K_2^0 \rightarrow 2\pi$ , который в случае его подтверждения будет означать несохранение комбинированной четности в слабых взаимодействиях с участием странных частиц.

## 2. Понятие о симметриях сильных взаимодействий

1° В современной системе обозначений *барионных адронов* все адроны со странностью  $S = 0$  и изотопическим спином  $T = 1/2$  [нуклоны и  $(\bar{n} - N)$ -изобары] обозначаются через  $N_M$ , где  $M$ -масса в *Мэв*. Адроны со странностью  $S = 0$  и изотопическим спином  $T = 3/2$  [ $(\bar{n} - N)$ -изобары с  $T = 3/2$ ] обозначаются буквой  $\Delta_M$ ;  $\Lambda$ -гипероны и барионные резонансы со значениями  $S = -1$  и  $T = 0$  обозначаются буквой  $\Lambda_M$ ;  $\Sigma$ -гипероны и барионные резонансы с  $S = -1$  и  $T = 1$  — буквой  $\Sigma_M$ ;  $\Xi$ -гипероны и барионные резонансы с  $S = 2$  и  $T = 1/2$  — буквой  $\Xi_M$ ;  $\Omega$ -гипероны и барионные резонансы с  $S = -3$  и  $T = 0$  (в случае их обнаружения) — буквой  $\Omega_M$ . Иногда для обозначения частицы или резонанса с наименьшей массой в данной группе применяется соответствующая буква без указания массы. Это сохраняет за элементарными частицами их старые обозначения [ $N$ , ( $p$ ,  $n$ ),  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ ,  $\Omega$ ]. Антиадроны обозначаются теми же буквами с противоположным знаком электрического заряда и тильдой сверху (например:  $\Sigma^- \rightarrow \bar{\Sigma}^+$ ). В таблице 3 приведены свойства барионов и барионных резонансов.

2° Для мезонных адронов (*мезонных резонансов*) унифицированные обозначения строятся так, что одинаковыми буквами обозначены частицы и резонансы с одними и теми же значениями странности  $S$  и изотопического спина  $T$ . Индекс внизу учитывает величину массы в *Мэв*. Буквой  $\eta$  обозначаются мезоны и мезонные резонансы с  $S = 0$  и  $T = 0$ , буквой  $\pi$  — с  $S = 0$  и  $T = 1$ , буквой  $K$  — с  $S = +1$  и  $T = 1/2$ . В таблице 4 приведены свойства мезонных адронов.

3° Квантовые числа  $B$ ,  $S$  и  $T$  считаются основными для всех известных барионов, мезонов и резонансов.

Они приведены в таблице ниже. Там же приведены значения *гиперзаряда*  $Y = B + S$ , мультиплетности изотопического мультиплетета ( $2T + 1$ ) и среднего электрического заряда мультиплетета  $\bar{z} = Y/2 = \frac{B+S}{2}$ . Указанные величины могут рассматриваться как «производные» квантовые числа при указанном выборе основных.

Квантовые числа	$N$	$\Delta$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Xi$	$\Omega$	$\eta$	$\pi$	$K$
$B$	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$S$	0	0	-1	-1	-2	-3	0	0	+1
$T$	$1/2$	$3/2$	0	1	$1/2$	0	0	1	$1/2$
$Y = B + S$	1	1	0	0	-1	-2	0	0	+1
$\bar{z} = 1/2(B + S)$	$1/2$	$1/2$	0	0	$-1/2$	-1	0	0	$+1/2$
$2T + 1$	2	4	1	3	2	1	1	3	2

4° Адроны с одинаковыми спинами и четностью, находящиеся в состояниях  $J^P$ , где  $J$  — спин частицы, а  $P$  — ее четность, образуют симметричные совокупности. Существует восемь мезонов, находящихся в состоянии  $0^-(J = 0, P = -1)$ , девять мезонов в состоянии  $1^-$ , восемь барионов в состоянии  $1/2^+$  и десять барионных резонансов в состоянии  $3/2^+$ . Первые три группы состоят из мультиплетов, располагающихся на плоскости  $T_3 S(Y)$  в форме симметричных шестиугольных фигур (рис. VI.6.1 — VI.6.4). Группа последних десяти резонансов образует правильный треугольник с частицей  $\Omega^-$  в его вершине. Все фигуры объединяют частицы с близкими значениями масс и симметричны по отношению к повороту на  $120^\circ$ . Симметричные группы частиц с одинаковыми спинами и четностью рассматриваются как *супермультиплеты частиц*, получающиеся в результате «расщепления» одной частицы, состояние которой определяется значением  $J^P$ , присущим всем членам данного супермультиплетета.

5° Считается, что роль каждого из трех видов взаимодействий (стр. 867) в формировании массы частицы определяется относительной силой взаимодействия. С ростом

Барьоны и барьонные резонансы<sup>1)</sup>

Группа	Состояние, обозначение	Масса $M$ , Мэв	Ширина $\Gamma$ , Мэв	Спин $J$ и четность $P$	Изотопический спин $I$	Странность $S$	Основные каналы распада	Относительная вероятность, %	Энергия выделение $Q$ , Мэв
N	$p$	$938,2$		$1/2^+$	$1/2$	0		см. табл. 2	
	$n$	$939,6$		$1/2^+$	$1/2$	0	$\pi N$	$\sim 50$	402
	$N_{1/2}^*(N_{\sigma})$	$\sim 1480$	$\sim 240$	$3/2^+$	$1/2$	0	$\pi N$	$\sim 80$	440
	$N_{1/2}^*(N_{\rho})$	$1518 \pm 10$	$425 \pm 12$	$3/2^-$	$1/2$	0	$N\pi$	?	301
	$N_{1/2}^*(N_{\omega}^I)$	1688	100	$5/2^+$	$1/2$	0	$N\pi$	?	610
	$N_{1/2}^*(N_{\omega}^{II})$	2190	$\sim 200$	$9/2^+$	$1/2$	0	$N\pi$	?	471
A	$\Lambda$	2700	$\sim 100$	?	$1/2$	0	$\Lambda K$	30	1112
	$\Lambda^*(1600)$						$\Lambda K$	преобл.	577
	$\Lambda^*(1670)$						$\Lambda K$	$\sim 6$	1213
	$\Lambda^*(1622)$						$\Lambda K$	$\sim 6$	1622
A	$\Sigma$	$1236 \pm 2$	125	$3/2^+$	$3/2$	0	$\pi N$	100	160
	$\Sigma^*$	1924	170	$7/2^+$	$3/2$	0	$\pi N$	34	842
	$\Sigma^*(1385)$	2360	$\sim 200$	$1 1/2^+$ (?)	$3/2$	0	$\Sigma K$	?	237
	$\Lambda(1405)$	1145,4		$1/2^+$	$0$	-1	$\pi N$	10	1282
	$\Sigma^*(1385)$	1405	50	$1/2^-$ (?)	$0$	-1	$\Sigma\pi$	$\sim 100$	76
Q	$\Omega$	$1518,9 \pm 1,5$	$16 \pm 2$	$3/2^-$	$0$	-1	$\Lambda\pi$	$55 \pm 7$	140
	$\Omega^*$						$K\pi$	$29 \pm 4$	87
							$\Lambda\pi\pi$	$16 \pm 2$	124

$\Sigma$	$\Sigma^*(1385)$	4815	70	$5/2^+$ (?)	0	-1	$K\pi$	80	387
	$\Sigma^*(1670)$						$\Sigma\pi$	$\sim 10$	486
$\Xi$	$\Xi^*(1530)$						$\Lambda\eta$	$< 15$	420
	$\Xi^*(1670)$							?	151
	$\Xi^*(1385)$								
	$\Xi^*(1670)$								
$\Omega$	$\Omega^*(1670)$								
	$\Omega^*(1670)$								
	$\Omega^*(1670)$								
	$\Omega^*(1670)$								
	$\Omega^*(1670)$								

<sup>1)</sup> См. A. H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtheri, W. H. Barkas, P. L. Bastien, J. Kirz, M. Roos, Rev. Mod. Phys. **36**, № 4, 977 (1964).





интенсивности взаимодействия и быстроты его действия возрастает роль взаимодействия в формировании массы. Ядерное (сильное) взаимодействие изотопически инвариантно, т. е. не зависит от электрического заряда частицы,

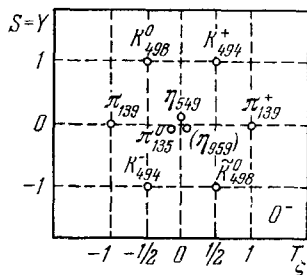


Рис. VI.6.1.

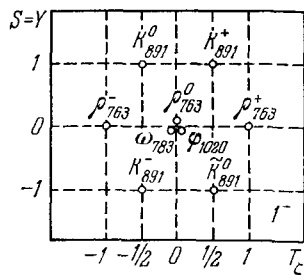


Рис. VI.6.2.

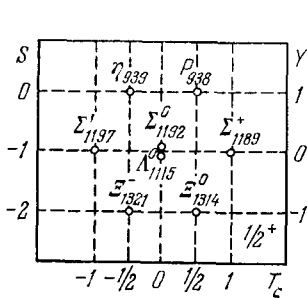


Рис. VI.6.3.

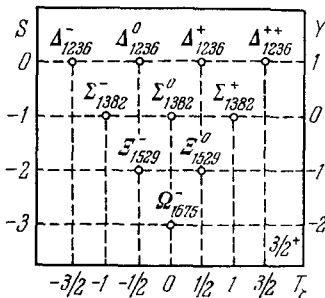


Рис. VI.6.4.

и приблизительно в  $10^2 \div 10^3$  раз сильнее электромагнитного, зависящего от электрического заряда. Интенсивность слабого взаимодействия в  $10^{13} \div 10^{14}$  раз меньше сильного (стр. 867). Для адронов основным взаимодействием, формирующим массу частиц, является сильное взаимодействие, а электромагнитное взаимодействие играет небольшую роль. Практически вся ( $\sim 99\%$ ) масса адрона возникает за счет сильного взаимодействия и

только небольшая часть ( $\sim 1\%$ ) — за счет электромагнитного. Выражением этого является большая масса всех сильно взаимодействующих частиц. Наиболее легкий из них пион ( $\pi$ -мезон) имеет массу  $m_\pi = 273 m_e$ . Частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях ( $e^-$ ,  $e^+$ ,  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ), имеют массу  $m \ll m_e$ . Исключение составляют мезоны ( $\mu$ -мезоны) с массой  $207 m_e$ , не участвующие в сильных взаимодействиях и занимающие особое, неясное положение в систематике элементарных частиц.

6° Основная часть массы адрона, создаваемая за счет сильного взаимодействия, обладающего зарядовой независимостью, должна быть одинаковой для различных членов изотопического мультиплетта. Отличие в величине их масс возникает за счет электромагнитного, более слабого взаимодействия, которое снимает вырождение. Другими словами, расщепление масс вызывается несохранением изотопического спина при электромагнитных взаимодействиях (стр. 869).

7° Изотопическая инвариантность сильного взаимодействия проявляется для  $\pi$ -мезонов, нуклонов и ядер в форме закона сохранения изотопического спина (стр. 869), а распространение принципа изотопической инвариантности на К-мезоны (каоны) и гипероны приводит к закону сохранения странности (стр. 870).

8° Отмеченное в п. 4° сходство в свойствах группы адронов с одинаковыми спинами и четностью (но различными странностями и электрическими зарядами) привело к предположению, что, помимо изотопической инвариантности, существует более высокая, так называемая *унитарная симметрия* сильных взаимодействий.

Представление об унитарной симметрии сводится к предположению о том, что сильное взаимодействие состоит из двух частей: *очень сильного* (собственно сильного, самого сильного) и *умеренно сильного взаимодействия*. Для всех частиц, входящих в большую группу частиц с относительно близкими значениями масс — *унитарных мультиплеттов* или *супермультиплеттов*, — очень сильное взаимодействие одинаково. Оно определяет структуру унитарных мультиплеттов и их количество. Собственно сильное взаимодействие не зависит от странности и электрического заряда частиц. Умеренно сильное взаимодействие зависит от странности, и благодаря ему происходит снятие вырождения по странности — возникает расщепление супермультиплетта на зарядовые мультиплеты. Дальнейшее расщепление внутри зарядовых мультиплет-

тов объясняется электромагнитным взаимодействием, и возникает полный набор соответствующих частиц. Основанные на представлениях унитарной симметрии схемы унитарной симметрии элементарных частиц реализованы в различных формах: *составная модель Сакаги — Окуя, октетное представление  $SU(3)$ -симметрии* (восемьмеричный путь, октетная симметрия,  $SU(3)$ -симметрия) *Гелл-Манна — Неймана, модель «кварков» или «тузов» Гелл-Манна — Цвейга и, наконец, схема  $SU(6)$ -симметрии Пайса, Радикати и Гюрсаля*. Все они, а также систематика адронов, называемая *схемой траекторий Редже*, в той или иной степени объясняют существование супермультиплетов определенного вида и отсутствие других, указывают на соотношения, связывающие свойства отдельных адронов, входящих в данный супермультиплет, в частности позволяют устанавливать соотношения их масс, предсказывать еще неизвестные частицы из данного супермультиплета и решают другие задачи. Плодотворность различных вариантов схем унитарной симметрии сильно зависит от состояния экспериментальных данных, имеющихся к моменту появления той или иной схемы.

### 3. Частицы и поля

1° Каждому полю сопоставляются частицы, называемые *квантами поля*. Квантами электромагнитного поля являются фотоны, квантами ядерного поля —  $\pi$ -мезоны, квантами гравитационного поля — гипотетические *гравитоны*. Кванты полей являются бозонами (стр. 225). Отличие квантов полей от истинных («вещественных») частиц по признаку равенства у них нулю массы покоя не может считаться достаточным, так как, например, для  $\pi$ -мезонов  $m_0 \neq 0$  (таблица 1 на стр. 871).

2° Взаимодействия частиц друг с другом, проявляющиеся в их притяжении или отталкивании, описываются как *виртуальный обмен частиц квантами поля*, соответствующего данному виду взаимодействия. Точный механизм взаимодействия частиц в настоящее время неизвестен. Представление о виртуальном обмене фотонами при электромагнитном взаимодействии правильно передает зависимость силы взаимодействия (напряженности поля) от расстояния  $r$  между частицами ( $\propto r^{-2}$ ).

3° При столкновении частицы с  $m_0 \neq 0$  с ее античастицей возможно их уничтожение — *аннигиляция*, при которой обе частицы превращаются в кванты поля, соответ-

ствующего виду взаимодействия этих частиц. При аннигиляции электрона и позитрона возникают кванты электромагнитного поля — фотоны, при аннигиляции нуклона и антинуклона —  $\pi$ -мезоны и т. п. Число квантов при аннигиляции определяется законами сохранения электрического заряда (а также нуклонного заряда в случае барионов), энергии и импульса. Вероятность данного вида аннигиляции зависит также от направления спинов частицы и ее античастицы. *Однофотонная аннигиляция* электрона и позитрона возможна лишь вблизи какой-либо третьей частицы (например, ядра). При релятивистских скоростях движения электронов и позитронов большую вероятность имеет задержка аннигиляции с образованием метастабильной системы — позитрония (стр. 752). Наиболее распространена *двухфотонная аннигиляция*; известна также аннигиляция, при которой электрон и позитрон превращаются в три фотона.

4° Обратным аннигиляции процессом является *рождение* частиц и их античастиц из квантов поля, когда энергия последних достигает величины  $2m_0c^2$ , где  $m_0$  — масса покоя возникающей частицы. Для электронно-позитронной пары эта энергия составляет 1,11 Мэв. Расчетная наименьшая энергия, необходимая для рождения протон-антипротонной пары, в системе координат, где один нуклон покоится, равна 5,6 Гэв. При практическом осуществлении получения этой пары за счет внутреннего движения нуклонов в ядрах мишени и других эффектов наименьшая энергия для рождения этой пары снижается до 4,3 Гэв.

5° Способность к быстрому воссоединению со своей античастицей является особенностью античастиц — позитронов, антипротонов и антинейтронов. Встречаясь со своими имеющимися в избытке в веществе «партнерами по паре», античастицы воссоединяются с ними и перестают существовать, вызывая рождение новых частиц и полей в соответствии с законами сохранения. В гипотетическом «антивеществе», «антиатоме» которого содержали бы в своих ядрах антипротоны и антинейтроны, а на периферии которых находились бы позитроны, — электроны, протоны и нейтроны испытывали бы столь же быстрое воссоединение при встрече с частицами «антиатомов». Стабильность частиц и нестабильность античастиц условна. В вакууме античастицы — позитроны, антипротоны и антинейтроны — столь же стабильны, как и их частицы — электроны, протоны и нейтроны.

6° Процессы рождения и аннигиляции частиц и их античастиц формально объясняются теорией Дирака как результат взаимодействия частиц и вакуума. Вакуум представляется как энергетическая «зона», заполненная целиком фермионами, верхний энергетический уровень которой имеет энергию  $-m_0c^2$ . Фермионы, находящиеся в вакууме (при  $E \leq -m_0c^2$ ), необнаружимы, так как не могут принимать участия в каких-либо взаимодействиях: это означало бы, что они могут терять энергию и занимать более низкие уровни в зоне; для фермионов это невозможно ввиду принципа Паули (стр. 769). При сообщении частицам в вакууме энергии  $\Delta E \geq 2m_0c^2$  они переходят через запрещенную «зону», их энергия  $E \geq m_0c^2$  и частицы становятся наблюдаемыми. Возникающие при этом вакансии в зоне отрицательных энергий ведут себя как античастицы.

