

Л. К. ЗАРЕМБО
В. А. КРАСИЛЬНИКОВ

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ АКУСТИКУ

ЗВУКОВЫЕ
И УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ
БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

АННОТАЦИЯ

Данная книга представляет первый опыт обобщения большого количества работ в области нелинейной акустики — области, промежуточной между линейной акустикой и ударными волнами. В ней рассмотрено распространение интенсивных упругих волн в газах, жидкостях и твердых телах, радиационное давление, акустическое течение, кавитация, аэродинамическая генерация шума и термоакустика. Наряду с теорией приводятся основные экспериментальные результаты, а также некоторые экспериментальные методы исследования указанных нелинейных явлений.

Книга рассчитана на студентов старших курсов университетов, аспирантов, инженеров и физиков-экспериментаторов, специализирующихся и работающих в области акустики и гидроакустики, гидродинамики, теории упругости и физики твердого тела.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	9

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1. Уравнения гидродинамики в эйлеровых координатах	15
§ 2. Уравнения в переменных Лагранжа	25
§ 3. Энергия звуковых волн и поток звуковой энергии	30
§ 4. Слабые нелинейные взаимодействия	38
а) Исходные уравнения в методе последовательных приближений	39
б) Три моды возмущений	41
в) Нелинейные взаимодействия	43
Литература	47

ГЛАВА 2

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ. ИДЕАЛЬНАЯ СРЕДА

§ 1. Общие замечания	48
§ 2. Метод малого параметра	56
§ 3. Решение Римана для плоской волны. Простые волны	60
§ 4. Решение Ирншоу задачи об излучении простой волны конечной амплитуды колеблющимся поршнем	68
§ 5. Немонохроматическая плоская волна	81
§ 6. Отражение волн конечной амплитуды. Стоячие волны конечной амплитуды	84
§ 7. Рассеяние звука на звуке	90
Литература	96

ГЛАВА 3

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ.
ВЯЗКАЯ ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ СРЕДА

§ 1. Метод малого параметра	98
§ 2. Плоские волны	102
а) Малые числа Рейнольдса	102
б) Средние числа Рейнольдса	104
в) Большие числа Рейнольдса	107
§ 3. Пилообразные волны	110
§ 4. Поглощение волн	112
§ 5. Неплоские волны	123
а) Сферические волны	124
б) Цилиндрические волны	126
§ 6. Распространение волн конечной амплитуды в релаксирующих средах	129
Литература	136

ГЛАВА 4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭФФЕКТОВ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

§ 1. Искажение и взаимодействие волн в газах и жидкостях	139
§ 2. Определение нелинейных параметров	161
§ 2. Поглощение волн конечной амплитуды	168
Литература	174

ГЛАВА 5

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

§ 1. Радиационные силы в свободном пространстве	178
а) Радиационная сила по Ланжевену — Бриллюэну	180
б) Рэлеевское радиационное давление	186
§ 2. Радиационное давление на препятствия	187
а) Радиационное давление на малые частицы	190
б) Радиационное давление на препятствия, размеры которых больше длины волны или сравнимы с ней	193
в) Рэлеевское давление в стоячей волне	199
§ 3. Экспериментальные методы определения радиационного давления	200
Литература	205

ГЛАВА 6

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Общие замечания	207
§ 2. Акустическое течение в плоском пограничном слое, вызываемое стоячими звуковыми волнами	210
§ 3. Рэлеевское течение между плоскостями, вызванное стоячей волной. Течение в трубке Кундта	214
§ 4. Течение около препятствий	219
§ 5. Общая теория стационарного акустического течения во втором приближении	222
§ 6. Течение в свободном звуковом поле (экартовское течение)	228
§ 7. Экспериментальные методы и результаты исследования течений	234
§ 8. Измерение поглощения ультразвука по скорости экартовского течения	243
Литература	247

ГЛАВА 7

ЗВУКОВАЯ КАВИТАЦИЯ

§ 1. Прочность жидкостей на разрыв	250
§ 2. Теория роста и захлопывания кавитационных полостей	259
§ 3. Экспериментальные результаты	268
а) Кавитационный порог	268
б) Шумы кавитации	275
в) Исследование динамики кавитационного процесса	277
г) Химическое действие кавитации и звуколюминесценция	280
д) Дегазация	281
Литература	283

ГЛАВА 8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 1. Общие замечания	286
§ 2. Основы нелинейной теории упругости	289
а) Деформации	289
б) Напряжения	293

в) Внутренняя энергия изотропного деформированного твердого тела. Обобщенный закон Гука. Уравнения движения	294
г) Физическая нелинейность изотропных твердых тел	299
д) Начала нелинейной теории упругости кристаллов	309
§ 3. Нелинейная теория распространения и взаимодействия упругих волн в твердых телах	312
а) Взаимодействие волн, распространяющихся в одном направлении	312
б) Взаимодействие волн при их пересечении (комбинационное рассеяние звука на звуке)	319
§ 4. Экспериментальное исследование искажения и взаимодействия ультразвуковых волн в твердых телах	333
Литература	347

ГЛАВА 9

ПОЛУЧЕНИЕ МОЩНЫХ ЗВУКОВЫХ И УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. Искусственные источники (генераторы) мощного звука в газах	351
§ 2. Получение интенсивного ультразвука в жидкостях	354
а) Факторы, ограничивающие мощность piezoelectric преобразователей	356
б) Экспериментальные работы по получению интенсивных ультразвуков	358
в) «Предельная» интенсивность плоских piezoelectric излучателей	359
г) Получение интенсивного ультразвука с помощью фокусировки	361
§ 3. Получение интенсивного звука и ультразвука в твердых телах	366
Литература	374

ГЛАВА 10

ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ В ОТСУТСТВИЕ ГРАНИЦ

§ 1. Исходные положения и уравнения	376
§ 2. Излучение точечного источника (монополя), диполя и квадруполья,	383

§ 3. Генерация шума турбулентностью	389
§ 4. Спектр шума, излучаемого изотропной турбулентностью	397
§ 5. Шум потока при учете его средней скорости	402
§ 6. Излучение шума потоком при числах Маха, больших единицы	406
§ 7. Экспериментальная проверка теорий генерации шума турбулентным потоком (эксперименты со струями)	411
Литература	422

ГЛАВА 11

АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ПРИ НАЛИЧИИ В ПОТОКЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 1. Влияние твердых границ на генерацию звука потоком. Общая теория	424
§ 2. Вихревой звук и звук вращения	428
§ 3. Краевой тон	436
§ 4. Шум турбулентного пограничного слоя	442
Литература	463

ГЛАВА 12

ТЕРМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА (АЭРОТЕРМОАКУСТИКА)

§ 1. Генерация звука тепловыми источниками	466
§ 2. Звуковые волны в трубе, заполненной движущимся газом	473
§ 3. Вибрационное горение. Граничные условия на теплоподводе	480
§ 4. Условия возбуждения термических автоколебаний	488
§ 5. Явление Рийке	494
§ 6. Некоторые примеры вибрационного горения. Автоколебания в жидкостных реактивных двигателях	507
Литература	518

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы наблюдается усиленный интерес к различным нелинейным явлениям в акустике. Целый ряд работ в этой области был выполнен за последнее десятилетие как у нас, так и за рубежом. По нашему мнению, настала уже пора, когда весь этот материал должен быть изложен с единой точки зрения. В какой мере это удалось сделать авторам, мы предоставляем судить читателю.

При написании этой книги мы встретились с рядом трудностей, связанных в первую очередь с тем, что некоторые вопросы нелинейной акустики трактуются в разных работах весьма противоречиво и для проведения какой-либо определенной точки зрения зачастую не хватает ни экспериментальных, ни теоретических результатов. Поскольку эта книга — первый опыт единого изложения различных вопросов нелинейной акустики, некоторые трудности возникли также с определением области, которая может считаться нелинейной акустикой. Вполне допустима точка зрения, что внимание, уделяемое тому или иному вопросу в книге, не совсем пропорционально его значимости; это обстоятельство в значительной мере определилось интересами авторов, длительное время работавших в области нелинейной акустики.

В книге наряду с теорией тех или иных нелинейных явлений приводятся основные экспериментальные результаты, а также, хотя и весьма кратко, специфика методической стороны эксперимента.

Имея в виду указанные трудности, мы не надеемся избежать некоторых неточностей и, возможно, ошибок и были бы признательны всем, взявшим на себя труд указать их.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

В акустике обычно предполагается, что звуковые возмущения (плотности, давления) малы по сравнению с соответствующими параметрами в невозмущенном состоянии. Это позволяет линеаризовать нелинейные уравнения.

Чрезвычайно обширный круг акустических задач рассматривается в этом линейном приближении. Вопрос о том, в какой мере получаемые при этом теоретические результаты соответствуют явлениям, наблюдаемым в экспериментальных условиях, не совсем прост и в каждом случае, вообще говоря, должен подвергаться анализу. В качестве простейшего примера можно привести задачу о распространении монохроматической плоской продольной волны в неограниченной среде. Более ста лет назад было показано, что такая волна при распространении в недиссипативной среде меняет форму профиля так, что ее передний фронт становится все более и более крутым и, наконец, на некотором расстоянии образуется разрыв — волна переходит в периодическую слабую ударную волну. Это расстояние образования разрыва обратно пропорционально амплитуде, и волна даже малой амплитуды все же на конечном расстоянии превратится в периодическую слабую ударную волну.

Из-за таких накапливающихся эффектов акустика недиссипативных сред в значительной своей части является принципиально нелинейной (переход к линейной акустике может быть сделан при специальном адиабатическом уравнении, которое не соответствует ни одному из известных веществ).

В реальных условиях, однако, всегда имеются (может быть и не очень большие) вязкость и теплопроводность

среды; убыль плотности энергии в волне может происходить также из-за геометрических условий распространения волны (в случае, например, цилиндрических или сферических расходящихся волн). Эти процессы замедляют развитие различных нелинейных эффектов, причем влияние этих процессов может быть при определенных условиях настолько сильным, что нелинейными эффектами практически можно пренебречь. Следующая причина, которая в существенной мере уменьшает влияние нелинейных эффектов,— это дисперсия скорости звука. В простейшем случае бегущей волны, когда искажение формы профиля волны может быть интерпретировано как появление гармоник, дисперсия скорости приводит к тому, что фазовые соотношения для гармоник непрерывно меняются в процессе распространения волны, а, следовательно, меняются и условия передачи энергии в более высокие гармоники; в условиях сильной дисперсии развитие нелинейных эффектов может свестись к минимуму. Условия сильной дисперсии *) могут реализоваться в акустике при распространении звука в сплошных твердых телах, хотя понятие дисперсии здесь должно быть несколько расширено. Дисперсия скорости может определяться геометрическими условиями распространения (в волноводах, в резонаторах некоторых видов) или типом волн (например, изгибных волн в твердых ограниченных телах).

Выше речь шла о проблеме нелинейной акустики, которая может быть охарактеризована как взаимодействие звука со звуком. В линейном приближении, как известно, выполняется принцип суперпозиции и такого взаимодействия нет. Этот круг вопросов ведет свое начало еще с работ Стокса в середине прошлого столетия, однако теоретическое исследование распространения волн конечной амплитуды в диссипативных средах и экспериментальное исследование акустических нелинейных эффектов в жидкостях и твердых телах начали проводиться только в последнее десятилетие.

*) Смысл распространения волн в диспергирующих средах имеют определяющее значение для нелинейной оптики. Они подробно рассмотрены в монографии Ахманова С. А. и Хохлова Р. В. «Проблемы нелинейной оптики», Изд-во Института научной информации АН СССР, М., 1964.

Проблема взаимодействия звука со звуком и вообще проблема распространения нелинейных волн, интерес к которой за последнее время бурно растет в связи с тем, что мощности как ультразвуковых, так и когерентных электромагнитных волн в настоящее время уже достигли тех уровней, при которых линейное приближение во многих случаях не дает удовлетворительных результатов, является одной из основных в нелинейной акустике. Она весьма обширна, включает в себя ряд вопросов (искажение и взаимодействие волн, особенности распространения пилообразных волн «нелинейное» поглощение и т. д. *), и ей отведено значительное место в предлагаемой вниманию читателей книге. Однако этим не исчерпывается круг вопросов, который должен рассматриваться в нелинейной акустике. В первую очередь это относится к эффектам, вызываемым мощными звуковыми волнами, которые могли бы быть названы вторичными. Из вторичных эффектов в книге основное внимание уделяется акустическим течениям — постоянным вихревым потокам, возникающим в звуковых полях, и звуковой кавитации — образованию в жидкостях полостей под действием отрицательного давления волны. Эти вторичные явления ответственны за ряд эффектов, наблюдающихся в поле мощных звуковых волн; часть из этих эффектов играет существенную роль в области технологического использования мощных ультразвуковых волн.

Если акустическое течение — вихри, порождаемые звуковыми волнами, то возможен в некотором смысле и обратный процесс: порождение звука (точнее — шума) турбулентным потоком. В связи с бурным развитием реактивной техники, а также самолетостроительной техники, где скорости движения все более и более возрастают, исследование проблемы генерации звука турбулентным потоком становится чрезвычайно важным. Можно по-разному относиться к вопросу о том, относится ли эта проблема к нелинейной акустике. Поскольку, однако, нелинейная акустика является частью нелинейной газодинамики, в которой возможны помимо взаимодействия «звук — звук»

*) Часть из этих вопросов обсуждалась в статье авторов (УФН 68, 687, 1959).

также и ряд других взаимодействий, например «звук — завихренность» (акустические течения), «завихренность — звук» (рассеяние звука турбулентным потоком), «завихренность — завихренность» (генерация шума турбулентным потоком), нам казалось целесообразным рассмотреть и те явления, где звук является, если так можно сказать, вторичным явлением. Многие механизмы генерации звука потоком или случаи теплового возбуждения звуковых колебаний допускают физически прозрачную трактовку об обратной акустической связи и возникающих при этом автоколебаниях; нелинейный характер такого рода явлений очевиден. Поэтому в книгу вошли разделы, посвященные той области акустики, которая иногда называется аэротермоакустикой; рассмотрена также генерация звука свободным турбулентным потоком и генерация звука при наличии препятствий в ламинарном и турбулентном потоках.

Если проблемы взаимодействия звука со звуком, генерации звука потоком являются типично нелинейными, то относительно квадратичных величин в акустике (таких как плотность энергии, плотность потока энергии, радиационное давление, в некоторой мере это также может быть отнесено к акустическому течению в диссипативной среде) необходимо сделать определенные замечания.

Указанные ранее существенно нелинейные эффекты в линейном приближении просто не могут быть получены, соответствующие решения для линейной среды с линейными уравнениями движения обращаются в нуль. Этого нельзя сказать о квадратичных величинах; они имели бы конечное значение и в линейном приближении, если бы не возникали сомнения в корректности такого определения квадратичных величин. Можно говорить о необходимости продолжения решения всех без исключения задач линейной акустики в нелинейную область, однако эта необходимость кажется особенно острой при определении квадратичных величин. В случае квадратичных величин даже в линейной акустике необходимо знать величины второго порядка малости (относительно, скажем, акустического числа Маха, представляющего собой отношение амплитуды скорости смещения в волне к скорости звука).

В книге довольно много места уделяется энергетическим характеристикам волны (плотности энергии, плотности потока энергии) и радиационному давлению. Хотя общие методы и позволяют принципиально определить эти величины с любой степенью точности (и таким образом получить выражения для этих величин в существенно нелинейном случае), конкретные результаты приведены только с использованием величин второго порядка малости и, следовательно, пригодны только для линейной акустики. Поскольку определение таким образом квадратичных величин даже в линейной акустике требует привлечения результатов нелинейной акустики, нам казалось целесообразным включить эти разделы в книгу.

Наряду с нелинейными эффектами в жидкостях и газах в книгу включены нелинейные эффекты в твердых телах. Исследование последних акустическими методами началось в самое последнее время. Полученные результаты могут представить определенный интерес для ряда вопросов физики твердого тела, ибо нелинейные модули третьего порядка, принципиально определяемые таким образом, позволяют вычислить вероятность фонон-фононного взаимодействия, а это взаимодействие играет важную роль в теории затухания звука и теории теплопроводности. Исследование нелинейных эффектов в твердых телах в дальнейшем, возможно, позволит разработать полезные методы исследования различных микроскопических дефектов структуры кристаллических твердых тел.

Исторически развитие механики сжимаемой среды сложилось так, что в значительной мере параллельно и независимо развивались линейная акустика, где возмущения среды предполагались малыми, и теория ударных волн, где возмущения предполагались большими. Эти два практически важных раздела механики сжимаемой среды получили в настоящее время широкое развитие и обобщены в десятках учебников и монографий. Промежуточная же область — область нелинейной акустики — развивалась значительно медленнее. Это связано, с одной стороны, по-видимому с тем, что раньше практические потребности в развитии этой области акустики были меньшими, с другой стороны — с теми математическими трудностями, которые встречаются при решении почти

любой задачи нелинейной акустики. Естественно, что нелинейная акустика начинает еще только складываться как большой самостоятельный раздел акустики. Ее развитие не идет как простое продолжение всех задач линейной акустики в нелинейную область, а, скорее, как исследование тех нелинейных эффектов, которые либо являются определяющими, либо могут оказывать существенное влияние на ход процесса. Достигнутые на этом пути успехи уже в значительной мере изменили давно существовавшие представления о таких акустически «линейных» средах, как жидкости и твердые тела; экспериментальные работы здесь показали, что как жидкости, так и твердые тела имеют довольно большие упругие модули третьего порядка (нелинейную упругость), и при уровнях звука, с которыми приходится сейчас иметь дело, с этим нельзя не считаться.

Однако круг вопросов, рассматриваемых в нелинейной акустике (по сравнению с линейной акустикой), еще недостаточно широк. Можно было бы указать на ряд больших разделов акустики, где не делалось попыток исследования влияния нелинейных эффектов. Следует сказать, что многие из теоретических результатов, приведенных в книге, из-за уже отмечавшихся математических трудностей получены только с точностью до величин второго порядка малости и пригодны только для слабо нелинейных сред (или относительно небольших интенсивностей звука).

В заключение отметим, что результаты нелинейной акустики (полученные даже во втором приближении), как любое более точное решение той или иной задачи, позволяют определить границы применимости линейных приближений. Можно привести ряд примеров (в частности вопрос об интенсивности звука при измерении поглощения в газах и жидкостях), когда эти границы априори могут быть установлены недостаточно точно. Можно предполагать, что с развитием акустической измерительной техники и увеличением точности измерений вопрос о границах применимости линейных приближений будет становиться все более актуальным.

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1. Уравнения гидродинамики в эйлеровых координатах

В нелинейной акустике, являющейся одним из разделов механики сплошных сред, используются уравнения гидродинамики или уравнения теории упругости.

Возможны два способа описания движения частиц сплошной среды. Первый способ, широко распространенный в гидро- и аэродинамике, связан со следующим выбором метода описания движения среды: все величины, характеризующие движение сплошной среды, задаются в координатах неподвижного пространства. Такой выбор независимых переменных был применен впервые Эйлером, и поэтому координаты называют эйлеровыми. Возможен и другой метод выбора независимых переменных: в качестве независимых переменных выбирают начальные координаты какой-либо частицы жидкости в некоторый фиксированный момент времени; в последующее время эта частица перемещается в пространстве, координаты неподвижного пространства являются функциями начальных координат частицы. Этот метод описания движения сплошной среды несколько напоминает метод, используемый в динамике материальной точки, и его связывают с именем Лагранжа, а соответствующие координаты называют лагранжевыми. Лагранжевы координаты широко используются в теории упругости, а также во многих вопросах нелинейной акустики в газах, жидкостях и твердых телах.

Естественно, что законы сохранения массы, количества движения и энергии, так же как выражения для

скорости, плотности и давления, в разных координатах, вообще говоря, будут иметь разный вид.

Отметим одно весьма существенное обстоятельство: если известно преобразование от лагранжевых координат a, b, c к эйлеровым x, y, z

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

то известно движение любой частицы жидкости. Траектория этого движения может быть определена из (1.1), т. е. для того, чтобы были определены правила перехода от одних независимых переменных к другим, необходимо, вообще говоря, решить систему уравнений движения сплошной среды в тех или других координатах. Решая уравнения (1.1) относительно a, b, c , можно найти преобразование от эйлеровых координат к лагранжевым:

$$\left. \begin{aligned} a &= a(x, y, z, t), \\ b &= b(x, y, z, t), \\ c &= c(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Для однозначной разрешимости (1.1) относительно a, b, c нужно, чтобы функциональные определители

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \quad \text{и} \quad D' = \frac{1}{D} = \frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)}$$

не обращались тождественно в нуль или бесконечность.

В дальнейшем нас будут интересовать различные процессы генерации и распространения звука, а также многие из сопутствующих процессов, на которые в той или иной мере может влиять нелинейность уравнений гидродинамики. Как уже отмечалось, одним из наиболее характерных признаков нелинейного характера процесса является взаимодействие различных мод возмущения, возможных в жидкой или газообразной среде. Возмущения могут носить разный характер: изменение массы вещества в единице объема (выпрыскивание массы), завихренность, тепловые возмущения и др. Как будет видно в дальнейшем,

нелинейность гидродинамических уравнений приводит к взаимодействию этих возмущений, что, в свою очередь, приводит к таким типично нелинейным явлениям, как взаимодействие звука со звуком (нарушение характерного для линейной акустики принципа суперпозиции), порождение звука турбулентностью, возбуждение звука нагревом и т. д. Поэтому в этой главе, наряду с основными уравнениями гидродинамики, будут также рассмотрены слабые нелинейные взаимодействия различных видов возмущений, возможных в вязкой теплопроводящей сжимаемой среде.

Из закона сохранения массы в некотором фиксированном относительно неподвижного пространства объеме следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = m, \quad (1.3)$$

где ρ — плотность среды, \mathbf{v} — скорость течения в данной точке среды, m — скорость увеличения массы единицы объема жидкости (источник массы). Уравнение непрерывности может быть также представлено в виде

$$\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla(\ln \rho) + \nabla \mathbf{v} = \frac{m}{\rho}. \quad (1.3a)$$

Уравнение движения (уравнение Эйлера) получаем, приравняв произведение массы единицы объема ρ на ее ускорение $d\mathbf{v}/dt$ силе, действующей на единицу объема:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

где p — давление и \mathbf{F} — объемная сила, действующая на единицу объема. Уравнение движения (1.4) может быть представлено еще так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \mathbf{f}, \quad (1.4a)$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$ — объемная сила, действующая на единицу массы жидкости, w — тепловая функция или энтальпия единицы массы жидкости, $dw = dp/\rho$.

В уравнения (1.3) и (1.4) при заданных m , \mathbf{F} входят пять неизвестных: три компонента вектора скорости \mathbf{v} ,

p и ρ . Одно скалярное уравнение (1.3) и одно векторное (1.4) дают всего четыре скалярных уравнения. Поэтому система (1.3) — (1.4) неполна. Для идеальной среды без вязкости и теплопроводности энтропия во всем пространстве, занятом непрерывно движущейся жидкостью, постоянна (изэнтропическое движение), и внутренняя энергия жидкости изменяется только в результате адиабатического сжатия. Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) для жидкости без вязкости и теплопроводности можно записать в виде

$$du = p \frac{d\rho}{\rho^2}; \quad (1.5)$$

здесь u — внутренняя энергия единицы массы жидкости.

Для идеальной среды без вязкости и теплопроводности изэнтропический характер движения имеет место до тех пор, пока в среде не образовались сильные разрывы, т. е. для всех случаев, которые представляют практический интерес в нелинейной акустике, где будут рассмотрены только слабые разрывы.

Уравнение (1.5) делает систему уравнений (1.3) и (1.4) полной в том случае, когда известна внутренняя энергия системы или, что то же самое, уравнение состояния среды $p = \varphi_1(\rho, T)$ либо $p = \varphi_2(\rho, s)$, где T — абсолютная температура среды, s — энтропия среды. Имея в виду, что в идеальной среде движение изэнтропично, удобнее пользоваться вторым уравнением, принимающим вид $p = p(\rho)$. Для идеального газа $du = c_v dT$, где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, и это уравнение — уравнение Пуассона, имеющее вид:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.6)$$

где p_0 — давление при $\rho = \rho_0$, $\gamma = c_p/c_v$, c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Приведем еще выражение для внутренней энергии и энтальпии единицы массы идеального газа:

$$u = \frac{p_0}{(\gamma - 1) \rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{p_0}{(\gamma - 1) \rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{w}{\gamma}; \quad (1.7)$$

здесь $\gamma \neq 1$. При $\gamma = 1$ имеет $u = w = (p_0/\rho_0) \ln \rho$.

В дальнейшем нам понадобятся выражения для u и w с точностью до величин второго порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{p_0}{(\gamma-1)\rho_0}; & u' &= \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho'; & u'' &= \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho'' + \frac{\gamma-2}{2} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \\ w_0 &= \frac{c_0^2}{\gamma-1}; & w' &= \frac{c_0^2 \rho'}{\rho_0}; & w'' &= \frac{c_0^2 \rho''}{\rho_0} + \frac{\gamma-2}{2} c_0^2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7a)$$

Здесь $c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}$ — квадрат адиабатической скорости звука.

Уравнения (1.6) и (1.3)–(1.4) представляют собой полную систему уравнений для идеального газа. Отметим, что как уравнения (1.3)–(1.4), так и уравнение (1.6) при $\gamma \neq 1$ нелинейны.

В том случае, когда среда не подчиняется уравнению идеального газа, можно воспользоваться тем, что в нелинейной акустике нас будут интересовать небольшие отклонения плотности и давления от равновесных значений ρ_0 и p_0 . Тогда, разлагая уравнение состояния $p = p(\rho)$ в ряд по малому объемному сжатию $\mu = \frac{p-p_0}{\rho_0} \ll 1$, получим:

$$p - p_0 = \rho_0 c_0^2 \mu + \frac{\rho_0^2}{2} \left. \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \mu^2 + \dots, \quad (1.8)$$

где c^2 — квадрат адиабатической местной скорости звука.

Безразмерная величина $\left. \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}$ определяет с точностью до квадратичных членов нелинейные свойства среды. Хотя установившейся терминологии здесь еще нет, мы в дальнейшем будем называть нелинейным параметром среды величину

$$n = 1 + \left. \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}. \quad (1.9)$$

Из (1.6) следует, что для идеального газа нелинейный параметр $n = \gamma$.

Для жидкостей более или менее строго теоретически обоснованного уравнения состояния нет. Во многих практических вопросах, где приходится учитывать сжимаемость жидкостей, в качестве адиабатического используется

эмпирическое уравнение Тэта, имеющее вид, аналогичный уравнению Пуассона:

$$p = P_* \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma, \quad (1.10)$$

где P_* — давление при $\rho = \rho_0$, Γ — параметр, характеризующий отклонение адиабатической сжимаемости жидкости от закона Гука. Как P_* , так и Γ являются эмпирическими постоянными. Из экспериментальных результатов следует, что величина P_* имеет порядок нескольких тысяч атмосфер, а Γ для разных жидкостей изменяется от ~ 4 до 12 (см. табл. 4 на стр. 166, где приведены значения $n = \Gamma$ для жидкостей, измеренные акустическими методами). Величина P_* , определяющая адиабатический модуль объемной упругости жидкости,

$$K_{\text{ад}} = \rho_0 \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \Gamma P_*,$$

часто называется внутренним давлением в жидкости, обусловленным взаимодействием молекул (аналогичная величина для идеального газа, где, как известно, молекулы предполагаются невзаимодействующими, — атмосферное давление).

Вопрос о том, в какой мере нелинейный параметр второго приближения n , равный γ или Γ , пригоден для реальных газов и жидкостей при больших сжатиях, эквивалентен вопросу о том, насколько эти реальные среды хорошо следуют уравнению идеального газа и уравнению Тэта, и не будет здесь рассматриваться. Отметим, однако, что величина Γ для воды, определенная при изучении подводных взрывов, т. е. для ударных волн, хорошо согласуется с измеренной при весьма слабых акустических волнах (см. гл. 4, § 3).

Поскольку (1.6) и (1.10) имеют одинаковый вид, в дальнейшем не будет делаться различия между жидкостями и газами, и в приведенных далее формулах, за исключением некоторых случаев, где это будет оговорено, можно считать $\gamma \equiv \Gamma \equiv n$. Для жидкостей вклад нелинейности уравнения состояния в различные акустические нелинейные эффекты весьма существен. Это следует осо-

бо подчеркнуть, так как еще до сравнительно недавнего времени предполагалось, что из-за чрезвычайно большого внутреннего давления по сравнению с достижимыми звуковыми давлениями жидкости хорошо следуют линейному закону Гука ($n = 1$). Исследование сначала ударных волн, а затем и акустических волн конечной амплитуды показало, что это не так.

Поскольку изменение давления с плотностью в волне происходит по (1.6), (1.8) или (1.10), эти уравнения позволяют определить связь этих величин в акустической волне. В дальнейшем нам потребуются эти соотношения с точностью до величин второго порядка малости; приведем их:

$$\left. \begin{aligned} p' &= c_0^2 \rho', \\ p'' &= c_0^2 \rho'' + \frac{(\gamma - 1) c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6a)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{p'}{c_0^2}, \\ \rho'' &= \frac{1}{c_0^2} \left[p'' - \frac{\gamma - 1}{2\rho_0 c_0^2} p'^2 \right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.6b)$$

здесь штрихи обозначают порядок малости величин.

Уравнения (1.3) и (1.4) могут быть записаны также в тензорной форме; при $m = 0$ и $F = 0$ они имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0; \quad (1.11)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} = - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}; \quad (1.12)$$

здесь производится суммирование по дважды входящим индексам. Легко видеть, что из этих уравнений следует

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0, \quad (1.13)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Уравнение (1.13) дает закон сохранения импульса единицы объема жидкости в идеальной среде. Представляя

(1.13) в виде интеграла по некоторой фиксированной в неподвижном пространстве области V , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + \oint_S T_{ij} n_j dS = 0, \quad (1.14)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем V , а тензор T_{ij}

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.14) дает в интегральной форме закон сохранения импульса: изменение импульса в фиксированном объеме неподвижного пространства определяется потоком импульса через поверхность, ограничивающую этот объем.

Поскольку изменение импульса определяет силу, действующую на поверхность выделенного объема, то компоненты этой силы

$$F_i = - \oint_S T_{ij} n_j dS. \quad (1.16)$$

Поэтому иногда тензор плотности потока импульса T_{ij} называют также тензором натяжения.

Рассмотрим далее закон сохранения энергии. Энергия единицы массы жидкости состоит из кинетической энергии $v^2/2$ и потенциальной, равной для идеальной жидкости внутренней энергии u . Таким образом, полная энергия единицы объема (плотность энергии), фиксированного относительно неподвижного пространства,

$$E = \rho \frac{v^2}{2} + \rho u. \quad (1.17)$$

Можно показать, пользуясь уравнениями непрерывности (1.3) — (1.5) и считая, как и ранее, что m и \mathbf{F} равны нулю, что изменение со временем энергии единицы объема определяется уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \nabla \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right], \quad (1.18)$$

или, интегрируя по объему, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV = - \oint_S \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \mathbf{n} dS, \quad (1.19)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , ограничивающей объем V . Вектор

$$\mathbf{J} = \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \quad (1.20)$$

определяет плотность потока энергии.

В вязкой теплопроводящей среде уравнение непрерывности имеет такой же вид (1.3), как и в идеальной среде без вязкости и теплопроводности. В уравнении движения должны быть учтены вязкие силы. Уравнение движения вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right] = - \nabla p + \eta \Delta v + \left(\eta' + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla v + \rho f, \quad (1.21)$$

где η — коэффициент сдвиговой вязкости, а η' — объемной вязкости. Пользуясь (1.3) и тождеством

$$\Delta v = \nabla (\nabla v) - \nabla \times (\nabla \times v),$$

уравнение (1.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + v \nabla \rho v + \rho (v \nabla) v = \\ = \nabla \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \nabla v - p \right] - \eta \nabla \times (\nabla \times v) + \rho f. \end{aligned} \quad (1.22)$$

В вязкой теплопроводящей среде энтропия не остается постоянной и внутренняя энергия единицы объема изменяется не только в результате сжатия, но также из-за роста энтропии. Последний обусловлен диссипативными процессами, связанными как с теплопроводностью, так и с вязкостью. Уравнение, определяющее рост энтропии,

часто называемое уравнением переноса тепла, имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \\ = \frac{\eta}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} (\nabla v) \right]^2 + \eta' (\nabla v)^2 + \kappa \nabla \nabla T + Q, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где T — абсолютная температура, κ — коэффициент теплопроводности, s — энтропия единицы массы среды, Q — скорость возрастания тепла единицы объема жидкости.

