СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
ФИЗИКИ

В. Д. ЗАХАРОВ

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи физических наук»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

В. Д. ЗАХАРОВ

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

с предисловием А. З. ПЕТРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

530.1
3.38
УДК 530.12 : 531.51

Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. В. Д. Захаров. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972 г.

Книга представляет собой современный обзор исследований по проблеме гравитационных волн в общей теории относительности. Центральное место в ней занимает изложение математически строгих подходов к проблеме, прежде всего определений и критериев, выделяющих волновые поля тяготения из всех гравитационных полей, даваемых решениями уравнений Эйнштейна. Вводная глава 1 содержит обзор приближенных методов описания гравитационных волн. Необходимый для постановки вопроса о строгих (общековариантных) волновых критериях математический аппарат — проблема Коши для уравнений тяготения и классификация полей тяготения Петрова — излагается в главах 2 и 3. В главах 4—8 описываются известные общековариантные критерии гравитационных волн Пирани, Беля, Лихнеровича, Зельманова и др. По содержанию к ним примыкает глава 12, посвященная хронометрически инвариантному анализу гравитационно-инерциальных волн. В главе 9 рассмотрена теория распространения гравитационных волн и дается их классификация по характеру волнового фронта (плоские и сферические волны). В главе 10 рассматривается специальный случай пространств с плоскими гравитационными волнами, именно пространств, допускающих абсолютно параллельное векторное поле. В главе 11 излагаются исследования асимптотического поведения волновых гравитационных полей, порождаемых островными распределениями источников, а заключительная глава 13 представляет собой краткий обзор вопроса экспериментального детектирования гравитационных волн и основных результатов, достигнутых экспериментом в настоящее время.

Библиография 465 названий.

$\frac{2-3-9}{129-72}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной теории гравитации — общей теории относительности Эйнштейна,— наряду с удивительными по точности предсказаниями эффектов смещения перигелия Меркурия и отклонения луча света в поле тяготения Солнца, почти отсутствуют другие опытные подтверждения теории, а сама теория в процессе своего развития выдвинула целый ряд принципиальных проблем. К числу таких проблем следует отнести проблему гравитационной энергии, связанные с нею проблемы гравитационных волн, квантования гравитации и ряд других нерешенных задач.

Такая ситуация создалась прежде всего потому, что отсутствовал базис, необходимый для построения теории, адекватной действительности,— экспериментальные исследования, допускающие повторяемость и изменение параметров. Эти исследования лимитировались прежде всего состоянием экспериментальной техники. Однако в последнее время в работах Вебера, Шиффа, Брагинского и других экспериментаторов наметилась конкретная программа экспериментов по детектированию гравитационных волн. Можно с уверенностью думать, что эти исследования повлекут за собой новые работы ученых-экспериментаторов и теория гравитации получит более надежный экспериментальный фундамент.

Когда та или иная отрасль науки, будучи несомненно актуальной, не имеет достаточно солидного опытного фундамента, то в ее развитии начинают проглядывать элементы формального теоретизирования. В некоторой степени не избежала этого и современная теория гравитации: стоит только указать на многочисленные варианты «единых теорий», из которых отнюдь не все выдержат проверку временем. Поэтому критический анализ различных теорий, связанных с тяготением, в настоящий момент особенно актуален.

Среди нерешенных проблем гравитации проблема гравитационных волн привлекает к себе наибольшее внимание физиков, теоретиков и экспериментаторов. Это объясняется тем, что она тесно связана с другими нерешенными проблемами науки о тяготении (проблемой энергии, проблемой построения квантовой гравидинамики и т. д.), и ее решение в теоретическом и экспериментальном планах стимулировало бы исследование многих других задач гравитации.

Гравитационным волнам посвящено огромное количество работ, как крупных монографий, так и отдельных статей, где трактуется теоретический подход к этой проблеме. Различные авторы по-разному подходят к ней: это либо приближенный подход по аналогии с методом Эйнштейна, либо определения, основанные на некоторых геометрических или физических соображениях, либо же теории, основанные на аналогии с электромагнитной теорией.

При построении теории гравитационных волн нужно, естественно, исходить из некоторого определения, но в теории гравитации Эйнштейна именно в этом пункте возникают два принципиальных затруднения: геометрический объект, определяющий энергию и импульс поля, не тензорной природы, а само поле гравитации отождествляется с пространственно-временным континуумом, и это особенно усложняет задачу. Стоит хотя бы отметить, что не существует пока ни одной физической теории (не считая «единых теорий»), где имела бы место подобная ситуация.

Как уже указывалось, число подходов к гравитационным волнам очень велико, и перед автором этой книги В. Д. Захаровым стояла прежде всего задача разобраться в них и упорядочить их, исходя из некоторого принципа. В качестве такого принципа автор выбирает определение понятия гравитационной волны, соответственно чему выделяет семь групп различных теорий гравитационных волн. Эти группы, конечно, не отделены друг от друга совершенно четко, но во всяком случае автору удалось на этом пути упорядочить в некоторой мере поистине огромный материал, сделать его более обозримым.

Следует кратко остановиться на значимости различных теорий, обсуждаемых в монографии. Ясно, что до тех пор, пока не скажет решающего слова эксперимент, нельзя указать критерия адекватности той или иной теории, и многие из описанных автором подходов окажутся по истечении времени достоянием только истории, если их рассматривать в целом как замкнутые теории гравитационного излучения. Необходимо все же при этом учитывать, что каждый из них содержит нечто объективно ценное, будь это конструктивная находка или тонкое физическое соображение, верная физическая идея, математический прием или что-либо другое. И хотя, вероятно, какие-то из анализируемых автором подходов не пройдут проверку временем, но многие конструктивно входящие в них элементы останутся в подытоживающей теории, будут полезными и необходимыми.

Таким образом, монография пишется на таком этапе исследования гравитации, когда теория не должна еще считаться завершенной, но находящейся в стадии становления. Отчасти поэтому книга имеет следующую структуру: анализ, осмысливание, упорядочение имеющегося в настоящее время огромного теоретического материала; личные разработки автора; в меньшей степени — сравнение с попытками новых экспериментальных исследований. Такая структура книги легко объясняется современной ситуацией в гравитации. Кроме того, содержание книги зависит, разумеется, от личных склонностей автора. Как отмечает сам автор во введении, наибольшее внимание он уделяет тем работам по теории гравитационных волн, в которых дается строгое инвариантное определение понятия гравитационных волн в смысле необходимых и достаточных условий, накладываемых на величины, характеризующие пространственно-временнóе многообразие, с тем, чтобы оно описывало волновое гравитационное поле. Другие возможные подходы к вопросу описываются менее подробно. По-видимому, эта особенность свойственна каждому автору.

Несомненно, однако же, что имеется одно весьма важное правило, которому должен следовать автор монографии по любой физической проблеме,— это установление связи теории с опытом (с экспериментом и наблюдениями). В. Д. Захаров пытается выдержать это правило, выделяя специальную главу для изложения экспериментальной стороны вопроса. Беда, правда, заключается в том, что пока таких сопоставлений с опытом мало в действительности, если не считать классических астрономических наблюдений и первых шагов по детектированию гравитационных волн, предпринятых Дж. Вебером, В. Брагинским и некоторыми другими экспериментаторами.

Через пять — семь лет многие из теорий, рассматриваемых в монографии, будут отсеяны экспериментальным решетом и лягут на полку истории, но то, что в них было ценного, отнюдь не пропадет даром, а войдет органически в ткань будущей теории гравитации. В этом смысле монография В. Д. Захарова сыграет свою полезную роль. С другой стороны, по той же причине, а также в силу указанного выше большого количества работ по проблеме гравитационных волн, автор физически не мог уделить много места более детальному анализу той или иной теории. В основном он придерживается следующего плана: четко излагаются основные посылки той или иной теории, делаются основные выводы из этих посылок и обрисовываются на этом основании контуры теории, иногда устанавливаются связи с другими теориями, их эквивалентность, если она имеет место. Более детальное изложение потребовало бы увеличения размера книги в четыре-пять или более раз, что едва ли сделало бы ее удобочитаемой и, наоборот, может быть, помешало бы основной задаче автора — дать по возможности полный обзор современной ситуации в проблеме гравитационных волн. Что касается личных исследований автора, то они вошли вполне закономерно и на равных правах с другими подходами при объективном изложении и указании их связей с работами других авторов (главным образом с теорией Зельманова).

Теория гравитационных волн в рамках теории гравитации Эйнштейна, если говорить о принципиальных трудностях построения теории, приводит к необходимости ответить по крайней мере на три вопроса, за которыми, впрочем, возникают и другие: а) если попытаться ввести интегральные инварианты, основанные на обычной теореме Остроградского, то энергия поля гравитации выражается не тензорами (что не являлось бы неожиданным), а геометрическими объектами, которые можно обратить в нуль выбором системы координат; б) определяя энергию поля через тензорные величины и отождествляя по Эйнштейну поле и пространственно-временной континуум, приходится распутывать понятие «энергия пространства и времени»; вовсе отбрасывая понятия энергии и импульса поля гравитации (такая точка зрения также существует), приходится заранее зачеркнуть всякие аналогии с другими полями; в) не имея в общей теории относительности понятия привилегированной системы координат, приходим к тому, что в конкретных вопросах возникают трудные задачи интерпретации координат. Эти и другие вопросы при чтении книги Захарова проходят перед читателем в достаточно заостренном виде и дают ему чисто конструктивное понимание основных трудностей современной теории гравитации; некоторые авторы различных популярных изданий или обходят, или попросту не понимают вопроса, рисуя оптимистическую картину общей теории относительности как теории завершенной и отвечающей на все поставленные перед ней вопросы.

Одна из наиболее старых отраслей физики — наука о тяготении — в настоящее время проходит период переоценки ценностей на базе современных экспериментальных исследований, и можно думать, что в самом ближайшем будущем теория гравитации получит на этой основе более твердые фактические данные, на которые можно будет опереться, в частности, при изучении особенно интересного явления гравитационных волн, если они существуют. В этом случае гипотезы, изложенные в монографии Захарова, можно будет оценить заново и отобрать из различных построений те элементы, которые этого заслуживают, подтверждаясь в опыте.

Можно ли на основании материала, излагаемого автором, и вообще основываясь на ситуации, сложившейся к данному моменту, отдать предпочтение той или иной теории гравитационного излучения? Автору предисловия кажется, на основании известных ему данных, что этого сделать пока нельзя. Для этого не хватает проверки опытом, более фундаментального экспериментального базиса, эвристичности рассматриваемых теорий. Собственно говоря, по мнению автора предисловия, ни одно из рассматриваемых в книге построений не заслуживает, в строгом смысле слова, названия теории, пока они не проверены в опыте и не привели к экспериментально обнаружимым следствиям, пока они не «начали работать» в этом плане.

Кроме того, к тому времени, когда монография была представлена к изданию, появились новые теоретические разработки (например, основанные на принципе моделирования полей тяготения), не отраженные, естественно, в монографии. Это неизбежное явление не снижает общей ценности книги и общей оценки, которой она заслуживает.

Следует отметить поистине огромную чисто библиографическую работу, проделанную автором, потребовавшую больших знаний современной физики и математического аппарата. Библиография (около 450 названий) представляет исключительную ценность своим тематически продуманным подбором и сохранит много времени для читателя, рискующего иначе потонуть в море информации. За исключением, может быть, последних двух лет в ней отражены почти все основные работы по гравитационным волнам.

При общей оценке монографии В. Д. Захарова следует также иметь в виду тот факт, что она актуальна именно на сегодняшний момент, и автор остро чувствует это, развертывая в своей книге перед читателем большую и пеструю картину исследований многих теоретиков, как зарубежных, так и советских (широко представленных в книге), и тем самым выводя свою книгу из жестких рамок учебников, в значительной мере устаревших как в части постановки задач, так и — в особенности — в части физического материала. Такие книги особенно нужны в наше время, когда поток информации захлестывает читателя и особенно остра потребность в подытоживающих обзорах по той или иной проблеме. Монография В. Д. Захарова, не лишенная отдельных недостатков (некоторая схематичность изложения, субъективность в оценке некоторых гипотез и др.), обладает зато тем несомненным достоинством, что это по существу первая в мировой литературе попытка по возможности широкого описания различных теоретических построений, связанных с проблемой гравитационных волн. Книг такого жанра по гравитационным волнам в мировой литературе пока указать нельзя, хотя именно такие книги явно необходимы. По этой причине ни на минуту не возникает сомнения в том, что монография В. Д. Захарова быстро найдет читателя, так как число лиц — ученых, студентов, инженеров,— интересующихся гравитационными волнами, в Советском Союзе очень велико, и спрос на книги такого рода большой.

*А. З. **Петров***

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Состояние, в котором в настоящее время находится решение проблемы гравитационных волн, не позволяет дать математическое изложение их теории (практически еще не построенной) или методов их лабораторного детектирования. Фактически в распоряжении автора имеется лишь несколько разрозненных концепций и подходов, в разной мере строгих или приближенных. Их обзор неизбежно носит несколько фрагментарный характер, тем более, что многие из них, несмотря на обширную журнальную литературу, разработаны недостаточно подробно.

В такой ситуации, когда не исключен элемент субъективной недооценки или переоценки того или иного результата, автор решил сосредоточить основное внимание на концепциях, допускающих математически строгое изложение. Это обусловило определенный выбор тематики и расстановку акцентов. А именно, центральное место в книге заняла проблема общековариантного формулирования критерия гравитационных волн, опирающаяся на математически строгие методы решения задачи Коши для уравнений тяготения Эйнштейна. Изложению проблемы Коши и основных результатов теории характеристик для уравнений Эйнштейна посвящена в книге глава 2.

В главе 3 формулируется принципиальная постановка проблемы гравитационных волн и излагаются два основных метода их описания — алгебраический и дифференциальный. Здесь же даны необходимые сведения из основного математического аппарата, применяемого в теории гравитационных волн,— алгебраической классификации полей тяготения по Петрову. Обе эти главы носят вводный характер по отношению к главам 4—8, которые посвящены алгебраическим методам инвариантного описания гравитационных волн. Дифференциальным методам посвящена целиком глава 12 и частично — главы 7 и 8.

Второе по важности место в книге отведено вопросам распространения фронта гравитационной волны, а также исследованию асимптотических свойств полей гравитационного излучения, источниками которого являются изолированные материальные системы (главы 9 и 11).

Наконец, точные и приближенные решения уравнений Эйнштейна, описывающие гравитационные волны, анализируются на протяжении всей книги (за исключением глав 2 и 3), причем в главе 10 специально рассмотрены те решения, которые описывают плоские гравитационные волны.

Указанные три направления исследования образовали основную канву книги и определили ее общее назначение: она должна служить «рабочим обзором», выделяющим наиболее сложившиеся и, по мнению автора, наиболее перспективные подходы к исследованию гравитационных волн. В этом аспекте следует рассматривать и два других направления работ, освещенных в книге: методы приближенного исследования волновых гравитационных полей (их обзор составляет предмет вводной главы 1) и анализ методов и перспектив экспериментального обнаружения гравитационных волн, выполняющий роль физического заключения к книге в целом (последняя глава 13).

Такая направленность книги определила и специфический характер изложения вопроса об энергии, переносимой гравитационными волнами. Поскольку в этом пункте проблема теории гравитационных волн пересекается с другой, не менее сложной проблемой — энергии гравитационного поля,— то здесь, как в фокусе, концентрируются принципиальные трудности современной теории тяготения. Поэтому здесь автор ограничился описанием лишь некоторых, весьма изящных математически, концепций, отраженных в работах Беля и Синга (глава 5), Дебеве (глава 8), Ньюмэна — Пенроуза (глава 11).

Разумеется, в выборе или в освещении материала какую-то роль сыграли личные мнения автора. Читатель может усмотреть в книге тенденцию представить бурно развивающуюся область знания как мертвый математический скелет, результат вивисекции живого развивающегося организма. В этом смысле автор рискует оказаться прямой мишенью для едких насмешек в духе гётевского Мефистофеля:

Wer will was Lebendings erkennen und beschreiben,
Sucht erst den Geist herauszutreiben,
Dann hat er die Teile in seiner Hand,
Fehlt leider! nur das geistige Band [1]).

Однако автор не ставит перед собой высокую цель адекватно отобразить «живой природы пышный цвет», памятуя о том, что «древо познания» не есть «древо жизни». Без «математического скелета» нет теории; поэтому в книге, в частности, совершенно исключен из рассмотрения вопрос о взаимодействии гравитационных волн с атомной структурой вещества. Удовлетворительное решение этого вопроса, по-видимому, может быть дано только при условии существенного обобщения эйнштейновской теории на явления микромира. Создание такой «квантовой теории тяготения» является делом будущего; в предлагаемой же книге проблема гравитационных волн рассматривается исключительно на базе классической эйнштейновской теории тяготения.

Публикацией данной книги автор надеется в какой-то степени восполнить остро ощущаемый недостаток в систематических обзорах по гравитационным волнам, недостаток, отчетливо видимый в настоящее время, несмотря на то, что читатель располагает рядом превосходных монографий, в большей или меньшей мере затрагивающих тематику настоящей книги. Так, в книге Вебера «Общая теория относительности и гравитационные волны» проблема гравитационных волн рассмотрена лишь в том минимальном объеме, какой был необходим автору для постановки вопроса о возможных методах их лабораторного детектирования, причем выход книги в свет (1960 г.) относится к периоду, когда большинство современных направлений исследования еще не сформировалось. Вышедшая недавно обстоятельная монография Брагинского «Физические эксперименты с пробными телами» отражает вопрос на современном уровне, но ограничивается лишь

---

[1]) Кто хочет разобрать предмет,
Пускай в нем душу уничтожит;
Хотя духовной связи нет,
Он по частям его разложит.

(«Фауст» Гёте, в переводе Губера).

экспериментальным подходом к исследованию гравитационных полей. Ряд других обзоров (лекции Пирани и Сакса, обзор Петрова и др.) либо по необходимости крайне сжаты, либо отражают только исследования самих авторов.

Книга предполагает предварительное знакомство читателя с основами общей теории относительности и рассчитана прежде всего на студентов старших курсов и аспирантов, а также на всех специалистов по гравитации, которым она может быть полезна как справочное руководство. Поэтому автор попытался дать как можно более полный список литературы, хотя, конечно, его нельзя рассматривать в качестве полной библиографии всех работ по гравитационным волнам. Вполне сознавая тот риск, на который нужно решиться при написании широкого монографического обзора по столь энергично развивающейся проблеме, как гравитационные волны, автор заранее приносит извинения тем своим коллегам, работы которых могли бы существенно обогатить содержание книги, но ускользнули от внимания автора.

Автор глубоко признателен рецензентам А. З. Петрову, И. Д. Новикову и Н. В. Мицкевичу и редактору книги В. Н. Захарову за критический просмотр рукописи, а также Я. Б. Зельдовичу, К. П. Станюковичу, К. С. Торну, В. Б. Брагинскому и А. Л. Зельманову, в той или иной форме содействовавшим выходу книги в свет.

Возлюбить, возненавидеть
Мирозданья скрытый смысл.
Чет и нечет мертвых числ..,

(А. Блок)

ВВЕДЕНИЕ

Проблема теоретического описания гравитационных волн, тесно связанная с задачами их экспериментального исследования, стала одной из наиболее актуальных и интересных проблем не только гравитации, но и современной физики вообще. Возникшая почти одновременно с созданием теории тяготения Эйнштейна (первый анализ этой проблемы был проведен самим Эйнштейном в 1916—1918 гг.), она и в настоящее время не имеет еще вполне удовлетворительного решения.

За последние полтора десятилетия (примерно с 1957 г.) интерес к ней существенно возрос благодаря разработке нового мощного математического аппарата — классификации полей тяготения Петрова, давшей начало ряду новых подходов к решению проблемы в теоретическом плане. С другой стороны, достигнутый в последние годы прогресс эксперимента, в частности опыты Вебера, открывает перспективы лабораторного детектирования гравитационных волн.

Усилившийся интерес к проблеме гравитационных волн привел к появлению многочисленных журнальных публикаций; количество их исчисляется сейчас сотнями. Эти работы можно разделить на несколько групп, отражающих различные направления исследований.

Работы авторов первого направления имеют целью дать строгое определение понятия гравитационных волн, т. е. сформулировать в общековариантном виде необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять метрика пространства — времени для того, чтобы она описывала волновое гравитационное поле. К этому направлению относятся исследования Пирани [69, 262, 263], Лихнеровича [62, 87—90, 264], Беля [56, 68, 75—80], Дебеве [66, 81, 109, 265—268], Траутмана [55, 269, 270], Петрова [271], Элерса и Сакса [185, 272—274], Хэли [111—117], Роя и Радхакришны [96], Захарова [94, 100, 101, 275, 276], Старускевича [277], Паризе [278], Зунда и Левина [118—120], Мизры и Сингха [127, 128], Малдыбаевой [121, 123, 279], Соколика и Коноплевой [92, 93, 124], Айхельбурга [280], Лукашевича [281], Кобюрна [282], Ядава [283], Николаенко [126].

Исследователи этого направления рассматривают определение гравитационных волн в чисто геометрическом аспекте на основе алгебраических свойств полей тяготения, определяемых классификацией Петрова [57, 64, 65]. К ним примыкают авторы второго направления, которые, однако, в определении гравитационных волн отправляются от предварительно выбранного определения энергии гравитационного поля. Их работы, физические по характеру подхода, в отличие от геометрических работ первой группы, представлены исследованиями Инфельда [8, 284—287], Синга [83], Переса и Розена [288—290], Арновитта, Дезера и Мизнера [291—293], Гейслера — Тредера — Папапетру [294], Араки [295], Брилла [296], Меллера [297—299], Гутмана [300—302], Широкова и Будько [303—305], Петрова [306], Ву Тхань Кхиета [307], Денисова [308], Синьер [309—311], Айзексона [38], Родичева и Дозморова [312—314], Захарова [315, 316]. Следует отметить, что, например, Синг, Ву Тхань Кхиет, Меллер (1961 г.), Родичев и Дозморов, Денисов, Гутман, Айзексон используют общековариантное (или тетрадное) определение энергии гравитационого поля. В этом смысле (ковариантность критерия) их подход можно отнести и к первому направлению. Традиционный «псевдотензорный» подход использовали Перес, Розен, Меллер (1958 г.) и др. Наконец, Араки, Брилл, Гейслер, Тредер и Папапетру определяют энергию поля тяготения в специальным образом выделенной системе координат.

Третье направление составляют работы, в которых исследуются либо волны конкретного вида (плоские, сферические), либо гравитационное излучение островных систем источников. Сюда следует отнести исследования плоских волн Розена [155], Бордмана и Бергманна [156], Бонди, Пирани и Робинсона [143], Кундта и Элерса [137, 145—147], Вебера и Зипоя [95, 317], Керра и Гольдберга [318], Аве [157], Ньюмэна [150], Пенроуза [144], Шевретона [149], Иохари [154]; сферических волн Робинсона и Траутмана [129, 131], Каэна и Лероя [319, 320], Фостера и Ньюмэна [138], Мардера [321]; излучения островных систем Бонди [20, 171, 322—325], Стэхеля [188, 203], Джениса, Ньюмэна, Торренса и Куча [182, 326], Хокинга [202], Бичака [327, 328], Ван дер Бурга [329], Айзексона, Виникура и Дерри [330], Ле Данма [331], Мадора [45, 46], Персидеса [197], Холидея и Дженисa [332], а также работы Сакса [110], Ньюмэна и Тамбурино [333], Сзекереса [134], Унти и Торренса [334], Коллинсона и Френча [335—336].

Четвертое направление образуют исследования, посвященные отысканию точных или приближенных решений уравнений Эйнштейна, описывающих гравитационные волны в смысле того или иного критерия. Известные сейчас точные волновые решения и их анализ можно найти в работах Эйнштейна и Розена [187, 337, 338], Такено [102, 153, 163, 168, 339—347], Петрова [57, 97, 348], Вебера и Уилера [193], Мардера [190—192, 349], Лихнеровича [89], Гейслера и Тредера [350—352], Компанейца [189, 353, 354], Переса [108, 160], Робинсона и Траутмана [129, 130], Пандья и Вайдья [164, 355—357], Сьямы [358], Боннора [359, 360], Фридлендера [361—363], Нордтведта и Пагельса [104], Кришны и Пандея [194—196, 364, 365], Харрисона [366], Лероя [367], Уаймэна и Троллопа [72, 73], Захарова [91, 101, 103, 105, 107, 170, 368], Иохари [154, 369], Мизры [370, 371], Бартрума [135], Фостера и Ньюмэна [138], Лала и Прасада [372], Дангву [159, 373], Гофмана [374], Дозморова [375—377], Сзекереса [378], Айхельбурга [379].

Приближенные волновые решения исследованы в работах Розена и Шамира [19], Боннора [11, 12, 17, 380—382], Пирани [383], Переса [384], Лиас [385], Мера, Вайдья и Кушваа [386], Меренбилда и Троллопа [387]. Общий метод построения приближенных волновых решений дается в работах Шоке — Брюа [388, 389].

Пятое направление составляют исследования, в которых гравитационные волны рассматриваются методами приближений: либо путем линеаризации уравнений тяготения (Эйнштейн [1, 2], Эддингтон [23], Матте [82], Дирак [390], Вавилов [391], Герценштейн и Пустовойт [392, 393], Боннор [6], Кармели [394], Куперсток [24, 243, 395], Ротенберг [21, 25, 29], Кэмпбелл [22]), либо путем представления уравнений тяготения в приближенной форме заданного порядка малости (Боннор [11, 12, 17, 396], Фок [9, 397], Инфельд [8, 398], Папапетру [399—401], Тоннела [402, 403], Айзексон и Виникур [37, 38, 44], Тредер [404], Куперсток [405], Унт [406, 407], Зерилли [408], Вишвешвара [179], Куч, Киннерсли и Торренс [180, 181]), либо, наконец, путем вывода волнового уравнения из видоизмененных («максвеллизированных») уравнений тяготения (Румер [409], Кроки [410], Мавридес [411, 412], Синг [413], Бергер [414]).

В исследованиях шестого направления рассматривается гравитационное излучение элементарных частиц. К ним относится прежде всего монография Станюковича [415], суммирующая ряд предыдущих работ автора в этой области (см. [416—419]), а также работы де Витта [420], Кундта и Томсона [186], Гальперна, Лорана и Дебранда [254, 421]. Ввиду того, что теория тяготения Эйнштейна неприменима к описанию микроскопических систем, Станюкович в своих работах заменяет уравнения Эйнштейна другими, с переменной «константой» тяготения. Как мы уже отмечали, работы этого направления не затрагиваются в тексте книги.

Работы седьмого направления посвящены вопросам экспериментального исследования гравитационных волн, в первую очередь задаче их обнаружения. В этой области работают Вебер [31, 95, 212, 227—229, 422—429], Брагинский, Руденко, Рукман [213, 237, 430—434], Герценштейн и Пустовойт [435, 436], Копвиллем и Нагибаров [247—251, 255, 256], Башков [437, 438], Мироновский [241, 439], Петров [306], Форвард и Берман [215], Хейнтцман [242], Винтерберг [244], Зипой и Бертотти [245], Дайсон [258, 259], Слабкий [440], Водяницкий и Диманштейн [465], Лаврентьев [252, 253], Докур [441], Мелош [225], Вик [442], Папини [443], Бокалетти, де Саббата, Гуальди и Фортини [444].

В ряде работ этого направления обсуждаются оценки мощности гравитационного излучения космических источников и перспективы его лабораторного исследования; это работы Уилера [36], Фаулера [445], Зельдовича и Новикова [34], Торна [30, 218—222, 446], Куперстока [32, 33], Кармели [35], Вебера [31], Бокалетти, де Саббаты, Гуальди и Фортини [239, 240], Вайнберга [447], Шкловского [216], Гринстейна [230], Кафки [232, 233, 448], Сьямы, Филда и Риса [231, 234, 235, 449], Кауфмана [450], Петерса [451], Аладдина и Састри [452], Чандрасекара [453—455], Езавы [456], Чоу и Хенриксена [457, 458].

Чисто астрофизический аспект задачи, в частности роль гравитационного излучения в балансе энергии космических объектов, получил в книге ограниченное освещение. Детальное изложение этого специального астрофизического вопроса стояло бы особняком в общем плане книги, посвященной прежде всего принципиальным теоретическим сторонам проблемы гравитационных волн. Сжатый обзор экспериментальных результатов и проблематики седьмого направления дан в заключительной главе 13.

Отдельную группу составляют работы, где обсуждается вопрос о скорости распространения гравитационных волн,— работы Финци [59], Арифова [459], Крживоблоцкого [460], Мицкевича [461]. Различным сторонам проблемы гравитационных волн посвящены обзоры Пирани [70, 71, 262], Сакса [148], Траутмана [131], Петрова [462], Бонди [463, 464] и др. (например, обзорная часть в работе [165]).

Отметим, наконец, что в основном список литературы включает работы, опубликованные до 1971 г.

ГЛАВА 1

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Линейное приближение

Тот факт, что радиационные и волновые процессы являются естественным элементом современной теории тяготения — общей теории относительности А. Эйнштейна, — наглядно выступает при рассмотрении случая слабого гравитационного поля, когда общая картина упрощается настолько значительно, что многие сложные понятия и соотношения этой теории приобретают вид, аналогичный хорошо исследованным понятиям и соотношениям классической теории поля. Хотя главным предметом нашего изложения является проблема инвариантного формулирования понятия гравитационных волн, само это изложение не было бы достаточно полным и мотивированным без предварительного анализа методов приближенного описания волнового гравитационного поля.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = -\lambda\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right) \tag{1.1}$$

впервые были рассмотрены в приближении слабого поля самим их автором [1, 2]. Здесь $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии — импульса «материи», т. е. вещества и всех полей, кроме гравитационного, $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ и λ — эйнштейновская гравитационная постоянная. Всюду в книге принято правило суммирования по повторяющимся индексам; греческие индексы пробегают ряд значений 0, 1, 2, 3, а для вспомогательного ряда 1, 2, 3 принято обозначение малыми латинскими индексами.

Если метрический тензор пространства — времени $g_{\alpha\beta}$ мало отличается от метрического тензора Минковского $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$,

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

то величины $h_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей. Будем предполагать, что и их частные производные имеют тот же порядок малости [1]):

$$h_{\alpha\beta,\mu} \sim h_{\alpha\beta,\mu\nu} \sim h_{\alpha\beta}. \tag{1.3}$$

Тогда в линейном по $h_{\alpha\beta}$ приближении тензор Римана — Кристоффеля имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx \frac{1}{2}(h_{\alpha\gamma,\beta\delta} + h_{\beta\delta,\gamma\alpha} - h_{\alpha\delta,\gamma\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha\delta}). \tag{1.4}$$

Находя отсюда выражение для тензора Риччи, запишем уравнения (1.1) в линейном приближении:

$$\frac{1}{2}(\overset{(00)}{g}{}^{\beta\delta}h_{\alpha\gamma,\beta\delta} + h_{,\alpha\gamma} - h^{\delta}_{\alpha,\gamma\delta} - h^{\delta}_{\gamma,\alpha\delta}) = -\lambda\left(T_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}T\overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}\right). \tag{1.5}$$

При этом был использован тот очевидный факт, что в линейном приближении

$$g^{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}, \quad h^{\alpha\beta} = h_{\sigma\tau}\overset{(00)}{g}{}^{\sigma\alpha}\overset{(00)}{g}{}^{\tau\beta}, \quad h = \overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.$$

Умножая уравнения (1.5) на $\overset{(00)}{g}{}^{\alpha\gamma}$, приходим к скалярному соотношению

$$\Box h + h^{\mu\nu}_{,\mu\nu} = -\lambda T, \tag{1.6}$$

---

[1]) Строго говоря, производные от $h_{\alpha\beta}$ разных порядков имеют определенные, причем различные, размерности, поэтому порядки малости их следовало бы оценивать по отношению к характерным линейным размерам (типа радиуса кривизны) пространства — времени фона. Но так как в данном случае оно является плоским (бесконечный радиус кривизны), то порядки малости первых и вторых производных в рассматриваемых приближениях можно считать одинаковыми. Для случая неплоской метрики фона такие оценки проводятся, например, в работах Айзексона, обсуждаемых ниже в этой главе.

где [1])

$$\Box = -\overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \Delta - \partial_0\partial_0 \tag{1.7}$$

есть оператор Даламбера специальной теории относительности, а Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \sum_i^3 \partial_i\partial_i. \tag{1.8}$$

Умножая уравнение (1.6) на $\overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}$ и подставляя в (1.5) получившееся выражение для $\lambda T\overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}$, приходим к системе уравнений, которую удобно представить в виде

$$\Box\psi_{\alpha\beta} + \psi^{\mu}_{\alpha,\beta\mu} + \psi^{\mu}_{\beta,\alpha\mu} - \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}\psi^{\mu\nu}_{,\mu\nu} = 2\lambda T_{\alpha\beta}, \tag{1.9}$$

где мы ввели величины

$$\psi_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}. \tag{1.10}$$

Систему уравнений (1.9) можно далее упростить, приняв во внимание, что в приближении слабого поля всегда можно удовлетворить условиям Гильберта [3, 4]:

$$\psi^{\beta}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{1.11}$$

Тогда уравнения поля приобретают стандартный вид

$$\Box\psi_{\alpha\beta} = 2\lambda T_{\alpha\beta}, \qquad \psi^{\beta}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{1.12}$$

Итак, уравнения Эйнштейна в линейном приближении являются волновыми уравнениями для потенциалов $\psi_{\alpha\beta}$, причем их правая часть описывает источники гравитацион-

---

[1]) Частные производные по координатам в большей части книги обозначаются индексами после запятой (например, $Q_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma} Q_{\alpha\beta}$), а ковариантные — индексами после точки с запятой (например, $Q_{\mu\nu;\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Q_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}Q_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}Q_{\mu\alpha}$), однако в тех параграфах, где была необходимость особо выделить операторную природу этих индексов, используются более наглядные обозначения типа $Q_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \equiv \partial_\gamma Q_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta;\gamma} \equiv \nabla_\gamma Q_{\alpha\beta}$. Все другие случаи специальных обозначений дифференцирования оговорены в тексте.

ного поля. Следовательно, в линейном приближении уравнения тяготения описывают распространение гравитационных волн с фундаментальной скоростью[1]) c $(x^0 = ct)$; условия (1.11) представляют собой аналог условия калибровочной инвариантности классической теории поля.

Выберем начало декартовой системы координат внутри объема V, занимаемого источниками. Пусть $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор произвольной точки P, лежащей вне объема V, $\boldsymbol{\xi}$ — радиус-вектор произвольной точки O внутри объема V. Общее решение системы уравнений (1.12) при нулевых начальных данных ($\psi_{\alpha\beta} = 0$ и $\psi_{\alpha\beta,0} = 0$ при $x^0 = 0$) имеет вид [2])

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_V \frac{T_{\alpha\beta}\left(\xi^i, t - |\boldsymbol{r}|\right)}{|\boldsymbol{r}|}\, d^3\xi^i, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$. Таким образом, решение уравнений Эйнштейна в линейном приближении дается запаздывающими потенциалами (1.13).

Разлагая в решении (1.13) подынтегральное выражение в ряд по степеням $|\xi|/|x|$, можно исследовать излучение материальной системы во всех порядках мультипольности. Соответствующие компоненты излучения характеризуются тензорами мультипольных моментов. Ранг s тензора 2^s-мультипольного момента, характеризующего распределение масс источников, определяется номером s соответствующего члена в разложении по мультиполям. Так, вводя следующие трехмерные тензоры (Боннор, [6]):

$$\begin{gathered}
M = \int\limits_V T_{00}\, dV, \qquad A_i = \int\limits_V T_{0i}\, dV, \qquad S_{ij} = \int\limits_V T_{ij}\, dV, \\
M_{kl\ldots m} = \int\limits_V T_{00}\,\xi_k\xi_l\cdot\cdot\cdot\xi_m\, dV, \\
A_{i|kl\ldots m} = \int\limits_V T_{0i}\xi_k\xi_l\cdot\cdot\cdot\xi_m\, dV, \\
S_{ij|kl\ldots m} = \int\limits_V T_{ij}\xi_k\xi_l\cdot\cdot\cdot\xi_m\, dV,
\end{gathered} \tag{1.14}$$

[1]) Всюду в книге используется система единиц, в которой $c = 1$; исключение составляет лишь начало параграфа 2 этой главы.

[2]) Математическая теория неоднородного уравнения Даламбера изложена, например, в книге Соболева [5].

и определяя через них соответствующие бесследовые тензоры мультипольных моментов

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_{kl} &= 3M_{kl} - \delta_{kl}M_{pp},\\
\hat{M}_{klm} &= 5M_{klm} - \delta_{kl}M_{ppm} - \delta_{lm}M_{kpp} - \delta_{mk}M_{plp},\\
\hat{A}_{i|k} &= 3A_{i|k} - \delta_{ik}A_{p|p}, \qquad (1.15)\\
\hat{S}_{ij|k} &= 5S_{ij|k} + \delta_{ij}(S_{kp|p} - 2S_{pp|k}) + \frac{1}{2}\delta_{ki}(S_{pp|j} - 3S_{jp|p}) +\\
&\quad + \frac{1}{2}\delta_{jk}(S_{pp|i} - 3S_{ip|p}),
\end{aligned}
$$

. . . .

можно выразить компоненты запаздывающих потенциалов ψ_α^β в виде бесконечных рядов по мультиполям:

$$
\begin{aligned}
\psi_{ij} &= -\frac{4\hat{S}_{ij}}{3|x|} - \frac{4x_k}{5|x|^2}\left(\dot{\hat{S}}_{ij|k} + \frac{\hat{S}_{ij|k}}{|x|} + \dots\right),\\
\psi_{0i} &= -\frac{4x_k}{3|x|^2}\left(\dot{\hat{A}}_{i|k} + \frac{\hat{A}_{i|k}}{|x|}\right) -\\
&\quad - \frac{2x_kx_l}{5|x|^3}\left(\ddot{\hat{A}}_{i|kl} + \frac{3\dot{\hat{A}}_{i|kl}}{|x|} + \frac{3\hat{A}_{i|kl}}{|x|^2}\right) + \dots, \qquad (1.16)\\
\psi_{00} &= -\frac{4M}{|x|} - \frac{2x_kx_l}{3|x|^3}\left(\ddot{\hat{M}}_{kl} + \frac{3\dot{\hat{M}}_{kl}}{|x|} + \frac{3\hat{M}_{kl}}{|x|^2}\right) -\\
&\quad - \frac{2x_kx_lx_m}{15|x|^4}\left(\dddot{\hat{M}}_{klm} + \frac{6\ddot{\hat{M}}_{klm}}{|x|} + \frac{15\dot{\hat{M}}_{klm}}{|x|^2} + \frac{15\hat{M}_{klm}}{|x|^3}\right) + \dots,
\end{aligned}
$$

где точки над символом обозначают дифференцирование по запаздывающему времени $t - \dot{r}$. Первый член разложения для ψ_{00}, очевидно, представляет собой ньютоновский гравитационный потенциал, тогда как последующие выписанные члены отвечают квадрупольному и октупольному моментам распределения масс. Отсутствие дипольного члена свидетельствует, в частности, о том, что сферически симметричная система источников не может излучать гравитационных волн. Таким образом, решение (1.16) волновых уравнений (1.12) описывает гравитационные волны в линейном приближении, причем первым «радиационным» членом в разложении потенциалов $\psi_{\alpha\beta}$ является квадрупольный член.

2. Приближения высших порядков

Для получения нелинейных приближений уравнений тяготения можно использовать классический метод аппроксимаций Эйнштейна — Инфельда — Гофмана [7], примененный впервые в исследованиях уравнений движения и основанный на разложении потенциалов гравитационного поля в ряд по малому параметру $1/c$ (c — фундаментальная скорость) [1]. В приложении к проблеме гравитационного излучения этот метод рассматривали Инфельд (см. [8]), Фок [9] и Боннор [6, 11]. Разложение по параметру $1/c$ позволяет получить в приближении нулевого порядка уравнения ньютоновской теории тяготения, что, в свою очередь, дает возможность существенно упростить рассмотрение приближений более высоких порядков. Так, подходящим выбором системы координат можно добиться, чтобы в разложении компонент $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-n} \underset{(n)}{h_{\mu\nu}} (x^\alpha)$$

первыми отличными от нуля членами были члены второго порядка малости для компонент h_{00} и h_{ij} и третьего порядка для компонент $h_{\ i}$.

Соответственно, для компоненты ψ_{00} первым отличным от нуля членом разложения будет $\underset{(2)}{\psi_{00}}$, для компонент ψ_{0i} — члены $\underset{(3)}{\psi_{0i}}$ и для ψ_{ij} — члены четвертого порядка малости $\underset{(4)}{\psi_{ij}}$. Уравнения поля в приближениях указанных порядков принимают вид

$$\Delta \underset{(2)}{\psi_{00}} = 2\lambda \underset{(0)}{T_{00}}, \qquad \Delta \underset{(3)}{\psi_{0i}} = 2\lambda \underset{(2)}{T_{0i}}, \qquad \Delta \underset{(4)}{\psi_{ij}} = 2\lambda \underset{(4)}{T_{ij}} + \underset{(4)}{N_{ij}}, \quad (1.17)$$

где $\underset{(4)}{N_{ij}}$ — нелинейные члены, впервые появляющиеся как аддитивные добавки к членам четвертого порядка малости.

Аналогичные уравнения, как показал Гупта [10] (см. также Боннор [11]), можно получить в приближении n-го порядка малости с помощью другого метода, основанного

[1] Формальной процедуре разложения по параметру $1/c$ отвечает фактическое разложение по безразмерному параметру типа U/c^2, где U — ньютоновский гравитационный потенциал, или по $^2/c^2$, где v — скорость движения одного из тел, образующих систему источников.

на разложении метрики $g_{\alpha\beta}$ и тензора энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$ в ряд по параметру λ (гравитационной постоянной):

$$g_{\alpha\beta}(x^\sigma, \lambda) = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{h}_{\alpha\beta}, \qquad T_{\alpha\beta}(x^\sigma, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{T}_{\alpha\beta}(x^\sigma),$$

где $\underset{(n)}{h}_{\alpha\beta}$ и $\underset{(n)}{T}_{\alpha\beta}$ не зависят от λ. Подставив эти разложения в уравнения поля, можно представить последние в форме равенств нулю аналитических функций, разложенных в ряд по λ. Приравнивая к нулю выражения, играющие роль коэффициентов по λ^n, мы получаем уравнения тяготения в приближении n-го порядка. Воспользовавшись снова определением (1.10) для компонент $\psi_{\alpha\beta}$, запишем (для $n \geqslant 2$) уравнения

$$\Delta \underset{(n)}{\psi}_{\alpha\beta} = 2\,[\underset{(n-1)}{T}_{\alpha\beta} - \underset{(n)}{N}_{\alpha\beta}], \tag{1.18}$$

где через $\underset{(n)}{N}_{\alpha\beta}$ обозначены нелинейные члены, зависящие только от комбинаций $\psi_{\alpha\beta}$ низшего порядка малости, чем n, и не зависящие от $\underset{(n)}{\psi}_{\alpha\beta}$ и λ. Уравнения (1.18) по определению принимаются за уравнения тяготения Эйнштейна в приближении n-го порядка (Хавас и Гольдберг [13, 14]).

В приближении произвольно высокого порядка уравнения типа (1.17) — (1.18) уже нельзя, вообще говоря, интерпретировать как волновые. Однако в случае островного распределения материи естественно предположить, что классическое понятие массы — энергии системы источников, используемое в линейном приближении, может быть применено и в приближениях более высокого порядка. Приняв это предположение, можно, исходя из решения уравнений тяготения произвольно высокого порядка, оценить соответствующее изменение энергии системы за характерный промежуток времени (например, за полный период 2^s-мультипольных осцилляций) с помощью псевдотензора энергии — импульса, определяющего перенос энергии гравитационными волнами в линейном приближении (Эддингтон [15], Ландау и Лифшиц [16]).

Другим методом оценки потерь энергии $\Delta m = m_2 - m_1$ может служить сравнение с полем Шварцшильда, если стационарные состояния системы в моменты t_1 и t_2, отвечающие значениям массы m_1 и m_2, можно описать решением Шварцшильда. Этот метод применим, очевидно, только к таким распределениям источников (и таким системам отсчета), которые допускают переход к метрике Шварцшильда на достаточно больших расстояниях от системы источников поля. Тогда изменение Δm массы системы за период осцилляции $\Delta t = t_2 - t_1$ можно интерпретировать как следствие переноса энергии гравитационными волнами.

С этой целью Боннором и Ротенбергом [17, 18], в применении к источникам островного типа (в вакууме $T_{\alpha\beta} = 0$), был предложен так называемый *метод двухпараметрических аппроксимаций*, обобщающий изложенный выше метод разложения метрики в ряд по степеням гравитационной постоянной. Если в качестве параметра вместо гравитационной постоянной λ использовать величину m, характеризующую полную массу системы, а в качестве еще одного параметра, естественно возникающего при определении мультипольных осцилляций системы, выбрать характерный параметр системы a с размерностью длины, то решение уравнений тяготения, разложимое в сходящийся ряд Тейлора по m и a в окрестности $m = 0$ и $a = 0$, может быть представлено в виде

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} m^p a^s \overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}, \tag{1.19}$$

где коэффициенты $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ не зависят от m и a. Обычное разложение по степеням гравитационной постоянной λ эквивалентно разложению по единственному параметру m $(s = 0)$.

Подставляя это разложение в уравнения поля в вакууме

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

и приравнивая к нулю коэффициенты разложения при $m^p a^s$, получаем систему 10 дифференциальных уравнений второго порядка, называемую «уравнениями поля в ps-приближении»:

$$\overset{(ps)}{\Phi}_{\alpha\beta} (g_{\mu\nu}) = \overset{(ps)}{\Psi}_{\alpha\beta} (\overset{(qr)}{g}_{\mu\nu}) \qquad (q \leqslant p - 1,\ r \leqslant s). \tag{1.20}$$

Левые части их линейны по $\overset{(ps)}{g}_{\mu\nu}$ (и их производным), а правые части — нелинейны по $\overset{(qr)}{g}_{\mu\nu}$ (и их производным), известным уже из приближения предшествующего порядка.

Очевидно, приближение 00 отвечает метрике плоского пространства — времени: $g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$. Все приближения порядка $1s$ линейны и однородны по $\overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta}$ и их производным:

$$\overset{(1s)}{\Psi}_{\alpha\beta} = 0$$

и, следовательно, эквивалентны рассмотренным выше приближениям Эйнштейна — Инфельда — Гофмана. Приближения ps-порядков с $p \geqslant 2$ нелинейны: $2s$-приближения отвечают второму порядку малости ($s = 0, 1, 2, \ldots$), $3s$-приближения — третьему порядку ($s = 0, 1, 2, \ldots$) и т. д.

Решение уравнений тяготения в линейном приближении в виде разложения в ряд по мультиполям дается формулами (1.16). В принятых нами обозначениях (1.19) оно может быть записано в виде

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + \sum_{s=0}^{\infty} ma^s \overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta},$$

где дипольные члены отсутствуют ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$), монопольные члены $\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$ (т. е. статическая часть, $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + m\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$) отвечают линейному приближению к метрике Шварцшильда, а члены $\overset{(12)}{g}_{\alpha\beta}, \overset{(13)}{g}_{\alpha\beta}, \ldots, \overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta}, \ldots$ называются, соответственно, квадрупольными, октупольными,..., 2^s-мультипольными волновыми решениями в приближениях $1s$-порядков. Это отвечает определению 2^s-мультипольного момента аксиально симметричной системы источников, линейно распределенных вдоль оси симметрии,

$$Q^{(s)}(u) = ma^s h^{(s)}(u), \tag{1.21}$$

где $u = t - r$, а коэффициенты $h^{(s)}(u)$ не зависят от m и a.

Для определения порядка приближения, в котором изолированная система источников обнаруживает вековое изменение массы вследствие излучения гравитационных волн, рассмотрим нестационарную систему, допускающую (при $a \to 0$) предельный переход к стационарному полю точечного источника (полю Шварцшильда). Наиболее простой системой такого рода является аксиально симметричное распределение конечной длины [1]), описываемое (в сферических координатах r, θ, φ, t) метрикой

$$ds^2 = -A\,dr^2 - r^2\,(B\,d\theta^2 + C\sin^2\theta\,d\varphi^2) + D\,dt^2, \tag{1.22}$$

где A, B, C, D — функции r, θ, t. Записывая для этой метрики уравнения поля (1.20) в ps-приближении и интегрируя их (Розен и Шамир [19], Боннор [17]), получаем:

$$\begin{aligned}\Box A = P - \int (M_1 + r^{-1}M)\,dt - \\ - \int \left\{(L_1 + r^{-1}L) - \int (N_{11} + r^{-1}N_1)\,dt\right\} d\theta - (\eta_1 + r^{-1}\eta) + \\ + \int (\sigma_{11} + r^{-1}\sigma_1)\,d\theta - (\chi_1 + r^{-1}\chi),\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}C = -A\operatorname{coses}^2\theta \int \Big[2A + r^{-1}\int\Big\{2A + r\Big(\int M\,dt + \eta\Big)\Big\}\,dr + \\ + r^{-1}\tau\Big]\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \operatorname{cosec}^2\theta\int\Big(\int N\,dt + \sigma\Big)\sin^2\theta\,d\theta + \mu\operatorname{cosec}^2\theta,\end{aligned}$$

$$B = -C + r^{-1}\int\Big\{2A + r\Big(\int M\,dt + \eta\Big)\Big\}\,dr + r^{-1}\tau,$$

$$D = A + r\int\Big[2r^{-2}A + r^{-1}\Big\{\int\Big(L - \int N_1 dt - \sigma_1\Big)d\theta + \chi\Big\}\Big]dr + r\nu,$$

где $\Box$ — оператор Даламбера в координатах r, θ, φ, t; P, M, L и N — правые (нелинейные) части уравнений (1.20), предполагаемые известными из qr-приближения ($q \leqslant p - 1$, $r \leqslant s$):

$$P = \Psi_{11}, \quad M = \Psi_{10}, \quad L = \Psi_{12}, \quad N = \Psi_{20};$$

для остальных значений индексов α и β уравнения (1.20) обращаются в тождества; наконец, $\eta(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta)$, $\chi(r, t)$, $\tau(\theta, t)$, $\nu(\theta, t)$, $\mu(r, t)$ — шесть функций интегрирования, выбором которых можно удовлетворить требованию евклидовости на бесконечности и добиться отсутствия сингулярности метрики на оси симметрии. Индекс 1 в уравнениях (1.23) обозначает дифференцирование по r.

---

[1]) Примером такой системы являются две равные точечные массы, соединенные пружиной и совершающие симметричные осцилляции.

Таким образом, решение уравнений ps-приближения для метрики (1.22) сводится к интегрированию неоднородного волнового уравнения для функций $\overset{(ps)}{A}$, после чего из остальных соотношений системы (1.23) автоматически следуют выражения для $\overset{(ps)}{C}$, $\overset{(ps)}{B}$ и $\overset{(ps)}{D}$. В частности, для линейного приближения $1s$-порядка функции P, M, N и L оказываются равными нулю в силу (1.20), и мы получаем рассмотренное выше однородное волновое уравнение для функций $\psi_{\alpha\beta}$.