7° Под вакуумом в теории элементарных частиц понимается основное, наинизшее, состояние полей, описывающих в релятивистской квантовой теории соответствующие частицы (см. п. 1°). Это понятие вакуума отличается от представления о вакууме как состоянии газа при давлениях ниже атмосферного (стр. 215). Представление о вакууме в квантовой теории позволяет получать количественные результаты, если поля рассматриваются слабо взаимодействующими друг с другом. Тогда вакуум является совокупностью основных состояний невзаимодействующих полей. В квантовой электродинамике различается вакуум электромагнитного поля и вакуум электронно-позитронного поля. Из соотношения неопределенностей вытекает, что в состоянии вакуума поля совершают нулевые колебания, которые рассматриваются как состояния с виртуально возникающими и исчезающими фотонами, электронно-позитронными парами и, вообще говоря, парами частица — античастица. Взаимодействие внешнего электромагнитного поля с нулевыми колебаниями вакуума вызывает неоднородность в пространственном распределении общего заряда виртуальных пар, что приводит к явлению поляризации вакуума, с которой связан ряд эффектов, подтвержденных экспериментально. Поляризация вакуума проявляется на малых расстояниях, имеющих порядок комптоновской длины волны частиц, соответствующих данному полю, в частности электрона. Поляризация вакуума приводит к тому, что наблюдаемый заряд частицы зависит от расстояния. Например, электрон, движущийся на малых расстояниях от ядра, испытывает

действие большего заряда, чем эффективный заряд ядра на больших расстояниях. Это является причиной сдвига энергетических уровней атомных электронов. Поляризация вакуума обусловлено рассеяние света кулоновским полем ядра и другие эффекты. Поляризация вакуума проявляется в отличии потенциала неподвижного точечного заряда  $q$  от кулоновского. На расстояниях  $r \ll r_0$ , где  $r_0 = \frac{\hbar}{m_0c}$  — комптоновская длина волны электрона, с точностью до членов порядка  $e^2$

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln \frac{\hbar}{m_0cr} \right).$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $m_0$  — масса покоя электрона,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная в системе СИ.

8° Нулевые колебания электромагнитного поля вызывают возмущения движения электрона и приводят к эффектам, называемым радиационными поправками. К ним относятся:

а) Появление аномального магнитного момента электрона, превышающего значение магнитного момента, получающегося из теории Дирака. С учетом эффектов четвертого порядка при взаимодействии электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля

$$\mu_e = \mu_B \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right),$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры (стр. 867),  $\mu_B$  — магнетон Бора (стр. 465). Экспериментальное значение  $\mu_e = 1,00114535 \mu_B$  подтверждается этой формулой.

б) Небольшое расхождение между уровнями энергий электронов в водородоподобных системах (стр. 725), вычисленными в релятивистской теории, основанной на уравнении Дирака, и наблюдаемыми экспериментально (Лэмбовский сдвиг уровней). Уровни энергии  $2^2S_{1/2}$  и  $2^2P_{1/2}$  в атоме водорода имеют одинаковые квантовые числа  $n$  и  $l$  и должны быть вырожденными. В действительности уровень  $2^2S_{1/2}$  имеет энергию большую, чем уровень  $2^2P_{1/2}$ . Величина сдвига в частотах составляет  $(1057,77 \pm 0,1) \text{ МГц}$  и определяется радиоспектроскопическими методами. В дейтерии различие уровней  $2^2S_{1/2}$  и  $2^2P_{1/2}$  составляет  $1058 \text{ МГц}$ , у He —  $(14020 \pm 60) \text{ МГц}$ . Формула Бете для поправки к энергетическому уровню в водородоподобных

системах:

$$\Delta E = \frac{8Z^4}{6\pi^2} a^3 \frac{h^2}{n^3} \ln \frac{2n^2}{a^3},$$

где  $n$  — главное квантовое число (стр. 726),  $R$  — постоянная Ридберга (стр. 746),  $a$  — постоянная тонкой структуры.

Улучшенные расчеты относительного сдвига уровней  $2^2S_{1/2}$  и  $2^2P_{1/2}$  в водороде с точностью до членов порядка  $Z\alpha^3$  с учетом влияния взаимодействия электрона с магнитным дипольным моментом ядра, структуры и конечности массы ядра приводят к значению  $1057,8 \text{ Мгц}$ .

Взаимодействие частиц и вакуума является проявлением универсального взаимодействия и взаимопревращения частиц вещества и квантов поля.

9° Структура элементарных частиц не может быть описана наглядными геометрическими представлениями. Эта структура, по-видимому, не является стационарной. С одной стороны, она определяет вид взаимодействия данной элементарной частицы с другими и проявляется в этом взаимодействии. С другой стороны, эта структура является отражением всех взаимодействий, которые испытывает частица в данный момент времени.

10° Сведения о структуре нуклонов получены при исследовании упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов с энергией порядка  $7 \text{ Гэв}$  на протонах и упругого рассеяния электронов на протонах и нейтронах. Предполагается, что в нуклоне имеется центральная часть (*ядро нуклона*) с радиусом  $r_N \approx 0,2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , в которой сосредоточен положительный заряд  $e_N \approx +0,35 e$ , где  $e$  — величина элементарного заряда. Ядро нуклона, вероятно, состоит из нескольких слоев тяжелых частиц, виртуально рождающихся и аннигилирующих парами: частица — античастица. В области с линейным размером  $r_\pi \approx 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  распределено  $\pi$ -мезонное облако виртуальных  $\pi$ -мезонов ( $\pi$ -мезонная *шуба ядра, пионная атмосфера*) с плотностью, спадающей к границам нуклона. На долю  $\pi$ -мезонной шубы приходится заряд  $e_\pi = \pm 0,5e$ . Знаки «+» и «-» относятся соответственно к протону и нейтрону. В области с размерами  $r_c \approx 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  (*пионная стратосфера*) распределен положительный заряд нуклона  $e_c = + 0,15e$ .

11° Указанная в п. 10° структура объясняет anomalous значение магнитного момента протона, равное  $2,9\mu_{\text{яд}}$ , где  $\mu_{\text{яд}}$  — ядерный магнетон и отрицательный магнитный момент нейтрона, равный  $- 1,9\mu_{\text{яд}}$ . Вращение  $\pi$ -мезонного

облака вокруг его «оси» должно быть связано с появлением некоторого «тока» и соответствующего ему магнитного момента. В случае протона положительное  $\pi$ -мезонное облако создает магнитный момент, дополнительный к магнитному моменту ядра одинакового с последним знака, что приводит к аномально большому значению магнитного момента протона. В случае нейтрона отрицательное  $\pi$ -мезонное облако создает отрицательный магнитный момент, который, складываясь с магнитным моментом ядра, приводит к отрицательному магнитному моменту нейтрона. Электромагнитное взаимодействие ядра нуклона с  $\pi$ -мезонными облаками является также причиной отличия в массах покоя нейтрона и протона (см. также стр. 881).

#### 4. Космические лучи

1° *Космическими лучами* называются потоки атомных ядер высокой энергии, главным образом протонов, приходящие на Землю из космического пространства, а также вторичное излучение, создаваемое этими ядрами в атмосфере Земли. Космические лучи, находящиеся за пределами земной атмосферы, называются *первичными*. В составе первичных космических лучей содержатся атомные ядра с различными массовыми числами (см. таблицу ниже) и энергиями на один нуклон, заключенными в интервале  $1 \text{ Гэв} \leq E \leq 10^{13} \text{ эв}$ .

Группа ядер	Заряд Z	Плотность потока, $\text{м}^{-2} \times \times \text{степ}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$	% в общем потоке
Протоны .....	1	1300	92,9
Ядра гелия .....	2	88	6,3
Легкие ядра .....	3-5	1,9	0,13
Средние ядра .....	6-9	5,6	0,4
Тяжелые ядра ..	> 10	2,5	0,18
Сверхтяжелые ядра .....	> 20	0,7	0,05

В первичных космических лучах имеются ядра химических элементов, состав которых мало отличается от состава элементов, содержащихся в земной коре и атмосфере Солнца. Объемная плотность энергии в космических

лучах составляет в среднем около  $1 \text{ эв/см}^3$ . Поток первичных лучей с энергией, превышающей  $2,5 \text{ Гэв/нуклон}$ , имеет плотность  $\approx 0,14 \text{ см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Средняя энергия на один нуклон примерно одинакова для всех ядер, поэтому около  $1/3$  полной энергии приходится на средние и тяжелые ядра. Первичные космические лучи имеют изотропное пространственное распределение. На высотах, превышающих 50–60 км, имеется постоянная интенсивность первичных космических лучей. С приближением к Земле происходит увеличение интенсивности космического излучения за счет вторичных космических лучей.

2° Вторичные космические лучи образуются в результате неупругих столкновений первичных лучей с ядрами атомов азота и кислорода воздуха в верхних слоях атмосферы. Ниже 20 км все космическое излучение является вторичным. Проникающая способность космических лучей измеряется толщиной  $d$  слоя свинца, свинцовую толщину которого проникают космические лучи. При толщинах  $d$  от 0 до 10–13 см происходит быстрое ослабление интенсивности, а при дальнейшем увеличении толщины интенсивность практически не изменяется. В связи с этим в составе вторичных лучей различаются мягкая и жесткая компоненты. Мягкой называется часть лучей, испытывающих сильное поглощение свинцом, жесткой — компонента, обладающая в свинце большой проникающей способностью. Мягкую компоненту составляют электроны, позитроны и фотоны. Мюоны, образовавшиеся при распаде  $\pi$ -мезонов и слабо взаимодействующие с ядрами атомов атмосферы, образуют жесткую компоненту. Соотношение между интенсивностями мягкой и жесткой компонент сильно меняется с высотой вследствие неодинакового поглощения различных частиц в атмосфере, а также из-за распада нестабильных частиц.

3° При высокой энергии первичных частиц ( $> 5 \cdot 10^9 \text{ эв}$ ) столкновения их с атомами воздуха приводят, как правило, к образованию электронно-ядерных ливней. Результатом взаимодействия первичной частицы с ядрами атомов воздуха является расщепление последних на отдельные нуклоны и более крупные части, а также образование неустойчивых частиц ( $\pi^\pm$ - и  $\rho^0$ -мезонов). Последующие распады  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow e^\pm$  и  $\rho^0 \rightarrow 2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  приводят к образованию мягкой электронно-фотонной (п. 4°) компоненты ливня. Эта компонента затем интенсивно размножается вследствие последовательного (каскадного) образования новых пар  $e^+ - e^-$  (стр. 883) и тормозного излучения

частицами (стр. 579) новых гамма-квантов (электронно-каскадный процесс). Возникающие при расщеплении ядер энергичные нуклоны способны в свою очередь вызывать электронно-ядерные ливни (ядерно-каскадный процесс). Совокупность последовательных ядерных взаимодействий высокой энергии приводит к образованию широких атмосферных ливней (называемых также ливнями Огсе). Последние при энергиях первичных частиц свыше  $10^{13} \text{ эв}$  могут содержать многие миллионы частиц (в основном  $e^\pm$ ) при поперечных размерах ливня более  $1 \text{ км}^2$ .

4° Космические лучи, изотропно падающие из мирового пространства, испытывают отклонение в магнитном поле Земли, в результате чего интенсивность космических лучей зависит от широты. В экваториальной области отклоняющее действие магнитного поля Земли проявляется сильнее, и наибольшее число частиц, испытывая сильное отклонение, не проходит в земную атмосферу (широтный эффект). Положительно заряженные частицы, входящие в состав космических лучей, отклоняются магнитным полем Земли к востоку, а отрицательно — к западу (восточно-западный эффект). Широтный и восточно-западный эффекты возрастают с высотой. Интенсивность космических лучей зависит от долготы места наблюдения (долготный эффект).

5° Вне земной атмосферы обнаружены околоземные радиационные пояса — две разграниченные области с сильно повышенной интенсивностью космического ионизирующего излучения (по сравнению с наблюдаемой на относительно малых высотах). Образование радиационных поясов связано с захватом и удержанием заряженных частиц магнитным полем Земли. Внутренний радиационный пояс находится от Земли на удалении  $600 \div 6000 \text{ км}$ , но в некоторых местах опускается до  $300 \text{ км}$  (например, в области магнитных аномалий в южной части Атлантики). Этот радиационный пояс содержит в основном протоны высоких энергий (до  $100 \text{ Мэв}$ ) с плотностью потока  $\approx 10^2 \text{ см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Внешний радиационный пояс находится от Земли на расстояниях  $2 \cdot 10^4 \div 6 \cdot 10^4 \text{ км}$ , в некоторых местах (на широтах  $55^\circ - 70^\circ$ ) спускаясь к Земле до  $300 \div 1500 \text{ км}$ . Внешний радиационный пояс образован электронами солнечного происхождения, доходящими до околоземного пространства. Он состоит в основном из электронов с энергией, меньшей  $100 \text{ кэв}$ , и плотностью потока  $10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Радиационные пояса характерны для всех небесных тел, обладающих

магнитным полем. Луна не имеет собственного магнитного поля, и вокруг нее нет радиационных поясов.

6° Колебания интенсивности вторичных космических лучей во времени называются *вариациями космических лучей*. *Атмосферные вариации* связаны с нерегулярными изменениями атмосферного давления, с переменной величиной солнечной активности, влияющей на процессы в атмосфере, и т. д. *Звездно-суточные вариации* связаны с вращением Земли, с движением предполагаемых источников первичных лучей за пределами солнечной системы. Кроме того, известны вариации космических лучей с 27-дневной, сезонной, годовой, 11-летней и т. д. периодичностью.

7° Гипотезы о происхождении первичных космических лучей опираются на данные об энергиях первичных частиц и на радиоастрономические данные. Считается, что в первичных лучах заряженные частицы приобретают большие энергии благодаря ускорению, которое они получают в электромагнитных полях звезд и Солнца. Ускорение заряженных частиц должно происходить постепенно. В противном случае, если бы энергии до  $10^{13}$  эв, которыми обладают тяжелые и сверхтяжелые ядра, имеющиеся в первичном излучении, получались ими сразу, ядра сразу бы распадались на составляющие их нуклоны, ибо энергии связи в ядре не хватило бы для удержания в ядре нуклонов при быстром сообщении ядру энергии порядка  $10^{13}$  эв. Постепенное ускорение первичных космических лучей может осуществляться аналогично ускорению частиц в бетатроне (стр. 445). При вращении звезд, обладающих магнитным полем, создаются вихревые электрические поля. Магнитные поля звезд, действуя на протоны и ядра, удерживают их на замкнутых траекториях, двигаясь по которым они приобретают в электрических полях колоссальные ускорения. Механизмом ускорения частиц в первичных космических лучах являются также эффекты, связанные с попаданием частиц в облака межзвездной материи, обладающие неоднородными магнитными полями. В облаках межзвездной материи возникают движения заряженных масс, создающие перемешанные электромагнитные поля. В этих полях заряженные частицы первичного космического излучения могут ускоряться до самых больших наблюдаемых в нем энергий. Предполагается, что начальная энергия первичных частиц (*порог инжекции*) имеет своей природой ударные волны, возникающие в результате столкновений газовых масс при взрыве *сверх-*

*новых звезд*. Энергия этих взрывов имеет внутриядерное происхождение, поэтому энергия космических лучей имеет своей первопричиной ядерную энергию.

Вещество звезд при взрывах разлетается на большие расстояния и попадает в межзвездные переменные магнитные поля, где получает дальнейшее ускорение. Вследствие малой плотности межзвездного вещества средняя длина свободного пробега ускоренных частиц весьма велика, так что при большой длительности ( $10^8 \div 10^9$  лет) ускорительных процессов частицы космических лучей набирают очень высокие энергии. При их ускорении и торможении в магнитных межзвездных полях возникает тормозное и синхротронное (стр. 579) излучение частиц, лежащее в диапазоне видимого света и коротких радиоволн (*космическое радиоизлучение*).

Потоки космических лучей испускаются Солнцем. Интенсивность этих потоков резко возрастает при солнечных вспышках.

величины метра, а лишь повышает точность его воспроизведения.

Сантиметр (*см*) — одна сотая метра.

Килограмм (*кг*) — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма.

Грамм (*г*) — одна тысячная килограмма.

Секунда (*сек*) —  $1/31556925,9747$  часть тропического года для 1900г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени. Тропическим годом называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия. *Эфемеридным временем* называется равномерно текущее время, которое применяется в астрономии с тех пор, как было установлено, что вращения Земли и ход осованного на нем всемирного времени неравномерны. Новое определение секунды не связано с изменением ее величины по сравнению с прежней.

Килограмм-сила (*кгс* или *кГ*) — сила, сообщаящая массе, равной массе международного прототипа килограмма, ускорение, равное  $9,80665 \text{ м/сек}^2$ .

Радян (*рад*) — угол между двумя радиусами круга, вырезающими на окружности дугу, длина которой равна радиусу.

Стерadian (*стер*) — телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную квадрату со стороной, равной радиусу сферы.