В систему уравнений вязкой жидкости (1.3), (1.21—22), (1.23) при заданных f и Q помимо неизвестных ρ , ρ , \mathbf{v} входят еще s и T , т. е. всего семь неизвестных. Система уравнений (1.3), (1.21—22), (1.23) дает всего пять уравнений, т. е. эта система для полноты должна быть дополнена еще двумя уравнениями. В частности, может быть использовано первое начало термодинамики

$$T ds = du + p \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (1.24)$$

где вид внутренней энергии u и энтропии s определяется свойствами среды. Для единицы массы идеального газа, например,

$$\left. \begin{aligned} du &= c_v dT = \frac{1}{\gamma-1} d \left(\frac{p}{\rho} \right), \\ ds &= c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Таким образом, для идеального газа или жидкости Тэта, если m , f и Q — известные функции координат и времени, имеется восемь уравнений [(1.3), три уравнения (1.21—22), (1.23) — (1.25)] для восьми неизвестных ρ , ρ , \mathbf{v} , T , s , u , т. е. эта система является полной.

Рассмотрим далее тензор плотности потока импульса в вязкой среде. В вязкой среде помимо силы (1.16) возникают еще вязкие силы, приводящие к необратимой передаче импульса от мест с большей скоростью к местам с меньшей скоростью. Это приводит к тому, что вместо (1.15) тензор плотности потока импульса имеет вид:

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ik}; \quad (1.26)$$

член σ'_{ik} определяет необратимый перенос импульса и имеет вид:

$$\sigma_{ik}' = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla v \right) + \eta' \delta_{ik} \nabla v; \quad (1.26a)$$

здесь производится суммирование по дважды входящим индексам.

Уравнение сохранения импульса для вязкой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ik}') = 0. \quad (1.27)$$

§ 2. Уравнения в переменных Лагранжа

Выше все уравнения были записаны в эйлеровой системе координат. В нелинейной акустике для задания граничных условий удобно пользоваться лагранжевой системой переменных.

Закон сохранения массы некоторого малого объема жидкости, форма которого во время течения жидкости изменяется, приводит к уравнению непрерывности:

$$\rho \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \rho_0, \quad (1.28)$$

где ρ_0 — начальная плотность, ρ — плотность *). Подчеркнем, что в отличие от уравнения непрерывности в эйлеровых координатах здесь рассматривается «жидкий объем». Уравнения движения для среды без вязкости и

*) Здесь и далее в этом параграфе индексы у координат означают соответствующие производные. Так,

$$x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \quad x_{tt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

теплопроводности имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{tt}x_a + y_{tt}y_a + z_{tt}z_a + \frac{p_a}{\rho} &= 0, \\ x_{tt}x_b + y_{tt}y_b + z_{tt}z_b + \frac{p_b}{\rho} &= 0, \\ x_{tt}x_c + y_{tt}y_c + z_{tt}z_c + \frac{p_c}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

В акустике часто используется форма уравнений в переменных Лагранжа, где в качестве зависимых переменных берутся смещения ξ , η , ζ из начального положения a , b , c . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \xi(a, b, c, t), \\ y &= b + \eta(a, b, c, t), \\ z &= c + \zeta(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

В этих переменных уравнение непрерывности (1.28) имеет вид:

$$\rho \begin{vmatrix} (1 + \xi_a) & \eta_a & \zeta_a \\ \xi_b & (1 + \eta_b) & \zeta_b \\ \xi_c & \eta_c & (1 + \zeta_c) \end{vmatrix} = \rho_0, \quad (1.31)$$

а уравнения движения (1.29) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{tt}(1 + \xi_a) + \eta_{tt}\eta_a + \zeta_{tt}\zeta_a + \frac{p_a}{\rho} &= 0, \\ \xi_{tt}\xi_b + \eta_{tt}(1 + \eta_b) + \zeta_{tt}\zeta_b + \frac{p_b}{\rho} &= 0, \\ \xi_{tt}\xi_c + \eta_{tt}\eta_c + \zeta_{tt}(1 + \zeta_c) + \frac{p_c}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

В многомерном случае уравнения в переменных Лагранжа сложны и поэтому редко используются. Простой вид они имеют в смещениях для одномерного плоского движения. Из (1.31) имеем уравнение непрерывности

$$\rho(1 + \xi_a) = \rho_0. \quad (1.33)$$

Уравнение движения из (1.32) с учетом (1.33):

$$\rho_0 \xi_{tt} + p_a = 0. \quad (1.34)$$

Таким образом, точные уравнения в переменных Лагранжа для одномерного плоского движения в невязкой среде имеют более простой вид, чем соответствующие уравнения в переменных Эйлера.

В том случае, когда процесс в волне может быть представлен в виде $p = p(\rho)$, из (1.33) получим, имея в виду, что $p_a = c^2 \rho_a$:

$$p_a = -\rho_0 c^2 \frac{\xi_{aa}}{(1 + \xi_a)^2}. \quad (1.35)$$

Подставляя (1.35) в (1.34), получим:

$$\xi_{tt} - \left(\frac{c}{1 + \xi_a}\right)^2 \xi_{aa} = \xi_{tt} - \left(\frac{\rho c}{\rho_0}\right)^2 \xi_{aa} = 0. \quad (1.36)$$

Это уравнение отличается от обычного волнового уравнения тем, что скорость распространения возмущения определяется местной скоростью звука и сжатием. Скорость распространения конечного возмущения в лагранжевых координатах, как это будет видно в дальнейшем [см. (2.28)], $u_L = \rho c / \rho_0$. В том случае, когда среда подчиняется уравнению Пуассона (1.6), уравнение движения имеет вид:

$$\xi_{tt} - \frac{c_0^2}{(1 + \xi_a)^{\gamma+1}} \xi_{aa} = 0. \quad (1.37)$$

При $\xi_a \ll 1$ разложение в ряд (1.37) дает:

$$\xi_{tt} - c_0^2 \left[1 - (\gamma + 1) \xi_a + \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}{2!} \xi_a^2 - \right. \\ \left. - \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2)(\gamma + 3)}{3!} \xi_a^3 + \dots \right] \xi_{aa} = 0. \quad (1.38)$$

В дальнейшем нам неоднократно потребуются приближенные выражения плотности и давления в лагранжевых

координатах через производную от смещения при одномерном плоском движении. Величины плотности и давления могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' + \rho'' + \dots; \\ p &= p_0 + p' + p'' + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

где ρ_0 и p_0 — значения плотности и давления в невозмущенной среде, а штрихами отмечены величины соответствующего порядка малости. Из (1.33) следует:

$$\rho' = -\rho_0 \xi_a'; \quad (1.40)$$

$$\rho'' = -\rho_0 \xi_a'' + \rho_0 (\xi_a')^2; \quad (1.41)$$

$$\dots : \dots$$

Для давления из уравнения Пуассона (1.6):

$$p' = -\gamma p_0 \xi_a'; \quad (1.42)$$

$$p'' = -\gamma p_0 \xi_a'' + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} p_0 (\xi_a')^2; \quad (1.43)$$

$$\dots : \dots$$

Как отмечалось выше, для точного перехода от лагранжевых координат к эйлеровым необходимо решение уравнений. В нелинейной акустике часто пользуются приближенным переходом. Для одномерного случая, если задана некоторая функция $L(x, t)$ в лагранжевых координатах, а смещение равно ξ , то, очевидно,

$$L(x, t) = E(x + \xi, t) = E(x, t) + \xi E_x + \frac{1}{2} \xi^2 E_{xx} + \dots, \quad (1.44)$$

где $E(x, t)$ — значение этой же функции в координатах Эйлера. Обратное преобразование имеет вид:

$$E(x, t) = L(x - \xi, t) = L(a, t) - \xi L_a + \frac{1}{2} \xi^2 L_{aa} + \dots \quad (1.45)$$

Эти соотношения удобны в том случае, когда преобразование от одной системы координат к другой делается с точностью до величин второго порядка малости.

Уравнение движения в переменных Лагранжа для вязкой жидкости часто без достаточных оснований представляют по аналогии с (1.22) в виде

$$\rho_0 \xi_{tt} = \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \xi_{at} - p \right]_a. \quad (1.46a)$$

Более тщательно этот вопрос был рассмотрен в работе [1], где уравнение для вязкой теплопроводящей жидкости было получено из уравнений в эйлеровых координатах переходом от эйлеровых координат к лагранжевым. Этот переход был сделан с точностью до величин второго порядка малости по (1.44). Как отмечалось в [1], при этом остается открытым вопрос о том, будут ли коэффициенты вязкости и теплопроводности одинаковыми в лагранжевых и эйлеровых координатах. Здесь приводятся уравнения, для которых эти коэффициенты считались не зависящими от выбора координат. В результате из (1.21) было получено уравнение

$$\rho_0 \xi_{tt} = \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \frac{\xi_{at}}{1 + \xi_a} - p \right]_a, \quad (1.46)$$

отличающееся от (1.46a).

Преобразование уравнения переноса тепла (1.23) дает:

$$\rho_0 u_t + p \xi_{at} = \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \frac{\xi_{at}^2}{1 + \xi_a} + \kappa \left[\frac{T_a}{1 + \xi_a} \right]_a, \quad (1.47)$$

где u — внутренняя энергия. Как видно из (1.46) и (1.47), конвективные члены в переменных Лагранжа исчезли, однако диссипативные члены стали нелинейными. Система уравнений (1.33), (1.46) и (1.47) дает основные уравнения вязкой теплопроводящей среды для плоского движения в лагранжевых переменных. При

$$\frac{4}{3} \eta + \eta' = \kappa = 0$$

из (1.47) следует для идеального газа уравнение Пуассона (1.6). В вязкой, но не теплопроводящей среде распространение звука происходит адиабатически, но неизэнтропически, и из (1.47) для этого случая уравнение (1.6) не следует.

§ 3. Энергия звуковых волн и поток звуковой энергии

Энергия звуковой волны состоит из кинетической и потенциальной энергий. В этом разделе будет рассматриваться среда без вязкости и теплопроводности, в которой, как уже отмечалось, звук распространяется изэнтропически. Энергия — аддитивная функция состояния среды, и обычно пользуются удельными значениями энергии. Плотность энергии, или энергия единицы объема, в эйлеровых координатах дается формулой (1.17). Это, однако, полная энергия единицы объема, включающая также энергию невозмущенной среды. Для определения плотности звуковой энергии в эйлеровых координатах нужно из (1.17) вычесть энергию невозмущенного состояния, что дает:

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho u - \rho_0 u_0, \quad (1.48)$$

где ρ_0 и u_0 — плотность и внутренняя энергия невозмущенной среды. Для газа, следующего уравнению Пуассона, или жидкости Тэта из (1.7) и (1.48) получим плотность звуковой энергии в виде

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma - 1 \right] = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p - p_0}{\gamma - 1}. \quad (1.49)$$

Плотность потока звуковой энергии (интенсивность звука) при этом определяется из (1.20). Для газа, следующего уравнению Пуассона, или жидкости Тэта плотность потока звуковой энергии получаем из (1.7) и (1.20):

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \rho v \left[\frac{v^2}{2} + \frac{c_0^2}{(\gamma - 1)} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\gamma - 1} \right] = v \left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right] = \\ &= \frac{\rho c^2 v}{\gamma - 1} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] = v \left[E + p + \frac{p_0}{\gamma - 1} \right]. \quad (1.50) \end{aligned}$$

Эти выражения для плотности звуковой энергии и плотности потока звуковой энергии являются точными, коль скоро все входящие параметры звукового поля точны и берутся в эйлеровой системе координат. Отметим, что в

(1.49) и (1.50) входят по крайней мере два параметра, характеризующих звуковое поле. Выражение этих величин через один параметр становится возможным после решения соответствующей задачи о распространении звука.

Возможно и другое определение плотности звуковой энергии, данное Н. Н. Андреевым [2] и рассмотренное в ряде последующих работ [3—6]. Рассмотрим «жидкий» объем, перемещающийся со средой. Масса этого «жидкого» объема не меняется, в то время как при исходном объеме, равном единице, и начальной форме, например, в виде куба, мгновенный геометрический объем может иметь произвольную величину и форму. По (1.7) внутренняя энергия единицы массы идеального газа зависит только от плотности, $u(\rho)$; если плотность вещества в «жидком» объеме меняется от ρ_0 до ρ , то внутренняя энергия изменяется от $u(\rho_0) = u_0$ до $u(\rho)$. Для того чтобы определить плотность энергии в новом состоянии, нужно умножить изменение энергии единицы массы на плотность в новом состоянии, т. е. звуковая потенциальная энергия единицы объема имеет вид $\rho(u - u_0)$. Плотность звуковой энергии *).

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho(u - u_0), \quad (1.51)$$

что отличается от (1.48). Из (1.51) для среды, следующей уравнению Пуассона,

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho_0}{\gamma - 1} \left[\frac{p}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right]. \quad (1.52)$$

Рассмотрим далее энергетические величины для звукового поля во втором приближении. Поскольку уравнения гидродинамики нелинейны, для определения плотности

*) Заметим, что (1.48) и (1.51) дают мгновенные значения плотности звуковой энергии. Обычно представляет интерес среднее по времени значение плотности энергии. В лагранжевом смысле средняя по времени плотность потенциальной энергии могла бы быть определена как среднее по времени значение энергии единицы массы на среднюю по времени плотность этой массы: $\rho(u - u_0)$. Это значение, вообще говоря, отличается от средней по времени потенциальной энергии в (1.51).

звуковой энергии и плотности потока звуковой энергии, являющихся величинами второго порядка малости, даже в линейной акустике необходимо решение соответствующих задач с точностью до этих величин, что было подчеркнуто в [2]. В нелинейной акустике, вообще говоря, энергетические характеристики звукового поля должны также определяться с соответствующей точностью; так,

Т а б л и ц а 1

	По (1.49) и (1.50)	По (1.51) [2,3]
$E_2(v, p)$	$\frac{\rho_0}{2} v'^2 + \frac{1}{\gamma-1} (p' + p'')$	$\frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2} + p' + p'' \right]$
$E_2(v, \rho)$	$\frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma-1} (\rho' + \rho'')$	$\frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma} (\rho' + \rho'')$
$J_2(v, p)$	$\frac{\gamma}{\gamma-1} [\rho_0 (v' + v'') + p' v']$	$\rho_0 (v' + v'') + p' v'$
$J_2(v, \rho)$	$\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma-1} (v' + v'') + \frac{\gamma c_0^2}{\gamma-1} \rho' v'$	$\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} (v' + v'') + c_0^2 \rho' v'$

для определения плотностей энергии и потока энергии с точностью до величин n -го порядка малости нужно знать переменные звукового поля с точностью до $2n$ -го порядка малости. Обычно это представляет большие трудности.

Из (1.49) и (1.51), пользуясь (1.6а) и (1.6б), получим энергетические характеристики звукового поля во втором приближении (табл. 1) *).

Обычно представляют интерес не мгновенные значения этих энергетических величин, а средние по времени значения. Без решения соответствующей задачи нельзя заранее сказать, что средние по времени от p' , ρ' и v' , а тем

*) Здесь и далее квадратичные величины с индексом «2» определены с точностью до малых второго порядка.

более средние по времени от p'' , ρ'' , v'' равны нулю (см. далее). Заметим здесь, что энергетические величины второго приближения по (1.49) и по (1.52), вообще говоря, не могут быть получены друг из друга переходом от эйлеровых координат к лагранжевым с помощью (1.44) и (1.45). Это еще раз указывает на то, что различие в определении плотности потенциальной энергии заключается не только в различном выборе координат, описывающих движение частиц жидкости. Поскольку это различие проявляется при рассмотрении конкретных звуковых полей, обсуждение этих вопросов целесообразно перенести в другие разделы (см. гл. 2).

Остановимся несколько на средних по времени и средних по пространству величинах, характеризующих звуковое поле. Это позволит в некоторых весьма общих случаях определить средние значения величин второго порядка малости, зная решения гидродинамических уравнений только первого порядка малости.

Во-первых, рассмотрим случай постоянного общего количества (массы) жидкости в звуковом поле [7]. Такие условия могут, например, выполняться в замкнутом объеме. Тогда

$$\int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV,$$

где интегрирование ведется по всему объему, занятому звуковым полем, и, следовательно,

$$\int_V (\rho' + \rho'' + \dots) dV = 0.$$

Пользуясь соотношениями для плотности звуковой энергии второй строчки табл. 1 [в этом случае различие между определениями E по (1.49) и по (1.52) исчезает], получим:

$$\int_V E_2 dV = \int_V \left(\frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2 p'^2}{2\rho_0} \right) dV, \quad (1.53)$$

откуда средняя по пространству плотность звуковой энергии

$$\bar{E}_2 = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_0^2 p'^2}{2\rho_0}. \quad (1.54)$$

Это соотношение часто используется в линейной акустике в качестве плотности звуковой энергии. Из него, в частности, следует для плоской бегущей волны, для которой $\rho' = \rho_0(v'/c_0)$, равенство кинетической энергии потенциальной, и, следовательно, для средней по пространству плотности звуковой энергии

$$\bar{E}_2 = \rho_0 v'^2, \quad (1.55)$$

В [3] показано, что (1.54) определяет энергию, поступающую от источника звука в среду. Условия неизменности массы жидкости (или газа) в звуковом поле, однако, могут и не выполняться даже с точностью до величин второго порядка малости (см. далее).

Ряд условий для средних по времени величин в эйлеровых координатах может быть получен как следствие уравнений гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости для периодических по времени процессов. Как в линейной, так и в нелинейной акустике периодические процессы не охватывают всех возможных явлений, более того, строго говоря, не описывают ни одного явления, ибо периодичность процесса предполагает, что процесс излучения звука начался бесконечно давно и будет продолжаться до бесконечности. Однако если переходные явления, имеющие место при включении источников звука или в начальной стадии взаимодействия звуковых волн с препятствиями, продолжают недолго по сравнению с длительностью работы источников звука, то такие процессы с достаточной степенью точности можно считать периодическими. Эти соображения о периодичности предполагают, что помимо источников звука в среде имеются еще и стоки акустической энергии и пополнение энергии в звуковом поле в результате работы источников компенсируется работой этих стоков. С одной стороны, если бы стоков не было, переходные процессы продолжались бы бесконечно долго; с другой стороны, энергия и все другие параметры звукового поля непрерывно изменялись бы, и процесс нельзя было бы считать периодическим. Далее будем предполагать, что процесс периодичен во времени в любой точке неподвижного пространства, занятого звуковым полем.

Помимо периодичности процесса во времени будем еще предполагать, что звуковое поле квазистационарно: направление касательной к звуковой скорости (а не сама величина скорости) в данной точке неподвижного пространства не зависит от времени*). Условие квазистационарности всегда выполняются для потенциальных звуковых полей. Для квазистационарного звукового поля можно ввести понятие «линии тока» как совокупности касательных к скорости и «трубок тока» как части пространства, ограниченной линиями тока, в которой звуковую скорость можно считать постоянной. Введение линий тока становится возможным

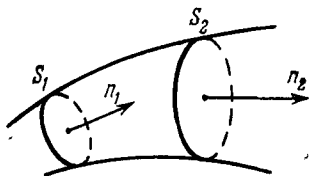


Рис. 1. «Трубка тока».

в том случае, когда звуковая скорость незначительно меняет направление на расстояниях порядка длины звуковой волны, т. е. в приближении геометрической акустики.

Рассмотрим одну из таких «трубок тока» (рис. 1). Проинтегрируем уравнение непрерывности (1.3) при $m = 0$ по объему, заключенному между сечениями S_1 и S_2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho v n dS,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности этого объема, а S включает как S_1 и S_2 , так и боковую поверхность трубки. Усредняя за период и интегрируя, получим:

$$\overline{\rho v}|_{S_1} = \overline{\rho v}|_{S_2} = B, \quad (1.56)$$

где не зависящий от времени вектор B постоянен для данной «трубки тока». Из (1.56) следует, что средняя за период плотность потока массы (или, что то же самое, плотность импульса) в «трубке тока» сохраняется.

*) Это предположение справедливо, если в звуковом поле нет тангенциальных разрывов. Последние, как известно, неустойчивы, и в этом случае, естественно, условия квазистационарности не выполняются. Подобная ситуация возможна, например, на резких боковых границах звуковых пучков, при отражении звука от препятствий конечного размера и т. д.

Аналогично усредняя за период (1.14), получим:

$$\oint_S \bar{T}_{ij} n_j dS = 0, \quad (1.57)$$

т. е. по (1.16) средняя за период сила, действующая на поверхность выделенного объема, равна нулю. Это три уравнения, два из которых согласно (1.15) дают условие

$$\oint_S \bar{p} dS = 0,$$

а третье, имея в виду (1.57), после интегрирования дает:

$$\overline{\rho v^2} |_{S_1} = \overline{\rho v^2} |_{S_2} = C, \quad (1.58)$$

где C — постоянная для данной «трубки тока» величина. По (1.58) средняя за период плотность потока импульса остается постоянной для данной «трубки тока».

И, наконец, усредняя (1.19), получим условие постоянной средней за период плотности потока энергии:

$$\overline{\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right)} \Big|_{S_1} = \overline{\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right)} \Big|_{S_2} = \bar{J}, \quad (1.59)$$

где вектор \mathbf{J} постоянен для данной «трубки тока».

Несмотря на ряд ограничений для полученных средних за период величин, эти соотношения позволяют определить средние от величин второго порядка малости в весьма общих случаях и если и не получить всегда достаточно полные сведения о звуковой энергии, то во всяком случае показать, что этот вопрос является, строго говоря, далеко не простым даже в линейной акустике. Например, запишем условия (1.56), (1.58) и (1.59) с точностью до величин второго порядка малости. Из (1.56) получим:

$$\bar{v}'' = \frac{B_2}{\rho_0} - \frac{\overline{\rho' v'}}{\rho_0} - \bar{v}'. \quad (1.56a)$$

Из (1.58):

$$\overline{\rho_0 v'^2} = C_2. \quad (1.58a)$$

Из (1.59):

$$\overline{v''} = \frac{\overline{J_2}}{\rho_0 w_0} - \overline{v'} - \frac{\overline{v'w'}}{w_0} - \frac{\overline{p'v'}}{\rho_0}. \quad (1.59a)$$

Из (1.56a) и (1.59a), пользуясь (1.7a), получим:

$$\overline{J_2} = \frac{c_0^2}{\gamma - 1} B_2 + \overline{p'v'}. \quad (1.60)$$

В том случае, когда во втором приближении среднего за период потока массы нет ($B_2 = 0$), из (1.60) получаем обычное соотношение, используемое в линейной акустике:

$$\overline{J_2} = \overline{p'v'}. \quad (1.61)$$

Подчеркнем, что (1.61) пригодно для любой геометрии звукового поля, если иметь в виду, что в различных «трубках тока» средние за период потоки энергии различны. В дальнейшем будет показано, что некоторые задачи конечных колебаний источников звука (например, решение задачи о конечных колебаниях плоского поршня, рассмотренное в гл. 2) удовлетворяют именно этому условию отсутствия среднего за период потока массы.

Вообще говоря, звуковое поле приводит к изменению статических параметров среды — давления и плотности, а также к появлению постоянной составляющей скорости. Эти изменения проявляются уже при учете членов второго порядка малости. Естественно, что они играют определенную роль даже в линейной акустике при вычислении различных акустических величин второго порядка малости, например, плотности звуковой энергии, плотности потока звуковой энергии, радиационного давления, скорости акустического течения и др. Конкретные значения постоянных составляющих зависят от геометрии звукового поля, расположения препятствий в поле, от особенностей движения поверхности, излучающей звук, и т. д.; следовательно, для определения различных величин второго порядка малости необходимо рассматривать конкретные звуковые поля. К вопросу об энергетических характеристиках и постоянных составляющих мы еще неоднократно будем возвращаться.

При рассмотрении различных вопросов акустики в недиссипативной среде возникает ряд трудностей; это относится, в частности, и к энергии звуковой волны. Одной из таких трудностей является то, что в недиссипативной среде любое возмущение плотности является конечным, в том смысле, что по мере распространения этого возмущения будет, хотя может быть и на достаточно больших расстояниях, формироваться слабый разрыв. В этом смысле акустика невязкой среды является принципиально нелинейной. В среде с диссипацией эта трудность не возникает, так как при достаточно малых возмущениях нелинейное искажение формы профиля волны не успеет развиться сколько-нибудь существенным образом до полного затухания возмущения. Представляется интересным вопрос о том, может ли быть все-таки «подобрана» такая недиссипативная среда, в которой искажения звуковых возмущений не будет. Если взаимодействие звуковых возмущений считать характерным для нелинейных процессов, то в такой среде процесс линеен. Как будет видно в дальнейшем (см. гл. 2), такой средой является среда с $\gamma = -1$; в этом случае нелинейность гидродинамических уравнений полностью компенсируется и звуковые возмущения не взаимодействуют, т. е. переход к линейной акустике в недиссипативной среде возможен для гипотетической среды, ибо реальные среды не имеют такого изэнтропического уравнения состояния.

§ 4. Слабые нелинейные взаимодействия

В гидро- или аэродинамике нелинейность уравнений движения и уравнения состояния приводит к появлению ряда нелинейных эффектов. К числу таких эффектов относятся, например, непрерывная генерация завихренности (турбулентность), аэродинамическая генерация звука или генерация шума потоком (например, турбулентным), искажение формы профиля бегущей волны и связанные с этим различные явления.

Линеаризованные уравнения гидродинамики показывают, что в вязкой теплопроводящей сжимаемой среде

возможны три моды (рода) возмущений или флуктуаций — мода завихренности, мода энтропии и звуковая мода.

В линейном случае в неограниченной среде между этими модами нет никакого взаимодействия. Но если нелинейными членами в уравнениях гидродинамики пренебречь нельзя, взаимодействия между этими тремя модами возмущений имеются и возникают нелинейные явления, часть из которых была упомянута выше. Нелинейность системы гидродинамических уравнений можно интерпретировать как взаимодействия между тремя основными модами флуктуаций.

Анализ таких взаимодействий здесь полезно кратко провести, так как он дает представление о возможных нелинейных взаимодействиях вообще, а также о порядке их величины и их значении в нелинейной акустике. Этот анализ был проведен Коважным и Боа Те-Чу [8], и здесь в изложении мы будем следовать этой работе.

а) Исходные уравнения в методе последовательных приближений

Для такого анализа воспользуемся методом последовательных приближений, полагая

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + p' + p'' + \dots, \\ \rho &= \rho_0 + \rho' + \rho'' + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

где p' , ρ' — величины первого порядка малости, имеющие порядок $\alpha = \frac{|p - p_0|}{|p_0|} = \left| \frac{v}{c_0} \right|$, и $p^{(n)}$, $\rho^{(n)}$ — величины n -го порядка малости. Отметим, что, находясь в рамках применимости метода последовательных приближений, мы тем самым будем иметь дело, вообще говоря, со слабыми нелинейными взаимодействиями.

Если подставить (1.62) в основные уравнения (1.3), (1.21), (1.23) (здесь мы только ограничимся одним коэффициентом вязкости η) и собрать члены одного порядка по α , то, исключая переменные p и T , можно получить

такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla v^{(n)} + \frac{\partial P^{(n)}}{\partial t} - \frac{\partial S^{(n)}}{\partial t} &= \frac{m^{(n)}}{\rho_0}; \\ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} + c_0^2 \nabla P^{(n)} - v_0 \nabla^2 v^{(n)} - \frac{1}{3} v_0 \nabla (\nabla v^{(n)}) &= f^{(n)}; \\ \frac{\partial S^{(n)}}{\partial t} - \frac{4}{3} v_0 \nabla^2 S^{(n)} - \frac{4}{3} (\gamma - 1) v_0 \nabla^2 P^{(n)} &= \frac{Q^{(n)}}{\rho_0 c_p T_0}. \end{aligned} \right\} (1.63)$$

Здесь для давления p и энтропии s введены безразмерные отношения

$$P^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{\gamma p_0}, \quad S^{(n)} = \frac{s^{(n)}}{c_p}. \quad (1.64)$$

$v_0 = \eta_0 / \rho_0$ — кинематическая вязкость невозмущенной среды; далее считаем η не зависящей от температуры. Кроме того, при вычислениях было положено (в целях упрощения формул), что число Прандтля $Pr = (\eta/\kappa) c_p = 3/4$, что справедливо для газов (для жидкостей, как известно, это число меняется в широких пределах).

При $n = 1$ правые части уравнений (1.63) представляют собой

$$m' = \frac{m}{\rho_0}; \quad f' = f; \quad Q' = Q,$$

т. е. источники массы, объемной силы и тепла. Правые части уравнений (1.63) более высокого порядка $m^{(n)}, f^{(n)}, Q^{(n)}$ представляют собой функции решений более низкого порядка. Заметим, что использование при написании правых частей для $n > 1$ обозначений m, f и Q удобно по той причине, что эти источники имеют характер соответственно действия массы, действия объемных сил и действия источников тепла.

Запись системы уравнений в виде (1.63) замечательна тем, что левые части этих уравнений имеют одинаковый вид для всех значений n , т. е. для любых приближений; изменяются лишь правые части этих уравнений при изменении n . В схеме метода последовательных приближений эти правые части вычисляются из решений более

низкого приближения. Так, например, при $n = 2$ можно найти:

$$\frac{m''}{\rho_0} = -\nabla [(P' - S') v'] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(\gamma - 1)(P')^2 + (S')^2 + P'S']; \quad (1.65)$$

подобные уравнения имеют место для f'' и Q'' , но мы их здесь не выписываем.

б) Три моды возмущений

Рассмотрим уравнения первого приближения ($n = 1$); опустим при этом индекс 1.

Для описания кинематических характеристик потока введем новые независимые переменные: завихренность

$$\Omega = \text{rot } v$$

и удельную скорость расширения (скорость возрастания единицы объема жидкости)

$$q = \text{div } v.$$

Взяв rot и div от второго уравнения системы (1.63), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} - v_0 \nabla^2 \Omega &= \text{rot } f, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{4}{3} v_0 \nabla^2 q &= -c_0^2 \nabla^2 P + \text{div } f. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_\Omega + \Omega_p + \Omega_s, \\ P &= P_\Omega + P_p + P_s \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Тогда оказывается, что уравнения первого приближения с учетом (1.66) и (1.67) можно представить в виде трех подсистем уравнений для трех мод возмущений — завихренности Ω , давления P и энтропии S . Первая подсистема

(мода завихренности) оказывается такой:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_\Omega}{\partial t} - \nu_0 \nabla^2 \Omega_\Omega &= \nabla^2 \times f; \\ P_\Omega &= 0, \quad S_\Omega = 0, \quad q_\Omega = 0; \\ \nabla \times \mathbf{v}_\Omega &= \Omega_\Omega; \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_\Omega \equiv \nabla \mathbf{v}_\Omega = 0; \\ \Omega_p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Эта система уравнений описывает генерацию, перенос и диссипацию слабых флуктуаций завихренности в вязкой несжимаемой среде. Следует отметить, что слабая завихренность не порождает флуктуаций давления того же порядка, поскольку последние пропорциональны квадрату флуктуаций скорости. По той же причине, поскольку вязкие потери — величина второго порядка малости, не происходит порождения энтропии; поле скоростей соленоидально, как и должно быть для несжимаемой жидкости.

Вторая подсистема описывает генерацию, распространение и поглощение волн давления или звука в вязкой теплопроводящей сжимаемой среде и представляет собой звуковую моду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_p}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 P_p - \frac{4}{3} \gamma \nu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 P_p &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4}{3} \nu_0 \nabla^2 \right) \frac{m}{\rho_0} - \nabla f + \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\rho_0 c_p T_0}; \\ \frac{\partial S_p}{\partial t} - \frac{4}{3} \nu_0 \nabla^2 S_p &= \frac{4}{3} (\gamma - 1) \nu_0 \nabla^2 P_p; \\ q_p &= - \frac{\partial P_p}{\partial t} + \frac{\partial S_p}{\partial t} + \frac{m}{\rho_0}; \\ \nabla \times \mathbf{v}_p &= 0, \quad \nabla \mathbf{v}_p = q_p, \quad \Omega_s = 0, \quad P_s = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Распространение волн давления сопровождается их поглощением, что приводит к изменениям энтропии S_p . Поле скоростей безвихревое, как это и должно быть для звукового поля.

Наконец, третья подсистема описывает моду энтропии, а именно — генерацию, перенос и диффузию тепла

в теплопроводящей жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_s}{\partial t} - \frac{4}{3} \nu_0 \nabla^2 S_s &= \frac{Q}{\rho_0 c_p T_0}; \\ q_s &= \frac{\partial S_s}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{v}_s &= 0; \quad \nabla \mathbf{v}_s = q_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Процесс диффузии энтропии не приводит к образованию звуковых волн и создает только слабое безвихревое поле скоростей, обязанное той причине, что должна сохраняться масса при изменении плотности. Как мы видим, разделение движения на моды Ω , P и S позволяет охватить с общей точки зрения возможные явления в вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости.