Величина изменения энергии системы источников в ps-приближении оценивается методом Бонди [20], основанным на разложении коэффициентов $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ в ряд по обратным степеням параметра r:

$$\sum_{n=1}^{l} r^{-n} \overset{(n)}{\delta}(\theta, u) \qquad (u = t - r). \tag{1.24}$$

Гравитирующую массу системы можно оценить, установив соответствие между данным стационарным решением и эквивалентным полем, которое создавалось бы некоторой шварцшильдовской массой; в членах $\overset{(ps)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ достаточно ограничиться коэффициентами при $1/r$, а в членах $\overset{(ps)}{\Phi}_{\alpha\beta}$ уравнений (1.20) — соответственно коэффициентами порядка не выше $1/r^3$. При этом нужно учитывать только члены, описывающие вековое изменение состояния системы за период Δt, отвлекаясь от членов $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$, которые не изменили своего вида в результате осцилляции. Так, все члены $\overset{(p0)}{g}_{\alpha\beta}$ описывают только постоянную (не меняющуюся за период осцилляции) составляющую поля системы, т. е. приближение $p0$-порядка к собственно метрике Шварцшильда (полю центральной массы m, для которой линейный размер $a = 0$). Отсюда, в частности, легко понять, почему разложения только по параметру m или λ не описывают гравитационных волн.

Нелинейные члены порядка $\overset{(21)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ могут содержать только комбинации вида

$$\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$$

и, следовательно, обращаются в нуль ввиду отсутствия дипольных членов ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$). Поэтому достаточно применить разложение (1.24) только к членам порядка $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ при $s \geqslant 2$. Но Ротенберг показал [21], что для изолированной аксиально симметричной системы источников в приближении $1s$-порядка энергия и импульс, определяемые псевдотензором $t^{\alpha\beta}$, сохраняются¹). Отсутствие векового изменения массы в приближениях 22- и 23-порядков легко обнаружить, разложив соответствующие коэффициенты $\overset{(22)}{g}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(23)}{g}_{\alpha\beta}$ в ряд типа (1.24) и оценив выражения для $\overset{(22)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(23)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ в приближении $1/r$.

Таким образом, наинизшим приближением, которое может дать вклад в вековое изменение массы системы, является приближение 24-порядка. Строгое решение уравнений 24-приближения осуществили Хюнтер и Ротенберг [27]. В нелинейные члены $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ должны входить комбинации вида

$$\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(14)}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(13)}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{(12)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(12)}{g}_{\alpha\beta},$$

из которых лишь последняя (квадруполь-квадрупольное излучение) может дать вековой вклад в изменение массы. Действительно, вторая из них тождественно исчезает ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$), а для первой (монополь — 2^4-мультипольное излучение) правые части $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ уравнений (1.20) не содержат вековых членов порядка $1/r$. Напротив, для квадруполь-квадрупольного излучения функции $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ уже содержат вековые члены порядка $1/r$, что приводит к изменению шварцшильдовской массы Δm за период осцилляций:

$$\Delta m = -\frac{2}{15}(\alpha - \beta) \int\limits_T [\overset{(2)}{Q}{}'''(u)]^2 \, du, \tag{1.25}$$

¹) Напротив, уже в приближении ($1s$) можно показать, что изолированная система источников теряет момент импульса вследствие излучения гравитационных волн (Кэмпбелл [22]). Для сравнения отметим, что, в отличие от рассматриваемой системы, стержень, вращающийся вокруг ортогональной к нему оси симметрии, в приближении $1s$-порядка теряет за счет гравитационного излучения не только энергию (Эддингтон [23]), но и импульс (Куперсток [24], Ротенберг [25]), а также, за счет октупольных гравитационных волн, момент импульса (Куперсток и Бут [26]).

где $\overset{(2)}{Q}(u)$ — квадрупольный момент (1.21) системы, штрих обозначает дифференцирование по параметру $u = t - r$, а α и β — параметры, характеризующие нестационарность системы ($\alpha + \beta = 1$). Из формулы (1.25) следует, что система не излучает энергию только в строго стационарном случае $\alpha = \beta = {}^1/_2$, либо при осцилляциях весьма специального типа, характеризуемых условием $\overset{(2)}{Q}'''(u) = 0$. Оценка потерь массы — энергии по этой формуле, как оказывается, в точности совпадает с оценкой, получаемой при помощи псевдотензора энергии — импульса в линейном приближении (Ротенберг [28]) [1]).

3. Критика методов приближений

Существенный недостаток рассмотренных методов приближенного анализа волновых гравитационных полей (методы Боннора — Ротенберга, Эйнштейна — Инфельда — Гофмана, Фока, Бонди) состоит в том, что в нулевом приближении рассматривается метрика плоского пространства — времени $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$, отвечающая отсутствию поля тяготения. Поправка к метрике при этом играет роль бесконечно малой заданного порядка и поэтому может описывать лишь слабые гравитационные поля. Эти методы, следовательно, позволяют определить состояние только слабого гравитационного излучения и только на фоне плоского пространства — времени.

Однако данные современных астрономических наблюдений указывают на возможность существования в космосе источников весьма сильных гравитационных волн. Так, по подсчетам Торна [30], нейтронная звезда, испытывающая колебательные возмущения (пульсации) не-

---

[1]) Рассмотренный метод двухпараметрических аппроксимаций Боннора может быть обобщен и на случай непустого пространства—времени. Так, Ротенберг [29] получил решение уравнений ps-приближения для пространств, заполненных электромагнитным излучением. Соответствующее неоднородное волновое уравнение в ps-приближении для метрики (1.22) описывает гравитационное и электромагнитное излучения. Метод Боннора был развит также для изолированных аксиально симметричных полей тяготения более общего вида, чем распределение с метрикой (1.22) (Ротенберг [21]). Однако гравитационное излучение произвольных изолированных аксиально симметричных систем удобнее рассматривать на основе общего метода, предложенного Бонди, Метцнером и Ван дер Бургом (см. гл. 11).

сферического характера, может за счет излучения гравитационных волн терять энергию порядка 10^{51} *эрг* (0,1% массы покоя самой звезды) в течение одного периода пульсаций (10^{-4}—10^{-3} *сек*). Аналогичные оценки мощности были получены Вебером [31] для пульсаров, Куперстоком [32, 33] для квазаров и для двойных звезд, Зельдовичем и Новиковым [34] для коллапсировавших звезд, Кармели [35] для тормозного гравитационного излучения Солнца и Уилером [36] для Метагалактики. Кроме того, следует ожидать, что в реальных полях тяготения не только гравитационные волны могут создавать сильное возмущение метрики пространства — времени, но и сама метрика фона может отвечать сильному полю тяготения.

Значительный шаг вперед на пути преодоления этой трудности сделал Айзексон [37, 38], применив метод аппроксимаций Брилла — Хартла [39] к описанию так называемых гравитационных волн «высокой частоты», распространяющихся на фоне сильно искривленного пространства—времени. Идея метода основана на разложении величин $h_{\mu\nu}$, т. е. добавочной части к метрике фона $\gamma_{\mu\nu}$, в ряд по степеням малости отношения $\varepsilon = l/L$, где l — характерный размер волнового возмущения (интерпретируемый как его «длина волны»), а L — характерный размер гравитационного поля фона, условно сопоставляемый «радиусу кривизны» фонового пространства — времени [1]). Этот метод является обобщением рассмотренного выше метода Боннора. Так как ε имеет порядок $(l^2m/r^3)^{1/2}$, то гравитационное излучение изолированной системы на больших расстояниях r от нее всегда можно рассматривать как «высокочастотное излучение», отвечающее случаю $L \to \infty$.

Согласно строгому определению, пространство — время V_4 с метрикой $g_{\mu\nu}$ описывает гравитационные волны высокой частоты, если оно допускает однопараметрическое семейство координатных систем, связанных между собой инфинитезимальными преобразованиями группы Ли G с параметром ε, в которых $g_{\mu\nu}$ принимает вид

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) + \varepsilon h_{\mu\nu}(x, \varepsilon) \qquad (\varepsilon \ll 1), \qquad (1.26)$$

---

[1]) Малость отношения $\varepsilon = l/L$ и интерпретируется как относительная коротковолновость (высокочастотность) бегущего возмущения $h_{\mu\nu}$, т. е. волны на фоне искривленного пространства — времени.

где

$$\gamma_{\mu\nu} = O(1), \qquad \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu} = O(1), \qquad \partial_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu} = O(1), \tag{1.27}$$

$$h_{\mu\nu} = O(1), \qquad \partial_\alpha h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-1}), \qquad \partial_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-2}). \tag{1.28}$$

Условия (1.27) означают, что кривизна метрики фона $\gamma_{\mu\nu}$ имеет порядок малости единица, т. е. фоновое пространство — время является искривленным и его тензор Римана

$$R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\mu\nu}) = 0.$$

Однако из условий (1.28) следует, что полная кривизна пространства V_4 по порядку величины может даже превосходить кривизну фона

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) = R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \ldots, \tag{1.29}$$

где

$$R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\gamma;\beta\delta} + h_{\beta\delta;\alpha\gamma} - h_{\beta\gamma;\alpha\delta} - h_{\alpha\delta;\beta\gamma} + R^{(0)}_{\alpha\sigma\gamma\delta} h^{\sigma}_{\beta} - R^{(0)}_{\beta\sigma\gamma\delta} h^{\sigma}_{\alpha}\right).$$

Здесь ковариантное дифференцирование выполняется относительно метрики фона $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которой производится поднятие и опускание индексов. В разложении (1.29) второй член

$$\varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(\varepsilon^{-1})$$

по порядку величины превалирует над остальными, так как, например,

$$\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(1), \qquad \varepsilon^3 R^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(\varepsilon)$$

и т. д. Аналогично, для тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$ полной метрики получаем разложение

$$R_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) = R^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots,$$

где

$$R^{(0)}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\nu}),$$

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho\tau}\left(h_{\rho\tau;\alpha\beta} + h_{\alpha\beta;\rho\tau} - h_{\tau\alpha;\beta\rho} - h_{\tau\beta;\alpha\rho}\right),$$

причем превалирующим по порядку величины также является второй член

$$\varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta} \approx O(\varepsilon^{-1}),$$

тогда как

$$\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta} \approx O(1).$$

Отсюда следует, что уравнения поля в вакууме в приближении первого порядка будут иметь вид

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.30}$$

в приближении второго порядка — вид

$$R^{(0)}_{\alpha\beta} = -\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta}, \tag{1.31}$$

и т. д. Вводя величины

$$\hat{\psi}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}h, \qquad \hat{\psi} = \gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\alpha\beta},$$

где $h \equiv \gamma^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, можно представить уравнения (1.30) первого приближения в виде

$$\gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\mu\nu;\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{;\alpha\beta} - \hat{\psi}^{\beta}_{\mu;\nu\beta} - \hat{\psi}^{\beta}_{\nu;\mu\beta} + 2R^{(0)}_{\sigma\nu\mu\beta}\hat{\psi}^{\beta\sigma} + \\ + R^{(0)}_{\mu\sigma}\hat{\psi}^{\sigma}_{\nu} + R^{(0)}_{\nu\sigma}\hat{\psi}^{\sigma}_{\mu} = 0, \tag{1.32}$$

где ковариантное дифференцирование выполняется также относительно $\gamma_{\mu\nu}$. Для случая слабого гравитационного поля, определяемого метрикой (1.2), функции $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ переходят в ранее введенные функции $\psi_{\mu\nu}$.

Чтобы привести уравнение (1.32) к стандартному виду волнового уравнения относительно потенциалов $\hat{\psi}_{\mu\nu}$, необходимо показать, что второй, третий и четвертый члены в этом уравнении могут быть устранены преобразованием «калибровки», т. е. выбором подходящего генератора ξ^{μ} группы Ли G, индуцирующей допустимые преобразования

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}$$

и не меняющей первого члена в (1.32).

Для доказательства воспользуемся формулами, выражающими связь тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ с увлеченными тензорами [40] $\bar{R}_{\alpha\beta}$ и $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\bar{R}^{(1)}_{\alpha\beta} = R^{(1)}_{\alpha\beta} - \mathcal{L}_{\xi}R^{(0)}_{\alpha\beta}, \qquad \bar{R}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathcal{L}_{\xi}R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $\mathcal{L}_\xi$ — символ производной Ли в направлении генератора ξ^α группы G. Пользуясь формулами для производных Ли от тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см., например, [41]), можно показать, что величины $\mathcal{L}_\xi R^{(0)}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{L}_\xi R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — второго порядка малости по ε, т. е. в приближении высокой частоты ($\varepsilon \to 0$) тензоры $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не меняются при преобразованиях группы G («калибровочно-инвариантны», [37]). Используя закон преобразования величин $\hat\psi^\alpha_{\mu;\alpha}$ и $\hat\psi^\alpha_\alpha$ при инфинитезимальных преобразованиях группы G ($x^\alpha \to x^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha$):

$$\hat\psi^\alpha_{\mu;\alpha} \to \hat\psi^\alpha_{\mu;\alpha} - \gamma^{\alpha\beta}\xi_{\mu;\beta} + R^{(0)}_{\mu\alpha}\xi^\alpha,$$

$$\hat\psi \to \hat\psi + 2\xi^\alpha_{;\alpha},$$

выберем ξ^μ так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\gamma^{\alpha\beta}\xi_{\mu;\alpha\beta} - R^{(0)}_{\mu\alpha}\xi^\alpha = \hat\psi^\alpha_{\mu;\alpha}, \qquad \xi^\alpha_{;\alpha} = -\frac{1}{2}\hat\psi^\alpha_\alpha.$$

Тогда, очевидно, в новой координатной системе будут выполнены условия

$$\hat\psi^\alpha_{\mu;\alpha} = 0, \qquad \hat\psi = 0,$$

приводящие уравнения (1.32) к искомому виду

$$-\Delta\hat\psi_{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\hat\psi_{\mu\nu;\alpha\beta} + 2R^{(0)}_{\sigma\mu\nu\beta}\hat\psi^{\sigma\beta} + R^{(0)}_{\mu\sigma}\hat\psi^\sigma_\nu + R^{(0)}_{\nu\sigma}\hat\psi^\sigma_\mu = 0. \tag{1.33}$$

В случае плоской метрики фона, $\gamma_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu}$, в силу равенства $R^{(0)}_{\delta\mu\nu\beta} = 0$ все добавочные к $\gamma^{\alpha\beta}\hat\psi_{\mu\nu;\alpha\beta}$ члены исчезают, и мы возвращаемся к ранее рассмотренному волновому уравнению (1.12). Для неплоской метрики $\gamma_{\mu\nu}$ левая часть уравнения (1.33) представляет собой обобщенный топологический даламбертиан де Рама [42], легший в основу определения волновых гравитационных полей [1]), предложенного Лихнеровичем [43].

Таким образом, гравитационное излучение на фоне искривленного пространства — времени получает изящное определение в пределе высокой частоты.

---

[1]) Строгий подход к определению гравитационных волн на основе оператора де Рама рассматривается в гл. 8.

Подход Айзексона устраняет две существенные трудности в поисках определения гравитационных волн, справедливого в приближении заданного порядка. Первая из них, как говорилось выше, была связана с необходимостью предполагать слабость гравитационного поля, обусловленного волновым возмущением. Вторая была сопряжена с предположением о плоском характере метрики фона. В результате методы аппроксимаций были применимы лишь к асимптотически плоским гравитационным полям (в частности, к полям островных источников).

Однако метод Айзексона — Брилла — Хартла, как и другие описанные выше методы, не преодолевает еще одной трудности, присущей всем попыткам дать определение гравитационных волн, отправляясь от метода приближений: отсутствует доказательство сходимости ряда последовательных приближений. Так, метод Боннора основан на предположении о сходимости ряда (1.19) в окрестности $m = 0$ и $a = 0$, что, однако, не обеспечивает его сходимости на достаточно больших расстояниях от системы источников. Как показал Фок [9], при разложении подынтегрального выражения (1.13) для волновых функций $\psi^{\alpha\beta}$ достаточно хорошая сходимость ряда обеспечивается лишь для «умеренно больших» расстояний r: именно, для расстояний, больших по сравнению с размерами системы источников, но малых по сравнению с длиной испускаемых ею волн. Что же касается «волновой зоны», т. е. области, удаленной от источников на расстояния, большие по сравнению с длиной испускаемых волн, то в ней сходимость ряда приближений, вообще говоря, нельзя однозначно гарантировать. Между тем именно этот случай и составляет область применимости метода Айзексона — Брилла — Хартла. Критичность ситуации усугубляется еще отсутствием надежных экспериментальных данных о свойствах гравитационных волн, вследствие чего желательность строгого доказательства сходимости рядов последовательных приближений в волновой зоне становится особенно настоятельной.

Наконец, каждый из рассмотренных методов приближений предполагает выбор определенной системы координат (или класса допустимых систем координат), существование которых не может быть гарантировано a priori в заданном поле тяготения. Так, например, при рассмотрении гравитационного излучения изолированной аксиально симметричной системы тел методом Бонди оказывается неприменимой гармоническая система координат, которая, наоборот, успешно применялась В. А. Фоком к описанию гравитационных волн методом разложения потенциалов в ряд по параметру $1/c$. Причиной этому служит появление логарифмического члена $r^{-1} \log r$ вместо $1/r$ в разложении гравитационных потенциалов, что исключает предельный переход к метрике Шварцшильда (Боннор [11], Айзексон и Виникур [44]). Вследствие этого для достаточно больших расстояний от изолированного источника гравитационного излучения волновое решение линеаризованной теории тяготения в гармонических координатах не может служить первым приближением к точному волновому решению, хотя на расстояниях, значительно меньших длины распространяющейся волны, это описание оказывается удовлетворительным [45, 46].

Между тем уравнения поля тяготения общековариантны. Поэтому всякое физическое следствие теории должно допускать общековариантную формулировку. В связи с этим нашей ближайшей задачей будет рассмотрение строгих общековариантных методов описания гравитационных волн. В качестве отправного пункта мы рассмотрим проблему Коши для уравнений тяготения Эйнштейна.

В дальнейшем будет удобно отличать понятие *гравитационных волн* от понятия *гравитационного излучения*. С гравитационными волнами мы будем связывать поле в собственно волновой зоне, где оно не взаимодействует с источниками. «Гравитационным излучением» мы будем чаще называть общее гравитационное поле источника, порождающего волны. В случае пустого пространства — времени гравитационные волны мы будем называть *свободными*.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

1. Уравнения Эйнштейна как система гиперболического типа

Строгая постановка проблемы гравитационных волн в общей теории относительности стала возможна лишь после того, как де Дондер [47] и Ланцош [48] доказали, что система уравнений Эйнштейна — это система гиперболического типа, т. е. что ее характеристики совпадают с характеристиками волнового уравнения вида [1])

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi)=0. \qquad (2.1)$$

Действительно, уравнения Эйнштейна в пустом пространстве

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.2)$$

можно тождественными преобразованиями (см., например, [9]) привести к виду

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\nu} - L_{\mu\nu} = 0, \qquad (2.3)$$

где введены обозначения

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma_\rho, \qquad (2.4)$$

$$\Gamma_\rho = g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma, \quad \Gamma^\sigma = -g^{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}, \qquad (2.5)$$

так что члены $L_{\mu\nu}$ выражаются только через компоненты метрического тензора и их первых производных:

$$L_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}g_{\mu\sigma,\beta}g_{\rho\nu,\alpha} - g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma_{\mu\rho\sigma}\Gamma_{\nu\alpha\beta}. \qquad (2.6)$$

Перейдем в данной области пространства — времени в специальную систему координат, выбрав в качестве новых x^σ четыре решения уравнения (2.1):

$$\Box x^\sigma = \Gamma^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,g^{\sigma\beta})_{,\beta} = 0. \qquad (2.7)$$

Такую систему принято называть *гармонической системой координат.* В ней уравнения (2.2) примут вид

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\alpha\beta} - L_{\mu\nu} = 0. \qquad (2.8)$$

Как известно, характеристики системы уравнений в частных производных определяются только коэффициентами при высших производных. В нашем случае такими чоэффициентами служат сами компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$. Но матрицу $g^{\alpha\beta}$ можно в любой точке пространства — времени неособенным преобразованием коор-

[1]) Всюду далее значок даламбертиана понимается в смысле, указанном формой (2.1).

динат привести к каноническому виду, характеризующемуся сигнатурой (+, —, —, —). Тем самым доказано, что система квазилинейных уравнений (2.2) есть система гиперболического типа (см. [49], стр. 61).

2. Разрыв Адамара

В классической теории дифференциальных уравнений с частными производными (см., например, [50]) распространение волны в пространстве характеризуется *разрывом Адамара* в решении уравнений на начальной гиперповерхности S. Как мы увидим ниже, гиперповерхность S разрыва функций поля (их производных), называемая *поверхностью фронта волны*, является характеристической гиперповерхностью уравнений поля. Поэтому нашей ближайшей задачей будет определение характеристических многообразий («характеристик») уравнений Эйнштейна. Однако прежде, чем применить понятие разрыва Адамара непосредственно к уравнениям Эйнштейна, мы проиллюстрируем его на примере скалярного уравнения (2.1).

Пусть в каждой из окрестностей 1 и 2, на которые поверхность S делит рассматриваемую область пространства — времени, функция ψ непрерывна и при стремлении x^α к некоторой точке $P_0\,(x^\alpha_{(0)})$ поверхности S соответственно из окрестностей 1 и 2 стремится к пределам $\psi^{(0)}_{(1)}$ и $\psi^{(0)}_{(2)}$. Тогда разрывом Адамара функции ψ на поверхности S называется следующая функция точки P_0:

$$[\psi]\,(P_0) \equiv \psi^{(0)}_{(1)} - \psi^{(0)}_{(2)}. \tag{2.9}$$

Пусть теперь функция ψ непрерывна всюду вблизи S, но некоторые из ее первых частных производных $\psi_{,\alpha}$ имеют конечные разрывы на S:

$$[\psi] = 0, \;\; [\psi_{,\alpha}] \neq 0. \tag{2.10}$$

Построим полные дифференциалы $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ на S:

$$d\psi_{(1)} = \psi_{(1),\,\alpha} dx^\alpha, \qquad d\psi_{(2)} = \psi_{(2),\,\alpha} dx^\alpha.$$

Существование и непрерывность их доказал Адамар [51], рассмотрев предельный переход к S из окрестностей 1 и 2. Вычитая их один из другого, получаем, вследствие (2.10) и непрерывности $d\psi$ на S:

$$(\psi_{(1),\,\alpha} - \psi_{(2),\,\alpha})\, dx^\alpha = [\psi_{,\alpha}]\, dx^\alpha = 0. \tag{2.11}$$

Пусть поверхность S задана уравнением $\varphi(x^\alpha) = 0$. Для $\partial_\alpha\varphi$ — вектора нормали к поверхности S—имеет место соотношение

$$\varphi_{,\alpha}dx^\alpha = 0, \tag{2.12}$$

если приращение dx^α принадлежит поверхности S. Сравнивая (2.11) и (2.12), приходим к выводу о пропорциональности $[\psi_{,\alpha}]$ и $\varphi_{,\alpha}$:

$$[\psi_{,\alpha}] = \chi\varphi_{,\alpha}. \tag{2.13}$$

Если первые производные функции ψ непрерывны, то можно аналогичным образом показать, что разрывы вторых производных будут выражаться формулой

$$[\psi_{,\alpha\beta}] = \chi\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}, \tag{2.14}$$

и т. д. (см. Адамар [51], стр. 81—89).

Итак, проблему исследования гравитационных волн как решений уравнений Эйнштейна следует связать с решением задачи Коши для системы квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа в неаналитических функциях; иными словами, следует предполагать, что коэффициенты уравнений, начальные данные и само решение могут быть функциями конечного порядка гладкости C^r, а производные от этих функций более высокого порядка, чем r, претерпевают разрыв Адамара на некоторых гиперповерхностях. (Функция ψ называется функцией класса C^r, если она имеет непрерывные частные производные до порядка r включительно.) Если ψ — функция класса C^{r-1} в окрестности некоторой гиперповерхности S, а ее производные порядка r имеют на S разрыв Адамара, то ψ называется кусочно-гладкой функцией класса C^r, или функцией класса C^r «на кусках» [1]).

Решение задачи Коши зависит не только от класса гладкости функций, в которых заданы начальные данные и ищется решение, но и от характера начальной гиперповерхности S. Именно: решения задачи оказываются существенно различными в зависимости от того, является ли гиперповерхность S *свободной* или *характеристической* [2]).

[1]) Par morceaux («на кусках») — в оригинальной терминологии Лихнеровича (см. [52], стр. 27—35).

[2]) Для общего случая постановку задачи Коши и определение свободной и характеристической гиперповерхности можно найти в монографиях Петровского [49], а также Берса, Джона и Шехтера [53].

В важном для нас случае уравнений Эйнштейна (2.2) задача Коши формулируется следующим образом:

Пусть на начальной гиперповерхности S, выражающейся уравнением вида

$$S: \quad \varphi(x^\alpha) = 0, \tag{2.15}$$

заданы функции $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ и их первые производные $g_{\alpha\beta,\rho}(x^\sigma)$; требуется найти функции $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ вне S при условии, что на S они сами и их первые производные совпадают с заданными функциями, причем и на S, и вне S искомые $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (2.2).

В проведенном Лихнеровичем анализе задачи Коши для уравнений Эйнштейна большую роль сыграл выбор удобной системы координат. В дальнейшем мы будем предполагать, что система координат — *гармоническая*, так что уравнения (2.2) принимают вид (2.8), а начальные данные подчиняются условию

$$\Gamma^\sigma = 0.$$

Точное решение задачи Коши для уравнений Эйнштейна в гармонических координатах было дано Лихнеровичем в работе [54], которой мы в дальнейшем и будем придерживаться.

В рамках условия гармоничности во всей области пространства — времени, где ищется решение задачи Коши, в бесконечно малой окрестности гиперповерхности S можно выбрать такие координаты x^σ, в которых ее уравнение приводится к виду

$$\varphi(x^\alpha) = x^0 = 0. \tag{2.16}$$

Из постановки задачи Коши легко видеть, что в проблеме гравитационных волн нас должно интересовать ее решение в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) при достаточно гладких (но неаналитических) начальных данных. Иными словами, компоненты $g_{\mu\nu}$ и их первые производные $g_{\mu\nu,\sigma}$ будут непрерывны на гиперповерхности S, а какие-то из вторых производных метрики, $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$, должны претерпевать на S разрыв Адамара. Определим, какие из вторых производных $g_{\mu\nu}$ могут иметь разрыв на гиперповерхности S, заданной уравнением (2.16). Согласно формуле Адамара (2.14), разрывы вторых производных можно выразить в виде

$$[g_{\mu\nu,\alpha\beta}] = a_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}, \tag{2.17}$$

где $a_{\mu\nu}$ — так называемые «коэффициенты разрывности» (см. также работы Траутмана [55] и Беля [56]). Отсюда вытекает, что из вторых производных от $g_{\mu\nu}$ на гиперповерхности S разрыв могут терпеть только $g_{\mu\nu,00}$:

$$[g_{\mu\nu,00}] = a_{\mu\nu}. \tag{2.18}$$

Но среди этих производных производные от $g_{0\alpha}$ не входят в уравнения Эйнштейна. Поэтому для нас важно то, что из всех производных от $g_{\mu\nu}$, входящих в уравнения (2.2), разрыв на гиперповерхности S могут претерпевать только вторые производные вида $g_{ij,00}$. В этом случае данные Коши для задачи (2.2) сводятся к заданию на S только значений функций $g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu,0}$, из которых первые мы предполагаем трижды, а вторые — дважды непрерывно дифференцируемыми по координатам x^i. Остальные первые производные от $g_{\mu\nu}$, а также вторые производные от g_{00} и g_{0i} однозначно даются дифференцированием по x^i уже известных данных Коши на S.

В связи с этим возникает вопрос: когда уравнения Эйнштейна (2.2) вместе с данными Коши однозначно определяют также и производные $g_{ij,00}$?

Как показал Лихнерович ([52], стр. 31—33, см. также [57], стр. 364), система уравнений (2.2) в гармонической системе координат эквивалентна системе вида

$$\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} + \Omega_{ij} = 0, \tag{2.19}$$

$$S^0_\alpha = 0, \qquad \Gamma^\alpha = 0, \tag{2.20}$$

где

$$S^\alpha_\beta = R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} R\delta^\alpha_\beta, \tag{2.21}$$

причем Ω_{ij}, S^0_α и Γ^α не содержат производных вида $g_{ij,00}$ и, следовательно, полностью определяются данными Коши. При этом выполнение условий (2.20) на гиперповерхности S гарантирует их выполнение и в окрестности S, если на S и вне S имеют место уравнения (2.19) (теорема Лихнеровича об инволюции системы дифференциальных уравнений [52]).

Это означает, что условия (2.20) служат лишь для определения данных Коши, которые, следовательно, не могут быть произвольными. В то же время система (2.19) служит для интегрирования системы (2.2) по x^0, т. е. для определения неизвестных функций $g_{\mu\nu}$. Таким образом, задача Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве распадается на две части: 1) определение данных Коши, удовлетворяющих уравнениям (2.20); 2) интегрирование системы уравнений (2.19) по x^0.

Пусть мы имеем данные Коши, удовлетворяющие условиям (2.20). Тогда уравнения (2.2) при условии $g^{00} \neq 0$ допускают решение, не имеющее разрыва Адамара на S; это соответствует случаю, когда уравнения (2.19) вместе с данными Коши однозначно определяют также и производные $g_{ij,00}$. Наоборот, если $g^{00} = 0$ в окрестности S, то вторые производные $g_{ij,00}$, а следовательно, и компоненты тензора кривизны R_{0i0j} не могут быть определены на S однозначно данными Коши и уравнениями поля, т. е. претерпевают на гиперповерхности S разрыв Адамара [1]).

3. Характеристические гиперповерхности уравнений Эйнштейна

Условие $g^{00} = 0$, определяющее разрыв Адамара тензора кривизны на начальной гиперповерхности S, заданной в виде (2.16), можно сформулировать в общековариантном виде. Действительно, переходя к произвольным координатам, в которых $x^0 = \varphi(x'^{\alpha})$, запишем условие

$$g^{00} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\beta}} g'^{\alpha\beta} = 0$$

в виде общего уравнения гиперповерхности S, допускающей слабый разрыв решения системы (2.2) (штрихи опущены):

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} = 0, \tag{2.22}$$

т. е. *уравнения эйконала* из геометрической оптики ([16], стр. 173).

Но уравнение (2.22) является необходимым и достаточным условием изотропности гиперповерхности S (см. [58], стр. 57). Следовательно, слабый разрыв первого рода

[1]) По определению, разрыв производных от функций, выражающих решение задачи Коши для некоторой системы уравнений, при условии непрерывности самого решения называется *слабым* разрывом решения данной системы уравнений. Таким образом, условие $g^{00} = 0$ означает слабый разрыв первого рода для решения системы уравнений (2.2).

в решении системы уравнений (2.2) (разрыв Адамара тензора кривизны) возможен только при условии, что начальная гиперповерхность S изотропна.

Мы видим, что решение задачи Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве существенно зависит от характера начальной гиперповерхности S. Если гиперповерхность S, заданная уравнением $\varphi(x^\alpha) = 0$, не удовлетворяет условию (2.22):

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \neq 0, \tag{2.23}$$

то она называется *свободной*, и задача Коши для уравнений (2.2) в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) допускает единственное решение. Если же S удовлетворяет условию (2.22), то она называется *характеристической*, и теорема о единственности решения задачи Коши не имеет места.

4. Теорема Лере

О решении задачи Коши для уравнений Эйнштейна (2.2) можно судить также на основе общих теорем о существовании и единственности решения системы квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Так, если входящие в уравнения коэффициенты все аналитичны, а решение ищется в аналитических функциях, то при аналитических начальных данных на свободной гиперповерхности задача Коши имеет, притом единственное, решение (теорема Коши — Ковалевской, см. [53], стр. 56). Однако к интересующему нас случаю решения задачи Коши в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) теорема Коши — Ковалевской неприменима.

Как заметил Лихнерович [54], в нашем случае может быть использована теорема Лере [59], согласно которой система квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа имеет решение в неаналитических функциях, и притом единственное, при условии, что начальная гиперповерхность S является свободной (пространственноподобной), а данные Коши на ней выражаются достаточно гладкими функциями. Применительно к уравнениям (2.2) все условия теоремы Лере удовлетворяются, если воспользоваться гармоническими координатами, в которых уравнения Эйнштейна принимают вид (2.8), а начальные данные определяются решением системы уравнений (2.20).

Из теоремы Лере вытекает следующий важный результат:

Разрыв Адамара тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пустом пространстве — времени возможен только на характеристической гиперповерхности уравнений Эйнштейна (2.2) S, *определяемой уравнением эйконала* (2.22).

Действительно, наличие разрыва Адамара в тензоре Римана на некоторой гиперповерхности S свидетельствует о том, что по крайней мере некоторые из вторых производных метрического тензора $g_{\mu\nu,\,\rho\sigma}$ не могут быть однозначно определены из уравнений поля в окрестности S по заданным на ней начальным данным. А это, в свою очередь, означает, что гиперповерхность S не может быть свободной.

5. Бихарактеристики уравнений тяготения

Мы выяснили, что в римановом пространстве V_4 сигнатуры — 2 характеристическое многообразие уравнений Эйнштейна в пустоте

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.24}$$

представляет собой изотропную трехмерную гиперповерхность V_3 (2.15), причем функция φ удовлетворяет уравнению эйконала (2.22).

Огибающая гиперплоскостей, касательных в данной точке ко всем возможным характеристическим гиперповерхностям, проходящим через эту точку, называется характеристическим конусом [50]. А так как характеристическая гиперповерхность уравнений Эйнштейна изотропная (т. е. несет на себе вырожденную метрику), то характеристический конус системы уравнений (2.2) совпадает со световым конусом в данной точке ([52], стр. 33—35). Впервые уравнение (2.22) как характеристическое уравнение для системы (2.1) было рассмотрено Финци [59].

Согласно определению *бихарактеристик* (называемых также *лучами*) для системы квазилинейных уравнений второго порядка (см. [50], стр. 551), бихарактеристики уравнений Эйнштейна (2.2) совпадают с линиями тока изотропного векторного поля l^α, ортогонального к характеристической гиперповерхности S,

$$l^\alpha = g^{\alpha\beta}\,\varphi_{,\beta}, \tag{2.25}$$

и выражаются уравнениями

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = g^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}, \tag{2.26}$$

где τ — параметр на кривой. Очевидно, из уравнений (2.26) вытекает также

$$l_\beta = g_{\beta\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{2.27}$$

Функции $x^\alpha(\tau)$ и $l_\alpha(\tau)$ можно задать канонической системой уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial l_\alpha}, \qquad \frac{\partial l_\alpha}{\partial\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \tag{2.28}$$

где функция Гамильтона

$$H(x^\alpha, l_\beta) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}x^\alpha l^\beta \tag{2.29}$$

совпадает с характеристической формой уравнений Эйнштейна в пустом пространстве [50]. Но решения $x^\alpha(\tau)$ канонической системы (2.28) определяют экстремали функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}.$$

В самом деле, переходя от переменных $\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)$ к переменным (x^α, l^β), получаем классическое соотношение между L и H:

$$H = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)} - L.$$

Поскольку первый интеграл системы (2.28) есть $2L = C = \mathrm{const}$, то эти решения будут экстремалями и для

$$\sqrt{2L} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}},$$

т. е. будут геодезическими риманова пространства V_4 с метрикой $g_{\alpha\beta}$ ([52], стр. 33—35).

Как известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных [50], бихарактеристики принадлежат к характеристической поверхности, т. е. касательные к ним являются образующими характеристического конуса. Но, как мы видели выше, характеристический конус для уравнений Эйнштейна совпадает со световым конусом. Следовательно, *бихарактеристики уравнений Эйнштейна являются изотропными геодезическими.*

6. Задача Коши для уравнений Эйнштейна — Максвелла

При анализе определения гравитационных волн существенную пользу может принести опыт, приобретенный при исследовании теории электромагнитных волн, описываемых тензором энергии — импульса

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha}^{\rho} F_{\beta\rho}, \tag{2.30}$$

где $F_{\alpha\beta}$ есть максвелловский тензор напряженностей. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу Коши также для уравнений Максвелла в римановом пространстве — времени общей теории относительности. Общее решение этой задачи исследовал Лихнерович ([52], стр. 43—52).

Самосогласованная система уравнений Эйнштейна — Максвелла имеет вид

$$D_{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma;\beta} = 0, \tag{2.31}$$

$$E^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\beta\gamma\delta\alpha} F_{\gamma\delta;\beta} = 0, \tag{2.32}$$

$$Q_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \lambda \tau_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.33}$$

Здесь $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор [1])

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sqrt{-g}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{2.34}$$

а $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты, равный $+1$ для ε_{1234} и всех четных перестановок индексов, -1 для нечетных перестановок и 0 в остальных случаях.

Примем, что поле $F_{\alpha\beta}$— класса C^0 (C^2 на кусках). Тогда задача Коши для уравнений Эйнштейна—Максвелла (2.31) — (2.33) формулируется так: пусть на начальной

[1]) Точнее, *аксиальный* тензор, так как при преобразовании координат его знак зависит от знака якобиана преобразования (см., например, [60], стр. 11).

гиперповерхности S (2.15) заданы гравитационное и электромагнитное поля; требуется определить их вне S, если они удовлетворяют уравнениям (2.31) — (2.33).

В системе координат, где уравнение S имеет вид (2.16), данные Коши состоят из $g_{\alpha\beta}$ (функций, по крайней мере три раза непрерывно дифференцируемых по x^i), $g_{\alpha\beta,0}$ и $F_{\alpha\beta}$ (функций, дважды дифференцируемых по тем же координатам). Разрыв на S могут иметь лишь производные $g_{\alpha\beta,00}$ и $F_{\alpha\beta,0}$. Выделяя для удобства индекс 0, запишем уравнения (2.31) в форме

$$D_i \equiv g^{00}F_{0i,0} + g^{0k}F_{ki,0} + \ldots = 0, \tag{2.35}$$

$$D_0 \equiv g^{0i}F_{i0,0} + \ldots = 0 \tag{2.36}$$

(многоточие здесь и в дальнейшем используется для того, чтобы не выписывать явно члены, однозначно определяемые данными Коши).

Как показал Лихнерович, система уравнений (2.35) — (2.36) эквивалентна системе, составленной из уравнений (2.35) и

$$D^0 = 0, \tag{2.37}$$

где величина D^0 ($\equiv g^{0i}D_i + g^{00}D_0$), как видно из уравнений (2.35) — (2.36), однозначно определяется данными Коши. Аналогично, уравнения (2.32) эквивалентны системе

$$E_i \equiv \frac{1}{2}\eta^{0jki}F_{jk,0} + \ldots = 0, \tag{2.38}$$

$$E^0 \equiv \frac{1}{2}\eta^{jkl0}F_{kl,j} = 0, \tag{2.39}$$

где E^0 определяется данными Коши. Наконец, уравнения (2.33) эквивалентны системе

$$Q_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \lambda\tau_{ij} = 0, \tag{2.40}$$

$$Q^0_\alpha \equiv R^0_\alpha - \frac{1}{2}R\delta^0_\alpha + \lambda\tau^0_\alpha = 0, \tag{2.41}$$

где Q^0_α определяется данными Коши. (Напомним, что вне источников след тензора энергии — импульса $\tau^\alpha_\alpha \equiv 0$.) Таким образом, задача Коши распадается на две части: 1) определение данных Коши, удовлетворяющих на S условиям (2.37), (2.39) и (2.41); 2) интегрирование при найденных начальных данных системы уравнений (2.35), (2.38) и (2.40) по координате x^0.

Предположим сначала, что $g^{00} \neq 0$ всюду на S. Тогда из уравнений (2.38) однозначно определяется $F_{ik,0}$, из уравнений (2.35) — $F_{0i,0}$, а из уравнений (2.40) — $g_{ij,00}$. Таким образом, все вторые производные от $g_{\alpha\beta}$ и первые производные от $F_{\alpha\beta}$ однозначно определяются начальными данными и исходной системой, в силу чего последняя имеет единственное решение.

Пусть теперь $g^{00} = 0$ на S. Тогда $g_{ij,00}$ и $F_{0i,0}$ могут иметь разрыв на S, и, следовательно, S — характеристическое многообразие уравнений Максвелла. Характеристическое уравнение, как мы знаем, имеет вид (2.22), иными словами, характеристическое многообразие уравнений Максвелла совпадает с характеристическим многообразием уравнений Эйнштейна.

Таким образом, мы доказали теорему Лихнеровича ([52], стр. 50—52):

Характеристические многообразия (2.15) *уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла в V_4 совпадают и определяются решениями уравнения эйконала* (2.22).

Прямым следствием этой теоремы является тот факт, что бихарактеристики уравнений Эйнштейна совпадают с бихарактеристиками уравнений Максвелла.

7. Фронт гравитационной волны и «лучи» тяготения

На основании изложенного можно утверждать, что характеристическое многообразие уравнений Эйнштейна есть гиперповерхность, на которой тензор Римана терпит разрыв Адамара, т. е. эта гиперповерхность играет роль фронта волны, понимаемого как поверхность разрыва $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ [55, 59]. Бихарактеристики же уравнений Эйнштейна представляют собой траектории изотропного вектора, ортогонального к характеристической гиперповерхности (фронту волны) и играющего, следовательно, роль волнового вектора. Так как характеристическое многообразие и бихарактеристики — инварианты преобразований координат ([50], стр. 555), то *трехмерную характеристическую гиперповерхность уравнений Эйнштейна можно рассматривать как инвариантно определенный фронт гравитационной волны, а бихарактеристики уравнений Эйнштейна — как инвариантно определенные гравитационные лучи, т. е. траектории распространения фронта волны.*

Аналогично, фронт электромагнитной волны в пространстве V_4 определяется характеристической гиперповерхностью уравнений Максвелла; вследствие теоремы Лихнеровича, он совпадает с фронтом гравитационной волны. Траектории распределения электромагнитной волны — электромагнитные лучи — можно определить как бихарактеристики уравнений Максвелла; они совпадают с гравитационными лучами.

ГЛАВА 3

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Различные аспекты проблемы

С точки зрения результатов, изложенных в главе 2, поля тяготения, описывающие свободные гравитационные волны, определяются решениями уравнений Эйнштейна (2.2) с начальными данными на характеристической гиперповерхности. Однако частные решения уравнений Эйнштейна найдены, как правило, без задания определенных граничных условий, так что волновой характер конкретного решения, вообще говоря, может не быть очевиден. Между тем, исследуя гравитационные поля, мы имеем в своем распоряжении только частные решения уравнений Эйнштейна. Поэтому возникает проблема: определить общековариантным образом класс полей тяготения, который отвечал бы разрыву Адамара в решениях уравнений Эйнштейна с начальными данными на характеристическом многообразии.

Окончательное решение этой проблемы до сих пор отсутствует, несмотря на многочисленные варианты, к обзору которых перейдем в следующих разделах. Трудность ее с точки зрения теории дифференциальных уравнений объясняется сложностью нелинейной структуры уравнений Эйнштейна и отсутствием для них универсальных граничных условий. С дифференциально-геометрической точки зрения трудность этой проблемы состоит в отсутствии общековариантного оператора Даламбера, который выражался бы явным образом из уравнений Эйнштейна. Наконец, с физической точки зрения трудность проблемы связана также с отсутствием общековариантного выражения для энергии гравитационного поля в общей теории относительности, что мешает решению вопроса о возможности переноса энергии гравитационными волнами и описанию самих волн в терминах свободного переноса энергии поля.

Проблема гравитационных волн, как всякая физическая задача, предполагает не только теоретическую, но и экспериментальную трактовку. Иными словами, к гравитационным волнам можно и должно подходить как к физической реальности, доступной экспериментальным измерениям. Но для корректной теоретической интерпретации данных эксперимента физическая теория должна содержать некоторые исходные общие посылки, не зависящие от конкретного эксперимента. Только в этом случае теория оказывается цельной и замкнутой, т. е. имеет собственную логическую основу (см., например, [61]). В противном случае сопоставление теории с данными того или иного эксперимента носило бы характер тавтологии.

В этом смысле общая теория относительности занимает исключительное положение среди всех физических теорий. Строгий геометрический фундамент, на котором зиждется здание эйнштейновской теории тяготения, позволяет нам надеяться на возможность общего и строгого обоснования концепции гравитационного излучения. Для выяснения этой возможности мы и предприняли в предыдущей главе обсуждение задачи Коши для уравнений гравитационного поля. При этом выяснилось, что решение задачи Коши для уравнений тяготения Эйнштейна в ряде существенных пунктов обнаруживает глубокую аналогию с решением соответствующей задачи для уравнений электромагнитного поля. В частности, характеристические многообразия и бихарактеристики уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла в пространстве — времени V_4 совпадают. Но в классической электродинамике характеристическое многообразие уравнений Максвелла описывает фронт электромагнитной волны, а бихарактеристики уравнений Максвелла — траектории распространения электромагнитного излучения. В свете обнаруженной аналогии становится оправданным предположение, что теоретически фронт гравитационной волны можно определить в терминах характеристического многообразия уравнений Эйнштейна, а траектории ее распространения — в терминах бихарактеристик уравнений тяготения.

Основной проблемой, однако, остается проблема определения поля гравитационного излучения, или гравитационной волновой зоны. Изложенное выше не исключает возможности найти удовлетворительное определение. При этом поиски исходных посылок, по-видимому, можно вести на пути дальнейшего углубления аналогии между гравитационным и электромагнитным полями. Разумеется, необходимо отдавать себе отчет в том, что эта аналогия не может продолжаться неограниченно. Тем не менее, следует указать, что все рассматриваемые в дальнейшем методы описания гравитационного излучения так или иначе используют аналогию между полями электромагнетизма и гравитации.

Эта аналогия может быть обнаружена различными способами. Первый способ непосредственно вытекает из сопоставления дифференциальной структуры уравнений тяготения и электромагнетизма, т. е. из сравнительного анализа решений задачи Коши для уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла. Такой анализ удобнее всего произвести, если в уравнениях тяготения в качестве тензора поля, аналогичного электромагнитному тензору $F_{\mu\nu}$, принять тензор кривизны пространства — времени V_4. Уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = -\lambda U_{\alpha\beta} \qquad \left(U_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) \tag{3.1}$$

и тождества Бианки

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} + R_{\alpha\beta\sigma\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\sigma;\gamma} = 0 \tag{3.2}$$

приводят к соотношениям [1]) [60, 62]

$$R_{\alpha\beta\gamma.;\delta}^{\cdots\delta} = -2\lambda U_{\gamma[\alpha;\beta]} \qquad (2U_{\gamma[\alpha;\beta]} \equiv U_{\gamma\alpha;\beta} - U_{\gamma\beta;\alpha}). \tag{3.3}$$

Соотношения (3.2) и (3.3) обнаруживают замечательную аналогию с уравнениями Максвелла

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\sigma\mu;\nu} + F_{\nu\sigma;\mu} = 0, \tag{3.4}$$

$$F^{\nu}_{\mu;\nu} = -j_{\mu}, \tag{3.5}$$

причем тензор

$$J_{\gamma\alpha\beta} = 2\lambda U_{\gamma[\alpha;\beta]} \tag{3.6}$$

может быть интерпретирован как гравитационный аналог

---

[1]) Здесь и далее прямые скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам; соответственно, круглые скобки будут означать симметризацию.

электромагнитного тока. Однако если рассматривать (3.2) и (3.3) как уравнения относительно компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то возникает вопрос: при каких условиях из уравнений (3.2) и (3.3) вытекают эйнштейновские уравнения (3.1)? Более строго проблему можно сформулировать так: каким условиям должны удовлетворять начальные данные уравнений (3.2) и (3.3), чтобы полный класс их решений определял множество всех полей тяготения эйнштейновской теории?

Ответ на этот вопрос был дан Лихнеровичем, который показал [62], что если на начальной гиперповерхности S, ориентированной в пространстве, начальные данные уравнений (3.2) и (3.3) (т. е. компоненты тензора Римана) удовлетворяют соотношениям (3.1), то последние удовлетворяются и в окрестности S [1]). Иными словами, уравнения (3.2) и (3.3) полностью эквивалентны уравнениям тяготения Эйнштейна, если данные Коши для уравнений (3.2) и (3.3) на пространственноподобной начальной гиперповерхности S подчинены условиям связи (3.1). В этом случае уравнения (3.2) — (3.3) называются квазимаксвелловскими уравнениями тяготения [63].

Однако «квазимаксвелловский подход» приводит к принципиальным трудностям при описании гравитационных полей волнового типа, определяемых начальными данными на характеристической (изотропной) гиперповерхности. Так, в случае гравитационного поля можно построить аналог волнового уравнения, отвечающий уравнению относительно тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, следующему из уравнений Максвелла в римановом пространстве — времени (Толмэн [63]). Однако этот аналог оказывается тождеством относительно тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и, следовательно, не позволяет выделить волновые поля как специальный класс полей тяготения.

Наряду с дифференциальными методами, аналогия между полями тяготения и электромагнетизма может быть обнаружена на алгебраическом пути. Это приводит к возможности построить определение полей гравитационных волн на основе сходства алгебраической структуры тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Как мы увидим в следующей главе, характерное свойство полей электромагнитного излучения, выделяющее их из

[1]) Эта теорема представляет собой аналог теоремы об инволюции системы уравнений Эйнштейна, рассмотренной в предыдущей главе.

множества всех электромагнитных полей, может быть сформулировано в форме чисто алгебраических условий, а именно, в виде обращения в нуль инвариантов тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. С этой точки зрения определение электромагнитного излучения основано на алгебраическом разбиении всех электромагнитных полей на два типа, физически интерпретируемых как волновые и неволновые поля. Это наводит на мысль о применении метода алгебраической классификации также и к проблеме определения гравитационных волновых полей. Однако здесь мы сразу же убеждаемся в отсутствии полной алгебраической аналогии между электромагнитными и гравитационными полями.

В самом деле, вследствие различия в алгебраической структуре тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и тензора кривизны пространства—времени $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, гравитационные поля разбиваются не на два типа, как электромагнитные, а на пять алгебраически различных типов, определяемых классификацией Петрова (три основных типа, из которых два могут быть как вырожденными, так и невырожденными). Это приводит к разнообразию алгебраических свойств гравитационного волнового поля и, соответственно, к множественности алгебраических критериев, выделяющих волновые гравитационные поля из всех полей тяготения. В этом состоит еще одна трудность, вследствие которой проблема гравитационных волн в общей теории относительности до сих пор не получила общепринятого теоретического разрешения. Алгебраическая классификация полей тяготения по Петрову [64, 65] будет, однако, играть весьма важную роль в нашем дальнейшем изложении, поэтому целесообразно остановиться на ней более подробно.

2. Алгебраическая классификация полей тяготения. Пространства Эйнштейна

Пусть данное риманово пространство V_4 является пространством Эйнштейна, т. е. описывается уравнениями

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Легко показать, что при этом должно быть

$$\varkappa = \frac{1}{4} R = \text{const}.$$

Следуя методу Петрова ([65], стр. 113—117), отобразим пространство Эйнштейна в каждой точке на центроаффинное бивекторное пространство B_N размерности

$$N = C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) = 6 \qquad (n = 4),$$

поставив в соответствие каждой кососимметричной паре индексов произвольного тензора в пространстве Эйнштейна один собирательный индекс в пространстве B_N. Тогда произвольному битензору (т. е. тензору, индексы которого разбиваются на кососимметричные пары) из пространства Эйнштейна отвечает в пространстве B_6 тензор вдвое меньшей валентности.

Метризуем бивекторное пространство B_6, введя в нем тензор g_{ab} (a, b = 1, 2, 3, 4, 5, 6) как образ тензора четвертого ранга в пространстве Эйнштейна:

$$\begin{gathered} g_{ab} \to g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}, \\ (\alpha\beta) \to a, \qquad (\gamma\delta) \to b. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Предполагая, что V_4 имеет сигнатуру —2 (т. е. +, —, —, —), и фиксируя нумерацию индексов бивекторного пространства

$$10 \to 1,\ 20 \to 2,\ 30 \to 3,\ 23 \to 4,\ 31 \to 5,\ 12 \to 6, \tag{3.9}$$

получаем в выбранном орторепере канонический вид метрики пространства R_6:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — единичная 3×3-матрица. Отсюда следует, в частности, невырожденность матрицы $\| g_{ab} \|$.