3° Приставки, служащие для обозначения производных единиц метрических систем, кратных и дольных главной единице:

Наименование	Отношение к главной единице	Сокращенное обозначение	
		русское	международное
Пико .....	$10^{-12}$	<i>п</i>	<i>p</i>
Нано .....	$10^{-9}$	<i>н</i>	<i>n</i>
Микро .....	$10^{-6}$	<i>мк</i>	<i>μ</i>
Милли .....	$10^{-3}$	<i>м</i>	<i>m</i>
Сантн .....	$10^{-2}$	<i>с</i>	<i>c</i>
Деци .....	$10^{-1}$	<i>д</i>	<i>d</i>
Дека .....	$10$	<i>да</i>	<i>da</i>
Гекто .....	$10^2$	<i>г</i>	<i>h</i>
Кило .....	$10^3$	<i>к</i>	<i>K</i>
Мега .....	$10^6$	<i>М</i>	<i>M</i>
Гига .....	$10^9$	<i>Г</i>	<i>G</i>
Тера .....	$10^{12}$	<i>Т</i>	<i>T</i>

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ЕДИНИЦ 1)

1. Единицы измерения механических величин

1° До 1963 г. были приняты три метрические системы единиц:

а) *абсолютная физическая система* СГС (CGS), в которой основными единицами являются сантиметр, грамм и секунда;

б) *абсолютная практическая система* МКС (MKS), в которой основными единицами являются метр, килограмм и секунда;

в) *техническая система* МКГСС (MKGS), в которой основными единицами являются метр, килограмм-сила и секунда.

С 1963 г. в СССР в качестве предпочтительной введена *Международная система единиц* СИ (SI), которая для механических единиц совпадает с системой МКС, а для электромагнитных — с системой МКСА.

В качестве единицы плоского угла во всех системах единиц принят радиан, а в качестве единицы телесного угла —стерадиан.

2° Определения основных единиц.

Единица длины метр (*м*) есть длина, равная  $1\ 650\ 763,73$  длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86. Переход к новому определению метра по сравнению с прежним (расстояние между двумя штрихами на платино-иридиевом эталоне длины) не связан с изменением

1) Основные определения и основные сведения о теории размерностей см. на стр. 328 и 329.



4° Размерности и единицы измерения некоторых геометрических и механических величин в различных системах единиц

Величина	Единицы измерения в системе			
	Формула размерности в системе 1)		МКГСС	
	СГС, МКС и СИ	МКГСС	наименование	сокращенное обозначение
Длина .....	L	L	метр	м
Масса .....	M	L <sup>-1</sup> FT <sup>2</sup>	килограмм	кг
Время .....	T	T	секунда	сек
Площадь .....	L <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	квадратный метр	м <sup>2</sup>
Объем .....	L <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	кубический метр	м <sup>3</sup>
Частота .....	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	герц	гц
Угловая скорость ..	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	рад/сек	рад/сек
Угловое ускорение ..	T <sup>-2</sup>	T <sup>-2</sup>	рад/сек <sup>2</sup>	рад/сек <sup>2</sup>
Скорость .....	L T <sup>-1</sup>	L T <sup>-1</sup>	см/сек	м/сек
Ускорение .....	L T <sup>-2</sup>	L T <sup>-2</sup>	см/сек <sup>2</sup>	м/сек <sup>2</sup>
Сила .....	L M T <sup>-2</sup>	F	ньютон	кг или кг
Количество движения ..	L M T <sup>-1</sup>	FT	кг·м/сек	кг·сек

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## 1. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

## Продолжение

Величина	Единицы измерения в системе			
	Формула размерности в системе 1)		МКГСС	
	СГС, МКС и СИ	МКГСС	наименование	сокращенное обозначение
Импульс силы .....	L M T <sup>-1</sup>	FT	—	кг·сек
Плотность .....	L <sup>-3</sup> M	L <sup>-3</sup> FT <sup>2</sup>	г/см <sup>3</sup>	кг/сек <sup>2</sup> /м <sup>3</sup>
Удельный вес .....	L <sup>-2</sup> M T <sup>-2</sup>	L <sup>-2</sup> F	дин/см <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>
Работа и энергия ..	L <sup>2</sup> M T <sup>-2</sup>	L F	эрг	дж
Мощность .....	L <sup>2</sup> M T <sup>-3</sup>	L F T <sup>-1</sup>	—	вт
Момент силы .....	L <sup>2</sup> M T <sup>-2</sup>	L F	дин·см	н·м
Момент инерции ..	L <sup>2</sup> M	L F T <sup>2</sup>	—	кг·м
Момент количества движения .....	L <sup>2</sup> M T <sup>-1</sup>	L F T	г·см <sup>2</sup> /сек	кг·м·сек <sup>2</sup>
Импульс момента силы .....	L <sup>2</sup> M T <sup>-1</sup>	L F T	г·см <sup>2</sup> /сек	кг·м·сек
Давление (напряжение) .....	L <sup>-1</sup> M T <sup>-2</sup>	L <sup>-2</sup> F	дин/см <sup>2</sup>	кг/м <sup>2</sup>

Величина	Формула размерности в системе <sup>1)</sup>		Единицы измерения в системе				
	СИ	МКС	СГС		МКС и СИ		МКГСС
			наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	
Динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения) .....	$L^{-1}MT^{-1}$	$L^{-2}FT$	пуаз	пз	н·сек/м <sup>2</sup>	кг·сек/м <sup>2</sup>	кг·сек/м <sup>2</sup>
Кинематическая вязкость .....	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$	стокс	ст	м <sup>2</sup> /сек	м <sup>2</sup> /сек	м <sup>2</sup> /сек
Модули линейного растяжения (Юнга), сдвига и всестороннего сжатия .....	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	—	дин/см <sup>2</sup>	н/м <sup>2</sup>	н/м <sup>2</sup>	кг/м <sup>2</sup>

1) Символы L, и T означают единицы длины и времени, M — массы (в системах СГС, МКС и СИ), F — силы (в системе МКГСС).  
 2) Прежде обозначалась *дин*.  
 3) Прежде называлась бар (бар), новое определение бара см. на стр. 898.  
 4) Прежде называлась милливеса (мвз).

5° Соотношения между единицами измерения некоторых величин (стандартное ускорение 9,80665 м/сек<sup>2</sup> заменено приближенной величиной 9,81 м/сек<sup>2</sup>).

Величина                      Соотношения между единицами измерения в системах СГС, МКС, СИ и МКГСС

Длина .....	1 см	= 10 <sup>-2</sup> м
Масса .....	1 г	= 10 <sup>-3</sup> кг; 1 кг·сек <sup>2</sup> /м = 9,81 кг
Площадь .....	1 см <sup>2</sup>	= 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup>
Объем .....	1 см <sup>3</sup>	= 10 <sup>-6</sup> м <sup>3</sup>
Сила .....	1 дин	= 10 <sup>-5</sup> н; 1 кг = 9,81 н
Плотность .....	1 г/см <sup>3</sup>	= 10 <sup>3</sup> кг/м <sup>3</sup> ; 1 кг·сек <sup>2</sup> /м <sup>4</sup> = 9,81 кг/м <sup>3</sup>
Удельный вес ..	1 дин/см <sup>3</sup>	= 10 н/м <sup>3</sup> ; 1 кг/м <sup>3</sup> = 9,81 н/м <sup>3</sup>
Работа и энергия	1 эрг	= 10 <sup>-7</sup> Дж; 1 кг·м = 9,81 Дж
Мощность .....	1 эрг/сек	= 10 <sup>-7</sup> вт; 1 кг·м/сек = 9,81 вт
Давление, модули линейного растяжения, сдвига и всестороннего сжатия .....	1 дин/см <sup>2</sup>	= 10 <sup>-1</sup> н/м <sup>2</sup> ; 1 кг/м <sup>2</sup> = 9,81 н/м <sup>2</sup>
Динамическая вязкость .....	1 пз	= 10 <sup>-1</sup> н·сек/м <sup>2</sup> ; 1 кг·сек/м <sup>2</sup> = 9,81 н·сек/м <sup>2</sup>

6° Внесистемные единицы и их связь с единицами системы СИ.

Величина	Единица измерения		
	наименование	сокращенное обозначение	связь с единицей системы СИ
Длина	микрон ангстрем	мкм Å	1 мкм = 10 <sup>-6</sup> м 1 Å = 10 <sup>-10</sup> м
Масса	тонна центнер карат	t ц —	1 т = 10 <sup>3</sup> кг 1 ц = 10 <sup>2</sup> кг 1 карат = 2 · 10 <sup>-4</sup> кг
Время	час минута	ч мин	1 ч = 3600 сек 1 мин = 60 сек
Плоский угол	градус	°	1° = $\frac{\pi}{180}$ рад
	минута	'	1' = $\frac{\pi}{108}$ · 10 <sup>-2</sup> рад
	секунда	"	1" = $\frac{\pi}{648}$ · 10 <sup>-3</sup> рад

Продолжение

Величина	Единица измерения		
	наименование	сокращенное обозначение	связь с единицей системы СИ
Площадь	ар гектар	<i>a</i> <i>га</i>	$1 a = 10^2 \text{ м}^2$ $1 га = 10^4 \text{ м}^2$
Объем	литр	<i>л</i>	$1 л = 1,000028 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$
Угол поворота	оборот	<i>об</i>	$1 об = 2\pi \text{ рад}$
Угловая скорость	—	<i>об/мин</i> <i>об/сек</i>	$1 об/мин = \frac{\pi}{30} \text{ рад/сек}$ $1 об/сек = 2\pi \text{ рад/сек}$
Сила	тонна-сила	<i>тс</i>	$1 тс = 9,80665 \cdot 10^3 \text{ н}$
Работа	ватт-час	<i>вт · ч</i>	$1 вт · ч = 3,6 \cdot 10^3 \text{ дж}$
Мощность	лошадиная сила	<i>л. с.</i>	$1 л. с. = 735,499 \text{ вт}$ ( $75 \text{ кг} \cdot \text{м/сек}$ )
Давление	бар (новый) <sup>1)</sup> миллиметр ртутного столба	<i>бар</i> <i>мм рт. ст.</i>	$1 бар = 10^5 \text{ н/м}^2$ $1 \text{ мм рт. ст.} =$ $= 133,322 \text{ н/м}^2$
	миллиметр водяного столба	<i>мм вод. ст.</i>	$1 \text{ мм вод. ст.} =$ $= 9,80665 \text{ н/м}^2$
	техническая атмосфера физическая атмосфера	<i>ат</i> или $\text{кг/см}^2$ <i>атм</i>	$1 ат =$ $= 9,80665 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2$ $1 атм =$ $= 1,01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ ( $760 \text{ мм рт. ст.}$ )

1) Старое определение бара см. на стр. 896, примечание 3.

## 2. Единицы измерения тепловых величин

1° Для измерения тепловых величин в качестве предпочтительной установлена Международная система единиц СИ, основными единицами которой являются метр, килограмм, секунда и градус Кельвина.

Допускается также применение внесистемных единиц, основанных на *калориях*.

2° В качестве основных приняты абсолютная термодинамическая шкала температуры ( $T^\circ \text{ К}$ ) и стоградусная международная температурная шкала ( $t^\circ \text{ С}$ ).

Основной *реперной* точкой первой шкалы, используемой в системе СИ, является температура тройной точки (стр. 280) воды, равная  $273,16^\circ \text{ К}$ .

Основные реперные точки второй шкалы — температуры плавления льда ( $0^\circ \text{ С}$ ) и кипения воды ( $100^\circ \text{ С}$ ) при нормальном давлении ( $101\,325 \text{ н/м}^2$ ).

3° *Калория (калория международная)* устанавливается на основе следующего соотношения:

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ дж.}$$

*Термохимическая калория*

$$1 \text{ кал}_{\text{ТХ}} = 4,1840 \text{ дж.}$$

(Размерности и производные единицы измерения некоторых молекулярных и тепловых величин см. в таблице на стр. 900 — 902.)

## 3. Единицы измерения электрических и магнитных величин

1° Единицы Международной системы СИ для электрических и магнитных величин совпадают с соответствующими единицами принятой ранее системы МКСА. В качестве четвертой основной единицы принят ампер. При использовании этой системы единиц все уравнения электромагнитного поля нужно записывать в рационализованной форме.

2° Определение единицы силы тока — ампера (*a*): ампер есть сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метр один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  единицы силы системы СИ на 1 метр длины.

Величина	Размерность в системах СИ и СГС <sup>1)</sup>	Единица измерения в системе		Внесистемные единицы	Связь между единицами в разных системах
		СИ	СГС		
Коэффициент диффузии	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	м <sup>2</sup> /сек	см <sup>2</sup> /сек	—	1 см <sup>2</sup> /сек = 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup> /сек
Коэффициент внутреннего трения	L <sup>-1</sup> MT <sup>-1</sup>	кг/м·сек	г/см·сек (пуаз)	—	1 пуаз = 10 <sup>-1</sup> кг/м·сек
Коэффициент поверхностного натяжения	MT <sup>-2</sup>	кг/сек <sup>2</sup> (Н/м; Дж/м <sup>2</sup> )	э/сек <sup>2</sup> (дин/см; эрг/см <sup>2</sup> )	—	1 э/сек <sup>2</sup> = 10 <sup>-3</sup> кг/сек <sup>2</sup>
Удельный объем	L <sup>3</sup> M <sup>-1</sup>	м <sup>3</sup> /кг	см <sup>3</sup> /г	—	1 см <sup>3</sup> /г = 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup> /кг
Молекулярный вес	М·моль <sup>-1</sup> (СГС) М·моль <sup>-1</sup> (СИ)	кг/кмоль	г/моль	—	1 г/моль = 1 кг/кмоль

Количество энергии, внутренняя энергия, энтропия, изохорно-изотермный, изобарно-изотермный и хемический потенциалы	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>	дж	эрг	калория международная (кал) калория термохимическая (кал, тх)	1 эрг = 10 <sup>-7</sup> дж 1 ккал = 4,1868 дж 1 ккал = 10 <sup>3</sup> кал 1 ккал тх = 4,1840 дж
Теплоемкость, энтропия	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup> ·град <sup>-1</sup>	дж/град	эрг/град	кал/град	
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> ·град <sup>-1</sup>	дж/кг·град	эрг/г·град	кал/г·град ккал/кг·град	1 эрг/г·град = 10 <sup>-4</sup> дж/кг·град 1 ккал/г·град = 4,1868 дж/кг·град 1 ккал/кг·град = 10 <sup>3</sup> дж/кг·град
Удельная теплота фазового перехода	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	дж/кг	эрг/г	кал/г ккал/кг	1 эрг/г = 10 <sup>-4</sup> дж/кг 1 ккал/г = 1 кг/кг = 4,1868 дж/кг 10 <sup>3</sup> дж/кг

Величина	Размерность в системах СИ и СГС(1)	Единица измерения в системе		Связь между единицами в разных системах
		СИ	СГС	
Коэффициент теплопроводности	$\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{град}^{\circ}\text{C}}$ $\times \text{град}^{-1}$	$\frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$	$\frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$	$\frac{1 \text{ эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} = 10^{-7} \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$
				$\frac{1 \text{ ккал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} = 4,1868 \times 10^3 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ $\frac{1 \text{ ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}} = 1,1630 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$
Коэффициенты теплоплотности и теплопередачи	$\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{град}^{\circ}\text{C}}$ $\times \text{град}^{-1}$	$\frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$	$\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$	$\frac{1 \text{ эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} = 10^{-7} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$
				$\frac{1 \text{ ккал}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} = 4,1868 \times 10^3 \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ $\frac{1 \text{ ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}} = 1,1630 \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$
Коэффициент температуропроводности	$\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{град}^{\circ}\text{C}}$ $\times \text{град}^{-1}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	

1) Символы L, M и T означают единицы длины, массы и времени в соответствующих системах единиц.

В Международной системе единиц (СИ) электрическая постоянная  $\epsilon_0$  равна

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{ф}}{\text{м}},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме (в м/сек).

Магнитная постоянная:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{гн}}{\text{м}}.$$

3° Кроме того, в физике применяются следующие три системы единиц, построенные на основе системы СГС для механических величин:

а) абсолютная электрическая система единиц СГСЭ, в которой основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда, а абсолютная диэлектрическая проницаемость считается безразмерной и равной единице для вакуума:

$$\epsilon_0 = 1;$$

б) абсолютная электромагнитная система единиц СГСМ, в которой основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда, а абсолютная магнитная проницаемость считается безразмерной и принимается равной единице для вакуума:

$$\mu_0 = 1;$$

в) абсолютная гауссова система единиц, в которой основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда, а абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемости считаются безразмерными и принимаются одновременно равными единице для вакуума:

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1.$$

В случае использования систем единиц СГСЭ, СГСМ и гауссовой уравнения электромагнитного поля записываются в нерационализованной форме.