Отметим, что в отсутствие источников m , f и Q , если среда не обладает диссипативными свойствами, основные уравнения трех подсистем (1.68) — (1.70) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 P = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Первые два уравнения характеризуют соответственно «замороженную завихренность» («замороженную турбулентность» — гипотеза, впервые введенная Тэйлором) и «замороженное» поле температурных неоднородностей. Третье уравнение представляет собой обычное волновое уравнение для звукового давления для среды без потерь.

в) Нелинейные взаимодействия

Поскольку уравнения (1.63) для различных приближений имеют одинаковый вид, различаясь только тем, что различны правые части (источники), поле потока можно представлять состоящим из трех мод возмущений и для порядков больших, чем первый. Естественно, что наибольший интерес представляют взаимодействия 2-го порядка, которые вызывают появление величин P'' , S'' , \mathbf{v}'' .

Из уравнений (1.67) — (1.70) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Omega' &= \Omega_{\Omega'}; & P' &= P_{p'}; & S' &= S_{p'} + S_{s'}; \\ v' &= v'_{\Omega} + v'_{p'} + v'_{s'}. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Подставляя эти значения в уравнения типа (1.65) для m''/ρ_0 , f'' и Q'' , мы получим, что эти источники второго порядка, характеризующие кажущееся действие соответственно источников массы, объемных сил и источников тепла, могут быть представлены через источники m , f , Q первого порядка в виде линейных комбинаций (последние мы будем характеризовать двумя индексами):

$$\left. \begin{aligned} m'' &= \rho_0 [m_{\Omega\Omega} + m_{pp} + m_{ss} + m_{\Omega p} + m_{ps} + m_{s\Omega}], \\ f'' &= f_{\Omega\Omega} + f_{pp} + f_{ss} + f_{\Omega p} + f_{ps} + f_{s\Omega}, \\ Q'' &= \rho_0 c_p T_0 [Q_{\Omega\Omega} + Q_{pp} + Q_{ss} + Q_{\Omega p} + Q_{ps} + Q_{s\Omega}]. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Здесь $f_{\Omega\Omega}$, например, представляет собой кажущуюся объемную силу, порожденную взаимодействием завихренность — завихренность, $m_{\Omega p}$ — кажущийся источник массы, порожденный взаимодействием мод завихренность — давление, и т. д.

Эти 18 членов двойных взаимодействий могут быть вычислены из уравнения (1.65) для m''/ρ_0 и уравнений для f'' и Q'' и далее оценены их порядки.

При этих оценках нужно иметь в виду, что амплитуда флуктуаций определяется безразмерным параметром $M = v/c_0$ и что кроме амплитуды существует пространственный масштаб флуктуаций. Этот масштаб можно характеризовать другим безразмерным параметром — отношением некоторого внутреннего масштаба v_0/c_0 среды (для рассматриваемого случая движения газа этот масштаб есть длина свободного пробега молекул) к масштабу возмущений l . Этот параметр будет, таким образом,

$$\beta = \frac{v_0}{c_0 l} \quad (1.74)$$

(в американской литературе безразмерное число β называют числом Кнудсена).

Имея в виду, что число Рейнольдса $Re = vl/v_0$,

$$\beta = \frac{M}{Re}. \quad (1.75)$$

Для условий атмосферы $v_0 = 0,15 \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}$, $c_0 \sim 3 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ и внутренний масштаб $v_0/c_0 \sim 10^{-5} \text{ см}$, так что даже для такого малого масштаба возмущений l , как 1 мм , $\beta \sim 10^{-4}$. Если $\beta \ll M$, числа Re достаточно велики и в уравнениях (1.68) — (1.70) можно пренебречь членами в вязкости и теплопроводностью и учитывать только инерционные члены.

Возникает вопрос, какие из указанных выше взаимодействий существенны и какие имеют меньшее значение. При рассмотрении вопросов нелинейной акустики нас далее будут интересовать те взаимодействия, которые имеет звуковая мода P с модами P , Ω и S . Таких взаимодействий во втором приближении, как показывает анализ, имеется шесть: PP , $P\Omega$, PS , $\Omega\Omega$, SS , ΩS . Каждое из этих взаимодействий приводит, за счет нелинейности уравнений, к появлению членов в правой части волнового уравнения для P , т. е. к появлению «источников» звука. Оценка показывает при этом, что взаимодействия SS и ΩS имеют порядок более высокий, чем остальные четыре.

Взаимодействие PP (звук — звук). Это тот тип нелинейных взаимодействий, которым мы в данной книге будем заниматься наиболее подробно и не только во втором приближении; сюда относятся искажение формы профиля бегущей волны и связанные с этим явлениями эффекты. Анализ и оценки показывают, что в волновом уравнении для P в качестве источника при этом во втором приближении появляется член

$$\nabla [v_p (\nabla v_p) + (v_p \nabla) v_p + c_0^2 \nabla (P_p^2)] + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_p^2 + O(\beta \alpha^2) \quad (1.76)$$

или в тензорных обозначениях

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[v_{pi} v_{pj} + \frac{\gamma + 1}{2} c_0^2 P_p^2 \delta_{ij} \right] + (\gamma - 1) \left[\left(\frac{\partial P_p}{\partial t} \right)^2 - c_0^2 (\nabla P_p)^2 \right] + O(\beta \alpha^2). \quad (1.77)$$

Взаимодействие завихренность — завихренность ($\Omega\Omega$). Это взаимодействие возникает главным образом за счет объемных сил. В правой части волнового уравнения для P источник имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (v_{\Omega i} v_{\Omega j}). \quad (1.78)$$

В гл. 10 и 11 мы подробно остановимся на этом виде взаимодействия, которое, например, является ответственным за порождение шума (звука) турбулентным потоком.

Взаимодействие завихренность — звук (ΩP). С акустической точки зрения это взаимодействие интересно в том отношении, что есть рассеяние звука на неоднородностях в завихренности (турбулентность). В правой части волнового уравнения за счет этого взаимодействия появляется член («источник»)

$$2 \frac{\partial^2 (v_{\Omega i} v_{p j})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.79)$$

Рассеяние звука турбулентным потоком в настоящее время можно считать теоретически довольно разработанной областью. Имеются и интересные эксперименты.

Взаимодействие звук — энтропия (PS). В правой части волнового уравнения для звука имеем члены («источник»)

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} (S_s v_{p i}). \quad (1.80)$$

Здесь мы имеем дело с явлением рассеяния звука на температурных неоднородностях.

Проведенный анализ позволяет создать общее представление о возможных нелинейных взаимодействиях при произвольном движении вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости в наиболее простом случае — в безграничной среде без учета граничных и начальных условий.

При наличии границ положение усложняется и граничные условия могут привести к тому, что члены, характеризующие те или иные нелинейные взаимодействия и имеющие малое значение в случае безграничной среды, при наличии границ могут оказаться существенными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blackstok D. T., Lagrangian one-dimensional equations of hydrodynamics for a viscous thermally conducting fluid. *J. Acoust. Soc. Am.* **33**, 1245 (1961).
2. Андреев Н. Н., Über die energieausdrucke in der akustik. *J. Phys. USSR* **2**, 306 (1940).
3. Андреев Н. Н., О некоторых величинах второго порядка в акустике. *Акуст. ж.* **1**, 3 (1955).
4. Markham I., Second order acoustic fields energy relations. *Phys. Rev.* **86**, 712 (1952).
5. Markham I., Second order acoustic fields relation between energy and intensity. *Phys. Rev.* **89**, 972 (1953).
6. Schoch A., Remarks on the concept of acoustic energy. *Acoustica* **3**, 181 (1953).
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1953.
8. Voa Teh-Chu, Kovasznay L. S. G., Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.* **3**, 494 (1958).

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ. ИДЕАЛЬНАЯ СРЕДА

§ 1. Общие замечания

В этой главе и гл. 3 будут рассмотрены процессы нелинейного искажения и взаимодействия упругих волн. Нелинейное искажение волн (изменение формы профиля волны конечной амплитуды) происходит из-за того, что к скорости распространения волны добавляется скорость смещения частиц, а также из-за того, что локальная скорость звука в разных точках волны различна. Это приводит к тому, что сжатия движутся быстрее, чем разрежения; если волна имела первоначально синусоидальную форму, то постепенно передние фронты ее становятся все более и более крутыми. При некоторых условиях, рассмотренных далее, возможно образование чрезвычайно узкого фронта волны, который может рассматриваться как слабый разрыв; место образования разрыва, таким образом, можно считать периодическим источником слабых разрывов. Такая волна со слабыми разрывами на каждой длине волны, занимающими весь фронт, иногда называется пилообразной. В спектральных терминах искажение волны может быть интерпретировано как появление, рост и взаимодействие в процессе распространения гармонических составляющих (обертонов) волны.

Одним из основных принципов линейных волновых процессов является принцип суперпозиции волновых полей. В нелинейных волновых процессах этот принцип, вообще говоря, не выполняется. Связано это с тем, что, благодаря нелинейности, волновые поля взаимодействуют. При распространении двух волн в одном направлении, например, возмущения среды, вызываемые одной из волн, оказывают влияние на распространение другой волны. В спектральных терминах: если исходные волны монохрома-

тичны, помимо волн частот ω_1 и ω_2 и их гармоник $n\omega_1$ и $m\omega_2$ появляются волны комбинационных разностных и суммарных частот $\omega_{nm} = n\omega_1 \pm m\omega_2$ ($\omega_{nm} > 0$, n и m — целые числа); амплитуды этих волн меняются в пространстве.

Другой вопрос, который возникает в связи с принципом суперпозиции, — это вопрос о комбинационном рассеянии звука на звуке. Процесс взаимодействия двух волн, распространяющихся в одном направлении, может интерпретироваться как рассеяние звука на звуке, а искажение монохроматической волны — как «самодействие» или «саморассеяние». Однако в этих случаях область взаимодействия является одновременно и областью, где наблюдаются различные эффекты взаимодействия и искажения. Под комбинационным рассеянием звука на звуке иногда понимается возможность наблюдения волн комбинационных частот вне области взаимодействия двух ограниченных звуковых пучков; далее этот термин будет употребляться именно в этом смысле.

Этот вопрос, имеющий принципиальное значение для нелинейной акустики, довольно широко обсуждался в литературе в связи с тем, что здесь были получены противоречивые результаты: согласно одной теории возможность наблюдения комбинационных частот второго приближения в газах или жидкостях есть, согласно другой — нет. В настоящее время следует считать доказанным как теоретически, так и экспериментально, что в случае рассеяния одного звукового пучка на другом (при идеальной однородности пучков и пренебрежении пограничными эффектами) в газах или жидкостях комбинационного рассеяния звука на звуке во втором приближении нет. Возвращаясь к принципу суперпозиции, следует сказать, что в области пересечения звуковых пучков взаимодействие звука со звуком имеет место и в этой области могут наблюдаться комбинационные частоты второго порядка.

Взаимодействие упругих волн может рассматриваться как взаимодействие фононов *). Это взаимодействие долж-

*) Энергия фононов ультразвуковых и даже гиперзвуковых частот чрезвычайно мала и можно было бы не пользоваться квантовыми представлениями. Однако, как будет видно из дальнейшего (особенно в случае волн конечной амплитуды в твердых телах), квантовые представления позволяют легче установить правила

но удовлетворять условию сохранения энергии и условию сохранения квазиимпульса взаимодействующих фононов. Для трехфононного процесса, что соответствует второму приближению при классическом рассмотрении, когда из двух фононов образуется один (процесс «слияния» фононов) или когда один фонон «расщепляется» на два фонона, законы сохранения дают *):

$$h\omega + h\omega' \rightleftharpoons h\omega'', \quad h\mathbf{k} + h\mathbf{k}' \rightleftharpoons h\mathbf{k}'',$$

где h — постоянная Планка, ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор.

Легко видеть, что в жидкости или газе только наличие дисперсии может привести к тому, что будет возможным взаимодействие фононов под какими-то углами, отличными от нуля. Это сразу же дает отрицательный ответ на вопрос о комбинационном рассеянии звука на звуке: при пересечении двух звуковых пучков в недиспергирующей среде под углом, отличным от нуля, во втором приближении (чему соответствует трехфононное приближение), комбинационного рассеяния звука на звуке в указанном выше смысле не должно быть. В том случае, когда в среде есть дисперсия, наоборот, параллельное взаимодействие (взаимодействие волн, волновые векторы которых направлены в одну сторону), согласно условиям сохранения энергии и квазиимпульса, во втором приближении не может происходить; становится возможным взаимодействие под какими-то углами, величина которых определяется величиной дисперсии. Эти квантовые условия, таким образом, устанавливают правила отбора при взаимодействии фононов.

Следует сказать, что квантовые условия в той форме, в какой они рассмотрены здесь, являются необходимыми, но отнюдь не достаточными, так как здесь не рассматривались вероятности взаимодействия. Даже при выполнении законов сохранения возможны такие условия (такой вид энергии взаимодействия), при которых вероятность взаимодействия будет равна нулю.

отбора для взаимодействия фононов и таким образом выяснить особенности взаимодействия волн.

*) Здесь имеет смысл рассматривать только нормальные процессы взаимодействия, исключая так называемые процессы переброса.

Возвращаясь к классическим представлениям, можно сказать, что в средах без дисперсии и с одной скоростью распространения звука возможно взаимодействие, приводящее к нарастающим волнам комбинационных частот, только волн, распространяющихся в одном направлении. Искажение волны конечной амплитуды, которое может рассматриваться как «самодействие», возможно, вообще говоря, только в среде без дисперсии. В среде с дисперсией, когда фазовая скорость одной из взаимодействующих волн, или гармоник, появляющихся в процессе распространения монохроматической волны, отличается от фазовой скорости другой волны, процесс взаимодействия становится сложнее, нелинейные искажения могут не нарастать во времени или в пространстве, или, точнее говоря, нарастают, но ограниченно, затем начинают убывать, затем снова нарастают и убывают. Получается нечто вроде биений в пространстве (или во времени). Как будет видно из дальнейшего, в классической интерпретации это связано с тем, что вынуждающая сила, ответственная за появление гармоник (для второй гармоники вынуждающая сила вызывается первой гармоникой), имеет фазовую скорость, отличающуюся от фазовой скорости вынуждаемого процесса.

Помимо «распределенной дисперсии» возможны случаи «сосредоточенной дисперсии» в граничных условиях, приводящей к некратности собственных частот системы. При этом также непрерывного нарастания нелинейных искажений нет из-за того, что гармоники волны не совпадают с собственными частотами системы [1, 2]. Дисперсия может появляться как результат различного рода релаксационных процессов в среде; во всех известных пока и экспериментально исследованных случаях эта молекулярная дисперсия мала и практически не оказывает влияния на нелинейные искажения. Другой, уже более существенной причиной дисперсии могут быть геометрические условия распространения звука в звукопроводах и волноводах. Дисперсионные свойства таких систем могут быть так велики, что нелинейные искажения могут и не развиваться сколько-нибудь существенным образом. Отметим все же, что в настоящее время этот вопрос изучен еще совсем мало. И, наконец, условия сильной «дисперсии» имеют

место в безграничных твердых телах*), где скорость распространения возмущения зависит от типа деформации; для продольных волн скорость приблизительно в два раза больше скорости поперечных. Нелинейные преобразования волн одного типа в волну другого типа в неограниченных твердых телах возможны при определенных условиях, которые будут рассмотрены в гл. 8.

В том случае, когда скорость вынуждаемого процесса отличается от скорости вынуждающего или когда частота гармоники отличается от частоты обертона, можно говорить об отсутствии синхронизма между вынуждаемым и вынуждающим процессом. Когда условия синхронизма не выполнены, монотонного нарастания нелинейных искажений нет. Период (пространственный или временной) биений может быть при сильной дисперсии таким малым, что с нелинейными искажениями практически можно не считаться. Подводя итог, можно сказать, что при условии сильной дисперсии искажения и преобразования волны в волны других типов может не быть. Это приводит, в частности, к тому, что некоторые формы волновых процессов могут существовать, не меняя профиля (например, для изгибных колебаний пластинок такие формы определены в [3]).

Формально возможны и другие причины отсутствия искажений. Например, можно выбрать такое нелинейное уравнение, связывающее давление и плотность в среде, что изменения формы профиля волны не будет. Таким уравнением является уравнение вида $p \sim \rho^{-1}$ или в (1.6) $\gamma = -1$. Этот случай, однако, не представляет практического интереса, так как, по-видимому, нет сред с таким специфическим уравнением адиабатического процесса.

Очевидно, что степень проявления нелинейных эффектов в данной среде зависит от амплитуд взаимодействующих волн и поэтому должна зависеть от акустического числа Маха $M = v_0/c_0$, где v_0 — амплитуда скорости смещения в волне, c_0 — скорость звука в невозмущенной

*) Дисперсией обычно называют зависимость фазовой скорости от частоты. Здесь понятие дисперсии употребляется в несколько условном смысле: имеется в виду, что в твердых телах принципиально возможно преобразование одного типа волн в другой, причем фазовые скорости этих типов волн различны.

среде *). Рекордные величины акустических чисел Маха в настоящее время не превышают нескольких десятых долей единицы; обычно же даже для мощных звуковых и ультразвуковых волн числа Маха на один — три порядка меньше. На этом будет основываться все дальнейшее изложение в этой книге. Область чисел Маха, больших единицы, относится уже не к нелинейной акустике, а к ударным волнам.

Особенности нелинейных искажений формы профиля волны и взаимодействия волн в существенной мере зависят от вязкости среды, точнее, от отношения инерционных сил к вязким, т. е. от числа Рейнольдса. При больших числах Рейнольдса среда может рассматриваться как невязкая (за исключением таких вопросов, как ширина фронта волны, поглощение волн и некоторые другие). В невязкой среде волна рано или поздно, в зависимости от акустического числа Маха, перейдет к волне пилообразной формы даже в таких неблагоприятных для образования разрыва условиях, как условия сферической расходимости. При малых числах Рейнольдса, когда вязкость среды играет существенную роль, диссипативные процессы препятствуют искажению формы профиля волны. При очень малых числах Рейнольдса с нелинейными искажениями практически можно не считаться.

В этой главе будет рассмотрено нелинейное искажение и взаимодействие волн в идеальной среде. Пренебрежение диссипативными членами в уравнениях гидродинамики значительно упрощает рассмотрение различных задач нелинейной акустики и вместе с тем позволяет выяснить ряд особенностей распространения волн конечной амплитуды. Это упрощение уравнений отнюдь не является формальным в вопросах искажения и взаимодействия. Как будет показано дальше, аналогично тому, как пренебрежение диссипативными потерями в гидродинамике возможно при больших числах Рейнольдса потока $Re = |v| \frac{d}{\nu}$, где v — скорость потока, d — характерный размер, ν — кинематическая вязкость, в нелинейной акустике, рассматри-

*) Число Маха можно также определить как отношение амплитуды смещения к длине волны или как отношение амплитуды звукового давления к «внутреннему давлению» в среде.

вая взаимодействие и искажение волн в определенной области звукового поля, можно пренебречь диссипативными потерями при акустических числах Рейнольдса, много больших единицы*). Акустическое число Рейнольдса не отличается от общепринятого гидродинамического, только в качестве скорости берется амплитуда скорости смещения, в качестве характерного размера берется длина волны и помимо сдвиговой вязкости учитываются другие возможные потери в волне (теплопроводность, объемная вязкость и т. д.). Таким образом, решения для невязкой среды можно сравнивать с экспериментальными результатами, полученными при больших акустических числах Рейнольдса или на малых расстояниях от источника волны, пока диссипативные процессы еще не повлияли сколько-нибудь существенным образом на процесс распространения волны.

Рассмотрим уравнения невязкой среды (1.3) — (1.4). Произведем линейное преобразование переменных:

$$x_i^f = \frac{x_i}{a}; \quad t' = \frac{t}{b}; \quad V = \frac{v}{\tilde{v}}; \quad P = \frac{p}{\tilde{p}}; \quad R = \frac{p}{\tilde{p}}; \quad C = \frac{c}{\tilde{c}}, \quad (2.1)$$

где a , b , \tilde{v} , \tilde{p} , \tilde{c} — постоянные. Это преобразование может рассматриваться как изменение масштаба измерения этих величин. Поскольку от выбора масштаба не должны зависеть характерные физические особенности течения или волнового процесса, инвариантность уравнений (1.3) — (1.4) относительно преобразования (2.1) позволит найти параметры, определяющие течение. Уравнение непрерывности (1.3) при $m = 0$ инвариантно при

$$a = b\tilde{v}. \quad (2.2)$$

Имея в виду (2.2), мы видим, что уравнение движения (1.4) при $F' = 0$ инвариантно при

$$\left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{c}}\right)^2 = 1. \quad (2.3)$$

И, наконец, адиабатическое уравнение идеального газа

*) Аналогично необходимости учета вязких сил даже при $Re \gg 1$ в некоторых вопросах гидродинамики (например, в пограничном слое), в нелинейной акустике также возникает необходимость учитывать диссипативные процессы при рассмотрении,

(1.6) инвариантно при

$$\frac{\widetilde{p}c^2}{\widetilde{p}} = 1. \quad (2.4)$$

Таким образом, адиабатическое течение инвариантно относительно преобразования (2.1) при равных местных числах Маха $M = v/c$ и числах $E = p/\rho c^2$. При инвариантности относительно (2.1) и (2.2) граничных и начальных условий равенство M и E в различных средах может рассматриваться как условие подобия течений или, в частности, акустических волн.

Следует сказать, что для подобных волн равны любые комбинации указанных безразмерных чисел, например $E/|M| = p/\rho |v|^2$ (число кавитации), $M/E = \rho c v/p$ и др. В качестве параметров подобия могут быть выбраны любые два числа. Если в E под p , ρ , c понимать полное значение давления (избыточное + давление, определяющее упругость среды), а также полное значение плотности и скорости, то для адиабатического процесса $E \equiv \gamma^{-1}$. В случае жидкостей, если применимо уравнение Тэта, $E \equiv \Gamma^{-1}$. Решение уравнений гидродинамики невязкой жидкости должно зависеть от числа Маха и этого нелинейного параметра уравнения адиабаты*). Методы теории подобия полезны тем, что они дают общие закономерности, позволяющие систематизировать экспериментальные данные и подойти с общей точки зрения к проблеме распространения волн конечной амплитуды. Однако они не позволяют получить точного решения той или иной задачи.

Далеко не все граничные задачи нелинейной акустики могут быть точно решены даже для недиссипативной среды. Поэтому сейчас мы рассмотрим приближенный метод малого параметра, пригодный для произвольных геометрических условий распространения волны.

скажем, ширины фронта пилообразной волны или процессов в акустическом пограничном слое (см. гл. 6).

*) Наличие двух чисел указывает на то, что имеются две причины, вызывающие нелинейные эффекты при распространении волн в газах и жидкостях: во-первых, нелинейность уравнения непрерывности и уравнения Эйлера и, во-вторых, нелинейность уравнения адиабаты. Такое разделение до некоторой степени условно, так как система гидродинамических уравнений решается совместно, однако при сравнении газов и жидкостей оно удобно.

§ 2. Метод малого параметра

Решение, как это видно из предыдущего, должно зависеть от числа Маха и от нелинейного параметра уравнения адиабаты. То обстоятельство, что для жидкостей Γ несущественно зависит от индивидуальных свойств жидкостей (см. табл. 4, стр. 166), так же как для идеального газа γ несущественно зависит от индивидуальных свойств газа, позволяет при отыскании решения пользоваться в качестве параметра только одним числом Маха. Максимальные акустические числа Маха, достигнутые в настоящее время, составляют для воздуха $\sim 0,3-0,1$ [4, 5], для воды $\sim 10^{-2}$ [6]. Это рекордные величины, обычно же даже при достаточно мощных звуках числа Маха в газах не превышают 10^{-2} , в жидкостях $10^{-3}-10^{-4}$. Поэтому при всех достижимых в настоящее время интенсивностях звука и ультразвука $|M| < 1$, что позволяет искать решение нелинейных уравнений гидродинамики в виде разложения по этому малому параметру. Принципиально метод малого параметра позволяет найти решение со сколь угодно большой степенью точности. Практически, однако, получающиеся ряды сходятся быстро при $|M| \ll 1$ и при расстояниях, малых по сравнению с расстоянием образования разрыва, и только в этих случаях сравнительно просто может быть найдено решение с достаточной степенью точности.

Мы будем следовать форме метода, примененной в [7]. Считая в преобразовании (2.1)

$$a \equiv X; b \equiv T; \tilde{p} \equiv 1;$$

$$\tilde{\rho} \equiv 1; \tilde{c} \equiv 1,$$

после замены переменных в (1.3) и (1.4) получим:

$$\frac{\partial R}{\partial t'} + NV'(RV) = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (RV)}{\partial t'} + N[RVV'V + VV'(RV)] = \\ = N \frac{c_0^2}{v^2} V'R + \frac{N\rho_0}{v^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} RV'R, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$N = \frac{\tilde{v}T}{X}$$

и штрихи у дифференциальных операторов указывают на то, что они применяются в новой системе координат.

Единицы измерения длины и времени можно выбрать так, чтобы первые производные по времени и координатам были одного порядка. Для периодических процессов такой выбор масштабов естествен, так как в качестве масштаба длины выбирается длина волны, а в качестве масштаба времени — период; тогда

$$\frac{X}{T} \sim \frac{\omega}{k} = c_0.$$

В зависимости от выбора масштаба скорости \tilde{v} находится величина параметра N . Если $|\mathbf{v}|/\tilde{v} = 1$, то

$$N \simeq \frac{|\mathbf{v}|}{c_0} = |M|,$$

где M — акустическое число Маха. Поскольку во всех интересных для акустики случаях $|M| < 1$, при таком выборе масштаба скорости N — малый параметр, по которому могут быть разложены решения (2.5) и (2.6):

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + NR' + N^2R'' + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} N^k R^{(k)}, \\ V &= V' + NV'' + N^2V''' + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} N^s V^{(s+1)}. \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Исходные уравнения (2.5) и (2.6), имея в виду выбор единиц, примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t'} + NV'(RV) &= 0, \\ N \frac{\partial (RV)}{\partial t'} + N^2 [RVV'V + VV'(RV)] &= \\ &= \nabla'R + \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} RV'R. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (2.8), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} N^k \frac{\partial R^{(k)}}{\partial t'} + \sum_{k, s=0}^{\infty} N^{k+s+1} \nabla' (R^{(k)} V^{(s+1)}) = 0, \quad (2.9) \\ & \sum_{s=0}^{\infty} N^{k+s+1} \frac{\partial (R^{(k)} V^{(s+1)})}{\partial t'} + \\ & + \sum_{k, s, p=0}^{\infty} N^{k+s+p+2} [R^{(k)} V^{(s+1)} \nabla' V^{(p+1)} + V^{(s+1)} \nabla' (R^{(k)} V^{(p+1)})] = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} N^k \nabla' R^{(k)} + \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \sum_{k=0}^{\infty} N^{2k} R^{(k)} \nabla' R^{(k)}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях N , получаем последовательно уравнения *) нулевого, первого и более высоких приближений. Уравнения нулевого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= 0; \\ c_0^2 \nabla \rho_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Из этих уравнений следует, что $\rho_0 = \text{const}$. Уравнения первого (линейного) приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla v' &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

из которых следует волновое уравнение

$$\square^2 v' = 0; \quad \square^2 \rho' = 0, \quad (2.13)$$

где \square^2 — оператор Даламбера:

$$\square^2 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

*) В этих уравнениях сделаны уже обратные преобразования к исходным переменным.

Уравнения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho''}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla v'' &= -\nabla \rho' v'; \\ \rho_0 \frac{\partial v''}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho'' &= -\frac{\partial (\rho' v')}{\partial t} - 2\rho_0 v' \nabla v' - \left. \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \rho' \nabla \rho'. \end{aligned} \right\} (2.14)$$

Продолжая этот процесс, можно последовательно выделять уравнения все более и более высокого порядка. Как видно из выписанных уравнений, уравнения n -го приближения линейны относительно $v^{(n)}$ и $\rho^{(n)}$ и содержат в правой части только величины меньшего порядка малости, определяемые из уравнений предыдущих приближений. Таким образом, метод малого параметра позволяет свести решения нелинейных уравнений, вообще говоря, к бесконечной системе линейных уравнений. Отметим, что все эти уравнения — волновые уравнения с правой частью. Например, (2.14) после преобразования можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \square^2 v'' &= \frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left. \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \rho' \nabla \rho' - 2\rho_0 v' \nabla v' \right] - \square^2 (\rho' v') \right\}; \\ \square^2 \rho'' &= 2\rho_0 \nabla (v' \nabla v') - \left. \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \nabla (\rho' \nabla \rho') = \\ &= 2\rho_0 \{ \nabla v' \cdot \nabla v' + v' [\nabla \times (\nabla \times v')] \} - \\ &\quad - \left. \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} [\rho' \nabla^2 \rho' + \nabla \rho' \nabla \rho']. \end{aligned} \right\} (2.15)$$

Таким образом, решения первого, второго и более высоких приближений представляют собой волновое движение, причем для второго и более высоких приближений оно происходит под действием объемных вынуждающих сил, определяемых из уравнений предыдущих приближений (см. также гл. 1, § 4).

В этом разделе для любой геометрии задачи приведены уравнения в эйлеровых координатах. Это необходимо иметь в виду при задании граничных условий. К каким трудностям приводит использование эйлеровых координат при задании граничных условий, будет в дальнейшем видно при решении задачи об излучении плоской волны

конечной амплитуды поршнем с учетом членов более высокого порядка малости, чем члены порядка числа Маха. Случай плоской волны является наиболее простым, для которого может быть найдено точное решение.

§ 3. Решение Римана для плоской волны.

Простые волны

Для плоской волны решение уравнений гидродинамики невязкой жидкости можно найти точно. Это впервые было сделано Пуассоном в 1808 г. [8] для плоской бегущей волны (простой волны). Затем теория простых волн развивалась в работах Стокса [9], Эйри [10] и особенно Ирншоу [11]. Риманом в 1860 г. было дано общее решение одномерной системы гидродинамических уравнений для плоского возмущения в предположении, что уравнение состояния среды может быть представлено в виде $p = \varphi(\rho)$. Рассмотрим это решение.

Для плоского случая уравнения в эйлеровых координатах (1.3) и (1.4) запишутся в виде

$$\rho_t + \rho v_x + v \rho_x = 0; \quad (2.16)$$

$$\rho v_t + \rho v v_x + p_x = 0. \quad (2.17)$$

Риманом была введена функция

$$\sigma(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} c(\rho) \frac{d\rho}{\rho}; \quad (2.18)$$

здесь ρ_0 — плотность невозмущенной среды, $c(\rho)$ — скорость распространения звука, равная $(dp/d\rho)^{1/2}$. Имея в виду, что $\sigma_x = c\rho_x/\rho = p_x/\rho c$; $\sigma_t = c\rho_t/\rho$, из (2.16) и (2.17) получим:

$$\sigma_t + c v_x + v \sigma_x = 0; \quad (2.19)$$

$$v_t + v v_x + c \sigma_x = 0. \quad (2.20)$$

Складывая и вычитая (2.19) и (2.20), имеем:

$$(v + \sigma)_t + (c + v)(v + \sigma)_x = 0; \quad (2.21)$$

$$(v - \sigma)_t - (c - v)(v - \sigma)_x = 0, \quad (2.22)$$

Из этих уравнений следует, что величина $(v + \sigma)$ не меняется во времени в точках, передвигающихся со скоростью $u_E = v + c$ относительно невозмущенной среды*); аналогичная величина $(v - \sigma)$ не меняется в точках, движущихся со скоростью $u_E = -(c - v)$. Таким образом, первое из этих уравнений описывает возмущение, распространяющееся в направлении $x > 0$, второе — в направлении $x < 0$.

Вводя обозначения $P = v + \sigma$ и $Q = v - \sigma$, легко видеть, что функция $P(t - \frac{x}{c+v})$ удовлетворяет уравнению (2.21), а $Q(t + \frac{x}{c-v})$ — уравнению (2.22).

Решение исходной системы (2.16), (2.17) в неявном виде:

$$v = \frac{1}{2} \left[P \left(t - \frac{x}{c+v} \right) + Q \left(t + \frac{x}{c-v} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Функция P представляет возмущение, бегущее в сторону $x > 0$, Q — в сторону $x < 0$.