Записывая в орторепере уравнения (3.7), приходим к выводу, что в пространствах Эйнштейна матрица $\| R_{ab} \|$ тензора кривизны симметрично-сдвоенная:

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & -\mathcal{E} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где блоки $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ — симметричные 3×3-матрицы, элементы которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=1}^{3} e_{ss} = -\varkappa, \qquad \sum_{s=1}^{3} h_{ss} = 0. \tag{3.12}$$

Тогда, разбивая λ-матрицу вида $\|R_{ab} - \lambda g_{ab}\|$ на две трехмерные комплексно сопряженные матрицы, приходим к основной теореме Петрова: существует три и только три типа полей тяготения, определяемые в R_6 соответственно характеристиками λ-матрицы тензора кривизны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Тип 1} & \text{Тип 2} & \text{Тип 3} \\ [111, \overline{111}] & [21, \overline{21}] & [3, 3] \end{array} \tag{3.13}$$

Здесь чертой обозначены элементарные делители с комплексно сопряженными базисами. Для типа 3 элементарные делители имеют вещественные базисы (черта отсутствует). Все пространства постоянной кривизны, определяемые характеристикой вида [(111, 111)], принадлежат к типу 1 ([65], стр. 119).

Петров показал ([65], § 19), что матрица $\|R_{ab}\|$ тензора кривизны в каноническом неголономном орторепере приводится к виду (3.11), где для полей типа 1

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\sum \alpha_i = -\varkappa, \qquad \sum \beta_i = 0; \tag{3.15}$$

для полей типа 2

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varkappa, \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 0; \tag{3.17}$$

для полей типа 3

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\varkappa & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3}\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\varkappa \end{pmatrix}, \quad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Здесь α_s и β_s — соответственно вещественные и мнимые части базисов элементарных делителей

$$\sigma_s = \alpha_s + i\beta_s \qquad (s = 1, 2, 3), \tag{3.19}$$

совпадающих с собственными значениями матрицы $\|R_{ab}\|$.

Соответственно трем типам пространств Эйнштейна условимся обозначать их $^*T_i$, где $i = 1, 2, 3$ указывает тип поля тяготения. Пустое пространство—время $R_{\alpha\beta} = 0$, т. е. пространство $^*T_i$ при $\varkappa = 0$, будем обозначать T_i. Классификация Петрова в дальнейшем была сформулирована в рамках других формализмов, применяемых в исследованиях по гравитационным волнам. Так, Дебеве [66] подробно описал типы и подтипы полей по Петрову, исходя из вариантов взаимной ориентации изотропных векторных полей в физическом пространстве—времени, а Пенроуз [67] исследовал спинорные свойства тензора Римана с точки зрения алгебраической классификации по Петрову. Пенроузу же принадлежит следующее наглядное представление систематики Петрова в виде диаграммы [1]):

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{I} \arrow[d, leftrightarrow] \\
{} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{II} \arrow[r, leftrightarrow] & D \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathrm{III} \arrow[r, leftrightarrow] & N \arrow[r, leftrightarrow] & O \\
{}^*T_3 & {}^*T_2 & {}^*T_1
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

Здесь I, D, O — подтипы $^*T_1$, различаемые следующими свойствами: для I все три собственные значения в блоках матрицы $\|R_{ab}\|$ различны; для D два собственных значения из трех совпадают, например,

$$\alpha_2 = \alpha_3, \qquad \beta_2 = \beta_3; \tag{3.21}$$

для O все три собственных значения совпадают и, вследствие (3.15), являются вещественными:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{3}\varkappa, \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \tag{3.22}$$

---

[1]) Поскольку обозначения Пенроуза, благодаря наглядности диаграммы (3.20), стали широко приняты в работах по классификации Петрова, то мы в дальнейшем о полях типов I, D, O, II, N и III будем говорить просто как о соответствующих типах по Петрову, не подчеркивая отхода от оригинальной терминологии Петрова [65] в обозначениях диаграммы (3.20).

(при $\varkappa = 0$ тип O включает только плоское пространство — время).

Во втором столбце диаграммы (3.20) II и N — подтипы $^*T_2$, причем II — «невырожденный второй тип», для которого собственные значения σ_1 и σ_2 различны, а N — «вырожденный второй тип», для которого σ_1 и σ_2 совпадают и, вследствие (3.17), вещественны [1]):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{3}\varkappa, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{3.23}$$

Единственное и всегда вещественное собственное значение в обоих блоках матрицы $\|R_{ab}\|$ для $^*T_3$ равно $-\frac{1}{3}\varkappa$.

3. Классификация полей тяготения общего вида

Ввиду того, что классификация пространств Эйнштейна $^*T_i$ опирается только на алгебраические свойства тензора кривизны, для классификации полей тяготения общего вида ($R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$) целесообразно применить тензор конформной кривизны Вейля (см. [58], стр. 115),

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \\ + \frac{1}{6}R(g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - g_{\nu\alpha}g_{\beta\mu}), \tag{3.24}$$

обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu} = -C_{\alpha\beta\nu\mu} = C_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad C_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0. \tag{3.25}$$

Легко видеть, что

$$C_{\alpha\mu} \equiv C_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\beta\nu} = 0, \tag{3.26}$$

т. е. тензор Вейля произвольного пространства V_4 в алгебраическом отношении ведет себя как тензор Римана в пустом пространстве, причем совпадает с последним в случае (2.2). Определяя в бивекторном пространстве R_6 характеристику λ-матрицы вида $\|C_{ab} - \lambda g_{ab}\|$ тензора Вейля и повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы придем к выводу о существовании трех и только трех

[1]) Отметим, что Бель [68] пользуется несколько иными обозначениями: именно, типы I, D, II, III и N соответственно обозначаются как cas 1, cas $2a$, cas $2b$, cas $3a$ и cas $3b$.

типов V_4 общего вида, отвечающих характеристикам (3.13). Можно показать ([65], § 20), что матрица $\|C_{ab}\|$ в каноническом орторепере принимает тот же вид (3.11), (3.14) — (3.18), что и $\|R_{ab}\|$, причем теперь всюду надо положить $\varkappa = 0$.

Диаграмма Пенроуза (3.20) также сохранит свой вид и для матрицы $\|C_{ab}\|$. При этом тип O будет представлять, очевидно, конформно плоские пространства V_4, для которых всегда $C_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, а тип N будет описываться матрицами (3.16) при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

4. Классификация Петрова и изотропные векторные поля

Дебеве [66] показал, что риманово пространство V_4 сигнатуры — 2 допускает соответственно каноническому виду матрицы $\|C_{ab}\|$ в бивекторном пространстве R_6 по крайней мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля $l^\alpha \neq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$l_{[\lambda}C_{\alpha]\beta\gamma[\delta}l_{\sigma]}l^\beta l^\gamma = 0. \tag{3.27}$$

Формулировка этой теоремы Дебеве в виде уравнений (3.27) принадлежит Саксу [110]. Ввиду важности исследования Дебеве — Сакса для нашего дальнейшего изложения, мы остановимся на их результатах несколько более детально.

Тип I по Петрову характеризуется тем, что все четыре ектора $l^\alpha_{(N)}$ ($N = 1, 2, 3, 4$) различны, для типа D они попарно совпадают (два независимых вектора), для типа II существует три независимых вектора (два из четырех совпадают), для типа III — два независимых вектора (три из четырех совпадают), наконец, тип N характеризуется тем, что все четыре вектора совпадают, т. е. определяют одно и то же направление[1]). Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить уравнения (3.27) в каноническом орторепере, задавшись в нем подходящими значениями ком-

---

[1]) Векторы l^α в этих уравнениях определены только с точностью до коллинеарности (умножения на произвольный скаляр). Поэтому различие в векторах $l^\alpha_{(N)}$ понимается как различие в изотропных направлениях, задаваемых этими векторами.

понент l^α. Так, для типа N следует принять $l^\alpha = \delta_0^\alpha + \delta_1^\alpha$. Векторы $l^\alpha_{(N)}$, удовлетворяющие уравнениям (3.27), будем называть *векторами Дебеве.*

Это приводит к новой инвариантной характеристике алгебраических типов полей тяготения общего вида. А именно, если условиться обозначать число совпадающих (коллинеарных) векторов $l^\alpha_{(N)}$ цифрой в квадратных скобках, то сказанное можно систематизировать следующим образом:

Тип по Петрову	I	D	II	N	III
Символ Дебеве—Сакса	[1111]	[22]	[211]	[4]	[31]

(3.28)

Систему (3.28) можно использовать в алгебраической классификации полей тяготения по Петрову как альтернативу диаграмме (3.20). В этой формулировке классификации Петрова типы полей тяготения различаются по взаимной ориентации векторов Дебеве в самом физическом пространстве — времени.

Тип взаимной ориентации векторов Дебеве определяет специфический вид уравнений (3.27); наиболее общий вид этих уравнений характеризует «наиболее общий» случай ориентации векторов, т. е. тип I. Для других типов уравнения (3.27) переходят в более жесткие уравнения, так что полный их перечень для всех типов системы (3.28) имеет следующий вид:

Тип по Петрову	Уравнения для векторов Дебеве	
N или [4]	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha = 0$	(3.29)
III или [31]	$C_{\alpha\beta\gamma[\delta}l^\gamma l_{\lambda]} = 0$	(3.30)
II, D или [211], [22]	$C_{\alpha\beta\gamma[\delta}l_{\lambda]}l^\beta l^\gamma = 0$	(3.31)
I или [1111]	$l_{[\rho}C_{\alpha]\beta\gamma[\delta}l_{\lambda]}l^\beta l^\gamma = 0$	(3.32)

Легко видеть, что вектор $l^\alpha_{(N)}$, удовлетворяющий какому-то из уравнений (3.29) — (3.32), автоматически удовлетворяет и всем последующим уравнениям. Поэтому принадлежность поля тяготения к тому или иному типу определяется двумя обстоятельствами: 1) вектор Дебеве $l^\alpha_{(N)}$ удовлетворяет данному уравнению из ряда (3.29) —

(3.32) и 2) этот вектор не удовлетворяет ни одному из предыдущих уравнений указанного ряда.

До сих пор мы рассматривали поля тяготения общего вида, классификация которых характеризуется алгебраической структурой тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В пустом пространстве—времени тензор Вейля совпадает с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; соответственно, в классификации (3.28) — (3.32) вместо $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет фигурировать просто $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

В дальнейшем поля типа I, отвечающие максимально общему виду взаимной ориентации векторов Дебеве, будем называть *алгебраически общими*, а поля остальных типов — D, II, N и III — *алгебраически специальными*; смысл этих названий ясен из подхода Дебеве — Сакса.

ГЛАВА 4

КРИТЕРИЙ ПИРАНИ

1. Изотропное электромагнитное поле

Первая попытка дать общековариантное геометрическое определение концепции гравитационных волн в пустом пространстве на основе классификации Петрова была предпринята Пирани [262] в 1957 году (см. также его работы [69—71]). Определение Пирани основано на двух постулатах в соответствии с представлением о волне в терминах разрыва Адамара:

1. Состояние свободных гравитационных волн полностью характеризуется тензором Римана.

2. Фронт гравитационной волны проявляется как разрыв тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности.

Первый из этих постулатов означает лишь, что полевой функцией (напряженностью) гравитационного поля в подходе Пирани служит тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, тогда как метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, часто ассоциируемый с потенциалом поля тяготения, не играет такого рода первичной роли в анализе волн тяготения. Второй постулат, согласно которому фронт гравитационной волны лежит на характеристической гиперповерхности уравнений Эйнштейна, с физической точки зрения означает, что гравитационные волны в пустом пространстве распространяются с фундаментальной скоростью.

Определение Пирани предполагает аналогию между электромагнитными и гравитационными волнами. В качестве третьего (не формулируемого явно) постулата принимается, что волновые поля в гравитации, как и в электродинамике, могут быть только изотропными полями. В этой связи Пирани дает обобщение понятия изотропного электромагнитного поля на случай полей тяготения.

Как известно, тензор (2.30) энергии — импульса электромагнитного поля $\tau_{\mu\nu}$ имеет четыре попарно равных собственных значения: k, k, $-k$, $-k$, причем

$$4k^2 = \Phi^2 + \Psi^2, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \Psi = F_{\mu\nu}^{*}F^{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

а $^*F_{\mu\nu}$ — тензор, дуальный тензору Максвелла:

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{4.3}$$

Электромагнитное поле называется *изотропным* (null field), если собственные значения тензора $\tau_{\mu\nu}$ равны нулю: $k = 0$, т. е. $\Phi = \Psi = 0$. С физической точки зрения изотропное электромагнитное поле отвечает волновому процессу распространения электромагнитной энергии с фундаментальной скоростью, поскольку в этом случае наблюдатель не может следовать за полем. По определению, наблюдатель следует за электромагнитным полем, если для него поток вектора Пойнтинга

$$P_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - v_\alpha v^\beta)\,\tau_{\beta\sigma}v^\sigma \tag{4.4}$$

через все возможные двумерные поверхности равен нулю (здесь v^σ — временноподобный вектор 4-скорости наблюдателя). Но для того чтобы поток P^α всегда равнялся нулю, необходимо, чтобы сам вектор P^α был равен нулю. Согласно (4.4), это означает, что

$$\tau_{\alpha\sigma}v^\sigma = (\tau_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma)\,v_\alpha. \tag{4.5}$$

Из условия (4.5) вытекает, что если наблюдатель следует за полем, то его 4-вектор скорости является собственным вектором матрицы $\|\tau_{\mu\nu}\|$. Однако, как известно [62], собственные векторы тензора $\tau_{\mu\nu}$ изотропного электромагнитного поля могут быть либо изотропными (притом совпадающими), либо пространственноподобными, но не могут быть временноподобными. Следовательно, обратить в нуль P^α в случае изотропного поля невозможно, и для того чтобы наблюдатель следовал за полем, его 4-вектор скорости должен выродиться в изотропный, т. е. наблюдатель должен двигаться со скоростью света.

Таким образом, можно дать следующее определение изотропного электромагнитного поля: электромагнитное поле называется изотропным, если матрица $\|\tau_{\mu\nu}\|$ не имеет временноподобных собственных векторов.

2. Главные векторы Римана. Следование за гравитационным полем

Определение Пирани основано на распространении понятия изотропного поля (в его последней формулировке для электромагнитного поля) на случай гравитационных полей. Однако непосредственным образом осуществить такое обобщение затруднительно, так как в эйнштейновской теории тяготения отсутствует истинный тензор энергии — импульса гравитационного поля. Чтобы преодолеть эту трудность, Пирани определяет понятие следования за гравитационным полем принципиально иным способом, чем в электромагнетизме, вводя так называемые главные векторы Римана.

Главными векторами тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ называются направления пересечений пар двумерных поверхностей, определяемых собственными векторами тензора R_{ab} $(a, b = 1, 2, \ldots, 6)$ в бивекторном пространстве R_6 (следовательно, бивекторами в физическом пространстве V_4). Число главных векторов Римана и их ориентацию можно установить, зная собственные направления тензора R_{ab} в R_6. Так, типу I диаграммы Пенроуза (3.20) отвечает один главный вектор, причем временноподобный, типу D — два изотропных и один временноподобный главный вектор; для типов II, III, N существует единственный, причем изотропный, главный вектор.

Введем теперь, следуя Пирани, определение: наблюдатель следует за гравитационным полем, если его 4-вектор скорости совпадает с временноподобным главным вектором Римана.

Очевидно, наблюдатель может следовать только за гравитационным полем, главный вектор которого временноподобен, т. е. за полем типа I или типа D. Что же касается полей типов II, III и N, то наблюдатель, следуя за таким гравитационным полем, должен был бы иметь изотропный 4-вектор скорости, т. е. двигаться со скоростью света.

Мы можем теперь принять следующее определение изотропного поля тяготения: гравитационное поле является изотропным, если тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не имеет временноподобных главных векторов Римана.

Из сказанного вытекает, что изотропными гравитационными полями являются поля типов II, III и N, и только они. Мы приходим, таким образом, к формулировке критерия существования гравитационных волн по Пирани.

Критерий Пирани. *В данной области пустого пространства — времени V_4 существуют свободные гравитационные волны, если в этой области тензор Римана принадлежит к одному из типов* II, N *и* III *диаграммы* (3.20); *в других случаях гравитационные волны отсутствуют.*

3. Пример. Волновые поля тяготения Уаймэна — Троллопа

Итак, определение состояния свободного волнового гравитационного поля, основанное на критерии Пирани (как и на других критериях, обсуждаемых ниже), тесно связано с выяснением принадлежности данного поля тяготения к тому или иному типу по классификации Петрова. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть известные в настоящее время решения уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, принадлежащие к типам II, N и III.

Значительную часть решений такого рода (решения Переса, Такено, Петрова, Робинсона и Траутмана, Кундта и др.) мы будем обсуждать в последующих главах при анализе других предложенных критериев гравитационных волн (в пустоте или в среде, заполненной электромагнитным излучением). Для иллюстрации критерия Пирани мы рассмотрим полученный недавно Уаймэном и Троллопом [72, 73] класс решений уравнений Эйнштейна, не совпадающий с упомянутыми решениями либо существенно обобщающий их.

Классу решений Уаймэна — Троллопа отвечает метрика

$$g_{\alpha\beta} = \left\| \begin{matrix} 2\alpha & 1 & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & e^{-\tau} & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & e^{-\tau} \end{matrix} \right\|, \qquad (4.6)$$

где

$$\beta = \xi x^2 + \xi_0, \quad \gamma = \eta x^2 + \eta_0,$$

а ξ, η, ξ_0, η_0, α и τ — функции координат x^0, x^1, x^3, причем β — функция, гармоническая по x^1 и x^3,

$$\beta_{,11} + \beta_{,33} = 0,$$

а γ — функция, гармонически сопряженная с β. Метрика (4.6) получена с использованием разложения $g_{\alpha\beta}$ в ортореперe по четырем вещественным векторам (см., например, [74]), один из которых — изотропный вектор l^α — предполагается гармоническим.

Для ряда частных случаев Уаймэну и Троллопу удалось проинтегрировать уравнения поля в пустом пространстве (2.2) относительно метрики (4.6). Они выделили три специальных случая:

A. $\xi^2 + \eta^2 = 0$,

B. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\alpha_{,22} = 0$,

C. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\tau_{,11} + \tau_{,33} = 0$.

Можно показать[1]), что случаи A и C отвечают полю типа III, а случай B — полю типа II диаграммы Пенроуза. Если же функции ξ и η таковы, что β и γ не зависят от x^2, то данная метрика (в вакууме) относится к типу N (вырожденному типу 2 по классификации Петрова). В последнем случае l^α совпадает с вектором Киллинга, определяющим группу сдвигов этого пространства — времени вдоль координатных линий x^2. Геометрически траектории этого вектора интерпретируются как бихарактеристики уравнений Эйнштейна.

ГЛАВА 5
КРИТЕРИИ БЕЛЯ

1. Тензор суперэнергии

Критерий существования гравитационных волн, предложенный Белем [56, 68, 76—80] (см. также Дебеве [81]), как и критерий Пирани, опирается на представления об

[1]) Соответствующие расчеты были проделаны Л. Б. Григорьевой. Она же показала, что рассматриваемая в работе Троллопа [73] метрика, отвечающая случаю негармонического вектора распространения l^α, совпадает с известной метрикой Робинсона — Траутмана (см. гл. 9).

аналогии с теорией электромагнитных волн. Но, в отличие от критерия Пирани, первый критерий Беля, которому мы посвятим этот параграф, основан на определении «тензора энергии» (точнее, «суперэнергии») гравитационного поля. В аналогии с тензором энергии — импульса электромагнитного поля (2.30) такой «тензор суперэнергии» должен, очевидно, выражаться конструкцией, квадратичной относительно тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Итак, пусть данное V_4 есть пустое пространство — время, так что уравнения Эйнштейна имеют вид (2.2), и пусть тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет в качестве кососимметричных пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Введем два новых тензора, дуальных тензору $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta}, \qquad R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}. \tag{5.1}$$

Можно показать, что в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.2}$$

(см. Приложение I, теорема 1).

Определим *тензор суперэнергии Беля* [76] как тензор четвертого ранга

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R^{\alpha\sigma\lambda\sigma} R^{\beta\cdot\mu\cdot}_{\cdot\rho\cdot\sigma} + \overset{*}{R}{}^{\alpha\rho\lambda\sigma}\overset{*}{R}{}^{\beta\cdot\mu\cdot}_{\cdot\rho\cdot\sigma}). \tag{5.3}$$

Легко видеть, что тензор суперэнергии (5.3) в пустом пространстве по своим свойствам допускает весьма близкую аналогию с тензором $\tau_{\mu\nu}$ электромагнитного поля. Во-первых, он полностью симметричен в силу того, что тензор $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пустом V_4 симметричен по парам индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Во-вторых, как и в случае тензора $\tau_{\mu\nu}$, результат свертывания его с метрическим тензором дает нуль: $g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta\mu\nu}=0$. В-третьих, он удовлетворяет ковариантному уравнению непрерывности, которое аналогично уравнению непрерывности для тензора $\tau_{\mu\nu}$ в пространстве — времени без источников [80]:

$$T^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu;\alpha} = 0. \tag{5.4}$$

В-четвертых, аналогия между тензорами $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ и $\tau_{\mu\nu}$ обнаруживается также при сравнении собственных значений $\tau^{\mu\nu}$ и инвариантов $T^{\alpha\beta\mu\nu}$. Тензор $\tau_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению [81]

$$\tau_\alpha^\beta \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} k^2 g_{\alpha\gamma}, \tag{5.5}$$

где k — собственное значение тензора $\tau_{\alpha\beta}$, имеющее вид (4.1). Можно показать [81], что тензор суперэнергии удовлетворяет аналогичному соотношению:

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu} T_{\gamma\cdots}^{\cdot\beta\lambda\mu} = \frac{1}{4} K^2 g_{\alpha\gamma}, \tag{5.6}$$

где

$$K^2 = (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})^2 + (R_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\gamma\delta})^2. \tag{5.7}$$

Тесную алгебраическую аналогию тензора Беля с тензором энергии — импульса электромагнитного поля можно использовать для определения «плотности энергии и импульса» гравитационного поля. Пусть в каждой точке M пространства — времени задан единичный временноподобный 4-вектор u^α. Поставим ему в соответствие скаляр

$$W = T^{\alpha\beta\lambda\mu} u_\alpha u_\beta u_\lambda u_\mu. \tag{5.8}$$

Нетрудно убедиться [80], что этот скаляр можно представить в виде

$$W(u^\alpha) = \frac{1}{2} (\mathscr{E}_{\alpha\beta} \mathscr{E}^{\alpha\beta} + \mathscr{H}_{\alpha\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta}), \tag{5.9}$$

где симметричные тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$, введенные Матте [82], определяются как

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\beta u^\mu, \tag{5.10}$$

$$\mathscr{H}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\beta u^\mu. \tag{5.11}$$

Очевидно, эти тензоры ориентированы в пространстве в том смысле, что временноподобный вектор u^α является их собственным вектором (отвечающим нулевому собственному значению). Отсюда нетрудно установить, что квадрат каждого из этих тензоров не может быть отрицательным:

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta} \mathscr{E}^{\alpha\beta} \geqslant 0, \qquad \mathscr{H}_{\alpha\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta} \geqslant 0, \tag{5.12}$$

причем знак равенства возможен лишь в том случае, когда соответствующий тензор равен нулю.

Можно, кроме того, доказать теорему [80]: если для некоторого вектора u^α величины $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$ одновременно равны нулю, то отсюда необходимым и достаточным образом следует, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$, т. е. пространство — время плоское [1]). Действительно, пусть имеют место равенства:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu = 0, \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu = 0.$$

Согласно лемме, доказываемой нами в Приложении I, второе из этих равенств эквивалентно соотношениям

$$(u_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + u_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + u_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda})\, u^\beta = 0.$$

Умножая их на u^ν и используя условие $u^2 = 1$, получим:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = 0. \tag{5.13}$$

Отсюда вытекает (для пространств Эйнштейна) равенство

$$R^{*}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = 0,$$

что, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$u_\gamma R_{\alpha\beta\lambda\mu} + u_\alpha R_{\beta\gamma\lambda\mu} + u_\beta R_{\gamma\alpha\lambda\mu} = 0. \tag{5.14}$$

Умножая (5.14) на u^γ и используя (5.13), получаем $R_{\alpha\beta\lambda\mu} \equiv$ $\equiv 0$, что и доказывает теорему.

2. Энергия и импульс гравитационного поля

Синг [83], обсуждая представления о гравитационных волнах с точки зрения переноса ими энергии, сформулировал два необходимых условия, которым должна удовлетворять функция $F(u^\alpha)$, выражающая плотность энергии гравитационного поля: 1) $F(u^\alpha) \geqslant 0$, 2) если $F(u^\alpha) = 0$, то $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, т. е. энергия поля равна нулю лишь в отсутствие самого поля. Легко видеть, что скаляр $W(u^\alpha)$ удовлетворяет обоим этим условиям: первое условие удовлетворяется в силу соотношений (5.9) и (5.12), а второе — в силу доказанной только что теоремы.

[1]) Заметим, что Матте в работе [82] записал уравнения гравитационного поля в пустом пространстве на языке величин (5.10) и (5.11) так, что в первом приближении они аналогичны уравнениям Максвелла, в которых роль напряженностей электрического и магнитного полей играют величины $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$. С точки зрения Матте, этой аналогии достаточно, чтобы убедиться в реальности существования гравитационных волн.

Таким образом, скаляр $W(u^\alpha)$ можно принять за определение «плотности энергии» гравитационного поля [1]). Поскольку вектор u^α временноподобен, можно выбрать локальную систему координат, в которой $u^\alpha = \delta_0^\alpha$. В этой системе, очевидно, $W = T^{0000}$, подобно тому как понятие о негравитационной энергии связывается с компонентой T^{00} тензора энергии — импульса «материи» в уравнениях Эйнштейна.

Рассмотрим теперь вектор [76, 84]

$$P^\alpha = \left(\delta_\rho^\alpha - u_\rho u^\alpha\right) T^{\rho\beta\lambda\mu} u_\beta u_\lambda u_\mu, \tag{5.15}$$

который мы по аналогии с электромагнитным вектором Пойнтинга (4.4) можем назвать *вектором Пойнтинга* (*или плотностью потока суперэнергии*) *гравитационного поля.*

В той же системе координат, очевидно,

$$P^0 = 0, \qquad P^i = T^{i000}.$$

Как показал Бель [76], в линейном приближении в каждой точке имеет место соотношение

$$W_{,0} = -P^i_{,i}, \tag{5.16}$$

откуда по теореме Гаусса

$$\partial_0 \int\limits_V W\,dV = -\int\limits_\Sigma P^i n_i\,d\Sigma, \tag{5.17}$$

где Σ — двумерная поверхность, ограничивающая данный трехмерный объем V, а n^i — единичный трехмерный вектор внешней нормали к Σ. Формула (5.17) означает [2]), что поток гравитационной суперэнергии через элемент $d\Sigma$ двумерной поверхности пропорционален $P^i n_i$. Следовательно, для того чтобы поток суперэнергии через любую поверхность Σ, окружающую данную точку, был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы $P^i(u^\alpha) = 0$. Мы приходим, таким образом, к формулировке критерия существования гравитационных волн по Белю.

[1]) Разумеется, с учетом плотностных свойств, необходимых для корректного применения такого рода понятий (скажем, «плотностью энергии по Белю» в физическом смысле будет величина $\sqrt{-g}\,W$).

[2]) Строго говоря, разбиение (5.16) нековариантно, поэтому все дальнейшие утверждения следует дополнять словами «в данной системе координат».

Первый критерий Беля. *Свободные гравитационные волны необходимым и достаточным образом связаны с наличием потока суперэнергии. Следовательно, в окрестности произвольной точки пустого пространства — времени V_4 существуют гравитационные волны, если для любого временноподобного единичного вектора u^α в этой точке $P^\alpha(u^\alpha) \neq 0$. Если же $P^\alpha(u^\alpha) = 0$, то гравитационные волны в окрестности данной точки отсутствуют.*

3. Эквивалентность критериев Пирани и Беля

Докажем теперь строгую эквивалентность первого критерия Беля и критерия Пирани (это доказательство найдено Белем [80]). Вследствие их ковариантного характера достаточно сделать это в использованной выше локальной системе координат, где $u^\alpha = \delta^\alpha_0$. В этой системе, очевидно,

$$P^i = R^{i\cdot 0\cdot}_{\cdot j\cdot k} R^{0j0k} = -\sum_{j,k} R_{ij0k} R_{0j0k}, \qquad P^0 = 0,$$

или, в другом выражении,

$$P^i = \frac{1}{2} C_{jm} \varepsilon^{jmi},$$

где трехмерный символ Леви-Чивиты ε^{jmi} равен $+1$, если подстановка 1, 2, 3 четная, -1, если нечетная, и 0 в остальных случаях, а антисимметричный трехмерный тензор C_{jm} имеет вид

$$C_{jm} = \sum_k (\mathscr{E}_{jk}\mathscr{H}_{km} - \mathscr{E}_{mk}\mathscr{H}_{kj}).$$

Как показал Бель, в бивекторном пространстве с базисными бивекторами, построенными на векторах натурального репера избранной нами системы координат (нумерация индексов в бивекторном пространстве отвечает выбору (3.9)),

$$\hat{\mathscr{E}}_{(1)} = e_{(1)} \wedge e_{(0)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(2)} = e_{(2)} \wedge e_{(0)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(3)} = e_{(3)} \wedge e_{(0)},$$

$$\hat{\mathscr{E}}_{(4)} = e_{(2)} \wedge e_{(3)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(5)} = e_{(3)} \wedge e_{(1)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(6)} = e_{(1)} \wedge e_{(2)},$$

матрица тензора кривизны допускает выражение:

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} -\mathscr{E} & \mathscr{H} \\ \mathscr{H} & \mathscr{E} \end{pmatrix},$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ — матрицы $\|\mathscr{E}_{ik}\|$ и $\|\mathscr{H}_{ik}\|$ пространственных компонент тензоров (5.10) и (5.11). Очевидно, если $P^{\mu}(u^{\alpha}) \equiv \equiv 0$, то $P^{i} = 0$ и, следовательно, $C_{jm} = 0$, т. е. матрицы $\|\mathscr{E}_{ik}\|$ и $\|\mathscr{H}_{ik}\|$ коммутируют. Но для того чтобы две трехмерные матрицы коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы в некотором базисе они одновременно приводились к диагональному виду. Таким образом, из условия $P^{\alpha} = 0$ и из формул (3.14) с необходимостью вытекает, что соответствующее поле $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — типа 1 по классификации Петрова. Обратно, если $P^{\mu}(u^{\alpha}) \neq 0$, т. е. соответствующее поле тяготения описывает гравитационные волны с точки зрения первого критерия Беля, то оно принадлежит к типу 2 или 3, т. е. удовлетворяет и критерию Пирани. Тем самым наше утверждение доказано.

4. Инварианты тензора кривизны в пустом пространстве

Второй критерий Беля, сформулированный им в работе [68], как и критерий Пирани, основан на распространении понятия изотропного поля, известного из электромагнетизма, на случай полей тяготения. Но, в отличие от Пирани, Бель строит определение изотропного поля тяготения, обобщая не понятие следования за полем, а саму концепцию изотропного поля как поля, инварианты которого равны нулю.

В то время как число функционально независимых скаляров, которые можно образовать из тензора Максвелла, равно двум, из тензора Римана можно образовать 14 функционально независимых скаляров, из которых в пустом пространстве отличны от нуля лишь четыре [85, 86]:

$$A = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \qquad B = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} \overset{*}{R}{}^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta},$$

$$C = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \qquad D = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \tag{5.18}$$

которые Бель называет *фундаментальными скалярами*. Тогда, определяя изотропное гравитационное поле условием

$$A = B = C = D = 0, \tag{5.19}$$

получим новый критерий существования гравитационных волн.

Второй критерий Беля. *Поля свободных гравитационных волн отождествляются с изотропными гравитационными полями, определяемыми условием* (5.19), *при* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. *Пустое пространство — время с тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ *описывает свободные гравитационные волны, если все четыре фундаментальных скаляра* (5.18) *обращаются в нуль. В противном случае свободные гравитационные волны отсутствуют.*

Определим теперь, какие типы полей тяготения по классификации Петрова удовлетворяют второму критерию Беля. Записывая условия (5.19) в бивекторном пространстве и используя канонический вид матрицы тензора кривизны (3.11), (3.14) — (3.18), убеждаемся, что из шести типов диаграммы Пенроуза условиям (5.19) удовлетворяют три: O, N и III. Отбрасывая тип O как тривиальный ($R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$), убеждаемся, что *второму критерию Беля удовлетворяют все поля тяготения типов N* **и** III *диаграммы Пенроуза, и только они.*

5. Векторы Дебеве и второй критерий Беля

Типы O, N и III диаграммы Пенроуза в пустом пространстве (характеризуемые равенством нулю собственных значений тензора R_{ab}) называются вырожденными типами полей тяготения. В классификации Беля [68] они составляют один тип cas 3.

Как показал Дебеве [81], для того чтобы пустое V_4 принадлежало к типу 3 по Белю, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало существование вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha l^\gamma &= 0, \\ \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha l^\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

При этом векторное поле l^α (вектор Дебеве) является единственным и изотропным. Таким образом, второй критерий Беля допускает следующую эквивалентную формулировку [75]:

Второй критерий Беля (новая формулировка). *Пустое пространство — время с тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ *описывает свободные гравитационные волны в том и только в том случае, если оно допускает существование изотропного векторного поля* l^α, *удовлетворяющего уравнениям* (5.20).

ГЛАВА 6

КРИТЕРИЙ ЛИХНЕРОВИЧА

1. Билинейная вырожденная форма тензора Максвелла

Критерий существования гравитационных волн, предложенный Лихнеровичем [87—90] (развернутое изложение см. в работе [62]), также опирается на аналогию с методом определения состояния электромагнитного излучения. Это последнее строится на базе решения задачи Коши для уравнений Эйнштейна — Максвелла в пространстве — времени V_4. Изложим вкратце основные моменты подхода Лихнеровича к этой задаче.

Пусть поле электромагнитного тензора $F_{\alpha\beta}$ — класса C^0 (C^2 на кусках). По формуле Адамара (2.13) разрывы первых производных $F_{\alpha\beta}$ на характеристической гиперповерхности $\varphi(x^\alpha)$ имеют вид

$$[F_{\alpha\beta,\gamma}] = f_{\alpha\beta} l_\gamma \qquad (l_\gamma \equiv \varphi_{,\gamma}), \tag{6.1}$$

где $f_{\alpha\beta}$ — коэффициенты разрывности для тензора $F_{\alpha\beta}$. Тогда из первой группы уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разрывности удовлетворяют уравнениям

$$l_\alpha f_{\beta\gamma} + l_\beta f_{\gamma\alpha} + l_\gamma f_{\alpha\beta} = 0, \tag{6.2}$$

а из второй группы уравнений Максвелла следует, что

$$l^\alpha f_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.3}$$

В качестве основного предположения примем, что разрывы тензора электромагнитного поля на фронте волны пропорциональны самому полю, т. е. что $f_{\alpha\beta} \sim F_{\alpha\beta}$. Тогда, очевидно, тензор $F_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнениям типа (6.2) и (6.3):

$$l_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \tag{6.4}$$

откуда с необходимостью вытекает изотропность вектора l^α: $l_\alpha l^\alpha = 0$. Второе характерное свойство вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям (6.4), состоит в том, что линии векторного поля l^α образуют конгруэнцию изотропных геодезических [260, 261].

Следуя Лихнеровичу, билинейную антисимметричную форму, удовлетворяющую уравнениям (6.4), будем называть *особой* (или *вырожденной*) *формой* второго порядка [1]). Тогда можно сформулировать теорему (Лихнерович [62], § 7): коэффициенты $F_{\alpha\beta}$ билинейной особой формы в V_4 сигнатуры —2 имеют вид

$$F_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha, \tag{6.5}$$

где b_α — некоторый вектор, ортогональный к l_α ($b_\alpha l^\alpha = 0$). Отсюда как очевидное следствие вытекает, что если компоненты тензора Максвелла $F_{\alpha\beta}$ являются коэффициентами билинейной особой формы, то они определяют изотропное электромагнитное поле. Обратно, изотропное электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ образует коэффициенты билинейной особой формы.

Мы уже установили ранее (гл. 4), что поле электромагнитного излучения можно определить как изотропное поле, отвечающее обращению в нуль инвариантов тензора Максвелла. Теперь мы видим, что изотропное электромагнитное поле, в свою очередь, можно определить как поле тензора Максвелла, компоненты $F_{\mu\nu}$ которого образуют коэффициенты билинейной особой формы. Тем самым устанавливается (эквивалентное данному в гл. 4) определение: *тензор Максвелла* $F_{\mu\nu} \neq 0$ *описывает электромагнитное излучение, если существует* (*необходимо изотропное*) *векторное поле* l^α, *удовлетворяющее уравнениям* (6.4).

2. Двойная вырожденная форма тензора Римана

Пусть все функции в метрике $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ — класса C^1 (C^3 на кусках). По формуле Адамара (2.14) разрывы вторых производных $g_{\alpha\beta}$ на характеристической гиперповерхности (2.15) имеют вид

$$[g_{\alpha\beta,\rho\sigma}] = a_{\alpha\beta} l_\rho l_\sigma. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в выражение для тензора Римана

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\lambda} - g_{\beta\lambda,\alpha\mu}) + K_{\alpha\beta\lambda\mu},$$

где $K_{\alpha\beta\lambda\mu}$ не содержит вторых производных метрики и, следовательно, не имеет разрыва на S, легко получить

---

[1]) 2-forme singuliere по оригинальной терминологии Лихнеровича [62].

выражение для разрывов $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$:

$$[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = \frac{1}{2}\,(a_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu + a_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda - a_{\alpha\mu}l_\beta l_\lambda - a_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu). \quad (6.7)$$

Отсюда с очевидностью следует, что

$$l_\alpha[R_{\beta\gamma\lambda\mu}] + l_\beta\,[R_{\gamma\alpha\lambda\mu}] + l_\gamma\,[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = 0. \quad (6.8)$$

Если предположить далее, что разрыв тензора энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$, фигурирующего справа в уравнениях Эйнштейна, на S равен нулю, а следовательно, в силу (1.1) $[R_{\alpha\beta}] = 0$, то, согласно Лихнеровичу ([62], § 20),

$$l^\alpha\,[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = 0. \quad (6.9)$$

Сделаем основное предположение: пусть разрывы гравитационного поля, описываемого тензором $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, на фронте волны S пропорциональны компонентам поля:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] \sim R_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Тогда тензор кривизны должен удовлетворять уравнениям вида

$$l_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + l_\alpha R_{\beta\lambda\gamma\delta} + l_\beta R_{\lambda\alpha\gamma\delta} = 0, \quad (6.10)$$

$$l^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \quad (6.11)$$

из которых следует, что вектор l^α при $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ изотропен. Действительно, свертывая уравнения (6.10) с l^α и принимая во внимание (6.11), получаем:

$$(l^\alpha l_\alpha)\,R_{\rho\beta\lambda\sigma} = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Введем следующее определение [88]: будем говорить, что всякий тензор

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu}\,(= -H_{\beta\alpha\lambda\mu} = -H_{\alpha\beta\mu\lambda} = H_{\lambda\mu\alpha\beta})$$

определяет *двойную вырожденную форму* [1]), если существует вектор l^α такой, что $H_{\alpha\beta\lambda\mu} \neq 0$ удовлетворяет уравнениям

$$l_{[\lambda}H_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0, \qquad l^\alpha H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0. \quad (6.12)$$

---

[1]) В оригинальной терминологии Лихнеровича — double forme singulière.

Из уравнений (6.12) Лихнерович выводит следующие три следствия:

1) l^α изотропен (доказательство аналогично предыдущему);

2) $l^\alpha l^\beta_{;\alpha} = 0$, т. е. поле вектора l^α определяет конгруэнцию изотропных геодезических;

3) тензор $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$ может быть представлен в виде

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu + b_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda - b_{\alpha\mu}l_\beta l_\lambda - b_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu, \tag{6.13}$$

где

$$b_{\alpha\lambda} = b_{\lambda\alpha}, \qquad b_{\alpha\lambda}l^\lambda = 0.$$

Тогда, свертывая выражение (6.13) с $g^{\beta\mu}$, найдем, что тензор $H_{\alpha\lambda} = H_{\alpha\beta\lambda\mu}g^{\beta\mu}$ имеет вид

$$H_{\alpha\lambda} = \tau l_\alpha l_\lambda \qquad \left(\tau = b^\alpha_\alpha\right). \tag{6.14}$$

На основе приведенных результатов можно сформулировать критерий существования гравитационных волн по Лихнеровичу.

Критерий Лихнеровича. *Пространство — время* V_4 *описывает состояние полного гравитационного излучения, если его тензор Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\neq 0$) *образует коэффициенты двойной особой формы, т.е. существует* (*изотропный*) *вектор* $l^\alpha \neq 0$, *удовлетворяющий уравнениям* (6.10) — (6.11). *Если такого вектора не существует, то гравитационное излучение отсутствует.*

Тензор Риччи для поля тяготения, удовлетворяющего критерию Лихнеровича, должен, как следует из (6.14), иметь вид

$$R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta. \tag{6.15}$$

Обратно, из условий (6.15) и (6.10) следуют условия (6.11) и изотропность вектора l^α. Соответственно, из (6.15), (6.11) и условия изотропности l^α следует (6.10) [62].

3. Критерий Лихнеровича и классификация Петрова

Из формулы (6.15) очевидно, что при $\tau = 0$ критерий Лихнеровича определяет гравитационные волны в пустом пространстве — времени («чисто волновое» гравитационное поле). Тогда (см. Приложение I) уравнения (6.10) и (6.11) становятся эквивалентными: из одних однозначно следуют другие:

$$l_{[\lambda}R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0 \leftrightarrow l^{\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{6.16}$$

Это означает, что чисто волновое гравитационное поле однозначно определяется любой одной из этих систем уравнений.

Как известно ([62], § 21; [68], § 6), пустое V_4 принадлежит к типу N диаграммы Пенроуза, если и только если существует векторное поле l^{α}, удовлетворяющее одной из систем (6.16). Таким образом, *все пространства V_4 типа N определяют чисто волновые гравитационные поля; обратно, класс полей чисто волнового типа исчерпывается полями типа N.*

При $\tau \neq 0$ в (6.15) мы получаем случай так называемого *полного гравитационного излучения* [1]). Классификация полей тяготения в этом случае производится на основе тензора Вейля (3.24), о чем уже говорилось в п. 3 гл. 3. Чтобы выяснить, какое место в этой классификации занимают поля полного гравитационного излучения по Лихнеровичу, докажем следующее вспомогательное утверждение: если в V_4 сигнатуры —2 существует вектор l^{α}, удовлетворяющий условиям Лихнеровича (6.10)—(6.11), то этот вектор удовлетворяет также уравнениям

$$\begin{aligned} l_{[\lambda}C_{\alpha\beta]\gamma\delta} &= 0, \\ l^{\alpha}C_{\alpha\beta\lambda\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{6.17}$$

т. е. тензор Вейля в данном V_4 определяет двойную особую форму. Действительно, подставляя выражение (6.15) в тензор Вейля (3.24) и используя условия (6.10), (6.11), а также свойство изотропности вектора l^{α}, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости уравнений (6.17).

Можно показать (Лихнерович [62], § 21), что если некоторый тензор $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$, обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны в пустом пространстве,

$$\begin{gathered} H_{\alpha\beta\gamma\delta} = -H_{\beta\alpha\gamma\delta} = -H_{\alpha\beta\delta\gamma} = H_{\gamma\delta\alpha\beta}, \\ H_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad H_{\alpha\beta\gamma\delta}\,g^{\beta\delta} = 0, \end{gathered} \tag{6.18}$$

определяет двойную особую форму, то в бивекторном пространстве R_6 матрица $\| H_{ab} \|$ этого тензора приводится

1) В терминологии Лихнеровича — radiation totale.

к каноническому виду, характерному для типа N диаграммы Пенроуза (вырожденный тип 2 по классификации Петрова).

Пусть пространство V_4 удовлетворяет критерию Лихнеровича. Тогда по доказанному выше оно допускает существование вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям (6.17). Принимая во внимание алгебраические свойства тензора Вейля (3.25)—(3.26) и используя результаты Лихнеровича, приходим к выводу, что тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принадлежит к вырожденному типу 2 по классификации Петрова для полей тяготения общего вида. Таким образом, получаем следующую общую теорему: *пространство — время V_4, удовлетворяющее критерию полного гравитационного излучения Лихнеровича, принадлежит к вырожденному типу 2 с точки зрения алгебраической структуры тензора Вейля* [91].

4. Конформное отображение волновых гравитационных полей

В качестве примера, иллюстрирующего применимость критерия Лихнеровича, рассмотрим предпринятое Коноплевой [92, 93] исследование специального случая конформного отображения чисто волновых гравитационных полей. Пусть V_4 — пространство — время, определяемое условиями

$$R^{\mu}_{[\tau;\lambda]} = 0,$$
$$R^{\nu}_{\mu} = -4\lambda^2 C^{\nu}_{\cdot\tau\lambda\mu} R^{\tau\lambda},$$

где λ — гравитационная постоянная, $C^{\nu}_{\cdot\tau\lambda\mu}$ — тензор конформной кривизны Вейля [1]). Поскольку пространства Эйнштейна (3.7) тривиально удовлетворяют этим условиям, предположим, что данное V_4 — неэйнштейново про-

---

[1]) Эти соотношения были получены в рамках исследования гравитации с точки зрения метода компенсирующих полей типа Янга — Миллса в теории с лагранжианом

$$L = R + \frac{\lambda^2}{4\pi} R_{\mu\nu\tau\lambda} R^{\mu\nu\tau\lambda}.$$

В эйнштейновской теории их следует интерпретировать не как уравнения поля, а как условия, выделяющие некоторый класс гравитационных полей (включающий в себя, в частности, все пространства Эйнштейна).

странство, конформное некоторому пространству Эйнштейна V_4'. Условия осуществимости такого отображения можно привести к виду

$$R^{\mu}_{[\tau;\lambda]} = 2e^{-2\sigma} R'^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\tau\lambda\cdot\cdot}\sigma_\nu,$$

где $R'_{\tau\lambda\mu\nu}$ — тензор Римана для пространства V_4', а $\sigma_\nu \equiv \partial_\nu\sigma$. Отсюда следует, что V_4' удовлетворяет условию

$$R'^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\tau\lambda\cdot\cdot}\sigma_\nu = 0,$$

т. е. V_4' есть пространство Эйнштейна вырожденного второго типа по Петрову, удовлетворяющее критерию чистого гравитационного излучения Лихнеровича, причем σ_ν — изотропный вектор, описывающий распространение фронта гравитационной волны.

Подобно тому, как в электродинамике уравнения

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0$$

позволяют выразить тензор Максвелла $F_{\mu\nu}$ через вектор-потенциал A_μ и его первые производные, исходные уравнения

$$R_{\mu[\tau;\lambda]} \equiv \frac{1}{2} R^{\cdot\cdot\cdot\sigma}_{\tau\lambda\mu\cdot;\sigma} = 0$$

позволяют выразить тензор Риччи через вектор σ_λ и его первые производные:

$$R_{\mu\lambda} = -2\sigma_{\lambda;\mu} + 2\sigma_\mu\sigma_\lambda + \frac{1}{3}\varkappa g_{\mu\lambda}.$$

Зная, что вектор σ_μ — градиент, а также используя, по аналогии с электродинамикой, условия типа Лоренца $\sigma^{\mu}_{;\mu} = 2\varkappa/3$, получим волновое уравнение для вектора σ_μ:

$$g^{\alpha\beta}\sigma_{\mu;\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом, вектор σ_λ в пространстве Эйнштейна V_4' удовлетворяет условию чисто волнового гравитационного поля по Лихнеровичу, а в конформном ему исходном пространстве V_4 описывает гравитационные волны в том же смысле, в каком вектор-потенциал электромагнитного поля удовлетворяет ковариантному волновому уравнению.

ГЛАВА 7

КРИТЕРИЙ ЗЕЛЬМАНОВА

1. Обобщенный волновой оператор

Критерий существования гравитационных волн, сформулированный в работе [94] [1]) на основе общей идеи Зельманова, предполагает использование следующего *ковариантного обобщения волнового оператора*:

$$\mathsf{D} \equiv -g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma. \tag{7.1}$$

Тогда общековариантное волновое уравнение относительно произвольного тензорного поля $Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$ в общем случае будет иметь вид

$$\mathsf{D}Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots} = K^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}, \tag{7.2}$$

где $K^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$ — некоторый тензор, не содержащий производных выше первого порядка от $Q^{\alpha\cdots}_{\lambda\cdots}$. Уравнение вида (7.2) применял Толмэн [63] при описании электромагнитных волн в римановом пространстве — времени.

Очевидно, что однородное уравнение типа (7.2) является тривиальным по отношению к метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$, а в случае пространств Эйнштейна — так же и по отношению к тензору Риччи $R_{\alpha\beta}$. Поэтому возникла мысль связать такое уравнение с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, что и было предложено А. Л. Зельмановым. Заметим, однако, что уравнение (7.2) относительно тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{7.3}$$

также оказывается тривиальным (т. е. обращается в тождество) в случае симметрических пространств, для которых тензор Римана ковариантно постоянен, $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} = 0$ (при этом, конечно, должно быть $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$). Кроме того, уравнение (7.3) может обращаться в тождество и при некоторых

---

[1]) Первая (предварительная) публикация исследования гравитационных волн на основе волнового оператора (7.1) относится к 1962 г. (см. предисловие Иваненко к русскому переводу книги Вебера [95]). Впоследствии Рой и Радхакришна [96] независимо предложили определять гравитационные волны путем применения оператора (7.1) к тензору кривизны.

специальных выборах тензора $K_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. Так, если взять

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} R \cdot R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} - \\ - 2\left(R_{\sigma\delta\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + R_{\gamma\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\beta\rho\delta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}\right),$$

то для всех пространств Эйнштейна (3.7) уравнение (7.3) удовлетворяется тождественно [97] (см. также Приложение I, теорема 3).

Таким образом, подходя к представлению о гравитационных волнах на основе уравнения (7.3), необходимо, во-первых, потребовать, чтобы пространство — время V_4 не было симметрическим, а во-вторых — задаться выбором тензора $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Критерий Зельманова основан на предположении [1]), что $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

Критерий Зельманова. *Пространство — время V_4 описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда его тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$* 1) *не является ковариантно постоянным, т. е. $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} \neq 0$,* 2) *удовлетворяет общековариантному волновому уравнению*:

$$\mathbf{D} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{7.4}$$

2. Характеристики обобщенного волнового уравнения

Для физического обоснования критерия Зельманова, имеющего на первый взгляд несколько формальный и искусственный характер, представляется существенным исследование характеристик тензорных уравнений (7.4) как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных, роль которых играют собственно компоненты тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Как показала Савельева [99], левую часть уравнений (7.4) можно тождественными преобразованиями привести к виду

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\,\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^\sigma) + \Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^\tau_{\rho\sigma}) + \\ + Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(R^\sigma_\rho), \tag{7.5}$$

где введены обозначения:

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^\sigma) = -\left[(\Gamma^\sigma_{,\gamma} - \Gamma^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\gamma}) R_{\alpha\beta\sigma\delta} + (\Gamma^\sigma_{,\alpha} - \Gamma^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\alpha}) R_{\sigma\beta\gamma\delta} + \\ + (\Gamma^\sigma_{,\beta} - \Gamma^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\beta}) R_{\alpha\sigma\gamma\delta} + (\Gamma^\sigma_{,\delta} - \Gamma^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\delta}) R_{\alpha\beta\gamma\sigma} + \Gamma^\sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}\right],$$

---

[1]) В предположении, что $K_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$, уравнение (7.3) рассмотрено в работе [98].