4° Размерности и единицы измерения основных электрических и магнитных величин в системе СИ (МКСА):

Величина	Размерность	Единица измерения	
		название	сокращенное обозначение
Работа и энергия	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{сек}^2$	джоуль	дж
Мощность	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{сек}^3$	ватт	вт
Количество электричества (электрический заряд)	$\text{а} \cdot \text{сек}$	кулон	к
Поток электрического смещения (индукция)	$\text{а} \cdot \text{сек}$	кулон	к
Электрическое смещение (индукция)	$\text{а} \cdot \text{сек} / \text{м}^2$	кулон на квадратный метр	к/м <sup>2</sup>
Разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{а} \cdot \text{сек}^3$	вольт	в
Електроёмкость	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^4 / \text{м}^2 \cdot \text{кг}$	фарада	ф
Электрический момент	$\text{а} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}$	—	к·м
Вектор поляризации (поляризованность)	$\text{а} \cdot \text{сек} / \text{м}^2$	—	к/м <sup>2</sup>
Электрическая постоянная	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^4 / \text{м}^2 \cdot \text{кг}$	фарада на метр	ф/м
Напряженность электрического поля	$\text{м} \cdot \text{кг} / \text{а} \cdot \text{сек}^3$	вольт на метр	в/м
Электрическое сопротивление	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^3$	ом	ом
Удельное электрическое сопротивление	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^3$	—	ом·м
Удельная электрическая проводимость	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^3 / \text{м}^3 \cdot \text{кг}$	—	1/ом·м
Подвижность ионов	$\text{а} \cdot \text{сек}^2 / \text{кг}$	—	м <sup>2</sup> /в·сек
Магнитный поток	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{а} \cdot \text{сек}^2$	вебер	вб
Магнитная индукция	$\text{кг} / \text{а} \cdot \text{сек}^2$	тесла	тл
Магнитный момент	$\text{а} \cdot \text{м}^2$	—	а·м <sup>2</sup>
Вектор интенсивности намагничивания (намагниченность)	$\text{а} / \text{м}$	—	а/м
Индуктивность и взаимная индуктивность	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^2$	генри	гн
Магнитная постоянная	$\text{м} \cdot \text{кг} / \text{а}^2 \cdot \text{сек}^2$	генри на метр	гн/м
Напряженность магнитного поля	$\text{а} / \text{м}$	на метр	а/м
Магнитодвижущая сила	$\text{а}$	ампер или ампервиток	а или ав
Магнитное сопротивление	$\text{а}^2 \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2 \cdot \text{кг}$	—	а/вб или ав/вб

5° Размерность и соотношения между единицами измерения электрических величин в системах СГСЭ, СГСМ и гауссовой (с — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме:  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек)

Величина	Размерность в системах		Связь между единицами	
	СГСЭ и гауссовой	СГСМ	ед. СГСЭ <sup>1)</sup> ед. СИ	ед. СГСМ ед. СИ
Количество электричества (электрический заряд)	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	10с <sup>-1</sup>	10
Поток электрического смещения (индукция)	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	10·(4πс) <sup>-1</sup>	10/4π
Электрическое смещение (индукция)	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	10 <sup>9</sup> ·(4πс) <sup>-1</sup>	10 <sup>9</sup> /4π
Разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	10 <sup>-8</sup> с	10 <sup>-8</sup>
Електроёмкость	см	см <sup>-1</sup> ·сек <sup>2</sup>	10 <sup>9</sup> с <sup>-2</sup>	10 <sup>9</sup>
Электрический момент	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	(10с) <sup>-1</sup>	10 <sup>-1</sup>
Вектор поляризации (поляризованность)	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	$\frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \frac{1}{\text{г.}} \cdot \frac{1}{\text{с.м.}} \cdot \text{сек}^{-1}$	10 <sup>9</sup> с <sup>-1</sup>	10 <sup>9</sup>

Величина	Размерность в системах		Связь между единицами	
	СГСЭ и гауссовой	СГСМ	Связь между единицами	
			ед. СГСЭ <sup>1)</sup> ед. СИ	ед. СГСМ ед. СИ
Электрическая постоянная	—	см <sup>-2</sup> ·сек <sup>2</sup>	10 <sup>11</sup> /4πε <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>
Напряженность электрического поля	см <sup>-1/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	<sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-2</sup>	10 <sup>-6</sup> с	с
Сила тока	<sup>3/2</sup> / <sub>2</sub> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-2</sup>	<sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	10с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>
Электрическое сопротивление	см <sup>-1</sup> ·сек	см·сек <sup>-1</sup>	10 <sup>-9</sup> с <sup>2</sup>	с <sup>2</sup>
Удельное электрическое сопротивление	сек	см <sup>2</sup> ·сек <sup>-1</sup>	10 <sup>-11</sup> с <sup>2</sup>	с <sup>2</sup>
Удельная электрическая проводимость	сек <sup>-1</sup>	см <sup>-2</sup> ·сек	10 <sup>11</sup> с <sup>-2</sup>	с <sup>-2</sup>
Плотность зарядов	<sup>3/2</sup> / <sub>2</sub> · <sup>-1/2</sup> / <sub>2</sub>	<sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> · <sup>-1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек	10 <sup>9</sup> с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>

<sup>1)</sup> Таковы же значения отношений единиц гауссовой системы к единицам СИ (МКСА).

<sup>2)</sup> Таковы же значения отношений единиц гауссовой системы к единицам СГСМ.

6° Размерности магнитных величин и соотношения между единицами их измерения в системах СГСЭ, СГСМ и гауссовой (с — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме:  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек).

## I. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

Величина	Размерность в системах		Связь между единицами			
	СГСЭ	СГСМ и гауссовой	Связь между единицами			
			ед. СГСЭ <sup>1)</sup> ед. СИ	ед. СГСМ <sup>1)</sup> ед. СИ	ед. СГСЭ <sup>2)</sup> ед. СГСМ	ед. СГСМ <sup>2)</sup> ед. СИ
Магнитный поток	см <sup>1/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub>	см <sup>3/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	макс-велл	10 <sup>-8</sup> с	10 <sup>-8</sup>	с
Магнитная индукция	см <sup>-3/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub>	см <sup>-1/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	гаусс	10 <sup>-4</sup> с	10 <sup>-4</sup>	с
Магнитный момент	см <sup>3/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub>	см <sup>9/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	—	10 <sup>-20</sup> с <sup>-1</sup>	10 <sup>-20</sup>	с <sup>-1</sup>
Вектор интенсивности намагниченности (намагниченность)	см <sup>-3/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub>	см <sup>-1/2</sup> · <sup>1/2</sup> / <sub>2</sub> ·сек <sup>-1</sup>	—	10 <sup>9</sup> с <sup>-1</sup>	10 <sup>9</sup>	с <sup>-1</sup>

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Величина	Размерность в системах		Единица измерения в системах СИ и гауссовой		Связь между единицам	
	СИ	СИГСМ и гауссовой	название	сокращенное обозначение	ед. СИ	ед. СИГСМ
Индуктивность и взаимная индуктивность	$см^{-1} \cdot сек^2$	см	сантиметр <sup>2</sup>	см	$10^{-9} \cdot с^2$	$с^2$
	$см \cdot 2 \cdot сек^2$	---	---	---	---	---
Магнитная постоянная	$1/2 \cdot 1/2 \cdot сек^{-2}$	$см^{-1/2} \cdot 1/2 \cdot сек^{-1}$	эрстед	э	$10^{-7} \cdot 4 \cdot \pi \cdot с^2$	$с^2$
	$3/4 \cdot 1/2 \cdot сек^{-2}$	$см^{1/2} \cdot 2 \cdot сек^{-1}$	гильберт	гб	$10^3/4 \cdot \pi \cdot с^{-1}$	$с^{-1}$
Напряженность магнитного поля	$см \cdot сек^{-2}$	см <sup>-1</sup>	---	---	$10^9/4 \cdot \pi \cdot с^2$	$с^{-2}$
	---	---	---	---	---	---

<sup>1)</sup> Таковы не значения отношений единиц гауссовой системы к единицам системы СИ (МКСА).

<sup>2)</sup> Таковы не значения отношений единиц СИГСМ к единицам гауссовой системы.

<sup>3)</sup> ГОСТ 8033-56 это наименование ликвидировано.

## 1. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

7° Внесистемные единицы энергии:

а) электрон-вольт (эв),  $1 \text{ эв} = (1,60210 \pm 0,00007) \times 10^{-19} \text{ Дж}$ ;

б) килоэлектрон-вольт (кэв),  $1 \text{ кэв} = 10^3 \text{ эв}$ ;

в) мегаэлектрон-вольт (Мэв),  $1 \text{ Мэв} = 10^6 \text{ эв}$ ;

г) гигаэлектрон-вольт (Гэв),  $1 \text{ Гэв} = 10^9 \text{ эв}$ .

## 4. Единицы измерения уровня звукового давления

Уровень звукового давления  $L = 2k \lg \frac{p_{эфф}}{p_0}$  (стр. 544) измеряется в белах (б) и децибелах (дб). В первом случае  $k = 1$ , а во втором  $k = 10$ .

## 5. Единицы измерения световых величин

1° Основной единицей в системе СИ является единица силы света — свеча (св), значение которой принимается таким, чтобы яркость полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 св на  $1 \text{ см}^2$ .

2° Производные световые единицы.

Величина	Единица измерения		Внесистемные единицы	
	название	сокращенное обозначение	название	сокращенное обозначение
Световой поток	люмен <sup>1)</sup>	лм	---	---
Световая энергия	люмен-секунда	лм·сек	---	---
Светность (светимость)	люмен на квадратный метр (люкс)	лм/м <sup>2</sup> (лк)	фот	лм/см <sup>2</sup> ф
	Освещенность	люкс <sup>2)</sup>	фот <sup>4)</sup>	ф
Количество освещенности	люкс-секунда	лк·сек	---	---
	Яркость	нит <sup>3)</sup>	стильб <sup>5)</sup>	сб
свеча на квадратный метр	св/м <sup>2</sup>	---	---	---

<sup>1)</sup> Световой поток, испускаемый точечным источником света с силой света в 1 свече в телесный угол, равный 1 стерadianу.

<sup>2)</sup> Освещенность поверхности сферы радиусом 1 метр, создаваемая находящимся в ее центре точечным источником света, сила света которого равна 1 свече.

<sup>3)</sup> Яркость равномерно светящейся плоской поверхности в перпендикулярном к ней направлении, если в этом направлении сила света  $1 \text{ м}^2$  поверхности равна 1 свече.

<sup>4)</sup>  $1 \text{ ф} = 1 \text{ лм/см}^2 = 10^4 \text{ лк}$ .

<sup>5)</sup>  $1 \text{ сб} = 10^4 \text{ нт}$ .



### 6. Некоторые единицы измерения в атомной и ядерной физике

1° Атомная единица массы (а. е. м.) — 1/16 массы атома изотопа кислорода  $O^{16}$ :

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,6597 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

2° Унифицированная атомная единица массы (у. а. е. м.) — 1/12 массы атома изотопа  ${}_{6}C^{12}$ :

$$1 \text{ у. а. е. м.} = 1,6603 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

3° Барн — единица измерения эффективного поперечного сечения ядерных реакций:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2.$$

### П Р И Л О Ж Е Н И Е II

### УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Здесь приведены новые значения физических констант, рекомендованные Генеральной ассамблеей Международного союза чистой и прикладной физики в Варшаве (сентябрь 1963 г.), см. УФП, том LXXXIV, вып. 1, 191 — 194, 1964 г.

Давление атмосферное нормальное

$$p_0 = 1 \text{ атм} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ н.м.}^{-2}$$

Заряд элементарный

$$e = (1,60210 \pm 0,00007) \cdot 10^{-19} \text{ К} =$$

$$= (4,80298 \pm 0,00020) \cdot 10^{-19} \text{ СГСЭ}_q$$

Заряд удельный электрона

$$\frac{r}{m_e} = (1,758796 \pm 0,000019) \cdot 10^{11} \text{ н.кг}^{-1} =$$

$$= (5,27274 \pm 0,00006) \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ}_q \cdot \text{г}^{-1}$$

Комптоновская длина волны протона

$$\lambda_p = (1,32140 \pm 0,00004) \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$\frac{\lambda_p}{2\pi} = (2,10307 \pm 0,00006) \cdot 10^{-16} \text{ м}$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_e = (2,42621 \pm 0,00006) \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = (3,86144 \pm 0,00009) \cdot 10^{-13} \text{ м}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = (9,2732 \pm 0,0006) \cdot 10^{-24} \text{ Дж.тл}^{-1}$$

Магнетон ядерный

$$\mu_{\text{яд}} = (5,0505 \pm 0,0004) \cdot 10^{-27} \text{ Дж.тл}^{-1}$$

Масса покоя нейтрона

$$m_n = (1,67482 \pm 0,00008) \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$$

$$= (1,0086654 \pm 0,0000013) \text{ у. а. е. м.}$$

Масса покоя протона

$$m_p = (1,67252 \pm 0,00008) \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$$

$$= (1,00727663 \pm 0,00000024) \text{ у. а. е. м.}$$

Масса покоя электрона

$$m_e = (9,1091 \pm 0,0004) \cdot 10^{-31} \text{ кг} =$$

$$= (5,48597 \pm 0,00009) \cdot 10^{-4} \text{ у. а. е. м.}$$

Момент магнитный протона

$$\mu_p = (1,41049 \pm 0,00013) \cdot 10^{-26} \text{ Дж.тл}^{-1}$$

$$\frac{\mu_p}{\mu_{\text{яд}}} = 2,79276 \pm 0,00007$$

Момент магнитный аномальный электрона

$$\frac{\mu_e}{\mu_B} - 1 = (1,159615 \pm 0,000015) \cdot 10^{-3}$$

Объем одного киломоля идеального газа при нормальных условиях

$$V_0 = (22,4136 \pm 0,0030) \text{ м}^3$$

Постоянная Больцмана

$$k = (1,38054 \pm 0,00018) \cdot 10^{-23} \text{ Дж.}^{\circ}\text{К}^{-1}$$

$$\frac{1}{k} = (1,16049 \pm 0,00016) \cdot 10^4 \text{ }^{\circ}\text{К.эв}^{-1}$$

Постоянная Вина

$$b = (2,8978 \pm 0,0004) \cdot 10^{-3} \text{ м.}^{\circ}\text{К}$$

Постоянная газовая

$$R = (8,3143 \pm 0,0012) \cdot 10^3 \text{ Дж.}^{\circ}\text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$$

Постоянная гравитационная

$$\gamma = (6,670 \pm 0,015) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$$

Постоянная зеемановского расщепления

$$\frac{\mu_B}{hc} = (46,6858 \pm 0,0004) \text{ м}^{-1} \cdot \text{тл}^{-1}$$

Постоянная Планка

$$h = (6,6256 \pm 0,0005) \cdot 10^{-34} \text{ Дж.сек}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = (1,05450 \pm 0,00007) \cdot 10^{-34} \text{ Дж.сек}$$

$$\frac{h}{e} = (4,13556 \pm 0,00012) \cdot 10^{-15} \text{ Дж.сек.К}^{-1} =$$

$$= (1,37947 \pm 0,00004) \cdot 10^{-17} \text{ эрг.сек.}(\text{СГСЭ}_q)^{-1}$$

$$\frac{1}{h} = (2,41804 \pm 0,00007) \cdot 10^{34} \text{ эв}^{-1}$$

$$\frac{ch}{hc} = (1,23984 \pm 0,00004) \cdot 10^{-6} \text{ м.эв}$$

$$\frac{1}{ch} = (8,06573 \pm 0,00023) \cdot 10^5 \text{ м}^{-1} \cdot \text{эв}^{-1}$$

постоянная радиационная первая  
 $c_1 = 2\pi\hbar c^2 = (3,7405 \pm 0,0003) \cdot 10^{-16} \text{ вт} \cdot \text{м}^2$

постоянная радиационная вторая

$$c_2 = \frac{\hbar c}{k} = (1,43879 \pm 0,00019) \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{°К}$$

Постоянная Ридберга

$$R'_\infty = (1,0973731 \pm 0,0000003) \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

Постоянная Стефана – Больцмана

$$\sigma = (5,6697 \pm 0,0029) \cdot 10^{-8} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot (\text{°К})^{-4}$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = (7,29720 \pm 0,00010) \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137,0388 \pm 0,0019$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = (1,161385 \pm 0,000016) \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha^2 = (5,32492 \pm 0,00014) \cdot 10^{-5}$$

Радиус первой боровой орбиты

$$a_0 = (5,29167 \pm 0,00007) \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Радиус электрона классический

$$r_e = (2,81777 \pm 0,00011) \cdot 10^{-15} \text{ м}$$

$$r^2 = (7,9398 \pm 0,0006) \cdot 10^{-30} \text{ м}^2$$

Сечение томсоновское

$$\frac{8}{3} \pi r_e^2 = (6,6516 \pm 0,0005) \cdot 10^{-29} \text{ м}^2$$

Скорость света в вакууме

$$c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$$

Ускорение свободного падения стандартное

$$g = 9,80665 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$$

Число Авогадро

$$N_A = (6,02252 \pm 0,00028) \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$$

Число Фарадея

$$F = (9,64870 \pm 0,00016) \cdot 10^7 \text{ к} \cdot (\text{кэ-эке})^{-1} = (2,89261 \pm 0,00005) \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ}_q \cdot (\text{э-эке})^{-1}$$

Энергия покоя нейтрона

$$m_n c^2 = (939,550 \pm 0,015) \text{ Мэв}$$

Энергия покоя протона

$$m_p c^2 = (938,256 \pm 0,015) \text{ Мэв}$$

Энергия покоя электрона

$$m_e c^2 = (0,511006 \pm 0,000005) \text{ Мэв}$$

Энергия, связанная с унифицированной атомной единицей массы,

$$(931,478 \pm 0,015) \text{ Мэв/у. а. е. м.}$$

В 1967 г. были проведены прецизионные измерения (см. УФИИ, т. 94, вып. 2, стр. 353—358, 1968 г.) постоянной  $2e/\hbar$  ( $e$  — элементарный заряд,  $\hbar$  — постоянная Планка), основанные на нестационарном эффекте Джозефсона. Этот эффект состоит в том, что при приложении постоян-