Рассмотрим аналогичную задачу в лагранжевых координатах. Одномерные уравнения в лагранжевых координатах (1.33) и (1.34):

$$\rho(1 + \xi_a) = \rho_0; \quad (2.24)$$

$$\xi_t + \frac{1}{\rho_0} p_a = 0. \quad (2.25)$$

Используя (2.18), из (2.24) и (2.25) получим:

$$\sigma_t + c \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) v_a = 0; \quad (2.26)$$

$$v_t + c \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \sigma_a = 0, \quad (2.27)$$

где $v = \xi_t$ — скорость в лагранжевой системе координат. Складывая и вычитая (2.26) и (2.27), аналогично тому, как это делалось в эйлеровой системе, нетрудно показать, что $(v + \sigma)$ не меняется в точках, передвигающихся со скоростью $u_L = c(\rho/\rho_0)$ относительно невозмущенной

*) В дальнейшем будем называть эту скорость локальной скоростью распространения возмущения. Отметим, что она отличается от местной скорости звука c .

среды, а $(v - \sigma)$ — в точках, двигающихся со скоростью $u_L = -c(\rho/\rho_0)$. Решение в этом случае:

$$v = \frac{1}{2} \left[P \left(t - \frac{a\rho_0}{c\rho} \right) + Q \left(t + \frac{a\rho_0}{c\rho} \right) \right], \quad (2.28)$$

где P и Q — произвольные функции. Отметим, что лагранжева локальная скорость распространения возмущения $c(\rho/\rho_0)$, с которой мы уже встречались [см. (1.36)], вообще говоря, отличается от соответствующей эйлеровой скорости $c + v$; на этом мы остановимся более подробно дальше.

В том случае, когда одна из функций P или Q в (2.23) или (2.28) равна нулю, т. е. для одностороннего излучения возмущения конечной амплитуды, которое обычно называют простой волной, решением исходных уравнений как в эйлеровой, так и в лагранжевой системе координат будет $v = \pm \sigma$. Здесь и дальше верхний знак относится к возмущению, распространяющемуся в направлении $x > 0$ ($Q \equiv 0$), а нижний — в направлении $x < 0$ ($P \equiv 0$). Решение $v = \pm \sigma$, имея в виду (2.18), позволяет по известному уравнению $p = \varphi(\rho)$ легко установить связь между скоростью и плотностью или давлением. Например, для адиабатического распространения возмущения конечной амплитуды в идеальном газе, пользуясь (1.6), получаем местную скорость звука:

$$c(\rho) = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (2.29)$$

где $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ — скорость распространения звука в невозмущенной среде, и из (2.18) следует:

$$\sigma(\rho) = \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right], \quad (2.30)$$

что в случае простой волны дает для колебательной скорости в волне:

$$v = \pm \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right] = \pm \frac{2c_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]. \quad (2.31)$$

Из (2.29) и (2.31) следует точное соотношение для местной скорости звука в простой волне:

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} v, \quad (2.32)$$

откуда видно, что местная скорость звука больше скорости c_0 там, где колебательная скорость v направлена в сторону распространения возмущения, и меньше c_0 там, где v направлена в противоположную сторону. Это приводит к тому, что профиль возмущения изменяется. Соотношения (2.29) — (2.32) пригодны как в эйлеровой, так и в лагранжевой системе координат, поскольку они определяются только уравнением адиабаты. Локальная скорость распространения возмущения (при распространении в направлении $x > 0$) в эйлеровых координатах из (2.21) и (2.23) $u_E = v + c$; учитывая (2.32), имеем:

$$u_E = c_0 (1 + \varepsilon U), \tag{2.33}$$

где

$$U = \frac{v}{c_0}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

Для этого же случая в лагранжевых координатах из (2.26) и (2.28) $u_L = \rho c / \rho_0$. Пользуясь (2.29) и (2.32), получим:

$$u_L = c_0 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} U \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \simeq c_0 \left[1 + \varepsilon U + \frac{\varepsilon}{2} U^2 + \dots \right], \tag{2.34}$$

т. е. лагранжева локальная скорость распространения возмущения с точностью до членов порядка числа Маха (ибо $U_{\max} = M$) совпадает с эйлеровой. Как будет видно из дальнейшего, этот факт не является случайным: при всех расчетах, проводимых с точностью до первых степеней относительно числа Маха, имея в виду также незначительную нелинейность адиабаты для газов и жидкостей, можно пренебрегать различием между эйлеровыми и лагранжевыми координатами.

При изотермическом распространении ($\gamma = 1$) из (2.32) следует: местная скорость звука равна скорости звука в невозмущенной среде,

$$c^2 = c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}; \tag{2.35}$$

колебательная скорость

$$v = c_0 \ln \frac{p}{\rho_0} = c_0 \ln \frac{P}{p_0}; \tag{2.36}$$

Наконец, локальная скорость распространения возмущения

$$u_E = c_0 + v, \quad (2.37)$$

$$u_L = c_0 e^{\frac{v}{c_0}}. \quad (2.38)$$

Эти соотношения указывают на то, что и при линейном уравнении состояния среды все-таки нелинейные искажения, обусловленные нелинейностью остальных гидродинамических уравнений, имеют место; эти искажения естественно меньше, чем в случае адиабатического распространения звука. Подчеркнем здесь еще раз, что основными причинами нелинейных искажений волны являются, во-первых, нелинейность адиабаты, приводящая к тому, что местная скорость звука по (2.32) отличается от скорости звука в невозмущенной среде, и, во-вторых, нелинейность остальных гидродинамических уравнений (эту вторую причину нелинейных искажений иногда вслед за Лайтхиллом называют конвекцией звука). В газах конвекция звука вносит несколько больший вклад в нелинейные искажения, чем в жидкостях.

При $(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$ и $(p - p_0)/p_0 \ll 1$ из (2.31) могут быть получены различные соотношения между параметрами волны. Приведем их здесь для справок с точностью до величин второго порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} v' &= \pm \frac{c_0}{\rho_0} \rho'; & v' &= \pm \frac{p'}{\rho_0 c_0}; \\ v'' &= \pm \frac{c_0}{\rho_0} \rho'' \pm \frac{\gamma - 3}{4} \frac{c_0 \rho'^2}{\rho_0}; & v'' &= \pm \frac{p''}{\rho_0 c_0} \mp \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{p'^2}{\rho_0 \rho_0 c_0}; \end{aligned} \right\} (2.39)$$

и обратные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \pm \frac{\rho_0}{c_0} v'; & p' &= \pm \rho_0 c_0 v'; \\ \rho'' &= \pm \frac{\rho_0}{c_0} v'' - \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\rho_0 v'^2}{c_0^2}; & p'' &= \pm \rho_0 c_0 v'' + \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 v'^2. \end{aligned} \right\} (2.40)$$

Как видно из выписанных формул, обычные соотношения линейной акустики для плоской бегущей волны применимы в тех случаях, когда можно пренебречь членами второго порядка малости.

Следует остановиться на различных энергетических характеристиках простой волны. В эйлеровых координатах плотность звуковой энергии может быть определена точно по (1.49). Пользуясь (2.31) и (1.49), получим точное значение плотности звуковой энергии простой волны:

$$E = \frac{p_0}{(\gamma-1)^2} \left[(3\gamma-1) \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^\gamma - 4\gamma \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} + 2\gamma \left(\frac{p}{\rho_0} \right) - \gamma + 1 \right]. \quad (2.41)$$

Плотность звуковой энергии простой волны по Андрееву из (2.31) и (1.52):

$$E = \frac{p_0}{(\gamma-1)^2} \left[(3\gamma-1) \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^\gamma - 4\gamma \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} + (\gamma+1) \left(\frac{p}{\rho_0} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Плотность потока звуковой энергии из (1.20), (1.7) и (2.31):

$$J = \pm \rho v \left(\frac{\gamma+1}{4} v^2 - \frac{c_0^2}{\gamma-1} \pm cv \right). \quad (2.43)$$

Легко могут быть рассчитаны эти величины во втором приближении. В табл. 2 приведены E_2 и J_2 по (1.49) и (1.50), а также по Андрееву. В эти соотношения входят величины первого и второго порядка малости, конкретные значения которых могут быть определены только после задания начальных и граничных условий. Можно также воспользоваться общими условиями, о которых говорилось в § 4 гл. 1. Например, при условии постоянного количества жидкости в звуковом поле средняя по пространству плотность звуковой энергии дается (1.54); имея в виду (2.39), для простой волны получим:

$$\bar{E}_2 = \rho_0 \bar{v}^{\gamma_2}. \quad (2.44)$$

Средняя по времени плотность потока звуковой энергии в этом случае имеет вид:

$$\bar{J}_2 = \frac{5\gamma-3}{4(\gamma-1)} c_0 \rho_0 \bar{v}^{\gamma_2}. \quad (2.45)$$

Подчеркнем, что известное соотношение $\bar{J}_2 = c_0 \bar{E}_2$, как видно из (2.44) и (2.45), выполняется только для среды

Таблица 2

Плотность звуковой энергии и плотность потока звуковой энергии простой волны во втором приближении

	E_2 и J_2 по (1.49), (1.50)	По Андрееву (см. табл. 1)
$E_2(v)$	$\frac{3\gamma-1}{4(\gamma-1)}\rho_0 v'^2 \pm \frac{\rho_0 c_0}{\gamma-1}(v'+v'')$	$\frac{3(\gamma+1)}{4\gamma}\rho_0 v'^2 \pm \frac{\rho_0 c_0}{\gamma}(v'+v'')$
$E_2(p)$	$\frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{1}{\gamma-1}(p'+p'')$	$\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p'^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{1}{\gamma}(p'+p'')$
$E_2(\rho)$	$\frac{c_0^2 \rho'^2}{\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma-1}(\rho'+\rho'')$	$\frac{c_0^2 \rho'^2}{\rho_0} + \frac{c_0^2}{\gamma}(\rho'+\rho'')$
$J_2(v)$	$\frac{\gamma}{\gamma-1}[\rho_0 c_0 v'^2 \pm p_0(v'+v'')]$	$\rho_0 c_0 v'^2 \pm p_0(v'+v'')$
$J_2(p)$	$\frac{3\gamma-1}{4(\gamma-1)}\frac{p'^2}{\rho_0 c_0} + \frac{c_0}{\gamma-1}(p'+p'')$	$\frac{3\gamma-1}{4\gamma}\frac{p'^2}{\rho_0 c_0} + \frac{c_0}{\gamma}(p'+p'')$
$J_2(\rho)$	$\frac{5\gamma-3}{4(\gamma-1)}\frac{c_0^3 \rho'^2}{\rho_0} + \frac{c_0^3}{\gamma-1}(\rho'+\rho'')$	$\frac{5\gamma-3}{4\gamma}\frac{c_0^3 \rho'^2}{\rho_0} + \frac{c_0^3}{\gamma}(\rho'+\rho'')$

с $\gamma = -1$, в которой, как уже отмечалось ранее, форма профиля волны в процессе распространения не меняется. Изменение формы профиля волны приводит к тому, что средние по времени отличаются от средних по пространству [12], а равенство средних по времени средним по пространству для волновых процессов используется при получении соотношения $\bar{J} = c_0 \bar{E}$. Следует также сказать, что при $\bar{\rho}' = 0$ и $\bar{\rho}'' = 0$ в звуковом поле появляется по-

стоянная составляющая скорости

$$\bar{v}^n = \pm \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\bar{v}'^2}{c_0} \quad (2.46)$$

и давления

$$\bar{p}^n = \frac{\gamma - 1}{2} \bar{E}_2. \quad (2.47)$$

Представляет определенный интерес условие отсутствия потока массы в периодическом звуковом поле: $\mathbf{B} = 0$ в (1.56) [12]. Для плотности звуковой энергии простой волны в этом случае получим *) :

$$\bar{E}_2 = \frac{3\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \rho_0 \bar{v}'^2. \quad (2.48)$$

Плотность кинетической энергии не равна плотности потенциальной энергии. Равенство этих энергий возможно только в среде с $\gamma = -1$, в которой волна распространяется без изменения формы. Для плотности потока звуковой энергии в этом случае имеем:

$$\bar{J}_2 = \rho_0 c_0 \bar{v}'^2. \quad (2.49)$$

Здесь также $\bar{J}_2 = c_0 \bar{E}_2$ только при $\gamma = -1$. В звуковом поле есть постоянные составляющие скорости, давления и плотности [12]:

$$\bar{v}^n = \mp \frac{\bar{v}'^2}{c_0}; \quad (2.50)$$

$$\bar{p}^n = \frac{\gamma - 3}{4} \frac{\bar{J}_2}{c_0}; \quad (2.51)$$

$$\bar{\rho}^n = -\frac{\gamma + 1}{4} \frac{\bar{p}'^2}{\rho_0}. \quad (2.52)$$

Как видно из приведенных соотношений, энергетические характеристики простой волны во втором приближении отличаются от используемых обычно в линейной акустике.

*) Для газов с $1 < \gamma < 5/3$ из (2.48) $\bar{E}_2 < 0$, т. е. плотность энергии в звуковом поле меньше плотности энергии в невозмущенной среде. Этот парадоксальный вывод, по-видимому, связан с тем, что (2.48) дает приближенное значение энергии только с точностью до величин второго порядка малости.

§ 4. Решение Ирншоу задачи об излучении простой волны конечной амплитуды колеблющимся поршнем

В этом параграфе будем придерживаться различных представлений решения Ирншоу, приведенных в [13].

Перейдем к анализу решения (2.23) и (2.28). В дальнейшем будем предполагать, что излучается только простая волна в направлении $x > 0$. Тогда, пользуясь (2.32), из (2.23)

$$v = S \left(t - \frac{x}{c_0 + \varepsilon v} \right), \quad (2.53)$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Значение скорости остается постоянным на характеристиках $t - x/(c_0 + \varepsilon v) = \text{const}$. Если в момент t_1 поршень находился в точке x_1 и скорость его была $v(t_1)$, то постоянная характеристики определяется просто и уравнение характеристики таково:

$$t - t_1 = \frac{x - x_1}{c_0 + \varepsilon v(t_1)}. \quad (2.54)$$

Если движение поршня задано в виде функции времени $x = X(t)$, то скорость $v = X_t$ и (2.54) в параметрической форме будет иметь вид

$$t - \tau = \frac{x - X(\tau)}{c_0 + \varepsilon X_t(\tau)}. \quad (2.55)$$

Для скорости в параметрической форме имеем:

$$v = X_t(\tau) H(x - c_0 t), \quad (2.56)$$

где H — единичная ступенчатая функция.

Аналогично записывается решение в лагранжевых координатах. Имея в виду, что локальная скорость распространения возмущения дается (2.34), получаем:

$$t - \tau = a / \left(c_0 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{X_t(\tau)}{c_0} \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \right); \quad (2.57)$$

$$v = X_t(\tau) H(a - c_0 t). \quad (2.58)$$

В отличие от (2.55), где в числитель из-за конечного смещения поршня входит $X(\tau)$, в (2.57) в числитель входит только лагранжева координата.

Как (2.55) — (2.56), так и (2.57) — (2.58) представляют собой решение задачи об излучении движущимся поршнем простой волны, представленное в параметрической форме. Исключение параметра представляет довольно трудную задачу даже в случае сравнительно простого закона движения поршня. Нас в дальнейшем будет интересовать решение в случае колебательного движения поршня*):

$$X(t) = X_0(1 - \cos \omega t). \quad (2.59)$$

Эйлеровы координаты. Найдем решение в эйлеровых координатах. Подставляя (2.59) в (2.55) и (2.56), получим:

$$\omega(t - \tau) = \frac{kx - M(1 - \cos \omega \tau)}{1 + \varepsilon M \sin \omega \tau}; \quad (2.60)$$

$$U = \frac{v}{c_0} = M \sin \omega \tau H(\omega t - kx), \quad (2.61)$$

где введено обозначение $M = \omega X_0 / c_0 = v_{\max} / c_0$.

Исключение параметра из (2.60) и (2.61) может быть сделано разными методами. Можно разложить (2.60) и (2.61) в ряд по малому числу Маха:

$$\omega \tau = \omega t - kx + M(\omega \tau)^{(1)} + M^2(\omega \tau)^{(2)} + \dots, \quad (2.62)$$

$$U = MU^{(1)} + M^2U^{(2)} + \dots \quad (2.63)$$

Подставляя эти соотношения в (2.60) и (2.61) и исключая $\omega \tau$, получим:

$$U^{(1)} = \sin kx; \quad (2.64a)$$

$$U^{(2)} = \left[-\frac{1}{2} + \cos kx - \frac{1}{2} \cos 2kx \right] + \frac{\varepsilon x}{2} \sin 2kx; \quad (2.64b)$$

*) Выбор такого вида функции $X(t)$ может соответствовать реальному движению поршня, поскольку в момент времени $t = 0$ и смещение и скорость поршня равны нулю.

$$U^{(3)} = \frac{\gamma-6}{8} \sin \kappa + \frac{3-\gamma}{4} \sin 2\kappa + \frac{\gamma-2}{8} \sin 3\kappa + \\ + \varepsilon z \left[-\frac{\gamma+3}{8} \cos \kappa + \cos 2\kappa + \frac{\gamma-5}{8} \cos 3\kappa \right] + \\ + (\varepsilon z)^2 \left[-\frac{1}{8} \sin \kappa + \frac{3}{8} \sin 3\kappa \right]; \quad (2.64\text{в})$$

$$U^{(4)} = \left[-\frac{(\gamma+1)^2}{32} + \frac{3\gamma^2+18\gamma-11}{48} \cos \kappa - \right. \\ \left. - \frac{9\gamma-7}{12} \cos 2\kappa - \frac{\gamma^2-10\gamma+7}{16} \cos 3\kappa + \frac{3\gamma^2-18\gamma+11}{96} \cos 4\kappa \right] + \\ + \varepsilon z \left[\frac{\gamma+2}{4} \sin \kappa + \frac{\gamma^2+2\gamma-23}{16} \sin 2\kappa + \right. \\ \left. + \frac{6-3\gamma}{4} \sin 3\kappa + \frac{\gamma^2-14\gamma+17}{32} \sin 4\kappa \right] + \\ + (\varepsilon z)^2 \left[-\frac{1}{8} \cos \kappa - \frac{\gamma+1}{4} \cos 2\kappa + \frac{9}{8} \cos 3\kappa + \frac{\gamma-3}{4} \cos 4\kappa \right] + \\ + (\varepsilon z)^3 \left[-\frac{1}{6} \sin 2\kappa + \frac{1}{3} \sin 4\kappa \right], \quad (2.64\text{г})$$

где $\kappa = \omega t - kx$; $z = kx$.

Соотношения (2.64) вместе с (2.63) дают решение задачи о конечных колебаниях поршня. При $z = 0$ из (2.64)

$$U|_{z=0} = -\frac{1}{2} M^2 + M^2 \cos \omega t + \left[M + \frac{\gamma-6}{8} M^3 \right] \sin \omega t - \\ - \frac{1}{2} M^2 \cos 2\omega t + \frac{3-\gamma}{4} M^2 \sin 2\omega t - \\ - \frac{2-\gamma}{8} M^3 \sin 3\omega t + O(M^4), \quad (2.65)$$

где через $O(M^4)$ обозначены члены порядка более высокого, чем M^3 . Таким образом, несмотря на то, что скорость смещения поршня синусоидальна, движение в эйлеровых координатах в начале координат отличается от синусоидального, причем это отличие $\sim M^2$; помимо составляющих частоты ω есть гармоники с частотами 2ω , 3ω и т. д. и постоянная составляющая. Среднее по времени значение эйлеровой скорости отлично от нуля. Скорость этого «нелинейного ветра» направлена к источнику звука и, как это следует из (2.65), равна с точностью до членов $\sim M^4$:

$$\bar{U} = -\frac{1}{2} M^2. \quad (2.66)$$

Это значение средней по времени скорости второго приближения совпадает с (2.50), полученным, как уже отмечалось, для простой волны при условии, что в звуковом поле нет среднего за период потока массы. Отметим, что возникновение постоянной составляющей и гармоник при $z = 0$ связано с колебательным характером движения и нелинейностью преобразования в этом случае от лагранжевых координат к эйлеровым. «Псевдогармоники» появляются не только в начале координат, но и в любой точке пространства [1]. Действительно, если скорость в координатах Лагранжа

$$v = v_0 \sin(\omega t - ka),$$

то, переходя к эйлеровым координатам $x = a + \xi$, где ξ — смещение, легко видеть, что с точностью до членов $\sim M^2$ в эйлеровой системе координат

$$U(x, t) = M \sin \kappa - \frac{M^2}{2} [1 + \cos 2\kappa],$$

т. е. при чисто синусоидальном движении в лагранжевой системе приемник в эйлеровой системе принимает гармоники и постоянную составляющую. Легко видеть, что при этом из-за постоянной составляющей полупериод положительной скорости не равен полупериоду отрицательной скорости. Поскольку, однако, эти эффекты $\sim M^2$, для экспериментального обнаружения такого рода асимметрии потребовалась бы довольно большая чувствительность приемной аппаратуры, не говоря о том, что другие нелинейные эффекты в значительной мере маскируют эти «псевдогармоники». Это обстоятельство все-таки полезно иметь в виду, так как «псевдогармоники» могут быть относительно велики на малых расстояниях от источника звука.

Форма решения (2.63) — (2.64) показывает, что разложение идет по величинам M и εz . Ряд (2.63) быстро сходится при условии

$$\sigma = \varepsilon M z \ll 1. \quad (2.67)$$

Условие (2.67) соответствует тому, что решение (2.63) — (2.64) пригодно для расстояний, меньших расстояния

образования разрыва, ибо равенство $\sigma = 1$ определяет расстояние образования разрыва [см. (2.92)].

В недиссипативной среде любое сколь угодно малое (но конечное) возмущение должно привести к образованию разрыва, поэтому условие (2.67) даже при $M \ll 1$ (т. е. для характерного для акустики случая) все же может не выполняться на больших расстояниях. Поэтому проведем анализ (2.60) и (2.61) несколько иначе.

Имея в виду, что $\varepsilon M \ll 1$, представим (2.60) в виде ряда:

$$\omega(t - \tau) = z - \sigma \sin \omega\tau + 2\sigma\varepsilon M \sin^2 \omega\tau - \\ - M(1 - \omega\tau) + \varepsilon M^2(1 - \cos \omega\tau) \sin \omega\tau + O(M^3), \quad (2.68)$$

где $\sigma = \varepsilon Mz$. При условии

$$\sigma \gg M, \quad (2.69)$$

т. е. для расстояний от источника звука $x \gg (1/\varepsilon k)$, из (2.68) имеем:

$$\omega\tau = \kappa + \sigma \sin \omega\tau, \quad (2.70)$$

откуда, пользуясь (2.61), получим:

$$\omega\tau = \kappa + \frac{\sigma U}{M}.$$

Подставляя это соотношение в (2.61), получим

$$V = \frac{U}{M} = \sin(\kappa + \sigma V). \quad (2.71)$$

Разложим V в ряд Фурье:

$$V = \sin(\kappa + \sigma V) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\kappa. \quad (2.72)$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \omega\tau \sin n\kappa \cdot d\kappa = \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma); \quad (2.73)$$

здесь при интегрировании было использовано (2.70), J_n — функция Бесселя n -го порядка. Решение в этом

случае имеет вид:

$$U = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin nk. \quad (2.74)$$

Это — решение задачи о колебании поршня при условии (2.69), отличающееся, вообще говоря, от решения (2.63) — (2.64), полученного разложением по малому параметру. Есть, однако, область

$$M \ll \sigma \ll 1, \quad (2.75)$$

где оба решения (2.63) — (2.64) и (2.74) совпадают.

Условие (2.69) эквивалентно тому, что расстояния велики по сравнению с длиной излучаемой волны. Поэтому (2.74) не пригодно для расстояний от источника звука порядка нескольких длин волн. Это следует подчеркнуть, поскольку (2.74) часто используется при сравнении экспериментальных результатов с теорией.

Решение (2.74) разложением в ряд Фурье (2.72) было найдено Бесселем при решении задачи о движении частицы под действием центральной силы. В акустическом случае (задача об излучении поршня при конечных колебаниях) решение (2.74) было получено Фубини. Поэтому решение (2.74) справедливо было бы назвать решением Бесселя — Фубини.

Из решения Бесселя — Фубини амплитуды гармоник скорости приближенно выражаются в виде

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_0 \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\sigma^4}{192} - \frac{\sigma^6}{9168} + \dots \right\}; \\ v_2 &= v_0 \left\{ \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{6} + \frac{\sigma^5}{48} - \frac{\sigma^7}{720} + \dots \right\}; \\ v_3 &= v_0 \left\{ \frac{3}{8} \sigma^2 - \frac{27}{128} \sigma^4 + \dots \right\}; \\ v_4 &= v_0 \left\{ \frac{\sigma^3}{3} - \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где $v_0 = \omega X_0$, $\sigma = \varepsilon Mz$.

Как решение (2.64), полученное разложением по малому числу Маха, так и особенно решение (2.74), представляющее спектральное разложение волны, показывают, что волна по мере распространения становится все более

и более немонахроматической. В спектре волны появляются гармоники, величина которых все более и более

возрастает. На рис. 2 показано изменение спектрального состава волны по (2.74). При $\sigma = 1$, т. е. на расстоянии образования разрыва [см. (2.92)], ряд Бесселя — Фубини (2.74), как известно [14], сходится. При $\sigma = 1$ из (2.74)

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0} = & 0,88 \sin \kappa + \\ & + 0,35 \sin 2\kappa + \\ & + 0,20 \sin 3\kappa + \\ & + 0,14 \sin 4\kappa + \dots, \end{aligned} \quad (2.77)$$

т. е. волна еще не имеет пилообразной формы (см. гл. 3, § 3). Решение Бесселя — Фубини хорошо описывает изменение спектрального состава волны при

больших числах Рейнольдса, или при сравнительно малых Re и малых σ (см. рис. 26 на стр. 156).

При очень малых расстояниях от источника звука (порядка нескольких длин волн) условие (2.69) не выполняется и решение Бесселя — Фубини (2.74) становится непригодным. Однако и для этого случая может быть использовано разложение решения в ряд Фурье. Не зависящая от времени скорость «нелинейного акустического течения» в этом случае равна (см. также [15]):

$$\bar{U} = -\frac{1}{2} M^2 - \frac{e^2}{8} M^4 - \frac{e^4}{8} M^6 - \dots, \quad (2.78)$$

что согласуется с (2.66). Что касается амплитуд гармоник, то на близких расстояниях в (2.74) и (2.76) должны быть внесены коррективы [13].

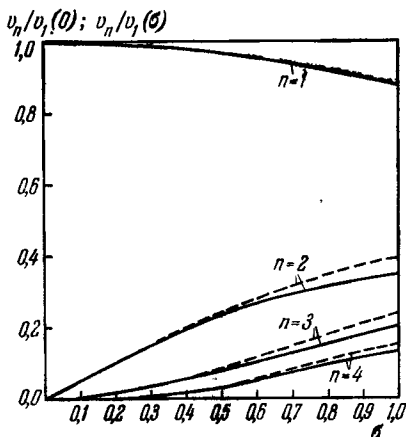


Рис. 2. Зависимость амплитуд гармоник согласно решению Бесселя — Фубини (2.74) от безразмерного расстояния σ (в долях расстояния образования разрыва). Сплошные кривые — $v_n/v_1(\sigma)$, пунктирные кривые — $v_n/v_1(0)$.

Как следует из (2.31), для плоской волны конечной амплитуды перестает быть справедливой простая связь звукового давления со скоростью вида $p - p_0 = \rho_0 c_0 v$.

Действительно, из (2.31) для простой волны

$$p = p_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} = \\ = p_0 \pm \rho_0 c_0^2 U \left\{ 1 \pm \frac{\epsilon}{2} U + \frac{\epsilon}{6} U^2 \pm O(U^3) \right\}. \quad (2.79)$$

Поэтому понятие импеданса как отношения звукового давления к колебательной скорости в нелинейной акустике сложнее, чем в линейной; в частности, как нетрудно видеть, импеданс зависит от амплитуды колебательной скорости. Вводя безразмерное давление $P = p / \rho_0 c_0^2$, представим (2.79) в безразмерном виде

$$P - \gamma^{-1} = \pm U \left[1 \pm \frac{\epsilon}{2} U + \frac{\epsilon}{6} U^2 \pm O(U^3) \right]. \quad (2.80)$$

Аналогично (2.63) представим (2.80) в виде ряда

$$P - \gamma^{-1} = P^{(1)}M + P^{(2)}M^2 + \dots \quad (2.81)$$

Подставляя в (2.80) U из (2.63) и сравнивая с (2.81), для волны, распространяющейся в направлении $x > 0$, получим:

$$P^{(1)} = U^{(1)}; \quad P^{(2)} = U^{(2)} + \frac{\epsilon}{2} [U^{(1)}]^2; \dots \quad (2.82)$$

Из (2.82) и (2.64) получаем:

$$P^{(1)} = \sin \kappa; \quad (2.83a)$$

$$P^{(2)} = \left[-\frac{3-\gamma}{8} + \cos \kappa - \frac{\gamma+5}{8} \cos 2\kappa \right] + \epsilon z \left[\frac{1}{2} \sin 2\kappa \right]; \quad (2.83b)$$

$$P^{(3)} = \left[\frac{\gamma-13}{16} \sin \kappa + \sin 2\kappa - \frac{\gamma+19}{48} \sin 3\kappa \right] + \\ + \epsilon z \left[-\frac{1}{4} \cos \kappa + \cos 2\kappa - \frac{3}{4} \cos 3\kappa \right] + \\ + (\epsilon z)^2 \left[-\frac{1}{8} \sin \kappa + \frac{3}{8} \sin 3\kappa \right]; \quad (2.83b)$$

$$\begin{aligned}
P^{(4)} = & \left[-\frac{\gamma^2 + 6\gamma + 5}{256} + \frac{9\gamma - 17}{48} \cos \kappa + \frac{\gamma^2 - 74\gamma + 181}{192} \cos 2\kappa + \right. \\
& \left. + \frac{5\gamma - 13}{16} \cos 3\kappa + \frac{\gamma^2 + 70\gamma - 187}{768} \cos 4\kappa \right] + \\
& + \varepsilon z \left[\frac{\gamma + 3}{8} \sin \kappa + \frac{\gamma - 23}{16} \sin 2\kappa + \frac{15 - 3\gamma}{8} \sin 3\kappa + \right. \\
& \left. + \frac{7\gamma - 25}{32} \sin 4\kappa \right] + (\varepsilon z)^2 \left[-\frac{1}{8} \cos \kappa - \frac{\gamma + 1}{8} \cos 2\kappa + \right. \\
& \left. + \frac{9}{8} \cos 3\kappa + \frac{\gamma - 7}{8} \cos 4\kappa \right] + (\varepsilon z)^3 \left[-\frac{1}{6} \sin 2\kappa + \frac{1}{3} \sin 4\kappa \right].
\end{aligned}
\tag{2.83г}$$

Таким образом, давление при $z = 0$ (в месте покоящегося поршня), так же как и скорость, не изменяется по закону движения поршня, что связано с тем, что задача решается в эйлеровых координатах.

Аналогично может быть рассмотрен спектр звукового давления. При выполнении условия (2.69), т. е. на расстояниях от источника звука, больших нескольких длин волн, безразмерное звуковое давление по Бесселю — Фубини имеет вид

$$P - \gamma^{-1} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin n\kappa. \tag{2.84}$$

Сравнивая это с безразмерной скоростью, даваемой (2.74), можно сказать, что для каждой из гармоник справедлива связь между давлением гармоник p_n и скоростью v_n такая же, как в монохроматической волне:

$$p_n = \rho_0 c_0 v_n. \tag{2.85}$$

Из решения Бесселя — Фубини (2.74) и (2.84) следует также следующее соотношение:

$$p - p_0 = \rho_0 c_0 v, \tag{2.86}$$

справедливое, как известно, для плоских волн малой амплитуды. Имея в виду адиабатическое распространение звука, из (2.86) получим:

$$v = \frac{c_0}{\gamma} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma - 1 \right],$$

что отличается от аналогичного соотношения для простой волны (2.31) уже квадратичными членами. Несмотря на это расхождение, указывающее еще раз на приближенный характер решения Бесселя — Фубини, экспериментальные результаты для гармоник малых номеров (см. гл. 4) хорошо согласуются с этим решением.

В случае невыполнения условия (2.69) решение разложением в ряд Фурье также может быть найдено (см. [13]), однако оно сложнее, чем (2.84). В частности, помимо того, что (2.85) становится уже не пригодным, появляется, как это следует из (2.83), постоянная составляющая звукового давления (см. также [15]):

$$\overline{\frac{p - p_0}{\rho_0 c_0^2}} = \frac{\gamma - 3}{8} M^2 - \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 5)}{256} M^4 + \dots \quad (2.87)$$

С точностью до членов второго порядка малости это среднее по времени давление совпадает с (2.51), полученным при условии отсутствия среднего переноса массы в звуковом поле.