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}) = (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\gamma} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}) R_{\alpha\beta\sigma\delta} +$$
$$+ (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\alpha} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}) R_{\sigma\beta\gamma\delta} + (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\beta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}) R_{\alpha\sigma\gamma\delta} +$$
$$+ (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{,\delta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\delta}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}) R_{\alpha\beta\gamma\sigma} - g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma} R_{\alpha\beta\sigma\delta,\nu} +$$
$$+ \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\nu}) + \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\sigma,\nu}) -$$
$$- g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma} R_{\alpha\beta\sigma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} R_{\sigma\beta\gamma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} R_{\alpha\sigma\gamma\delta,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\delta} R_{\alpha\beta\gamma\sigma,\mu}),$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta}(R^{\sigma}_{\rho}) = -[R^{\sigma}_{\gamma} R_{\alpha\beta\sigma\delta} + R^{\sigma}_{\alpha} R_{\sigma\beta\gamma\delta} + R^{\sigma}_{\beta} R_{\alpha\sigma\gamma\delta} + R^{\sigma}_{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\sigma}].$$

Здесь, как и прежде, $\Gamma^{\sigma} = - g^{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$. Мы видим, что в тождестве (7.5) член $L_{\alpha\beta\gamma\delta}$ алгебраически выражается через величины Γ^{σ} и их производные, а следовательно, тождественно обращается в нуль при $\Gamma^{\sigma} = 0$, т. е. в гармонической системе координат. Член $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ алгебраически выражается через символы Кристоффеля $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, следовательно, он может быть обращен в нуль в любой заданной точке пространства — времени. Наконец, член $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тождественно равен нулю в пустом пространстве — времени ($R_{\alpha\beta} = 0$).

Пусть в рассматриваемой области пустого пространства — времени введена гармоническая система координат. Тогда в выражениях (7.5) члены $L_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тождественно исчезают. Предположим далее, что выбранная система координат является локально геодезической в некоторой заданной точке M. Тогда в M, во-первых, член $\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обращается в нуль и, во-вторых, матрица $\| g^{\rho\sigma} \|$ принимает канонический вид, отвечающий сигнатуре $(+, -, -, -)$ пространства — времени. Таким образом, уравнение (7.4), рассматриваемое как система уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент риманова тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, является уравнением гиперболического типа.

Рассматривая задачу Коши с начальными данными $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta,0}$ на гиперповерхности S вида (2.16) (в локально выбранной системе координат), приведем систему уравнений (7.4) к виду

$$g^{00} R_{\alpha\beta\gamma\delta,00} + \cdots = 0,$$

где точками обозначены члены, не содержащие производных $R_{\alpha\beta\gamma\delta,00}$ и, следовательно, полностью определяемые начальными данными. Отсюда вытекает, что уравнением характеристик для системы уравнений (7.4) в данной системе координат служит уравнение $g^{00} = 0$. Записывая его в общих координатах (аналогично тому, как это было сделано для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве в гл. 2), мы приходим к выводу, что *характеристическая гиперповерхность системы волновых уравнений* (7.4) *совпадает с характеристической гиперповерхностью уравнений Эйнштейна и выражается уравнением* (2.15), *где функция* φ *удовлетворяет уравнению эйконала* (2.22).

Следовательно, общековариантная система волновых уравнений (7.4) в пустом пространстве описывает распространение разрывов вторых производных тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ вдоль бихарактеристик (изотропных геодезических) уравнений Эйнштейна.

Кроме того, из записи (7.5) можно заключить,что в некоторой системе координат (а именно, гармонической) в пустом пространстве в бесконечно малой окрестности заданной точки M общековариантная система (7.4) принимает вид обычной волновой системы уравнений относительно каждой компоненты тензора Римана

$$g^{\rho\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\delta,\ \rho\sigma}=0, \tag{7.6}$$

что непосредственно связывает критерий Зельманова с обычным пониманием «локальных волн кривизны» в окрестности точки M.

3. Критерий Зельманова и классификация Петрова

Для определения типа полей тяготения, удовлетворяющих критерию Зельманова, ограничимся случаем пространств Эйнштейна $^*T_i$:

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{7.7}$$

В пространствах $^*T_i$, как известно, имеет место тождество [97]

$$g^{\rho\sigma}R_{\alpha\beta\gamma\delta;\ \rho\sigma}+R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+ \\ +2\,(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}-R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta})=0 \tag{7.8}$$

(см. Приложение I, теорема 3). Из тождества (7.8) вытекает очевидный результат: для того чтобы тензор Римана пространства $^*T_i$ удовлетворял уравнениям (7.4), необходимо и достаточно, чтобы этот тензор удовлетворял условиям

$$R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+2\,(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}-R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho}R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}+\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta})=0. \tag{7.9}$$

Записывая условия (7.9) в бивекторном пространстве R_6 в каноническом неголономном орторепере и используя канонический вид матрицы тензора кривизны (3.11), (3.14) — (3.18), приходим к следующим выводам [100, 101]. Для пространств $^*T_1$ условия (7.9) приводят к системе уравнений

$$\alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_1 (\beta_2 - \beta_3) = 0,$$
$$\beta_1 (\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_1 (\beta_2 - \beta_3) = 0$$

и еще четырем уравнениям, получающимся из приведенных циклированием по индексам 1, 2, 3. Эти уравнения представляют собой записанные в R_6 условия интегрируемости уравнений

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma} = 0, \tag{7.10}$$

определяющих симметрические пространства ([65], стр. 399). При этом новая система уравнений, получающаяся путем ковариантного дифференцирования условий интегрируемости, удовлетворяется тождественно в силу исходных уравнений (7.10). Следовательно, любое пространство $^*T_1$, определяемое условиями (7.9), является симметрическим пространством.

Для пространств $^*T_2$ соотношения (7.9) в каноническом орторепере записываются в виде системы уравнений [101], совместной только при условиях

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \varkappa = 0. \tag{7.11}$$

Как мы видели, эти условия определяют пустое пространство T_2 вырожденного второго типа (тип N диаграммы Пенроуза). Следовательно, пространства $^*T_2$, определяемые соотношениями (7.9), могут быть только пространствами T_2 ($\varkappa = 0$) типа N.

Обратно, записывая соотношения (7.9) в каноническом орторепере в бивекторном пространстве R_6 и принимая во внимание условия (7.11), можно убедиться, что (7.9) удовлетворяются тождественно, т. е. любое пространство Эйнштейна T_2 типа N удовлетворяет условиям (7.9).

Наконец, записывая условия (7.9) в каноническом орторепере для пространств $^*T_3$, убеждаемся, что при любом $\varkappa$ они приводят к противоречию. Это означает, что пространства $^*T_3$ не могут удовлетворять условиям (7.9).

Как показал Петров [57], существует только два симметрических пространства $^*T_2$; они принадлежат к вырожденному типу 2 пространств T_2 ($\varkappa = 0$) и в специальной системе координат описываются метриками

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 - \mathrm{sh}^2\, x^0 {dx^2}^2 - \sin^2(x^0 + k)\, {dx^3}^2,$$
$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \mathrm{ch}^2\, x^0 {dx^2}^2 + \cos^2(x^0 + k)\, {dx^3}^2 \qquad (7.12)$$
$$(k = \mathrm{const}).$$

Таким образом, *пространства Эйнштейна, удовлетворяющие критерию Зельманова, могут быть только пустыми пространствами* V_4 ($\varkappa = 0$) *типа* N по Петрову. Обратно, любое пустое пространство — время типа N, за исключением двух симметрических пространств (7.12), удовлетворяет критерию Зельманова.

4. Связь между критериями Зельманова и Лихнеровича. Примеры

На основании алгебраической классификации Петрова нетрудно выяснить, как связаны между собой критерии Зельманова и Лихнеровича в случае пустых V_4. Мы уже знаем, что свободные гравитационные волны в смысле Лихнеровича отвечают полям типа N на диаграмме Пенроуза. Следовательно, *любое пустое* V_4, *удовлетворяющее критерию Зельманова, удовлетворяет и критерию Лихнеровича. Обратно, любое пустое* V_4, *удовлетворяющее критерию Лихнеровича, за исключением двух пространств* (7.12), *удовлетворяет критерию Зельманова.*

Для пространств V_4 общего вида ($R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$) вопрос об общей связи критерия Зельманова с классификацией Петрова, а также с критерием Лихнеровича пока остается невыясненным. Однако уже сейчас можно утверждать, что существуют поля тяготения вида $R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие критерию Зельманова. В работах [102, 103] приводится ряд таких решений уравнений Эйнштейна с не равной нулю правой частью

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda \tau_{\alpha\beta}, \qquad (7.13)$$

интерпретируемой как тензор энергии — импульса изотропного электромагнитного поля.

Условие изотропности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, сформулированное в гл. 4, налагает жесткое ограничение на тензор энергии — импульса $\tau_{\alpha\beta}$, а следовательно, в силу уравнений поля (7.13), на тензор Риччи пространства — времени. Для того чтобы метрика $g_{\mu\nu}$ пространства — времени описывала поле тяготения с тензором энергии — импульса изотропного электромагнитного поля, необходимо и достаточно, чтобы отвечающий ей тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ удовлетворял следующей совокупности условий: алгебраическим условиям Райнича — Уилера [36]

$$R = 0, \quad R_{\alpha\rho}R^{\rho\beta} = \frac{1}{4}\delta^{\beta}_{\alpha}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = 0 \tag{7.14}$$

и дифференциальным условиям Нордтведта — Пагельса [104]

$$\eta^{\alpha\mu\nu\sigma}(R_{\beta\nu;\sigma}R_{\mu\gamma} - R_{\beta\mu;\sigma}R_{\nu\gamma}) = 0. \tag{7.15}$$

В свою очередь, существование фронта электромагнитной волны в ряде случаев [103, 105] приводит к дополнительному свойству симметрии пространства — времени V_4, интерпретируемому в терминах групп движений данного V_4 (непрерывных групп преобразований координат, сохраняющих функциональный вид метрики, см., например, [58, 106]). А именно, метрики таких V_4 допускают r-параметрические группы движений G_r $(1 \leqslant r \leqslant 6)$, оставляющие неизменными изотропные трехмерные гиперповерхности $^*V_3$, служащие поверхностями волнового фронта. Если любая точка некоторой поверхности в V_4 преобразованиями группы G_r может быть переведена в любую другую точку этой поверхности, то последняя называется поверхностью транзитивности группы G_r. Таким образом, изотропные поверхности транзитивности групп движений, действующих в таких полях тяготения, либо совпадают с фронтом электромагнитной волны, либо (при $r < 3$) принадлежат ему.

Приведем некоторые метрики, удовлетворяющие условиям (7.14) — (7.15), т. е. описывающие поля тяготения, порождаемые электромагнитным излучением, и, соответственно, допускающие группу движений G_r $(r \geqslant 3)$, действующую транзитивно на изотропной гиперповерхности волнового фронта [103]:

1) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \alpha(x^0)\,dx^{2\,2} + 2\beta(x^0)\,dx^2dx^3 + \gamma(x^0)\,dx^{3\,2}, \tag{7.16}$$

допускает группы движений G_3, G_4 и G_5, действующие на изотропных трехмерных гиперповерхностях транзитивности $^*V_3$ (здесь $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$).

2) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} - 2x^3 dx^2 (dx^0 + dx^1) + \\ + \alpha (x^0 + x^1)(dx^{2\,2} + dx^{3\,2}), \qquad (7.17)$$

допускает группу движений G_4, действующую транзитивно на изотропной гиперповерхности $^*V_3$. Требование положительности плотности — давления электромагнитного излучения, $R_{00} < 0$, при лоренцевой сигнатуре в точке налагает на функцию α следующие условия:

$$\alpha < 0, \qquad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - 2\alpha \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} > -1 \quad (u = x^0 + x^1).$$

3) Пространство — время, описываемое интервалом

$$ds^2 = du\,dv - 2x^3 du\,dx^2 + \alpha(u)\,dx^{2\,2} + 2\beta(u)\,dx^2 dx^3 + \\ + \gamma(u)\,dx^{3\,2}, \qquad (7.18)$$

иными словами, пространство — время с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x^3 & 0 \\ 0 & -1 & -x^3 & 0 \\ -x^3 & -x^3 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \qquad (7.19)$$

допускает группу движений G_3, действующую на изотропной гиперповерхности транзитивности $^*V_3$. Требование $R_{00} < 0$ при лоренцевой сигнатуре приводит к следующим условиям на входящие в решение (7.19) функции:

$$\alpha < 0, \qquad m > 0,$$

$$2m\left[\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial u} - 1\right] - \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2 < 0,$$

где $m = \alpha\gamma - \beta^2$. Этим условиям, очевидно, без труда можно удовлетворить выбором подходящих функций α, β, γ.

Прямой проверкой легко убедиться, что метрики (7.16)—(7.19) удовлетворяют критерию Зельманова. Кроме того, как показано в работе [107], пространства V_4 с такими метриками допускают изотропное векторное поле $l^\alpha = \delta^\alpha_1$, удовлетворяющее уравнениям (6.10) — (6.11), т. е. описывают гравитационные волны и в смысле Лихнеровича.

Однако существуют решения уравнения тяготения (7.13) с $\tau_{\alpha\beta}\neq 0$, которые удовлетворяют критерию Лихнеровича, но не удовлетворяют критерию Зельманова. Примеры такого рода решений, полученных в работах [91, 107, 108], будут рассмотрены в гл. 10.

ГЛАВА 8

ДРУГИЕ КРИТЕРИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Критерий Дебеве

Подход Дебеве к вопросу о волновых свойствах гравитационных полей основывается на их связи в пустом пространстве — времени с изотропными векторными полями.

Как известно из работ Дебеве [66, 81, 109], Беля [80], Сакса [110] и др., в пустом V_4 тензору Римана можно сопоставить две изотропные двумерные гиперповерхности, в совокупности натянутые в каждой точке на четыре изотропных вектора: $l^{\alpha}_{(N)}$ $(N=1, 2, 3, 4)$. Пользуясь каноническим видом матрицы тензора кривизны в бивекторном пространстве $\| R_{ab} \|$, можно показать, что в каждом пустом V_4 существует по меньшей мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля $l^{\alpha}_{(N)}\neq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$l_{[\lambda}R_{\alpha]\beta\gamma[\delta}l_{\sigma]}l^{\beta}l^{\gamma}=0 \tag{8.1}$$

(теорема Дебеве [66] в формулировке Сакса [110]).

Определим, следуя Дебеве, *тензор суперэнергии*

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{1}{8}\rho\left[(g_{\alpha\beta}p_{\lambda\mu}+g_{\lambda\mu}p_{\alpha\beta}+g_{\alpha\lambda}p_{\beta\mu}+g_{\beta\mu}p_{\alpha\lambda}+\right.$$
$$\left.+g_{\beta\lambda}p_{\alpha\mu}+g_{\alpha\mu}p_{\beta\lambda})-\frac{96}{L}L_{\alpha\beta\lambda\mu}\right], \tag{8.2}$$

где ρ — произвольный не равный нулю скаляр и введен полностью симметричный тензор

$$L_{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{1}{24}\underset{(L,M,N,Q)}{\mathsf{P}}l^{L}_{\alpha}\,l^{M}_{\beta}\,l^{N}_{\lambda}\,l^{Q}_{\mu}, \tag{8.3}$$

в котором P обозначает суммирование по всем перестановкам индексов. Кроме того, в (8.2) фигурируют величины

$$L = L^{\lambda}_{\lambda}, \quad L_{\lambda\mu} = L^{\cdot\alpha\cdot\cdot}_{\alpha\cdot\lambda\mu}, \quad p_{\lambda\mu} = \frac{12}{L} L_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu},$$

причем предполагается, что $L \neq 0$.

Тензор Дебеве (8.2) в пустом пространстве — времени обладает следующими свойствами [81]: 1) он полностью симметричен; 2) всякая его свертка с метрическим тензором равна нулю:

$$g^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0; \tag{8.4}$$

3) тензор $V_{\alpha\beta\lambda\mu}$ является консервативным:

$$V^{\alpha}_{\beta\lambda\mu;\,\alpha} = 0; \tag{8.5}$$

4) тензор $V_{\alpha\beta\lambda\mu}$ удовлетворяет алгебраическому тождеству:

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} V^{\gamma\beta\lambda\mu} = \frac{9}{4} \rho^2 (1 - 3\sigma) \delta^{\gamma}_{\alpha}, \tag{8.6}$$

где

$$\sigma = 1 - 2 \frac{(l_{23})^2 (l_{14})^2 + (l_{13})^2 (l_{24})^2 + (l_{12})^2 (l_{34})^2}{(l_{23} l_{14} + l_{13} l_{24} + l_{12} l_{34})^2},$$

$$l_{(MN)} = g_{\alpha\beta} l^{\alpha}_{(M)} l^{\beta}_{(N)}.$$

Легко видеть, что по своим свойствам тензор Дебеве (8.2) обнаруживает глубокое сходство с тензором суперэнергии Беля (5.3). Переходя в канонический орторепер и задаваясь конкретным видом изотропных векторов l^{α}, можно показать, что с точностью до скалярного множителя оба тензора совпадают:

$$V_{\alpha\beta\lambda\mu} \cong T_{\alpha\beta\lambda\mu}.$$

Отсюда следует, что тензор Дебеве, как и тензор Беля, можно положить в основу определения «потока суперэнергии» гравитационного поля. Таким образом, *критерий Дебеве полностью эквивалентен первому критерию Беля.*

2. Гравитационные волны интегрируемого типа (критерии Хэли и Зунда — Левина)

В работах Хэли [111—117], а также Зунда и Левина [118—120] гравитационные волны определяются по Лихнеровичу, но при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на метрику пространства — времени. Хэли, осуществляя идею Лихнеровича [62], рассмотрел поля тяготения, удовлетворяющие критерию «гравитационных волн интегрируемого типа» [1]).

По определению, *пространство — время V_4 описывает гравитационные волны интегрируемого типа, если оно допускает векторное поле l^α, удовлетворяющее, кроме уравнений* (6.10) — (6.11) *и вытекающего из них условия изотропности l^α, также условию градиентности*

$$l_\alpha = \partial_\alpha l, \tag{8.7}$$

где l — некоторая скалярная функция координат.

Примером *свободных* гравитационных волн интегрируемого типа может служить поле тяготения, описываемое метрикой [113]:

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + 2q\chi l_\alpha l_\beta, \tag{8.8}$$

где $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$ — метрика плоского пространства — времени,

$$\begin{aligned} &l_\alpha = f_\alpha/\chi, \qquad \chi = \frac{d\psi}{dl} + x^\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial l}, \\ &l^\alpha l_\alpha = 0, \qquad l^\alpha_{;\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{8.9}$$

ψ и f_γ — пять произвольных функций аргумента l, q — скаляр.

Пример поля тяготения, отвечающего случаю *полного* гравитационного излучения интегрируемого типа, рассмотрен в работах [114, 115]. Соответствующая метрика записывается в виде

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + l_\alpha u_\beta + l_\beta u_\alpha, \tag{8.10}$$

где векторы u_α и l_α (8.7) удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнений (6.10) — (6.11).

Зунд и Левин [119] ввели определение «полного гравитационного излучения специального типа»: *пространство — время V_4 отвечает случаю полного гравитационного излучения специального типа, если данное V_4* 1) *является конформно плоским*, 2) *допускает ковариантно постоянное векторное поле l^α, удовлетворяющее условиям Лихнеровича*

[1]) В терминологии Хэли — Лихнеровича — «de type intégrable».

(6.10) — (6.11), *а также уравнениям*

$$l_\alpha = (\ln \tau)_{,\alpha}, \tag{8.11}$$

где τ — скаляр, определяемый вытекающей из уравнений (6.10) — (6.11) системой уравнений (6.15).

Этому определению удовлетворяет значительно более узкий класс полей тяготения, чем класс полей, описывающих полное гравитационное излучение интегрируемого типа по Лихнеровичу. Действительно, нетрудно показать, что метрики, описывающие полное гравитационное излучение специального типа, должны быть представимы в виде [119]

$$g_{\alpha\beta} = a^{-2}\varphi^2(\lambda)\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}, \tag{8.12}$$

$$\lambda = x^0 + x^1, \quad a^2 = \text{const} \neq 0,$$

где функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(\lambda) \neq (\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma)^{-2},$$

а α, β и γ — числовые коэффициенты. При этом компоненты вектора l^α задаются в виде (8.11), скаляр τ имеет вид

$$\tau = 2\varphi^{-6}[2(\varphi')^2 - \varphi\varphi''] \neq \text{const}, \tag{8.13}$$

а штрих обозначает дифференцирование по λ.

Как отметили Зунд и Левин, не всякое поле тяготения, являющееся полем полного гравитационного излучения в смысле Лихнеровича и уравнений (6.10) — (6.11), удовлетворяет критерию Зельманова и уравнению (7.4). Однако всякое полное гравитационное излучение специального типа в смысле Зунда и Левина, как можно показать [119], автоматически удовлетворяет критерию Зельманова. Последнее обстоятельство представляет интерес для выяснения связи критериев Зельманова и Лихнеровича в случае непустого пространства — времени.

3. Критерий Малдыбаевой

Критерий гравитационных волн, предложенный Малдыбаевой [121], основан, как и критерий Зельманова, на общековариантном обобщении оператора Даламбера. Однако, в отличие от оператора (7.1), для описания гравитационных волн применяется оператор де Рама [42]

$$\Delta = d\delta + \delta d, \tag{8.14}$$

где d — оператор внешнего дифференцирования (см. [122]), а δ — оператор ко-дифференцирования (см. [42]), т. е. взятия дивергенции косых дифференциальных форм.

В силу своей структуры оператор (8.14) применим только к косым полилинейным дифференциальным формам. Рассмотрим, например, его применение к билинейной косой форме

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \tag{8.15}$$

где $F_{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в области, где нет источников, можно записать в виде двух групп уравнений [123]:

$$\mathrm{d}F = 0, \qquad \delta F = 0, \tag{8.16}$$

из которых вытекает, что 2-форма F удовлетворяет обобщенному волновому уравнению

$$\Delta F = 0. \tag{8.17}$$

Впервые уравнение (8.17) было получено Толмэном [63]. Заметим, что, в отличие от оператора (7.1), оператор (8.14) обладает рядом преимущественных топологических [42] и групповых [124] свойств. Идея применения этого оператора к исследованию гравитационных волновых полей принадлежит Лихнеровичу [43].

Для описания гравитационных волн в терминах тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ строится четырехмерная квадратная матрица $\| \Omega_{\alpha\beta} \|$, элементами которой являются билинейные косые формы вида

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, dx^\gamma \wedge dx^\delta \tag{8.18}$$

(«2-форма кривизны» по терминологии Лихнеровича [125]).

Согласно определению Малдыбаевой, *пустое пространство — время с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяет гравитационные волны, если соответствующая ему 2-форма кривизны $\Omega_{\alpha\beta}$ удовлетворяет обобщенному волновому уравнению*

$$\Delta \Omega_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.19}$$

где оператор Δ определяется формулой (8.14), а 2-форма $\Omega_{\alpha\beta}$ — формулой (8.18).

Выразив оператор Δ через ковариантные производные с помощью формулы де Рама [42], запишем уравнения (8.19) в тензорном виде:

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\rho\gamma\delta\tau}\, R_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\rho\tau} = 0, \tag{8.20}$$

где оператор D определяется формулой (7.1).

Обобщая рассуждения на случай пространств Эйнштейна (3.7), получаем уравнения

$$\mathsf{D}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\rho\gamma\delta\tau}\, R_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\rho\tau} - 2\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{8.21}$$

Используя тождество (7.8) и записывая уравнения (8.21) в каноническом орторепере, можно показать, что они удовлетворяются тогда и только тогда, когда тензор Римана принадлежит к вырожденному второму типу по Петрову (типу N диаграммы (3.20) при $\varkappa = 0$, см. [126]).

Итак, *критерию Малдыбаевой удовлетворяют пространства Эйнштейна вырожденного второго типа* T_2, *и только они*. Таким образом, в пространствах Эйнштейна критерии Зельманова и Малдыбаевой выделяют один и тот же класс полей тяготения; исключение составляют симметрические пространства (7.12) типа N, удовлетворяющие критерию Малдыбаевой, но не критерию Зельманова.

4. Критерий Мизры и Сингха

Критерий гравитационных волн, данный Мизрой и Сингхом [127, 128], опирается на понятие изотропного гравитационного поля, определяемое с помощью рассмотренных нами выше симметричных тензоров Матте (5.10) и (5.11). Как нетрудно убедиться, перейдя в систему координат, где $l_\alpha = \delta_\alpha^0$, ранг каждой из матриц $\|\mathscr{E}_{\alpha\lambda}\|$ и $\|\mathscr{H}_{\alpha\lambda}\|$ не превышает 3. Далее, тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$ ориентированы в пространстве:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{\alpha\lambda} u^\lambda &= 0, \\ \mathscr{H}_{\alpha\lambda} u^\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Таким образом, тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$ в известном смысле аналогичны трехмерным векторам E^i и H^i электрического и магнитного полей [82]. Благодаря этому удается построить определение изотропного гравитационного поля, опираясь на аналогию с изотропным электромагнитным полем (гл. 4).

Изотропное гравитационное поле в этом подходе характеризуется, во-первых, совпадением собственных значений матриц $\| \mathscr{E}_{\alpha\lambda} \|$ и $\| \mathscr{H}_{\alpha\lambda} \|$ (аналогия с совпадением модулей векторов электрического и магнитного полей), а во-вторых, — тем, что одно из собственных направлений является общим для обеих матриц (аналогия со взаимной ортогональностью трехмерных векторов E^i и H^i). Введя третье требование—равенство нулю собственных значений матриц $\| \mathscr{E}_{\alpha\lambda} \|$ и $\| \mathscr{H}_{\alpha\lambda} \|$, придем к критерию Мизры — Сингха: *пустое пространство — время* V_4, *обладающее тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\mu}$, *описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда тензоры* (5.10) *и* (5.11) *удовлетворяют соотношениям*

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda}\mathscr{E}^{\alpha\lambda} = \mathscr{H}_{\alpha\lambda}\mathscr{H}^{\alpha\lambda}, \tag{8.23}$$

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda}\mathscr{E}^{\lambda}_{\beta}\mathscr{E}^{\beta\gamma} = \mathscr{H}_{\alpha\lambda}\mathscr{H}^{\lambda}_{\beta}\mathscr{H}^{\beta\gamma} = 0. \tag{8.24}$$

В своем исследовании свойств полей тяготения в пустом пространстве, удовлетворяющих данному критерию, Мизра и Сингх доказывают две важные теоремы. Первая теорема утверждает, что пространство — время, удовлетворяющее этому критерию, допускает существование изотропного векторного поля l^α, для которого выполняются условия

$$R_{\alpha\beta\gamma\,[\delta}l_{\lambda]}\, l^\gamma = 0. \tag{8.25}$$

Но, согласно известному результату Дебеве [66] и Беля [80] (см. гл. 3, п. 4), пустое пространство — время V_4, определяемое условием (8.25), может принадлежать только к типам N или III диаграммы Пенроуза (3.20).

Вторая теорема утверждает следующее: для того чтобы пространство — время V_4 описывало гравитационные волны в смысле Мизры — Сингха, необходимо и достаточно, чтобы его тензор Римана удовлетворял уравнениям

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, R^{\gamma\delta\mu\nu}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \tag{8.26}$$

Записывая эти уравнения в каноническом орторепере для канонического вида матрицы тензора Римана, вновь убеждаемся, что они всегда удовлетворяются для полей типов N и III диаграммы (3.20), и только для них.

Таким образом, *для того чтобы пустое пространство — время V_4 удовлетворяло критерию Мизры — Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типу N или III по Петрову. Следовательно, критерий Мизры — Сингха эквивалентен второму критерию Беля.*

Критерий Мизры — Сингха был обобщен его авторами [127] на случай непустых пространств — времен V_4 (поля полного гравитационного излучения). Чтобы осуществить такое обобщение, достаточно сформулировать определение изотропного гравитационного поля в терминах тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. гл. 3, п. 3). Действительно, аналогично тензорам Матте $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, введем симметричные тензоры

$$\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda} = C_{\alpha\beta\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu}, \qquad \widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{C}_{\alpha\beta\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu}.$$

Определяя изотропное гравитационное поле в общем случае на основе тензоров $\widetilde{\mathscr{E}}_{\alpha\lambda}$ и $\widetilde{\mathscr{H}}_{\alpha\lambda}$ совершенно так же, как мы определили это понятие для пустого поля тяготения с помощью тензоров $\mathscr{E}_{\alpha\lambda}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\lambda}$, т. е. уравнением

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\gamma\delta\mu\nu} C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$$

мы можем сформулировать следующую теорему: для того чтобы пространство — время V_4 удовлетворяло определению *полного* гравитационного излучения Мизры и Сингха, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типам N или III с точки зрения алгебраической структуры тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

ГЛАВА 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Гравитационная геометрическая оптика

До сих пор главным предметом нашего внимания были общековариантные формулировки понятий и критериев, составляющих основу подхода к исследованию волновых полей тяготения. Вопрос о распространении гравитационных волн, т. е. анализ определений фронта волны, траекторий распространения (лучей) и т. д., мы оставляли, по существу, в стороне.

Исходя из анализа задачи Коши для системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей в римановом пространстве — времени V_4, мы убедились (гл. 2), что основные представления геометрической оптики являются общими для электромагнитного и гравитационного полей. Действительно, как и в теории электромагнитных волн в классической электродинамике Максвелла, закон распространения гравитационных волн определяется уравнением эйконала (2.22).

Решение этого основного уравнения — скалярная функция $\varphi(x^\sigma)$, *называемая эйконалом, — определяет гиперповерхность фронта гравитационной волны* (2.15), а также траектории ее распространения, образующие конгруэнцию линий тока изотропного вектора l^α (2.25). Вектор l^α мы назовем *волновым вектором* гравитационной волны.

Очевидно, различным решениям уравнения эйконала должны отвечать различные типы фронта волны, которые, в свою очередь, определяют физически различные типы гравитационных волн. В связи с этим возникает задача общековариантной классификации типов гравитационных волн в зависимости от свойств фронта волны.

Хотя общепринятого окончательного решения этой задачи до сих пор не получено, тем не менее в ряде случаев удалось получить общековариантное описание типов гравитационных волн в зависимости от некоторых специфических свойств волнового фронта, определяемых заданием волнового вектора l^α. А именно, задаваясь в пространстве — времени V_4 изотропным векторным полем, которое обеспечивает существование решения уравнения эйконала, т. е. является градиентным, как в (2.25), можно классифицировать гравитационные волны в зависимости от свойств этого векторного поля. Задача облегчается тем, что решение вопроса о существовании изотропных векторных полей (в частности векторов Дебеве) в пространстве — времени V_4 во многих случаях помогает установить алгебраический тип самого пространства — времени V_4 по классификации Петрова.

На этом пути удалось выделить два типа гравитационных волн, называемых *плоскими* и *сферическими волнами*. Сами названия обусловлены геометрической аналогией с плоскими и сферическими электромагнитными волнами, базирующейся на сходстве законов геометрической оптики для гравитационных и электромагнитных полей. В дальнейшем мы будем широко пользоваться этой аналогией для физической интерпретации соответствующих типов гравитационных волн.

2. Сферические гравитационные волны. Примеры

По определению Робинсона и Траутмана [129—131], метрика пространства — времени V_4 описывает поле сферических гравитационных волн, если данное V_4 допускает изотропное векторное поле l^α, удовлетворяющее уравнениям

$$l_{[\alpha;\beta]} = 0, \tag{9.1}$$

$$l_{(\alpha;\beta)}l^{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(l^\alpha_{;\alpha})^2 = 0, \tag{9.2}$$

$$l^\alpha_{;\alpha} \neq 0. \tag{9.3}$$

Первое из этих условий означает [57], что векторное поле l^α является градиентным, т. е. может быть представлено в виде (2.25). Тогда, вследствие изотропности l^α, уравнение $\varphi(x^\alpha) = a$, где a — параметрическая константа, описывает семейство характеристических многообразий уравнений Эйнштейна, удовлетворяющих уравнению эйконала (2.22).

Как мы видели выше (гл. 2), траектории векторного поля l^α, удовлетворяющего уравнениям (2.22), (2.25), образуют семейство бихарактеристик уравнений Эйнштейна и, следовательно, являются изотропными геодезическими в пространстве—времени V_4 с метрикой $g_{\alpha\beta}$. Тогда условие (9.2) с физической точки зрения означает отсутствие искажения формы тени, отбрасываемой на экран непрозрачным предметом, освещаемым лучами света, движущимися по траекториям вектора l^α [131—134]. В свою очередь, условие (9.3) означает увеличение или уменьшение тени по сравнению с самим предметом (в отличие от случая плоских электромагнитных волн, для которых всегда $l^\alpha_{;\alpha} = 0$ [135]).

Действительно, пусть данная конгруэнция изотропных геодезических с касательным вектором l^α определяет траектории распространения света. Рассмотрим малый непрозрачный предмет, освещаемый лучами света и отбрасывающий тень на экран, расположенный ортогонально лучам. Можно показать [110], что при этом все части тени достигают экрана одновременно. Сместим теперь предмет путем параллельного переноса вдоль лучей в положение, занимаемое экраном, и сравним его размеры с размерами тени. Если экран находится на расстоянии dr от предмета, то его тень подвергается повороту на величину $\omega\, dr$, сдвигу на величину $|\sigma|\, dr$ и растяжению или сжатию на величину $\varepsilon\, dr$, причем скаляры ε, ω и σ имеют вид [71, 136]

$$\varepsilon = \frac{1}{2} l^{\alpha}_{;\alpha}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{2} l_{[\alpha;\beta]} l^{\alpha;\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2} l_{(\alpha;\beta)} l^{\alpha;\beta} - \varepsilon^2.$$

Интерпретация «оптических скаляров» ε, ω и σ построена на основе следующей гидродинамической аналогии. Пусть u^{α} — поле временноподобного единичного вектора, которым мы зададим 4-скорость идеальной жидкости. Тогда кинематика бесконечно малого элемента объема жидкости описывается величинами, образующими следующее разложение ковариантной производной 4-скорости:

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \tilde{\varepsilon} \eta_{\alpha\beta} - a_{\alpha} u_{\beta}.$$

Здесь

$$\eta_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta},$$

$a_{\alpha} = u_{\alpha;\beta} u^{\beta}$ — так называемый «вектор 4-ускорения» (равный нулю для геодезической конгруэнции), $\tilde{\varepsilon} = u^{\sigma}{}_{;\sigma}$, а тензоры

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta^{\sigma}_{[\alpha} \eta^{\tau}_{\beta]} u_{\sigma;\tau}, \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \eta^{\sigma}_{(\alpha} \eta^{\tau}_{\beta)} u_{\sigma;\tau}$$

представляют собой соответственно тензор угловой скорости вращения и тензор скоростей деформаций рассматриваемого элемента объема относительно геодезической системы координат (системы Ферми), заданной вдоль траекторий вектора u^{α}. Скаляры вращения $\tilde{\omega}$ и сдвига (дисторсии) $\tilde{\sigma}$ траекторий u^{α} определяются через тензоры $\omega_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}.$$

Как показал Кундт [137], условие $\omega = 0$ для изотропной геодезической конгруэнции не только необходимо, но и достаточно для выполнения условия (9.1), т. е. задание изотропной конгруэнции геодезических без вращения эквивалентно заданию поверхности волнового фронта.

Робинсон и Траутман [130] получили класс точных решений уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, описывающих сферические гравитационные волны и охватывающих, как показали Фостер и Ньюмэн [138], все *алгебраически специальные* поля тяготения, т. е. поля типов D, II, N и III по Петрову. Этот класс решений представляется метрикой

$$ds^2 = 2dx^0\,dx^1 + \left(K - 2Hx^1 - \frac{2M}{x^1}\right)dx^{0\,2} -$$
$$- x^{1\,2}P^{-2}\{[dx^2 + Q_{,3}\,dx^0]^2 + [dx^3 + Q_{,3}\,dx^0]^2\}, \qquad (9.4)$$
$$M = M(x^0),\; P = P\,(x^0,\, x^2,\, x^3),\; Q = Q\,(x^0,\, x^2,\, x^3),$$

где функции H и K определяются формулами

$$H = P^{-1}P_{,0} + P\,(P^{-1}Q)_{,23} - PQ\,(P^{-1})_{,23},$$
$$K = P\,(P_{,22} + P_{,33}) - (P_{,2})^2 - (P_{,3})^2.$$

В этой же системе координат фронт гравитационной волны выражается уравнением $x^0 = \text{const}$, а ортогональный к нему изотропный вектор l^α имеет вид $l^\alpha = \delta^\alpha_1$, так что траектории распространения гравитационной волны (гравитационные лучи) совпадают с координатными линиями x^1.

Уравнения поля (2.2) относительно метрики (9.4) сводятся к двум соотношениям:

$$Q_{,22} - Q_{,33} = 0,$$
$$K_{,22} - K_{,33} = 4P^{-2}\,(M_{,0} - 3HM). \qquad (9.5)$$

Первое из них позволяет преобразованием координат (сохраняющим вид метрики) обратить в нуль функцию Q, так что в новой системе координат уравнения поля сводятся к единственному (второму) соотношению (9.5).

Исследуя метрику Робинсона — Траутмана (9.4) в системе координат, где $Q = 0$, Бартрум [135] показал, что она допускает обобщение на случай непустого пространства — времени, а именно, на случай, когда в пространстве имеется электромагнитное поле. При этом можно доказать, что электромагнитное поле является изотропным, т. е. оба инварианта (4.2) тензора Максвелла $F_{\mu\nu}$ обращаются в нуль.

Из компонент $T_{\mu\nu}$ для метрики Робинсона — Траутмана отличной от нуля оказывается лишь одна:

$$T_{00} = E^2/\rho^2,$$

где

$$\lambda E^2 = \frac{1}{2}\,P^2\,(K_{,22} - K_{,33}) - 2M_{,0} + (QM/P)\,P_{,0}.$$

Бартрум, используя доказанную им ранее теорему [139] о дифференциальных свойствах волнового вектора

l^α, получил частное решение, описывающее самосогласованную систему сферических гравитационных и электромагнитных волн, распространяющихся вдоль общих траекторий — линий векторного поля l^α:

$$ds^2 = (2 - A)\, dr^2 + Br^2 (d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2) - \\ - 2\,(1 - A)\, dr\, dt - A\, dt^2, \quad (9.6)$$

где

$$A = \left(\frac{M}{m}\right)^{2/3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2n} - \frac{2r}{3m} M_{,0} - \frac{2M}{r}, \\ B = \left(\frac{M}{m}\right)^{-2/3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{-2n}, \quad m = \mathrm{const}, \quad M = M(x^0), \quad (9.7)$$

n — целое число, а сферические координаты r, φ, θ, t связаны с «декартовыми» координатами, в которых Q уже устранена, обычным преобразованием. Замечательно, что в пустом пространстве при $m = m_0$ метрика (9.6) — (9.7) переходит в метрику Шварцшильда.

Примером поля тяготения, допускающего интерпретацию на языке сферических гравитационных волн, может служить также решение Керра — Шилда [140, 141] в пустом пространстве — времени:

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2H l_\mu l_\nu. \quad (9.8)$$

Здесь l_μ — изотропное векторное поле: $g_{\mu\nu}\, l^\mu l^\nu = 0$, откуда вытекает также условие $\overset{(00)}{g}_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0$, и обратно, а функция $H(x^\alpha)$ вместе с вектором l^α удовлетворяет уравнениям поля

$$a_{(\alpha} l_{\beta)} + (\dot{H} + 2H\varepsilon)\, l_{(\alpha;\,\beta)} - H g^{\sigma\rho} l_{\alpha;\,\rho} l_{\beta;\,\sigma} + \frac{1}{2} b l_\alpha l_\beta = 0, \quad (9.9)$$

где введены обозначения:

$$a_\alpha = (\dot{H} + 2H\varepsilon)_{,\alpha} - 2H_{,\rho} l^\rho_{\alpha;} - H l_{\alpha;}{}^\rho{}_\rho, \\ b = 2H\ddot{H} - g^{\alpha\beta} H_{;\,\alpha\beta}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} l^\alpha_{;\alpha}, \quad \dot{H} = l^\alpha H_{,\alpha}.$$

Из уравнений поля (9.9) следует [141], что вектор l^α касателен к конгруэнции геодезических с нулевой дисторсией: $\sigma = 0$. Предположив, кроме того, что эта конгруэнция обладает равным нулю вращением, т. е. потребовав, чтобы вектор l^α был нормальным: $l_{[\alpha;\,\beta]} = 0$, мы получаем пустое поле тяготения с гравитационными волнами, распространяющимися вдоль конгруэнции l^{α}.

Для того чтобы это поле тяготения отвечало сферическим гравитационным волнам (т. е. чтобы удовлетворялось условие $\varepsilon \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало к типам II или D по Петрову (Мас [142]). Если это условие имеет место, то метрика (9.8) принимает вид

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2\varepsilon l_{\mu} l_{\nu}.$$

Напротив, в случае $\varepsilon = 0$ соответствующее поле тяготения принадлежит к типу N или III. Это следует из результата Керра и Шилда, показавших [141], что для метрики (9.8) выполняется соотношение

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^{\alpha} l^{\delta} = \ddot{H} l_{\beta} l_{\gamma}.$$

Более того, из условия $\varepsilon = 0$ вытекает, что $\ddot{H} = 0$, и следовательно, в этом случае метрика (9.8) удовлетворяет критерию Беля (5.20). В этом последнем случае, как мы увидим ниже, метрика Керра — Шилда описывает плоские гравитационные волны.

3. Плоские гравитационные волны. Определение Кундта

Общековариантное определение плоских гравитационных волн было введено двумя различными способами Бонди — Пирани — Робинсоном [143], Пенроузом [144] и Кундтом [137, 145—147].

Согласно определению Кундта, *метрика пространства — времени V_4 описывает поле плоских (или «плоскофронтовых») гравитационных волн, если данное V_4 допускает изотропное векторное поле l^{α}, удовлетворяющее уравнениям* (9.1) — (9.2) *и условию*

$$l^{\alpha}_{;\alpha} = 0. \tag{9.10}$$

Как мы уже знаем, эти требования ведут к тому, что траектории вектора l^{α} оказываются изотропными геодезическими. При этом первое требование, выражаемое уравнением (9.1) (условие существования фронта волны), означает, что форма тени, отбрасываемой предметом на экран, расположенный ортогонально лучам (траекториям l^{α}), не деформирована так, как если бы предмет подвергся повороту относительно своего истинного положения; второе, выраженное уравнением (9.2),—что она не деформирована так, как если бы предмет претерпел сдвиг, и, наконец, третье, т. е. условие (9.10),—что тень не увеличена и не уменьшена в размерах по сравнению с самим предметом (см. [71, 131, 148]).

Таким образом, Кундт в своем определении учел основные свойства, с которыми мы знакомы по опыту исследования плоских электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского, где фронт плоской волны параллельно смещается вдоль ортогональных к нему траекторий распространения света, не подвергаясь никаким искажениям.

Шевретон [149] показал, что *удовлетворяющее определению Кундта поле плоских гравитационных волн в пустом пространстве V_4 может принадлежать только к типу O* (*тривиальный случай*, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$), *к типу N или к типу* III *по Петрову*. Если оно принадлежит к типу N, то вектор l^α является ковариантно постоянным: $l^\alpha{}_{;\beta} = 0$.

Все пустые пространства V_4 типа N, допускающие ковариантно постоянное векторное поле l^α, известны [105, 150] и образуют класс решений уравнений Эйнштейна, определенных с точностью до интегрирования некоторой системы дифференциальных уравнений. На исследовании плосковолновых решений этого типа мы подробно остановимся в следующей главе.

Кундт же получил и другой класс решений уравнений поля в пустом пространстве [137], соответствующих плоским волнам в смысле введенного им определения. Среди решений этого класса есть как поля типа N, так и поля типа III по Петрову.

Метрика Кундта получена в изотропной тетраде, т. е. изотропном квазиорторепере $\{t^\alpha, \bar{t}^\alpha, l^\alpha, m^\alpha\}$, векторы l^α и m^α которого вещественны, а векторы t^α и $\bar{t}^\alpha$ комплексно сопряжены, причем $l^\alpha m_\alpha = \bar{t}^\alpha t_\alpha = 1$:

$$ds^2 = |dz + B du|^2 + 2\, dv\, du + H\, du^2, \qquad (9.11)$$

где $z = x + iy$, а B и H — вещественные функции координат причем

$$B_{,v} = 0,\ B_{,xx} + B_{,yy} = 0, \quad H = -vB_{,x} + A, \quad A_{,v} = 0, \qquad (9.12)$$
$$A_{,xx} + A_{,yy} + 2\, BB_{,xx} + 3\, B_{,x}B_{,x} - 2\, B_{,xu} + B_{,y}\, B_{,y} = 2\,\tau.$$

Здесь линии u временноподобны, а скаляр τ определяется уравнениями (6.15). В пустоте $\tau = 0$, откуда, ввиду изотропности l_α, следует, что для непустого пространства — времени метрика (9.11) отвечает случаю электромагнитного излучения. Общие траектории распространения электромагнитных и гравитационных волн (линии тока изотропного векторного поля l^α) совпадают с координатными линиями v; иными словами, при выборе координаты v в качестве аффинного параметра на конгруэнции изотропных геодезических, последние выражаются уравнениями

$$\frac{dx^\alpha}{dv} = l^\alpha, \tag{9.13}$$

а фронт волны определяется гиперповерхностью $u=\text{const}$.

Метрика Кундта (9.11) является частным случаем класса метрик, полученных им в работе [137]. Этот класс по Кундту описывает плоскофронтовые гравитационные волны, отвечающие более общим условиям, когда вектор l^α — не обязательно нормальный, т. е. не ограничен требованием $l_{[\alpha;\beta]} = 0$.

В случае $\tau = 0$ (пустое пространство — время) принадлежность метрики Кундта к типу N по классификации Петрова определяется условием $B = 0$. Согласно приведенной выше теореме Шевретона, при $B = 0$ метрика Кундта описывает пространство — время, допускающее ковариантно постоянное векторное поле l^α. На исследовании таких пространств V_4 мы подробно остановимся в следующей гл. 10.

4. Плоские гравитационные волны. Определение Бонди — Пирани — Робинсона

Как показали Гольдберг и Керр [151, 152], асимптотическое поведение гравитационных полей, создаваемых изолированными источниками, обнаруживает большое сходство с поведением плоских электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского.

Этот результат можно рассматривать как мотивировку предпринятой Бонди, Пирани и Робинсоном [143] попытки дать строго групповое определение понятия плоских гравитационных волн в пустом пространстве как метрического поля, удовлетворяющего двум постулатам: 1) поле одинаково в любой точке волнового фронта, 2) метрический тензор пространства — времени, подобно вектор-потенциалу плоских электромагнитных волн, допускает определенную группу симметрии. Такой группой является группа движений G_5, которая оставляет неизменной изотропную гиперповерхность в V_4. Уравнение этой гиперповерхности (описывающее фронт волны) в некоторой системе координат имеет вид

$$x^1 - x^0 = \text{const}. \tag{9.14}$$

Петров [57] показал, что существует только одно пространство V_4 сигнатуры 2, допускающее группу движений G_5, действующую транзитивно на изотропной трехмерной гиперповерхности. В системе координат, отвечающей (9.14), его интервал записывается в виде

$$ds^2 = -A\, dx^{1\,2} - 2D\, dx^1 dx^2 - B\, dx^{2\,2} - C\, dx^{3\,2} + C\, dx^{0\,2}, \tag{9.15}$$

где A, B, C и D—функции запаздывающего аргумента $x^1 - x^0$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$M'' - \frac{1}{2} M' (\ln M)' - M' (\ln C)' - A'B' - (D')^2 = 0,$$

в котором $M = AB - D^2 > 0$, а штрих означает дифференцирование по $x^1 - x^0$.

Иохари [154], опираясь на результаты Такено [153], обобщил определение Бонди — Пирани — Робинсона на случай непустых пространств V_4, удовлетворяющих уравнениям (7.13). Хэли [112] и Иохари [154] рассмотрели понятие плоскополяризованной гравитационной волны и определили параметры поляризации. (Ранее такого рода вопросы обсуждал Розен [155], а также Бордман и Бергман [156].) В этой же связи представляет самостоятельный интерес работа Аве [157], где предложено определение монохроматической гравитационной волны. На этой работе нам предстоит остановиться подробнее.

5. Монохроматические гравитационные волны. Определение Аве

Следуя общей электромагнитной аналогии, Аве [157] называет гравитационную волну *монохроматической, если соответствующий волновой вектор* (2.25) *является гармоническим, т. е. удовлетворяет уравнению*

$$(\sqrt{-g}\, l^\alpha)_{,\alpha} = (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta})_{,\alpha} = 0. \tag{9.16}$$

В этом случае гармонической является также комплексная функция $U = \exp(i\varphi)$:

$$(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} U_{,\beta})_{,\alpha} = 0, \tag{9.17}$$

причем этот факт инвариантен относительно замен $\varphi \to f(\varphi)$, где f — любая функция класса C^2. Благодаря этому Аве мог исследовать монохроматическую гравитационную волну как поле простой периодической функции $U(x^\alpha)$.

Пусть волновой вектор l^α удовлетворяет условию (9.1) и, кроме того, отвечающая ему изотропная геодезическая конгруэнция обладает равным нулю растяжением:

$$l^\alpha_{;\alpha} = 0. \tag{9.18}$$

Тогда, очевидно, он удовлетворяет уравнению (9.16) и является гармоническим; а соответствующая плоская гравитационная волна (в смысле Кундта) будет монохроматической.

Аве наиболее полно исследовал вопрос о типах пространств V_4, допускающих интерпретацию на языке монохроматических гравитационных волн. Он исходил из уравнений Эйнштейна (1.1), использовав справа (в качестве $T_{\alpha\beta}$) тензор энергии — импульса системы идеальная жидкость плюс электромагнитное поле:

$$T_{\alpha\beta} = X\left[(\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} - F_{\alpha\rho} F_{\beta\cdot}^{\cdot\rho}\right] - \frac{1}{2}\Theta g_{\alpha\beta}. \tag{9.19}$$

Здесь ρ, p и u_α — плотность, давление и 4-скорость, X и Θ — константы, определяющие произвол в выборе тензора энергии — импульса.