ной разности потенциалов  $V$  между двумя сверхпроводниками, разделенными тонким (порядка  $10^{-7}$  см) слоем изолятора, возникает переменный сверхпроводящий ток с частотой

$$\nu = \frac{2e}{\hbar} V.$$

Указанные эксперименты показали, что

$$\frac{2e}{\hbar} = (483,5912 \pm 0,0030) \text{ МГц/мкв},$$

$$\frac{\hbar}{e} = (4,135725 \pm 0,000026) \cdot 10^{-15} \text{ Дж} \cdot \text{сек} \cdot \text{к}^{-1} =$$

$$= (1,379526 \pm 0,000008) \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \cdot \text{сек} \cdot \text{СГСЭ}_q^{-1}.$$

При этом было получено следующее уточненное значение обратной величины постоянной тонкой структуры  $\alpha$ :

$$\frac{1}{\alpha} = \left( \frac{c}{4R'_\infty g_p} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_B} \cdot \frac{2e}{\hbar} \right)^{1/2} = 137,0359 \pm 0,0004,$$

а для скорости света в вакууме  $c$ , постоянной Ридберга для бесконечной массы  $R'_\infty$ , гиромагнитного отношения протона  $g_p$  и магнитного момента протона в магнетонах Бора  $\mu_p/\mu_B$  приняты следующие наиболее точные значения:

$$c = 2,997925 \cdot (1 \pm 0,3 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^8 \text{ м/сек},$$

$$R'_\infty = 1,0973731 \cdot (1 \pm 0,1 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^7 \text{ м}^{-1},$$

$$g_p = 2,675192 \cdot (1 \pm 3 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^8 \text{ к/кг},$$

$$\frac{\mu_p}{\mu_B} = 1,5210325 \cdot (1 \pm 0,5 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-3}.$$

Соответственно получены следующие уточненные значения некоторых фундаментальных физических констант (числа в скобках, умноженные на  $10^{-6}$ , означают одну стандартную ошибку, которая совпадает со стандартной ошибкой значений, принятых в 1963 г.):

$$\begin{aligned} \text{Элементарный заряд} \quad e &= 1,60220 (13) \cdot 10^{-19} \text{ к} = \\ &= 4,80328 (13) \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}_q \end{aligned}$$

$$\text{Постоянная Планка} \quad \hbar = 6,62628 (24) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек}$$

$$\text{Число Авогадро} \quad N_A = 6,02214 (15) \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$$

$$\text{Масса покоя электрона} \quad m_e = 9,10965 (14) \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

**ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ**

Аберрации электронно-оптических систем 453  
 Аберрация сферическая поперечная 641  
 — — продольная 641  
 Абсорбция 280  
 Автоколебания 133  
 Адиабата 162  
 — дифференциальное уравнение 185 и л.  
 — ударная (Гюгонио) 519, 560  
 — — в магнитной гидродинамике 519  
 Адроны 867  
 Адсорбат 280  
 Адсорбент 280  
 Адсорбция 280  
 Аксид 25  
 Активность оптическая 671  
 — поверхностная адсорбата 281  
 — радиоактивного вещества 820  
 — — — удельная 820  
 — химическая 200  
 Акустика физиологическая 554  
 Акцепторы 403  
 Альbedo излучения 846  
 Альфа-распад 820, 825  
 Альфа-частицы 820, 825  
 — — — длиннопробежные 825  
 Амплитуда волны 540, 568  
 — — комплексная 541  
 — колебания 140  
 — рассеяния 728  
 Анализ гармонических колебаний 112  
 — поляризованного света 664  
 — рентгеноструктурный 623  
 — спектральный 623  
 Аналогия оптико-механическая 102  
 Анастигматы 644  
 Анизотропия оптическая 652  
 — — искусственная 653  
 Анигиляция 882  
 Антиварки 866

Антиферромагнетизм 474  
 Античастицы 866, 871  
 Апертура интерференции 597  
 — числовая объектива 647  
 Апланаты 614  
 Апохроматы 645  
 Ассоциация молекул 246  
 Астигматизм наклонных пучков 644  
 Атом, векторная модель 708  
 —, определение 745  
 Атомы многоэлектронные 753  
 Ахроматы 645  
 Барьер потенциальный 731  
 — —, прозрачность 733  
 Бета-распад 827  
 Бетаатрон 445  
 Бета-частицы 819, 827  
 Биения 111  
 Бозоны 225  
 Бомба атомная 862  
 — водородная 864  
 Вакуум, определение 215  
 —, теория Дирака 884  
 Валентность 780  
 —, пространственная направленность 785  
 Вектор волновой 541  
 — главный системы сил 35  
 — Поппинга 505  
 — Умова 544  
 Величина адсорбции 281  
 — парциальная мольная 192  
 Величины интенсивные 149  
 — физические 329  
 — экстенсивные 149  
 Вероятность перехода 740  
 — состояния системы 218  
 — — —, нормировка 218  
 — — —, плотность 218  
 — — термодинамическая 236

Вес молекулярный полимера 294  
 —, определение 49  
 — удельный 49  
 — — средний 50  
 Вещества аморфные, определение 286  
 — кристаллические, определение 266  
 — оптически активные 671  
 — поверхностно-активные 258  
 Вещество растворенное 145, 262  
 — термометрическое 147  
 Взаимодействие спин-решеточное 176, 766  
 — спин-орбитальное 760  
 — спин-спиновое 176, 766  
 — частиц и полей 884  
 Взаимодействия ближнего порядка 296  
 — дальнего порядка 297  
 — сильные 867  
 — слабые 867  
 — электромагнитные 867  
 Вибратор магнитоотрицательный 479  
 — см. Осциллятор  
 Видимость интерференционных полос 599  
 Влагодержание пара 250  
 Возбуждение ядер кулоновское 855  
 Возгонка 277  
 Возмущения малые в квантовой механике 740  
 Волна звуковая боковая 548  
 — — отраженная 545  
 — — преломленная 545  
 — отраженная 545, 585  
 — преломленная 545, 585  
 Волны бегущие 538  
 — вторичные 584, 605  
 — де Бройля 715  
 — звуковые 535  
 — инфразвуковые 554  
 — когерентные 595  
 — магнитогидродинамические 514, 515  
 — Маха 531, 563  
 — неогерентные 595  
 —, определение 534  
 — поверхностные 534  
 — поперечные 534  
 — продольные 534  
 — плоские 538  
 — синусоидальные 540  
 — сферические 538  
 — цилиндрические 512  
 — стоячие 549  
 Волны ударные в газах 559  
 — ультразвуковые 554  
 — упругие 534  
 — — в кристалле 274  
 — электромагнитные монохроматические 566  
 — —, определение 563  
 — — плоские 565  
 — — поляризованные линейно 567  
 — — — циркулярно 567  
 — — — эллиптически 567  
 — —, шкала 570  
 Волчок асимметричный 794  
 — симметричный 794  
 — см. также Гироскоп  
 — сферический 794  
 Восприимчивость диэлектрическая 365  
 — —, связь с диэлектрической проницаемостью 369  
 — —, формула Дебая — Ланжевена 365  
 — магнитная 468  
 — —, связь с магнитной проницаемостью 473  
 Вращение внутреннее молекулы 285, 793  
 — — —, заторможенность 297  
 — — — плоскости поляризации 671  
 — — — магнитное 672  
 — свободное (инерционное) 80  
 — — стационарное 80  
 Время жизни системы 742  
 — — ядра 835  
 — реверберации 554  
 — релаксации 149  
 — — в жидкостях 254  
 — — твердых телах 279  
 — — затухающих колебаний 118  
 — собственное 524  
 — эфемерное 893  
 Выпрямитель 490  
 Вырождение идеального газа 228  
 — — —, параметр 228  
 — — —, температура 229  
 — состояния 219  
 — уровней обменные 756  
 Высота пьезометрическая 323  
 — скоростная 323  
 Выход люминесценции квантовый 713  
 — — энергетический 713  
 — фотоэффекта квантовый 700  
 — ядерной реакции 853  
 Вязкость вторая 320  
 — —, дисперсия 321  
 — газов 210  
 — динамическая (первая) 320

- Вязкость жидкостей 256  
 — кинематическая 320  
 — полимера 300 и д.  
 — разреженных газов 216
- Газ идеальный, законы 150 и д.  
 —, определение 150  
 — реальный, определение 244  
 — электронный в металле 229, 376
- Газы разреженные 215  
 —, сжижение 252
- Гамильтониан см. Функция Гамильтона
- Гамма-излучение 833  
 —, внутренняя конверсия 835
- Гармоники 112, 555
- Генератор Ван-де-Граафа 357, 445
- Гидроаэродинамика, предмет 310
- Гидроаэромеханика, предмет 310
- Гидроаэростатика, предмет 310
- Гидродинамика магнитная, предмет 510  
 —, уравнения 511 и д.
- Гидролокация 558
- Гирокосл 85
- Гистерезис 138  
 — диэлектрический 371  
 — магнитный 477 и д.
- Грам-атом 147
- Грам-молекула 147
- Грам-аквивалент 387
- Граница верхняя бета-спектра 828  
 — длинноволновая фотозффекта 700
- График Кюри (графин Ферми) 830
- Громкость звука 555
- Давление 146  
 — в капиллярах 259  
 — внутреннее в газе 245  
 — волновое 537  
 — звуковое 544  
 — осмотическое 263  
 — парциальное 152  
 — поверхностное 259  
 — света 705  
 — статическое 323
- Двигатель вечный второго рода, неосуществимость 170  
 — первого рода, неосуществимость 159
- Движение абсолютное 28
- Движение броуновское 243  
 —, формула Эйнштейна 243  
 — в кулоновском поле (водородоподобный атом) 725  
 — неинерциальных системах отсчета 55  
 — поле центральной силы (рассеяние) 727 и д.  
 — вращательное двухатомной молекулы 233, 793  
 —, определение 24  
 — газа дозвуковое 562  
 — сверхзвуковое 562  
 — жидкости безвихревое (потенциальное) 316  
 — вихревое 316  
 — в трубах 337  
 — вязкой ламинарное 335  
 — — — — плоское 336  
 — — — —, определение 319  
 — — — — турбулентное 335  
 — дозвуковое 332  
 — идеальное 318  
 — неустановившееся 316  
 — плоское 324  
 — сверхзвуковое 333  
 — установившееся 316  
 — инфинитное 82  
 — колебательное двухатомной молекулы 234, 794  
 — см. Колебания
- Диффузия  
 — мгновенное плоскопараллельное 31  
 — относительное 28  
 — переносное 28  
 — плоское, определение 324  
 — под действием центральных сил 81  
 — постушательное, определение 23  
 — равномерное 20  
 — равнопеременное 23  
 — тела переменной массы 44  
 — финитное 82  
 — электронов в периодических полях 734
- Девонизация газа 398
- Действие магнитного поля на проводники с токами 435  
 — по Гамильтону 100  
 — Лагранжу 100
- Декремент логарифмический затухания 118
- Деление ядер 857  
 — спонтанное 820
- Демодуляция 579
- Десорбция 280
- Детандеры 252
- Дефект квантовый 750  
 — массы ядра 808

- Дефектоскопия ультразвуковая 558
- Деформация 281  
 — всеосторожного растяжении (сжатия) 284  
 — остаточная 283  
 — относительная 282  
 — пластическая 282, 304  
 — резина высокоэластическая 304  
 — — — — пластическая 304  
 — — упругая 304  
 — упругая 282, 304
- Диаграмма векторная колебания 110 и д.  
 — — сложения амплитуд вторичных волн 608  
 — s — T 188 и д.  
 — термодинамическая 150
- Диамagnetизм 469
- Диаметр эффективный молекулы 209
- Диафрагма апертурная 637  
 — поля зрения 637
- Динамика, предмет 14  
 — релятивистская 526
- Диод 490  
 — полупроводниковый 416  
 — свободный 491
- Диогитрия 632
- Диполь магнитный 435  
 — электрический 346  
 — «жесткий» 362  
 — индуцированный 362
- Дисперсия волн де Бройля 717  
 — вращательная 673  
 — второй вязкости 321  
 — света 673  
 — — аномальная 570, 673  
 — — нормальная 570, 673  
 —, электронная теория 673 и д.
- спектрального прибора линейная 641  
 — — — угловая 640  
 — электромагнитных волн 568  
 — — аномальная 570  
 — — нормальная 570
- Диссипация энергии 68
- Диссоциация молекулы 781  
 — электролитическая 386  
 —, коэффициент 387
- Дисторсия 644
- Дифракция радиоволн 623  
 — на поверхности Земли 624  
 — — рельефе 624  
 — рентгеновых лучей 623  
 — звука, графический метод расчета 607, 608
- дифракция света на многомерных структурах 620  
 — —, обратная задача 623  
 — —, определение 604  
 — —, плоские волны (Фраунгофера) 613  
 — —, принцип Гюйгенса 604  
 — —, — Гюйгенса—Френеля 605  
 — —, сферические волны (Френеля) 609
- Диффузия в газах 211
- Дихроизм 662
- Диэлектрик в электрическом поле 361
- Длина волны 541  
 — — де Бройля электрона 713 и д.  
 — — комптоновская протона 910  
 — — — — электрона 703, 910  
 — — приведенная физического маятника 116  
 — — пути 16  
 — — оптическая 600  
 — — свободного пробега 209  
 — — молекул средняя 209  
 — — электронов в металле 378  
 — — собственная 524  
 — — стоячая волны 519  
 — — характеристическая распределения Больцмана 224
- Добротность контура 490
- Дозы излучения 847  
 — —, мощность 848
- Домены в сегнетоэлектриках 370  
 — — ферромагнетиках 475
- Доноры 402
- Дросселирование газа 249
- Дроссель 491
- Дуализм корпускулярно-волновой 716  
 — нормальный зеемановский 761  
 — синовый 765
- Дуга электрическая 395
- «дырка» в полупроводниках 401
- Единицы измерения в атомной и ядерной физике 328, 910  
 — — механических величин 894  
 — — световых величин 909  
 — — тепловых величин 899  
 — — уровня громкости звукового давления 909

- Единицы измерения физических величин 892  
 — — электрических и магнитных величин 899  
*E*-захват 810, 827  
 Емкость выходная лампы 494  
 — электрическая 359
- Жидкости ассоциированные** 256  
 — неассоциированные 256  
 —, определение 253  
**Жидкость баротронная** 311  
 — вязкая 311  
 — идеальная 311  
 — кипящая 250  
 — несжимаемая 311  
 — перегретая 252  
 — переохлажденная 279  
 — сжимаемая 311
- Задача гидродинамики основная** 321  
 — Кеплера 83  
**Закон Авогадро** 151  
 — Амага 153  
 — Амютона 54  
 — Ампера 426, 435  
 — Архимеда 314  
 — Бера для поглощения света 683  
 — Био для вращательной дисперсии 673  
 — Био—Савара—Лапласа 427, 429  
 — Бойля—Мариотта 150  
 — Брюстера 591  
 — Бугера—Ламберта 683  
 — Бузена—Роско 707  
 — Вавилова 713  
 — Вант-Гоффа для полимеров 300  
 — Вебера—Фехнера 556  
 — взаимосвязи массы и энергии 527  
 — Видемана—Франца 379  
 — Вина 693  
 — всемирного тяготения 47  
 — Гейгера—Неттола 827  
 — Гей-Люссака 150  
 — Гесса 161  
 — Гука 282  
 — Дальтона 152  
 — Дебая для теплоемкости 277  
 — действующих масс 201  
 — Джоуля—Ленца 379, 383  
 — инерции см. Закон Ньютона первый  
 — Кеплера второй 81  
 — первый 84
- Закон Кеплера третий** 84  
 — — теплового излучения 690  
 — Кнудсена 216  
 — Кулона для взаимодействия зарядов 341, 345  
 — — трения 55  
 — Кюри для парамагнетиков 468, 471  
 — Кюри—Вейса 468  
 — Ламберта 651  
 — Лапласа для поверхностного давления 259  
 — Малюса 664  
 — Моали 778  
 — Ньютона второй 39  
 — — первый 32  
 — — третий 41  
 — обратимости световых лучей 625  
 — Ома 378  
 — — для магнитной цепи 439  
 — — тока в электролитах 388  
 — — участка цепи 382  
 — основной динамики вращательного движения 78  
 — — поступательного движения 41  
 — отражения 545, 586  
 — Паскаля 313  
 — Пашена 391  
 — полного тока для магнетиков 437, 438  
 — — токов проводимости 438  
 — — обобщенный 500  
 — преломления см. Закон Снеллиуса  
 — равномерного распределения энергии по степеням свободы 223  
 — распределения Максвелла 205  
 — растворимости Генри 263  
 — Рален 685  
 — Рален—Джинса 694  
 — сложения скоростей в классической механике 29  
 — — теории относительности 525  
 — смещения Вина 693  
 — — Фаянса — Содди 824  
 — Снеллиуса 449, 586  
 — — в электронной оптике 449  
 — соответственных состояний 245  
 — сохранения барионного заряда 869
- Закон сохранения изотопического** 869  
 — импульса 43, 107  
 — импульса электромагнитного поля 506  
 — и превращения энергии 57, 106  
 — — — см. Закон термодинамики первый  
 — лептонного заряда 868  
 — магнитного потока в магнитной гидродинамике 513  
 — массы 36  
 — механической энергии 68  
 — момента импульса 43, 107  
 — странности 870  
 — циркуляции скорости 325  
 — четности 832  
 — электрических зарядов 341, 504  
 — энергии электромагнитного поля 505  
 — Стефана—Больцмана 228, 692  
 — термодинамики второй 170  
 — —, статистический смысл 236  
 — — первый 158  
 — — третий 202  
 — «трех вторых» 422  
 — Фарадея электромагнитной индукции 388, 454  
 — Фика второй 213  
 — первый 211  
 — Шарля 150  
 — Эйнштейна для фотоэффекта 707  
 — эквивалентности для фотохимических реакций (Эйнштейна) 707  
 — электролиза второй 387  
 — — объединенный (Фарадея) 388  
 — — первый 387
- Закономерности статистические** 217  
**Законы Вольты** 406  
 — Рауля 264  
 — сохранения, связь со свойствами пространства и времени 870
- Запрет интеркомбинационный для атомов** 760  
 — — молекул 791  
**Заряд барионный** 869  
 — гиперонный 870  
 — лептонный 868  
 — частиц 444  
 — электрона 910
- Заряд электрический** 341  
 — индуцированный 358  
 — поляризационный (связанный) 366  
 — точечный 341  
 — элементарный 341, 388, 910, 913  
 — эффективный электрона в кристалле 737  
 — — ядра в атоме 750  
**Затухание аперриодическое** 117  
**Захват радиационный нейтронов** 856  
**Защита электростатическая** 359  
**Звуки музыкальные** 554  
 — слышимые 554  
**Зеркало плоское** 626  
 — сферическое 629  
 — электронное 450  
**Значение среднее статистическое физической величины** 219  
**Значения эффективные тока и э. д. с.** 487  
**Зона активная ядерного реактора** 861, 862  
 — валентная 738  
 — волновая 571  
 — запрещенная 735  
 — проводимости 738  
 — — металла 377  
 — разрешенная 735  
**Зоны Френеля** 606  
 — энергетические 377, 735  
**Зрчки оптического прибора** 637
- Излучатели ультразвука** 557  
**Излучение антистоксово** 712  
 — бетатронное (синхротронное) 579  
 — Вавилова — Черенкова 531  
 — магнитное дипольное 576, 834  
 — резонансное 710  
 — тепловое 689  
 — тормоанное 579  
 — электрическое дипольное 572, 834  
 — — квадрупольное 576, 834  
 — электромагнитных волн 571  
 — — вторичное 584  
**Изобара** 162  
**Изобары** 806  
 —, пары 806  
 —, триады 806  
**Изображение** 625  
 — действительное 626