Рассмотрим среднюю за период плотность энергии, излучаемую поршнем. Из табл. 2, имея в виду (2.78) и (2.87), получим:

$$\overline{E}_2 = \frac{3\gamma - 5}{8(\gamma - 1)} \rho_0 v_0^2, \quad (2.88)$$

что, естественно, совпадает с (2.48), так как решение задачи о колебании поршня по крайней мере с точностью до величин второго порядка малости найдено при условии отсутствия потока массы в звуковом поле. Для плотности потока звуковой энергии из табл. 2 получим результат, совпадающий с (2.49):

$$\overline{J}_2 = \frac{\rho_0 c_0 v_0^2}{2}. \quad (2.89)$$

В невязкой среде даже при малых (но конечных) числах Маха на конечном расстоянии (через конечный промежуток времени) произойдет пересечение характеристик, что означает многозначность функций, характеризующих звуковое поле. Многозначность этих функций может иметь место только при образовании разрыва.

Вообще говоря, данная характеристика должна пересечься с ближайшей соседней характеристикой. Это значит, что разрыв в волне образуется не сразу на всем фронте волны, а только на части его. Затем постепенно по мере распространения волны все большая и большая часть фронта будет занята разрывом, и волна перейдет в пилообразную. На плоскости $t - x$ кривая разрыва будет представлять огибающую точек пересечения характеристик. Условие этого может быть записано в виде

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} = 0. \quad (2.90)$$

Пользуясь этим условием, определяем из (2.55) кривую разрыва в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= X(\tau) + \frac{[c_0 + \varepsilon X_t(\tau)] [c_0 + (\varepsilon - 1) X_t(\tau)]}{\varepsilon X_{tt}(\tau)}; \\ t_p &= \tau + \frac{c_0 + (\varepsilon - 1) X_t(\tau)}{\varepsilon X_{tt}(\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Если движение поршня задано в виде (2.59), то $X(0) = X_t(0) = 0$ и из (2.91) первый разрыв на фронте волны, бегущей по невозмущенной среде, имеет координаты:

$$kx_p^0 = \frac{1}{M\varepsilon}, \quad \omega t_p^0 = \frac{1}{M\varepsilon}. \quad (2.92)$$

Последующие разрывы при колебательном движении вида (2.59) будут образовываться на расстоянии несколько меньшем, чем x_p^0 , причем для всех последующих разрывов это расстояние будет одинаковым [13]:

$$kx_p^{(n)} = \frac{1}{\varepsilon M} \left[1 - \frac{\gamma^2}{2} M^2 + O(M^4) \right], \quad (2.93)$$

что отличается от (2.92) членами $\sim M^2$ и более высокого.

Следует отметить, что расстояние образования разрыва (2.92) и (2.93) будет одинаковым в лагранжевых и эйлеровых координатах, так как разрыв образуется в точках, где смещение и скорость равны нулю.

Лагранжевы координаты. Аналогично тому, как это делалось в эйлеровых координатах, из (2.57) и (2.58)

можно найти решение задачи о колебании поршня в лагранжевых координатах. Разложение скорости по числам Маха вида (2.63) дает:

$$U^{(1)} = \sin \kappa'; \quad (2.94a)$$

$$U^{(2)} = \varepsilon z' \cdot \frac{1}{2} \sin 2\kappa'; \quad (2.94б)$$

$$U^{(3)} = \varepsilon z' \left[-\frac{\gamma}{8} \cos \kappa' + \frac{\gamma}{8} \cos 3\kappa' \right] + \\ + (\varepsilon z')^2 \left[-\frac{1}{8} \sin \kappa' + \frac{3}{8} \sin 3\kappa' \right]; \quad (2.94в)$$

$$U^{(4)} = \varepsilon z' \frac{\gamma(3\gamma-1)}{48} \left[\sin 2\kappa' - \frac{1}{2} \sin 4\kappa' \right] + \\ + (\varepsilon z')^2 \frac{\gamma}{4} [\cos 4\kappa' - \cos 2\kappa'] + \\ + (\varepsilon z')^3 \frac{1}{6} [2 \sin 4\kappa' - \sin 2\kappa'], \quad (2.94г)$$

где $\kappa' = \omega t - ka$; $z' = ka$.

В отличие от (2.64), из (2.94) на поршне будем иметь:

$$\bar{U}|_{a=0} = \sin \omega t.$$

Это решение совпадает с получаемым из решения аналогичной задачи Эйри, которое анализировалось в ряде работ [12, 15, 16]. Пользуясь (2.94), а также (2.31), можно определить величины второго порядка в лагранжевых координатах; усреднение по времени дает:

$$\bar{v}'' = 0, \quad (2.95)$$

$$\bar{\rho}'' = \frac{3 - \gamma}{4} \frac{\rho_0 \bar{v}''^2}{c_0^2}, \quad (2.96)$$

$$\bar{p}'' = \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 \bar{v}''^2. \quad (2.97)$$

Средняя по времени плотность звуковой энергии по Андрееву (см. табл. 2)

$$\bar{E}_2 = \frac{3(\gamma + 1)}{4\gamma} \rho_0 \bar{v}''^2. \quad (2.98)$$

Отношение плотности потенциальной энергии к плотности кинетической $(\gamma + 3)/2\gamma$. Отметим, что (2.98) отличается

от соответствующего значения энергии в эйлеровом объеме (2.88); в среде с $\gamma = -1$, где волна распространяется без изменения формы, \bar{E}_2 из (2.98) обращается в нуль. Средняя по времени плотность потока энергии по Андрееву

$$\bar{J}_2 = \rho_0 c_0 \bar{v}^2, \quad (2.99)$$

что совпадает с (2.89).

При расстояниях $a \gg (1/\varepsilon k)$, т. е. на расстояниях от источника звука, больших нескольких длин волн, может быть найден лагранжев аналог решения Бесселя — Фубини, не отличающийся, впрочем, от (2.74) ничем, кроме того, что теперь уже $z = z'$. Поскольку решение Бесселя — Фубини является решением с точностью до величин $\sim M$, а величины более высокого порядка малости отброшены, этот результат не является неожиданным, так как в этом случае решение в эйлеровых и лагранжевых координатах имеет одинаковый вид.

Подводя итог, можно сказать, что задача о конечных колебаниях поршня, рассмотренная в этом разделе, может решаться различными методами. Разложение решения по малому числу Маха в эйлеровых координатах приводит к своеобразной трудности: в эйлеровых координатах поршень (колеблющийся синусоидально в лагранжевых координатах) совершает довольно сложное колебание, что приводит к появлению псевдогармоник даже у источников звука. Это различие между системами координат проявляется, если учитывать в решении члены $\sim M^2$ и более высокого порядка малости. При решении задач с точностью до членов $\sim M$ вид решения не зависит от выбора системы координат. Монохроматическая волна, излучаемая поршнем, по мере распространения искажается. В идеальной среде искажение формы волны происходит беспрепятственно вплоть до образования разрыва на конечном расстоянии от поршня. Степень искажения зависит от безразмерного числа $\sigma = \varepsilon z M$. Искажение может быть представлено как возникновение, взаимодействие и рост гармоник в процессе распространения волны. Спектральное представление искажения удобно тем, что многие экспериментальные методы исследования нелинейного искажения основаны на выделении спектральных составляющих из волны конечной амплитуды (см. гл. 4).

§ 5. Немонохроматическая плоская волна

Выше был рассмотрен случай монохроматической плоской волны. Имея в виду, что принцип суперпозиции в нелинейной акустике теряет силу, а также то, что интенсивные звуковые сигналы или шумы (особенно в воздухе) могут быть и чаще всего бывают немонохроматическими, представляется интересным рассмотреть этот случай. Принципиально решение Ирншоу (2.55), (2.56) может быть применено при любом движении поршня, однако при сложном движении задача в значительной мере усложняется. Решение этой задачи, близкое к решению Бесселя — Фубини, рассмотрено в [17]. Здесь будет рассмотрено решение во втором приближении по [18].

Для простой волны, бегущей в направлении $x > 0$, из риманового решения (2.23) для скорости следует:

$$v(t, x) = \varphi\left(t - \frac{x}{c+v}\right). \quad (2.100)$$

При $x = 0$ имеем $v(t) = \varphi(t)$; будем считать, что φ — периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega$. Пользуясь (2.32), для малых чисел Маха из (2.100) получим:

$$v(t, x) = \varphi\left(t - \frac{x}{c_0} + \frac{x^2}{c_0^2} v\right). \quad (2.101)$$

Для периодического процесса можно выбрать время достаточно большим так, чтобы $t > \frac{x}{c_0}(1 + \epsilon M)$. Разлагая (2.101) в ряд и считая при этом, что

$$\frac{x\epsilon}{c_0^2} \max |\varphi'| \ll 1 \quad (2.102)$$

(это условие эквивалентно тому, что рассматриваются расстояния, меньшие расстояния образования разрыва в немонохроматической волне), получим:

$$v(t, x) = \varphi\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \left[1 + \frac{x\epsilon}{c_0^2} \varphi'\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \dots\right]. \quad (2.103)$$

Пользуясь (2.103), можно определить, как изменится в

результате нелинейного взаимодействия некогерентный сигнал. Если при $x = 0$ ряд Фурье функции $\varphi(t)$

$$v(t, 0) = \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (2.104)$$

а при $x > 0$

$$v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(x) \cos n\omega t + B_n(x) \sin n\omega t], \quad (2.105)$$

компоненты спектра $\{A_n(x); B_n(x)\}$ с точностью до величин второго порядка малости связаны с компонентами исходного спектра $\{a_n; b_n\}$ соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n1} \cos nkx + B_{n1} \sin nkx, \\ B_n &= A_{n1} \sin nkx - B_{n1} \cos nkx, \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_{n1} &= a_n + \frac{\omega x \varepsilon}{2c_0^2} \left\{ \sum_{p,s=0}^{\infty} s [a_p b_s (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - a_s b_p (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3)] \right\}, \\ B_{n1} &= -b_n + \frac{\omega x \varepsilon}{2c_0^2} \left\{ \sum_{p,s=0}^{\infty} s [a_p a_s (\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3) + b_p b_s (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)] \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

здесь

$$\sigma_1 = \sigma(n + p - s); \quad \sigma_2 = \sigma(n - p + s); \quad \sigma_3 = \sigma(-n + p + s),$$

причем

$$\sigma(m) = \frac{\sin m\pi}{m\pi} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Как всегда, n -ю гармонику на расстоянии x от источника звука можно представить в виде

$$v_n = v_n(x) \cos[n\omega t + \delta_n(x)],$$

где

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \sqrt{A_{n1}^2 + B_{n1}^2}, \\ \delta_n(x) &= \arctg(-A_n / B_n). \end{aligned}$$

Таким образом, при нелинейном взаимодействии компонент спектра изменяется не только амплитудная харак-

теристика, но также и фазовая. Соотношения (2.106) — (2.107) дают решение для расстояний, удовлетворяющих условию (2.102).

Особенности нелинейного изменения спектра немонахроматической волны зависят от вида функции $\varphi(t)$. Качественно влияние нелинейного взаимодействия приводит к следующим результатам.

1) Исходный спектр ограниченной ширины стремится расшириться в обе стороны, так как помимо суммарных составляющих также нарастают и разностные. По (2.107), полученному во втором приближении, ширина спектра в результате нелинейного взаимодействия удваивается по сравнению с исходной шириной. Быстрее растут высокочастотные «крылья» спектра.

2) Если в исходном спектре были «пропущены» какие-то спектральные компоненты, то нелинейное взаимодействие приводит к тому, что эта «пропущенная» компонента появится и будет расти, т. е. можно сказать, что нелинейное взаимодействие стремится выравнять спектральную плотность немонахроматического сигнала. Хотя полученные результаты относятся к периодическому сигналу, качественно эти результаты могут быть применены для анализа нелинейного взаимодействия в шумовом сигнале. Для шумового сигнала, по-видимому, также должна наблюдаться тенденция к превращению в «белый шум», связанная с нелинейным взаимодействием спектральных компонент шума. Следует, однако, ожидать, что обычное для шумовых источников сферическое расхождение должно в значительной мере уменьшить эффект нелинейной трансформации спектра.

Из вопросов распространения немонахроматической волны представляет определенный интерес один частный случай: взаимодействие двух волн, распространяющихся в одном направлении. Когда в (2.104) отличны от нуля a_r и a_q , причем $r > q$, из (2.106) и (2.107) следует, что отличны от нуля только B_{r-q} , B_r , B_q , B_{r+q} , B_{2r} , B_{2q} , причем

$$B_{r \pm q} = \frac{\omega(r \pm q) a_r a_q \varepsilon x}{2c_0^2}. \quad (2.108)$$

Таким образом, в результате нелинейного взаимодействия в спектре появляются комбинационные тона —

разностной и суммарной частоты; амплитуда волны разностной частоты нарастает медленнее, чем суммарной; амплитуда комбинационного тона пропорциональна произведению амплитуд исходных тонов (правило Гельмгольца). Возникновение комбинационных тонов иногда используется для экспериментального исследования нелинейного взаимодействия волн.

§ 6. Отражение волн конечной амплитуды. Стоячие волны конечной амплитуды

До сих пор рассматривалось распространение волн в среде без препятствий. В среде с препятствиями возможны отражения, образование стоячих волн. Законы отражения акустических волн малой амплитуды, как известно, являются следствием принципа Гюйгенса, который, в свою очередь, основывается на принципе суперпозиции волн. Поскольку для волн конечной амплитуды принцип суперпозиции не выполняется, можно предполагать, что волны конечной амплитуды будут иметь некоторые особенности при отражении от препятствий, и законы отражения для них должны быть в некоторой мере уточнены. В качестве примера можно качественно рассмотреть нормальное отражение цуга пилообразной волны от абсолютно мягкой (свободной) границы. В случае волн малой амплитуды, как известно, на границе происходит изменение фазы давления на 180° , т. е. волна давления превращается в волну разрежения. Скачок давления в пилообразной волне при таком отражении должен перейти в скачок разрежения, а эта форма волны является неустойчивой, и в процессе дальнейшего распространения, как показывают экспериментальные работы [19, 20], волна изменяется так, что скачок разрежения все более и более сглаживается.

В настоящее время, однако, вопросы отражения волн конечной амплитуды разработаны еще очень слабо. В [21] рассмотрен во втором приближении частный случай отражения плоской волны при падении под углом 45° на жесткую преграду. Законы отражения для второй гармоники при этом получены такими же, как и в линейной акустике. Отметим также, что во втором приближении при

отражении плоской волны возникает дополнительно цилиндрическая волна *).

Вопрос о величине амплитуды звукового давления в плоской волне на твердой преграде рассматривался в [22]. В линейной акустике, как известно, на полностью отражающей преграде звуковое давление удваивается; в стоячей волне конечной амплитуды (см. далее) узлы (а следовательно и пучности) давления смещаются в пространстве; звуковое давление на твердой преграде в результате этого меняется во времени. Отношение этого давления к давлению в волне при отсутствии преграды, таким образом, зависит не только от амплитуды волны, но и от времени.

Более исследованным является вопрос о стоячих волнах конечной амплитуды. Поскольку для волн конечной амплитуды не выполняется принцип суперпозиции, стоячую волну нельзя уже рассматривать как наложение прямой и отраженной волн. Возможно несколько различных постановок задач о стоячих волнах конечной амплитуды.

1) Начальная задача: между двумя неподвижными параллельными стенками задано в момент времени $t = 0$ звуковое поле $v = v(x)$; определяется звуковое поле во все последующие времена. Эта задача была рассмотрена в [1, 23], считая, что стенки абсолютно жесткие (бесконечный импеданс), а распределение поля синусоидально. Начальное распределение звукового поля при $t = 0$:

$$U = M \sin kx. \quad (2.109)$$

Таким образом, это задача о собственных колебаниях столба газа (или жидкости), нагруженного на концах бесконечным импедансом. Решение уравнений гидродинамики невязкой жидкости, полученное с точностью до

*) Если рассматривать, как в линейной теории, мнимый источник, то эта задача представляет собой задачу о пересечении под прямым углом двух волн конечной амплитуды. При таком пересечении (см. § 7 этой главы) в жидкостях и газах вне области взаимодействия волны комбинационных частот отсутствуют; рассеяния звука на звуке нет. Возникновение цилиндрической волны в [21] не противоречит, однако, этому условию, так как здесь мы имеем дело с неограниченными плоскими волнами и цилиндрическая волна существует в «области взаимодействия».

членов порядка M^2 при расстоянии между стенками $L = n(\lambda/2)$ ($n = 1, 2, \dots$) (в линейной акустике, как известно, это условие соответствует резонансу), имеет вид:

$$U = M \sin kx \cos \omega t - \frac{\varepsilon}{2} \pi M^2 \frac{t}{T} \sin 2kx \cos 2\omega t + \\ + \frac{\gamma-3}{16} M^2 \sin 2kx \sin 2\omega t, \quad (2.110)$$

где T — период волны. Поскольку это решение найдено с точностью до членов $\sim M^2$, для времен $t > T$ различие между лагранжевыми и эйлеровыми координатами несущественно. Появление в (2.110) члена $\sim t$ приводит к

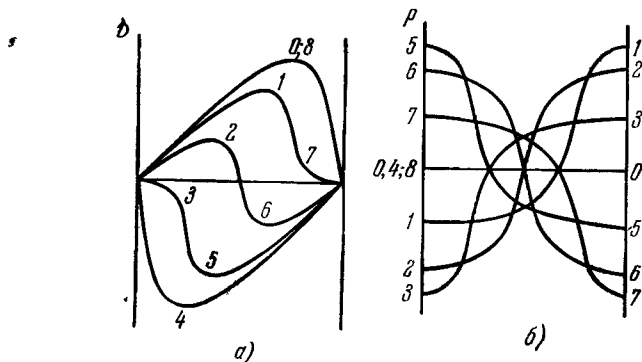


Рис. 3. Изменение распределения колебательной скорости (а) и давления (б) в стоячей волне; мгновенные формы даны через $1/8 T$.

тому, что форма профиля колебательной скорости в волне изменяется (рис. 3, а). Естественно, что нарастающие во времени члены есть и в давлении. Положение нулей (узлов) скорости не меняется со временем в пространстве, а нули (узлы) давления (рис. 3, б) смещаются. Это обстоятельство полезно иметь в виду при измерении скорости звука в интерферометрах со стоячей волной и особенно при измерении (по коэффициенту стоячей волны) по крайней мере больших импедансов и коэффициентов отражения в трубах. Неограниченно нарастающее во вре-

мени решение для гармоник, естественно, получается в начальной задаче тогда, когда импедансы стенок бесконечны, среда идеальна — нет ни вязкости, ни теплопроводности, ни потерь на границах; нарастание гармоник в этом случае происходит вплоть до образования разрывов в стоячей волне. В вязкой и теплопроводящей среде образование разрыва тормозится диссипативными процессами.

Собственные колебания столба воздуха в трубе, нагруженной на обоих концах нагрузками с одинаковыми конечными импедансами, были рассмотрены в [2]. Из-за некратности собственных частот в этом случае непрерывно нарастающих во времени эффектов второго порядка не будет. Во втором приближении возникают бения, частота которых

$$f = \frac{\Omega - 2\omega}{2\pi}, \quad (2.111)$$

где Ω — частота обертона, ω — частота первичного колебания. В том случае, когда концы трубы открыты (нулевые импедансы на концах), собственные частоты кратны, однако из-за ортогональности фазы распределенной вынуждающей силы к фазе колебаний удвоенной частоты последние возникать не будут.

2) Другой, практически более интересный случай вынужденных колебаний, когда одна из твердых стенок неподвижна, а другая колеблется [24]. Граничные условия:

$$U(0, t) = M \sin \omega t,$$

$$U(L, t) = 0.$$

Решение в лагранжевых координатах для $L = (2n - 1)\lambda/8$ (нерезонансная задача) с точностью до членов $\sim M^2$ дает:

$$U(a, t) = M \frac{\sin k(L-a)}{\sin kL} \sin \omega t - \\ - \frac{\varepsilon}{4} \frac{M^2}{\sin^2 kL} k(L-a) \cos 2k(L-a) \cos 2\omega t. \quad (2.112)$$

Как видно из (2.112), в этом случае стоячая волна искажается, однако неограниченно нарастающих во времени

(или в пространстве) решений нет; величина гармоник достигает какого-то стационарного значения (в этой задаче процессы установления не рассматривались), которое определяется соотношением частоты внешней силы и собственных нормальных частот промежутка между стенками.

Рассмотрим далее задачу о вынужденных колебаниях столба воздуха в трубе длиной L . С одной стороны трубы заданы смещения в виде

$$\xi'|_{a=0} = \xi_0 \cos \omega t.$$

На конце труба открыта и давление равно давлению p_0 в окружающей среде, т. е. из (1.33) и (1.6)

$$\xi'_a|_{a=L} = 0.$$

В первом приближении из (1.38) имеем обычное однородное волновое уравнение, решение которого, удовлетворяющее этим граничным условиям:

$$\xi' = \xi_0 \frac{\cos k(L-a)}{\cos kL} \cos \omega t. \quad (2.113)$$

Из (1.38) уравнение второго приближения имеет вид:

$$\xi''_{tt} - c_0^2 \xi''_{aa} = c_0^2 (\gamma + 1) \xi'_{aa} \xi'_a. \quad (2.114)$$

Подставляя (2.113) в (2.114), найдем решение (2.114), удовлетворяющее нулевым граничным условиям:

$$\xi''|_{a=0} = \xi''_a|_{a=L} = 0. \quad (2.115)$$

Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi'' = & \frac{\gamma + 1}{16} \frac{k \xi_0^2}{\cos^2 kL} \left\{ \sin 2k(L-a) - \sin 2kL + 2ka + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} \frac{\sin 2ka}{\cos 2kL} - ka \cos 2k(L-a) \right] \cos 2\omega t \right\}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Смещение как первого, так и второго порядка неограниченно возрастает на открытом конце трубы при «линейном резонансе», определяющемся условием

$$\cos kL = 0, \quad (2.117)$$

или при

$$L = \frac{(2n-1)\lambda}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.118)$$

Более интересным является то, что колебания удвоенной частоты также «неограниченно возрастают» *) при условии

$$\cos 2kL = 0, \quad (2.119)$$

т. е. при

$$L = \frac{(2n-1)\lambda}{8} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.120)$$

В дальнейшем эти резонансы (2.120) будем называть нелинейными в отличие от линейных резонансов (2.118).

Схема резонансов показана на рис. 4, где сплошными линиями отмечены линейные, а пунктирными — нелинейные резонансы. Физический смысл нелинейных резонансов довольно прост: вторая гармоника попадает на одну из собственных частот (линейных резонансов) трубы.

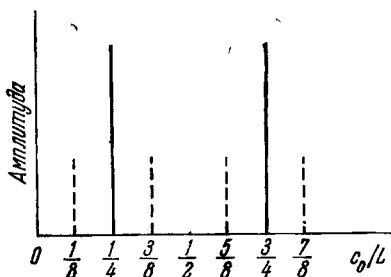


Рис. 4. Схема резонансов конечных колебаний трубы.

В ограниченных колебательных системах возможны случаи, когда эффекты второго порядка могут и не развиться сколько-нибудь существенным образом. Причиной этого может быть либо «распределенная дисперсия», либо «сосредоточенная дисперсия» в граничных условиях. Эффекты второго порядка могут вообще не возникнуть, когда вынуждающая сила (см., например, правую часть уравнения (2.114)) ортогональна к смещениям второго порядка; эффекты второго порядка не возникают, как уже

*) Использование метода последовательных приближений предполагает, что отношение величин второго порядка к величинам первого порядка имеет порядок числа Маха (в данном случае ξ_0/λ). Поэтому для величин второго порядка термин «неограниченно возрастают» следует понимать условно в том смысле, что это отношение может достигнуть числа Маха.

отмечалось, при свободных колебаниях открытой с обеих сторон трубы, при распространении сдвиговой волны конечной амплитуды (см. гл. 8, § 3) в неограниченном твердом теле.

§ 7. Рассеяние звука на звуке

При пересечении неоднородных звуковых волн принципиально возможно перераспределение звуковых полей вне области пересечения, вызванное тем, что одна из звуковых волн прошла по среде, возмущенной другой неоднородной волной конечной амплитуды. Это перераспределение, например, вызванное стационарными вихревыми потоками рассеивающей волны, может происходить без изменения частоты (аналогично обычному рассеянию). Более характерным является рассеяние с образованием волн комбинационных частот (аналогично комбинационному рассеянию). Последний эффект является типично нелинейным. Рассмотренное в литературе рассеяние звука на звуке относится к последнему типу и его правильнее было бы называть комбинационным рассеянием звука на звуке. Как уже отмечалось, под комбинационным рассеянием звука на звуке понимается возможность наблюдения волн комбинационных частот вне области взаимодействия двух ограниченных звуковых пучков. Здесь будет рассмотрено рассеяние в недиссипативной среде без дисперсии, в которой возможна только одна скорость распространения звуковых возмущений (газы или жидкости); особенности рассеяния звука на звуке в твердых телах рассмотрены ниже в гл. 8, § 3.

Возвращаясь к фононным представлениям (см. § 1 — общие замечания к этой главе), рассмотрим процесс образования фонана суммарной частоты. Этот процесс должен удовлетворять законам сохранения энергии и квазиимпульса:

$$\left. \begin{aligned} h\omega + h\omega' &= h\omega'', \\ hk + hk' &= hk''. \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

Для жидкостей и газов без дисперсии скорость звука не зависит от частоты, и второе из условий (2.121)

запишется в виде

$$\omega i + \omega' j = \omega'' s, \quad (2.122)$$

где i , j и s — единичные векторы в направлении распространения соответствующих фононов. На основании первого из условий (2.121) и (2.122) приходим к выводу, что векторы i , j и s коллинеарны, т. е. взаимодействие возможно только тогда, когда взаимодействующие фононы движутся в одном направлении. Условия

(2.121) необходимы для взаимодействия, поэтому можно сказать, что в этом случае рассеяния звука на звуке нет. При наличии дисперсии, вызванной вязкостью или релаксацией, взаимодействие может несколько отличаться от параллельного, однако при малой дисперсии в жидкостях и газах это отличие настолько мало, что практически им можно пренебречь.

Вопрос о комбинационном рассеянии звука на звуке так просто решается с точки зрения элементарных законов сохранения для фононных взаимодействий. С точки зрения классической гидродинамики задача о рассеянии звука на звуке представляет значительные трудности. Связано это с тем, что эту задачу, согласно определению рассеяния звука на звуке, необходимо решать для ограниченных звуковых пучков. Решения, учитывающие дифракцию звука на ограниченной апертуре, до сих пор ни в одной из задач нелинейной акустики, даже только во втором приближении, насколько нам известно, не получены. Тем более это сложно было бы сделать для случая двух пересекающихся звуковых пучков.

Рассмотренная до сих пор схема рассеяния показана на рис. 5. В направлении оси Ox_1 распространяется плоская волна; пучок этой волны хорошо коллимирован

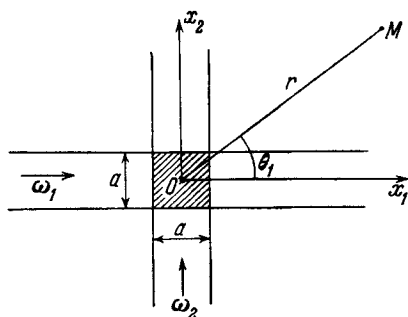


Рис. 5. Схема рассеяния звука на звуке.

и имеет ширину a . В направлении оси Ox_2 распространяется также хорошо коллимированная плоская волна. В [25, 26] рассмотрено только пересечение волн под прямым углом; в [27] помимо такого же пересечения рассмотрено еще и взаимодействие волн под произвольными углами. Волны взаимодействуют в объеме $\sim a^3$ (см. рис. 5). Рассеянная волна комбинационной частоты наблюдается в точке M , отстоящей от центра области взаимодействия на расстоянии $|r|$.

В работе [25] теоретически и экспериментально было установлено рассеяние звука на звуке. Последующие теоретические работы [26, 27], а затем и экспериментальная работа [28] дали отрицательный результат (в [28] образование волны комбинационной частоты наблюдалось, однако не под теми углами, что следуют из теории [25]; это «рассеяние», как следует из дальнейшего, находит во всяком случае качественное объяснение).

Теория комбинационного рассеяния звука на звуке обычно рассматривается на основе уравнения движения в форме Лайтхилла (см. гл. 10, § 1):

$$\square^2 \rho = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}; \quad (2.123)$$

здесь

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

— оператор Даламбера и для невязкой среды

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (p - \rho c_0^2) \delta_{ij}.$$

Уравнение Лайтхилла (2.123) является точным уравнением невязкой сжимаемой среды. Оно удобно тем, что в правую его часть, как легко видеть, входят только величины второго порядка малости. В дальнейшем нас будут интересовать эффекты второго порядка малости. Пользуясь методом последовательных приближений, можно записать первое приближение (2.123)

$$\square^2 \rho' = 0 \quad (2.124)$$

и второе приближение

$$\square^2 \rho'' = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}'_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.125)$$

где

$$T'_{ij} = \rho_0 v_i' v_j' + (p'' - \rho'' c_0^2) \delta_{ij}.$$

Следуя [26], можно записать (2.125) в векторной форме (для определения величин первого порядка малости в правой части (2.125) использовались линеаризованные уравнения гидродинамики):

$$\square^2 \rho'' = \frac{1}{\rho_0} \left\{ \square^2 \left(\frac{1}{2} \rho'^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 v'^2}{c_0^2} \right) - \nabla^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} \rho'^2 + \frac{\rho_0^2 v'^2}{c_0^2} \right] \right\} \quad (2.126)$$

или, если масса жидкости в звуковом поле не меняется,

$$\square^2 \rho'' = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \square^2 E - \nabla^2 \left[2T + \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} U \right] \right\}, \quad (2.127)$$

где $E = T + U$ — плотность звуковой энергии по (1.54), $T = \rho_0 v'^2/2$ — кинетическая энергия, $U = c_0^2 \rho'^2/2\rho_0$ — потенциальная энергия.

Рассмотрим далее схему на рис. 5. Очевидно, что величины, характеризующие звуковое поле, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \rho' = \rho_1 + \rho_2, \quad (2.128)$$

где индексы относятся к соответствующим звуковым пучкам. Рассеянная волна комбинационной частоты принципиально может возникнуть только под действием источников, входящих в правую часть (2.127), вида

$$E_{12} = T_{12} + U_{12}, \quad \text{где } T_{12} = \frac{\rho_0 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{2}; \quad U_{12} = \frac{c_0^2 \rho_1 \rho_2}{2\rho_0}.$$

Уравнение для рассеянной волны очевидно имеет вид:

$$\square^2 \rho'' = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \square^2 E_{12} - \nabla^2 \left[2T_{12} + \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} U_{12} \right] \right\}. \quad (2.129)$$

Ограничиваясь случаем взаимодействия двух монохроматических волн, частоты которых ω_1 и ω_2 , можно привести

уравнение (2.129) к виду

$$\square^2 \rho'' = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \square^2 \left[E_{12} - \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{\rho_0}{\omega_1 \omega_2 c_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} W_{12} \right] - \right. \\ \left. - 2\nabla^2 T_{12} - \frac{\rho_0}{c_0^4} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2} \right\}, \quad (2.130)$$

где

$$W_{12} = \frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \left[\frac{\partial^2 U_{12}}{\partial t^2} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) U_{12} \right]^{1/2}.$$

Для звуковых пучков, пересекающихся под прямым углом, $(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) = 0$ и $T_{12} = 0$; в правой части (2.130) остаются только члены, содержащие U_{12} под знаком \square^2 , и

$$\rho'' = \frac{1}{c_0^2} \left[U_{12} - \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{\rho_0}{\omega_1 \omega_2 c_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} W_{12} \right]. \quad (2.131)$$

Поскольку вне области взаимодействия $U_{12} = W_{12} = 0$, рассеянное поле $\rho'' = 0$, т. е. вне области взаимодействия нет рассеянной волны.

Приведенное выше рассмотрение относилось к случаю ограниченных, хорошо коллимированных звуковых пучков. Под хорошей коллимацией пучков понималась возможность получения звуковых пучков с резко выраженными границами и вектором колебательной скорости, имеющим одинаковое направление по всему сечению звукового пучка (при этом можно было считать, что в (2.130) $T_{12} = 0$). При этих же условиях хорошей коллимации в [27] было показано, что рассеянной волны не будет и при пересечении звуковых пучков под произвольным углом друг к другу, за исключением угла 0° , когда пучки распространяются в одном направлении. Это те же самые условия, которые получаются из элементарных законов сохранения (2.124) для фонон-фононных взаимодействий.