Решение задачи дается следующей теоремой Аве: поля тяготения, определяемые тензором энергии — импульса (9.19), допускают монохроматические гравитационные волны только в том случае, если

1) $\rho = p = 0$ (т. е. источником является только электромагнитное поле);

2) фронт гравитационной волны $\varphi(x^\alpha)$ определяется условием

$$l_{\beta;\alpha} = l_\alpha \varepsilon_\beta + l_\beta \varepsilon_\alpha, \tag{9.20}$$

где ε_α — некоторый вектор, ортогональный l_α;

3) волновой вектор l^α является собственным вектором тензора $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\rho} l^\alpha = \lambda \cdot l_\rho. \tag{9.21}$$

Замечая, что при этих условиях

$$l^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha})\, l_\gamma + l_\beta \mu_{\alpha\gamma} - l_\alpha \mu_{\beta\gamma},$$
$$\mu_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta;\alpha} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$$

и вычисляя по Дебеве величины

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta l^\delta, \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta l^\delta,$$

убеждаемся, что в случае пустого пространства — времени ($T_{\alpha\beta} = 0$) они обращаются в нуль, т. е. удовлетворяют уравнениям (5.20). Это, согласно второму критерию Беля, означает, что данное поле тяготения принадлежит к типу N или III по Петрову. Таким образом, *пустое пространство — время описывает монохроматические гравитационные волны только в том случае, если оно принадлежит к типу N или* III *по Петрову.*

Для получения точных решений уравнений Эйнштейна, описывающих монохроматические гравитационные волны, удобно воспользоваться такой координатной системой, в которой компоненты метрического тензора явно выражаются через гармоническую функцию

$$U(x^\alpha) = \exp(i\varphi). \tag{9.22}$$

В этом случае $g_{\mu\nu}$, рассматриваемые как потенциалы гравитационного поля, обнаруживают полную аналогию с вектор-потенциалом плоской монохроматической электромагнитной волны [151]:

$$A^\alpha = \boldsymbol{a}^\alpha \exp i(\boldsymbol{kr} - \omega t).$$

Пусть, например, решение ищется в виде

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g_{\mu\nu}} + 2a_{\mu\nu} U(x^\alpha), \tag{9.23}$$

где $a_{\mu\nu}$ — постоянный симметричный тензор (аналог амплитуды периодических колебаний). Выберем в качестве «тензора амплитуд» $a_{\mu\nu}$ тензор

$$a_{\mu\nu} = l_\mu \varepsilon_\nu + l_\nu \varepsilon_\mu, \tag{9.24}$$

где l_μ — постоянный изотропный вектор и ε_μ — ортогональный к нему постоянный вектор [1]). Пусть далее эйконал φ в выбранной системе координат имеет вид

$$\varphi = l_\alpha x^\alpha = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} l^\alpha x^\beta, \tag{9.25}$$

так что

$$U(x^\alpha) = A_0 \cos(l_\alpha x^\alpha) + B_0 \sin(l_\alpha x^\alpha) \quad (A_0, B_0 = \mathrm{const}). \tag{9.26}$$

Подстановкой в уравнения (2.2) теперь можно убедиться [159], что в принятых предположениях метрика (9.23) — (9.26) описывает пустое V_4, отвечающее плоским монохроматическим гравитационным волнам. Аналогия между таким полем тяготения и полем плоских монохроматических электромагнитных волн оказывается еще более наглядной, если метрику (9.23) — (9.26) представить в эквивалентной форме [159]:

$$g_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu} + 2\sigma_{\mu\nu}, \tag{9.27}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp[i l_\alpha x^\alpha] + \overset{*}{a}_{\mu\nu} \exp[-i l_\alpha x^\alpha], \tag{9.28}$$

$$a_{\mu\nu}, \overset{*}{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(l_\mu \varepsilon_\nu + l_\nu \varepsilon_\mu)(A_0 \mp i B_0). \tag{9.29}$$

Известная метрика Переса [160]

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} - dx^{2\,2} - dx^{3\,2} - 2f(dx^0 + dx^3)^2 \tag{9.30}$$

также принадлежит к классу метрик (9.23), если положить

$$\tilde{x}^3 = z = f(x^1, x^2, u), \quad \tilde{x}^0 = u = x^0 + x^3,$$
$$a_{33} = a_{00} = a_{03} = -1$$

(остальные компоненты $a_{\mu\nu}$ равны нулю). При этом уравнения поля (2.2) сводятся к единственному условию гармоничности функции f по аргументам x^1 и x^2:

$$f_{,11} + f_{,22} = 0. \tag{9.31}$$

---

1) В системе координат, где метрика $g_{\mu\nu}$ имеет вид (9.23), соотношения, выражающие ковариантное постоянство и ортогональность векторов, приобретают простой вид обычных соотношений постоянства и ортогональности относительно галилеевой метрики.

ГЛАВА 10

ПЛОСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОЛЕМ

1. Плоские волны в пустом пространстве — времени

Как мы уже знаем из гл. 9, траектории распространения (лучи) плоской гравитационной волны в смысле Кундта для полей типа N в пустом пространстве определяются абсолютно параллельным, или, иными словами, ковариантно постоянным, изотропным векторным полем l^α.

Можно доказать и обратное [105]: всякое пустое пространство — время, допускающее абсолютно параллельное векторное поле l^α, принадлежит к типу N по Петрову, причем вектор l^α является изотропным и единственным. Это вытекает из условий интегрируемости уравнений $l^\alpha_{;\beta} = 0$, имеющих вид (6.11), и результата Дебеве (3.29).

Таким образом, абсолютно параллельное векторное поле в пустом пространстве определяет конгруэнцию изотропных геодезических, представляющих собой траектории распространения плоских гравитационных волн по Кундту.

Как показал Эйзенхарт [161] (см. также Кручкович — Солодовников [162]), метрический тензор пространства V_4, допускающего единственное изотропное абсолютно параллельное векторное поле l^α, представим в виде

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & 1 & Q & F \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & A & D \\ F & 0 & D & B \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

где A, B, D, E, F, Q — функции координат x^0, x^2, x^3, причем в той же системе координат вектор l^α имеет вид ${}^\alpha = \delta^\alpha_1$.

Для метрики (10.1) из двадцати существенных компонент тензора Римана отличны от нуля только шесть: $R_{3230}, R_{3202}, R_{0202}, R_{3232}, R_{0303}, R_{0203}$. Из десяти уравнений поля (2.2) шесть удовлетворяются тождественно, а из остальных четырех — три уравнения принимают вид

$$R_{3232} = R_{3230} = R_{3202} = 0, \tag{10.2}$$

где

$$R_{3223} = D_{,23} - \frac{1}{2}(A_{,33} + B_{,22}) - \frac{1}{4}\{A_{,3}(A_{,3}B - B_{,2}D) + \\ + B_{,2}(B_{,2}A - A_{,3}D) + B_{,3}[A_{,2}D - A(2D_{,2} - A_{,3})] - \\ - (2D_{,3} - B_{,2})[A_{,2}B - D(2D_{,2} - A_{,3})]\},$$

$$R_{3220} = \frac{1}{2}(D_{,02} - A_{,03} + Q_{,23} - F_{,22}) + \frac{1}{4g}(D_{,0} + F_{,2} - Q_{,3}) \times \\ \times (A_{,3}D - AB_{,2}) + A_{,0}(A_{,3}B - B_{,2}D) + (B_{,3} + D_{,0} - F_{,2}) \times \\ \times [D(2D_{,2} - A_{,3}) - A_{,2}B] + B_{,0}[A_{,2}D + A(A_{,3} - 2D_{,2})],$$

$$R_{3230} = \frac{1}{2}(B_{,02} - D_{,03} - Q_{,33} - F_{,23}) + \\ + \frac{1}{4g}\{(D_{,0} + Q_{,3} - F_{,2})(A_{,3}B - B_{,2}D) + B_{,0}(AB_{,2} - A_{,3}D) + \\ + (D_{,0} + F_{,2} - Q_{,3})[D(B_{,2} - 2D_{,3}) - AB_{,3}] + \\ + A_{,0}[B(2D_{,3} - B_{,2}) - B_{,3}D]\},$$

$$g = \det\|g_{\alpha\beta}\| = AB - D^2 < 0.$$

Последнее уравнение поля связывает оставшиеся компоненты тензора Римана:

$$AR_{0330} + BR_{0220} - 2DR_{0230} = 0, \tag{10.3}$$

где

$$R_{0220} = Q_{,02} - \frac{1}{2}(A_{,00} + E_{,22}) + \frac{1}{4g}\{(D_{,0} - F_{,2} - Q_{,3}) \times \\ \times [2A_{,0}D + A(Q_{,3} - F_{,2} - D_{,0})] - (A_{,0})^2 B + (E_{,3} - 2F_{,0}) \times \\ \times [A_{,2}D + A(A_{,3} - 2D_{,2})] + (E_{,2} - 2Q_{,2}) \times \\ \times [B_{,3}D + B(B_{,2} - 2D_{,3})]\},$$

$$R_{0330} = F_{,03} - \frac{1}{2}(B_{,00} + E_{,33}) + \frac{1}{4g}\{(D_{,0} + Q_{,3} - F_{,3}) \times \\ \times [2B_{,0}D + B(Q_{,3} + F_{,2} - D_{,0})] - \\ - A(B_{,0})^2 + (2F_{,0} - E_{,3})[AB_{,3} + D(B_{,2} - 2D_{,3})] + \\ + (E_{,2} - 2Q_{,0})[B_{,3}D + B(B_{,2} - 2D_{,3})]\},$$

$$R_{0230} = \frac{1}{2}(F_{,02} + Q_{,03} - E_{,23} - D_{,00}) - \\ - \frac{1}{4g}\{(D_{,0} + B_{,3} - F_{,2})[BA_{,0} - D(D_{,0} + F_{,2} - Q_{,3})] + \\ + B_{,0}[A(D_{,0} + F_{,2} - Q_{,3}) - DA_{,0}] + (2Q_{,0} - E_{,2}) \times \\ \times (DB_{,2} - BA_{,3}) + (2F_{,0} - E_{,3})(DA_{,3} - AB_{,2})\}.$$

Таким образом, общая метрика (10.1), удовлетворяющая четырем уравнениям поля (10.2) — (10.3), определяет класс точных решений уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, удовлетворяющих волновым критериям Лихнеровича и Зельманова, а также определению плоских гравитационных волн Кундта. Можно показать, что этот класс включает в себя ряд известных решений уравнений Эйнштейна, принадлежащих к вырожденному типу II по Петрову, в частности решения Такено [153, 163], Переса [160] — (9.30), Петрова [57] — (9.15) и др.

Так, метрика Переса (9.30) простым преобразованием координат (поворотом осей в плоскости (x^0, x^3)) приводится [164] к виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + f(x^0, x^2, x^3) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

Очевидно, метрика (10.4) есть частный случай метрики (10.1) при

$$A = B = -1, \quad D = Q = F = 0,$$
$$E = 1 + f(x^0, x^2, x^3).$$

При этом уравнения поля (10.2) удовлетворяются тождественно, а уравнение (10.3) приводится к условию гармоничности функции f по аргументам x^2 и x^3:

$$f_{,22} + f_{,33} = 0.$$

Метрика Такено [153]

$$ds^2 = -A\,dx^{1\,2} - 2D\,dx^1dx^2 - B\,dx^{2\,2} - (P - S)\,dx^{3\,2} - \\ - 2S\,dx^3dx^0 + (P + S)\,dx^{0\,2}, \tag{10.5}$$

где A, B, D, P, S — функции аргумента $x^3 - x^0$, а квадратичная форма

$$dl^2 = A\,dx^{1\,2} + 2D\,dx^1dx^2 + B\,dx^{2\,2},$$

положительно определенная, является решением уравнений (2.2), если

$$M_{,33} - (M_{,3})^2/2M - A_{,3}B_{,3}/(D_{,3})^2 = 0, \quad M \equiv AB - D^2.$$

Можно показать [165], что данную метрику, как и метрику Петрова (9.15), можно преобразованием координат и их тривиальной перенумерацией привести к виду

$$ds^2 = 2\,dx^0 dx^1 + A\,(x^0)\,{dx^2}^2 + 2D\,(x^0)\,dx^2 dx^3 + \\ + B\,(x^0)\,{dx^3}^2,$$

откуда вытекает, что она представляет собой частный случай метрики (10.1), если в последней выбрать $E = Q = F = 0$, а функции A, B, D считать зависящими только от x^0.

Наконец, частным же случаем (10.1) является и другое решение Петрова [65], представленное метрикой

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -x^3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & A(x^0) & D(x^0) \\ 0 & 0 & D(x^0) & B(x^0) \end{pmatrix}, \qquad (10.6)$$

для которой $AB - D^2 < 0$, $A, B \neq 0$, а из уравнений поля (2.2) единственным нетривиальным остается уравнение (10.3).

Естественно предположить, что произвол, с которым определен метрический тензор (10.1) пространств Эйнштейна, допускающих абсолютно параллельное векторное поле, в какой-то мере фиктивен, т. е. обусловлен выбором системы координат; в таком случае должны существовать допустимые преобразования [1]) координат

$$\begin{aligned} x^0 &= \tilde{x}^0, \\ x^1 &= \tilde{x}^1 + \chi(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \\ x^2 &= \varphi(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \\ x^3 &= \psi(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^0), \end{aligned} \qquad (10.7)$$

сохраняющие вид метрики $g_{\mu\nu}$ (10.1) и векторного поля l^α $(= \delta_1^\alpha)$, которые позволяют упростить метрику (10.1) и, в частности, устранить некоторые из входящих в нее функций. Кроме того, само решение уравнений поля (2.2) определено формой (10.1) лишь с точностью до интегрирова-

---

[1]) Допустимыми мы называем преобразования, якобиан которых не обращается в нуль. Соответственно, произвольность функций χ, φ и ψ в (10.7) ограничена лишь этим дифференциальным условием: $J = \varphi_{,2}\psi_{,3} - \psi_{,2}\varphi_{,3} \neq 0$.

ния четырех уравнений в частных производных второго порядка, что также значительно уменьшает число независимых произвольных функций, которые могут появиться в метрике (10.1). В этой связи целесообразно также попытаться проинтегрировать хотя бы некоторые из уравнений (10.2) — (10.3).

Обе задачи недавно были решены Кайгородовым и Пестовым [166, 167], которые показали, что в новой системе координат ($\tilde{x}^\alpha$) компонентам $\tilde{g}_{23}$, $\tilde{g}_{03}$ и $\tilde{g}_{33}$ можно придать значения

$$\tilde{g}_{23} = 0, \quad \tilde{g}_{03} = 0, \quad \tilde{g}_{33} = -1$$

при подходящем выборе функций φ, ψ и χ в преобразовании (10.7) (эти функции определяются как интегралы некоторой системы уравнений типа Коши — Ковалевской).

Таким образом, метрический тензор пространства Эйнштейна, допускающего абсолютно параллельное векторное поле, в общем случае представим в виде

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & 1 & Q & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10.8}$$

где A, E, Q — функции координат x^0, x^2, x^3, удовлетворяющие уравнениям (10.2) — (10.3), причем уравнение (10.3) принимает вид

$$R_{0330} - R_{0220} = 0. \tag{10.9}$$

Пользуясь полученными ранее необходимыми и достаточными условиями для полей вырожденного типа 2, связанными лишь с первыми производными от векторных полей (что приводит к дальнейшему упрощению уравнений поля) [74], Кайгородов свел произвол в определении функций E, Q и A к единственному (оставшемуся непроинтегрированным) уравнению второго порядка (10.9).

Окончательный результат этих исследований можно сформулировать так: *для того чтобы пространство Эйнштейна допускало изотропное абсолютно параллельное поле l^α, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат вектор l^α выражался в виде $l^\alpha = \delta_1^\alpha$, а метрика V_4 принимала вид* (10.8), *где функции E, Q, A*

определяются соотношениями

$$A=-1,\ Q=2ex^3,\quad E_{,22}+E_{,33}=4e\quad (e=0,1)$$

(*первый класс решений*) *или соотношениями*

$$A=-[x^3+a]^2,\ B=2b\,({x^3}^2+2ax^3),$$

$$E_{,22}+(x^3+a)^2E_{,33}-\frac{a_2}{x^3+a}E_{,2}+(x^3+a)E_{,3}+$$
$$+\frac{2}{x^3+a}[8\lambda^2(x^3+a)^3-4x^3(x^3+a)(\lambda a_2)_{,0}-(x^3+a)^2a_{,00}-$$
$$-4x^3a_{,20}(x^3\lambda+a)+4x^3a_{,2}a_{,0}\lambda]=0,$$

$$\lambda=\mathrm{const},\ a=a(x^0,\ x^2),\ b=b(x^0)$$

(*второй класс решений*).

Легко убедиться, что перечисленные выше волновые решения Переса, Такено и Петрова являются частными случаями двух выделенных Кайгородовым и Пестовым классов решений, либо приводятся к ним допустимыми преобразованиями координат.

2. Абсолютно параллельное векторное поле в непустом пространстве — времени

Класс решений вида (10.1) допускает обобщение на случай непустого пространства — времени [91].

Пусть пространство — время V_4 имеет метрику вида (10.1), удовлетворяющую (кроме условия $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^1=0$) только трем уравнениям (10.2). Вычисляя компоненты тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$, легко убедиться, что девять его компонент из десяти тождественно обращаются в нуль, а единственная отличная от нуля компонента имеет вид

$$R_{00}=\frac{1}{g}(AR_{0330}+BR_{0220}-2DR_{0230}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для такой метрики удовлетворяются условия Райнича — Уилера (7.14) и Нордтведта — Пагельса (7.15), определяющие тензор энергии — импульса изотропного электромагнитного поля.

Однако полученное таким образом решение уравнений тяготения описывает распространение не только электромагнитных, но и гравитационных волн, так как удовлетворяет критерию полного гравитационного излучения

Лихнеровича (гл. 6). Действительно, так как пространство V_4 с метрическим тензором (10.1) допускает конгруэнцию линий тока ковариантно постоянного вектора l^α, то этот вектор удовлетворяет второму из условий Лихнеровича (6.11). Подставляя затем векторное поле $l_\alpha = \delta_\alpha^0$ и выражения для компонент тензора Римана в первую систему условий Лихнеровича, (6.10), можно убедиться, что она удовлетворяется тождественно.

Таким образом, этот класс решений уравнений Эйнштейна — Максвелла описывает самосогласованную систему свободных электромагнитных и гравитационных волн в пространстве — времени без вещества [91]. Он включает в себя ряд известных волновых решений уравнений Эйнштейна — Максвелла. К ним относятся, например, обобщения решений Переса и Бонди — Пирани — Робинсона на случай непустого пространства — времени, известные под названием «полей типов P и H» (по терминологии Такено [102, 168]).

Некоторые частные случаи таких решений, удовлетворяющие не только критерию Лихнеровича, но и критерию Зельманова, мы уже рассмотрели в гл. 7. Однако следует заметить, что в общем случае эти решения уравнений Эйнштейна—Максвелла описывают самосогласованную систему электромагнитного и гравитационного полей (непустое пространство — время), когда гравитационное поле удовлетворяет критерию Лихнеровича, но, вообще говоря, не удовлетворяет критерию Зельманова. Последнее обстоятельство представляет интерес для выяснения вопроса об общей связи этих двух критериев в случае непустого пространства — времени.

Так как описанный нами класс решений удовлетворяет условиям Лихнеровича (6.10) — (6.11), то, согласно общей теореме, доказанной в п. 3 гл. 6, они принадлежат к вырожденному типу 2 полей тяготения общего вида.

Как было показано в гл. 2, характеристические многообразия, а также бихарактеристики уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла совпадают. Следовательно,траектории распространения плоской гравитационной волны, определяемые абсолютно параллельным векторным полем l^α, одновременно являются траекториями лучей света. В то же время из совпадения фронтов гравитационной и электромагнитных волн вытекает, что электромагнитная волна в пространстве — времени, допускающем абсолютно параллельное векторное поле, также является плоской по Кундту.

Можно показать [169, 170], что описанный класс решений всегда допускает группу движений с особым оператором [106], траектории которого совпадают с траекториями распространения волны (лучами). Кроме того, если данная группа движений является интранзитивной [106], то ее (всегда изотропная) поверхность транзитивности принадлежит фронту волны либо совпадает с ним.

ГЛАВА 11

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Гравитационное излучение аксиально симметричных изолированных систем. Функция информации Бонди

Для изучения асимптотического поведения полей гравитационного излучения удобно воспользоваться методом Бонди — Сакса, основанным на разложении величин, характеризующих поле, в ряд по степеням $1/r$, где r — параметр, играющий роль расстояния от изолированной системы источников. Предполагая, что такое разложение возможно, мы выбираем систему координат так, чтобы, во-первых, максимально упростить вид членов разложения, доминирующих при больших значениях r, и, во-вторых, выявить их волновой характер.

Бонди [20, 171] рассмотрел задачу излучения гравитационных волн аксиально симметричной системой тел, введя, в качестве исходной, следующую метрику пространства — времени:

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + 2g_{01}dx^0dx^1 + 2g_{02}dx^0dx^2 - \\ - g_{22}dx^{2\,2} - g_{33}\,dx^{3\,2}. \quad (11.1)$$

Вид метрики (11.1) был усмотрен из следующей физической аналогии с моделью излучения в плоском пространстве — времени.

Пусть луч света выходит из некоторой точки O, окруженной малой сферой, на которой заданы угловые полярные координаты φ и θ. Введем временноподобную координату

u, аналогичную «запаздывающему времени» обычной теории, и определим координаты u, θ, φ произвольного события E как значения соответствующих координат точки, в которой луч OE пересекает сферу. Поскольку вдоль луча координаты u, θ, φ постоянны, то траекторию луча света в пространстве — времени можно задать как координатную линию четвертой координаты r. Определенный таким образом вдоль траектории луча аффинный параметр r будем в дальнейшем интерпретировать как расстояние от источника O. В плоском пространстве — времени, выбрав $u = t - r$ в качестве временноподобной координаты, можно представить метрику в виде

$$ds^2 = du^2 + 2\,du\,dr - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \quad (11.2)$$

Для *асимптотически плоского* риманова пространства — времени непосредственным обобщением этой метрики и является метрика (11.1). Более того, выбор системы координат типа (11.2) позволил Бонди устранить в разложении тензора Римана так называемый «логарифмический член» вида $(\ln r)/r$, появление которого Бонди считал недостатком подхода. В задаче об излучении аксиально симметричной системы Бонди задался следующим метрическим тензором в интервале (11.1):

$$\begin{aligned} g_{00} &= r^{-1}B\exp 2\beta - r^2A^2\exp 2\gamma, \\ g_{01} &= \exp 2\beta,\ g_{02} = Ar^2\exp 2\gamma, \\ g_{22} &= -r^2\exp 2\gamma,\ g_{33} = -r^2\sin^2\theta\exp(-2\gamma). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Здесь β, γ, A и B — функции координат r, θ, u, не зависящие от φ. В выбранной таким образом системе координат аксиально симметричная метрика (11.1), (11.3), как мы увидим ниже, не содержит логарифмического члена в разложении по $1/r$.

Из десяти уравнений поля (2.2) для метрики (11.3) три удовлетворяются тождественно:

$$R_{03} = R_{13} = R_{23} = 0.$$

Из оставшихся семи уравнений четыре уравнения

$$R_{11} = R_{12} = R_{22} = R_{33} = 0 \quad (11.4)$$

являются независимыми, одно уравнение

$$R_{01} = 0$$

удовлетворяется вследствие (11.4), а компоненты R_{02} и R_{00}, в силу тождества Бианки, удовлетворяют соотношениям

$$(r^2 R_{02})_{,1} = 0, \quad (r^2 R_{00})_{,1} = 0, \tag{11.5}$$

т. е. не содержат членов выше второго порядка по $1/r$.

Система четырех уравнений (11.4) для четырех неизвестных β, γ, A, B («основные уравнения», по терминологии Бонди) принадлежит к группе уравнений $R_{ij} = 0$, определяющих, как мы видели в гл. 2, поведение решения в окрестности начальной гиперповерхности S в зависимости от начальных данных на ней. Система основных уравнений обладает следующим замечательным свойством: она не содержит вторых производных типа $g_{ij,00}$, а из производных типа $g_{jk,0i}$ содержит лишь одну, $\gamma_{,01}$. Это означает, что задание функции $\gamma\,(r,\ \theta,\ u)$ на начальной гиперповерхности $u = \mathrm{const}$,

$$\gamma\,(r,\ \theta) = \gamma\,(r,\ \theta,\ u)\,|_{u=\mathrm{const}}$$

определяет не только сами функции γ, β, A и B, но и производную $\gamma_{,0}$, т. е. определяет поведение решения в окрестности гиперповерхности $u = \mathrm{const}$ с точностью до произвола в выборе функций интегрирования. Поскольку уравнения содержат только производные по r от искомых функций, то пять функций интегрирования будут зависеть только от координат u и θ. Одну из них следует положить равной нулю, чтобы удовлетворить требованию регулярности метрики при больших r; еще одна функция устраняется преобразованием координат, сохраняющим вид метрики. В результате разложение метрики в ряд по степеням $1/r$,

$$\begin{aligned}
\gamma &= C\,(u,\ \theta)/r + C_{,0}\,(u,\ \theta)/\,r^2 + \ldots,\\
\beta &= -C^2/4r^2 + \ldots, \qquad\qquad (11.6)\\
U &= -\frac{1}{r^2}\,(C_{,2} + 2C\operatorname{ctg}\theta) + \\
&\qquad + \frac{1}{r^3}\,[F\,(u,\ \theta) + 3CC_{,2} + 4C^2\operatorname{ctg}\theta] + \ldots,\\
V &= r + G\,(u,\ \theta) + \ldots,
\end{aligned}$$

определяется тремя функциями интегрирования — C, F и G. Поскольку эти функции связаны двумя дополнительными соотношениями (11.5):

$$G_{,0} = \frac{1}{2}(C_{,22} + 3C_{,2}\operatorname{ctg}\theta - 2C)_{,0} - (C_{,0})^2, \qquad (11.7)$$

$$-3F_{,0} = G_{,2} + 3CC_{,02} + 4CC_{,0}\operatorname{ctg}\theta + C_{,0}C_{,2}, \qquad (11.8)$$

то независимой можно считать только одну из них, например $C(u, \theta)$. Таким образом, значение $C(u, \theta)$ и ее производной $C_{,0}$ по «запаздывающему времени» u на гиперповерхности $u = a = \text{const}$ полностью определяет решение в окрестности гиперповерхности, т. е. в некотором интервале $(a \leqslant u \leqslant b)$. Тем самым всякое необратимое изменение системы источников определяется величиной

$$C_{,0} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, \theta), \qquad (11.9)$$

заключающей в себе всю информацию о поведении системы с изменением u. Функция $C_{,0}$ называется *функцией информации* [1]) системы [171]. Важнейшая роль функции информации состоит в том, что она определяет долю массы системы, уносимую гравитационным излучением.

Пусть система источников стационарна все время до момента $u = a$ и после периода нестационарности вновь приходит в стационарное состояние в момент $u = b$. Определение функции информации позволяет найти массу, теряемую системой в течение интервала времени $a \leqslant u \leqslant b$. Стационарным полем, отвечающим аксиально симметричной метрике (11.3), является гравитационное поле, описываемое метрикой Вейля (см. Синг [172]):

$$ds^2 = \exp(2\psi)dt^2 - \\ - \exp(-2\psi)[\exp(2\sigma)(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]. \qquad (11.10)$$

Разлагая функцию ψ в ряд по мультипольным моментам системы источников и записывая метрику (11.10) в координатах Бонди u, r, θ, φ, находим связь функций G и F с мультипольными моментами аксиально симметричной системы:

$$G = 2M, \quad F = 2D\sin\theta. \qquad (11.11)$$

Здесь M — масса системы источников («монопольный

[1]) Часто употребляют также название «функция новостей Бонди» (news function).

момент») и D — ее дипольный момент. Возвращаясь к общей метрике (11.3), мы можем определить массу системы источников как среднее от $G(u, \theta)$ по углу:

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi G(u, \theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{11.12}$$

Интегрируя затем уравнение связи (11.7), получаем выражение для убыли массы со временем через функцию информации:

$$M_{,0} \equiv \frac{dM}{du} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (C_{,0})^2 \sin\theta\, d\theta \leqslant 0. \tag{11.13}$$

Формула (11.13) означает, что масса изолированной аксиально симметричной системы источников постоянна в том и только в том случае, когда функция информации системы равна нулю. В противном случае масса системы монотонно уменьшается.

В связи с этим можно сформулировать следующий критерий гравитационного излучения для аксиально симметричных изолированных систем:

Критерий Бонди. *Поле тяготения изолированной аксиально симметричной системы источников, определяемое метрикой* (11.1), (11.3), *является полем гравитационного излучения, если функция информации* (11.9) *системы отлична от нуля. В противном случае гравитационное излучение отсутствует*[1]).

---

[1]) Заметим, что обращение в нуль функции информации не означает стационарности системы. Так, из соотношения (11.8) следует, что при $C_{,0} = 0$ и $G_{,2} \neq 0$ величина $F_{,0}$ отлична от нуля, что, вследствие второй формулы (11.11), означает линейное увеличение дипольного момента системы со временем. Вопрос о том, какой вклад в энергию и импульс, теряемые изолированной системой, вносят монопольный и дипольный члены разложения потенциалов в ряд, не является тривиальным и составляет предмет специального исследования. В рамках линейного приближения эйнштейновской теории тяготения этот вопрос недавно был рассмотрен Папапетру [173]. Оказалось, что возникающие формально эффективные монопольный и дипольный члены разложения в действительности сводятся к квадрупольному моменту системы источников (квадрупольные моменты так называемых «электрического» и «магнитного» типов). В то же время квадрупольный момент системы нельзя рассматривать как эффективный момент, сводимый к мультипольным моментам более высоких порядков.

2. Формализм Ньюмэна — Пенроуза

Вычисляя для метрики Бонди компоненты тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и разлагая их в ряд по $1/r$, можно убедиться [171], что они разбиваются на три группы равных (с точностью до знака) компонент, причем в компонентах первой группы разложение начинается с члена третьего порядка малости, $2(G + CC_{,0})r^{-3}$, в компонентах второй группы — с члена второго порядка, $(C_{,02} + 2C_{,0}\operatorname{ctg}\theta)r^{-2}$, и в компонентах третьей группы — с члена первого порядка, $C_{,00}r^{-1}$. Это означает, что при $C_{,00} \neq 0$ гравитационное поле на больших расстояниях убывает обратно пропорционально r.

Стремясь устранить из этого результата элемент произвола, связанный с выбором «преимущественной» системы координат, Ньюмэн и Пенроуз предприняли попытку исследовать вместо координатных компонент тензора Римана его тетрадные компоненты.

Воспользуемся для этой цели формализмом Ньюмэна — Пенроуза [174], который позволяет, кроме того, инвариантным образом сформулировать «законы сохранения» мультипольных моментов.

Метод Ньюмэна — Пенроуза основан на предположении о существовании в выбранной области многообразия V_4 четырех изотропных дифференцируемых векторных полей[1]) (класс гладкости их должен совпадать с классом гладкости компонент метрики $g_{\mu\nu}$), два из которых удобно выбрать комплексно сопряженными. В координатах Бонди ($x^0 = u$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) эти векторные поля можно задать следующим образом:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \qquad n^\mu = \delta_0^\mu - \delta_1^\mu,$$
$$m^\mu = \frac{1}{r}\left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right), \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{r}\left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \tag{11.14}$$

Ньюмэн и Пенроуз [174] и независимо от них в другой форме Кайгородов [74] показали, что метрика $g_{\mu\nu}$ может быть представлена в виде комбинации

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu,$$

[1]) Существование таких векторов отнюдь не гарантировано общем случае. Однако для полей тяготения, создаваемых островными распределениями источников, при наложении некоторых асимптотических (граничных) условий такие векторы всегда существуют.

причем

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = \bar{m}_\mu m^\mu = 0.$$

Десять независимых вещественных компонент тензора Римана в вакууме ($R_{\alpha\beta} = 0$) можно однозначно охарактеризовать пятью комплексными скалярами («тетрадными компонентами тензора Римана» [1])):

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta,\\
\Phi_1 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, l^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta,\\
\Phi_2 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\gamma m^\delta,\\
\Phi_3 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta l^\gamma n^\delta,\\
\Phi_4 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \bar{m}^\alpha n^\beta \bar{m}^\gamma n^\delta.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Гравитационное излучение называется уходящим от системы или падающим (на систему), в зависимости от того, ищем ли мы решение, задав начальные данные (в нашем случае функцию информации) на изотропной гиперповерхности абсолютно будущего или абсолютно прошлого (в линеаризованной теории тяготения соответствующие решения волнового уравнения называются запаздывающими или опережающими потенциалами). Предполагая, что в излучении присутствуют только уходящие волны, т. е. отвлекаясь от рассеяния системой падающего на нее внешнего излучения [2]), а также задаваясь определенным классом L функций Φ_A ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) в формулах (11.15), можно показать [175, 176], что в асимптотически плоском пространстве — времени один из скаляров Φ_A, например $\Phi_{A'}$, допускает разложение вида

$$\Phi_{A'} = \sum_{n=0}^{L} r^{-(5+n)}\, \overset{n}{\Phi}_{A'} + O\left(r^{-(5+L)}\right),$$

где коэффициенты разложения $\overset{n}{\Phi}_{A'}$ не зависят от r.

Пусть этим скаляром будет Φ_0. Согласно Ньюмэну и Пенроузу [177], класс гладкости для него достаточно

---

[1]) Такие компоненты можно определить для любого тензора, обладающего всеми алгебраическими свойствами тензора Римана в пустоте, например для тензора Вейля.

[2]) Рассеяние падающего на систему тел гравитационного излучения рассматривали Зерилли [178, 408], Вишвешвара [179], Куч, Киннерсли и Торренс [180, 181].

принять равным 2:

$$\Phi_0 = \Phi_0^0 r^{-5} + \Phi_0^1 r^{-6} + \Phi_0^2 r^{-7} + O(r^{-7}). \qquad (11.16)$$

Тогда, используя тождества Бианки и следующее из них в случае (2.2) тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot,\,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 0,$$

можно получить асимптотические разложения остальных Φ_A:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^0 r^{-4} + O(r^{-5}), \quad \Phi_2 = \Phi_2^0 r^{-3} + O(r^{-4}), \\ \Phi_3 &= \Phi_3^0 r^{-2} + O(r^{-3}), \quad \Phi_4 = \Phi_4^0 r^{-1} + O(r^{-2}), \end{aligned} \qquad (11.17)$$

где Φ_1^0, Φ_2^0, Φ_3^0, Φ_4^0 не зависят от r. Для метрики Бонди коэффициенты Φ_A^0 зависят только от θ и u, причем

$$\Phi_4^0 = C(u, \theta)_{,00}.$$

В случае аксиальной симметрии коэффициенты Φ_A^0 разложений (11.16) — (11.17) выражаются через присоединенные функции Лежандра [182, 183]:

$$\Phi_4^0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(u)\, P_n^2(\cos\theta),\ \ \Phi_3^0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(u)\, P_n^1(\cos\theta),$$

$$\Phi_2^0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(u)\, P_n^0(\cos\theta),\ \ \Phi_1^0 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(u)\, P_n^1(\cos\theta), \qquad (11.18)$$

$$\Phi_0^m = \sum_{n=2}^{\infty} h_n^m P_n^2(\cos\theta).$$

В таком виде коэффициенты разложения обнаруживают аналогию с запаздывающими потенциалами волнового уравнения специальной теории относительности.

Действительно, в плоском пространстве — времени аксиально симметричное решение волнового уравнения в полярных координатах имеет вид

$$\varphi^{(n)} = \psi^{(n)}(r, u)\, P_n(\cos\theta), \qquad (11.19)$$

где функции $\psi^{(n)}$ определяются как решение уравнений

$$\psi_{,11}^{(n)} - 2\psi_{,01}^{(n)} + 2r^{-1}(\psi_{,1}^{(n)} - \psi_{,0}^{(n)}) - r^{-2} n(n+1)\psi^{(n)} = 0 \qquad (11.20)$$

и описывают 2^n-мультипольное излучение. В свою очередь, решение уравнений (11.20) выражается в виде конечного ряда по степеням параметра r^{-1}:

$$\psi^n = \sum_k \overset{n}{\underset{(k)}{L}}(u)\, r^{-(k+1)},$$

причем коэффициенты ряда удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$2(k+1)\frac{d}{du}\overset{(n)}{\underset{(k+1)}{L}} = (n-k)(n-k+1)\overset{(n)}{\underset{(k)}{L}}.$$

Учитывая эту аналогию, можно рассматривать характеризующие тензор Римана величины Φ_A как решение общековариантного волнового уравнения типа Зельманова (7.4).

Эта аналогия позволяет определить мультипольные моменты аксиально симметричной системы источников следующим образом:

монополь (масса) $$M = -\frac{1}{4}\int_0^\pi (\Phi_2^0 + \bar{\Phi}_2^0)\, P_0^0(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{11.21}$$

дипольный момент $$D = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_1^0 P_1^1(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{11.22}$$

квадрупольный момент $$Q = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_0^0 P_2^0(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

и т. д.

Для метрики Бонди (11.3) на основе (11.21) получаем:

$$M = M_B + \frac{1}{4}\int_0^\pi (C\bar{C})_{,0}\sin\theta\, d\theta, \tag{11.23}$$

где M_B обозначает массу системы по Бонди, определенную формулой (11.12). Аналогично, закон сохранения массы Бонди (11.13) примет вид

$$\frac{dM_B}{du} = -\frac{1}{2}\int C_{,0}\bar{C}_{,0}\sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4}\int (C\bar{C})_{,00}\sin\theta\, d\theta. \tag{11.24}$$

Определение (11.21) следует признать более общим, чем определение Бонди (11.12), так как оно не связано с выбором частной системы координат. Согласно интерпретации, предложенной Ньюмэном, величина M может рассматриваться как полная масса, включающая энергию излучения, тогда как величина M_B представляет массу системы в стационарном состоянии («вейлевскую» массу).

3. Гравитационное излучение произвольных изолированных систем. Метрика Сакса

Мы видели, что тетрадные компоненты тензора Римана для метрики Бонди распадаются на три группы, в одной из которых доминирующими на больших расстояниях являются члены порядка r^{-1}, в другой — порядка r^{-2} и в третьей — порядка r^{-3}. Таким образом тензор Римана удалось представить в виде суммы трех членов, пропорциональных соответственно первой, второй и третьей обратным степеням аффинного параметра r:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^{-1}\cdot N_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-2}\cdot \mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \mathrm{I}_{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot O(r^{-3}), \quad (11.25)$$

причем оказалось, что $N_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\mathrm{I}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — некоторые тензоры, обладающие алгебраическими свойствами тензоров Римана, соответственно, типов N, III и I по Петрову. Аналогичное разбиение было установлено Робинсоном и Траутманом для найденного ими решения уравнений тяготения, которое описывает сферические гравитационные волны:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^{-1}N_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-2}\,\mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta} + r^{-3}D_{\alpha\beta\gamma\delta}\,; \quad (11.26)$$

здесь $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор, обладающий алгебраической структурой тензора Римана типа D. Следует сказать, что уверенность в физической содержательности этих результатов подкрепляется также тем, что в случае электромагнитного излучения, как показали Гольдберг и Сакс [184], имеет место разбиение тензора поля $F_{\mu\nu}$, несомненно допускающее интерпретацию на языке ближней зоны (индукции) и дальней (волновой) зоны. Иными словами, общая физическая аналогия между теорией электромагнитного излучения и описанным выше подходом Бонди — Сакса указывает на правомерность интерпретации результатов Бонди — Сакса в терминах волновой зоны излучения (члены типов N и III) и зоны индукции (члены типов I и D).

Действительно, на больших расстояниях от излучающей системы доминируют члены типа N (волновая зона), а на малых расстояниях от источников — члены типа I и D, описывающие свойства стационарного поля (типа Вейля для метрики Бонди и типа Шварцшильда для метрики Робинсона — Траутмана). При этом член $N_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для метрики Бонди пропорционален $C_{,00}$, что характеризует связь функции информации $C_{,0}$ с асимптотикой поля излучения.

Сакс [185] предложил обобщение разложения (11.25) на случай гравитационного излучения произвольных островных систем.

Легко видеть, что координатные линии φ в системе координат Бонди являются траекториями векторного поля Киллинга [58], нормального к некоторой трехмерной гиперповерхности. Допуская, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ может зависеть не только от u, r, θ, но и от координаты φ, построим более общую координатную систему, которая отвечала бы произвольной системе источников, не обнаруживающей никакой пространственной симметрии.

Пусть $u\,(x^\alpha)$ — скалярное поле, определяющее изотропную трехмерную гиперповерхность (2.15), т. е. удовлетворяющее уравнению эйконала (2.22):

$$g^{\alpha\beta}u_{,\alpha}u_{,\beta} = 0.$$

Пусть, далее, существует конгруэнция изотропных геодезических линий с направляющим вектором $l_\alpha = u_{,\alpha}$, ортогональная к гиперповерхности $u = \text{const}$. Введем также θ и φ — две скалярные функции, удовлетворяющие уравнениям:

$$\theta_{,\alpha}l^\alpha = \varphi_{,\alpha}l^\alpha = 0. \qquad (11.27)$$

Определим далее скаляр r,

$$r^4 = (K\sin\theta)^{-1}, \qquad (11.28)$$

где

$$K \equiv (g^{\alpha\beta}\theta_{,\alpha}\theta_{,\beta})(g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}) - (g^{\alpha\beta}\theta_{,\alpha}\theta_{,\beta})^2 > 0.$$

Условие $K \neq 0$ является следствием уравнений (11.27); требование $K > 0$ достаточно, чтобы скаляр r был вещественным и положительным.

Можно показать [185], что асимптотически плоское пространство — время V_4 может удовлетворить всем перечисленным требованиям в том и только в том случае, если в координатах Бонди его метрика представима в виде

$$ds^2 = Br^{-1} \exp(2\beta)\, du^2 + 2 \exp(2\beta)\, du\, dr - \\ - r^2 H_{ab} (dx^a - A^a du)(dx^b - A^b du) \qquad (11.29)$$

$$(a, b = 2, 3),$$

где двумерная квадратичная форма $h_{ab}\, dx^a\, dx^b$ имеет вид

$$2h_{ab}\, dx^a\, dx^b = [\exp(2\gamma) + \exp(2\delta)]\, d\theta^2 + \\ + 4 \operatorname{sh}(\gamma - \delta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \\ + [\exp(-2\gamma) + \exp(-2\delta)] \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

а входящие в метрику шесть функций V, U^a $(a = 2, 3)$, β, γ, δ зависят от всех четырех координат u, r, θ, φ.

Потребовав, чтобы координатные линии φ $(u, r, \theta = \mathrm{const})$ являлись траекториями некоторого нормального поля векторов Киллинга, получим как частный случай аксиально симметричную метрику Бонди, определяемую условиями

$$\gamma = \delta, \quad u^3 = 0, \ \partial g_{\alpha\beta}/\partial\varphi = 0. \qquad (11.30)$$

4. Геодезические лучи. Теорема расщепления

Одним из предположений, при которых была получена метрика Сакса (11.29), было существование в V_4 конгруэнции изотропных геодезических (называемых *геодезическими лучами*). В связи с этим рассмотрим типы полей тяготения, допускающие геодезические лучи.

Как мы уже отмечали в гл. 8, всякое пустое пространство — время V_4 допускает по крайней мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля l^α (векторы Дебеве), удовлетворяющих алгебраическим соотношениям (3.29) — (3.32), где вместо тензора Вейля в нашем случае будет фигурировать сам тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Векторы Дебеве, вообще говоря, не являются направляющими векторами конгруэнций изотропных геодезических. Однако, как показал Сакс [110], все алгебраически специальные пустые пространства V_4, т. е. пространства типов D, II, N и III по Петрову, допускают геодезическое изотропное векторное поле l^α:

$$l^\alpha l^\beta_{;\alpha} = 0, \qquad (11.31)$$

удовлетворяющее условию (3.31), а потому и заведомо условию (3.32). При этом соответствующая конгруэнция геодезических лучей обладает равной нулю дисторсией (теорема Гольдберга — Сакса, см. [184, 185]):

$$2\sigma^2 \equiv l_{(\alpha;\beta)}l^{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(l^\alpha_{;\alpha})^2 = 0. \qquad (11.32)$$

Если существует решение уравнения эйконала (2.22), то условие (11.32) означает отсутствие искажения формы тени, отбрасываемой на экран непрозрачным плоским предметом, ориентированным ортогонально лучам. В зависимости от того, равно нулю (или не равно нулю) растяжение конгруэнции

$$\varepsilon = \frac{1}{2} l^\alpha_{;\alpha}, \qquad (11.33)$$

фронт волны отвечает плоским (или сферическим) гравитационным волнам [1]).

Это наводит на мысль, что алгебраически специальные поля отвечают гравитационным волнам вдали от системы источников, в то время как алгебраически общие поля представляют гравитационное поле вблизи источников, «возмущающее» фронт гравитационной волны. Для математического обоснования этого вывода рассмотрим асимптотическое поведение тензора Римана асимптотически плоского пространства — времени, описываемого метрикой Сакса.

Предполагая, что функции, входящие в метрику Сакса (11.29), бесконечно дифференцируемы по r (что, вообще говоря, как мы увидим, не обязательно), и разлагая их в ряд Тейлора по степеням параметра r^{-1}, можно прямым вычислением с учетом уравнений поля (2.2) убедиться, что

---

[1]) Если пространство — время допускает изотропную геодезическую конгруэнцию с отличной от нуля дисторсией, то соответствующее поле гравитационного излучения интерпретируется как поле *цилиндрических волн.* Примерами аксиально симметричных полей тяготения такого типа с бесконечным линейным распределением источников являются решение Эйнштейна — Розена [187], а также обобщающие его решения Иордана — Элерса [188] и Компанейца [189]. В отличие от рассмотренных ранее полей плоских и сферических волн, они принадлежат к алгебраически общему типу I и, подобно гравитационным полям островных источников (Бонди и Сакса), допускают расщепление на члены типа N, II и I (см. работы Стэхеля [188] и Мардера [190—192]). Специальному рассмотрению волновых свойств нестационарных аксиально симметричных полей тяготения посвящены исследования Вебера — Уилера [193] и Кришны [194—196].

все Φ_A в (11.15) отличны от нуля, причем разложения их в ряды начинаются с членов разных порядков: от r^{-1} до r^{-5}. Принимая во внимание общие формулы Ньюмэна (11.16)—(11.17) для асимптотики Φ_A, можно прийти к следующему *расщеплению тензора Римана* (*«теорема о расщеплении» Сакса* [110]):

$$R = {}_0Nr^{-1} + {}_0\mathrm{III}r^{-2} + {}_0\mathrm{II}r^{-3} + {}_0\mathrm{I}r^{-4} + \mathrm{I}'r^{-5} + \ldots \quad (11.34)$$

Здесь ${}_0N$, ${}_0\mathrm{III}$, ... означают, соответственно, тензоры с алгебраической структурой тензоров Римана типов N, III и т. д. (индексы для краткости опущены), а индекс 0 слева означает, что эти тензоры ковариантно постоянны вдоль соответствующих геодезических лучей. В четвертом и пятом членах I' и ${}_0\mathrm{I}$ различаются тем, что тензор I' не обладает, а ${}_0\mathrm{I}$ обладает геодезическими лучами. При этом сумма членов до некоторого данного порядка включительно оказывается тензором того же алгебраического типа, что и ее последний член. Коэффициент ${}_0N$ пропорционален $\tilde{C}_{,00}$, где $\tilde{C}_{,0}$ — функция, переходящая при условиях (11.30) в функцию информации Бонди. В частности, при $C_{,0}=0$ для метрики Бонди ${}_0N = {}_0\mathrm{III} = {}_0\mathrm{II} = 0$, и мы приходим к стационарной аксиально симметричной метрике Вейля (11.10).

На основании теоремы расщепления, гравитационным полям источников островного типа можно дать следующую алгебраическую интерпретацию. Поле, создаваемое материальной системой в окружающем ее пустом пространстве, принадлежит к первому типу (I или D) по Петрову. Если система излучает, то на расстояниях, значительно превышающих размеры самой системы и длину волны ее излучения (т. е. в волновой зоне), гравитационное поле будет приближенно типа N. Иными словами, с точки зрения наблюдателя, который покоится на большом расстоянии (в фиксированном направлении) относительно излучающей системы, в тензоре Римана будут превалировать члены типа N, а для наблюдателя, удаление которого от системы мало по сравнению с размерами самой системы и длиной волны ее излучения (ближняя зона), в тензоре Римана будут превалировать члены типа I или D, в зависимости от характера волнового фронта. Наконец, на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы источников, но малых по сравнению с длиной волны ее излучения (переходная зона), гравитационное поле описывается тензором Римана типа II или III, в зависимости от характера распределения источников.

Как показали Сакс [148, 185] и Персидес [197], при некоторых специальных предположениях (разложимость метрики в бесконечный ряд по r^{-1}, евклидова асимптотика на бесконечности) расщепление тензора Римана (11.34) осуществимо для произвольных гравитационных полей в пустом пространстве, обладающих геодезическими лучами. Возможность этого гарантируется полученными выше условиями (11.16) — (11.17), определяющими асимптотику тетрадных компонент тензора Римана. В случаях, когда пространство — время не допускает конгруэнции геодезических лучей, Леман [198] и Гольдберг [199] сформулировали и доказали более слабое утверждение: в этих случаях одно из изотропных векторных полей Дебеве является асимптотически геодезическим, т. е.

$$l_{\alpha;\beta}\, l^{\beta} = O(r^{-n}) \qquad (n \geqslant 2). \tag{11.35}$$

Если предположить, что расщепление (11.34) для этого случая сохраняется, то вектор l^{α} уже не будет направляющим для геодезического луча в пространствах, соответствующих тензорам разложения N, III и т. д. Однако при этом должна существовать конгруэнция изотропных геодезических с касательным вектором l'^{α}, являющихся асимптотами траекторий вектора l^{α}. Тогда можно ожидать, что конгруэнция l'^{α} представляет геодезические лучи только в пространстве — времени, отвечающем первым четырем членам расщепления (11.34):

$$l'_{[\rho} R_{\alpha]\beta\gamma[\delta}\, l'_{\sigma]}\, l'^{\beta}\, l'^{\gamma} = O(r^{-5}), \tag{11.36}$$

т. е. является вектором Дебеве асимптотически.

Наконец, если векторное поле l'^{α} удовлетворяет условию (11.36) и, кроме того, является градиентным, $l_{\alpha}' = \varphi_{,\alpha}$, то, как показали Ньюмэн и Пенроуз [174], расщепление (11.34) всегда имеет место.

5. Общая алгебраическая структура тензора Римана

Формула расщепления Сакса (11.34), очевидно, не является общековариантной, так как параметр r играет роль координатного расстояния вдоль геодезической. Однако алгебраическая классификация канонических типов тензора Римана позволяет сформулировать разбиение тензора Римана алгебраически общей структуры общековариантным образом.

Для этой цели мы воспользуемся формализмом Ньюмэна — Пенроуза. В изотропной комплексной тетраде (l^μ, n^μ, m^μ, $\bar{m}^\mu$), векторы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &l_\alpha l^\alpha = n_\alpha n^\alpha = m_\alpha m^\alpha = l_\alpha m^\alpha = n_\alpha m^\alpha = 0, \\ &l_\alpha n^\alpha = m_\alpha \bar{m}^\alpha = 1, \end{aligned} \tag{11.37}$$

определим три простых бивектора

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} = 2l_{[\alpha}\bar{m}_{\beta]}, \quad U_{\alpha\beta} = 2n_{[\alpha}m_{\beta]}, \\ M_{\alpha\beta} = 2l_{[\alpha}n_{\beta]} + 2\bar{m}_{[\alpha}m_{\beta]}. \end{aligned} \tag{11.38}$$

Тогда, как показали Каммерер [200] и Сзекерес [134], всем возможным алгебраическим типам тензора Римана в пустоте отвечает следующая общая комбинация:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + i\,{}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_1 V_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} + C_2 (V_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + \\ + M_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta}) + C_3 (M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + U_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} + V_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) + \\ + C_4 (U_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} + M_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}) + C_5 U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}, \end{aligned} \tag{11.39}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные скаляры.