Изображение мнимое 626  
 —, освещенность 638  
 —, перевернутое 630  
 —, прямое 630  
 —, резкость 638, 650  
 —, стигматическое 625  
 Изомерия молекулы 785  
 — ядерная 836  
 Изомеры поворотные 295  
 — ядерные 836  
 Изоморфизм 269  
 Изотерма 162  
 — реального газа 250  
 Изотопы 806  
 Изохора 162  
 Импульс обобщенный 92  
 Импульсы мгновенные 68  
 Инвариант Аббе нулевой 628  
 Инверсия 832  
 — комбинированная 873  
 Индикатриса оптическая 654  
 — рассеяния 686  
 Индуктивность 457 и д.  
 — взаимная 461  
 Индукция магнитная 425  
 —, закон Ампера 426  
 —, — Био—Савара—Лапласа 427  
 —, линии 426  
 —, — теорема Остроградско-го—Гаусса 439  
 —, правило буравчика 426  
 — насыщения 478  
 — остаточная 478  
 — электрическая см. Смещение электрическое  
 — электромагнитная 454  
 —, закон Фарадея 454  
 — электростатическая 358  
 Интеграл Бернулли 323  
 — кулоновский для атома гелия 757  
 — — двухатомной молекулы 783  
 — обменный для атома гелия 757  
 — — двухатомной молекулы 783  
 — состояний 221  
 — Фурье 679  
 Интегралы движения 106  
 Интенсивность вихря 317  
 — волны вероятности 716  
 — звуковой 544  
 — электромагнитной 568  
 — излучения 574  
 Интервал между событиями 520  
 Интерференция поляризованных лучей 667 и д.

Интерференция света 596  
 — в тонких пленках 604  
 —, порядок 598  
 Ионизация 389  
 — диссоциативная 805  
 —, кратность 389  
 —, потенциал 389  
 —, работа 389  
 — термическая 804  
 — ударная 390  
 Ионосфера 581  
 Ионы 746  
 Искривление изображений 644  
 Испарение жидкостей 260  
 — твердых тел 277, 279  
 Источник волн 534  
 — света, подчиняющийся закону Ламберта 651  
 — — точечный 650  
 — тона 384  
 — — фотоэлектрический 702

Кавитация 558  
 Галория 899  
 Камера Вильсона 849  
 — ионизационная 849  
 — пузырьковая 850  
 Капилляры 260  
 Катастрофа ультрафиолетовая 695  
 Катод сложный 704  
 Католюминесценция 710  
 Квазары 583  
 Квантование пространственное атома 758  
 — ядра 758, 814  
 Кванты поля 882  
 — энергии 695  
 Кварки 866  
 Квартон 490  
 Керн нуклона 886  
 Кинематика, предмет 14  
 Кипение 261  
 Класс симметрии 266  
 Колебания автономные 133  
 — ангармонические 269  
 — в решетке 269  
 — внутримолекулярные 794  
 — вынужденные диссипативной системы нелинейные 138  
 — — консервативной системы многомерные 130 и д.  
 — — одномерные 119 и д.  
 — — — нелинейные 137  
 —, определение 112  
 — крутильные 286  
 — молекулы 892  
 — магнострикторионные 479  
 — механические 109  
 — модулированные 112

Колебания неавтономные 133  
 —, определение 109  
 — параметрические 133  
 — периодические 109  
 — поляризованные линейно 128  
 — — циркулярно 127  
 — — эллиптически 127  
 — свободные диссипативной системы нелинейные 135  
 — — затухающие многомерные 129  
 — — — одномерные 117  
 — — консервативной системы многомерные 121 и д.  
 — — — одномерные 113  
 — — — — нелинейные 133  
 — субгармонические 138  
 — электромагнитные вынужденные 485  
 — — незатухающие 484  
 — — свободные 484  
 Количество движения 38  
 — теплоты 58  
 — — приведенное 174  
 Кольца дифракционные 610  
 — изохроматические 670  
 — Ньютона 603  
 Кома 643  
 Конвекция 327  
 Конверсия внутренняя гамма-излучения 835  
 Конденсат в гелии II 265  
 Конденсаторы, соединенные параллельно 361  
 —, — последовательные 361  
 Конденсация пара 250  
 Конденсор 639  
 Константа равновесия термодинамическая 201  
 Константы подобия 330  
 — см. также Постоянная  
 Контур колебательный 483  
 Конус световой 522  
 Конфигурации полимера 295  
 — электронные 760  
 Концентрация 263  
 — весовая 152  
 — молярная 152  
 — раствора эквивалентная 389  
 Координата циклическая 96  
 Координаты нормальные 123  
 — нормированные 124  
 — обобщенные 89  
 Коэффициент бародиффузии 212  
 — Ван-дер-Ваальса 155  
 — внутреннего трения 211  
 — внутренней конверсии 835  
 — восстановления при ударе 69  
 — вторичной электронной эмиссии 424

Коэффициент вязкости см. Вязкость  
 — давления термических 188  
 — — термодинамический 187  
 — Джоули—Томсона 186  
 — диффузии 212  
 — затухания 483  
 — — колебаний 117  
 — квазупругой силы 114  
 — магнитной вязкости 512  
 — модуляции 580  
 — объемного расширения термический 150, 270  
 — ослабления излучения линейный 845  
 — ослабления излучения массовый 845  
 — отражения в акустике 546  
 — — оптические 587  
 — Пельтье 416  
 — поглощения звука 553  
 — — света линейный 683  
 — полезного действия термодинамический 168  
 — прозрачности анализатора 665  
 — — в акустике 547  
 — — оптические 587  
 — Пуассона 283  
 — размножения нейтронов 860  
 — рассеяния света 688  
 — расширяемости термодинамический 187  
 — самодиффузии 212  
 — сжимаемости термодинамический 187  
 — скорости 339  
 — сопротивления температурный 380  
 — температуропроводности 272  
 — теплового расширения 270  
 — теплоотдачи 272, 327  
 — теплопередачи 272  
 — теплопроводности 210  
 — — электронной 274  
 — термодиффузии 212  
 — Томсона 421  
 — трансформации 462  
 — трения 54  
 — — истинный 54  
 — — качания 55  
 — — скольжения 54  
 — упругости 282  
 — усиления триода 494  
 — — статический 493  
 — холодный 173  
 — Эйнштейна для вынужденного излучения 745  
 — — поглощения света 742  
 — — спонтанного излучения 742

— Экстинкции 638  
 Коэффициенты виральные 246  
 — трения обобщенные 129  
 — Фурье 678  
 Кратность вырождения состояний 219  
 — ионизации 389  
 Кривая видности 649  
 — намагничивания техническая 476  
 — резонансная контура 488  
 — —, относительная полуширина 489  
 — Столетова 478  
 — сублимации 280  
 Кривые изохроматические 670  
 — резонансные 121, 488  
 Кристаллизация 278  
 Кристаллиты 266  
 Кристаллохимия 269  
 Кристаллы валентные 266, 268  
 — глобулярные 302  
 — двойкопреломляющие 659  
 — двусосные 655  
 — жидкие 253  
 — ионные 268  
 — металлические 267  
 — молекулярные 268  
 — монокристаллы 266  
 — одноосные 655  
 —, определение 266  
 —, поликристаллы 266  
 —, свойства векторные 267  
 —, — скалярные 267  
 —, — тензорные 267  
 —, симметрия 266  
 Критерий подобия 330  
 Критерий Грасгофа 333  
 — Нуссельта 333  
 — Цекле 333  
 — Прандтля 333  
 — Рэлея 646  
 — см. также Число  
 Кружок рассеяния 641  
 Кручение 285  
 Кюри (единица) 846

Лавина 395  
 Лагранжиан см. Функция Лагранжа  
 Лазер 745  
 $\lambda$ -переход 264  
 $\Lambda$ -раздвоение 790  
 Лампы электронные 490  
 Легучесть 199  
 Ливни электронно-ядерные 888  
 Линза магнитная 451  
 — оптическая толстая 630, 635  
 — — тонкая 630 и д.

Линза электростатическая 450  
 Линии комбинационные антистоксовы 800  
 — — стоксовы 800  
 — магнитной индукции 426  
 — напряженности 344  
 — силовые электростатического поля 344  
 Линия вихревая 317  
 — действия силы 35  
 — мировая 520  
 — спектральная 681  
 —, доплеровское уширение 681  
 —, полуширина 681  
 —, ударное уширение 682  
 —, ширина 681  
 — —, — естественная 681  
 — тона 316  
 — удара 69  
 — узлов 26  
 Луна 638  
 Луч 564, 624  
 — земной 624  
 — световой, закон обратимости 625  
 — — необыкновенный 659  
 — — обыкновенный 659  
 — —, определение 624  
 — — сопряженный 626  
 Лучепреломление двойное 659  
 — — искуственно 662 и д.  
 Лучи каналовые 393  
 — катодные 393  
 — космические 887  
 Люк 638  
 Люминесценция, определение 709  
 Люминофор 710

Магнетон Бора 465, 910  
 — ядерный 812, 911  
 Магнитодизлектрики 457  
 Магнитострикция 478  
 Мазер 745  
 Масса гравитационная (тяжелая) 37  
 —, зависимость от скорости 526  
 — критическая делящегося вещества 861  
 —, определение 36  
 — покоя 526, 911, 913  
 — приведенная 93  
 — эффективная электрона 737  
 Масс-спектрограф 444  
 —, двойная фокусировка 444  
 Маятник крутильный 116  
 — математический 114  
 — плоский двойной 125  
 — пружинный 114

Маятник пружинный двойной 131  
 — физический 116  
 — —, приведенная длина 116  
 — —, центр качания 116  
 — Фуко 32  
 — циклоидальный 115  
 Маятники связанные 128  
 Мезоатомы 752  
 Мезоны 871, 872, 878  
 Мениск 258  
 Метод аналогии 331  
 — графический сложения вторичных волн 607  
 — затемненного пола 648  
 — Лагранжа в гидродинамике 314  
 — меченых атомов 865  
 — моделирования 331  
 — статистический, предмет 144  
 — термодинамический, предмет 144  
 — Томаса—Ферми 754  
 — Хартри 754  
 — Хартри—Фока 754  
 — Эйлера в гидродинамике 314  
 Методы ускорения частиц 445 и д.  
 Механика квантовая (волновая), предмет 13, 715  
 — классическая, предмет 13  
 — релятивистская, предмет 13, 528  
 Микропола 506  
 Микроскоп 638  
 Микроскопия электронная 453  
 Микросостояние системы 225  
 Микрочастица, определение 13  
 Множитель упаковки 809  
 Модель атома векторная 758  
 — статистическая 754  
 — «жемчужного ожерелья» 299  
 — Литтла 482  
 — молекулы векторная 787  
 — свободно сочлененных сегментов 297  
 — ядра напельная 815  
 — — обобщенная (коллективная) 818  
 — — оболочечная 816  
 — — одноуклоная 813  
 Модуль всесторонней объемной упругости 284  
 — предельный 307  
 — равновесный 308  
 — релаксационный 308  
 — сдвига 285  
 — упругости 282  
 — Юнга 282

Модуляция электромагнитной волны 580  
 Молекула атомная 782  
 — ионная 779  
 —, определение 779  
 Молибдат 387  
 Молния 395  
 Момент гироскопический 87  
 — импульса 76  
 — гироскопа собственный 86  
 — — нуклона полный 812  
 — электрона (спин) 464  
 — ядра полный 812  
 — инерции 71  
 — главный 70  
 — — центральный 73  
 — — центробежный 72  
 — кинетический 76  
 — крутящий 285  
 — магнитный 431  
 — атома орбитальный 465  
 — — индупированный 467  
 — — полный 759  
 — — спиновый 759  
 — нейтрона 812  
 — нуклона орбитальный 812  
 — — спиновый 812  
 — протона 812, 911  
 — электрона аномальный 885, 911  
 — — орбитальный 465, 758  
 — — спиновый 464  
 — силы 70  
 — системы сил главный 70  
 — трения 55  
 — электрический дипольный 346  
 — —, матричный элемент 742  
 — — ядра 814  
 — — квадрупольный ядра 813  
 Монокристаллы 266  
 Мономеры 291  
 Мостик Уитстона 385  
 Мощесть 60  
 Мультиплет зеемановский 763  
 Мультипликлет гамма-излучения 834  
 — системы 760  
 — термина 760  
 Мюоний 866

Нагреватель 167  
 Наклел 283  
 Намагниченность 467  
 —, насыщенная 471  
 — спонтанная в ферромагнетиках 475  
 Напор скоростной 323  
 — температурный 327  
 Направление легчайшего намагничивания 475





- Поле электростатическое, усло-  
вие потенциальности 350  
Поликристаллы 266  
Полимеры 291  
Полиморфизм 269  
Политрон 162 и д.  
Полоса спектральная 681, 797  
—, ветвь нулевая 797  
—, — отрицательная  
797  
—, — положительная 797  
—, — нулевая 797  
Полосы интерференционные 601  
—, видимость 602  
—, равного наклона 603  
—, равной толщины 602  
—, поглощения 673 и д.  
Полупроводники, определение  
400  
Поляра ударная 562  
Поляризаторы 652  
— скрещенные 668  
Поляризация вакуума 884  
— колебаний 127  
— продольная 833  
— света при отражении 591  
— циркулярная (круговая)  
664  
— эллиптическая 664  
— электрическая 363  
— ионная 364  
— ориентационная 364  
— спонтанная сегнетоэлек-  
триков 371  
— электронная 364  
Поляризуемость 362  
Поляриметрия (сахариметрия)  
672  
Порог осознания 555  
— слышимости 555  
— ядерной реакции 852  
Порядок ближний 253  
— дальний 266  
— интерференции 598  
Постоянная альфа-распада 827  
— ангармоничности 792  
— бета-распада 831  
— Больцмана 151, 911  
— Верде 672  
— Вина 693, 911  
— газовая удельная 151  
— универсальная 151, 911  
— гравитационная 47, 911  
— ионизационного равновесия  
804  
— Керра 663  
— Коттона—Мутона 664  
— Кюри 468  
— магнитная 427, 903  
— Планка 695, 911, 913
- Постоянная разрешенного E-за-  
хвата 831  
— распада 820  
— — парциальные 820  
— Ридберга 726, 746, 912  
— Стефана—Больцмана 692, 912  
— тонкой структуры 726, 867  
— Ферми 867  
— Холла 404  
— экранирования 750  
— электрическая 342, 899  
— электродинамическая 425  
— эмиссионная 423  
Постоянные физические универ-  
сальные 910  
Постулат Бора второй 748  
— первый 747  
— третий 748  
Потенциал гравитационного поля  
50  
— изобарно-изотермный (Гибб-  
са) 181  
— — — — — гомогенной системы  
193  
— — — — — стандартный 202  
— — — — — изовентропийный 181  
— — — — — изохорно-изотермный 181  
— — — — — изовентропийный 181  
— ионизации 389  
— водородного атома 747  
— Леонарда—Диноса 791  
— Морзе 791  
— поля векторный 502, 536  
— — скалярный 502, 536  
— скорости 316  
— термодинамический 180  
— химический 193  
— электростатического поля  
352  
Потери ионизационные 838  
— на гистерезис 478  
— радиационные 838  
Поток жидкости 317  
— магнитный 439  
—, —, теорема Остроградско-  
го—Гаусса 439  
— напряженности 368  
— световой 649  
— — — — — полный 650  
— смещения 349, 368  
—, —, теорема Остроградско-  
го—Гаусса 349, 368  
— тепловой удельный 272  
— энергия волны 544  
Пояса радиационные 889  
Правила Кирхгофа для магнит-  
ных цепей 440  
— — — — — электрических цепей  
383, 384  
— отбора 743