Есть здесь, однако, ряд трудностей, о которых необходимо сказать: хорошо коллимированные звуковые пучки, как нетрудно видеть, не удовлетворяют уравнениям гидродинамики; в излучении ограниченного поршня всегда есть компоненты скорости, направленные тангенциально к неподвижной поверхности поршня. Такое излучение может быть представлено как суперпозиция плоских волн, волновые векторы части из которых не нормальны к по-

верхности поршня. С этим, в частности, связано наличие боковых лепестков у излучателей конечных размеров. Существование «косых» волн может привести к тому, что в пересекающихся под углом звуковых пучках все-таки будут волны разных частот, бегущие в одном направлении; такие волны обязательно будут взаимодействовать и дадут «рассеянную» волну комбинационной частоты. Конкретная величина этой «рассеянной» волны зависит, естественно, от особенностей колебаний источников звука, от их размеров по сравнению с длинами волн, от характера закрепления границ излучателей и от ряда других, зачастую трудно учитываемых в теории факторов.

Возможность взаимодействия или кажущееся рассеяние в экспериментальных условиях получается также по целому ряду причин, имеющих различную природу. В том случае, когда в области взаимодействия находятся какие-либо неоднородности (пузырьки, рассеивающие первичные волны препятствия и др.), в результате рассеяния первичных волн на этих препятствиях появляются волны, идущие в одном и том же направлении; эти волны, как уже отмечалось, взаимодействуют с образованием комбинационных частот. Такая же возможность не исключена и в том случае, когда область взаимодействия однородна, но в качестве взаимодействующих используются пучки недостаточно хорошо коллимированные, о чем говорилось уже выше, или имеет место отражение (хотя бы и небольшое) от стенок экспериментального сосуда или помещения, приводящее к параллельному взаимодействию. В этой связи следует подчеркнуть, что экспериментально довольно большие уровни комбинационных частот наблюдаются при $\theta = 0$, т. е. в одном из взаимодействующих пучков, что, по-видимому, связано с появлением в этом пучке (из-за отражений или особенностей характеристики направленности) слабого излучения другой частоты, распространяющегося в том же направлении.

Можно показать, что при падении под некоторым углом на плоскость, колеблющуюся с частотой ω_1 , волны частоты ω_2 отраженная волна будет модулирована как по амплитуде, так и по частоте. Оба этих вида модуляции приводят к тому, что появляются волны комбинационных частот вида $n\omega_1 \pm m\omega_2$. Такая связь двух излучателей в

эксперименте возможна за счет боковых лепестков характеристики направленности излучателей или в результате отражений и ошибочно может быть принята за рассеяние звука на звуке.

Комбинационные частоты могут быть получены, наконец, если две волны попадают на приемник. Здесь имеется аналогия с псевдозвуком, возникающим в турбулентном потоке. Радиационное давление в этом случае имеет составляющую, меняющуюся во времени с комбинационными частотами, которые также могут быть ошибочно приняты за рассеянный звук.

Таким образом, трудности экспериментального осуществления безграничной среды (полное устранение отражений) в лабораторных условиях, а также трудности создания идеально коллимированных звуковых пучков в значительной мере усложняют экспериментальную проверку теории рассеяния звука на звуке. По-видимому, можно считать установленным, что при идеальной постановке эксперимента во втором приближении рассеяние звука на звуке в среде без дисперсии не должно было бы наблюдаться. Это следует хотя бы из того, что результаты теории Ингарда — Придмор-Брауна [25] экспериментально не подтверждаются, а отличие эксперимента от теории Вестервелта [26, 27] хотя бы качественно может быть объяснено отличием условий эксперимента от идеализированных условий теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйхенвальд А. А., Акустические волны большой амплитуды. Успехи физ. наук 14, 552 (1934).
2. Исакович М. А., Нелинейные эффекты в некоторых задачах акустики. Акуст. ж. 6, 321 (1960).
3. Исакович М. А., Изгибные волны конечной амплитуды, сохраняющие форму профиля при распространении. Акуст. ж. 6, 121 (1960).
4. Werth G. C., Delsasso L. P., Attenuation of repeated shock waves in tubes. J. Acoust. Soc. Am. 25, 59 (1953).
5. Jones R. C., Fifty horsepower siren. J. Acoust. Soc. Am. 18, 371 (1946).
6. Розенберг Л. Д., Сиротюк М. Г., Концентратор для получения ультразвуковых колебаний сверхвысокой интенсивности при частоте 1 Мгц. Акуст. ж. 9, 61 (1963).

7. Eckart C., Vortices and streams caused by sound waves. *Phys. Rev.* **73**, 68 (1948).
8. Poisson S. D., Memoire sur la theorie du son. *J. ecole polytechn.* (Paris) **7**, 364 (1808).
9. Stokes G. G., On a difficulty in the theory of sound. *Phil. Mag.* **33**, 349 (1848).
10. А у р у G. B., On a difficulty in the problem of sound. *Phil. Mag.* **34**, 401 (1849).
11. Earnshaw S., On the mathematical theory of sound. *Trans. Roy. Soc. (London)* **150**, 133 (1860).
12. Андреев Н. Н., Über die energieausdrucke in der akustik. *J. Phys. USSR* **2**, 306 (1940).
13. Blackstok D. T., Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 9 (1962).
14. Ватсон Д. Н., Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
15. Westervelt P. J., The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas. *J. Acoust. Soc. Am.* **22**, 319 (1950).
16. Андреев Н. Н., О некоторых величинах второго порядка в акустике. *Акуст. ж.* **1**, 3 (1955).
17. Kessler H. C., Equivalent Eulerian boundary conditions for finite-amplitude piston radiation. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1958 (1962).
18. Зарембо Л. К., О нелинейном искажении плоской волны в недиссипативной среде. *Акуст. ж.* **7**, 189 (1961).
19. Embleton T., The propagation and reflection of sound pulses of finite amplitude. *Proc. Phys. Soc. (London)*, **B69**, 382 (1956).
20. Breazeal M. A., Lester W. W., Demonstration of the «least stable waveform» of finite amplitude waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **33**, 1803 (1961).
21. Фэнь Шао-сунь, Отражение волн конечной амплитуды. *Акуст. ж.* **6**, 491 (1960).
22. Blackstok D. T., Normal reflection of finite amplitude plane waves in liquids. *Proc. III Internat. Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959. Vol. 1*, p. 309.
23. Андреев Н. Н., О стоячих звуковых волнах большой амплитуды. Сб. «Исследования по экспериментальной и теоретической физике. Памяти Г. С. Ландсберга». М. 1959, стр. 53.
24. Гольдберг З. А., Плоские акустические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Диссертация, Акустич. ин-т АН СССР, 1958.
25. Ingard U., Pridmore-Brown D. C., Scattering of sound by sound. *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 367 (1956).
26. Westervelt P. J., Scattering of sound by sound. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 199 (1957).
27. Westervelt P. J., Scattering of sound by sound. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 934 (1957).
28. Bellin J. L. S., Beyer R. T., Scattering of sound by sound. *J. Acoust. Soc. Am.* **32**, 339 (1960).
29. Dean L. W., Interaction between sound waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1039 (1962).
30. Lanvstad V., Tjötta S., Problem of sound scattering by sound. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1045 (1962).
- 7 Л. К. Зарембо, В. А. Красильников

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ. ВЯЗКАЯ ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ СРЕДА

§ 1. Метод малого параметра

Распространение волн в среде с вязкостью и теплопроводностью сопровождается потерей звуковой энергии. Энтропия среды в этом случае, вообще говоря, возрастает, и к нелинейным уравнениям сохранения массы и импульса добавляется еще нелинейное уравнение переноса тепла (1.23). Теория распространения волн конечной амплитуды в этом случае усложняется из-за того, что процесс в волне, строго говоря, нельзя считать адиабатическим. Отклонение от адиабатичности, однако, можно считать малым, так как даже при переходе через фронт ударной волны изменение энтропии — величина третьего порядка малости. Это позволяет линеаризовать уравнение переноса тепла и, следовательно, считать, что диссипативные процессы линейны. Изменение энтропии при этом происходит только за счет теплопроводности. Поглощение монохроматической волны малой амплитуды при $\alpha_0 \lambda \ll 1$ определяется коэффициентом поглощения:

$$\alpha_0 = \frac{b' \omega^2}{2\rho_0 c_0^3},$$

где $b' = \frac{4}{3} \eta + \eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)$, κ — коэффициент теплопроводности.

Волну конечной амплитуды, во всяком случае на некоторых расстояниях от источника звука, из-за нелинейных искажений нельзя уже считать монохроматической. Качественно влияние диссипативных процессов на распространение такой немонахроматической волны может быть представлено как более сильное (коэффициент поглоще-

ния $\alpha_0 \sim \omega^2$) поглощение высокочастотных гармонических составляющих. Можно сказать, что в результате поглощения гармоник процесс искажения профиля волны в диссипативной среде тормозится потерями. Относительное влияние на искажение волны диссипативных и инерционных (нелинейных) членов уравнений гидродинамики для процесса, близкого к адиабатическому, может быть охарактеризовано, как обычно, числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{v\lambda}{2\nu v'},$$

где v — амплитуда скорости в волне, λ — длина звуковой волны, $\nu' = b'/\rho_0$. При больших числах Re инерционные члены в уравнениях гидродинамики преобладают над вязкими; в этом случае распространение волны конечной амплитуды до разрыва по своему характеру близко к распространению в идеальной (невязкой и теплопроводящей) среде. Наоборот, при малых числах Re вязкие члены преобладают над инерционными; при очень малых числах Re влияние потерь может быть настолько сильным, что волна практически не будет искажаться; в этом случае можно пользоваться линейным приближением. Имеющиеся экспериментальные результаты по искажению волн в вязких и теплопроводящих средах подтверждают возможность такого разделения.

Поскольку уравнения гидродинамики в случае диссипативной среды не могут быть решены точно, в настоящее время существует ряд приближенных решений. область применения которых ограничивается определенными значениями акустических чисел Рейнольдса. Практически для достаточно интенсивных звуков в таких средах, как воздух, малопоглощающие жидкости (особенно в области низких частот звукового и ультразвукового диапазонов), акустические числа Рейнольдса достаточно велики и нелинейные эффекты, связанные с искажением формы профиля волны, проявляются весьма сильно. Как и в случае недиссипативной среды, в поглощающей среде может быть введен малый параметр, позволяющий линеаризовать нелинейные гидродинамические уравнения.

В отличие от идеальной среды, где для характеристики процессов достаточно было двух параметров: акустиче-

ского числа Маха и параметра, характеризующего нелинейность адиабаты, в случае диссипативной среды число параметров, вообще говоря, равно пяти, что практически исключает возможность разложения по малому параметру в общем случае. Можно, однако, воспользоваться, как это делается обычно, тем, что изменение энтропии в акустической волне мало, и считать процессы в звуковой волне конечной амплитуды достаточно близкими к адиабатическим. Это позволяет воспользоваться методом малого параметра для определения искажения волны конечной амплитуды в диссипативной среде.

Применим преобразование времени, координат и переменных звукового поля вида

$$x_i' = \frac{x_i}{X}; \quad t' = \frac{t}{T}; \quad V = \frac{v}{\tilde{v}}; \quad R = \frac{p}{\tilde{p}} \quad (3.1)$$

к уравнениям вязкой жидкости (1.3) и (1.21), где используется также условие адиабатического распространения звука в виде (1.8). Воспользуемся также тем, что, как и для невязкой жидкости, $X \sim \lambda$, $T \sim (1/\omega)$, $N = (\tilde{v}T/X) \sim \sim M$ — малый параметр. Тогда при $m = 0$ и $F = 0$

$$\frac{\partial R}{\partial t'} + N \nabla' (RV)'_t = 0; \quad (3.2)$$

$$N \frac{\partial V}{\partial t'} + N^2 (V \nabla') V = - \nabla' R - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \nabla' R^2 + \\ + N^2 \frac{\eta}{\tilde{v} \tilde{\rho} X} \Delta' V + \frac{(\eta' + \frac{1}{3} \eta)}{\tilde{v} \tilde{\rho} X} N^2 \nabla' \nabla' V. \quad (3.3)$$

Последние два члена в (3.3) имеют порядок

$$\frac{N^2 b}{\tilde{v} \tilde{\rho} X} \sim \frac{N^2}{Re'}$$

где

$$Re' = \frac{v \rho \lambda}{b}$$

— с точностью до постоянного коэффициента акустическое число Рейнольдса *).

*) В том случае, когда еще учитывается теплопроводность, в акустическое число Рейнольдса помимо сдвиговой и объемной вязкости входит еще и коэффициент теплопроводности (см. стр. 99).

Можно рассмотреть три различных случая [1].

1) $Re \sim N$. Поскольку N — малый параметр (порядка числа Маха), этот случай соответствует малым числам Re , т. е. распространению волны в вязкой среде. Вязкие члены уравнения (3.3) войдут в уравнения первого приближения. Переходя к исходным переменным, получим:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = c_0^2 \nabla \rho_0 = 0. \quad (3.4)$$

Уравнения первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -c_0^2 \nabla \rho' + \eta \Delta \mathbf{v}' + \left(\eta' + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \nabla \mathbf{v}'. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Уравнения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho''}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}'' &= -\nabla \rho' \mathbf{v}', \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho'' - \eta \Delta \mathbf{v}'' - \left(\eta' + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \nabla \mathbf{v}'' &= \\ &= -\rho' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \nabla \rho'^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

2) $Re \sim 1$. Вязкие члены — порядка инерционных. Вязкость не входит в уравнения первого приближения. Система уравнений первого приближения для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Уравнения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho''}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}'' &= -\nabla \rho' \mathbf{v}', \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho'' &= -\rho_0 (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \rho' \nabla \rho' + \\ &+ \eta \Delta \mathbf{v}' + \left(\eta' + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \nabla \mathbf{v}'. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

3) $Re \sim (1/N)$. Случай больших чисел Рейнольдса; вязкость не входит ни в уравнения первого приближения,

ни в уравнения второго приближения. Уравнения первого и второго приближений получаются из (3.7) и (3.8), считая $\eta = \eta' = 0$. В уравнения третьего приближения вязкость уже войдет. Часто этот случай рассматривается приближенно следующим образом: предполагается, что диссипативные процессы играют несущественную роль вплоть до расстояний порядка расстояния образования разрыва; таким образом, до образования разрыва волна искажается, как в среде без потерь. Диссипативные процессы влияют на ширину фронта образующейся пилообразной волны и на затухание пилообразной волны. В этом смысле случай больших чисел Рейнольдса является даже несколько более простым, чем случай $Re \sim 1$.

§ 2. Плоские волны

а) Малые числа Рейнольдса [1, 2, 3]

Пользуясь уравнениями (3.4) — (3.6) для малых чисел Рейнольдса, найдем решение уравнений первого приближения. Для граничных условий $v|_{x=0} = v_0 \cos \omega t$ при малом поглощении звука на расстоянии длины волны $\alpha_0 \lambda \ll 1$ решение (3.5) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} v' &= v_0 e^{-\alpha_0 x} \sin(\omega t - kx), \\ \rho' &= \rho_0 \frac{v'}{c_0}, \\ p &= \rho_0 c_0 v', \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

где α_0 — коэффициент поглощения волны малой амплитуды,

$$\alpha_0 = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \quad \text{и} \quad b = \frac{4}{3} \eta + \eta'.$$

Решение уравнений второго приближения дает (см. помимо [1] еще и [2, 3]):

$$\left. \begin{aligned} v'' &= U_0 (e^{-2\alpha_0 x} - e^{-4\alpha_0 x}) \sin 2(\omega t - kx), \\ \rho'' &= \frac{\rho_0}{c_0} v'', \\ p'' &= \rho_0 c_0 v'', \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где

$$U_0 = \frac{\varepsilon}{2} Re_0 v_0, \quad \varepsilon = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad Re_0 = \frac{\rho_0 v_0 \lambda}{2\pi b}.$$

Как видно из (3.10), амплитуда второй гармоники линейно растет при малых $\alpha_0 x$, когда искажение формы профиля волны преобладает над диссипативными потерями, причем скорость нарастания гармоники такая же, как в идеальной среде, по (2.76), затем достигает максимума на расстоянии, иногда называемом расстоянием стабилизации второй гармоники:

$$x_s'' = \frac{\ln 2}{2\alpha_0} = \frac{Re_0}{kM_0} \ln 2. \quad (3.11)$$

На этом расстоянии рост гармоники компенсируется убылью ее за счет поглощения. Затем по прохождении расстояния стабилизации гармоника начинает убывать. Затухание второй гармоники происходит быстрее, чем основного тона, но медленнее, чем просто волны удвоенной частоты. Отношение v''/v' имеет максимум в точке

$$x_s = \frac{\ln 3}{2\alpha_0} = \frac{Re_0}{kM_0} \ln 3, \quad (3.12)$$

отстоящей от источника звука на большем расстоянии, чем расстояние стабилизации второй гармоники. Это расстояние может быть названо расстоянием стабилизации волны; вблизи этого расстояния волна распространяется так, что форма ее профиля меняется незначительно из-за компенсации искажения поглощением. Следует подчеркнуть, что расстояние стабилизации волны отличается от расстояний стабилизации гармоник. На расстоянии стабилизации волны дифференциальный коэффициент поглощения имеет максимальное значение (см. § 4 этой главы). Из (3.9) и (3.10) следует, что на расстоянии x_s отношение амплитуд

$$g_{2\max} = \left(\frac{v''}{v'} \right)_{\max} = \frac{\varepsilon Re_0}{3\sqrt{3}}. \quad (3.13)$$

В пилообразной волне (см. § 3 этой главы) с нулевой шириной фронта это отношение $g_2 = 1/2$. Поскольку решение (3.13) пригодно для $Re_0 \ll 1$, $g_{2\max} \ll 1/2$ и форма

волны далека от пилообразной. Следует сказать, что условие $\varepsilon Re_0 \ll 1$ эквивалентно условию $2a_0 x_p \gg 1$, где x_p — расстояние образования разрыва в невязкой среде, даваемое (2.92), т. е. волна успевает сильно затухнуть до расстояния, на котором мог бы произойти разрыв. Таким образом, при малых числах Re диссипативные процессы препятствуют образованию разрыва; волна наиболее сильно искажена в области стабилизации; за областью стабилизации искажение в результате влияния поглощения звука уменьшается.

б) Средние числа Рейнольдса

При средних числах $Re \sim 1$ вязкость, как это следует из (3.7), не входит в уравнения первого приближения. Как показывает анализ уравнений второго приближения [1], получается нарастающая в пространстве вторая гармоника. В этом случае вязкость и теплопроводность не могут препятствовать образованию разрыва; волна постепенно переходит от синусоидальной к пилообразной с шириной фронта, зависящей от числа Рейнольдса. В математическом отношении этот случай, пожалуй, даже более сложен, чем случай больших чисел Рейнольдса. Расчет искажения формы профиля волны в [4] был проведен аналогично тому, как это делалось в [2, 5]. Предполагалось, что при распространении в вязкой среде искажение формы происходит так же, как в идеальной среде, а поглощение гармоник — по обычным законам волн малой амплитуды с соответствующими частотами. Результаты такого квазилинейного метода определения искажения дают для амплитуды звукового давления n -й гармоники:

$$p_n(\sigma) = A_n(\sigma) - B_n(\sigma) + C_n(\sigma) - D_n(\sigma) + E_n(\sigma) - \dots, \quad (3.14)$$

где

$$A_n(\sigma) = \frac{2p_0 J_n(n\sigma)}{n\sigma}, \quad (3.15a)$$

$$B_n(\sigma) = \frac{p_0}{\varepsilon Re_0} \left[\sum_{s=1}^{\infty} 2J_{n+2s}(n\sigma) - J_n(n\sigma) \right], \quad (3.15b)$$

$$C_n(\sigma) = \frac{np_0}{(\varepsilon Re_0)^2} \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) J_{n+2s-1}(n\sigma), \quad (3.15\text{в})$$

$$D_n(\sigma) = \frac{n^2 p_0}{(\varepsilon Re_0)^3} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 J_{n+2s}(n\sigma), \quad (3.15\text{г})$$

$$E_n(\sigma) = \frac{n^3 p_0}{(\varepsilon Re_0)^4} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{n+2(s+r)+1}(n\sigma), \quad (3.15\text{д})$$

где $\sigma = \varepsilon k x M_0$. Отметим, что выражение для A_n не отличается от решения Бесселя — Фубини [см. (2.84)].

Ряд для $p_n(\sigma)$ при $\sigma \leq 1$ сходится абсолютно. Расчет первой, второй и третьей гармоник по (3.14) и (3.15) показан на рис. 6, где приведены как значения $p_n(x)/p_1(0)$, так и $p_n(x)/p_1(x)$. Расстояние, на котором образуется разрыв, при $Re \sim 1$ [6]

$$x_p' = \frac{x_p}{1 - \alpha_0 x_p} = \frac{x_p}{1 - \frac{1}{2\varepsilon Re_0}},$$

где x_p — расстояние образования разрыва в невязкой и нетеплопроводящей среде [см. (2.92)], т. е. влияние вязкости и теплопроводности приводит к увеличению x_p' .

В [7] было найдено решение при $Re > 1$ для области, где волна имеет стабильную форму. Для этой области в лагранжевых координатах звуковое давление имеет вид:

$$p = \frac{p_0}{\varepsilon Re_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\omega t - ka)}{\text{sh } n(\beta + \alpha_0 a)}, \quad (3.16)$$

где β — постоянная величина, зависящая от амплитуды. При $a = 0$ и $n\beta \ll 1$ для достаточно больших n форма волны близка к пилообразной. В пилообразной волне $p_1 = 2p_0/\pi$ и из (3.16) можно получить $\beta \simeq \text{arc sh}(\pi/2\varepsilon Re_0)$. На достаточно больших расстояниях, где в (3.16) остается только первый член ряда и $\alpha_0 a \gg \beta$,

$$p = \frac{2p_0}{\varepsilon Re_0} e^{-\alpha_0 a} \sin(\omega t - ka), \quad (3.17)$$

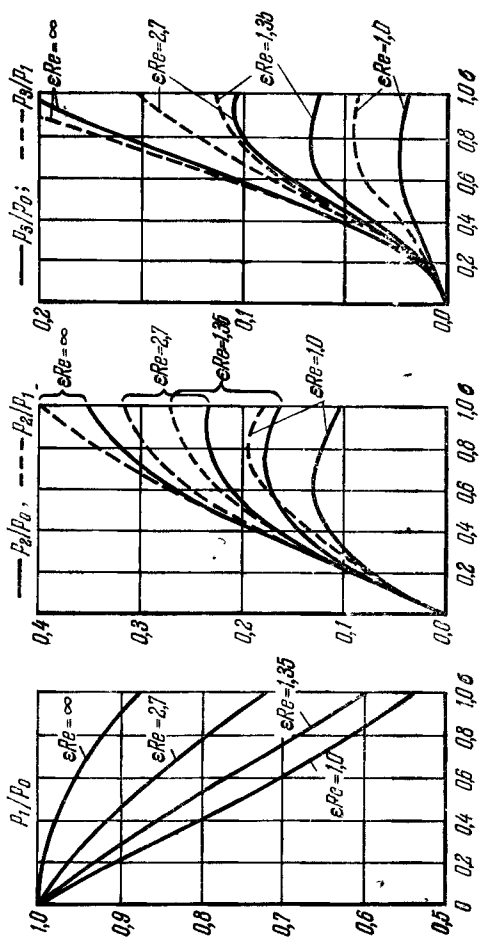


Рис. 6. Рассчитанное по (3.15) изменение спектрального состава волны в зависимости от безразмерного расстояния σ (в долях расстояния образования разрыва).

т. е. на больших расстояниях за областью стабилизации волна переходит в затухающую синусоидальную волну, амплитуда которой не зависит от амплитуды p_0 исходной пилообразной волны.

в) Большие числа Рейнольдса

Следует здесь сказать, что рассматриваемый случай $Re \gg 1$ все-таки относится к акустической области, так как одновременно предполагается, что акустические числа Маха малы. Случай невязкой среды ($Re \rightarrow \infty$) и малых акустических чисел Маха уже рассмотрен в разделе о невязкой среде. До расстояния образования разрыва эти решения пригодны при $Re \gg 1$; после образования разрыва на фронте волны начинают играть существенную роль диссипативные процессы, и для определения структуры фронта они должны приниматься во внимание. Распространение акустических волн при больших числах Re рассматривалось в [8]. Используя то, что при малых числах Маха форма волны в системе координат, двигающейся вместе с волной со скоростью звука, меняется медленно (см. также [9]), можно показать, что уравнения гидродинамики в этом случае сводятся к уравнению теплопроводности. Для скорости в волне (в эйлеровых координатах) можно получить:

$$v(\tau, x) = \frac{2\alpha_0}{\varepsilon k^2} \frac{d}{d\tau} [\ln \Phi(\tau, x)], \quad (3.18)$$

где

$$\tau = t - \frac{x}{c_0},$$

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha_0 x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon Re_0 \cos \xi - \frac{(\omega\tau - \xi)^2}{4\alpha_0 x}} d\xi = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n(\varepsilon Re_0) e^{-n^2 \alpha_0 x} \cos n\omega\tau, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $I_n(\varepsilon Re_0)$ — функция Бесселя n -го порядка мнимого аргумента.

Анализ (3.19) легче проводить для интегрального представления $\Phi(\tau, x)$. Для $x < x_p$, где x_p — расстояние образования разрыва, как легко видеть, подинтегральное выражение имеет острый максимум в точке ξ_0 , определяемой из условия

$$\sin \xi_0 = \frac{z_0 - \omega\tau}{\sigma}; \quad (3.20)$$

здесь $\sigma = \varepsilon Mz$, $z = kx$. Разлагая подинтегральное выражение в ряд вблизи ξ_0 , можно получить для скорости в неявном виде

$$\omega\tau = \arcsin\left(\frac{v}{v_0}\right) - \sigma\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad (3.21)$$

где v_0 — амплитуда колебательной скорости при $x = 0$.

Форма волны для различных $\omega\tau$ может быть получена графическим построением, как это показано на рис. 7,

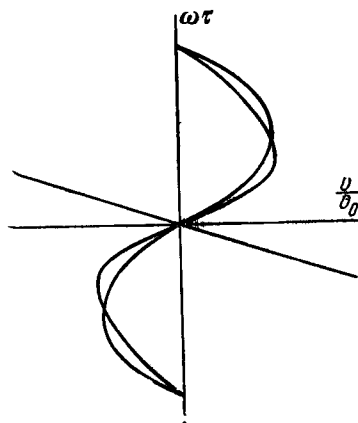


Рис. 7. Графическое определение формы волны по (3.21).

где по оси абсцисс отложено v/v_0 , а по оси ординат — $\omega\tau$. Как видно из рисунка, форма волны представляет синусоиду, деформированную в результате того, что в (3.21) есть еще член с угловым коэффициентом σ . В (3.21) не входят ни вязкость, ни теплопроводность; искажение волны при $Re \gg 1$ до расстояния образования разрыва происходит так же, как в идеальной среде. При $\sigma = 1$ в волне образуется разрыв; это расстояние, естественно, совпадает с расстоянием образования разрыва в идеальной среде (2.92). Легко видеть, что условие $\varepsilon Re_0 \gg 1$

эквивалентно условию малого поглощения до расстояния разрыва: $2\alpha_0 x_p \ll 1$.

На расстояниях $x \simeq (\pi/2)x_p$ за местом образования разрыва формируется пилообразная волна. Для $\sigma \sim \sim 1 + (1/Re_0)$ анализ подинтегрального выражения (3.19)

приводит к колебательной скорости в пилообразной волне:

$$v = \frac{v_0}{1 + \sigma} \left(-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \frac{\omega\tau}{\delta} \right) - \pi < \omega\tau < \pi, \quad (3.22)$$

где $\delta = \kappa/\lambda$ — безразмерная ширина фронта (κ — ширина фронта), имеющая вид:

$$\delta = \frac{(1 + \sigma)}{\pi} \frac{1}{\varepsilon R e_0}. \quad (3.23)$$

Ширина фронта минимальна в области образования разрыва ($\sigma \sim 1$) и увеличивается по мере распространения разрыва пропорционально $\alpha_0 x$. К аналогичному результату для δ приводит рассмотрение диссипативных процессов на фронте слабого разрыва (см. [10]).

Из (3.22) следует, что уменьшение амплитуды скорости или затухание пилообразной волны не зависит от диссипативных коэффициентов (вязкости и теплопроводности) среды. Это обстоятельство характерно для пилообразной волны, хотя в конечном счете потеря энергии обусловлена диссипацией при переходе через разрыв. На этом мы более подробно остановимся далее. При $\alpha_0 x \sim \pi/2$ ширина фронта волны, как это следует из (3.22), станет равной $\lambda/2$; пилообразная волна переходит в обычную синусоидальную волну. При $\alpha_0 x \gg 1$, т. е. на далеких расстояниях за областью разрыва, в (3.19) можно ограничиться только двумя первыми членами ряда, и для скорости в этом случае получается:

$$v = \frac{v_0}{\varepsilon R e_0} e^{-\alpha_0 x} \cos \omega\tau. \quad (3.24)$$

С точностью до постоянного коэффициента это совпадает с (3.17). Из (3.24) следует один существенный вывод, характерный для распространения волн конечной амплитуды с образованием разрывов. На этих дальних расстояниях амплитуда затухающей волны (3.24) не зависит от амплитуды колебания v_0 источника звука. Увеличение v_0 не приводит к увеличению амплитуды волны, т. е., иначе говоря, нелинейные искажения в среде ограничивают сверху максимальные интенсивности, которые могут быть переданы на заданное расстояние. Когда расстояние образования разрыва меньше, чем расстояние между источником и при-

емником звука, поглощение пилообразной волны столь велико, что дальнейшее повышение излучаемой звуковой энергии не повышает звуковую энергию в точке приема [11, 12].

Передача звуковой энергии с помощью плоских пилообразных волн ограничена сверху определенными предельными значениями амплитуды колебания источника звука. Действительно, из (3.22) при увеличении ν_0 амплитуда принимаемой пилообразной волны стремится к предельному значению $\nu_{\text{пред}} \approx \lambda c_0 / 2\pi \epsilon L$, где L — расстояние между источником и приемником звука. Амплитуды большие, чем $\nu_{\text{пред}}$, не могут быть получены при любом (конечно, когда еще применимы представления о слабом разрыве) увеличении ν_0 . Это накладывает довольно жесткие ограничения на передаваемую акустическую мощность. Например, для воды на расстояние $L \approx 100 \lambda$ не может быть передана с помощью плоской волны интенсивность звука большая, чем $\sim 100 \text{ вт/см}^2$, что качественно согласуется с экспериментом (см., например, рис. 31 на стр. 171).

§ 3. Пилообразные волны

Как было показано в предыдущих разделах, при $Re \gg 1$ для плоской волны в среде на расстоянии $\sigma \approx 1$ образуются слабые периодические разрывы. Искажение формы волны продолжается и за расстоянием образования разрыва, вплоть до образования на расстояниях порядка $\sigma \approx \pi/2$ стабильной формы волны. Такой стабильной, т. е. мало меняющей форму в некоторой области, волной является пилообразная волна. Этот термин несколько условен. Под пилообразной волной в дальнейшем понимается волна, ширина фронта которой много меньше длины волны. Все дальнейшие соотношения этого параграфа, приведенные для формы профиля волны, аппроксимирующего реальную волну, следует рассматривать как приближенные.

Пилообразная волна является стабильной формой первоначально синусоидальной волны. Немонохроматическая волна после образования разрыва, вообще говоря, может

иметь форму, отличающуюся от пилообразной. Ширина фронта пилообразной волны при больших числах Рейнольдса по (3.23) составляет малую часть от длины волны. Для пилообразной волны с безразмерной шириной фронта δ давление в некоторой точке звукового поля может быть представлено в виде разложения в ряд Фурье:

$$p = \frac{2P^{(0)}}{\pi(1-\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin n\pi\delta}{n\pi\delta} \sin n\omega t, \quad (3.25)$$

где $P^{(0)}$ — амплитуда давления в пилообразной волне.

Приведем несколько используемых ниже соотношений для пилообразной волны. Отношение амплитуды n -й гармоники к амплитуде первой гармоники из (3.25):

$$g_n = \frac{p_n}{p_1} = \frac{\sin n\pi\delta}{n^2 \sin \pi\delta}. \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) может быть использовано для измерения ширины фронта, если известно, что форма волны близка к пилообразной [10].