Используя канонический вид матрицы $\| R_{ab} \|$ тензора Римана в бивекторном пространстве R_6, можно показать, что каждому типу поля тяготения (гл. 3) отвечает разложение тензора Римана на бивекторы (11.38), отвечающее тому или иному частному случаю выражения (11.39), где какие-то из скаляров $C_1, \ldots, C_5$ (не более четырех) равны нулю. Задача выражения тензора Римана в случае пустых пространств (а в общем случае — тензора Вейля) через бивекторы для всех типов полей тяготения была решена Дебеве [81]. Сопоставляя результаты Дебеве с выражением (11.39), можно прийти к следующим выводам. Пусть данное поле тяготения — алгебраически специальное. Тогда $C_4 = C_5 = 0$, т. е. разложение (11.39), вообще говоря, состоит лишь из первых трех членов; в этом случае векторное поле l^α определяет геодезические лучи. Пусть, кроме того, $C_3 = 0$. Тогда тензор Римана принадлежит к типу III. Для случая $C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ поле тяготения имеет тип N с вектором l^α в качестве вектора Дебеве. Наконец, условие $C_3 \neq 0$ характеризует поля типов II и D.

Сопоставляя выражение (11.39) с формулой расщепления Сакса (11.34), мы видим, что каждый из пяти первых членов асимптотического разложения тензора Римана в ряд по r^{-1} обладает алгебраической структурой соответствующего члена в выражении (11.39). Поэтому представляет интерес исследовать асимптотическое поведение коэффициентов $C_1, \ldots, C_5$ в (11.39). Для этого на геодезическом луче с касательным вектором l^α выберем канонический параметр r. Если считать, что условие $r \to \infty$ всегда отвечает асимптотическому значению тензора Римана, то в общем случае нет необходимости предполагать пространство — время асимптотически плоским. Более того, вместо жесткого условия Сакса о бесконечной дифференцируемости метрики по параметру r ограничимся лишь предположением о том, что компоненты тензора Римана, а также векторов l^α, n^α, m^α, $\bar{m}^\alpha$ являются функциями координат класса C^6 (что отвечает нашей задаче исследования асимптотического поведения первых пяти членов разложения в ряд по r^{-1}).

Подставим выражение (11.39) в тождества Бианки и будем рассматривать последние как уравнения относительно функций $C_1, \ldots, C_5$. Исследуя главные (по порядку малости) члены решения этих уравнений, найдем, что *при* $r \to \infty$ *коэффициенты* C_N *в* (11.39), $N = 1, 2, 3, 4, 5$, *стремятся к нулю, соответственно, как* $1/r^N$.

Таким образом теорема расщепления Сакса будет доказана при гораздо более общих предположениях. Строгое доказательство такого рода впервые дал Каммерер [200]; он предполагал гладкость класса C^5, так что его доказательство охватывает лишь первые четыре члена в (11.39). Это соответствует тому, что лишь для первых четырех членов в (11.39) существуют геодезические лучи. Результат Каммерера может быть обобщен и на пятый член, если воспользоваться, например, соображениями об асимптотически геодезических конгруэнциях.

6. Асимптотические симметрии. Группа Бонди — Метцнера

На основании теоремы расщепления мы могли убедиться, что на больших расстояниях от системы источников свойства даже асимптотически плоских гравитационных волновых полей оказываются алгебраически сложными. Нетривиальный характер асимптотики полей гравитационного излучения Бонди и Сакса особенно явно выступает при исследовании их асимптотических симметрий.

Действительно, исходя из физических соображений, казалось бы, можно ожидать, что на асимптотической гиперповерхности $r \to \infty$ действует группа движений метрики, порядок которой совпадает с порядком максимальной подвижности пространства V_4 соответствующего типа, т. е. типа N по Петрову. Однако ввиду того, что на больших расстояниях поле излучения островной системы описывается структурой тензора Римана типа N лишь *приближенно*, оказывается, что не существует группы движений, которая сохраняла бы асимптотику поля, а также граничные условия. Однако существует группа преобразований координат, удовлетворяющая этим требованиям; для аксиально симметричных островных распределений источников она называется группой Бонди — Метцнера [171]. Эта группа содержит в себе группу Лоренца как подгруппу (не являющуюся, однако, нормальной) и включает в себя, кроме того, бесконечномерную группу «супертрансляций».

В физической интерпретации группы Бонди — Метцнера большую роль сыграл тот факт, что функция информации $C_{,0}$ имеет относительно этой группы очень простые трансформационные свойства. Это позволяет выразить в терминах инвариантов группы сохраняющиеся интегральные величины. Обобщение группы Бонди — Метцнера на случай произвольных систем островного типа было предложено Саксом [148].

7. Асимптотические свойства полей Эйнштейна — Максвелла

Метод Бонди — Сакса был обобщен также на случай гравитационного излучения островных систем в непустом пространстве — времени (Козаржевский [201], Хокинг [202], Стэхель [203]). В частности, Козаржевский [201] показал, что асимптотическое поведение гравитационного поля, порождаемого произвольными изолированными системами электрически заряженных тел, также определяется формулой расщепления Сакса. Этот результат представляется естественным, поскольку геодезические лучи являются траекториями распространения как гравитационного, так и электромагнитного излучения.

Аналогия между гравитационным и электромагнитным полями отчетливо проявляется и в их асимптотическом поведении. Так, на основе интегральной формы уравнений Максвелла Гольдберг и Керр [152] установили, что электромагнитное поле ограниченного распределения зарядов и токов допускает следующее асимптотическое разложение:

$$F_{\mu\nu} = r^{-1}N^F_{\mu\nu} + r^{-2}\,\mathrm{III}^F_{\mu\nu} + r^{-3}J_{\mu\nu}. \tag{11.40}$$

Здесь r — аффинный параметр, изменяющийся вдоль градиентных изотропных направлений l^α, т. е. вдоль электромагнитных лучей, все компоненты $J_{\mu\nu} = J_{[\mu\nu]}$ — ограниченные сверху функции, а антисимметричные тензоры $N^F_{\mu\nu}$ и $\mathrm{III}^F_{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям:

$$N^F_{\mu\nu}l^\nu = 0, \qquad \mathrm{III}^F_{\mu\nu}l^\nu = al_\mu \quad (a \text{ — скаляр}), \tag{11.41}$$

в полной аналогии с алгебраическими соотношениями, характерными для тензоров Римана, соответственно, типов N и III по Петрову.

Из формулы (11.40) вытекает, что в системе координат, в которой параметр r характеризует расстояние от системы источников излучения, вдали от системы поле $F_{\mu\nu}$ становится изотропным, т. е. удовлетворяет соотношениям:

$$l_{[\lambda}F_{\beta\gamma]} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0. \tag{11.42}$$

Однако, как показал Шевретон [149], условия (11.42) являются лишь необходимыми, но не достаточными для *плоских* электромагнитных волн в пространстве — времени Минковского: для того чтобы электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ отвечало случаю именно плоских волн, необходимо и достаточно, чтобы, кроме условий (11.42), выполнялись также условия:

$$l_{[\lambda}F_{\beta\gamma],\,\sigma} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta,\,\sigma} = 0. \tag{11.43}$$

Рассмотрим условия (11.42) — (11.43) в общем случае искривленного пространства — времени. Как показал Марио [260, 261], траектории векторного поля l^α, удовлетворяющего соотношениям (11.42), образуют конгруэнцию изотропных геодезических (11.31). Ковариантно дифференцируя соотношения (11.42) и принимая во внимание условия (11.43), получаем:

$$F_{[\beta\gamma}\,l_{\lambda];\,\sigma} = 0, \qquad F_{\alpha\beta}\,l^\alpha_{;\,\sigma} = 0, \tag{11.44}$$

откуда следует [149], что тензор $l_{\lambda;\,\sigma}$ может быть представлен в виде произведения двух векторов:

$$l_{\lambda;\,\sigma} = A_\sigma\, l_\lambda, \tag{11.45}$$

где A_σ — вектор, ортогональный вектору l_λ. Из формул (11.45) автоматически следует, что для конгруэнции геодезических, определяемой вектором l^α, вращение ω, растяжение ε и дисторсия σ обращаются в нуль. Это означает, что при бесконечном удалении от системы произвольных заряженных источников электромагнитное и гравитационное поля являются полями плоских волн с общими конгруэнциями геодезических лучей.

ГЛАВА 12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

1. Хронометрические инварианты

Предыдущие главы в основном были посвящены исследованию полей тяготения с точки зрения общековариантных критериев существования гравитационных волн. Поле тяготения, удовлетворяющее общековариантному волновому критерию, носит волновой характер безотносительно к выбору координатной системы. Представляет, однако, интерес, отказавшись от требования общей ковариантности, сформулировать критерий *гравитационно-инерциальных волн*, ковариантный лишь относительно преобразований, связывающих трехмерные координатные сетки, в которых точки избранного тела отсчета покоятся. Такой критерий должен быть, кроме того, инвариантен относительно преобразований, сохраняющих линии координатного времени x^0, поскольку они являются мировыми линиями тела отсчета. Иными словами, этот критерий отражает выбор системы отсчета наблюдателей, поэтому выполнение его можно считать признаком реальности волн при заданном выборе тела отсчета; переходом же к другому телу отсчета такие волны, вообще говоря, могут быть устранены вследствие зависимости инерциальных свойств от состояния движения наблюдателей.

Итак, рассмотрим преобразования вида

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0 (x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{12.1}$$

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i (x^1, x^2, x^3), \tag{12.2}$$

обладающие свойством $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0$. Очевидно, преобразования

(12.1)— (12.2), где x^0 — временноподобная координата, есть наиболее общие преобразования, связывающие системы координат, покоящиеся относительно заданного тела отсчета.

При формулировке критерия ограничимся инвариантностью по отношению к преобразованиям (12.1), т. е. хронометрической инвариантностью, и ковариантностью по отношению к преобразованиям (12.2), т. е. пространственной ковариантностью. Таким образом, при задании тела отсчета свобода координатных преобразований ограничена хронометрической инвариантностью (12.1) и пространственной ковариантностью (12.2). Преобразования (12.1)—(12.2) послужили Зельманову основой, на которой был построен развитый им формализм хронометрических инвариантов [204—206].

Хронометрические инварианты, т. е. трехмерные физические величины, инвариантные относительно преобразований (12.1), можно рассматривать как наблюдаемые в общей теории относительности, т. е. величины, непосредственно связанные с физическими измерениями. Поэтому хронометрически инвариантный подход к гравитационно-инерциальным волнам представляет тем больший интерес, что определяемые таким образом волны можно рассматривать как объект непосредственного физического измерения.

Следуя Зельманову [204, 205], введем хронометрически инвариантные операторы дифференцирования, обозначая их, в отличие от обычных, звездочками:

$$ {}^*\partial = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,\partial_0, \qquad {}^*\partial_i = \partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\,\partial_0. \tag{12.3} $$

Введем также хронометрически инвариантный пространственный метрический тензор

$$ b_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}}, \quad b^{ik} = -g^{ik}, \quad b = \det\|b_{ik}\|. \tag{12.4} $$

Для хронометрически инвариантных *вектора гравитационно-инерциальной силы* F_i *и тензора* A_{ik} *угловой скорости абсолютного вращения системы отсчета* Σ относительно локально сопутствующей геодезической системы Σ_0

имеем выражения [206]:

$$F^j = \frac{b^{ij}}{W}(^*\partial_i W - {}^*\partial V_i), \tag{12.5}$$

$$A_{ik} = {}^*\partial_{[i} V_{k]} + F_{[i} V_{k]}, \tag{12.6}$$

где W и V_i — соответственно *скалярный* и *векторный потенциалы гравитационно-инерциального поля*:

$$W = (1 - \sqrt{g_{00}}), \qquad V_i = -g_{0i}/\sqrt{g_{00}}.$$

Хронометрически инвариантный *тензор* D_{ik} *скоростей деформаций* трехмерного пространства отсчета системы Σ относительно локально сопутствующей системы Σ_0 определяется выражениями [205]:

$$D_{ik} = \frac{1}{2}{}^*\partial b_{ik}, \ D^{ik} = -\frac{1}{2}{}^*\partial b^{ik}, \ D = {}^*\partial \ln \sqrt{b}. \tag{12.7}$$

Здесь $D = D_l^l$ — скорость относительного объемного расширения элемента пространства.

Определим также хронометрически инвариантные аналоги символов Кристоффеля и операцию хронометрически инвариантного трехмерно-ковариантного дифференцирования [205]:

$$\Delta_{ij}^l = \frac{1}{2} b^{kl}(^*\partial_i b_{jk} + {}^*\partial_j b_{ik} - {}^*\partial_k b_{ij}), \tag{12.8}$$

$${}^*\nabla_i Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} = {}^*\partial_i Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} - \Delta_{ij}^l Q_{l\cdots}^{\cdot\cdot\cdot k} + \ldots + \Delta_{il}^k Q_{j\cdots}^{\cdot\cdot\cdot l}, \tag{12.9}$$

причем

$${}^*\nabla_i b_{jk} = 0, \ {}^*\nabla_i b_j^k = 0, \ {}^*\nabla_i b^{jk} = 0.$$

В рамках формализма хронометрических инвариантов можно, кроме динамической величины F_i, кинематической — A_{ik} и статической — D_{ik}, ввести четвертую, геометрическую характеристику сопутствующего трехмерного пространства, именно, пространственный тензор кривизны K_{lkij}:

$$K_{kilj} = \frac{1}{2}(H_{ki[lj]} + H_{[ki]lj}), \tag{12.10}$$

где

$$H_{kil\cdot}^{\cdot\cdot\cdot j} = {}^*\partial_k \Delta_{il}^j - {}^*\partial_i \Delta_{kl}^j + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m \Delta_{im}^j, \tag{12.11}$$

причем

$$K_{lkij} = -K_{klij} = -K_{lkji} = K_{ijlk}. \qquad (12.12)$$

Как показал Зельманов, двадцать существенных компонент четырехмерного тензора Римана $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ могут быть собраны в трех хронометрически инвариантных тензорах, выражающихся через F_i, A_{ik}, D_{ik} и K_{iklj}. Действительно, введем следующие трехмерные тензоры [91]:

$$X^{ij} = -\frac{R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i\cdot j}}{g_{00}}, \quad Y^{ijk} = -\frac{R_{0\cdot\cdot\cdot}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad Z^{iklj} = R^{iklj}. \qquad (12.13)$$

Легко видеть, что тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} являются хронометрическими инвариантами. Действительно, пусть $Q_{00\cdots 0}^{ik\cdots p}$ — компоненты мирового (четырехмерного) тензора ранга n, все верхние индексы в которых отличны от нуля, а все нижние (числом m) — нули. Тогда, совершая преобразование (12.1), можно убедиться, что величины

$$T^{ik\cdots p} = \frac{Q_{00\cdots 0}^{ik\cdots p}}{(g_{00})^{m/2}} \qquad (12.14)$$

образуют хронометрически инвариантный трехмерный тензор ранга $n-m$. Отметим попутно, что формула (12.14) может служить алгоритмом построения хронометрических инвариантов из компонент вида $Q_{00\cdots 0}^{ik\cdots p}$ мировых тензоров. Из определений (12.13) очевидно, что тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} построены именно по этому правилу, а потому удовлетворяют условию хронометрической инвариантности.

Выражая компоненты мирового тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через хронометрически инвариантные величины (12.5) — (12.7), (12.10), можно получить формулы Зельманова, устанавливающие связь тензоров (12.13) с этими величинами:

$$X_{ij} = {}^*\partial D_{ij} - (D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l})(D_{jl} + A_{jl}) + {}^*\nabla_{(i}F_{j)} - \frac{1}{2}F_iF_j, \qquad (12.15)$$

$$Y_{ijk} = {}^*\nabla_j(A_{ik} + D_{ik}) - {}^*\nabla_i(A_{jk} + D_{jk}) - 2A_{ij}F_k, \qquad (12.16)$$

$$Z_{iklj} = 2(D_{i[k}D_{l]j} - A_{i[k}A_{l]j} + A_{ij}A_{kl}) - K_{iklj}. \qquad (12.17)$$

При этом

$$X_k^k = \frac{R_{00}}{g_{00}}, \quad Y^{il\cdot}_{\cdot\cdot l} = \frac{R_0^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{ijl\cdot}_{\cdot\cdot\cdot l} + X^{ij} = -R^{ij}, \tag{12.18}$$

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad Y_{ijk} = -Y_{jik}, \quad Y_{(ijk)} = 0, \tag{12.19}$$

а тензор Z_{klij} обладает свойствами симметрии и антисимметрии (12.12) тензора K_{klij}. Мы видим, что двадцать существенных компонент тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражаются через шесть существенных компонент тензора X_{ij}, восемь существенных компонент тензора Y_{ijk} и шесть существенных компонент тензора Z_{klij}.

2. Хронометрически инвариантное определение гравитационно-инерциальных волн

Итак, мировой тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ распадается на три хронометрически инвариантных трехмерных тензора (12.13), выражающихся, в свою очередь, через гравитационно-инерциальные физические характеристики трехмерного пространства, сопутствующего выбранному телу отсчета, (12.5)— (12.7) и (12.10). Определение гравитационно-инерциальных волн мы свяжем с четырьмя гравитационно-инерциальными характеристиками (12.5)— (12.7), (12.10), а также с величинами (12.13), выражающимися через них по формулам (12.15) — (12.17).

Хронометрически инвариантное определение оператора Даламбера в общей теории относительности, реализующее идею Зельманова, было сформулировано в работе [94].

Хронометрически инвариантный критерий существования гравитационно-инерциальных волн состоит в требовании, чтобы трехмерные хронометрически инвариантные величины: вектор F_i, тензоры D_{ik}, A_{ik}, K_{klij} и составленные из них скаляры, а также выражающиеся через них хронометрически инвариантные тензоры X_{ij}, Y_{ijk}, Z_{klij} удовлетворяли уравнениям вида

$$^*\Box P = Q. \tag{12.20}$$

Здесь введены обозначения:

$$^*\Box = {}^*\nabla^2 - \frac{1}{a^2}\,{}^*\partial\,{}^*\partial, \quad {}^*\nabla^2 \equiv h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k, \tag{12.21}$$

так что $^*\Box$ есть хронометрически инвариантный пространственно-ковариантный волновой оператор Даламбера, a —

скалярная функция координат. Предполагается, что в Q не входят явно вторые производные от искомой функции P. Последнюю мы будем называть по традиции волновой функцией в смысле уравнения (12.20). Роль волновой функции P будут играть различные хронометрически инвариантные величины той или иной трехмерно-тензорной природы. Исследование хронометрически инвариантного волнового критерия сводится к анализу его выполнимости для различных хронометрически инвариантных характеристик системы отсчета и гравитационного поля по отношению к ней. В соответствии с этим следует различать гравитационно-инерциальные волны сил F_i, деформаций D_{ik}, кривизны K_{klij} и т. д.

В работе [94] этот критерий был применен для анализа ряда известных решений уравнений Эйнштейна в пустоте. Было показано, что он выполняется для всех исследованных решений типа N по Петрову: решений Переса [160], Такено [153, 163], Петрова [65] и др., но не удовлетворяется для решений типа «цилиндрических волн» Эйнштейна — Розена [187] и Компанейца [189], не принадлежащих к типу N. Заметим, что последние два решения, принадлежащие к типу I по Петрову, не удовлетворяют также ни одному из рассмотренных нами в предыдущих главах общековариантных критериев гравитационных волн (Лихнеровича, Беля, Пирани, Зельманова и др.).

Рассмотрим волновые уравнения вида (12.20) для полей тяготения, отвечающих некоторым точным решениям уравнений Эйнштейна в пустоте (2.2).

Решение Переса (9.30) — (9.31) принадлежит к типу N по Петрову. Для упрощения выкладок наложим на функцию f в этом решении дополнительное условие [1]) $f_{,1} = f_{,2} = 0$, в силу которого единственное полевое уравнение (9.31) будет удовлетворяться тождественно.

---

[1]) Фактически это условие означает, что мы ограничиваемся плоским пространством — временем, так как отличные от нуля существенные компоненты тензора Римана для метрики (9.30) имеют вид

$$R_{3113} = R_{3110} = R_{0110} = R_{0110} = f_{,11}, \quad R_{3223} = R_{3220} = R_{0220} = f_{,22},$$
$$R_{3123} = R_{3120} = R_{0123} = R_{0120} = f_{,12}.$$

Наш случай, следовательно, будет отвечать только инерциальным волнам. Более общий случай гравитационно-инерциальных волн в пространстве—времени с $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ мы рассмотрим ниже на примере других точных решений уравнений Эйнштейна.

Используя формулы (12.3), имеем для произвольной функции P аргумента $(x^0 + x^3)$.

$$^*\partial P = \frac{1}{\sqrt{1-2f}} P_{,3}, \quad ^*P_{,3} = \frac{1}{1-2f} P_{,3},$$

$$^*\partial^*\partial P = \frac{1}{(1-2f)^2}[P_{,00}(1-2f) + f_{,3}P_{,3}],$$

$$^*\partial_3{}^*\partial_3 P = \frac{1}{(1-2f)^3}[P_{,33}(1-2f) + 2f_{,3}P_{,3}].$$

Выражая отсюда $P_{,00}$ через $^*\partial^*\partial P$, а $P_{,33}$ — через $^*\partial_3{}^*\partial_3 P$, и замечая, что

$$^*\nabla^2 P \equiv b^{ik}(^*\partial_i^*\partial_k P - \Delta_{ik}^{j}{}^*\partial_j P),$$

приводим в данной системе отсчета обычное волновое уравнение для функции $P(x^0 + x^3)$

$$P_{,33} - P_{,00} = 0$$

к искомому виду

$$(^*\nabla^2 - {}^*\partial^*\partial) P = 0. \tag{12.22}$$

Так как трехмерные скаляры

$$F_i F^i = \frac{(f_{,3})^2}{(1-2f)^3}, \quad D = \frac{f_{,3}}{(1-2f)^{3/2}}$$

для этой метрики также зависят только от аргумента $x^0 + x^3$ ($A_{ik} = 0$ при $f_{,1} = f_{,2} = 0$), то они удовлетворяют уравнению (12.22), т. е. являются решениями хронометрически инвариантного уравнения (12.20) при $Q = 0$, $a = 1$.

Получим теперь в данной системе отсчета волновые уравнения для вектора гравитационно-инерциальной силы F^i и тензора скоростей деформации D_{ik}. Поле вектора F_i имеет вид

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F = -\frac{f_{,3}}{(1-2f)^2};$$

вычисляя величину $^*\Box F_i$, найдем вид правой части уравнения (12.20) при условии, что в нее не входят производные выше первого порядка от F_i. Если такие производные появляются справа, то уравнение, очевидно, не является волновым; такой случай имеет место, например, для метрик Эйнштейна — Розена и Компанейца.

Результаты вычислений для метрики Переса приводят к следующим хронометрически инвариантным пространственно-ковариантным уравнениям:

$$^*\Box F^i = -3F^i\left(^*\nabla_j F^j + \frac{1}{3} F_j F^j\right), \tag{12.23}$$

$$^*\Box D_{ij} = -2D_{ij}\left(3^*\partial D + 2D_{kl}D^{kl}\right). \tag{12.24}$$

Уравнения (12.23) — (12.24) есть, очевидно, хронометрически инвариантные уравнения волнового гравитационно-инерциального поля, причем нелинейности справа играют роль источников гравитационно-инерциальных возмущений.

Решение Такено (10.5) также принадлежит к типу N по Петрову. Вычислив для метрики (10.5) тензор угловой скорости абсолютного вращения (12.6), убедимся, что он обращается в нуль: $A_{ik} = 0$. Но, как показал Зельманов [206], это является необходимым и достаточным признаком того, что в той же области все g_{0i} можно обратить в нуль преобразованием (12.1). Полагая поэтому в дальнейшем $S = 0$ в метрике (10.5), найдем, что скаляры

$$F_i F^i = -\frac{P_{,3}}{4P^2},$$

$$D = -\frac{1}{2mP^{3/2}}\left(PM_{,3} + MP_{,3}\right)$$

удовлетворяют хронометрически инвариантному волновому уравнению

$$^*\Box G = \frac{1}{2M}\, b^{ik}\, {}^*\nabla_i G\, {}^*\nabla_k M,$$

где G — любой из хронометрически инвариантных скаляров $F^i F_i$ и D^i_i.

Для вектора гравитационно-инерциальной силы волновое уравнение принимает вид

$$^*\Box F^i = F^i\left(-2F_jF^j + 3^*\partial D + 2D_{jl}D^{jl} - D^2\right) + \frac{1}{2M}\, b^{ik}\, {}^*\nabla_k M\left(2F_jF^j - {}^*\partial D - D_{jl}D^{jl}\right),$$

откуда, в частности, следует, что источники волновых возмущений гравитационно-инерциального поля зависят от деформации системы отсчета.

Решение Петрова (9.15) рассматривалось в другой системе координат Бонди, Пирани и Робинсоном [143]; Синг [172] интерпретировал его на языке «объемных гравитационных волн». Мы запишем его в виде

$$ds^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} + \alpha\, dx^{2\,2} + 2\beta\, dx^2 dx^3 + \gamma\, dx^{3\,2}, \quad (12.25)$$

где α, β, γ — функции аргумента $x^0 + x^1$, связанные одним дифференциальным уравнением [65]. Для этого решения в системе отсчета (12.25) $F^i = 0$, $A_{ik} = 0$, а скаляр D имеет вид

$$D = \frac{1}{2}\,{}^*\partial \ln(\alpha\gamma - \beta^2)$$

и удовлетворяет скалярному волновому уравнению типа (12.20) при $a = 1$:

$${}^*\Box\, D = D\,(b^{ik}\,{}^*\nabla_i D^* \nabla_k D)^{1/2}.$$

Обратимся теперь к решениям типа T_1 по Петрову. Оказывается, что рассматриваемому волновому критерию, в отличие от других общековариантных критериев, могут удовлетворять и некоторые метрики типа T_1. Так, метрики

$$ds^2 = -\alpha^{-1} dx^{0\,2} + \alpha\, dx^{1\,2} + \gamma\, dx^{2\,2} + \gamma\,\mathrm{sh}^2 x^2\, dx^{3\,2},$$

$$ds^2 = -\alpha^{-1} dx^{0\,2} + \alpha\, dx^{1\,2} + \gamma\, dx^{2\,2} + \gamma\,\mathrm{ch}^2 x^2\, dx^{3\,2},$$

где α и γ — функции аргумента $x^0 + x^1$ ($\alpha < 0$, $\gamma < 0$), удовлетворяющие некоторой системе дифференциальных уравнений [94], определяют поля тяготения типа D [207]. Трехмерное пространство системы отсчета является голономным ($A_{ik} = 0$), и хронометрически инвариантные скаляры D и $F_i F^i$ удовлетворяют волновому уравнению (12.20) при $a = \alpha$:

$${}^*\nabla^2 G - \frac{1}{\alpha^2}\,{}^*\partial^*\partial G = b^{ik}\,{}^*\nabla_i G^* \nabla_k \ln\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Специального рассмотрения заслуживает решение Эйнштейна — Розена [187], принадлежащее к типу I по Петрову:

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\alpha)}(dx^{0\,2} - dx^{1\,2}) - x^{1\,2} e^{-2\alpha} dx^{2\,2} - e^{2\alpha} dx^{3\,2}, \quad (12.26)$$

где γ и α — функции x^1 и x^0, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\alpha_{,11} + \frac{1}{x^1}\alpha_{,1} - \alpha_{,00} = 0, \qquad (12.27)$$

$$\gamma_{,1} = x^1 [(\alpha_{,1})^2 + (\alpha_{,2})^2], \quad \gamma_0 = 2x^1\alpha_{,1}\alpha_{,0}. \qquad (12.28)$$

Можно показать [94], что, хотя уравнение «цилиндрических волн» (12.27) и допускает хронометрически инвариантную запись (12.20) при $a = 1$,

$$^*\Box\, \alpha = b^{ik}\, {}^*\nabla_i\alpha\, {}^*\nabla_k (\alpha - \gamma) + {}^*\partial\alpha\, {}^*\partial\gamma - ({}^*\partial\alpha)^2,$$

однако ни этому, ни аналогичному уравнению типа (12.20) с другой правой частью и при другом a не удовлетворяют ни хронометрически инвариантные скаляры D и F_iF^i ($A_{ik} = 0$), ни какие-либо их скалярные функции.

Аналогичный результат имеет место для метрики Компанейца [189], обобщающей метрику Эйнштейна — Розена:

$$ds^2 = \alpha\, dx^{0\,2} - \alpha\, dx^{1\,2} - \gamma\, dx^{2\,2} - 2\beta\, dx^2 dx^3 - \delta\, dx^{3\,2}, \quad (12.29)$$

где α, β, γ, δ — функции x^1 и x^0. Из уравнений поля можно получить два уравнения «взаимодействующих цилиндрических волн»:

$$[x^1 (PQ - 1)^{-1/2} P_{,1}]_{,1} - x^1 [(PQ - 1)^{-1/2} P_{,0}]_{,0} = 0, \quad (12.30)$$

$$[x^1 (PQ - 1)^{-1/2} Q_{,1}]_{,1} - x^1 [(PQ - 1)^{-1/2} Q_{,0}]_{,0} = 0, \quad (12.31)$$

где использованы обозначения

$$P = \gamma (\gamma\delta - x^{1\,2})^{-1/2}, \quad Q = \delta (\gamma\delta - x^{1\,2})^{-1/2}.$$

Как и в случае метрики Эйнштейна — Розена, система уравнений (12.30) — (12.31) допускает хронометрически инвариантную пространственно-ковариантную запись (12.20) при $a = 1$:

$$^*\Box\, \gamma = \frac{1}{8\alpha\beta^2\lambda^2} [(\beta^2 - \lambda)\pi + \omega\gamma^2], \qquad (12.32)$$

$$^*\Box\, \delta = \frac{1}{8\alpha\beta^2\lambda^2} [(\beta^2 - \lambda)\omega + \pi\delta^2], \qquad (12.33)$$

где $\lambda = \gamma\delta - \beta^2$, а π и ω — некоторые функции от α, β, γ, δ и их первых производных. Однако уравнениям типа

(12.20) также не удовлетворяют ни D, ни $F_i F^i$, ни их скалярные функции.

В заключение этого параграфа обсудим вопрос об общей связи хронометрически инвариантного критерия (12.20) с общековариантным критерием Зельманова (гл. 7), исследованный в работе [165]. Записывая систему из 20 уравнений

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho\sigma} = 0$$

в хронометрически инвариантном пространственно-ковариантном виде, после довольно продолжительных выкладок можно прийти к трем системам уравнений:

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial {}^*\partial)\, X^{ij} = \underset{(1)}{A^{ij}} \quad \text{(шесть уравнений)}, \qquad (12.34)$$

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial {}^*\partial)\, Y^{ijk} = \underset{(2)}{A^{ijk}} \quad \text{(восемь уравнений)}, \qquad (12.35)$$

$$({}^*\nabla^2 - {}^*\partial {}^*\partial)\, Z^{klij} = \underset{(3)}{A^{klij}} \quad \text{(шесть уравнений)}, \qquad (12.36)$$

где правые части $\underset{(1)}{A^{ij}}, \underset{(2)}{A^{ijk}}, \underset{(3)}{A^{klij}}$ представляют собой хронометрически инвариантные пространственные тензоры соответственно второго, третьего и четвертого ранга и не содержат производных выше первого порядка от «волновых функций» X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{klij}. В развернутом виде эти уравнения приведены в Приложении II.

Таким образом, *любое пространство — время V_4, удовлетворяющее общековариантному критерию гравитационных волн Зельманова, удовлетворяет также хронометрически инвариантному критерию гравитационно-инерциальных волн.* При этом роль волновых функций в соответствующих волновых уравнениях типа (12.20) играют хронометрически инвариантные тензоры (12.13), т. е. величины X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{klij}, представляющие в данной системе отсчета тензор Римана.

3. Физические условия существования гравитационно-инерциальных волн

Поскольку уравнения (12.20) не являются общековариантными, то волны, описываемые этими уравнениями, тесно связаны с физическими характеристиками выбранной системы отсчета, именно, с хронометрически инвариантными величинами F^i, A_{ik} и D_{ik} (12.5) — (12.7).

Выясним, какова роль этих физических величин в волновых уравнениях типа (12.20) и как они влияют на существование гравитационно-инерциальных волн. Ясно, например, что выбор системы отсчета, определяемый видом величин F_i, A_{ik} и D_{ik}, может привести к ограничениям, при которых тензоры X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{klij} станут стационарными, т. е. не зависящими от времени. Тогда хронометрически инвариантный даламбертиан (12.21) в уравнениях (12.20) вырождается в лапласиан, что свидетельствует об отсутствии физических гравитационно-инерциальных волн в данной системе отсчета.

Кроме того, входящий в выражение $^*\Box$ (12.21) трехмерный лапласиан $^*\nabla^2$ в выбранной системе отсчета может обратить «волновую функцию» в нуль. Этот случай может реализоваться, например, всегда, когда функции P в (12.20) однородны: $^*\nabla_i P = 0$.

Таким образом, обе упомянутые ситуации (стационарность и однородность волновой функции) можно рассматривать как достаточные (но, вообще говоря, не необходимые) условия отсутствия гравитационно-инерциальных волн в заданной системе отсчета.

Представив в хронометрически инвариантной записи тождества (7.8), нетрудно убедиться [208], что в пространствах Эйнштейна (3.7) хронометрически инвариантные представители тензора Римана X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} всегда удовлетворяют волновому уравнению (12.20) при $a = 1$ и некотором определенном выборе правой части Q. Следовательно, вопрос о существовании гравитационно-инерциальных волн для величин X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} в пространствах Эйнштейна сводится лишь к исследованию нетривиальности (в указанном выше смысле) левых частей этих волновых уравнений.

В работе [208] было проведено исследование (не только для пространств Эйнштейна, но и в общем случае) достаточных условий, при которых система отсчета не допускает гравитационно-инерциальных волн, т. е. левая часть уравнения (12.20) неизбежно вырождается. В этой работе для всех хронометрически инвариантных величин, играющих роль волновых функций, дана полная классификация систем отсчета, не допускающих гравитационно-инерциальных волн либо в силу стационарности волновой функции, либо в силу ее однородности.

Мы изложим результаты этого исследования для случая произвольного поля тяготения в среде с тензором энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$. В этой связи введем, следуя Зельманову [205], понятия хронометрически инвариантных плотности, давления и тензора натяжений среды:

$$\rho = T_{00}/g_{00}, \quad J^i = T^i_0/\sqrt{g_{00}}, \quad U^{ij} = T^{ij}. \qquad (12.37)$$

Пусть роль волновых функций играют хронометрически инвариантные представители мирового тензора Римана X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj}. Исследуем волновое уравнение (12.20) для этих функций в системах отсчета, в которых:

а) обращаются в нуль все хронометрически инвариантные механические характеристики системы отсчета (12.5)—(12.7),

б) отлична от нуля одна из них,

в) отличны от нуля две из них,

г) отличны от нуля все три хронометрически инвариантные механические характеристики системы отсчета: $F^i \neq 0$, $A_{ik} \neq 0$, $D_{ik} \neq 0$, и выясним, какие системы отсчета не допускают гравитационно-инерциальных волн в силу однородности либо стационарности волновых функций.

Пусть выполняются условия однородности [1]):

$$\begin{gathered} {}^*\nabla_j F_i = 0, \quad {}^*\nabla_j A_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j D_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j K_{ik} = 0, \\ {}^*\partial_i \rho = 0, \quad {}^*\nabla_j U_{ik} = 0, \quad {}^*\nabla_j J^i = 0. \end{gathered} \qquad (12.38)$$

Можно показать, что в этом случае все волновые функции являются однородными, т. е.

$$^*\Box P = -\,^*\partial^*\partial P$$

для любого из тензоров (12.13). Таким образом, при выполнении условий однородности (12.38) гравитационно-инерциальные волны отсутствуют.

Предполагая теперь пространство неоднородным, исследуем другое достаточное условие отсутствия гравитационно-инерциальных волн, именно, стационарность волновых функций. Начнем со случая (а), когда

$$F^i = 0, \ A_{ik} = 0, \quad D_{ik} = 0, \qquad (12.39)$$

[1]) Условия (12.38), впервые отмеченные Зельмановым, отличаются от условий однородности, приведенных им в [205], тем, что равенства $\dfrac{^*\partial p}{\partial x^i} = 0$, $^*\nabla_j \beta_{ik} = 0$ заменены в (12.38) равенством $^*\nabla_j U_{ik} = 0$, а равенство $^*\nabla_j q_i = 0$ — равенством $^*\nabla_j J_i = 0$.

т. е. выбранная система отсчета свободно падает, не вращается и не деформируется[1]). Величины (12.13) в этом случае приобретают вид

$$X^{ij}=0,\qquad Y^{ijk}=0,\qquad Z^{iklj}=-K^{iklj}. \tag{12.40}$$

Оказывается, что третье условие (12.39) приводит к стационарности трехмерного тензора кривизны K^{iklj}, и, следовательно, в такой системе отсчета гравитационно-инерциальные волны отсутствуют.

Условия (12.39), определяющие систему отсчета, позволяют однозначно восстановить общий вид метрики пространства — времени V_4. Действительно, совместное выполнение первого и второго условий (12.39) означает, что в данной системе отсчета можно параметризовать линии времени x^0 так, чтобы одновременно было [205]

$$g_{00}=1,\qquad g_{0i}=0. \tag{12.41}$$

Третье условие (12.39) гарантирует тогда стационарность трехмерного метрического тензора (12.4). Согласно результату Коттона (см. [65], стр. 389), в этом случае трехмерную метрику b_{ik} можно преобразовать к диагональному виду. Таким образом, для того чтобы существовала система отсчета, удовлетворяющая условиям (12.39), необходимо и достаточно, чтобы данное V_4 было приводимым пространством специального типа:

$$\begin{gathered} ds^2=dx^{0\,2}+g_{11}dx^{1\,2}+g_{22}dx^{2\,2}+g_{33}dx^{3\,2},\\ g_{ii}=g_{ii}(x^1,x^2,x^3). \end{gathered} \tag{12.42}$$

Можно доказать, что пространство Эйнштейна (3.7) с метрикой типа (12.42) всегда является плоским (см. [65], стр. 390).

Рассмотрим теперь случай, когда второе из условий (12.39) не выполняется:

$$F^i=0,\qquad A_{ik}\neq 0,\qquad D_{ik}=0, \tag{12.43}$$

т. е. система отсчета вращается, при этом свободно падая и не деформируясь. Первое условие (12.43) позволяет выбрать

[1]) Здесь и в дальнейшем, говоря о свободном падении, вращении и деформации системы отсчета, мы имеем в виду соответствующие движения трехмерного пространства данной системы отсчета относительно локально сопутствующей ей геодезической системы.

параметризацию линий времени x^0 так, чтобы выполнялись условия [205]:

$$g_{00} = 1, \quad {}^*\partial g_{0i} = 0.$$

Можно показать, что в системе отсчета, обладающей свойствами (12.43), все g_{ik} также стационарны. Отсюда вытекает, что метрика $g_{\alpha\beta}$ пространства — времени V_4 является стационарной, а следовательно, стационарны и величины (12.13). Таким образом, система отсчета типа (12.43) не допускает гравитационно-инерциальных волн. Примером метрики, отвечающей этому случаю, может служить известная метрика Гёделя [209].

Рассмотрим случай, когда нарушается первое из условий (12.39):

$$F^i \neq 0, \ A_{ik} = 0, \ D_{ik} = 0, \tag{12.44}$$

т. е. система отсчета ускоренно движется, не вращаясь и не деформируясь. Тогда метрику пространства — времени можно привести к виду

$$\begin{gathered} ds^2 = g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, dx^{0\,2} + g_{11}dx^{1\,2} + g_{22}dx^{2\,2} + g_{33}\, dx^{3\,2}, \\ g_{ii} = g_{ii}(x^1, x^2, x^3). \end{gathered} \tag{12.45}$$

Величины (12.13) в этой системе отсчета принимают вид

$$X^{ij} = \frac{1}{2}({}^*\nabla^i F^j + {}^*\nabla^j F^i) - F^i F^j, \tag{12.46}$$

$$Y^{ijk} = 0, \tag{12.47}$$

$$Z^{iklj} = -K^{iklj}. \tag{12.48}$$

В силу третьего условия (12.44) Z^{iklj} оказывается стационарным, так что вопрос сводится к исследованию только волновых свойств X^{ij}.

Используя хронометрически инвариантную форму уравнений поля, можно записать X^{ij} в виде

$$X^{ij} = (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - U b^{ij}), \tag{12.49}$$

где Λ — космологическая постоянная.

Отсюда вытекает, что в пустоте волны X^{ij} невозможны в силу стационарности этой «волновой функции», хотя четырехмерная метрика $g_{\alpha\beta}$ в этом случае, вообще говоря, нестационарна.

В общем случае ($T_{\alpha\beta} \neq 0$) из уравнений поля и законов сохранения следует, что в рассматриваемой системе отсчета плотность массы ρ не зависит от времени. Но тензор натяжений U^{ij}, вообще говоря, нестационарен. Таким образом, нестационарность X^{ij} в этом случае обусловлена нестационарностью тензора натяжений U^{ij}, так что вопрос об отсутствии волн в среде требует более детального анализа при каждом выборе $T_{\alpha\beta}$ в уравнениях поля.

Потребуем сначала, чтобы данная система отсчета сопутствовала среде. В этом случае тензор натяжений можно представить в виде

$$U^{ij} = pb^{ij} - \beta^{ij} = p_{(0)}b^{ij} - \alpha^{ij}, \qquad (12.50)$$

где β^{ij} — первая вязкость, проявляющаяся при анизотропной деформации, α^{ij} — вторая вязкость, проявляющаяся при изотропной деформации, p — истинное давление, $p_{(0)}$ — равновесное давление, определяемое из уравнения состояния. Так как в сопутствующей системе отсчета при отсутствии деформации вязкость среды себя не проявляет, то $U^{ij} = pb^{ij}$ и, следовательно, $p = p_{(0)}$.

Если среда бароклинна, т. е. если $p_0 = p_0(\rho, \tau)$, где τ — абсолютная температура, то

$$^*\partial X^{ij} = -\frac{\lambda}{2}\frac{\partial p}{\partial \tau}\, {}^*\partial\tau\, b^{ij}, \qquad (12.51)$$

так что X^{ij}, вообще говоря, нестационарны. В случае баротропной среды, для которой $p_{(0)} = p_{(0)}(\rho)$, рассматриваемая система отсчета не допускает гравитационно-инерциальных волн в силу стационарности тензора натяжений. Покажем, что в случае баротропной среды стационарен также и четырехмерный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$.

При сделанных нами предположениях уравнения релятивистских законов сохранения принимают вид

$$^*\partial\rho = 0, \qquad (12.52)$$

$$\frac{1}{\rho + p}\partial_i p = -\partial_i \ln\sqrt{g_{00}}. \qquad (12.53)$$

Здесь уравнение (12.53) представляет собой хронометрически инвариантный аналог уравнения равновесия в гидродинамике, обобщенного на случай гравитационного поля [210]. Совместно уравнения (12.52) — (12.53) приводят к следующему выражению для g_{00}:

$$g_{00} = \exp 2\,[T(x^0) + R(x^i)], \qquad (12.54)$$

где R и T — произвольные функции своих аргументов С помощью преобразования координат

$$d\tilde{x}^0 = [\exp T(x^0)]\, dx^0, \quad d\tilde{x}^i \equiv dx^i \qquad (12.55)$$

метрика приводится к стационарной форме

$$ds^2 = \exp [2\tilde{R}(\tilde{x}^i)]\, d\tilde{x}^{0\,2} + \tilde{g}_{11}\, d\tilde{x}^{1\,2} + \tilde{g}_{22}\, d\tilde{x}^{2\,2} + \tilde{g}_{33}\, d\tilde{x}^{3\,2}, \qquad (12.56)$$

$$\tilde{g}_{ii} = \tilde{g}_{ii}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3).$$

(Примером такой системы отсчета может служить система, в которой обычно записывается метрика Шварцшильда.) Основной вывод из рассмотренного случая состоит в том, что если среда баротропна, то система отсчета, сопутствующая ей, не допускает существования гравитационно-инерциальных волн.

Мы рассмотрели случай произвольного тензора энергии — импульса при единственном предположении, что система отсчета сопутствует среде. Представляют, однако, интерес некоторые варианты тензора энергии — импульса, для которых это предположение не выполняется. Первым примером такого рода является тензор энергии — импульса идеальной жидкости:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}.$$

Из уравнений поля следует, что соответствующая система отсчета сопутствует массе, т. е. $J^i = 0$. Опираясь на хронометрически инвариантную запись уравнений поля, можно показать, что в этом случае система отсчета должна сопутствовать и среде. Это означает, что, как и в предыдущем случае, в идеальной жидкости гравитационно-инерциальные волны не могут существовать, если среда баротропна.

Рассмотрим другой пример — тензор энергии — импульса диссипативных процессов [1]):

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}. \qquad (12.57)$$

---

[1]) Последующие рассуждения справедливы в предположении, что диссипативные процессы (вязкость и теплопроводность) не являются слишком сильными [210].

В системе отсчета, соответствующей записи (12.57), вязкость не проявляется в силу третьего условия (12.44), а поток тепла отсутствует потому, что система отсчета сопутствует массе. Таким образом, в этой системе отсчета $T_{\alpha\beta}$ для среды с диссипативными процессами сводится к рассмотренному выше $T_{\alpha\beta}$ для идеальной жидкости.

Третий пример, который мы рассмотрим, — это тензор энергии — импульса электромагнитного поля (2.30). Пусть

$$^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

— тензор, дуальный тензору Максвелла. Введем обозначения:

$$\frac{F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv d^i, \qquad \frac{^*F_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} \equiv h^i, \tag{12.58}$$

где d^i и h^i — хронометрически инвариантные векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно. Можно показать [211], что эти векторы связаны с хронометрически инвариантными представителями тензора энергии — импульса электромагнитного поля следующими соотношениями:

$$\rho = \frac{1}{2}(b^2 + d^2), \qquad h^2 = b_{mn}h^m h^n, \qquad d^2 = b_{mn}d^m d^n, \tag{12.59}$$

$$J^i = \eta^{imn}d_m h_n, \tag{12.60}$$

$$U^{ij} = \rho b^{ij} - (h^i h^j + d^i d^j). \tag{12.61}$$

Для того чтобы электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ было изотропным, т. е. чтобы оно удовлетворяло соотношениям

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \qquad F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} = 0,$$

или, в хронометрически инвариантной форме:

$$b = d, \qquad b^m d_m = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условия [211]

$$J = \rho \qquad (J^2 = b^{ik}J_i J_k). \tag{12.62}$$

Из (12.62) следует, что сопутствующая «массе» система отсчета, в которой $J^i = 0$, не может быть осуществлена в изотропном электромагнитном поле; поэтому в дальнейшем мы будем считать электромагнитное поле неизотропным.

Тензор X^{ik} для электромагнитного поля принимает вид

$$X^{ik} = (K^{ik} + \Lambda b^{ik}) + \lambda U^{ik}, \tag{12.63}$$

откуда следует, что

$$^*\partial X^{ik} = -\lambda^*\partial (h^i h^k + d^i d^k). \tag{12.64}$$

Выясним, для каких неизотропных электромагнитных полей тензор X^{ik} стационарен. Уравнения Максвелла в хронометрически инвариантной форме имеют вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{imn} (^*\nabla_m - F_m) (h_n \sqrt{b}) = {}^*\partial (d^i \sqrt{b}),\\
\varepsilon^{imn} (^*\nabla_m - F_m) (d_n \sqrt{b}) = -{}^*\partial (h^i \sqrt{b}),\\
^*\nabla_m d^m = 2h^m \Omega_m,\\
^*\nabla_m h^m = 2d^m \Omega_m.
\end{gathered} \tag{12.65}$$

Из условия $J^i = 0$ следует коллинеарность векторов h_i и d_i:

$$d^i = \chi h^i. \tag{12.66}$$

Полагая $^*\partial d^i = {}^*\partial h^i = 0$ и учитывая (12.66), из уравнений (12.65) получаем:

$$^*\partial_m \chi h_n = {}^*\partial_n \chi h_m; \tag{12.67}$$

тогда

$$h_n = \sigma (x^i)\, {}^*\partial_n \chi, \qquad d_n = \chi (x^i)\, \sigma (x^j)\, {}^*\partial_n \chi. \tag{12.68}$$

Но всякий вектор l_i, пропорциональный градиенту, удовлетворяет уравнению вида

$$l_{[i}{}^*\nabla_j l_{k]} = 0. \tag{12.69}$$

Таким образом, гравитационно-инерциальные волны X^{ik} в неизотропном электромагнитном поле отсутствуют, если хронометрически инвариантные векторы напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют условию (12.69).

Наконец, рассмотрим случай, когда не выполнено третье из условий (12.39), т. е. когда система отсчета деформируется, свободно падая и не вращаясь; такая система называется полугеодезической (синхронной):

$$F^i = 0, \quad A_{ik} = 0, \quad D_{ik} \neq 0. \tag{12.70}$$

Трехмерные тензоры (12.13) в такой системе отсчета имеют, согласно (12.15) — (12.17), вид

$$X^{ij} = -DD^{ij} + D^i_k D^{jk} + (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \\ + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - Ub^{ij}), \tag{12.71}$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j D^{ik} - {}^*\nabla^i D^{jk}, \tag{12.72}$$

$$Z^{iklj} = D^{ik}D^{lj} - D^{il}D^{kj} - K^{iklj} \tag{12.73}$$

и, вообще говоря, нестационарны.

Перейдем теперь к случаю (в), когда не выполняются два из условий (12.39). Пусть система отсчета ускоренно движется и вращается, но не деформируется:

$$F^i \neq 0, \quad A_{ik} \neq 0, \quad D_{ik} = 0. \tag{12.74}$$

Тогда тензоры (12.13) приобретут следующий вид:

$$X^{ij} = 3A^{i\cdot}_{\cdot j}A^{kj} + (K^{ij} + \Lambda b^{ij}) + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ij} + 2U^{ij} - Ub^{ij}), \tag{12.75}$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j A^{ik} - {}^*\nabla^i A^{jk} + 2A^{ji}F^k, \tag{12.76}$$

$$Z^{iklj} = A^{ik}A^{lj} - A^{il}A^{kj} + 2A^{ij}A^{kl} - K^{iklj}. \tag{12.77}$$

Используя тождества

$$^*\partial A_{ik} + {}^*\partial_{[i}F_{k]} = 0 \tag{12.78}$$

и принимая во внимание, что в недеформирующейся системе отсчета $^*\partial A_{ik} = {}^*\partial A^{ik}$, приходим на основании (12.75) к выводу, что нестационарность X^{ik} обусловлена вихревым характером поля F^i и нестационарностью хронометрически инвариантных представителей тензора энергии — импульса. Аналогично из (12.76) и (12.77) ясно, что нестационарность Y^{ijk} обусловлена вихревым характером и нестационарностью поля F^i, а нестационарность Z^{iklj} обусловлена только вихревым характером поля F^i. Таким образом, для случая вихревого поля ($^*\nabla_{[k}F_{i]} \neq 0$) система отсчета типа (12.74) не исключает существования гравитационно-инерциальных волн всех трех хронометрически инвариантных представителей тензора Римана.

Напротив, если поле F^i является безвихревым, $^*\nabla_{[k}F_{i]} = 0$, то из (12.76) следует стационарность Z^{iklj}. Тензор Y^{ijk} при этом, вообще говоря, нестационарен, так как

$$^*\partial Y^{ijk} = 2A^{ji}\,^*\partial F^k \neq 0. \qquad (12.79)$$

Тензор X^{ik} может быть нестационарным только при $T_{\alpha\beta} \neq 0$. В этом последнем случае уравнения законов сохранения в системе отсчета (12.74) приводят к условиям: $J^i \neq 0$, $^*\partial\rho \neq 0$, в отличие от случая (12.39).