- Правила отбора для дипольного  
электрического излучения  
750  
— — — комбинационных спек-  
тров молекулы 801  
Правило Дюлонга и Пти 276  
— левой руки 426  
— Ленца 454  
— Максвелла 252, 426  
— — (буравчика) 426  
— правой руки 455  
— Прево 689  
— Стокса 712  
— Фая Гиббса 198  
Предел пропорциональности  
282  
— прочности 283  
— текучести 283  
— упругости 283  
Предиссоциация молекулы 802  
Представление процесса импуль-  
сного 734  
Преломление сферической по-  
верхности 629  
Преобразование Галилея 45  
— зарядового сопряжения 870  
— каноническое 102  
— Лоренца для импульса и энер-  
гии 529  
— — — — — координат и времени  
523  
— — — — — электромагнитного поля  
529  
Прецессия 86  
— быстрая 88  
— ларморова 466  
— медленная 88  
— псевдорегулярная 88  
— регулярная 86, 87  
Приборы спектральные 640  
Призма 627  
Принцип автофазировки 447  
— вариационной механики 98  
— Гюйгенса 604  
— Гюйгенса—Френеля 605  
— Даламбера—Лагранжа 99  
— Ландау—Ли—Янга 870  
— Ле-Шателье 197  
— Молертова—Якоби 102  
— наименьшего действия Га-  
мильтона 100  
— недостижимости абсолютного  
нуля температуры Нернста  
203  
— независимости действия сил  
40  
— неразличимости тождествен-  
ных частиц 225  
— освобожденности 36  
— отвердевания 311
- Принцип относительности меха-  
нический 46  
— — — Эйнштейна 519  
— Шаули 769  
— причинности классический 96  
— Ритца комбинационный 744  
— соответствия 723  
— суперпозиции волн 539  
— температурно-временной ин-  
вариантности 309  
— Ферма 625  
— Франка—Кондона 744, 798  
Пробег альфа-частиц 842  
— бета-частиц 842  
— протонов 842  
— частиц 841, 842  
Пробой электрический 1 за 391  
Проводимость жидкостей 386  
— — — — — контакта односторония 414  
— металлов 376  
— полупроводников 401  
Проводники в магнитном поле  
435  
— — — — — электростатическом поле  
356  
Прозрачность потенциального  
барьера 733  
— — — — — для альфа-распада 826  
Проницаемость диэлектрическая  
относительная 342  
— — — — —, связь с диэлектриче-  
ской восприимчивостью 369  
— лампы 493  
— магнитная относительная 428  
— — — — —, связь с магнитной вос-  
приимчивостью 473  
Пространство конфигурационное  
96  
— темное катодное 392  
— фазовое 96  
— Фарадея 392  
— четырехмерное 520  
Протон 806  
Прохождение частиц через ве-  
щество 838  
— — — — — потенциальные барьеры  
734  
Процесс адиабатического расши-  
рения и сжатия 190  
— перематывания 477  
— термодинамический 148  
— адиабатический 149, 164,  
165  
— — — — — изобарный 149, 163, 165  
— — — — — изотермический 149, 163,  
165  
— — — — — изохорный 149, 163, 165  
— — — — — изоэнтропийный 156  
— — — — — изостропийный 176  
— — — — — круговой 149

- Процесс термодинамический  
необратимый 166, 189  
— — —, эквивалентный обратимый процесс 166  
— — — обратимый 166  
— — — политропный 162, 164, 165  
— — — равновесный 149  
Процессы качественно одинаковые 331  
— — — подобные 330  
— — — ядерно-накадные 889  
Пульсации скорости 335  
Пути оптические таутохронные 600  
Пучность стоячей волны 549  
Пучок света гомоцентрический 625  
— — — паранормальный 627  
— — — сил, см. Система сходящихся сил
- Работа выхода 405, 408  
— — — ионизации 389  
— — —, определение 58  
— — — перемещения заряда в электростатическом поле 352  
— — — проводника с током в магнитном поле 441  
— — — расширения 156  
Равенство Клаузиуса 175  
Равновесие адсорбционное 280  
— — — жидкости 311  
— — — термодинамической системы истинное 197  
— — — —, константа 201  
— — — —, метастабильное 197  
— — — —, общие условия 192  
— — — химическое 200  
Рад 847  
Радиоактивность естественная 818  
— — — искусственная 818, 865  
— — —, определение 818  
Радиовещание 579  
Радиоизлучение космическое 891  
Радиолокация 582  
Радиолуч 582  
Радиосвязь 579  
Радиоспектроскопия 803  
Радиус боровский первый 727, 912  
— — — дебаевский экранирования 396  
— — — инерции тела 72  
— — — ядра 807, 811  
Размерность физической величины 328  
Размеры критические делицего-ея вещества 861  
Размягчение 287
- Разность потенциалов 352  
— — — контактная 406  
— — — —, законы Вольты 406  
— — — —, увеличенной хроматическая 645  
— — — фаз когерентных волн 600  
— — — хода оптическая 600  
Разрывы в гидродинамике 559, 563  
— — — магнитной гидродинамике 516  
Разряд газовый дуговой 395  
— — — искровой 395  
— — — кистевой 394  
— — — коронный 394  
— — — самостоятельный 390  
— — — самозатухающий 391  
— — — тлеющий 392  
— — — конденсатора аперийодический 484  
Распад ядер спонтанный 820  
Распределение Бозе—Эйнштейна 227  
— — — Больцмана 224  
— — — Гаусса 238  
— — — Гиббса квантовое 220  
— — — каноническое 220  
— — — микроканоническое 219  
— — — Максвелла 205, 224  
— — — Максвелла—Больцмана 223, 227  
— — — молекул по скоростям 205  
— — — —, энергиям 207  
— — — нулонов по ядерным уровням 816  
— — — спектральное 680  
— — — Ферми—Дирака 227  
Рассеяние звуковых волн 554  
— — — радиационное нейтронов 857  
— — — рентгеновых лучей обратное 702  
— — — света 684  
— — — комбинационное 800  
— — — молекулярное 686  
— — — ралеевское 685  
— — — частиц 727  
— — — неупругое 728  
— — — элентронных волн в кристаллах 738  
Растояние наилучшего зрения 638  
— — — равновесное ионов в молекуле 781  
— — — фокусное тонкой линзы 631  
Раствор 145  
— — — истинный 262  
— — — ионный 262  
— — — молекулярный 262  
— — — коллоидный 262  
— — — разбавленный 262

- Раствор разбавленный полимера 300  
— — — сильного электролита 263  
— — — твердый 262, 279  
Растяжение 284  
— — — всестороннее 284  
Расход 337  
Расширение тепловое линейное 270  
— — — объемное 187, 270  
— — — урвной ядра аземановское 814  
Реакторы ядерные 862  
Реакции синтеза термоядерные 859  
— — — фотохимические 706  
— — — ядерные, основные сведения 852  
— — —, характеристики 852  
Реакция деления ядер цепная 860  
— — — связи 36  
— — — срыва 856  
Резерфорд (единица) 846  
Резонанс 120, 866  
— — — «гигантский» 857  
— — — напряжений 488  
— — — токов 489  
— — — циклотронный 739  
— — — электрической цепи 488  
— — — элентронный в ферромагнетиках 765  
— — — парамагнитный 765  
— — — ядерный квадрупольный 814  
— — — парамагнитный 814  
Резонаторы акустические  
— — — Гельмгольца 551  
Резонансы 866, 876 и д.  
Резомбиация 392  
Релаксация в термодинамике 149  
— — — спи-решеточная 766  
— — — спи-спиновая 766  
Рентген (единица) 847  
— — — эквивалент биологический 847  
— — —, — физический 847  
Рефракция атомная 677  
— — — молярная 369, 677  
— — — света 590  
— — — удельная вещества 677  
Решетка дифракционная 617  
— — — простративная 621  
— — — кристаллическая 266  
Ротатор 97  
— — — в квантовой механике 724  
Ряд Фурье 111, 678
- Самовозбуждение жесткое 142  
— — — мягкое 142
- Самодиффузия 212  
Сверхпроводимость 380, 479  
Сверхтекучесть гелия 264  
Светимость (светность) 651  
Светосила 638  
Свечение глеющее (отрицательное) 392  
Связи голономные 18  
— — — неголономные 18  
— — —, определение 17  
— — —, стационарные 18  
— — —, урнения 17 и д.  
 $\tau$ -связь 785  
 $\sigma$ -связь 785  
Связь водородная 268  
— — — гомеоплярная 786  
— — — идеальная 90  
— — — ионная 628  
— — — коэффициентов переноса 214  
— — — металлическая 267  
— — — сильная 759  
— — — в ядре 812  
— — — слабая 758  
Сдвиг 284  
— — — урвной ламбовский 885  
Сегнетоэлектрики 370  
Семейства радиоактивные 821  
Сенсибилизаторы 708  
Серия спектра атома 746  
— — —, граница 746  
— — —, изотопический афферт 752  
— — — Деландра, нулевая полоса 797  
— — — —, поперечная 797  
— — — —, продольная 797  
Сетка антидифракционная 494  
— — — управляющая 492  
— — — экранирующая 494  
Сечение образования пар 844  
— — — эффективное газокинетическое 209  
— — — —, рассеяния звука 554  
— — — —, — частиц 727  
— — — соударения молекул 208  
— — — ядерной реакции 854  
Сжатие 282  
— — — всестороннее 284  
Сжижение газов 252  
Сжимаемость адиабатическая 187  
— — — изотермическая 187  
Сила Ампера 425  
— — — взаимного притяжения тел 47  
— — — взаимодействия проводников 436  
— — — восстанавливающая 134  
— — — вынуждающая (возмущающая) 119

- Сила вынуждающая полигармоническая 138  
 — — приведенная 133  
 — действия магнитного поля на проводники 436  
 — звука 544  
 — инерции даламберова 56  
 — — кориолисова 55  
 — — переносная 55  
 — квазиупругая 114  
 — коэрцитивная 478  
 — Лоренца 442  
 — магнитодвижущая 439  
 — неупругого сопротивления приведенная 136  
 — обобщенная 90  
 — непотенциальная 91  
 —, определение 34  
 — оптическая линзы 632  
 — — магнитной 451  
 — — электростатической 451  
 — осциллятора 675  
 — предельная трения покоя 53  
 — равнодействующая 34  
 — реактивная 44  
 — света средняя сферическая 650  
 — — точечного источника 650  
 — сопротивления 334  
 — термоэлектродвижущая 417  
 — тяги ракеты 45  
 — тяжести материальной точки 48  
 — — тела 49  
 — центральная 81  
 — центробежная 40  
 — электродвижущая 381  
 — — взаимной индукции 461  
 — — самоиндукции 457  
 — — флуктуационная 242  
 — Силы ван-дер-ваальсовы 246  
 — — внешние 35  
 — — внутренние 35  
 — инерция 56  
 — массовые 311  
 — непотенциальные 62  
 — нестационарные 62  
 — поверхностные 312  
 — потенциальные 61, 311  
 — ударные 68  
 — упругие 282  
 — химические 779  
 — сторонние 380  
 — ядерные 810  
 Симметрия кристаллов 266  
 — сильных взаимодействий 880 и д.  
 Симплекс 329  
 Сиглет 760  
 Синхротрон 447

- Синхрофазотрон 447  
 Система диссипативная 68  
 — голономная 18  
 — замкнутая в механике 35  
 — консервативная 67  
 — координат лабораторная 728  
 — материальных точек, пределение 14  
 — неголомная 18  
 — неподвижная при вращении 25  
 — оптическая 633  
 — — центрированная 633  
 — — идеальная 633  
 — отсчета 14  
 — абсолютная 28, 328  
 — гелиоцентрическая 33  
 — геоцентрическая 33  
 — инерциальная 33  
 — неинерциальная 33  
 — относительная 28  
 — подвижная при вращении 25  
 — свободная 17  
 — сходящихся сил 35  
 — термодинамическая 144  
 — гетерогенная 145  
 — гомогенная 145  
 — изолированная 145  
 — центра масс (инерция) 728  
 — элементов периодическая 769  
 Системы единиц измерения 328  
 — термодинамические безвариантные 199  
 — — двухвариантные 199  
 — — необычные 175  
 — — одновариантные 199  
 Скачки поглощения 779  
 Скачок уплотнения косой 560  
 — прямой 560  
 Скин-эффект 460  
 Скорости-обобщенные 89  
 Скорость абсолютная 28  
 — волны фазовая 540, 565  
 — групповая 569  
 — волн де Бройля 715  
 — звуковых волн 535  
 — космическая вторая 85  
 — — первая 84  
 — критическая 339  
 — линейная 24  
 — лучевая 655  
 — мгновенная 19  
 — молекул наиболее вероятная 205 и д.  
 — — средняя арифметическая 207  
 — — квадратичная 207  
 — относительная 28  
 — переносная 29  
 — радиальная 19

- Скорость света в вакууме 912  
 — — фазовая 531  
 — — секторальная 21  
 — — средняя 19, 335  
 — — турбулентного движения 335  
 — — трансверсальная 19  
 — — угловая вращения 24  
 — — гироскопа собственная 86  
 — — четырехмерная (четырёхскорость) 525  
 Слой двойной электрический 406  
 — —  $p$ - $n$ -перехода 415  
 — — запирающий 413  
 — — пограничный 334  
 — — половинного ослабления для бета-частиц 842  
 — — — гамма-лучей 842, 845  
 Смачивание 258  
 Смещение красное 533  
 — фиолетовое 533  
 — электрическое 348  
 Сокращение лоренцево 524  
 Соленоид 433  
 Соотношение Коши в гидродинамике 323  
 — Томсона второе 417  
 — — первое 421  
 Соотношения неопределенностей Гейзенберга 749  
 Сопло Лавала 339  
 Сополимеры 293  
 Сопротивление внутреннее триода 492  
 — волновое среды 538  
 — контура активное 486  
 — — волновое 485  
 — — емкостное 486  
 — индуктивное 486  
 — — полное (эффективное) 439  
 — магнитное 439  
 — термическое 272  
 — электрическое удельное 378  
 — — участка цепи 382  
 — электролита удельное 389  
 — эффективное 486  
 Сорбция 280  
 Состояние атома возбужденное 751, 810  
 — — метастабильное 252, 751  
 — — основное 810  
 — — квантовой системы стационарное 718  
 — — —, статистический вес 742  
 — — — четное или нечетное 832  
 — молекулы гибридное 785  
 — — синглетное 784  
 — — триплетное 784  
 — системы вырожденное 219

- Состояние системы метастабильное 743, 751  
 — — равновесное 146  
 — — эргодическое 219  
 — — стандартное 199  
 — — ядра возбужденное 810  
 — — — основное 747  
 Состояния соответственные 245  
 Спектр амплитуд 542, 678  
 — атома 746  
 — —, сверхтонкая структура 761  
 — — времен релаксации 308  
 — — испускания 682  
 — — линейчатый 681 и д.  
 — — масс 444  
 — — молекулы вращательно-колебательный 798  
 — — — вращательный 793  
 — — — диффузный 802  
 — — колебательный 791  
 — — комбинационный 800  
 — — силовой 801  
 — — электронно-колебательный 797  
 — — — электронный 786  
 — — непрерывный 801  
 — — поглощения 682, 684  
 — — полосатый 681  
 — — рентгеновский 776  
 — — вторичный 777  
 — — первичный 777  
 — — силовой (белый) 776  
 — — характеристический 776  
 — — частот 542  
 — — энергетический атома гелия 755  
 — — водородоподобного атома 726  
 — — вращения молекулы 794  
 — — колебаний молекулы 792  
 — — многоэлектронного атома 754  
 — — осциллятора 722  
 — — ротатора 724  
 — — частицы 718  
 — — электрона в периодическом поле 735  
 Спираль изотопический 868  
 — —, закон сохранения 869, 881  
 — — Электрона 464  
 — — ядра 812  
 Спираль Корню 608  
 Спиральность нейтрино 833  
 Способность вращательная 671  
 — — лучеиспускательная 689  
 — — интегральная 691  
 — — поглощательная 690  
 — — разрешающая оптического прибора 646