Следует подчеркнуть, что g_n отличается от отношения амплитуды n -й гармоники к амплитуде пилообразной волны:

$$\frac{p_n}{P^{(0)}} = \frac{1}{n} \frac{2 \sin n\pi\delta}{\pi(1-\delta)n\pi\delta}. \quad (3.27)$$

Из (3.27) получим связь амплитуды давления первой гармоники с амплитудой пилообразной волны:

$$p_1 = \frac{2P^{(0)}}{\pi(1-\delta)} \frac{\sin \pi\delta}{\pi\delta}. \quad (3.27a)$$

Поток звуковой энергии (интенсивность звука) в случае плоской пилообразной волны

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T p v dt \simeq \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p^2}{\rho_0 c_0} dt = \frac{2 [P^{(0)}]^2}{\pi^2 (1-\delta)^2 \rho_0 c_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2 n\pi\delta}{(n\pi\delta)^2}. \quad (3.28)$$

Здесь использовано справедливое в линейной акустике соотношение $v = p/\rho_0 c_0$. Из римажового решения для

простой волны (2.31) следует:

$$v = \frac{p}{\rho_0 c_0} - \frac{\epsilon}{2} \frac{c_0}{\gamma^2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + \dots \quad (3.29)$$

и, следовательно, в (3.28) откинуты члены $\sim M^2$. Соотношение (3.28) имеет простой вид в случае идеальной пилообразной волны ($\delta = 0$):

$$J = \frac{[P^{(0)}]^2}{3\rho_0 c_0} \quad (3.30)$$

Формула (3.30) отличается от соотношения для интенсивности синусоидальной волны, известного из линейной акустики:

$$J = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c_0} \quad (3.31)$$

где p_0 — амплитуда волны *).

Ряд особенностей распространения, поглощения и других эффектов, связанных с пилообразными волнами, будет рассмотрен в соответствующих разделах.

§ 4. Поглощение волн

Поглощение интенсивных звуковых волн может быть связано с различного рода процессами, происходящими в среде. В жидкостях, например, может возникнуть кавитация, которая приведет к резкому уменьшению передаваемой через среду энергии, что может быть интерпретировано как увеличение затухания звука. Возможны и другие процессы (эмульгирование, диспергирование, деполимеризация и т. д.), на которые затрачивается энергия звука. Влияние всех этих процессов на поглощение еще недостаточно изучено, и в этом разделе мы не будем их рассма-

*) Поскольку поток энергии в недиссипативной среде должен сохраняться, из (3.30) и (3.31) следует:

$$P^{(0)} = \sqrt{1,5} p_0,$$

т. е. максимальное значение давления в пилообразной волне больше амплитуды исходной синусоидальной волны. Этот парадоксальный вывод связан с тем, что при этом не учитывались потери на образование пилообразной волны.

тривать. Для волн конечной амплитуды по сравнению с волнами малой амплитуды изменяется и коэффициент поглощения, обусловленный вязкостью и теплопроводностью среды, — это и будет рассмотрено в данном параграфе.

Искажение волн конечной амплитуды, рассмотренное ранее в этой главе, может быть представлено (при излучении монохроматической волны) как появление и рост в процессе распространения высокочастотных гармоник. Поскольку поглощение в жидкостях и газах $\sim \omega^2$, то качественно совершенно очевидно, что нелинейное искажение должно сопровождаться увеличением поглощения. Следует ожидать, что коэффициент поглощения волны конечной амплитуды зависит от ее спектрального состава, а поскольку последний может меняться по мере распространения волны, то меняется в пространстве и коэффициент поглощения. Поэтому в отличие от поглощения волн малой амплитуды, для которых коэффициент поглощения α_0 постоянен, в случае волн конечной амплитуды, как будет видно из дальнейшего, коэффициент поглощения зависит от координат, и в дальнейшем, говоря о коэффициенте поглощения, мы будем иметь в виду дифференциальный коэффициент.

При малых числах Рейнольдса, когда нелинейное искажение волны невелико, коэффициент поглощения монохроматической у источника звука волны можно определить из (3.10), пользуясь термодинамическими расчетами [6]. Это дает для сред с квадратичной зависимостью поглощения от частоты (см. [13]):

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \frac{3e^2 p_0^2}{4bb'\omega^2} (e^{-\alpha_0 x} - e^{-3\alpha_0 x})^2; \quad (3.32)$$

здесь

$$b' = b + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right).$$

В том случае, когда можно пренебречь теплопроводностью среды, дополнительное поглощение по (3.32) пропорционально Re_0^2 (квадратичная зависимость от Re характерна для различных эффектов при $Re < 1$). Из (3.32) следует, что поглощение неэкспоненциально: у источника

звука $\alpha = \alpha_0$; в точке $x_s = (\ln 3)/2\alpha_0$, где отношение p_2/p_1 достигает максимума (расстояние стабилизации волны), коэффициент поглощения также максимален:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)_{\max} = 1 + 0,028 (\gamma + 1)^2 Re_0^2, \quad (3.33)$$

и, наконец, при $x \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Соотношения (3.32) и (3.33) интересны тем, что позволяют установить минимальные звуковые давления, при которых нелинейное искажение может сказаться на результатах измерения коэффициента поглощения волн малой амплитуды. Естественно, что чем более высока точность измерения α_0 , тем более жестки требования, ограничивающие сверху амплитуду звуковой волны при измерении. Особенно большие ошибки могут вноситься при измерении поглощения в маловязких ($b < 0,04$ нз) жидкостях. Как показывает элементарный расчет (см., например, [14]), при точности измерения α_0 в 10% и неблагоприятных условиях (работа на расстояниях, близких к расстоянию x_s) в воде, например, необходимо работать при напряжениях на кварцевых излучателях, меньших 30 в, в метиловом спирте — 13 в, в глицерине — 7 кв (это напряжение не зависит от частоты).

При малых числах Маха искажение формы профиля волны на расстояниях порядка длины волны невелико. В невязкой и нетеплопроводящей среде такая волна может рассматриваться как немонахроматическая со слабо взаимодействующими гармониками. Введение линейных диссипативных сил не может привести к изменению взаимодействия гармонических составляющих. Это позволяет подойти к вопросу о поглощении волн конечной амплитуды с квазилинейной точки зрения: рассматривать отдельно искажение и поглощение гармоник [2, 4, 5, 15, 16]. Несмотря на то, что этот подход не может считаться в достаточной мере строгим, он позволяет получить некоторые качественные закономерности поглощения волн конечной амплитуды, а в некоторых случаях — даже вполне удовлетворительное количественное согласие с экспериментальными результатами. Если \bar{E}_n — средняя по времени плотность энергии в n -й гармонике, то изменение этой энергии определяется, с одной стороны, потерями

из-за вязкости и теплопроводности. С другой стороны, энергия изменяется из-за нелинейного взаимодействия с другими гармоническими составляющими:

$$\frac{d\bar{E}_n}{dx} = -\tilde{\alpha}_n^0 \bar{E}_n + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\varepsilon}_{ns} = -\tilde{\alpha}_n \bar{E}_n; \quad (3.34)$$

здесь $\tilde{\alpha}_n^0$ — коэффициент поглощения (по энергии) волны малой амплитуды, имеющей частоту n -й гармоники, а $\bar{\varepsilon}_{ns}$ — средняя по времени энергия, передаваемая из s -й в n -ю гармонику на единице пути, пройденного волной. $\tilde{\alpha}_n$ — парциальный коэффициент «поглощения» гармоники, зависящий от координаты. Он может быть также и отрицательным для всех гармоник, кроме первой. Парциальный коэффициент поглощения первой гармоники, вообще говоря, отличается от коэффициента поглощения волны конечной амплитуды.

Пользуясь тем, что $\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n^*$, из (3.34) легко получить коэффициент поглощения волны конечной амплитуды $\tilde{\alpha} = - (1/\bar{E}) (d\bar{E}/dx)$:

$$\tilde{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^0 G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n G_n, \quad (3.35)$$

где $G_n = \bar{E}_n/\bar{E}$. В области, где $G_n = \text{const}$ (область стабилизации волны), из (3.35) можно показать, что коэффициент поглощения $\tilde{\alpha}$ имеет максимум, причем в этой области $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_n$, т. е. коэффициент поглощения волны конечной амплитуды равен парциальному коэффициенту

*) Равенство плотности энергии волны сумме плотностей энергии отдельных гармоник не является очевидным. Однако, как следует из теории и экспериментальных результатов, в обычных нерефлексирующих жидкостях в плоской волне фазовые соотношения между гармоническими составляющими в процессе распространения не меняются, а разложение по гармоникам — разложение по ортогональным функциям. Это обстоятельство приводит к тому, что в немонахроматической волне, по-видимому, можно считать среднюю по времени плотность энергии волны равной сумме средних по времени плотностей энергий отдельных гармоник (см. также [17]).

поглощения любой гармоники. Для пилообразной волны аналогичный результат следует из более строгой теории (см. далее). Из (3.35) видно, что коэффициент поглощения определяется спектром волны. Поскольку спектр волны по мере распространения изменяется, меняется и коэффициент поглощения.

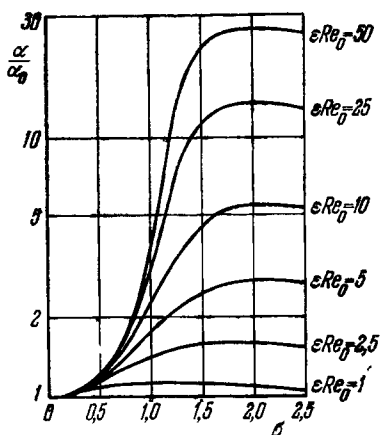


Рис. 8. Теоретическая зависимость коэффициента поглощения волны конечной амплитуды от безразмерного расстояния σ (в долях расстояния образования разрыва).

На рис. 8 показана зависимость амплитудного коэффициента поглощения волны конечной амплитуды от $\sigma = \epsilon k x M_0$. Максимальное значение поглощения достигается на расстояниях $\sigma = 1,5-2$, т. е. на расстояниях, больших расстояния образования разрыва (напомним, что расстояние образования разрыва в плоской волне определяется из условия $\sigma = 1$); в этой области как раз формируется пилообразная волна. Как будет видно в дальнейшем, качественно этот результат подтверждается экспериментально (см. рис. 32 на стр. 172).

На рис. 9 показана расчетная зависимость частичного амплитудного коэффициента поглощения первой гармоники от σ . При $\sigma \lesssim 0,5$ частичный коэффициент α_1 ,

Квазилинейный метод описания поглощения волн конечной амплитуды применен также в [5, 4, 16]. В этих работах использовались идеи, содержащиеся в [2], т. е. предполагалось, что искажение волны происходит так же, как и в недиссипативной среде (по Бесселю — Фубини; см. (2.74)), а поглощение каждой из гармоник — по закону для волн малой амплитуды. Применение электронной счетной машины позволило рассчитать по этой схеме различные величины, характеризующие поглоще-

как и следовало ожидать, намного превосходит коэффициент поглощения α . В области стабилизации волны коэффициент α несущественно отличается от α_1 (рис. 10). Максимальное значение α в области стабилизации, показанное на рис. 10, хорошо следует при $\sigma \approx 2$ и $\epsilon Re_0 > 1$ соотношению (3.37), полученному для пилообразной волны.

Как было показано ранее, при больших числах Рейнольдса монохроматическая у источника звука волна переходит в пилообразную. Пилообразная волна является стабильной формой волны конечной амплитуды. Затухание пилообразных волн может быть определено из теории распространения волны при больших Re . Как следует из (3.22), при $\sigma = \epsilon k x M > \pi/2$ амплитуда пилообразной волны будет убывать как

$$v = \frac{v_0}{1 + \sigma}, \quad (3.36)$$

где v_0 — амплитуда скорости у источника звука. Из (3.36)

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{2\epsilon Re_0}{1 + \sigma}, \quad (3.37)$$

где $\alpha = -(1/v)(dv/dx)$ — амплитудный коэффициент поглощения пилообразной волны, $\alpha_0 = b\omega^2/2\rho_0 c_0^3$ — амплитудный коэффициент поглощения волны малой амплитуды, $Re_0 = \rho_0 c_0 v_0 / b\omega$ — число Рейнольдса. Соотношением (3.37) не совсем удобно пользоваться, так как в число Рейнольдса входят параметры звукового поля у источника звука; измерение этих параметров часто производится в точке измерения коэффициента поглощения. Как

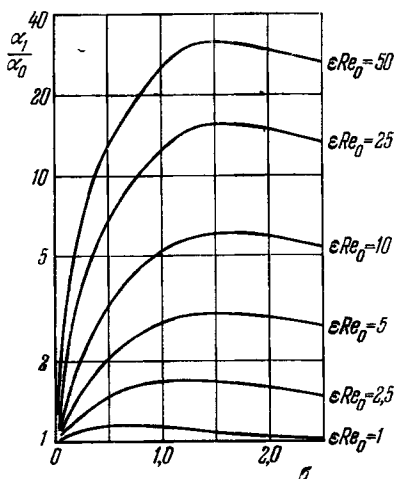


Рис. 9. Теоретическая зависимость частичного коэффициента поглощения первой гармоники от безразмерного расстояния σ (в долях расстояния образования разрыва).

показано в [13], для этого случая

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{2\varepsilon Re_x}{\pi}, \quad (3.38)$$

где

$$Re_x = \frac{\rho_0 c_0 v_x}{b\omega},$$

v_x — амплитуда скорости пилообразной волны в точке измерения коэффициента поглощения *). Естественно, что коэффициент поглощения, даваемый (3.38), относится

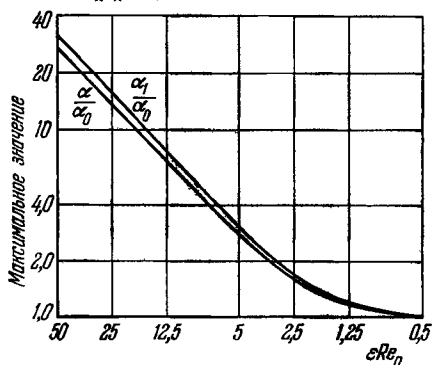


Рис. 10. Максимальное значение коэффициента поглощения волны конечной амплитуды α и парциального коэффициента поглощения первой гармоники α_1 .

дифференциальный коэффициент поглощения не превышает α из (3.38).

Парциальные коэффициенты поглощения пилообразной волны могут быть определены из (3.16) [13].

*) В (3.38) следует брать амплитуду пилообразной волны, а не амплитуду первой гармоники этой волны. Если измеряется амплитуда первой гармоники p_1 , то, имея в виду (3.27а), для идеальной пилообразной волны (большие Re) из (3.38) имеем:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\varepsilon p_1}{b\omega}. \quad (3.38a)$$

**) Это, разумеется, относится к коэффициенту поглощения волны конечной амплитуды. Парциальный коэффициент поглощения первой гармоники может быть и больше α , особенно в области $\varepsilon < 1$ (см. рис. 8 и 9).

только к той области, где волну можно считать пилообразной. Вне этой области дифференциальный коэффициент поглощения меньше даваемого (3.38) **). Это обстоятельство полезно иметь в виду при измерении поглощения без изучения формы профиля волны: в разных областях коэффициент поглощения может быть меньшим, чем по (3.38), но максимальный

Амплитуда звукового давления первой гармоники из (3.16):

$$P_1 = \frac{p_0}{\varepsilon R e_0 \operatorname{sh}(\beta + \alpha_0 a)}. \quad (3.39)$$

Индексом «0» здесь отмечены величины, относящиеся не к исходной синусоидальной волне, а к пилообразной. Из (3.39) парциальный коэффициент поглощения первой гармоники

$$\alpha_1 = \alpha_0 \operatorname{cth}(\beta + \alpha_0 a). \quad (3.40)$$

В области $\alpha_0 a \ll 1$ решение (3.16), как уже отмечалось, относится к стабильной по форме волне. Имея в виду, что $\operatorname{sh} \beta = \pi/2\varepsilon R e_0$, из (3.40) в области стабильной формы волны

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon R e_0}{\pi}\right)^2 + 1}. \quad (3.41)$$

При $2\varepsilon R e_0/\pi \gg 1$ из (3.41) следует:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{2\varepsilon R e_0}{\pi}, \quad (3.42)$$

что не отличается от (3.38) при $R e_0 \equiv R e_x$. Таким образом, в области стабилизации парциальный коэффициент поглощения первой гармоники не отличается от коэффициента поглощения всей волны, т. е. $\alpha = \alpha_1$. Этот расчет, следовательно, приводит к тем же результатам, что и приведенное ранее квазилинейное рассмотрение. При $2\varepsilon R e_0/\pi \ll 1$ из (3.41) следует:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\varepsilon R e_0}{\pi}\right)^2, \quad (3.43)$$

т. е. характерная для малых чисел Рейнольдса квадратичная зависимость от $R e_0$. Формула (3.43) несколько отличается от (3.33), поскольку в этих соотношениях берутся разные числа Рейнольдса.

Поглощение пилообразной волны по (3.37) и безразмерная ширина фронта (3.23) зависят только от числа Рейнольдса, поэтому

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{2}{\pi b}, \quad (3.44)$$

т. е. пилообразная волна с очень узким фронтом имеет соответственно и большой коэффициент поглощения.

Отметим существенную особенность поглощения пилообразных волн, характерную вообще для затухания разрывов. Как известно [17], возрастание энтропии в слабом разрыве не зависит от вязкости и теплопроводности среды. Поэтому и коэффициент поглощения из (3.37) и (3.38), как нетрудно видеть, не зависит от диссипативных характеристик среды; он зависит от величины скачка давления (или скорости) в волне.

Соотношения (3.38), (3.42) относятся к плоским пилообразным волнам. В [18] получено (см. также [19]) более общее соотношение для изменения амплитуды пилообразной волны, расходящейся по закону $p(r) = p_0(r_0/2r)^a$ ($a = \text{const}$). Изменение амплитуды волны конечной амплитуды в этом случае происходит по закону

$$p(r) = \frac{p_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^a}{1 + \frac{2\epsilon p_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{r_0^a}{\lambda(1-a)} (r^{1-a} - r_0^{1-a})}, \quad (3.45)$$

где p_0 — амплитуда пилообразной волны при $r = r_0$. При $a = 0$, т. е. для плоской пилообразной волны,

$$p(r) = \frac{p_0}{1 + \frac{\sigma}{\pi}}, \quad (3.46)$$

где $\sigma = \epsilon M k(r - r_0)$. Из (3.46) следует коэффициент затухания плоской волны (3.38). При $a = 1/2$, т. е. для цилиндрической пилообразной волны, из (3.45) получаем:

$$p(r) = \frac{p_0}{1 + \frac{2\sigma_0}{\pi} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} - 1 \right]} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}, \quad (3.47)$$

где $\sigma_0 = \epsilon M k r_0$. И, наконец, при $a = 1$ для сферически расходящейся пилообразной волны из (3.45) имеем:

$$p(r) = \frac{p_0}{1 + \frac{\sigma_0}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}} \left(\frac{r_0}{r}\right) \quad (3.48)$$

(близкий к этому результат, только выраженный в терминах давления на источнике звука, получен также в [20]). Из (3.47) и (3.48) легко получить коэффициент поглощения цилиндрической и сферической волн.

Подводя итог, можно сказать, что поглощение волн конечной амплитуды существенно отличается от поглощения волн малой амплитуды. Это различие заключается не только в том, что поглощение волны конечной амплитуды неэкспоненциально (и, следовательно, коэффициент поглощения зависит от координат), но также и в том, что оно при больших числах Рейнольдса намного превосходит поглощение волн малой амплитуды. Хотя поглощение и определяется вязкостью и теплопроводностью, коэффициент поглощения пилообразных волн в явном виде не зависит от этих характеристик среды. В области больших звуковых интенсивностей газы и жидкости становятся значительно менее «прозрачными» для звука, чем в области малых интенсивностей.

До сих пор шла речь о поглощении волны конечной амплитуды, спектральный состав которой мог только обогащаться высокочастотными компонентами. При нелинейном взаимодействии двух волн может появляться волна разностной частоты. Вообще говоря, в волне любого спектрального состава могут появляться помимо высокочастотных компонент, которые являются своеобразными «стоками» акустической энергии, еще и низкочастотные компоненты (в случае монохроматической волны такой низкочастотной компонентой в некоторой мере можно считать «нелинейное акустическое течение»). Эти низкочастотные крылья спектра поглощаются медленнее, чем компоненты исходного спектра. С другой стороны, низкочастотное крыло спектра также и нарастает медленнее, чем высокочастотное. Динамика спектра немонохроматической волны конечной амплитуды в вязкой среде исследована еще недостаточно.

В [21] рассмотрено взаимодействие двух волн в вязкой среде. При достаточно больших числах Рейнольдса в результате нелинейного взаимодействия возможно выделение из спектра волны разностной частоты, которая из-за меньшего затухания может распространяться на значительно большие расстояния, чем исходные волны. Такое

своеобразное «детектирование» нелинейной средой акустического сигнала можно использовать для осуществления параметрических излучателя или приемника звука с относительно узкой характеристикой направленности. Такой излучатель был предложен Зверевым и Калачевым и независимо Вестервельтом [22]. В [22] рассмотрена во втором приближении теория такого излучателя, основанного на нелинейном взаимодействии двух высокочастотных пучков плоских волн, частоты которых близки ($\sim \omega$). Выделяющаяся в результате нелинейного взаимодействия волна разностной частоты Ω , как показывает теория, на далеких расстояниях имеет ширину характеристики направленности $\sim 2(\alpha_0 c_0 / \Omega)^{1/2}$, где α_0 — коэффициент затухания высокочастотных волн (предполагающийся в теории одинаковым для обеих волн). При большом отношении ω/Ω для получения узкой характеристики направленности должно быть $M \ll 2Re$, т. е. поглощение взаимодействующих высокочастотных волн на длине волны должно быть малым. Экспериментально ширина характеристики направленности для волны разностной частоты определялась в [23]; эти результаты будут рассмотрены в гл. 4, § 1.

Эти работы намечают некоторые возможности практического применения нелинейных явлений. Трудности, с которыми, по-видимому, можно встретиться при осуществлении такого рода параметрических излучателей и приемников, заключаются в том, что при малой интенсивности взаимодействующих волн эффективность параметрического преобразователя чрезвычайно мала. Казалось бы, можно увеличить эффективность путем увеличения интенсивности этих волн. Однако повышение интенсивности приводит в отсутствие дисперсии, как это видно из результатов, приведенных в данном параграфе, к резкому увеличению затухания взаимодействующих волн, и в конечном счете не позволяет увеличить эффективность преобразования.

Выше было рассмотрено поглощение волн конечной амплитуды в средах, где поглощение волны малой амплитуды квадратично зависело от частоты. Отметим, что из (3.35) для идеальной пилообразной волны ($G_n \simeq 1/n^2$) коэффициент поглощения α в случае квадратичной зави-

симости $\tilde{\alpha}_n^0$ от ω обращается в бесконечность. Качественно очевидно, что в средах, где поглощение волны малой амплитуды растет с частотой медленнее, чем по квадратичному закону, зависимость поглощения от интенсивности звука будет более слабой. Этого можно ожидать в твердых телах, где поглощение может быть (в некоторой области частот) пропорциональным частоте. В релаксирующих средах, как известно, коэффициент поглощения волн малой амплитуды зависит от частот не квадратично. Поэтому теория поглощения волн конечной амплитуды в релаксирующих средах сложнее. Некоторые вопросы поглощения в релаксирующих средах рассмотрены в § 6 этой главы.

§ 5. Неплоские волны

В этом разделе будут рассмотрены одномерные сходящиеся и расходящиеся сферические и цилиндрические волны. Амплитуда этих волн, в отличие от плоских, меняется не только под действием диссипативных процессов, но и из-за геометрических условий распространения. Очевидно, что это обстоятельство должно сказаться на масштабах различных явлений, связанных с искажением формы волны: в расходящихся волнах амплитуда волны быстро убывает и нелинейные искажения тормозятся не только тем, что в среде есть диссипативные потери, но и расходимостью; наоборот, в сходящихся волнах амплитуда волны возрастает и геометрические условия распространения в какой-то мере компенсируют затухание в среде, что способствует развитию нелинейных эффектов. Есть некоторая аналогия между распространением плоской волны в диссипативной среде и распространением неплоских волн. Эта аналогия связана с тем, что нелинейные явления «не чувствительны» к причинам, вызывающим изменение амплитуды волны. Однако она недостаточно глубока, ибо как для цилиндрических, так и для сферических волн не может быть введен какой-то не зависящий от координат дополнительный коэффициент «эффективной вязкости».

В случае неплоских волн в диссипативной среде не может быть получен такой простой критерий образования разрыва, как это было для плоской волны, хотя, как и для плоских волн, здесь могут быть рассмотрены предельные случаи малых и больших чисел Рейнольдса. При числах $Re \gg 1$ (если это условие выполняется во всем пространстве) геометрические условия распространения и диссипативные процессы не могут препятствовать образованию разрыва, и эти случаи поддаются во всяком случае качественному анализу.

а) Сферические волны

Распространение сферической волны конечной амплитуды было рассмотрено в [24, 20]. В первой из этих работ [24] рассматривался случай небольших искажений формы волны. Для излучателя, размеры которого больше длины волны, $kr_0 \gg 1$, колеблющегося по закону

$$v|_{r=r_0} = v_0 \sin \psi_0, \text{ где } \psi_0 = \omega t \mp kr_0,$$

скорость смещения с точностью до величин второго порядка малости в лагранжевых координатах получена в виде

$$V = \frac{v}{v_0} = \frac{r_0}{r} e^{\mp \alpha_0 (r-r_0)} \left(\sin \psi + \frac{1}{kr} \cos \psi \right) + \\ + \frac{r_0}{r} e^{\mp 2\alpha_0 (r-r_0)} \sigma_0 \left| \ln \frac{r}{r_0} \right| \sin 2\psi; \quad (3.49)$$

здесь и далее верхний знак относится к расходящейся волне, нижний — к сходящейся. В (3.49)

$$\psi = \omega t \mp kr, \quad \sigma_0 = \varepsilon kr_0 M, \quad \alpha_0 = \frac{b' \omega^2}{2\rho_0 c_0^3}.$$

Решение применимо в том случае, когда амплитуда второй гармоники мала по сравнению с амплитудой первой гармоники, т. е. при

$$e^{\mp \alpha_0 (r-r_0)} \sigma_0 \left| \ln \frac{r}{r_0} \right| \ll 1. \quad (3.50)$$

При малых числах Рейнольдса и малых σ_0 решение (3.49) описывает искажение формы профиля волны до довольно больших расстояний в расходящейся волне. Как видно из решения, вторая гармоника сначала нарастает, достигает максимального значения и затем убывает.

В сходящейся волне условие (3.50) может на некоторых расстояниях не выполняться и решение (3.49) становится непригодным.

При больших числах Рейнольдса $Re \gg 1$ и немалых σ_0 даже в расходящейся волне образуется разрыв. Расстояние образования разрыва

$$r_p = r_0 e^{\pm 1/\sigma_0}. \quad (3.51)$$

Это соотношение справедливо, если $Re \gg 1$ вплоть до образования разрыва. Расстояния образования разрыва по (3.51) показаны на рис. 11. Естественно, есть существенное различие в величинах критических чисел Рейнольдса, при которых разрыв образуется в расходящихся и сходящихся волнах. Эти критерии несколько неопределенны, поскольку несколько неопределенно само понятие разрыва. Если пользоваться терминами ширины разрыва, то в сходящейся сферической волне согласно [20] даже при условии большого поглощения звука на радиусе сферы, т. е. при условии $a_0 r_0 \gg 1$ (напомним, что для плоских волн при $r_0 = x_p$ и $2a_0 x_p \gg 1$, что эквивалентно $\epsilon Re_0 \ll 1$, разрыв не образуется), ширина образовавшегося разрыва стремится к нулю по мере приближения волны к центру сферы. Подчеркнем здесь, что условие $a_0 r_0 \gg 1$ эквивалентно условию $\sigma_0 \gg 2\epsilon Re$, т. е. ширина разрыва стремится к нулю при небольших числах Маха, обычно достижимых в акустике, только при достаточно больших размерах сферического источника звука по сравнению с длиной волны.

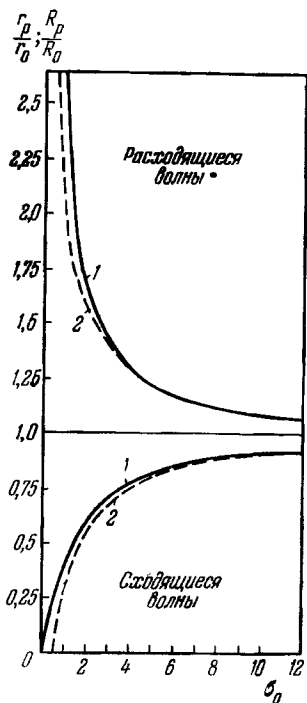


Рис. 11. Расстояния образования разрыва при больших числах Рейнольдса в расходящихся и сходящихся (1 — сферических; 2 — цилиндрических) волнах.

После образования разрыва на расстоянии

$$r_2 = r_0 e^{\pm \pi/2\sigma_0} \quad (3.52)$$

формируется пилообразная волна. При условии $\epsilon\sigma_0 Re \gg \gg (r/r_0)$ и $r > r_2$ пилообразная волна описывается соотношением

$$V = \frac{v}{v_0} = \frac{r_0/r}{1 + \sigma_0 \left| \ln \frac{r}{r_0} \right|} \left(-\psi + \pi \operatorname{th} \frac{\psi}{\delta} \right), \quad (3.53)$$

где δ — безразмерная ширина фронта, имеющая вид:

$$\delta = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{1 + \sigma_0 \left| \ln \frac{r}{r_0} \right|}{\pi \epsilon Re_0} \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (3.54)$$

Сглаживание разрыва как в расходящейся, так и сходящейся волнах, пропорциональное $|\ln(r/r_0)|$, происходит из-за диссипативных процессов на фронте. Помимо этого в расходящейся волне разрыв расширяется $\sim (r/r_0)$ из-за расходимости. В сходящейся волне ($r < r_0$), наоборот, происходит сужение фронта $\sim (r/r_0)$.

Расстояние образования разрыва и расстояние формирования пилообразной волны в случае расходящейся сферической волны существенно больше, а в случае сходящейся существенно меньше, чем соответствующие расстояния в плоской волне.

Расходящаяся сферическая волна, если в ней образовался разрыв, на расстояниях $r > r_3$, где r_3 определяется из условия

$$2\alpha_0 r_3 \ln \frac{r_3}{r_0} \simeq \pi^2, \quad (3.55)$$

в результате действия диссипативных процессов переходит в синусоидальную волну малой амплитуды.

б) Цилиндрические волны [25]

Решение уравнений в переменных Лагранжа для бесконечного цилиндра радиуса R_0 , колеблющегося по закону

$$v|_{R=R_0} = v_0 \sin(\omega t \mp kR_0)$$

(здесь и далее верхний знак относится к расходящейся волне, а нижний — к сходящейся), дает во втором приближении:

$$V = \frac{v}{v_0} = e^{\mp \alpha_0 (R-R_0)} \sqrt{\frac{R_0}{R}} \left\{ \sin \theta - \frac{1}{2kR} \cos \left(\theta - \frac{1}{kR_0} \right) \right\} - \\ - \sqrt{\frac{R_0}{R}} e^{\mp \alpha_0 (R-R_0)} \sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right| \sin 2\theta, \quad (3.56)$$

где

$$\theta = \omega t \mp kR + \frac{1}{2kR_0}, \quad \sigma_0 = \varepsilon k R_0 M, \quad \alpha_0 = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3}.$$

Решение применимо при условии малости амплитуды второй гармоники по сравнению с амплитудой первой гармоники, т. е. при

$$e^{\mp \alpha_0 (R-R_0)} \sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right| \ll 1. \quad (3.57)$$

Так же как и в сферических волнах, решение (3.56) при малых числах Рейнольдса и малых σ_0 описывает искажение формы волны до довольно больших расстояний в расходящейся цилиндрической волне. В сходящейся волне условие (3.57) может на некоторых расстояниях не выполняться, и решение (3.56) становится непригодным.

При больших числах Рейнольдса $Re \gg 1$ и немалых σ_0 даже в расходящейся цилиндрической волне может возникнуть разрыв. Расстояние R_p , на котором образуется разрыв, определяется из условия [25]:

$$2\sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R_p}{R_0}} \right| = 1. \quad (3.58)$$

Это соотношение справедливо для того случая, когда числа $Re \gg 1$ вплоть до образования разрыва. Расстояния образования разрыва по (3.58) показаны на рис. 11 (стр. 125).