Условие $J^i \neq 0$ означает, что данная система отсчета может существовать не только в неизотропном, но и в изотропном электромагнитном поле. Пусть она сопутствует среде. Тогда в формуле (12.50) будет $U^{ik} = pb^{ik}$ и

$$^*\partial X^{ij} = \frac{\lambda}{2}(^*\partial\rho - {}^*\partial p)\, b^{ij}. \qquad (12.80)$$

В этом случае функция X^{ij} нестационарна как в бароклинной, так и в баротропной среде, в отличие от третьего из рассмотренных случаев. Исключение составляет специальный случай, когда баротропная среда характеризуется уравнением состояния $p = \rho$ (среда со сверхвысокой плотностью, например, вблизи сингулярности); тогда $^*\partial X^{ij}$ обращается в нуль. Итак, система отсчета, характеризуемая ускорением и нестационарным вращением, не исключает существования гравитационно-инерциальных волн X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj}. Система отсчета, характеризуемая ускорением и стационарным вращением, не допускает существования волн X^{ij} (в пустоте и в среде, описываемой уравнением $p = \rho$), а также волн Z^{iklj}.

Для системы отсчета, удовлетворяющей требованиям (12.44), найдем, что в рассматриваемом случае функции X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} имеют точно такой же вид (12.71) — (12.73), как и в полугеодезической системе отсчета, и, вообще говоря, нестационарны.

В случае, когда

$$F_i = 0, \quad A_{ik} \neq 0, \quad D_{ik} \neq 0,$$

функции X^{ij}, Y^{ijk}, Z^{iklj} имеют вид

$$X^{ik} = -3A^{i\cdot}_{\cdot j}A^{kj} - DD^{ik} - D^i_j D^{kj} + (K^{ik} + \Lambda b^{ik}) + \\ + \frac{\lambda}{2}(\rho b^{ik} + 2U^{ik} - Ub^{ik}), \qquad (12.81)$$

$$Y^{ijk} = {}^*\nabla^j (D^{ik} + A^{ik}) - {}^*\nabla^i (D^{jk} + A^{jk}), \tag{12.82}$$

$$Z^{iklj} = D^{ik}D^{lj} - D^{il}D^{kj} - K^{iklj} + A^{ik}A^{lj} - \\ - A^{il}A^{kj} + 2A^{ij}A^{kl}. \tag{12.83}$$

Так как $F_i = 0$, то из соотношения

$$^*\partial A_{ik} = -\frac{1}{2}(D^{im}b^{kn} + b^{im}D^{kn}) A_{mn} \tag{12.84}$$

вытекает, что нестационарность «волновых функций» обусловлена только деформацией системы отсчета. В отличие от A^{ik}, тензор A_{ik} в этом случае является стационарным.

Наконец, рассмотрев случай, когда все три характеристики системы отсчета не обращаются в нуль,

$$F_i \neq 0, \ A_{ik} \neq 0, \ D_{ik} \neq 0,$$

убедимся, что все три «волновые функции» (12.15)— (12.17), вообще говоря, нестационарны.

Мы исследовали достаточные условия отсутствия гравитационно-инерциальных волн, характеризуемых хронометрически инвариантными «представителями» тензора Римана, т. е. однородность и стационарность величин (12.13). Отметим, что однородность одновременно всех их обусловлена однородностью пространства.

Наряду с исследованными здесь волнами X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{iklj} представляет интерес также рассмотреть гравитационно-инерциальные волны, для которых волновыми функциями служат хронометрически инвариантные характеристики самой системы отсчета: волны деформации D_{ik}, волны вращения A_{ik}, волны гравитационно-инерциальной силы F_i, волны кривизны K_{iklj}. Мы приведем результаты этого рассмотрения [208].

Волны вращения A_{ik} при $F_i = 0$ и при любом D_{ik} отсутствуют, а при $F_i \neq 0$ существуют, если $D_{ik} \neq 0$ либо (при $D_{ik} = 0$) $^*\nabla_{[k}F_{i]} \neq 0$ (вихревое гравитационно-инерциальное поле).

Волны ускорения (силы) F_i, вообще говоря, существуют (т. е. поле F_i не является стационарным) при любых A_{ik} и D_{ik}.

Волны деформации D_{ik} существуют лишь при $^*\nabla_j D_{ik} \neq 0$ (неоднородность деформации) и при $^*\partial^*\partial b_{ik} \neq 0$, независимо от свойств A_{ik} и F_i.

Волны кривизны K_{ijkl} существуют в любых деформирующихся системах отсчета ($D_{ik} \neq 0$).

Этим исчерпывается перечень гравитационно-инерциальных волн в произвольных системах отсчета. Дальнейшее их исследование целесообразно вести в отношении воздействия гравитационно-инерциальных волн на конкретные физические системы. В частности, исследование влияния гравитационно-инерциальных волн на систему пробных тел, как было отмечено рядом авторов [95, 212—214], могло бы послужить выяснению возможностей лабораторного детектирования гравитационных волн произвольной природы. Хронометрически инвариантный подход мог бы сыграть при этом существенную роль как способ описания наблюдаемых — физических величин, измеряемых лабораторными средствами. В связи с этим целесообразно остановиться на проблеме экспериментального обнаружения гравитационных волн.

ГЛАВА 13

ПРОБЛЕМА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Геодезическое отклонение пробных частиц

В попытках сопоставить выводы теории гравитационного излучения с данными физического эксперимента существенную роль должно играть представление функций поля на языке наблюдаемых величин, доступных физическому измерению. В качестве таких величин мы уже рассматривали в гл. 11 инвариантные геометрические конструкции, характеризующие тензор Римана как функцию поля в рамках тетрадного формализма. В другом варианте, а именно в хронометрически инвариантном подходе гл. 12, в качестве наблюдаемых вводились хронометрически инвариантные «компоненты» тензора Римана. Рассмотрим теперь вопрос о физических основаниях экспериментального обнаружения гравитационного излучения.

Наиболее удобный способ экспериментального наблюдения величин, характеризующих гравитационные волны, составляет регистрация движения пробных частиц. Пусть дана совокупность пробных частиц, движущихся по геодезическим линиям $x^\alpha(s)$, где s — длина дуги вдоль геодезической. Пусть $x^\alpha(s, v)$ — однопараметрическое семейство таких кривых, причем изменение параметра v соответствует переходу от одной геодезической к другой. Введем два вектора:

$$u^\alpha(s,v)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial s},\qquad \eta^\alpha(s,v)=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\right)dv,$$

из которых первый представляет собой касательный вектор к геодезической, а второй — ортогональный ему бесконечно малый вектор смещения одной частицы относительно другой. Пусть $\frac{D}{ds}$ есть поделенный на элемент ds ковариантный дифференциал смещения вдоль геодезической.

Величина

$$\frac{D^2\eta^\alpha}{ds^2}$$

называется *геодезическим отклонением* (или *девиацией*) и физически интерпретируется как мера относительного ускорения двух бесконечно близких частиц при их движении вдоль соседних геодезических. Роль этой величины в теории тяготения ясна из известного *уравнения девиации геодезических*

$$\frac{D^2\eta^\alpha}{ds^2}+R^\alpha_{\beta\gamma\delta}u^\beta u^\delta\eta^\gamma=0 \qquad (13.1)$$

(см., например, [60, 172]).

Уравнение (13.1) показывает, что относительное ускорение двух близких частиц, движущихся без действия внешних (негравитационных) сил, полностью определяется физическими компонентами тензора кривизны поля тяготения. Следовательно, задавая возмущения компонент тензора Римана, мы меняем величину относительного ускорения пары частиц. Обратно, наблюдая относительное ускорение частиц, мы можем измерить возмущения компонент тензора Римана, обусловленные приходящим гравитационным излучением.

Допустим, что пробные частицы соединены пружиной. Тогда гравитационные волны можно будет зафиксировать по колебаниям пружины. Собственная частота системы может совпадать с одной из гармоник спектра гравитационных волн; тогда удастся наблюдать по резонансу даже очень слабые гравитационные волны.

Пусть теперь вектор η^α соединяет не две соседние пробные частицы, а две бесконечно близкие точки пьезоэлектрического кристалла. Деформация, возникающая в кристалле под действием падающей на него гравитационной волны, вызовет в нем электрическое поле. Интеграл от напряженности этого поля составляет некоторую разность потенциалов, измерение которой дает физические компоненты тензора кривизны, созданной гравитационным излучением [95]. Если интеграл уравнения (13.1) рассматривать как преобразование Фурье от $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ к η^α, то измерение геодезического отклонения сводится к измерению одной (а именно, резонансной) компоненты фурье-образа всего спектра гармоник гравитационного излучения. Поэтому интересно выяснить, какие частоты гармоник возможны в гравитационном излучении различных источников.

2. Возможные источники гравитационных волн

Ввиду трудности генерирования гравитационных волн в лаборатории, оказалось целесообразным на эксперименте искать гравитационные волны космического происхождения. Соответственно возникла задача теоретически оценить тем или иным способом величины возможной убыли энергии — массы для различных источников за счет гравитационного излучения. Подобные оценки были получены для двойных звезд (Куперсток [33], Форвард и Берман [215]), для коллапсировавших звезд (Зельдович — Новиков [34]), квазаров (Куперсток [32]), пульсаров (Вебер [31], Шкловский [216]), нейтронных звезд, совершающих пульсации несферического характера (Торн [30]), а также Метагалактики в целом (Уилер [36]). Дадим краткий обзор имеющихся результатов.

Первыми космическими объектами, рассматривавшимися как возможный источник гравитационного излучения, были *двойные звезды* [15]. Наличие квадрупольного момента у таких систем дает основание предполагать, что они теряют энергию, так что параметры орбит звезд изменяются. Эти изменения можно фиксировать астрономическими наблюдениями. Используя псевдотензор энергии Ландау — Лифшица для оценки энергии квадрупольного гравитационного излучения бинарной системы в линейном приближении, можно показать, что потеря энергии E системой двух тел, имеющих массы m_1 и m_2 и движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра инерции на расстоянии r друг от друга, выражается формулой

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32k}{5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 r^4 \omega^6,$$

где k — ньютонова гравитационная постоянная, ω — круговая частота обращения. Отсюда без труда определяется и скорость сближения тел, обусловленного радиационной потерей энергии:

$$v = \dot{r} = -\frac{64k^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5r^3}.$$

Впоследствии была получена также формула для средней величины потока энергии, излучаемой парой тел с массами m_1 и m_2 при вращении их по эллиптической орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом ε:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE}{dt}\,dt = \frac{32}{5}\,\frac{k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}\left(1 + \frac{73}{24}\varepsilon^2 + \frac{37}{96}\varepsilon^4\right),$$

где T — период обращения. Были также найдены [217] выражения для потери энергии бинарными системами и спектры их гравитационного излучения в случаях гиперболического движения, свободного падения и других типов движения.

Аналогично вопросу об энергии, был исследован вопрос о потере гравитационного импульса двойными звездами за счет их гравитационного излучения (Куперсток [33]). В рамках линеаризованной теории тяготения было показано, что двойные звезды могут терять гравитационный импульс (определяемый на основе псевдотензора энергии — импульса) с интенсивностью того же порядка, что и энергию. Получена формула, выражающая в явном виде функциональную зависимость полного потока импульса от разности фаз компонент бинарной системы.

По расчетам Форварда и Бермана [215], для случая *двойных нейтронных звезд* теоретический максимум мощности излучения составляет $P \sim 6 \cdot 10^{48}$ *вт* и не зависит от суммы масс компонент пары.

Кроме двойных звезд, космическими источниками гравитационного излучения могут быть *космические тела* (планеты, астероиды и т. п.), *падающие на сколлапсировавшие звезды*. Легко подсчитать (в линейном приближении), что если такой источник находится на расстоянии ~ 500

Мпс от Земли, то, например, при $m = m_\odot$ и $M = 10^2 m_\odot$ (M — масса сколлапсировавшей звезды, m — масса тела, падающего на нее по прямой или по спирали) вблизи Земли поток мощности излучения может составить 0,7 *эрг/см²·сек* [34]. Однако неизвестно, сколь часто в Метагалактике происходят такие процессы. Форвард и Берман [215] на основе строгих решений уравнений поля предложили уточнить оценку мощности гравитационного излучения коллапсировавших звезд, полученную Зельдовичем и Новиковым [34] на основе линеаризованной теории тяготения.

Торн [30] пришел к выводу, что значительно более сильное гравитационное излучение (по сравнению с двойными звездами) могут давать *нейтронные звезды, совершающие пульсации несферического характера* По сравнению с обычным подходом к проблеме гравитационного излучения двойных звезд, в котором звезды представляются в виде материальных точек, а вычисления проводятся в линейном приближении, в работе Торна использованы конкретные модели нейтронных звезд, причем расчет производится методом приближений, в котором исходным является решение Шварцшильда.

В среднем период пульсации T нейтронной звезды лежит в пределах $10^{-4} \div 10^{-3}$ *сек.* Если предположить, что энергия пульсаций целиком переходит в энергию гравитационного излучения, то при некоторых разумных предположениях об амплитуде колебаний нейтронная звезда по Торну может за один период пульсации излучать энергию порядка 10^{51} *эрг.* Эти подсчеты по порядку величины согласуются с аналогичными оценками Уилера [238], справедливыми, однако, только в линейном приближении.

Общее исследование нерадиальных пульсаций звездных моделей в теории тяготения Эйнштейна было проведено Торном и его сотрудниками [218—222]. Дадим краткое описание их метода. Пусть невозмущенный линейный элемент

$$(ds^2)_0 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (13.2)$$

описывает сферически симметричную равновесную конфигурацию:

$$\nu = \nu(r), \qquad \lambda = \lambda(r).$$

Тогда гравитационное поле возмущенной конфигурации (пульсирующая и, вообще говоря, вращающаяся звезда) описывается линейным элементом

$$ds^2 = (ds^2)_0 + h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

где $h_{\alpha\beta}$ представляют собой возмущения метрического тензора на фоне стационарной метрики (13.2). Смещение ξ элемента идеальной жидкости из положения равновесия, отклонения плотности $\delta\rho$ и давления δp в жидкости от равновесных значений, а также возмущения метрики $h_{\alpha\beta}$ представляются в виде рядов по сферическим гармоникам [218]. Возмущенная метрика записывается в виде

$$ds^2 = e^\nu (1 + H_0 Y^l_m)\, dt^2 + 2H_1 Y^l_m\, dt\, dr - e^\lambda (1 - H_0 Y^l_m)\, dr^2 - \\ - r^2 (1 - K Y^l_m)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (13.3)$$

где функции $H_0(t, r)$, $H_1(t, r)$, $H_2(t, r)$ и K характеризуют возмущения метрики, а Y^l_m (θ, φ) есть обычные сферические гармоники:

$$Y^l_m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P^m_l(\cos\theta)\, e^{im\phi}.$$

Подставляя метрику (13.3) в уравнения Эйнштейна и ограничиваясь членами, линейными относительно возмущений $h_{\alpha\beta}$, решаем эти уравнения методами численного интегрирования. Результаты расчетов (производимых машинным способом) для специально выбранных моделей нейтронных звезд [221, 222] позволяют определить спектры частот их гравитационного излучения, периоды пульсаций ($\sim 10^{-3}$ *сек*), мощности импульсов ($\sim 10^{52}$ *эрг/сек*), а также времена затухания возмущений, вызванных излучением (~ 1 *сек*).

Куперсток [32] рассмотрел перенос энергии гравитационным излучением от *квазизвездных источников* (*квазаров*). Он использовал модель Фаулера [223], согласно которой квазар состоит из ядра, образованного двумя сколлапсировавшими звездами, и внешней квазиустойчивой оболочки; перенос энергии гравитационным излучением от вращающегося ядра к оболочке приводит к «полярному взрыву», порождающему интенсивное движение вещества звезды в направлении оси вращения ядра. Если оболочка совершает радиальные колебания, то мощность резонансного гравитационного излучения ядра, вычисленная с помощью псевдотензора Ландау — Лифшица, обнаруживает угловую зависимость вида $\sim \sin^2 \theta$ (угол θ задает направление излучения относительно оси вращения ядра). Таким образом, излучение отсутствует в направлении оси вращения и достигает максимального значения в экваториальной плоскости. В случаях, когда оболочка совершает еще и вращательное движение, мощность излучения зависит также от совпадения или несовпадения направлений вращения ядра и оболочки.

Делались оценки интенсивности *гравитационного излучения космологического происхождения*. Так как гравитоны очень слабо поглощаются материей, то, однажды возникнув (например, при первоначальном «взрыве» Вселенной), межзвездное гравитационное излучение могло бы существовать и до настоящего времени, причем общая его интенсивность в Метагалактике зависит от скорости ее расширения. По расчетам Уилера [224], современная скорость расширения Метагалактики дает для плотности энергии ее гравитационного излучения величину $10^{-29} \div 10^{-28}$ *г/см*^{3}, т. е. мощность потока 10^3 *эрг/см*^{2}*·сек*, с периодом $T \sim 10^6$ лет.

Кармели [35] рассчитал интенсивность не исследовавшегося ранее *тормозного гравитационного излучения Солнца*, порождаемого хаотическими тепловыми (нерелятивистскими) столкновениями атомов. Расчет основан на применении классического метода интегралов Фурье к известному выражению Ландау и Лифшица для интенсивности гравитационного излучения в приближении слабого поля. Кармели получил сенсационный результат, согласно которому мощность тормозного гравитационного излучения Солнца имеет порядок $P \sim 6 \cdot 10^{15}$ *эрг/сек*, что на четыре порядка превышает мощность гравитационного излучения, обусловленного общим квадрупольным моментом планет солнечной системы. Кармели же нашел спектр частот тормозного гравитационного излучения произвольной системы взаимодействующих частиц.

Кроме тормозного гравитационного излучения, следует указать также на возможность гравитационного излучения Солнца, вызванного ядерными взрывами, а также тепловыми движениями атомов, создающими их относительный квадрупольный момент. Однако очень трудно указать масштабы ядерных взрывов на Солнце (некоторые оценки их мощности дают Брагинский и Руденко [158])

В настоящее время к наиболее сильным источникам космического гравитационного излучения относят *пульсары* и, в качестве одной из их возможных моделей, нейтронные звезды, пульсирующие с периодом $10^{-4} \div 10^{-3}$ *сек*. Если предположить, что энергия пульсаций целиком переходит в энергию гравитационного излучения, то, как уже отмечалось, за один период пульсации нейтронная звезда может излучить энергию порядка 10^{51} *эрг*, или около 0,1 % массы покоя самой звезды [1]) [30]. Этот результат был использован Вебером [31] для оценки порядка величины компонент тензора Римана

$$X^{ij} \sim R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i \cdot j},$$

возбуждаемых гравитационным излучением пульсаров. Оказалось, что для массы пульсара $M = 10^{33}$ *г* нижняя граница величин $R_{0\cdot 0}^{\cdot i \cdot j}$ имеет порядок

$$R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i \cdot j} \geqslant 5 \cdot 10^{-42} \text{ см}^{-2}.$$

3. Средства лабораторного детектирования гравитационных волн

Для экспериментальной регистрации поля гравитационного излучения был использован квадрупольный гармонический масс-детектор, первый вариант которого сконструировали в 1964 г. в Мерилендском университете Вебер, Зипой и Форвард [212]. Чувствительный элемент прибора представляет собой алюминиевый цилиндр весом 1,5 *т*, подвешенный в вакуумной цилиндрической камере на металлической нити. В месте касания нити цилиндр обтянут пьезоэлектрической кварцевой оберткой, соединенной с чувствительным вольтметром в системе радиоприемника. После ряда усовершенствований, которые ввел Синский [226], чувствительность масс-детектора позволила измерять относительные смещения торцов цилиндра (например, растяжения и сжатия, вызванные падающим гравитационным излучением) порядка 10^{-16} *см*. Впоследствии

---

[1]) Для других моделей пульсаров мощность излучения может быть значительно меньше. Так, для пульсара *NP* 0532 в Крабовидной туманности в рамках модели вращающейся нейтронной звезды, ось вращения которой наклонна к оси симметрии ее магнитного поля, получена оценка мощности гравитационного излучения порядка $8\ 10^{32} \div 8 \cdot 10^{33}$ *эрг/сек* [225].

Брагинский предложил для обнаружения гравитационного излучения вариант эксперимента с использованием двух групп из n одинаковых близко расположенных параллельных цилиндров. Если колебания в этих группах цилиндров возбуждаются синфазно, то мощность гравитационного излучения будет примерно в четыре раза больше, чем от одной группы.

Дальнейшим усовершенствованием установки Вебера стала его система, работающая по принципу совпадения сигналов одинаковой частоты от двух детекторов [227]. Она представляла собой два масс-детектора с временем релаксации 30 *сек*, настроенных на частоту $\omega = 10^4$ *рад/сек* и расположенных на расстоянии 2 *км* друг от друга. Этот прибор позволил в течение 1967 г. зафиксировать совпадения (с точностью до $\Delta t = 0{,}20$ *сек*) сигналов со средней периодичностью один раз в месяц. По мнению Вебера, крайне маловероятно, что регистрируемые совпадения могли носить чисто случайный характер. Вебер полагает, что обнаруженные им сигналы были вызваны космическим гравитационным излучением. Он показал, что для экспериментального обнаружения гравитационного излучения пульсаров с помощью его установки при времени измерения порядка одного месяца достаточно фиксировать эффективные смещения $\delta \sim 3 \cdot 10^{-10}$ *см*. Таким образом, уровень современной экспериментальной техники может быть достаточен для обнаружения космического гравитационного излучения.

Разнося детекторы на более значительные расстояния, можно увеличить чувствительность установки. Поэтому в дальнейшем Вебер [228] применил шесть детекторов, один из которых был установлен в Аргоннской Национальной лаборатории, а остальные — в лаборатории Мерилендского университета; расстояние между этими лабораториями составляет 1000 *км*. Детекторы были настроены на предполагаемую частоту гравитационного излучения коллапсирующих сверхновых нашей Галактики — 1660 *гц*. Зарегистрированные за несколько месяцев работы этого прибора совпадения сигналов почти исключают возможность их объяснения случайными совпадениями. Вебер интерпретирует эти результаты как свидетельство существования в Галактике мощного гравитационного излучения.

Впоследствии Вебер произвел повторную серию экспериментов [229], подтвердившую его первоначальные выводы. Особенностью этих экспериментов была максимальная изоляция аппаратуры от внешних воздействий электромагнитного и сейсмического характера.

Возможность существования гравитационного излучения Галактики в полосе частот около 1660 *гц* натолкнула ряд исследователей на поиски новых источников гравитационных волн в космосе. По расчетам Гринстейна [230], космическое гравитационное излучение на частоте 1660 *гц* может создаваться тесными сближениями звезд в массивных звездных скоплениях со средней периодичностью один раз в неделю. При этом импульсный характер излучения заставляет предполагать, что оно обусловлено парными сближениями неустойчивых релятивистских объектов — нейтронных или коллапсировавших звезд.

Можно ожидать, что гравитационное излучение оказывает существенное влияние на эволюцию не только отдельных звезд или их скоплений, но и Галактики в целом. Так, зарегистрированный Вебером поток гравитационного излучения Галактики не исключает возможности объяснения наблюдаемого расширения Галактики за счет убыли ее массы вследствие излучения гравитационных волн [231]. Однако, как показывает ряд исследований [231—235], это объяснение далеко не бесспорно и, в свою очередь, приводит к противоречиям с другими астрофизическими наблюдениями. Неоднозначность интерпретации экспериментов Вебера была продемонстрирована в работах Брагинского, Зельдовича и Руденко [236, 237].

Существенную роль в проблеме детектирования гравитационных волн могут сыграть сейсмические методы, позволяющие использовать в качестве детектора Землю. Эта возможность привлекательна тем, что квадрупольный момент Земли на много порядков выше, чем лабораторных детекторов. Частота собственных колебаний Земли (порядка 1 миллигерца) позволяет регистрировать резонансные гармоники гравитационного излучения пульсаров. Однако, как показал Вебер [31], этот метод ограничен высокой температурой шумов земного ядра и поэтому требует измерения эффективных смещений $\delta \sim 2 \cdot 10^{-17}$ *см*, что находится на грани возможностей современной измерительной техники.

Более эффективным может оказаться использование отдельных сейсмически изолированных неоднородностей на поверхности Земли, способных поглощать гравитационное излучение в полосе частот около 1 *гц*. В линейном приближении теории Эйнштейна вопрос о реакции упругого тела на падающую гравитационную волну был исследован Дайсоном [258, 259]. Оказалось, что поглощение гравитационных волн упругим телом происходит только вследствие неоднородностей его модуля сдвига, в то время как в однородной среде это поглощение отсутствует. По оценкам Дайсона, интенсивность сейсмических сигналов, вызванных гравитационным излучением от вероятных теоретических моделей пульсаров на частоте 1 *гц*, на пять порядков ниже уровня шумов. Однако возможность сейсмической регистрации гравитационного излучения пульсаров нельзя считать окончательно закрытой. В частности, де Саббата [239] недавно предложил для обнаружения гравитационных волн от пульсаров на той же частоте 1 *гц* использовать локальные неоднородности на поверхности Луны — «масконы» (см. также [240]).

Мироновский [241] предложил использовать разновидность масс-детектора Вебера для детектирования гравитационного излучения двойных звезд. В качестве приемника излучения берется свободный от трения крутильный маятник с периодом T_0. Формула, выражающая мощность гравитационного излучения системы двух материальных точек, движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра тяжести, дает для спектральной плотности гравитационного излучения двойных звезд выражение

$$\rho(T) = 2Nf(2T)\,\varphi(T).$$

Здесь N — число звезд данного типа в Галактике, $T = 2\pi/\omega$ — период гравитационной волны, причем $T = \tau/2$, где τ — период обращения компонент звезды вокруг общего центра тяжести (вследствие равноправия компонент, гравитационное излучение имеет удвоенную частоту).

Наиболее приемлемыми для регистрации излучения двойными звездами (достаточно распространенными в Галактике) являются звезды класса *WUM*, общее число которых в Галактике $N \sim 10^8$. Для звезд этого класса функция $\rho(T)$ имеет резкий максимум при $T = 0^d\!.15$ (d — «день»). При этом спектр гравитационного излучения соответствует периодам обращения $0^d\!.1 \div 0^d\!.5$.

Используя псевдотензор Ландау — Лифшица, можно оценить энергию, излучаемую тесными парами двойных звезд класса *WUM*. Зная функцию $\rho(T)$ и численно интегрируя по периодам с $N = 10^8$, Мироновский нашел для полной мощности гравитационного излучения этого типа в Галактике величину 10^{38} *эрг/сек*, что лишь на пять порядков ниже соответствующего электромагнитного излучения. Тогда в пределах солнечной системы мощность потока должна составлять около 10^{-7} *эрг/сек·см*^{2}.

Чтобы выяснить возможность регистрации этого излучения, Мироновский исследовал уравнение движения крутильного маятника. Если в равновесии маятник ориентирован вдоль оси x ортогональной геодезической системы координат, то уравнение геодезического отклонения для движения в плоскости колебаний xy точки маятника, удаленной от оси вращения на расстояние l, имеет вид

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -c^2 l \sum_i R_{2010}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{n}_i) \sin(2\Omega_i t + \varphi_i). \quad (13.4)$$

Здесь R_{2010} — компонента тензора Римана, отвечающего полю излучения i-й звезды, Ω_i — угловая частота ее обращения, $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{n}_i$ — векторы, характеризующие, соответственно, положение звезды и ориентацию ее орбиты в пространстве.

Решая уравнение (13.4) и усредняя по распределению звезд в пространстве, ориентациям орбит и приемного устройства, распределениям фаз и частот, получим [241]:

$$(\bar{y}^2)^{1/2} \approx 10^{-19} l T_0^{-2/3} \sqrt{f(2T_0)\, t}\ [\text{см}], \quad (13.5)$$

где $f(\tau)$ — плотность вероятности распределения звезд класса *WUM* по периодам обращений, T_0 — период собственных колебаний маятника, t — время наблюдения.

Формула (13.5) дает среднее отклонение $\bar{y}$ маятника от оси x и не связана с выбором псевдотензора энергии. Для двух близких к нам звезд класса *WUM* Мироновский дает оценку

$$(\bar{y}^2)^{1/2} = 6 \cdot 10^{-16}\ \text{см}.$$

Как вытекает из работ Вебера и Брагинского, в настоящее время практически возможно измерять периодические механические смещения до порядка 10^{-16} *см*. Следовательно, можно надеяться на экспериментальную реализацию предложения Мироновского.

Наряду с принципом девиации геодезических для пробных частиц, который используется в опытах с квадрупольным масс-детектором, в последнее время внимание исследователей привлекает другой принцип, позволяющий для экспериментального обнаружения гравитационных волн использовать взаимодействие электромагнитного и гравитационного полей.

Как отмечалось в предыдущих главах, существует ряд строгих решений уравнений гравитационного поля, описывающих распространение гравитационных и электромагнитных волн по одним и тем же траекториям. Существование таких полей тяготения следует из общего решения задачи Коши для уравнений Эйнштейна, согласно которому характеристические гиперповерхности уравнений тяготения и электромагнетизма (поверхности фронта волны), а также их бихарактеристики (траектории распространения волн) совпадают. Ввиду этого поле электромагнитного излучения может порождать гравитационные волны. Естественно ожидать, что существует и обратный эффект — возбуждение динамических электромагнитных полей гравитационными волнами, например, как результат воздействия гравитационного излучения на поле системы заряженных тел.

Этот последний эффект был исследован Хейнтцманом [242], который в приближении слабого поля рассмотрел движение пробных частиц в плоской гравитационной волне. Поскольку скорость движения незаряженной пробной частицы не изменяется в результате акта взаимодействия с проходящей гравитационной волной, то система электрически нейтральных пробных частиц не может поглощать энергию гравитационного излучения. Поэтому предлагается использовать систему заряженных частиц, а регистрацию гравитационного излучения производить по изменениям собственной электромагнитной энергии системы — детектора. Хейнтцман вычислил величины поглощенной энергии гравитационных волн не только для случая слабого поля в линейном приближении, но и для двух точных решений уравнений поля: метрики цилиндрических волн Эйнштейна — Розена и метрики плоских волн Бонди. Оказалось, что во всех трех случаях собственная электромагнитная энергия системы заряженных пробных частиц изменяется за счет поглощения энергии гравитационных волн, причем в первом и третьем случаях (плоские волны в линейном приближении и плоские волны Бонди) величины поглощенной энергии конечны, а во втором случае (цилиндрические волны Эйнштейна — Розена) детектор может принимать неограниченное количество энергии гравитационных волн. Эти результаты могут служить основанием для того, чтобы систему заряженных пробных частиц применить в качестве лабораторного детектора гравитационных волн.

Несколько иной метод детектирования рассмотрели Водяницкий и Диманштейн [465]. Они получили решение системы уравнений Эйнштейна — Максвелла для слабого поля в виде плоской монохроматической волны. Для мощности гравитационного сигнала, принимаемого электрической антенной с усилителем, ими предложена формула

$$P \approx \frac{1}{4\pi} S \frac{\left(E_{(0)2}\right)^2 (\Omega + \omega)^2 \left(h^{22}_{(0)}\right)^2}{16\omega^2},$$

где S — эффективная площадь антенны, Ω и ω — частоты, соответственно, гравитационной и электромагнитной волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси Ox, $E_{(0)2}$ и $h^{22}_{(0)}$ — амплитуды соответствующих компонент электромагнитного и гравитационного полей.

Рассматривался также метод экспериментального обнаружения гравитационных волн с помощью динамических электромагнитных полей. Он основан на наблюдении флуктуаций электромагнитного излучения, вызванных гравитационными волнами.

Куперсток [243] построил в линейном приближении теорию возмущений (флуктуаций) электромагнитного поля, связанных с гравитационным полем. Он решил уравнения для возмущений электромагнитного и гравитационного полей в случае, когда плоскополяризованная монохроматическая электромагнитная волна высокой частоты распространяется между двумя идеально проводящими параллельными стенками, взаимодействуя с плоской гравитационной волной низкой частоты. Флуктуации поля рассчитывались для двух взаимных ориентаций направлений распространения волн: когда эти направления совпадают («продольная ориентация») и когда они ортогональны друг другу («поперечная ориентация»). Поскольку макроскопические системы, возможно, могут генерировать низкочастотное гравитационное излучение, Куперсток высказал предположение, что это излучение можно обнаружить, наблюдая флуктуации интенсивности электромагнитного излучения небесных тел.

Детальное исследование этого вопроса провел Винтерберг [244]. Он показал, что в линейном приближении проблема флуктуаций интенсивности светового сигнала в среде со статистически распределенными гравитационными волнами эквивалентна проблеме флуктуаций интенсивности светового сигнала в среде со статистическим распределением неоднородностей. В среднем этот эффект описывается формулой

$$\overline{\left(\frac{\Delta I}{I_0}\right)^2} = \frac{32\sqrt{\pi}}{3}\overline{\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2}\left(\frac{x}{l}\right)^3, \tag{13.6}$$

где I_0 — усредненная по времени величина интенсивности сигнала, ΔI — отклонение от среднего значения I_0, n_0 — средняя величина показателя преломления среды, Δn — отклонение от n_0, x — расстояние между источником и наблюдателем, l — характеристический размер неоднородностей плотности. Определив эффективную величину показателя преломления вакуума, заполненного гравитационными волнами, $n(\theta, \varphi)$, соотношением

$$dl/dt = 1/n(\theta, \varphi),$$

можно определить эффективные Δn и n_0 для случая плоских волн в линейном приближении. Тогда усреднение с использованием формулы (13.6) дает выражение

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 1{,}6\,|h|\left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}. \tag{13.7}$$

Здесь l — характеристическая длина гравитационной волны, $h = \det \| h_{\mu\nu} \|$, $h_{\mu\nu}$ — малая добавка к псевдоевклидовой метрике.

Величины $|h|$ и l были оценены для трех видов источников: двойных звезд, квазаров и Вселенной в целом. (В последнем случае имелось в виду реликтовое гравитационное излучение в предположении, что на ранней стадии эволюции Вселенной оно находилось в термодинамическом равновесии с реликтовым электромагнитным излучением с температурой 3 °К.) Для двойных звезд коэффициент $k = 1{,}6\,|h|\,l^{-3/2}$ в формуле (13.7) получается равным $k = 5{,}9\cdot 10^{-40}$, что для расстояния $x = 10^{23}$ *см* дает флуктуации интенсивности излучения порядка $5{,}9\cdot 10^{-5}$, т. е. величины, доступные для регистрации с помощью чувствительных сцинтилляционных счетчиков, вынесенных за пределы земной атмосферы. Для возможного гравитационного излучения квазаров получена оценка $k \approx 2{,}3\cdot 10^{-40}$, что для $x = 10^{27}$ *см* дает величины, легко измеримые даже в земных условиях: $\Delta I/I_0 \approx 7{,}3$. Наконец, в случае гравитационных волн космологического происхождения флуктуации для звезды, удаленной на 10^2 световых лет, составляют $\sim 0{,}5$. Однако последняя величина практически не наблюдаема, так как в наблюдениях такого рода диаметр звезды должен был бы превосходить длину гравитационной волны.

Все же с принципиальной стороны метод Винтерберга не получил еще достаточного теоретического обоснования. Как отмечают Зипой и Бертотти [245] , экстраполяция формулы (13.6), которую Шеффлер [246] дал для электромагнетизма, на случай гравитационных флуктуаций в случае сильного гравитационного поля недопустима. Поэтому оценки звездных сцинтилляций могут относиться к чисто координатным, т. е. нефизическим, а следовательно, ненаблюдаемым эффектам.

Заметим также, что рассмотренные выше методы прямого измерения интенсивности гравитационного излучения с помощью квадрупольного масс-детектора совершенно игнорируют возможные квантовые эффекты взаимодействия гравитационных волн с кристаллическим детектором. Исследования этих эффектов проводились рядом авторов [247—254]. Эти исследования говорят в пользу возможности детектировать и генерировать гравитационные волны средствами квантовой электроники.

Принципиальная схема приемника гравитационных волн резонансного типа, использующая взаимодействие гравитационных волн с атомной структурой вещества, разработана Лаврентьевым [252], а также Копвиллемом и Нагибаровым [249, 250]. В приемнике направленного гравитационного излучения с помощью оптического возбуждения предварительно запасается энергия, а гравитационный луч служит для создания наиболее благоприятных условий высвобождения ее в определенном направлении в виде когерентного электромагнитного луча.

Копвиллем и Нагибаров [248, 255, 256] исследовали также возможность создавать направленное гравитационное излучение в лаборатории, возбуждая с помощью лазеров когерентные периодические колебания массовых квадруполей в электронных оболочках атомов. Общая идея этих работ заключается в создании особого, так называемого «сверхизлучательного» состояния вещества, возбуждение которого последовательностью мощных коротких импульсов может быть использовано для генерации гравитационных лучей. Сверхизлучательное состояние вещества можно вызвать когерентными потоками не только фотонов, но и других элементарных частиц (электронов, нейтронов, протонов и т. д.).

4. Связь теоретического и экспериментального аспектов проблемы гравитационных волн

Рассмотренные методы экспериментального обнаружения гравитационных волн, как мы видели, не лишены недостатков в части их теоретического обоснования. Так, в расчетах Вебера уравнение геодезического отклонения не было увязано с физическими наблюдаемыми, да и сама концепция наблюдаемых в общей теории относительности пока еще далека от однозначности. Это приводит к необходимости выбора некоторой преимущественной системы отсчета, который всегда неоднозначен.

Другие рассмотренные методы опираются на линеаризованную теорию тяготения, о недостатках которой уже говорилось ранее,— на этом, в частности, и основана критика метода Винтерберга, данная Зипоем и Бертотти [245].

Отметим, кроме того, некоторые принципиальные черты взаимосвязи теории гравитационных волн с физическим экспериментом.

Постановка эксперимента должна опираться на определенные допущения, без которых невозможно интерпретировать экспериментальные данные. Так, операция измерения (сравнения длины с эталоном), лежащая в основе эксперимента, опирается на задание способа отождествления однотипных объектов. С этой точки зрения принцип относительности, лежащий в основе физической теории, предшествует эксперименту (см. [257]). Поэтому теоретическую формулировку концепции гравитационных волн можно рассматривать как исходную посылку в интерпретации результатов эксперимента.

В этом отношении существенным недостатком рассмотренных выше концепций гравитационных волн является их *внутренняя неполнота*, следствием которой и является множественность и разноречивость критериев, свидетельствующая о недостаточно высоком уровне самих теоретических представлений в данной области.

Так, наиболее известный из этих критериев — критерий Лихнеровича — содержит уже в самой своей формулировке произвол и несоответствие с исходными предпосылками. Согласно основному исходному предположению, гравитационная волна характеризуется разрывами производных вида $g_{ij,00}$ на характеристической гиперповерхности в той системе координат, где последняя выражается уравнением (2.15). Однако можно указать примеры полей тяготения, удовлетворяющих критерию Лихнеровича, для которых компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ являются гладкими функциями координат, и, следовательно, их производные нигде не могут иметь разрыва Адамара. Примером может служить метрика Петрова

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 - \mathrm{sh}^2 x^0 \, dx^{2\,2} - \sin^2 x^0 \, dx^{3\,2},$$

для которой

$$\partial_\alpha \varphi = \delta_1^\beta g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha},$$

т. е. $\varphi = x^0 + \mathrm{const}$. Очевидно, на поверхности «фронта волны» ($x^0 = \mathrm{const}$) компоненты тензора кривизны

$$R_{0202} = -\,\mathrm{sh}^2 x^0, \quad R_{0303} = -\sin^2 x^0$$

не могут иметь разрыва Адамара.

Указанный недостаток относится и к другим рассмотренным выше ковариантным критериям гравитационных волн, в основу которых положено понятие разрыва Адамара компонент тензора Римана.

Подводя итоги, можно сказать, что в настоящий момент проблема гравитационных волн как в теоретическом, так и в экспериментальном плане весьма далека от окончательного разрешения. Но она остается одной из наиболее актуальных и принципиально важных проблем не только теории тяготения, но и всей современной физики и привлекает к себе все большее внимание исследователей. Поэтому можно ожидать, что эта проблема получит изящное разрешение и займет достойное место в стройной картине эйнштейновской теории тяготения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Докажем некоторые теоремы, использованные в тексте. Пусть $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана пространства V_4, антисимметричный по каждой из пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Введем два сопряженных ему тензора

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta}, \quad R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}. \tag{I.1}$$

Из определений (I.1) очевидным образом следует, что

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{I.2}$$

Теорема 1. В пространствах Эйнштейна имеют место соотношения

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^*R_{\gamma\delta\alpha\beta}. \tag{I.3}$$

Доказательство. В силу (I.2) условие (I.3) эквивалентно условию

$$^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{I.4}$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать формулу (I.4). Воспользуемся для этого соотношениями ([172], стр. 25, 300):

$$\eta^{\sigma\mu\nu\lambda}\eta_{\sigma\alpha\beta\gamma} = -\delta^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{I.5}$$

$$\eta^{\sigma\rho\mu\nu}\eta_{\sigma\rho\alpha\beta} = -2\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \tag{I.6}$$

$$\eta^{\sigma\rho\varepsilon\mu}\eta_{\sigma\rho\varepsilon\alpha} = -6\delta^{\mu}_{\alpha}, \tag{I.7}$$

где тензор $\delta^{\mu\nu\alpha\cdots}_{\lambda\beta\gamma\cdots}$ — обобщенный символ Кронекера, подчиняющийся следующим правилам: если μ, ν, α, ... все различны и λ, β, γ, ... получаются из них некоторой перестановкой, то он равен ± 1, в зависимости от того, четной или нечетной является подстановка $^{\mu\nu\alpha\cdots}_{\lambda\beta\gamma\cdots}$, а в остальных случаях он равен нулю. Умножая обе части равенства

$$^*R_{\rho\sigma\nu\lambda} = \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma\alpha\beta} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}$$

на $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\varepsilon\rho\sigma}$, получаем, в силу соотношений (I.6),

$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\varepsilon\rho\sigma *}R_{\rho\sigma\nu\lambda}=\frac{1}{2}\delta^{\mu\varepsilon}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}=R^{\mu\varepsilon\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\nu\lambda}.$$

Свертывая по индексам ε и ν, находим отсюда

$$R^{\mu}_{\lambda}=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma *}R_{\rho\sigma\nu\lambda}. \tag{I.8}$$

Умножая (I.8) на $\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}$, заменяя индекс λ на δ и используя соотношения (I.5), имеем:

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}R^{\mu}_{\delta}=\frac{1}{2}\delta^{\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma}{}^{*}R_{\rho\sigma\nu\delta}=$$

$$=\frac{1}{2}({}^{*}R_{\alpha\beta\gamma\delta}+{}^{*}R_{\beta\gamma\alpha\delta}+{}^{*}R_{\gamma\alpha\beta\delta}-{}^{*}R_{\beta\alpha\gamma\delta}-{}^{*}R_{\alpha\gamma\beta\delta}-{}^{*}R_{\gamma\beta\alpha\delta})=$$

$$=3{}^{*}R_{[\alpha\beta\gamma]\delta}.$$

Следовательно, в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$3{}^{*}R_{[\alpha\beta\gamma]\delta}=\varkappa\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}=\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.9}$$

Переписывая (I.9) в виде

$$3{}^{*}R_{[\beta\alpha\delta]\gamma}=\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}$$

и складывая, получим:

$$2{}^{*}R_{\alpha\beta\gamma\delta}={}^{*}R_{\alpha\gamma\beta\delta}+{}^{*}R_{\beta\delta\alpha\gamma}+{}^{*}R_{\alpha\delta\gamma\beta}+{}^{*}R_{\gamma\beta\alpha\delta}+2\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.10}$$

Переставим местами в (I.10) индексы α и γ, а также β и δ:

$$2{}^{*}R_{\gamma\delta\alpha\beta}={}^{*}R_{\gamma\alpha\delta\beta}+{}^{*}R_{\delta\beta\gamma\alpha}+{}^{*}R_{\gamma\beta\alpha\delta}+{}^{*}R_{\alpha\delta\gamma\beta}+2\varkappa\eta_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{I.11}$$

Сопоставлением (I.10) и (I.11) убеждаемся в справедливости соотношений (I.4), что и доказывает теорему.

В соответствии с этой теоремой в пространствах Эйнштейна принято обозначать

$${}^{*}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R^{*}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{I.12}$$

Лемма. В пространствах V_4 уравнения

$$l^{\alpha *}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0 \tag{I.13}$$

эквивалентны уравнениям

$$l_{\lambda}R_{\alpha\beta\gamma\delta}+l_{\alpha}R_{\beta\lambda\gamma\delta}+l_{\beta}R_{\lambda\alpha\gamma\delta}=0. \tag{I.14}$$

Доказательство. Пусть в V_4 существует вектор l^{α}, удовлетворяющий уравнениям (I.13). Умножая уравнения (I.13) на $\eta_{\mu\alpha\beta\nu}$, имеем, в силу соотношений (I.5),

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}{}_{\lambda\tau}l_\nu = \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\rho\sigma\lambda\tau}\,l_\nu = -\frac{1}{2}\delta^{\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma}l_\nu R_{\rho\sigma\lambda\tau} =$$
$$= -(l_\alpha R_{\beta\gamma\lambda\tau} + l_\beta R_{\gamma\alpha\lambda\tau} + l_\gamma R_{\alpha\beta\lambda\tau}) = 0, \qquad (I.15)$$

т. е. l^α удовлетворяет также уравнениям (I.14).

Обратно, пусть существует вектор l^α, удовлетворяющий уравнениям (I.14); покажем, что он удовлетворяет также уравнениям (I.13). Проделывая выкладки (I.15) в обратном порядке, получаем соотношения, эквивалентные первоначальному условию:

$$\eta_{\mu\alpha\beta\gamma}{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau}l_\nu = 0.$$

Умножим эти уравнения на $\eta^{\varepsilon\alpha\beta\gamma}$. В силу тождеств (I.7) получим следующий результат:

$$\delta^\varepsilon_\mu l_\nu{}^*R^{\mu\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau} = 0,$$

откуда

$$l_\nu{}^*R^{\varepsilon\nu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\tau} = 0,$$

т. е. l^α удовлетворяет условию (I.13), что и доказывает лемму.

Заметим, что в формулировке леммы существенно, что l^α свертывается с $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по одному из индексов первой пары, в силу неравноправия пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$, следующего из определения (I.1). В случае же пространств Эйнштейна, в силу теоремы 1, пары индексов равноправны, и условия $l^\alpha\,{}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и $l^\alpha\,{}^*R_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0$ становятся эквивалентными.

Теорема 2. В пространствах Эйнштейна ${}^*T_i$ (3.7) уравнения

$$l^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \qquad (I.16)$$

эквивалентны уравнениям

$$l_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + l_\alpha R_{\beta\lambda\gamma\delta} + l_\beta R_{\lambda\alpha\gamma\delta} = 0. \qquad (I.17)$$

Доказательство. Пусть в ${}^*T_i$ существует вектор l^α, удовлетворяющий уравнениям (I.16); покажем, что он удовлетворяет также уравнениям (I.17). Умножив исходные уравнения $l^\delta R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta} = 0$ на $\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$, получим:

$$l^\delta\,{}^*R_{\mu\nu\gamma\delta} = 0. \qquad (I.18)$$

Вследствие теоремы 1 тензор ${}^*R_{\mu\nu\gamma\delta}$ симметричен по парам индексов $\mu\nu$ и $\gamma\delta$, и из (I.18) следует, что

$$l^\delta\,{}^*R_{\gamma\delta\mu\nu} = 0. \qquad (I.19)$$

Но, согласно лемме, условие (I.19) эквивалентно условию (I.17), что и доказывает первую половину теоремы 2.

Обратно, пусть в $*T_i$ некоторый вектор l^α удовлетворяет уравнениям (I.17). Согласно лемме, он удовлетворяет уравнениям (I.13); но, в силу теоремы 1, эти уравнения эквивалентны следующим:

$$l^\alpha R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0,$$

т. е.

$$\eta_{\gamma\delta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha\beta}\, l^\alpha = 0. \tag{I.20}$$

Умножая (I.20) на $\eta^{\gamma\delta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\varepsilon\tau}$ и используя тождества (I.6), получим:

$$\delta^{\rho\sigma}_{\varepsilon\tau} R_{\rho\sigma\alpha\beta}\, l^\alpha = 2R_{\varepsilon\tau\alpha\beta} l^\alpha = 0,$$

т. е. вектор l^α удовлетворяет также уравнениям (I.16). Таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 3. В пространствах Эйнштейна (3.7) имеет место тождество:

$$\begin{aligned} g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho\sigma} &+ R_{\alpha\beta\sigma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\gamma\delta\rho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \\ &+ 2\,(R_{\delta\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\beta\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} - R_{\delta\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\alpha\rho\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} + \varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0. \end{aligned} \tag{I.21}$$

Доказательство. Ковариантно дифференцируя тождества Бианки

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho} + R_{\alpha\beta\delta\rho;\gamma} + R_{\alpha\beta\rho\gamma;\delta} = 0 \tag{I.22}$$

и умножая получившиеся равенства на тензор $g^{\rho\sigma}$, получим:

$$g^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho\sigma} + R_{\alpha\beta\delta\cdot;\gamma\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} - R_{\alpha\beta\gamma;\delta\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} = 0. \tag{I.23}$$

Используя затем дифференциальные тождества Риччи (см. [9], стр. 209) в применении к тензору Римана:

$$2R_{\alpha\beta\gamma\delta,[\rho\sigma]} = R_{\lambda\alpha\gamma\delta} R_{\rho\sigma\alpha\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\alpha\lambda\gamma\delta} R_{\rho\sigma\beta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\delta} R_{\rho\sigma\gamma\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\rho\sigma\delta\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}, \tag{I.24}$$

выражаем второй и третий члены в (I.23) соответственно через $R_{\alpha\beta\delta\cdot;\sigma\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$, а также члены, квадратичные относительно тензора Римана (и не содержащие производных от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$). Учитывая, далее, тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} = 2R_{\gamma[\alpha;\beta]}, \tag{I.25}$$

вытекающее из тождеств Бианки (I.22), убеждаемся, что в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} = 0. \tag{I.26}$$

Используя соотношения (I.26), аннулируем в полученных равенствах члены вида $R_{\alpha\beta\delta\cdot;\sigma\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\cdot;\sigma\delta}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ и приходим к соотношениям (I.21). Теорема 3 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Приведем в развернутом виде волновые уравнения (12.34) — (12.36) для хронометрически инвариантных компонент X^{ij}, Y^{ijk} и Z^{ijkl} тензора Римана. Используем для этой цели общековариантное определение гравитационных волн Зельманова:

$$g^{\sigma\rho}R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma\rho}=0. \tag{II.1}$$

Система двадцати уравнений (II.1), очевидно, эквивалентна следующим трем системам уравнений, первая из которых состоит из шести, вторая — из восьми и третья — из шести уравнений:

$$g^{\sigma\rho}R_{00\cdot\cdot;\sigma\rho}^{\cdot\cdot ij\cdot}=R_{00}^{\cdot\cdot ij;0\cdot}{}_{0}+R_{00}^{\cdot\cdot ij;n\cdot}{}_{n}=0, \tag{II.2}$$

$$g^{\sigma\rho}R_{0\cdot\cdot\cdot;\sigma\rho}^{\cdot ijk\;\cdot}=R_{0}^{\cdot ijk;0\cdot}{}_{0}+R_{0}^{\cdot ijk,n\cdot}{}_{n}=0, \tag{II.3}$$

$$g^{\sigma\rho}R_{\cdot\cdot\cdot\cdot;\sigma\rho}^{kijl}=R^{kijl;0\cdot}{}_{0}+R^{kijl;n\cdot}{}_{n}=0. \tag{II.4}$$

Запишем каждую из трех систем уравнений в хронометрически инвариантном виде. Для этого воспользуемся определениями (12.13), а также формулами для хронометрически инвариантного и пространственно-ковариантного дифференцирования (см. гл. 11).