- Увеличение телескопической системы 639  
 Углы Эйлера 26  
 Угол аэродурный 637  
 — Брюстера 591  
 — зрения 637  
 — красной 258  
 — кручения относительный 285  
 — Маха 563  
 — нугации 26, 86  
 — отражения 545, 586  
 — падения 545  
 — критический 546, 586  
 — преломления 545, 586  
 — преломления 26  
 — призмы преломляющей 627  
 — проекции 637  
 — сдвига 284  
 — трения 54  
 — чистого вращения 166  
 Удар 68  
 Удлинение относительное 270, 282  
 Узел стоячей волны 549  
 — цепи 383  
 Ультразвук 556  
 Ультрамикроскоп 648  
 Упругость формы 253  
 Уравнение Бернулли 323  
 — Бернулли — Эйлера 324  
 — Ван-дер-Поля 143  
 — Вант-Гоффа 263  
 — вековое — см. Уравнение характеристическое  
 — Вильямса — Ландена — Ферри 308  
 — вихревой линии 317  
 — волновое 536  
 — волны продольной 539  
 — — плоской 539  
 — — стоячей 549  
 — — сферической 549  
 — — стоячей 555  
 — гармонических колебаний 109, 110  
 — Гельмгольца для гальванического элемента 184  
 — — синусоидальных волн 540  
 — Гиббса для адсорбции 281  
 — гидростатики основное 313  
 — движения вязкой жидкости 39  
 — — идеальной жидкости 318  
 — — точки 39  
 — диффузии 212  
 — закона сохранения энергии 513  
 — кинетической теории газов основное 204

- Уравнение Кирхгофа для тепловых эффектов 161  
 — Клапейрона — Клаузиуса 199  
 — — для твердых тел 278  
 — Клаузиуса — Мосотти 369  
 — Лапласа для функции тона 324  
 — линейного тона 316  
 — Майера 160  
 — Менделеева — Клапейрона 151  
 — Навье — Стокса 319  
 — — в магнитной гидродинамике 512  
 — неразрывности в гидродинамике 317  
 — Ньютона для вязкости 210  
 — Пуассона для потенциала 51, 354  
 — состояния Бертье 245  
 — Ван-дер-Ваальса 245  
 — — приведенное 245  
 — Вукаловича и Новикова 246  
 — идеального газа 151  
 — — Бозе — Эйнштейна 226  
 — — калорическое 148  
 — — Майера 246  
 — — термическое 148  
 — Томаса — Ферми 755  
 — ударной адиабаты 560  
 — — в магнитной гидродинамике 519  
 — Фурье для теплопроводности 210  
 — характеристическое затухающих колебаний 130  
 — — свободных колебаний 122  
 — Шрёдингера 718  
 — — для атома гелия 755  
 — — водородоподобного атома 725  
 — — двухатомной молекулы 783  
 — — задачи возмущений 740  
 — — колебаний молекулы 791  
 — — многоэлектронного атома 753  
 — — осциллятора 721  
 — — ротатора 724  
 — — стационарных состояний 718  
 — Эйнштейна для фотоэффекта 699  
 — электромагнитных колебаний вынужденных 486  
 — — свободных 483

- Уравнение энергии в гидродинамике 325  
 Уравнения Гамильтона канонические 96  
 — Гиббса — Гельмгольца 183  
 — Гиббса — Дюгема 192  
 — Даламбера для потенциалов 503  
 — —, см. также Уравнение волновое  
 — Коши — Римана 324  
 — Лагранжа второго рода 93  
 — Лауэ 621  
 — Лоренца для микрополя 506  
 — Максвелла 498 и д.  
 — материальные 501  
 — равновесия жидкости 312  
 — связей 17  
 — установления колебаний квазилинейной системы 143  
 — Эйлера динамические 79, 318  
 — — для движения идеальной жидкости 318  
 — — кинематические 26  
 — электронной оптики основные 449  
 Уровень громкости звука 556  
 — Ферми в металле 377, 408  
 — — полупроводника 408 и д.  
 Уровни акцепторные 403  
 — — донорные 402  
 — — локальные 402  
 Ускорение абсолютное 29  
 — вращательное 27  
 — касательное 23  
 — конвективное 315  
 — кориолисово 30  
 — линейное 27, 445  
 — локальное 315  
 — мгновенное 21  
 — нормальное 22  
 — осесремительное 27  
 — относительное 29  
 — переносное 29  
 — радиальное 22  
 — свободного падения 49  
 — —, стандартное значение 49  
 — — среднее 23  
 — трансверсальное 22  
 — угловое 27  
 — четырехмерное (четырёхускорение) 526  
 Ускорители заряженных частиц 445  
 Условие адиабатичности движения идеальной жидкости 326  
 — Вульфа — Брэгга 622

- Условие Лагранжа — Гельмгольца 630  
 — нормирован Лоренца 503  
 — отсутствия конвекции 313  
 — прилипания жидкости 322  
 — синусов Аббе 643  
 — скольжения жидкости 322  
 — устойчивого равновесия жидкостей 258  
 — частот Бора 741, 748  
 Условия граничные для уравнений вязкой жидкости 322  
 — — — идеальной жидкости 322  
 — — — Максвелла 502  
 — термодинамического равновесия системы 197  
 Устойчивость ядра относительно распада 809  
 Участок гидродинамической стабилизации 337  
 Уширение спектральных линий доплеровское 681  
 — — ударное 682
- Фаза волны 540  
 — — начальная 540  
 — — колебания 110  
 — — начальная 540  
 — — рассеяния 729  
 — термодинамическая 145  
 Фазотрон 447  
 Фазы магнитные 475  
 Фактор атомный рассеяния 730  
 — накопления излучения 845  
 — расщепления Ланде 764  
 Фермионы 226  
 Ферриты 457  
 Ферромагнетизм 474  
 Ферромагнетики, гистерезис 477  
 — жесткие 478  
 — мягкие 478  
 — процесс перемагничивания 477  
 — — технического намагничивания 476  
 — —, техническое насыщение 477  
 Фигуры Лиссажу 127  
 Физика молекулярная, предмет 144  
 — статистическая, предмет 217  
 Фильтры в радиотехнике 491  
 Флуктуации 237  
 — в измерительных приборах 240  
 — изотермические объема и плотности 239  
 — изохорические температуры 240

Флуктуации квадратичные 237  
 — относительные 238  
 —, распределение Гаусса 238  
 — электрические в радиоаппаратуре 242  
 Флуоресценция 709  
 —, интенсивность свечения 714  
 Фокусировка двойная в массеноскографах 444  
 — несткая в ускорителях 447  
 Фокусы оптической системы 634  
 — сферической поверхности 628  
 Фононы 274  
 Формула Бальмера—Ридберга 746  
 — барометрическая 224  
 — Больцмана для энтропии 236  
 — Борна 730  
 — Брейта—Вигнера 855  
 — Вейцзекера 815  
 — Гелл-Манна и Нишиидзимы 869  
 — Гошкисона 439  
 — Дебая—Ланжевена 365  
 — де Бройля 715  
 — Деландра 797  
 — Жювена 260  
 — Кирхгофа 690  
 — Клейна—Нишины—Тамма 704, 843  
 — Лоренц—Лоренца 676  
 — Муни-Ривалина 307  
 — Найтвиста 243  
 — Пьютона 629  
 — Планка для теплового излучения 228, 695  
 — — энергии фотона 695  
 — Пуазанля 338  
 — Резерфорда 731  
 — Ричардсона—Дешмана 423  
 — Рэлея—Джинса 694  
 — Саха 804  
 — стехиометрическая 200  
 — Стокса для силы сопротивления 334  
 — сферического зеркала 629  
 — сферической поверхности в оптике 628  
 — Томсона 485  
 — тонкой линзы общая 631  
 — Цюлковского 45  
 — Эйнштейна для броуновского движения 243  
 Формулы Френеля 587, 588  
 Фосфоресценция 709  
 —, интенсивность свечения 714  
 Фотоделиние ядер 857

Фотоассоциация молекул 707, 802  
 Фотоионизация 699, 804  
 Фотолуминесценция 710  
 Фотометрия 649  
 Фотон 698  
 Фотонетрализация ионов 805  
 Фотопластики толстослойные 850  
 Фотопроводимость полупроводников 401  
 — см. Фотоэффект внутренний  
 Фоторасщепление дейтрона 857  
 Фоторождение частиц 857, 883  
 Фотозаклены 699  
 Фотоэффект вентильный 702  
 — внешний 699  
 — —, закон Эйнштейна 699  
 — —, красная граница 700  
 — —, уравнение Эйнштейна 699  
 — внутренний 699, 701  
 —, выход квантовый 700  
 — селективный 701  
 — ядерный 857  
 Фронт волны — см. Поверхность волновая  
 Функции собственные для атома гелия 755  
 — — — водородоподобного атома 726  
 — — — движения частицы 718  
 — — — двухатомной молекулы 782  
 — — — многоэлектронного атома 754  
 — — — осциллятора 722  
 — — — ротора 725  
 — — — термодинамические вырожденного газа Бозе—Эйнштейна 228  
 — — — электронов в металле 231  
 — — — теплового излучения 227  
 Функция возбуждения ядерной реакции 853  
 — волновая 716  
 — — антисимметричная 756  
 — —, представление в виде ряда 721  
 — — симметричная 756  
 — — спиновая 757  
 — —, уравнение Шрёдингера 718  
 — Гамильтона, определение 94  
 — — релятивистской частицы 528  
 — диссипативная 94, 118, 326  
 — Лагранжа, определение 91  
 — — релятивистской частицы 526

Функция Ланжевена 365  
 — радиального распределения в жидкостях 253  
 — силовая 61  
 — состояния 149  
 — тока 324  
 — характеристическая в термодинамике 180  
 Характеристика вольтамперная 393  
 — — падающая 393, 395  
 — — квазиупругая 134  
 — триода анодная статическая 492  
 — — динамическая 494  
 — — сеточная статическая 492  
 — — —, крутизна 492  
 Характеристики металла оптические 593  
 Хемисорбция 263  
 Хемилуминесценция 712  
 —, механизм 712  
 Холодильник 167  
 Центр волны 539  
 — инерции 37  
 — качания физического маятника 116  
 — масс — см. Центр инерции  
 — оптический линзы 631  
 — приведение 35  
 — — системы сил 35, 71  
 — рассеивающий 727  
 — силы 81  
 — тяжести тела 49  
 Центры конденсации 251  
 — кристаллизации 279  
 — парообразования 261  
 — примесные в полупроводниках 401  
 Цени полимерные 292  
 Цепочка радиоактивных превращений 821  
 Цепь магнитная 439  
 — электрическая 380  
 Цикл Дизеля 170  
 — Карно 168  
 — — обобщенный 189  
 — обратный 169  
 — Отто 171  
 — предельный 140  
 — протонно-протонный 859  
 — термодинамический 167  
 — — газовых турбин 172  
 — обратный 168  
 — — поршневых двигателей 171  
 — — прямой 168  
 — Триплера—Сабата 171  
 — углеродно-азотный 859  
 Циклотрон 446  
 Циркуляция напряженности магнитного поля 437  
 — — электростатического поля 351  
 — — скорости 316  
 — —, закон сохранения 325  
 Частица истинно нейтральная 869  
 — сплошной среды 314  
 Частицы элементарные 865  
 Частота волны 541  
 — колебаний 109  
 — комбинационная 138  
 — несущая 580  
 — — —, перехода боровская 741  
 — резонансная 120, 488  
 — — контура 488  
 — собственная 114, 550  
 Чердование интенсивностей во вращательных спектрах 796  
 Число Авогадро 147, 151, 912, 913  
 — волновое 540  
 — дебаевское 397  
 — квантовое внутреннее атома 758  
 — — — молекулы 788  
 — — — электрона 759  
 — — — вращательное 794  
 — — — главное 726, 746  
 — — — колебательное 792  
 — — — магнитное 764  
 — — — орбитальное атома 750  
 — — — молекулы 787  
 — — — электрона 758  
 — — — параболическое 768  
 — — — спиновое атома 758  
 — — — молекулы 788  
 — — — электрона 758  
 — — — Ломшмидта 151  
 — — — массовое ядра 806  
 — — — Маха 332  
 — — — оборотов тела 25  
 — — — Рейнольдса 332  
 — — — магнитное 512  
 — — — степеней свободы 89  
 — — — Струхала 332  
 — — — Фарадея 387, 912  
 — — — Фруда 332  
 Числа магические 817  
 Чувствительность спектральная глаза 649  
 Ширина интерференционной полосы 598  
 — спектральной линии естественная 681

- Ширина уровня 743  
 — — составного ядра 854  
 — — — парциальная 854  
 Шумы 242, 554  
 Шунг 384
- Эвентика 279
- Эквивалент механический единицы теплоты 159  
 — рентгена биологический 847  
 — — физический 847  
 — тепловой единицы работы 159  
 — химический 387  
 — электрохимический 387
- Экситон 739
- Экспозиция 651
- Электроемкость 359  
 — взаимная 360
- Электролиз 386, 387
- Электрoluminesценция 710  
 —, механизм 711
- Электронграфия 623, 716
- Электроны валентные 341, 776, 780  
 — отдачи 704  
 — проводимости 376
- Электроотрицательность 780
- Электропроводность газов 389  
 — удельная металла 378
- Электростатика, основная задача 348  
 —, предмет 341
- Элементы переходные 771  
 — трансураниевые 824
- Эллипс рассеяния 644  
 — инерции 73
- Эмиссия автоэлектронная 423  
 — термоэлектронная 421  
 — фотоэлектронная 424  
 — электронная вторичная 424
- Энергия активации для жидкости 254  
 — внутренняя 57, 153  
 — — газовой смеси 196  
 —, диссипация 68  
 —, закон сохранения и превращения 57  
 — звуковых волн 543  
 — кинетическая 63  
 — магнитного поля, плотность 463  
 — механическая 57, 63  
 — —, закон сохранения 68  
 — молекулы 232  
 — намагнитченной среды, плотность 473  
 — нулевая колебаний молекулы 792  
 — — — системы 235
- Энергия нулевой осциллятора 233  
 — — — гармонического 722  
 — — — поверхностная 237  
 — — — свободной жидкости 257  
 — — — покоя 327, 912  
 —, понятие 57  
 — — — потенциальная 64  
 — — — деформированного тела 283, 285, 286  
 — — — свободная 181  
 — — — связи электрона в атоме 747  
 — — — ядра 808  
 — — — в капельной модели 815  
 — — — удельная 808  
 — — — тона собственная 462  
 — — — токов взаимная 463  
 — — Ферми 230  
 — — — электрическая заряженного проводника 372  
 — — — поляризованного диэлектрика 374  
 — — — электромагнитного поля 464  
 — — — электрического поля, плотность 374  
 — — — ядерной реакции 852, 853  
 — — — — пороговая 852
- Энтальпия 155  
 — газовой смеси 196
- Энтропия 175  
 — газовой смеси 195  
 — смешения 178  
 — удельная 188  
 —, формула Больцмана 236
- Эффект Баркгаузена 476  
 — вентильный 491  
 — Джозефсона 913  
 — Джоули—Томсона 249  
 — динаatronный 494  
 — Доулера в акустике 552  
 — — — оптике 532  
 — — — — поперечный 533  
 — — — дробовой 242  
 — — — Зеемана аномальных 761  
 — — — нормальных 761  
 — — — обратный 762  
 — — — изотопически в атомных спектрах 752  
 — — — молекулярных спектрах 798  
 — — — — сверхпроводимости 480  
 — — — исключенного объема см. Взаимодействия дальнего порядка
- Керра 663  
 — Кнудсена 216  
 — Комптона 702 и д  
 — Коттона—Мутона 664  
 — Мессбауэра 837  
 — — — механикокалорически 265

- Эффект Ми 686  
 — Оже 779  
 — Пашена—Бака 764  
 — Пельтье 419  
 — пьезоэлектрический 371  
 — — — обратный 372  
 — — — тепловой процесса 160  
 — — — стандартный 202  
 — — — туннельный 733  
 — — — в альфа-распаде 826  
 — — — Фарадея 672  
 — — Холла 403  
 — — Штарка для ядра 768  
 — — — квадратичный 769  
 — — — линейный 768
- Явление взаимной индукции 461  
 — гидратации 263  
 — застоя 53  
 — Зеебека 417
- Явление осмоса 263  
 — самоиндукции 457  
 — сверхтекучести 264  
 — см также Эффект  
 — Тиндалли 685  
 — Томсона 420
- Явления капиллярные 258  
 — контактные в металлах 405  
 — — в полупроводниках 408  
 — переноса в газах 210  
 — термоэлектрические 416  
 — эмиссионные в металлах 421
- Ядра магические 817  
 — — — двадцать 817  
 — четно-четные и т. п. 807
- Ядро дочернее 820  
 — материнское 820  
 — отдачи 836  
 — потока 337  
 — составное 854
- Яма потенциальная 731
- Яркость 651

*Борис Михайлович Яворский  
и Андрей Антонович Детлаф*

Справочник по физике

М., 1968 г., 940 стр. с илл.

Редактор *Л. П. Русакова*

Техн. редактор *В. Н. Крюčkова*

Корректоры *Т. С. Вансберг,  
Т. С. Плетнева, В. П. Сорокина*

---

Сдано в набор 4/X 1967 г. Подписано к печати 8/V 1968 г.  
Бумага 70×90  $\frac{1}{32}$ . Физ. печ. л. 29,375. Условн. печ. л. 34,37.  
Уч.-изд. л. 47,17. Тираж 200 000 экз. Т-00198. Цена книги 2 р. 63 к.  
Заказ № 11 012

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Типография Франклин, Будапешт