Расписывая почленно уравнения (II.2) и выражая каждый член через соответствующие хронометрические инварианты, получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered}({}^*\nabla_n^n-{}^*\partial{}^*\partial)\,X^{ij}+2\,({}^*\nabla_n-F_n)\,[Y_m^{\cdot(ij)}\,(D^{nm}+A^{nm})]-\\
-[F^{n*}\nabla_nX^{ij}+D{}^*\partial X^{ij}+(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i}){}^*\partial X^{nj}+(D_n^j+A_{n\cdot}^{\cdot j}){}^*\partial X^{ni}]+\\
+({}^*\partial+D)\,[2F^nY_{n\cdot\cdot}^{\cdot(ij)}-X^{ni}\,(D_n^j+A_{n\cdot}^{\cdot j})-X^{nj}\,(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i})]+\\
+2\,(D^{nm}+A^{nm}){}^*\nabla_nY_{m\cdot\cdot}^{\cdot(ij)}+2F_n\,[{}^*\partial Y^{n(ij)}-Y^{m(ij)}\,(D_m^n+A_{\cdot m}^{n\cdot})]+\\
+2F_n\,[(D_m^i+A_{m\cdot}^{\cdot i})\,(Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot jm}+Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot mj})+(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})\,(Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot mi}+Y_{n\cdot\cdot}^{\cdot im})]-\\
-2D_n^m\,[X^{ni}\,(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})+X^{nj}\,(D_m^i+A_{m\cdot}^{\cdot i})]-\\
-2X^{nm}\,(D_n^i+A_{n\cdot}^{\cdot i})\,(D_m^j+A_{m\cdot}^{\cdot j})+2X^{ij}\,(D_{kl}D^{kl}+A_{kl}A^{kl}-F_lF^l)+\\
+2F_n{}^{(i}X^{j)n}+2Z_{nm\cdot\cdot}^{\cdot\cdot(ij)}\,[F^nF^m-(D^{ln}+A^{ln})\,(D_l^m+A_{l\cdot}^{\cdot m})]=0.\end{gathered} \tag{II.5}$$

Здесь F^i, D_{ij}, A_{ij} — введенные в гл. 12 вектор гравитационно-инерциальной силы, тензор скоростей деформаций и тензор угловой скорости вращения трехмерного пространства данной системы отсчета Σ относительно локально сопутствующей геодезической системы Σ_0 [205]. Несмотря на громоздкий вид этих уравнений, каждый из входящих в них членов имеет довольно ясную физическую интерпретацию. Очевидно, первый член представляет собой результат действия на хронометрически инвариантную волновую функцию волнового оператора (12.21). Укажем физический смысл еще некоторых хронометрически инвариантных операторов, входящих в уравнения (II.5). Так, релятивистский оператор

$$^{*}\nabla_i - F_i,$$

свернутый с некоторым хронометрически инвариантным трехмерным вектором t^i, дает выражение «физической дивергенции» вектора t^i, отличие которой от математической дивергенции $^{*}\nabla_i t^i$ обусловлено тем, что в различных точках границы элемента трехмерного объема величина $d\tau$ хронометрически инвариантного промежутка времени

$$d\tau = \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}$$

различна при одной и той же величине dt. Релятивистский оператор «физического дифференцирования» по времени $^{*}\partial + D$ отличается от математического (хронометрически инвариантного) оператора дифференцирования по времени $^{*}\partial$ тем, что в нем учитывается деформация со временем пространственной координатной сетки, в которой задана дифференцируемая функция.

Аналогично, выражая в хронометрически инвариантном виде уравнения (II.3), получим волновые уравнения для хронометрически инвариантного тензора Y^{ijk}:

$$\begin{aligned}
&(b^{mn*}\nabla_m{}^{*}\nabla_n - {}^{*}\partial{}^{*}\partial)\,Y^{ijk} + ({}^{*}\partial + D)\,[Y^{mik}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - \\
&- Y^{ijm}(D^k_m + A^{\cdot k}_{m\cdot}) - Y^{mjk}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}) + (2F^{[i}X^{j]k} - F^n Z^{\cdot ijk}_{n\cdots})] - \\
&\quad - ({}^{*}\nabla_n - F_n)\,[X^{ik}(D^{nj} + A^{nj}) - X^{jk}(D^{ni} + A^{ni}) + \\
&\quad + Z^{\cdot ijk}_{m\cdots}(D^{nm} + A^{nm})] + [(A^{\cdot n}_{m\cdot} - D^n_m)({}^{*}\nabla_n - F_n)\,Z^{mijk} + \\
&\quad + (D^{ni} + A^{ni}){}^{*}\nabla_n X^{jk} - (D^{nj} + A^{nj}){}^{*}\nabla_n X^{ik}] - [F^{n*}\nabla_n Y^{ijk} + \\
&\quad + D{}^{*}\partial Y^{ijk} + (D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot}){}^{*}\partial Y^{njk} - (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot}){}^{*}\partial Y^{nik} + \\
&\quad + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot}){}^{*}\partial Y^{ijn} + (2F^{[j*}\partial X^{i]k} + F^{n*}\partial Z^{\cdot ijk}_{n\cdots})] + \\
&+ F_n\{2F^{[i}Y^{j]nk} + F^k Y^{ijn} + (D^{ni} + A^{ni})\,X^{jk} - (D^{nj} + A^{nj})\,X^{ik} + \\
&\quad + 2\,[2Y^{nk[i}F^{j]} + Z^{nmik}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - Z^{mnjk}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}) + \\
&\quad + Z^{mijn}(D^k_m + A^{\cdot k}_{m\cdot})]\} + 2\,\{2F^{[i}X^{j]}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot}) + \\
&\quad + X^{nk}\,[F^i(D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot}) - F^j(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})]\} + \\
&+ 2\,\{D_{mn}\,[Y^{mkj}(D^{ni} + A^{ni}) - Y^{mki}(D^{nj} + A^{nj}) - Y^{ijm}(D^{nk} + A^{nk})] + \\
&\quad + 2A_{mn}\,[Y^{m(ik)}(D^{nj} + A^{nj}) - Y^{m(jk)}(D^{ni} + A^{ni})] + \\
&+ Y^{mnk}(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})\,[Y^{min}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot}) - \\
&\qquad - Y^{mjn}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot})]\} + \\
&\quad + Y^{ijk}(D_{nm}D^{nm} + A_{nm}A^{nm} - F_n F^n) = 0. \qquad \text{(II.6)}
\end{aligned}$$

Наконец, уравнения (II.4) дают следующую систему хронометрически инвариантных волновых уравнений для тензора Z^{kijl}:

$$
\begin{aligned}
&(b^{mn}{}^*\nabla_m{}^*\nabla_n - {}^*\partial{}^*\partial)\, Z^{kijl} + ({}^*\partial + D)\,[2Y^{ij[k}F^{l]} + 2Y^{kl[i}F^{j]} + \\
&\quad + (D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot})\, Z^{ni\;k} - (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})\, Z^{ni\;l} + (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot})\, Z^{knil} - \\
&\qquad - (D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})\, Z^{kn\;l}] - \\
&\quad - ({}^*\nabla_n - F_n)\,[(D^{nk} + A^{nk})\, Y^{ijl} + (D^{ni} + A^{ni})\, Y^{klj} - \\
&\qquad - (D^{nl} + A^{nl})\, Y^{i\;k} - (D^{nj} + A^{nj})\, Y^{kli}] + \\
&\qquad + (D^{nl} + A^{nl})\,{}^*\nabla_n Y^{ijk} - (D^{nk} + A^{nk})\,{}^*\nabla_n Y^{i\;l} + \\
&\qquad + (D^{nj} + A^{nj})\,{}^*\nabla_n Y^{kli} - (D^{ni} + A^{ni})\,{}^*\nabla_n Y^{klj} - \\
&\qquad - [F^n{}^*\nabla_n Z^{kijl} + D{}^*\partial Z^{ki\;l} + F^k{}^*\partial Y^{ijl} - \\
&\qquad - F^l{}^*\partial Y^{ijk} + F^i{}^*\partial Y^{kl\;} - F\,{}^*\partial Y^{kli} + \\
&+ (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})\,{}^*\partial Z^{ni\;l} - (D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot})\,{}^*\partial Z^{nijk} + (D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})\,{}^*\partial Z^{knjl} - \\
&\qquad - (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot})\,{}^*\partial Z^{knil}] + \\
&\quad + 4\,[F^iF^{[k}X^{l]j} + F^jF^{[l}X^{k]i}] + F_n\,[Y^{ijk}(D^{nl} + A^{nl}) - \\
&\qquad - Y^{i\;l}(D^{nk} + A^{nk}) + \\
&\qquad + Y^{kli}(D^{nj} + A^{n\;}) - Y^{klj}(D^{ni} + A^{ni}) + \\
&\qquad + 2\,(Z^{nij[k}F^{l]} - Z^{nkl[i}F^{j]})] + \\
&\quad + 2\,\{(D^{ni} + A^{ni})\,[X^{kj}(D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot}) - X^{lj}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})] + \\
&\quad + (D^{nj} + A^{n\;})\,[X^{kj}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot}) - X^{ki}(D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot})]\} + \\
&\qquad + 2\,[(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})(2Y^{nj[k}F^{l]} + F^jY^{kln}) + \\
&\qquad + (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot})(2Y^{ni[l}F^{k]} - F^iY^{kln}) + \\
&\qquad + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})(2Y^{nl[i}F^{j]} + F^lY^{i\;n}) + \\
&\qquad + (D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot})(2Y^{nk[j}F^{i]} - F^kY^{ijn})] + \\
&+ 2\,\{A^{\cdot n}_{m\cdot}\,[Z^{mijk}(D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot}) - Z^{mi\;l}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot}) + Z^{kmil}(D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot}) - \\
&\quad - Z^{kmjl}(D^i_n + A^{\cdot i}_{n\cdot})] + (D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})\,[Z^{mi\;n}(D^l_m + A^{\cdot l}_{m\cdot}) + \\
&\quad + Z^{nmil}(D^j_m + A^{\cdot j}_{m\cdot})] - (D^j_n + A^{\cdot j}_{n\cdot})\,[Z^{kmnl}(D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot}) + \\
&\quad + Z^{mnik}(D^l_m + A^{\cdot l}_{m\cdot})] + (D^i_m + A^{\cdot i}_{m\cdot})\,[Z^{nm\;k}(D^l_n + A^{\cdot l}_{n\cdot}) - \\
&\qquad\qquad - Z^{nmjl}(D^k_n + A^{\cdot k}_{n\cdot})]\} = 0. \qquad \text{(II.7)}
\end{aligned}
$$

Физическая интерпретация уравнений (II.6) и (II.7) аналогична предыдущей. Уравнениями (II.5) — (II.7) исчерпывается полная система хронометрически инвариантных уравнений, описывающих гравитационно-инерциальные волны в заданной системе отсчета. Поскольку эти уравнения представляют собой не что иное, как общековариантные уравнения (II.1), записанные в произвольной (фиксированной) системе отсчета, то эти уравнения удовлетворяются для любого пустого пространства — времени типа N по классификации Петрова (в данной системе отсчета). Таким образом, уравнения (II.5) — (II.7) могут служить хронометрически инвариантной характеристикой полей тяготения типа N в вакууме.

ЛИТЕРАТУРА

Приводимый ниже список литературы составлен следующим образом. Номера с 1 по 262 даны в порядке цитирования в основном тексте книги. Далее, с номера 263 до конца, работы сведены в группы соответственно семи направлениям исследований, охарактеризованным во введении. Работы 263—283 отнесены к первой группе, работы 284—316 ко второй группе, работы 317—336 к третьей группе, работы 337—389 к четвертой группе, работы 390—414 к пятой группе, работы 415—421 к шестой и работы 422—458, 465 к седьмой группе. Работы 459—464 либо носят обзорный характер, либо посвящены вопросу о скорости гравитационных волн.

1. A. Einstein, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 688 (1916) (имеется перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», 1965, стр. 514).
2. A. Einstein, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. **1**, 154 (1918) (имеется перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», 1965, стр. 631).
3. D. Gilbert, Gött. Nachr., 1917.
4. D. Gilbert, Math. Ann. 92, 22 (1918).
5. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
6. W. B. Bonnor, «Perspectives in Geometry and Relativity», Indiana University Press, 1966, p. 28.
7. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, Ann. Math. **39**, 65 (1938) (имеется перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 2, «Наука», 1966, стр. 450).
8. Л. Инфельд, Е. Плебаньский, Движение и релятивизм, ИЛ, 1962.
9. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
10. S. Gupta, Proc. Phys. Soc. A65, 161 (1952) (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961).
11. W. Bonnor, Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell'energia e ondre gravitazionali, Firenze, 1964—1965, p. 119.
12. W. Bonnor, Ann. Inst. Henri Poincaré **15**, 146 (1957).
13. P. Havas, J. N. Goldberg, Phys. Rev. **128**, 398 (1962).
14. P. Havas, Journ. Math. Phys. **5**, 373 (1964).
15. А. С. Эддингтон, Теория относительности, ГТТИ, 1934.

16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967.
17. W. Bonnor, Trans. Roy. Phil. Soc., London A251, 233 (1959).
18. W. Bonnor, M. A. Rotenberg, Proc. Roy. Soc. A289, 247 (1966).
19. N. Rosen, H. Shamir, Revs. Mod. Phys. 29, 429 (1957).
20. H. Bondi, «Rendiconti della Scuola internationale fisica nucleare „Enrico Fermi“», New York — London, 1962, p. 202.
21. M. A. Rotenberg, Proc. Phys. Soc., ser. 2, 1, 280 (1968).
22. W. B. Campbell, Phys. Rev. D2, 2123 (1970).
23. A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. A102, 268 (1923).
24. F. I. Cooperstock, Phys. Rev. 165, 1424 (1968).
25. M. A. Rotenberg, Proc. Roy. Soc. A1, 97 (1968).
26. F. I. Cooperstock, D. J. Booth, Nuov. Cim. 62B, 163 (1969).
27. A. J. Hunter, M. A. Rotenberg, Journ. Phys. Am. (Gen. Phys.), ser. 2, 2, 34 (1969).
28. M. A. Rotenberg, Ph. D. Thesis, University of London, 1964.
29. M. A. Rotenberg, Comm. Math. Phys. 5, 23 (1967).
30. K. S. Thorne, Phys. Rev. Lett. 21, 320 (1968).
31. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 21, 395 (1968).
32. F. I. Cooperstock, Phys. Rev. 163, 1368 (1967).
33. F. I. Cooperstock, Phys. Rev. 165, 1424 (1968).
34. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ДАН СССР 155, 1033 (1964).
35. M. Carmeli, Phys. Rev. 158, 1243 (1967).
36. Дж. Уилер, Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, 1962.
37. R. A. Isaakson, Phys. Rev. 166, 1263 (1968).
38. R. A. Isaakson, Phys. Rev. 166, 1272 (1968).
39. D. Brill, J. B. Hartle, Phys. Rev. 135, B271 (1964).
40. В. И. Шуликовский, Классическая дифференциальная геометрия, Физматгиз, 1963.
41. K. Jano, The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, Amsterdam, 1957.
42. Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1965.
43. A. Lichnerowicz, «Relativity, Groups and Topology», New York, 1964, p. 827.
44. R. A. Isaakson, J. Winicour, Phys. Rev. 168, 1451 (1968).
45. J. Madore, Ann. Inst. Henri Poincaré 12, 285 (1970).
46. J. Madore, Ann. Inst. Henri Poincaré 12, 365 (1970).
47. De Donder, La gravifique einsteinienne, Paris, 1921.
48. K. Lanczos, Phys. Zs. 23, 537 (1923).
49. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1961.
50. Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.
51. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Hermann, 1903.
52. A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
53. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1966.

54. A. Lichnerowicz, «Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.», vol. XVII, Providence, 1965, p. 189.
55. A. Trautman, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **246**, 1500 (1958).
56. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **245**, 2482 (1957).
57. А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966.
58. Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948.
59. B. Finzi, Atti della Acad. Naz. Lincei 6, 18 (1949) (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961, стр.247).
60. Н. В. Мицкевич, Физические поля в общей теории относительности, «Наука», 1969.
61. Н. П. Коноплева, Г. А. Соколик, Пространство и время в современной физике, «Наукова думка», 1968, стр. 82.
62. A. Lichnerowicz, Ann. Mat. pura ed appl. **50**, 1 (1960).
63. R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, New York — London, 1956.
64. А. З. Петров, Ученые записки Казанского университета **114**, 8 (1954).
65. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
66. R. Debever, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **249**, 1324 (1959).
67. R. Penrose, Ann. of Phys. **10**, 171 (1960).
68. L. Bel, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique», Paris, 1962, p. 119.
69. F. Pirani, Physik. Bl. **17**, 114 (1961).
70. F. Pirani, «Recent Developments in General Relativity», New York — London, 1962, p. 89.
71. F. Pirani, «Gravitation: an Introduction to Current Research», New York — London, 1962, p. 199.
72. M. Wyman, R. Trollope, Journ. Math. Phys. **7**, 1836 (1966).
73. R. Trollope, Journ. Math. Phys. **8**, 938 (1967).
74. В. Р. Кайгородов, «Гравитация и теория относительности», вып. 3, Изд-во Казанского университета, 1967, стр. 161.
75. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **246**, 3015 (1958).
76. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **247**, 1094 (1958).
77. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **247**, 2096 (1958).
78. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **248**, 1297 (1959).
79. L. Bel, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **248**, 2561 (1959).
80. L. Bel, Cahiers Phys., **16**, 59 (1962).
81. R. Debever, Bull. Soc. Math. Belgique **10**, 112 (1958).
82. A. Matte, Canad. Journ. Math. 5, 1 (1953).
83. J. Synge, Proc. Roy. Irish Acad. **A58**, 4 (1957).
84. Le-Thanh-Phong, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 250, 987 (1960).
85. J. Geheniau, R. Debever, Bull. Acad. Roy. Belgique 42, 114 (1956).
86. А. П. Норден, В. В. Вишневский, Изв. вузов, сер. «Математика», № 2, 9 (1959).
87. A. Lichnerowicz, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **246**, 893 (1958).
88. A. Lichnerowicz, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **248**, 2728 (1959).

89. A. Lichnerowicz, Cahiers Phys. **12**, 287 (1958).
90. A. Lichnerowicz, «Colloques internationaux du cetrne national de la recherche scientifique», Paris, 1962, p. 93.
91. В. Д. Захаров, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», Атомиздат, 1966, стр. 114.
92. Н. П. Коноплева, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 27.
93. Н. П. Коноплева, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 3, Атомиздат, 1970, стр. 103.
94. В. Д. Захаров, Сообщ. ГАИШ, № 131, 42 (1964).
95. Дж. Вебер. Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962.
96. S. Roy, L. Radhakrishna, Proc. Roy. Soc. **A275**, 245 (1963).
97. А. З. Петров, Пространства, определяемые полями тяготения, Докторская диссертация, МГУ, 1957.
98. В. Д. Захаров, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 3, Атомиздат, 1971, стр. 128.
99. Н. А. Савельева, Общековариантные гравитационные волны и гармонические координаты, Дипломная работа, МГУ, 1968.
100. В. Д. Захаров, Вестник МГУ, сер. физ.-астроном., № 2, 3 (1966).
101. В. Д. Захаров, ДАН СССР **161**, 563 (1965).
102. H. Takeno, Tensor **12**, 197 (1962).
103. В. Д. Захаров, Вестник МГУ, сер. физ.-астроном., № 2, 59 (1965).
104. K. Nordtvedt, H. Pagels, Ann. of Phys. **17**, 426 (1962).
105. В. Д. Захаров, ДАН СССР **166**, 324 (1966).
106. Г. И. Кручкович, УМН **9**, 1 (1954).
107. В. Д. Захаров, «Современные проблемы гравитации», Сборник трудов 2-й Советской гравитационной конференции, Изд-во Тбилисского университета, 1967, стр. 259.
108. A. Peres, Phys. Rev. **118**, 1105 (1960).
109. R. Debever, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **250**, 64 (1960).
110. R. Sachs, Proc. Roy. Soc. **A265**, 463 (1962).
111. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **251**, 1981 (1960).
112. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **252**, 3754 (1961).
113. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **257**, 2083 (1963).
114. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **262**, 1376 (1966).
115. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **263**, 38 (1966).
116. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **249**, 1867 (1959).
117. J. Hély, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **258**, 1415 (1964).
118. J. Zund, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **262**, 1081 (1966).
119. J. Zund, J. Levine, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **264**, 1029 (1967).
120. J. Levine, J. Zund, Ann. math. pura ed appl. **80**, 373 (1969).
121. Э. Я. Малдыбаева, Изв. вузов, сер. физ., № 6, 320 (1967).
122. П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947.
123. Э. Я. Малдыбаева, ДАН СССР **172**, 320 (1967).

124. Н. П. Коноплева, Г. А. Соколик, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 1, Атомиздат, 1966, стр. 22.
125. А. Лихнерович, Теория связностей в целом и группы голономий, ИЛ, 1960.
126. В. М. Николаенко, Изв. вузов, сер. физ., № 1, 138 (1971).
127. R. M. Misra, R. A. Singh, Journ. Math. Phys. **7**, 1836 (1966).
128. R. M. Misra, R. A. Singh, Journ. Math. Phys. 8, 1065 (1967).
129. I. Robinson, A. Trautman, Phys. Rev. Lett. **4**, 431 (1960).
130. I. Robinson, A. Trautman, Proc. Roy. Soc. **A265**, 463 (1962).
131. А. Траутман, УФН **89**, 3 (1966).
132. J. Ehlers, Acad. Wiss. Mainz, Abh. Math. Naturwiss, № 11 (1961).
133. L. Shepley, A. Taub, Communications Math. Phys. 5, 237 (1967).
134. P. Szekeres, Journ. Math. Phys. **7**, 751 (1966).
135. P. C. Bartrum, Journ. Math. Phys. 8, 1464 (1967).
136. F. Pirani, A. Schild, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, 9, 543 (1961).
137. W. Kundt, Zs. Phys. **163**, 77 (1961).
138. J. Foster, E. T. Newman, Journ. Math. Phys. 8, 189 (1967).
139. P. C. Bartrum, Journ. Math. Phys. 8, 667 (1967).
140. R. P. Kerr, A. Schild, «Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proc. of Symposia in Appl. Maths.», vol. XVII, Providence, 1965, p. 199.
141. R. P. Kerr, A. Schild, «Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell'energia e ondre gravitazionali», Firenze, 1965, p. 222.
142. L. Mas, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **A268**, **441** (1969).
143. H. Bondi, F. Pirani, I. Robinson, Proc. Roy. Soc. **A251**, 519 (1959).
144. R. Penrose, Revs. Mod. Phys. **37**, 215 (1965).
145. W. Kundt, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique», Paris, 1962, p. 155.
146. J. Ehlers, W. Kundt, «Gravitation: an Introduction to Current Research», New York — London, 1962, p. 49.
147. P. Jordan, J. Ehlers, W. Kundt, Abhandl. Dtsch. Acad. Wiss., Kl. Math. Naturwiss., № 2, 85 (1960).
148. R. Sachs, «Relativity, Groups and Topology», New York — London, 1964, p. 152 (имеется перевод: «Гравитация и топология. Актуальные проблемы», «Мир», 1966, стр. 84).
149. M. Chevreton, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **262**, 1227 (1966).
150. E. Newman, Journ. Math. Phys. 2, 324 (1961).
151. J. Goldberg, Phys. Rev. **131**, **1367** (1963).
152. J. Goldberg, R. Kerr, Journ. Math. Phys. **5**, **172** (1964).
153. H. Takeno, Tensor 8, 59 (1958).
154. V. B. Johari, Progr. Theoret. Phys. 35, 141 (1966).

155. N. Rosen, Phys. Zs. Sowjetunion 12, 366 (1937).
156. J. Boardman, P. G. Bergmann, Phys. Rev. 115, 1318 (1959).
157. A. Avez, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 252, 3408 (1961).
158. В. Б. Брагинский, В. Н. Руденко, «Гравитация и теория относительности», вып. 1, Изд-во Казанского университета, 1963, стр. 96.
159. H. Dăngvu, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. A268, 297 (1969).
160. A. Peres, Phys. Rev. Lett. 3, 571 (1959).
161. L. P. Eisenhart, Ann. of Math. 39, 316 (1938).
162. Г. И. Кручкович, А. С. Солодовников, Изв. вузов, сер. матем., № 3 (10), 147 (1959).
163. H. Takeno, Tensor 6, 15 (1956).
164. P. Vaidya, J. Pandya, Current Sci. 29, 268 (1960).
165. В. Д. Захаров, Исследование полей тяготения с точки зрения инвариантного критерия гравитационных волн, Кандидатская диссертация, МГУ, 1966.
166. В. Р. Кайгородов, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 117.
167. В. Р. Кайгородов, А. Б. Пестов, «Гравитация и теория относительности», вып. 6, Изд-во Казанского университета, 1969, стр. 46.
168. H. Takeno, Sci. Rep. of Research Inst. Theoret. Phys. Hiroshima University, N 1, 1 (1961).
169. В. Д. Захаров, «Проблемы гравитации. Тезисы докладов 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1965, стр. 104.
170. В. Д. Захаров, «Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по теории элементарных частиц», Изд-во Ужгородского университета, 1965, стр. 52.
171. H. Bondi, M. van der Burg, A. Metzner, Proc. Roy. Soc. A269, 21 (1962).
172. Дж. Синг, Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
173. A. Papapetrou, Ann. Inst. Henri Poincaré 14, 79 (1971).
174. E. T. Newman, R. Penrose, Journ. Math. Phys. 3, 566 (1962).
175. E. T. Newman, R. Penrose, Journ. Math. Phys. 4, 998 (1962).
176. R. Penrose, Proc. Roy. Soc. A284, 159 (1965).
177. E. T. Newman, R. Penrose, Proc. Roy. Soc. A305, 175 (1968).
178. F. J. Zerilli, Phys. Rev. D2, 2141 (1970).
179. C. V. Vishveshwara, Nature 227, 937 (1970).
180. W. E. Couch, W. M. Kinnersley, R. J. Torrence, Phys. Lett. A31, 576 (1970).
181. W. E. Couch, R. J. Torrence, Journ. Math. Phys. 11, 2096 (1970).
182. R. J. Torrence, A. J. Janis, Journ. Math. Phys. 8, 1355 (1967).
183. E. T. Newman, R. Penrose, Journ. Math. Phys. 7, 863 (1966).
184. J. Goldberg, R. Sachs, Acta Phys. Polon. Suppl., 22, 13 (1962).

185. R. Sachs, Proc. Roy. Soc. 270, 103 (1962).
186. W. Kundt, A. Thompson, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 254, 4257 (1962).
187. A. Einstein, N. Rosen, Journ. Franklin Institute 223, 43 (1937).
188. J. Stachel, Journ. Math. Phys. 7, 1321 (1966).
189. А. С. Компанеец, ЖЭТФ 34, 953 (1958).
190. L. Marder, Proc. Roy. Soc. A244, 524 (1958).
191. L. Marder, Proc. Roy. Soc. A252, 252, 45 (1959).
192. L. Marder, Proc. Roy. Soc. A261, 91 (1961).
193. J. Weber, J. Wheeler, Revs. Mod. Phys. 29, 509 (1957) (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961).
194. Rao J., Krishna, Current Sci. 32, 350 (1963).
195. Rao J., Krishna, Proc. Nat. Inst. Sci. India A30, 439 (1964).
196. Rao J., Krischna, Indian Journ. Pure and Appl. Math. 1, 367 (1970).
197. S. Persides, Proc. Roy. Soc. A320, 349 (1970).
198. E. Lehman, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. A264, 488 (1967).
199. J. N. Goldberg, Phys. Rev. 131, 1367 (1963).
200. J. B. Kammerer, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 261 5003 (1965).
201. B. Kozarzewski, Acta Phys. Polon. 27, 775 (1965).
202. S. W. Hawking, Journ. Math. Phys. 9, 598 (1968).
203. J. Stachel, Phys. Rev. 179, 1251 (1969).
204. А. Л. Зельманов, ДАН СССР 107, 815 (1956).
205. А. Л. Зельманов, Труды шестого совещания по вопросам космогонии, Внегалактическая астрономия и космология, Изд-во АН СССР, 1959, стр. 144.
206. А. Л. Зельманов, О деформации и кривизне сопутствующего пространства, Кандидатская диссертация, МГУ, 1944.
207. Н. П. Бондаренко, Вестник Киевского университета, сер. астрон., № 11, 10 (1969).
208. Л. Б. Григорьева, В. Д. Захаров, «Гравитация и теория относительности», вып. 8, Изд-во Казанского университета, 1972.
209. K. Gödel, Revs. Mod. Phys. 21, 447 (1949).
210. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, 1953.
211. Н. В. Павлов, Исследование уравнений девиации с точки зрения хронометрически инвариантных величин, Дипломная работа, МГУ, 1968.
212. J. Weber, «Gravitation and Relativity», New York — Amsterdam, 1964, p. 90 (имеется перевод: «Гравитация и относительность», «Мир», 1965, стр. 179).
213. В. Б. Брагинский, УФН 86, 433 (1965).
214. К. П. Станюкович, В. Д. Захаров, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 1, Атомиздат, 1966, стр. 130.
215. R. L. Forward, D. Berman, Phys. Rev. Lett. 18, 1071 (1967).
216. И. С. Шкловский, Астрофиз. журн. 46, 114 (1969).

217. Z. F. Ezawa, Y. Yamaguchi, Journ. Phys. Soc. 28, 1083 (1970).
218. K. S. Thorne, A. Kampolattoro, Astrophys. Journ. 149, 591 (1967).
219. К. С. Торн, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 175.
220. R. Price, K. S. Thorne, Astrophys. Journ. 155, 163 (1969).
221. K. S. Thorne, Astrophys. Journ. 158, 1 (1969).
222. K. S. Thorne, Astrophys. Journ. 158, 997 (1969).
223. W. A. Fowler, Revs. Mod. Phys. 36, 545 (1964).
224. J. A. Wheeler, «Onzième conseil de l'institut international de physique, Solvay», Bruxelles, 1958, p. 112.
225. H. J. Melosh, Nature 224, 781 (1969).
226. J. Sinsky, J. Weber, Phys. Rev. Lett. 18, 795 (1967).
227. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 20, 1307 (1968).
228. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 22, 1320 (1969).
229. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 24, 276 (1970).
230. G. Greenstein, Astrophys. Journ. 158, 145 (1969).
231. D. W. Sciama, G. B. Field, M. J. Rees, Phys. Rev. Lett. 23, 1514 (1969).
232. P. Kafka, Mitteilungen der Astron. Gesellschaft, № 27, 134 (1969).
233. P. Kafka, Nature 226, 436 (1970).
234. G. B. Field, M. J. Rees, D. W. Sciama, Comments Astrophys. and Space Phys. 1, 187 (1969).
235. D. W. Sciama, G. B. Field, Phys. Rev. 23, 1514 (1969).
236. В. Б. Брагинский, Я. Б. Зельдович, В. Н. Руденко, Письма ЖЭТФ 10, 437 (1969).
237. В. Б. Брагинский, В. Н. Руденко, УФН 100, 395 (1970).
238. J. A. Wheeler, Ann. Rev. Astr. Astroph., 4, 393 (1966).
239. V. De Sabbata, Memorie di Società Astronomico Italiano 41, 65 (1970).
240. D. Boccaletti, V. De Sabbata, C. Gualdi, P. Fortini, Nuov. Cim. 54, 134 (1968).
241. В. Н. Мироновский, ЖЭТФ 49, 1650 (1965).
242. H. Heintzman, Zs. Phys. 210, 380 (1968).
243. F. Cooperstock, Ann. of Phys. 47, 173 (1968).
244. F. Winterberg, Nuov. Cim. B53, 264 (1968).
245. D. Zipoy, B. Bertotti, Nuov. Cim. B56, 195 (1968).
246. H. Scheffler, Astron. Nachr. 285, 156 (1960).
247. В. Р. Нагибаров, У. Х. Копвиллем, Письма ЖЭТФ 5, 445 (1967).
248. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибаров, «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, Изд-во Казанского университета, 1968, стр. 60.
249. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибаров, ЖЭТФ 56, стр. 113 (1969).
250. В. Р. Нагибаров, У. Х. Копвиллем, «Гравитация и теория относительности», вып. 6, Изд-во Казанского университета, 1969, стр. 60.
251. У. Х. Копвиллем, В. И. Башков, «Квантовая акустика», Изд-во АН СССР (Казань) (сборник статей, в печати).

252. Г. Я. Лаврентьев, ЖТФ 39, 1316 (1969).
253. Г. Я. Лаврентьев, Письма ЖЭТФ 10, 495 (1969).
254. L. E. Halpern, R. Desbrandes, Ann. Inst. Henri Poincaré A11, 309 (1969).
255. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибаров, Письма ЖЭТФ 2, 529 (1965).
256. В. Р. Нагибаров, У. Х. Копвиллем, Изв. вузов, сер. физ., № 9, 66 (1967).
257. Г. А. Соколик, Н. П. Коноплева, «Эйнштейновский сборник — 1967», «Наука», стр. 348.
258. F. J. Dyson, Seismic reponse of the earth to a gravitation wave in the one-hertz band, Inst. of Advanced Study, Princeton University, preprint, 1968.
259. F. J. Dyson, Astrophys. Journ. 156, 529 (1969).
260. L. Mariot, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 238, 2055 (1954).
261. L. Mariot, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 239, 1189 (1954).
262. F. Pirani, Phys. Rev. 105, 1089 (1957) (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961, стр. 257).
263. F. Pirani, Survey of gravitational radiation theory, King's College, preprint, 1960.
264. A. Lichnerowicz, «Problèmes actuels en théorie de la relativité», Editions de la revue d'optique théorique et instrumentale, Paris, 1959, p. 1.
265. R. Debever, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 249, 1744 (1959).
266. R. Debever, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 250, 64 (1960).
267. R. Debever, «Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell'energia e ondre gravitazionali», v. I, Firenze, 1964—1965, p. 3.
268. R. Debever, J. Leroy, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. 264, 1121 (1967).
269. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, 7, № 6 (1958).
270. A. Trautman, Lectures on the General Relativity, King's College, preprint, 1958.
271. А. З. Петров, Изд-во Казанского университета, «Геометрия и теория относительности», Сб 1958, стр. 3.
272. J. Ehlers, R. Sachs, Zs. Phys. 155, 498 (1959).
273. R. Sachs, Zs. Phys. 157, 462 (1960).
274. R. Sachs, «Recent Developments in General Relativity», New York — London, 1962, p. 395.
275. В. Д. Захаров, «Проблемы гравитации. Тезисы докладов 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1965, стр. 28.
276. В. Д. Захаров, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 20.
277. A. Staruszkiewicz, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, 12, 271 (1964).
278. J. Parizet, Contribution a l'étude des ondes et des ondes de choc en relativité générale, Thèse du Doctorat, Université de Paris, 1965.
279. М. Я. Малдыбаева, «Современные проблемы гравитации. Сборник трудов 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1967, стр. 50.

280. P. C. Aichelburg, Curvature Collineations for Gravitation pp-Waves, International Centre for Theoretical Physics, Miramare — Trieste, preprint, 1969.
281. I. Lukačević, Matematički vesnik 6, 365 (1969).
282. N. Coburn, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Paris, 1967», 1969, p. 131.
283. B. P. Yadav, Progr. Theoret. Phys. 44, 555 (1970).
284. L. Infeld, Phys. Rev. 53, 836 (1938).
285. L. Infeld, A. E. Scheidegger, Canad. Journ. Math. 3, 195 (1951).
286. L. Infeld, Ann. of Phys. 6, 341 (1959).
287. L. Infeld, R. Michalska-Trautman, Ann. of Phys. 40, 374 (1966).
288. N. Rosen, Phys. Rev. 110, 291 (1958).
289. A. Peres, N. Rosen, Phys. Rev. 115, 1085 (1959).
290. A. Peres, Nuov. Cim. 15, 351 (1960).
291. R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, Proc. Roy. Soc. A251, 519 (1959).
292. R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, Ann. of Phys. 11, 116 (1960).
293. R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, Phys. Rev. 118, 1100 (1960).
294. D. Geissler, H. Treder, A. Papapetrou, Ann. d. Phys. 2, 344 (1959).
295. H. Araki, Ann. of Phys. 7, 456 (1959).
296. D. Brill, Ann. of Phys. 7, 466 (1959).
297. C. Möller, «Max-Planck Festschrift», Berlin, 1958, S. 139 (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961, стр. 65).
298. C. Möller, «Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell'energia e ondre gravitazionali», v. II, Roma, 1964, t. 1, p. 21 (имеется перевод: «Гравитация и топология. Актуальные проблемы», «Мир», 1966, стр. 50).
299. C. Möller, «Proceedings of the Conference on the Theory of Gravitation, Warszawa, 1962», Paris — Warszawa, 1964, p. 31 (имеется перевод: «Гравитация и топология. Актуальные проблемы», «Мир», 1966, стр. 34).
300. И. И. Гутман, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 65.
301. И. И. Гутман, «Гравитация и теория относительности», вып. 2, Изд-во Казанского университета, 1965, стр. 72.
302. И. И. Гутман, ЖЭТФ 53, 566 (1967).
303. Л. И. Будько, «Тезисы 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1965, стр. 97.
304. М. Ф. Широков, Л. И. Будько, ДАН СССР 172, 326 (1967).
305. М. Ф. Широков, Л. И. Будько, «Современные проблемы гравитации. Труды 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1967, стр. 302.
306. А. З. Петров, «Методологические проблемы теории измерений», «Наукова думка», Киев, 1966, стр. 57.
307. Ву Тхань Кхиет, Вестник МГУ, № 2, 52 (1966).
308. В. И. Денисов, «Украинский геометрический сборник», вып. 4, Изд-во Харьковского университета, 1967, стр. 22.

309. M. Signore-Poyet, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **B264**, 829 (1967).
310. M. Signore, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **A268**, 1161 (1969).
311. M. Signore, Ann. Inst. Henri Poincaré, v. XI, 81 (1969).
312. И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ., № 7, 130 (1969).
313. И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ., № 7, 156 (1968).
314. В. И. Родичев, И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ., № 4, 20 (1969).
315. В. Н. Захаров, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 111.
316. В. Н. Захаров, Труды УДН, т. XLIV, вып. 4, 118 (1969).
317. J. Weber, D. Zipoy, Nuov. Cim. **18**, 191 (1960).
318. R. P. Kerr, J. N. Goldberg, Journ. Math. Phys. **2**, 332 (1961).
319. M. Cahen, J. Leroy, Bulletin de la classe des sciences. Academie royale de Belgique **51**, 966 (1965).
320. M. Cahen, J. Leroy, Bulletin de la classe des sciences. Academie royale de Belgique **51**, 1319 (1965).
321. L. Marder, Proc. Roy. Soc. **A313**, 83 (1969).
322. H. Bondi, Nature **179**, 1072 (1957).
323. H. Bondi, Nature **186**, 535 (1960).
324. H. Bondi, «Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell'energia e ondre gravitazionali», Firenze, 1964—1965, p. 143.
325. H. Bondi, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Paris, 1967», Paris, 1969, p. 195.
326. W. E. Couch, R. J. Torrence, A. J. Janis, E. T. Newman, Journ. Math. Phys. **9**, 484 (1968).
327. J. Bičák, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 93.
328. J. Bičák, Proc. Roy. Soc. **A302**, 201 (1968).
329. M. G. Van der Burg, Proc. Roy. Soc. **A310**, 221 (1969).
330. L. Derry, R. Isaacson, J. Winicour, Phys. Rev. **185**, 1647 (1969).
331. G. le Denmat, Ann. Inst. Henri Poincaré **10**, 445 (1969).
332. W. H. Hallidy, A. I. Janis, Journ. Math. Phys. **11**, 578 (1970).
333. E. T. Newman, L. A. Tamburino, Journ. Math. Phys. **3**, 902 (1962).
334. T. Unti, R. Torrence, Journ. Math. Phys. **7**, 535 (1966).
335. C. D. Collinson, D. C. French, Journ. Math. Phys. **8**, 701 (1967).
336. C. D. Collinson, Journ. Phys. A (Gen. Phys.), ser. 2, **2**, 621 (1969).
337. N. Rosen, Bull. Res. Council Israel **3**, 328 (1954).
338. N. Rosen, Helv. Phys. Acta, Suppl., **4**, 171 (1956).
339. H. Takeno, Tensor **7**, 97 (1957).
340. H. Takeno, Tensor **9**, 76 (1959).
341. H. Takeno, Tensor **9**, 162 (1959).
342. H. Takeno, Tensor **10**, 34 (1960).

343. H. Takeno, Tensor **11**, 99 (1961).
344. H. Takeno, Progr. Theoret. Phys., Suppl., № 25, 103 (1963).
345. H. Takeno, Tensor **15**, 233 (1964).
346. H. Takeno, Tensor **16**, 84 (1965).
347. H. Takeno, Tensor (NS), **21**, 83 (1970).
348. А. З. Петров, Изв. вузов, сер. матем., № 2, 189 (1959).
349. L. Marder, On the existence of cylindrical gravitational waves, King's College, preprint, London, 1957.
350. D. Geissler, H. Treder, Tensor 8, 165 (1958).
351. H. Treder, Ann. d. Phys. **6**, 307 (1960).
352. H. Treder, Schriftenreihe Inst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. **11**, 143 (1962).
353. А. С. Компанеец, ЖЭТФ **37**, 1722 (1959).
354. А. С. Компанеец, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 59.
355. P. C. Vaidya, J. M. Pandya, Proc. Nat. Inst. Sci., India **A26**, 459 (1960).
356. P. C. Vaidya, J. M. Pandya, Proc. Nat. Inst. Sci., India **A27**, 620 (1961).
357. P. C. Vaidya, J. M. Pandya, Progr. Theoret. Phys. **35**, 129 (1966).
358. D. W. Sciama, Proc. Cambridge Philos. Soc. (Math.) 57, 436 (1961).
359. W. B. Bonnor, Zs. Phys. **161**, 439 (1961).
360. W. B. Bonnor, Communs. Math. Phys. **13**, 163 (1969).
361. F. G. Friedlander, Proc. Roy. Soc. **A269**, 53 (1962).
362. F. G. Friedlander, Proc. Roy. Soc. **A279**, 386 (1964).
363. F. G. Friedlander, Proc. Roy. Soc. **A299**, 264 (1967).
364. S. N. Pandey, Rao J. Krishna, Proc. Nat. Inst. Sci. India **A28**, 425 (1962).
365. Rao J. Krishna, P. C. Vaidya, Proc. Cambridge Philos. Soc. **61**, 763 (1965).
366. B. K. Harrison, Phys. Rev. **B138**, 488 (1965).
367. J. Leroy, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **270**, 1078 (1970).
368. В. Д. Захаров, «Тезисы докладов III Межвузовской конференции по проблемам геометрии», Изд-во Казанского университета, 1967, стр. 61.
369. V. B. Johari, Tensor **18**, 330 (1967).
370. M. Misra, Ann. Inst. Henri Poincaré **7**, 245 (1967).
371. M. Misra, Journ. Math. Phys. **9**, 1052 (1968).
372. K. B. Lal, H. Prasad, Tensor **20**, 45 (1969).
373. H. Dăngvu, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **271**, A906 (1970).
374. R. B. Hoffman, Journ. Math. Phys. **10**, 954 (1969).
375. И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ., № 9, 43 (1969).
376. И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ., № 10, 83 (1969).
377. И. М. Дозморов, Изв. вузов, сер. физ. № 11, 121 (1969).
378. P. Szekeres, Nature **228**, 1183 (1970).
379. P. C. Aichelburg, Journ. Math. Phys. **11**, 2458 (1970).
380. W. Bonnor, Nature **181**, № 4617 (1958).
381. W. Bonnor, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique. Les théories relativistes de la gravitation, Royaumont, 1959», Paris, 1962, p. 141.
382. W. Bonnor, Britisch Journ. Appl. Phys. **14**, 555 (1963).

383. F. Pirani, Proc. Roy. Soc. A252, 96 (1959).
384. A. Peres, Nuov. Cim. **11**, 13 (1959).
385. Р. И. Лиас, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 63.
386. A. L. Mehra, P. C. Vaidya, R. S. Kushwaha, Acta Phys. Acad. Scient. Hungaricae **26**, 339 (1969).
387. M. Murenbeeld, J. R. Trollope, Phys. Rev. **D1**, 3220 (1970).
388. И. Шоке-Брюа, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 169.
389. I. Choquet-Bruhat, Communs. Math. Phys. **12**, 16 (1969).
390. P. Dirac, Naturwiss. Rundschau **13**, 165 (1960).
391. Б. Т. Вавилов, Изв. вузов, сер. физ., № 2, 73 (1959).
392. М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 64.
393. М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт, ЖЭТФ **42**, 163 (1962).
394. M. Carmeli, Phys. Rev. **158**, 1243 (1967).
395. F. I. Cooperstock, Phys. Rev. **163**, 1368 (1968).
396. W. Bonnor, Zs. Phys. **177**, 240 (1964).
397. В. А. Фок, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique. Les théories relativistes de la gravitation, Royaumont, 1959», Paris, 1962, p. 137.
398. L. Infeld, R. Michalska-Trautman, Ann. of Phys. 55, 561 (1969).
399. A. Papapetrou, Nucl. Phys. 57, 319 (1964).
400. A. Papapetrou, Ann. Inst. Henri Poincaré **A1**, 117 (1964).
401. A. Papapetrou, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Paris, 1967», Paris, 1969, p. 201.
402. M. A. Tonnela, Compt. Rend. Acad. Sci. Colon. **261**, 2165 (1965).
403. M. A. Tonnela, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique. Paris, 1967», Paris, 1969, p. 73.
404. H. J. Treder, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique. Paris, 1967», Paris, 1969, p. 191.
405. F. I. Cooperstock, D. J. Booth, Phys. Rev. **187**, 1796 (1969).
406. В. Унт, Изв. АН Эст. ССР, XVIII (физ., матем.), 170 (1969).
407. V. Unt, A combined Bondi and approximation method in general relativity. II. The general case. Acad. Sci. Estonian SSR, Inst. Phys. and Astron, preprint, 1969.
408. F. J. Zerilli, Journ. Math. Phys. **11**, 2203 (1970).
409. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ **42**, 577 (1962).
410. K. Kroki, Indian Journ. Phys. 38, 190 (1964).
411. S. Mavrides, Nuov. Cim. **A45**, 859 (1966).
412. С. Мавридес, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 133.
413. J. Synge, Quart. Appl. Math. **26**, 153 (1968).

414. В. К. Бергер, «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 4, Атомиздат, 1970, стр. 74.
415. К. П. Станюкович, Гравитационное поле и элементарные частицы, «Наука», 1965.
416. К. П. Станюкович, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 103.
417. К. П. Станюкович, Вестник МГУ, физ., астрон., № 5, 71 (1961).
418. К. П. Станюкович, Вестник МГУ, физ., астрон., № 1, 78 (1962).
419. К. П. Станюкович, Вестник МГУ, физ., астрон., № 2, 17 (1968).
420. B. De Witt, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique. Les théories relativistes de la gravitation, Royaumont, 1959», Paris, 1962, p. 335.
421. L. Halpern, B. Laurent, Nuov. Cim. 33, 728 (1964).
422. J. Weber, Phys. Rev. 117, 306 (1960) (имеется перевод: «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961, стр. 446).
423. J. Weber, «Rendiconti della Scuola internationale fisica nucleare „Enrico Fermi"», New York— London, 1962, p. 116.
424. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 17, 1228 (1966).
425. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 18, 498 (1967).
426. J. Weber, Phys. Today 21, 34 (1968).
427. J. Weber, «Contemporary Physics, Trieste Symposium, 1968», v. 1, Vienna, 1969, p. 533.
428. J. Weber, Lett. Nuov. Cim. 4, 653 (1970).
429. J. Weber, Phys. Rev. Lett. 25, 179 (1970).
430. В. Б. Брагинский, Г. И. Рукман, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 133.
431. В. Б. Брагинский, Г. И. Рукман, Письма ЖЭТФ 41, 304 (1961).
432. В. Б. Брагинский, ЖЭТФ 44, 1562 (1963).
433. В. Б. Брагинский, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 205.
434. В. Б. Брагинский, Физические эксперименты с пробными телами, «Наука», 1970.
435. М. Е. Герценштейн, «Тезисы и программа 1-й Советской гравитационной конференции», Изд-во МГУ, 1961, стр. 62.
436. М. Е. Герценштейн, В. И. Пустовойт, ЖЭТФ 43, 605 (1962).
437. В. И. Башков, «Гравитация и теория относительности», вып. 2, Изд-во Казанского университета, 1965, стр. 107.
438. В. И. Башков, «Гравитация и теория относительности», вып. 6, Изд-во Казанского университета, 1969, стр. 72.
439. В. Н. Мироновский, Астрон. журн. 42, 107 (1965).
440. Л. И. Слабкий, «GR-5. Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности», Изд-во Тбилисского университета, 1968, стр. 211.
441. G. Dautcourt, Astrophys. Lett. 3, 15 (1969).
442. G. Wick, New Sci. 48, 122 (1970).
443. G. Papini, Lett. Nuov. Cim. 4, 1027 (1970).

444. D. Boccaletti, V. de Sabbata, P. Fortini, C. Gualdi, Nuov. Cim. **B70**, 129 (1970).
445. W. A. Fowler, Rev. Mod. Phys. **36**, 545 (1964) (имеется перевод: «Гравитация и топология», «Мир», 1966, стр. 265).
446. K. S. Thorne, «Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Paris, 1967», Paris, 1969, p. 73.
447. S. Weinberg, «Contemporary Physics, Trieste Symposium, 1968», v. 1, Vienna, 1969, p. 559.
448. P. Kafka, Phys. Unserer Zeit **1**, 186 (1970).
449. D. W. Sciama, Nature **224**, 1263 (1969).
450. W. J. Kaufmann, Nature **227**, 157 (1970).
451. P. C. Peters, Phys. Rev. **D1**, 1559 (1970).
452. K. S. Sastry, S. M. Alladin, Astrophys. and Space Sci. **7**, 261 (1970).
453. S. Chandrasekhar, Phys. Rev. Lett. **24**, 611 (1970).
454. S. Chandrasekhar, Astrophys. Journ. **161**, 561 (1970).
455. S. Chandrasekhar, Astrophys. Journ. **161**, 571 (1970).
456. Z. F. Ezawa, Journ. Phys. Soc. Japan **28**, 1576 (1970).
457. W. Y. Chau, Nature **228**, 655 (1970).
458. W. Y. Chau, R. N. Henriksen, Astrophys. Journ. **161**, L137 (1970).
459. Л. Я. Арифов, Изв. вузов, сер. физ., № 3, 32 (1967).
460. M. Krzywobolocki, Acta Phys. Acad. Sci. Hungaria **23**, 193 (1967).
461. Н. В. Мицкевич, Труды УДН, XLIV, вып. **4**, 137 (1969).
462. А. З. Петров, «Современные проблемы гравитации. Труды 2-й Советской гравитационной конференции», Изд-во Тбилисского университета, 1967, стр. 12.
463. H. Bondi, Phys. Blätt. **26**, 352 (1970).
464. H. Bondi, Phys. Blätt. **26**, 404 (1970).
465. А. А. Водяницкий, Ф. А. Диманштейн, Украинский физический журнал **13**, 1403 (1968).

Захаров Валерий Дмитриевич

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

М., 1972 г., 200 стр.

Редактор *В. Н. Захаров.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Л. Н. Боровина.*

Сдано в набор 29/X 1971 г. Подписано к печати 28/I 1972 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 6,25. Условн. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 11,01 Тираж 5800 экз. Т-01531. Цена книги 69 коп. Заказ 2992

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10