Для сходящейся цилиндрической волны разрыв образуется вблизи оси цилиндра при $\sigma_0 \simeq 1/2$. Для меньших σ_0 , в отличие от сферической волны, разрыв не образуется нигде: волна успевает дойти до оси цилиндра еще без

образования разрыва. В случае образования разрыва цилиндрическая пилообразная волна формируется на расстоянии R_2 , несколько большем расстояния R_p . Это расстояние определяется из условия:

$$2\sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R_2}{R_0}} \right| = \frac{\pi}{2}. \quad (3.59)$$

При условии $2\varepsilon\sigma_0 Re \gg 1$ (это условие может рассматриваться как условие образования разрыва в расходящейся волне) пилообразная цилиндрическая волна имеет вид:

$$V = \frac{\sqrt{\frac{R_0}{R}}}{1 + 2\sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right|} \left(-\psi + \pi \operatorname{th} \frac{\psi}{\delta} \right), \quad (3.60)$$

где $\psi = \omega t \mp kR$, δ — безразмерная ширина фронта, имеющая вид:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 + 2\sigma_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}} \right|}{2\pi\varepsilon Re} \sqrt{\frac{R}{R_0}}. \quad (3.61)$$

Расширение разрыва как в расходящейся, так и в сходящейся волнах, пропорциональное $\left| 1 - \sqrt{R/R_0} \right|$, происходит из-за диссипативных процессов на фронте. Помимо этого в расходящейся волне разрыв расширяется $\sim \sqrt{R/R_0}$ из-за расходимости, а в сходящейся сужается $\sim \sqrt{R/R_0}$. Расширение разрыва в расходящейся волне приводит к тому, что на некотором расстоянии R_3 расходящаяся пилообразная цилиндрическая волна превратится в волну малой амплитуды; это расстояние определяется из условия

$$\alpha_0 R_3 \simeq \frac{\pi^2}{2}. \quad (3.62)$$

В сходящейся цилиндрической волне, если разрыв образуется до оси цилиндра, увеличение амплитуды за счет сходимости может после образования разрыва прекратиться из-за большого затухания (см. § 4 этой главы). Более того, амплитуда сходящейся волны может в этой области даже уменьшаться до тех пор, пока увеличение амплитуды

ды за счет сходимости не превысит диссипативных потерь. Это приводит к тому, что распределение амплитуды (или интенсивности) помимо максимума на оси цилиндра имеет также второй максимум вне оси.

§ 6. Распространение волн конечной амплитуды в релаксирующих средах

При распространении звуковых волн малой амплитуды коэффициент поглощения большинства газообразных и жидких сред больше (и в некоторых случаях значительно) коэффициента, рассчитанного по вязкости и теплопроводности среды. Как это было установлено для газов Кнезером [27], а затем в общем случае Мандельштамом и Леонтовичем [26] и в дальнейшем развито в ряде теоретических и экспериментальных работ, эти дополнительные потери связаны с отклонением процессов, протекающих в среде под действием звука, от равновесных. Эти внутренние процессы могут иметь различную физическую природу, однако с точки зрения феноменологической они могут характеризоваться некоторым параметром ξ (или многими параметрами) и временем релаксации τ (или многими временами релаксации), т. е. характерным временем возвращения системы, выведенной из состояния равновесия, в равновесное состояние. Точное предсказание времени релаксации может быть сделано на основании детального рассмотрения релаксационного механизма.

Процессы с большой энергией активации (энергией, затрачиваемой на перевод системы из одного состояния в другое), как это следует из квантовомеханического соотношения неопределенности, происходят с малым временем релаксации, и наоборот. Переменное давление в релаксирующей среде зависит не только от плотности, но и от параметра (или многих параметров), характеризующего релаксационный процесс (или большое количество таких процессов). В дальнейшем, не имея возможности более или менее подробно останавливаться на теории релаксационных процессов в линейной акустике, мы будем предполагать, что в среде есть только один релаксационный процесс. Существование релаксационного процесса в

среде приводит к зависимости скорости распространения звука от частоты, т. е. к дисперсии скорости. Поскольку $p = p(\rho, \xi)$, для скорости

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}. \quad (3.63)$$

На высоких частотах ($\omega\tau \gg 1$) параметр ξ не успевает следовать за изменениями плотности и

$$c_{\infty}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi}.$$

При медленном изменении термодинамических параметров ($\omega\tau \ll 1$) параметр ξ успевает принять равновесное значение, и в этом случае

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho},$$

где ξ_0 — «мгновенное» равновесное значение ξ . Таким образом, для скорости в релаксирующей среде из (3.63) следует:

$$c^2 = c_{\infty}^2 + (c_0^2 - c_{\infty}^2) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}\right). \quad (3.64)$$

Во всех исследованных релаксирующих средах дисперсия скорости звука

$$D = \frac{c_{\infty}^2 - c_0^2}{c_0^2} \quad (3.65)$$

мала. Можно показать, что для звука малой амплитуды теория релаксации приводит к тому, что волновое число комплексно:

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left[\frac{1 + j\omega\tau}{1 - j(D+1)\omega\tau} \right]^{1/2} = k_1 + jk_2, \quad (3.66)$$

где k_2 — коэффициент затухания волны.

Для быстрых релаксационных процессов (или для низких частот звука) $\omega\tau \ll 1$ из (3.66)

$$k_1 = k_0 = \frac{\omega}{c_0}; \quad k_2 = \frac{1}{2} k_0 \omega \tau D. \quad (3.67)$$

В промежуточной области, когда частота звука близка к частоте релаксации, а D мала:

$$k_1 = k_0 - \frac{k_0}{2} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} D; \quad k_2 = \frac{k_0}{2} \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} D. \quad (3.68)$$

И, наконец, для медленных релаксационных процессов (или для высоких частот звука) $\omega\tau \gg 1$

$$k_1 = k_\infty = \frac{\omega}{c_\infty}; \quad k_2 = \frac{k_\infty}{2\omega\tau} \frac{D}{D+1}. \quad (3.69)$$

Из (3.67) — (3.69) следует:

1) Поглощение на длине волны, обусловленное релаксационным процессом, имеет максимум в области $\omega\tau \sim 1$; вне этой области релаксационное поглощение стремится к нулю для очень низких и очень высоких частот.

2) При малой дисперсии релаксационное поглощение на длине волны мало.

3) Часто экспериментальные результаты по поглощению представляют в виде зависимости α/ω^2 от частоты. Из (3.67) следует, что в области $\omega\tau \ll 1$ величина α/ω^2 не зависит от частоты. В области $\omega\tau \gg 1$ из (3.69) $\alpha/\omega^2 \sim 1/\omega^2$.

Таким образом, релаксирующие среды, вообще говоря, не являются средами, где коэффициент поглощения квадратично зависит от частоты. Высокочастотные гармоники, появляющиеся в процессе нелинейного искажения формы профиля волны, могут попадать в область $\omega\tau \gg 1$, где релаксационная часть поглощения не зависит от частоты. Уже одно это может привести к некоторому отличию процессов искажения и поглощения волн конечной амплитуды. Другим существенным обстоятельством является то, что в релаксирующих средах имеет место дисперсия скорости звука. Это приводит к тому, что между появляющейся в области дисперсии гармоникой и порождающей ее волной могут в процессе распространения изменяться фазовые соотношения или, как иногда говорят, не выполняться условия синхронизма.

При рассмотрении волновых процессов в релаксирующих средах может быть введено число Рейнольдса $Re = \rho/b_1\omega$, где в b_1 помимо сдвиговой вязкости и теплопро-

водности входит зависящая от частоты объемная вязкость:

$$\eta' = \rho_0 c_0^2 D \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (3.70)$$

В дальнейшем в этом параграфе будут рассмотрены среды, в которых нет иных диссипативных процессов, кроме релаксационных. Это не является ограничением теории, ибо влияние теплопроводности и вязкости, рассмотренное выше, может быть учтено без особого труда. Для среды, где есть только релаксация, число Рейнольдса, при учете (3.70), имеет значение

$$Re = \frac{\rho_0 c_0^2 v_0}{\eta' \omega} = \frac{M}{D \omega \tau} [1 + (\omega\tau)^2]. \quad (3.71)$$

При малых числах Рейнольдса влияние объемной вязкости велико по сравнению с влиянием нелинейных эффектов. В этом случае нелинейные искажения выражены слабо. Наоборот, в случае больших чисел Рейнольдса и малой дисперсии в релаксирующей среде может образоваться разрыв, ширина которого определяется релаксационными процессами на фронте волны.

Искажение плоской волны в случае малых чисел Рейнольдса рассмотрено в [28] для сред с малой дисперсией скорости. Решение уравнений гидродинамики приводит в этом случае во втором приближении к уравнению блений в пространстве. Этот результат вполне естествен, так как в результате дисперсии скорости фаза второй гармоники изменяется в пространстве относительно фазы первой гармоники. Этот сдвиг фазы, меняющийся в пространстве (отсутствие синхронизма), сначала, если бы не было релаксационного поглощения, приводил бы к замедлению роста амплитуды гармоники, затем к прекращению его и, наконец, к падению амплитуды второй гармоники. Однако одновременно с дисперсией скорости на величину второй гармоники будут оказывать влияние диссипативные процессы, связанные с теплопроводностью и вязкостью (как сдвиговой, так и объемной). Как показано в [28], даже учет одной только объемной вязкости приводит к тому, что характер изменения амплитуды второй гармоники из-за малой дисперсии в основном определяется поглощением звука.

На рис. 12 приведены безразмерные расстояния максимального значения амплитуды второй гармоники kx, D в случае, когда учитывается объемная вязкость (кривая 1), и гипотетический случай, когда влияет только одна дисперсия (кривая 2). В последнем случае это расстояние определяет полупериод биений гармоники в пространстве. Кривая 1 близка к тому, что получается, если в расстояние стабилизации (3.41) подставить объемную вязкость (3.70). Из этого рисунка видно, что расстояние стабилизации второй гармоники из-за действия релаксационного поглощения меньше (и вне области от ~ 1 значительно меньше), чем «расстояние стабилизации» из-за одной только дисперсии скорости. Это и означает, что характер изменения в пространстве амплитуды второй гармоники определяется в основном релаксационным поглощением; малая дисперсия не успеет еще сказаться сколько-нибудь существенным образом, а гармоника в результате действия релаксационного поглощения уже затухнет.

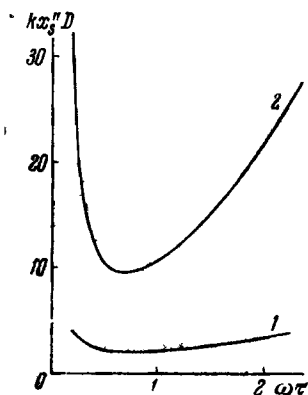


Рис. 12. Расстояние максимального значения амплитуды второй гармоники в релаксирующей среде: 1 — с учетом объемной вязкости (расстояние стабилизации); 2 — без объемной вязкости, влияние одной дисперсии.

Поскольку при малой дисперсии на пространственные масштабы нелинейных искажений оказывают основное влияние вязкие потери, при больших числах Рейнольдса в релаксирующей среде могут образоваться разрывы. Этот вопрос исследовался в [29].

Качественно очевидно, что пространственные масштабы образования разрыва и структура фронта разрыва должны зависеть от $\omega\tau$. При $\omega\tau \ll 1$ гармоники малых номеров еще не попадают в область релаксации и начало процесса искажения не может тормозиться релаксационным поглощением. С постепенным появлением в спектре волны высокочастотных гармоник, что соответствует

накапливанию разрыва, эти последние попадают в область релаксации и релаксационные процессы оказывают существенное влияние на ширину образующегося разрыва. Как было показано в [29], разрыв в этом случае больших чисел Рейнольдса образуется на расстоянии, определяемом формулой (2.92) для невязкой среды. Структура разрыва определяется значениями $\omega\tau$ и Re (или числом Маха M и дисперсией D , ибо из (3.71) при $\omega\tau \ll 1$ число $Re = M/D\omega\tau$), а точнее безразмерным параметром

$$\mu = \frac{D}{2\varepsilon M} = \frac{1}{2\varepsilon\omega\tau Re}.$$

При $\mu \gg 1$ и больших Re на расстоянии $x = (\pi/2)x_p$ формируется пилообразная волна, форма которой дается формулой (3.22), а в (3.23) следует брать число Рейнольдса для релаксирующей среды. При $\alpha_p x \sim 2$, где α_p — релаксационный коэффициент поглощения, волна снова переходит в синусоидальную волну малой амплитуды. При уменьшении μ до $\mu > 1$ качественно картина искажения волны остается прежней, однако формирующаяся волна асимметрична (рис. 13, а). Эта асимметрия становится еще более выраженной и имеет разрывный участок, если значение параметра μ в области за разрывом меньше единицы (амплитуда волны велика, см. рис. 13, б). Ширина разрыва, однако, не может быть меньше, чем $\lambda\omega\tau$.

При $\omega\tau \gg 1$, в отличие от случая $\omega\tau \ll 1$, возникающие в процессе распространения гармоники высоких номеров все более и более удаляются от области релаксации. Можно ожидать, что образовавшийся в этом случае разрыв не будет размываться релаксационными процессами. Из (3.71) в этом случае число $Re = M\omega\tau/D$. Как было показано в [29], разрыв формируется на расстоянии x_p , определяемом из соотношения

$$\left| 2\varepsilon Re \left(1 - e^{-\frac{Dkx_p}{2\omega\tau}} \right) \right| \simeq 1, \quad (3.72)$$

откуда следует, что при $2\varepsilon Re \simeq 1$ разрыв уходит на бесконечность. Таким образом, при этих и меньших Re разрыв не образуется. С увеличением числа Re расстояние

образования разрыва перемещается к источнику звука. При $Dkx_p \ll 2\omega\tau$ из (3.72) следует:

$$kx_p = \frac{1}{\varepsilon M},$$

т. е. расстояние образования разрыва в этом случае равно в точности расстоянию образования разрыва в недиссипативной среде (2.92).

Это естественный результат, так как первая, а следовательно и более высокие гармоники волны находятся в области частот, существенно более высоких, чем частота релаксации $\omega_p = 1/\tau$, и объемная вязкость уже отрелаксировала. Волна распространяется как бы в среде без объемной вязкости. Для определения ширины разрыва нужно учитывать диссипативные потери, существующие в среде помимо рассматриваемых релаксационных.

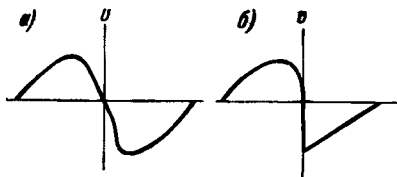


Рис. 13. Форма волны в релаксирующей среде при $\omega\tau \ll 1$ и малых параметрах μ .

Поглощение пилообразной волны (3.16) в релаксирующей среде рассматривалось в [30, 34]. Для коэффициента поглощения α_p получено:

$$\frac{\alpha_p}{k_2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{[1 + (n\omega\tau)^2] \operatorname{sh}^2 n(\beta + \alpha_0 a)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 n(\beta + \alpha_0 a)}}, \quad (3.73)$$

где k_2 — релаксационный коэффициент поглощения при малой амплитуде звука [см. (3.67)] и $\omega\tau \ll 1$. Анализ (3.73) показывает, что в области применимости (3.16) максимум поглощения α_p несколько смещен в сторону $\omega\tau < 1$ (напомним, что для волны малой амплитуды максимум поглощения на длину волны имеет место при $\omega\tau \sim 1$). Этот результат очевиден, так как искажение волны связано с появлением высокочастотных гармоник, которые попадают в область релаксации.

Рассмотренная в этом параграфе теория искажения волн в релаксирующих средах существенно основывалась на том, что дисперсия в среде мала и, как следствие этого, релаксационное поглощение на длину волны мало. Это позволяло считать, что отклонение процессов от равновесных мало, и пользоваться линейным уравнением реакции среды на внешнее воздействие. Это обстоятельство органически не следует из теории релаксации, хотя экспериментальные результаты показывают, что в тех жидкостях, где эти результаты могут быть объяснены на основе релаксационной теории, и дисперсия скорости мала и релаксационное поглощение на длину волны мало.

Есть, однако, ряд сред, где линейная теория с одним временем релаксации не может объяснить всех наблюдаемых фактов. Отметим, что из линейности уравнения реакции следует, что возможно одно равновесное состояние среды, характеризуемое параметром ξ_0 . Если учитывать еще и квадратичный член в уравнении реакции, то положений равновесия может быть два. Можно было бы привести ряд примеров, когда мощные ультразвуковые волны переводят среду из одного состояния равновесия в другое (например, дегазация), однако этот вопрос в настоящее время еще совершенно не изучен. Возможно, что рассмотрение нелинейных релаксационных процессов позволило бы рассмотреть с феноменологической точки зрения ряд процессов, протекающих в интенсивных звуковых волнах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг З. А., Некоторые величины второго порядка в акустике. Акуст. ж. 3, 149 (1957).
2. Thuras A. L., Jenkins R. T., O'Neil H. T., Extraneous frequencies generated in air carrying intense sound waves. J. Acoust. Soc. Am. 6, 173 (1935).
3. Михайлов Г. Д., Искажение и взаимодействие акустических волн конечной амплитуды в вязкой среде. Докл. АН СССР. 109, 68 (1956).
4. Lester W. W., On the theory of the propagation of plane finite amplitude waves in a dissipative fluid J. Acoust. Soc. Am. 33, 1196 (1961).
5. Fox F. E., Wallace W. A., Absorption of finite amplitude sound waves. J. Acoust. Soc. Am. 26, 994 (1954).

6. Гольдберг З. А., О распространении плоских волн конечной амплитуды. Акуст. ж. 3, 322 (1957).
7. Fay R. D., Plane sound waves of finite amplitude. J. Acoust. Soc. Am. 3, 222 (1931).
8. Солуян С. И., Хохлов Р. В., Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, сер. физ., № 3, 52 (1961).
9. Mendousse J. C., Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitude. J. Acoust. Soc. Am. 25, 51 (1953).
10. Зарембо Л. К., Об одном методе определения ширины фронта акустической волны, близкой по форме к пилообразной. Акуст. ж. 6, 43 (1960).
11. Буров В. А., Красильников В. А., О поглощении ультразвуковых волн большой интенсивности в воде. Доклад. АН СССР 124, 571 (1959).
12. Гольдберг З. А., Плоские акустические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Диссертация. Акустич. ин-т АН СССР, 1958.
13. Наугольных К. А., О поглощении звуковых волн конечной амплитуды. Обзор. Акуст. ж. 4, 115 (1958).
14. Зарембо Л. К., Красильников В. А., К вопросу о влиянии нелинейных искажений формы волны на точность измерения поглощения ультразвуковых волн малой амплитуды. Сб. «Применение акустики к исследованию вещества», вып. X, 1960.
15. Зарембо Л. К., О поглощении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях. Диссертация, МГУ, 1958.
16. Cook V. D., New procedure for computing finite-amplitude distortion. J. Acoust. Soc. Am. 34, 941 (1962).
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
18. Наугольных К. А., Романенко Е. В., К вопросу о распространении волн конечной амплитуды в жидкости. Акуст. ж. 4, 200 (1958).
19. Westervelt P. J., Self-scattering of high intensity sound. Proc. III Intern Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959. Vol. I, p. 317.
20. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В., Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж. 9, 54 (1963).
21. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В., О нелинейном взаимодействии звуковых волн в поглощающей среде. Акуст. ж. 9, 192 (1963).
22. Westervelt P. J., Parametric acoustic array. J. Acoust. Soc. Am. 35, 535 (1963).
23. Bellin L. S., Веуер R. T., Experimental investigation of an end-fire array. J. Acoust. Soc. Am. 34, 1051 (1962).
24. Наугольных К. А., Распространение сферических звуковых волн конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде. Акуст. ж. 5, 80 (1959).

25. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В., Цилиндрические волны конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, сер. Физ., № 4, 65 (1962).
26. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А., К теории поглощения звука в жидкостях. ЖЭТФ 7, 438 (1937).
27. Kneser H. O., Interpretation of the anomalous sound-absorption in air and oxygen in terms of molecular collisions. J. Acoust. Soc. Am. 5, 122 (1933).
28. Полякова А. Л., О распространении волн конечной амплитуды в релаксирующей среде. Акуст. ж. 6, 356 (1960).
29. Солуян С. И., Хохлов Р. В., Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией. Акуст. ж. 8, 220 (1962).
30. Полякова А. Л., О поглощении звука конечной амплитуды в релаксирующей среде. Докл. АН СССР 122, 51 (1958).
31. Полякова А. Л., Термодинамическая теория поглощения звука конечной амплитуды в релаксирующей среде. Акуст. ж. 5, 85 (1959).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

§ 1. Искажение и взаимодействие волн в газах и жидкостях

В этой главе будут рассмотрены экспериментальные методы, а также результаты исследования различных нелинейных эффектов. Понятие волн конечной амплитуды с точки зрения экспериментатора несколько условно, так как возможность наблюдения различных нелинейных эффектов определяется не только интенсивностью звуковых волн, но также чувствительностью и точностью измерительной аппаратуры. Например, рассматриваемые ниже методы исследования искажения ультразвуковых волн в жидкостях с успехом применялись для волн, интенсивность которых с точки зрения обычных представлений в достаточной мере мала. В этой главе, предполагая, что читатель знаком с методами акустических измерений в линейной акустике, приведенными в целом ряде руководств, мы остановимся только на методах, являющихся в некоторой мере специфическими при исследовании нелинейных эффектов.

В настоящее время имеется несколько методов исследования нелинейного искажения и взаимодействий, позволяющих определять самые незначительные отклонения формы профиля упругой волны от синусоидальной. Для всех методов чрезвычайно важным является возможность исключения нелинейных искажений в любой другой части излучающего и приемного трактов, кроме искажений в среде. Кликфактор генератора и электроакустического преобразователя, так же как и нелинейные искажения в приемных устройствах, должны быть минимальны. В некоторых случаях для исключения возможного влияния

клирфактора генератора между генератором и электро-механическим преобразователем ставится узкополосный фильтр.

Методы определения искажений могут быть разделены на две группы: 1) спектральный метод, основанный на выделении гармонических составляющих волны или комбинационных частот,— задача, аналогичная задаче исследования монохроматической волны в оптике; 2) наблюдение с помощью широкополосных устройств формы волны. Спектральный метод в настоящее время позволяет обнаружить амплитуду давления второй гармоники, составляющую тысячные доли от давления первой гармоники. Чувствительность этого метода значительно выше, чем чувствительность второго. Однако он не дает наглядного представления о волне, которое может быть получено при применении второго метода — непосредственного наблюдения ее формы. Очевидно, что второй метод эффективен при больших искажениях.

Исследуемые гармоники волны или комбинационные частоты в спектральном методе необходимо очень надежно отфильтровать от остальных спектральных компонент волны. Основную трудность при наблюдении искажения монохроматических волн, конечно, представляют более низкочастотные компоненты спектра (первая — в случае выделения второй гармоники, первая и вторая — в случае выделения третьей или особенно четвертой, и т. д.), так как уровень этих компонент может быть существенно более высоким, чем уровень измеряемой гармоники. В случае наблюдения взаимодействия волн существенным является возможность отстроиться от нежелательных комбинационных частот и гармоник. В отличие от оптики, располагающей материалами с сравнительно большой дисперсией, для упругих волн все исследованные до настоящего времени среды не имеют вообще или имеют очень незначительную дисперсию, связанную с различными релаксационными процессами, что практически исключает возможность применения акустических призм. Вместе с тем, во всяком случае при исследовании нелинейных искажений упругих волн в мегагерцевом диапазоне частот, не возникает вопрос о высокой разрешающей способности акустического или электронного спектрального ап-

парата. Это обстоятельство в значительной мере упрощает задачу спектрального анализа в нелинейной акустике. Здесь могут быть использованы с успехом как интерференционное выделение гармоник (интерференционные фильтры, интерференция волн в среде), так и выделение гармоник с помощью различных резонансных устройств. Последнее можно делать как в акустическом, так и в приемном электрическом трактах.

Для лучшей фильтрации, обычно, если это возможно (например, в жидкостях на частотах мегагерцевого диапазона), используют все три способа: выделение гармоник с помощью акустических фильтров; применение резонансных приемников на частоту исследуемой гармоники

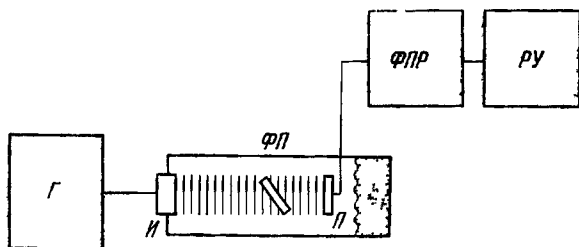


Рис. 14. Схема ультразвукового спектрографа для жидкостей.

или комбинационной частоты; введение на входе резонансного усилителя (резонанс на частоте исследуемой гармоники или комбинационной волны) электрических фильтров — пробок на частоты первой и других нежелательных гармоник или комбинационных частот, т. е. фильтров, пропускающих только исследуемую частоту.

В работе [1, 2] при исследовании искажения было использовано то обстоятельство, что полуволновая пластина «прозрачна» для звука, в то время как четвертьволновая «непрозрачна», и для выделения второй гармоники в жидкостях на частотах мегагерцевого диапазона использовались пластины из различных материалов (алюминий, сталь, медь). Определялась «прозрачность» этих пластин на различных частотах при разных ориентациях пластины относительно направления распространения ультразвука.

При измерении нелинейных искажений такая фильтр-пластина $\Phi\Pi$ (см. рис. 14) помещалась между источником звука Π и резонансным приемником Π соответствующей гармонике, причем угол между направлением распространения звука и нормалью к пластине $\Phi\Pi$ выбирался таким, чтобы отношение измеряемой гармонике к нежелательной гармонике (как правило — к первой гармонике) было наибольшим.



Рис. 15. Дифракция света на ультразвуке в CCl_4 на 3 Мгц (а) и на второй гармонике, выделенной фильтр-пластиной (б) [5].

Измерение амплитуды гармоник может при этом производиться при неподвижном приемнике; перемещается вдоль ультразвукового пучка только фильтр-пластина.

Использование фильтр-пластины имеет еще одно преимущество, весьма

важное при проведении количественных измерений нелинейных искажений в бегущих волнах. Если фильтр-пластина не используется, то приемник (особенно резонансный на частоту второй гармонике) может хорошо отражать, скажем, первую гармонику, что при работе не в импульсном режиме приводит к возникновению стоячей волны. В случае же применения фильтра-пластины, поставленного косо к направлению распространения ультразвука, эта трудность практически не возникает. Прием второй гармонике, выделенной фильтр-пластиной, может осуществляться как пьезоэлектрическим приемником, имеющим резонанс на частоте второй гармонике, с последующим пропусканием электрического сигнала через фильтр-пробку $\Phi\Pi P$ (рис. 14) на первую гармонику и резонансный усилитель PY второй гармонике, так и по наблюдению дифракции света на второй гармонике [3—5]. Как известно, дифракционные максимумы при дифракции света на частоте 2ω отстоят друг от друга на удвоенном (по сравнению с дифракцией на частоте ω) расстоянии (рис. 15), что позволяет также одновременно контролировать качество фильтрации. «Прозрачность» фильтра-пластины по существу определяется акустическими интерференционными явлениями.

Возможен еще и другой способ интерференционного выделения четных гармоник [6]. Принцип этого метода заключается в том, что при любой, но постоянной фазе гармоник относительно «опорной» фазы первой гармоники суммирование двух искаженных волн одинаковой амплитуды, одна из которых смещена относительно другой на 180° (в градусах первой гармоники), приводит к выделению четных гармоник. Действительно, если колебательная скорость в одной волне может быть представлена в виде

$$v_1 = A \sin \alpha + B \sin 2(\alpha + \varphi_2) + C \sin 3(\alpha + \varphi_3) + \\ + D \sin 4(\alpha + \varphi_4) + \dots,$$

где $\alpha = \omega t - kx$, а в другой — в виде

$$v_2 = A \sin(\alpha + \pi) + B \sin 2(\alpha + \varphi_2 + \pi) + \\ + C \sin 3(\alpha + \varphi_3 + \pi) + D \sin 4(\alpha + \varphi_4 + \pi) + \dots$$

то в суммарной волне

$$v = v_1 + v_2 = 2B \sin 2(\alpha + \varphi_2) + 2D \sin 4(\alpha + \varphi_4) + \dots$$

Таким образом, в суммарной волне выделяются только четные гармоники. То, что помимо второй гармоники еще суммируются четные гармоники более высоких порядков, при измерении малых нелинейных искажений не имеет большого значения, так как амплитуды этих гармоник малы.

На рис. 16 показана одна из возможных схем этого метода. В ультразвуковом пучке, создаваемом излучателем I , помещаются два приемника II_1 и II_2 (эти приемники не обязательно имеют резонанс на частоте второй гармоники, однако они должны иметь одинаковые частотные характеристики или хотя бы одинаковую чувствительность на частотах первой и второй гармоник). После приемников электрические сигналы суммируются в C и подаются на резонансный усилитель на вторую гармонику PY . Здесь суммирование производится в электрической части схемы.

Возможна также акустическая интерференция (суммирование) таких волн. Для этого можно применить,

например, акустический аналог интерферометра Майкельсона (рис. 17). От источника звука H звук падает на «полупрозрачную» для второй гармоники («прозрачность» для первой гармоники не имеет значения) делительную

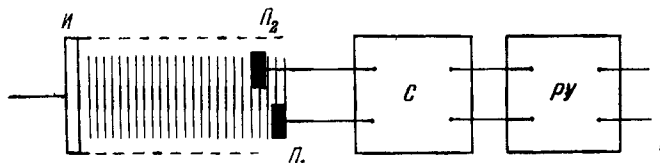


Рис. 16. Схема интерференционного выделения четных гармоник.

пластину $Пл$. Отраженный от пластины луч 1 затем попадает на неподвижный отражатель O_1 и снова возвращается к пластине. Луч 2 , пройдя через делительную

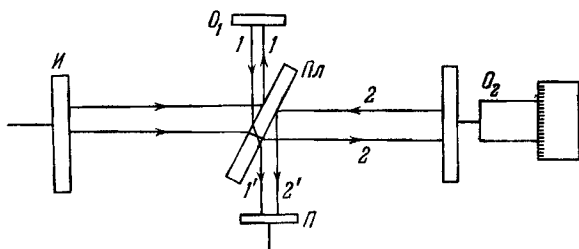


Рис. 17. Акустический аналог интерферометра Майкельсона.

пластину, отражается от отражателя O_2 и возвращается на $Пл$, где после отражения луч $2'$ интерферирует с лучом $1'$. Если, перемещая отражатель O_2 , сделать так, что акустические пути лучей $1-1'$ и $2-2'$ отличаются на $(2n - 1) \lambda/2$, то в результате интерференции при равных амплитудах компенсируются все нечетные гармоники, а амплитуды четных удваиваются. Естественно, что при большом различии в длине акустического пути нечетные гармоники уничтожаются не полностью из-за различия амплитуд интерферирующих волн, связанного с поглощением в среде. Такой интерферометр можно также исполь-

зовать для измерения скорости, поглощения, коэффициентов отражения и других акустических параметров.

Методы, о которых шла речь выше, использовались в жидкостях для хорошо коллимированных пучков, что возможно только для ультразвука частот порядка мегагерца

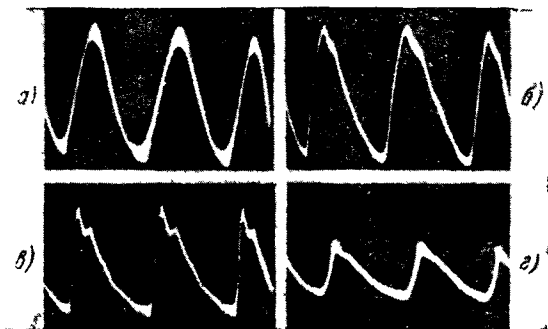


Рис. 18 Осциллограммы формы волны в воде на безразмерных расстояниях от источника звука: а) $\sigma = 0,16$; б) $\sigma = 0,8$; в) $\sigma = 1,6$; г) $\sigma = 3,9$ [9].

и выше. Спектральные методы применяются для определения малых искажений.

При больших искажениях формы профиля волны становится возможным непосредственное наблюдение пилообразной волны. Для этого нужно использовать широкополосные акустические приемники. Спектр волны можно получить либо анализируя с помощью электронного анализатора электрический сигнал от приемника [7, 8], либо фотографируя форму сигнала на экране осциллографа с последующим анализом осциллограммы на механическом анализаторе [9]. На рис. 18 показаны осциллограммы [9] формы волны в воде на разных расстояниях от источника звука при $Re \approx 50$ на частоте 1 Мгц . В качестве приемника использовалась кварцевая пластинка с резонансной частотой $11,5 \text{ Мгц}$. В воздухе для наблюдения фронта ударной волны может быть применен метод темного поля [10].

Следует особо остановиться на определении нелинейного искажения формы волны оптическими методами

(см. по этому поводу обзорную работу [11]). Дифракция широкого светового пучка на ультразвуковой волне малой амплитуды приводит, как известно, к дифракционной картине, где интенсивность света в спектрах $+n$ -го и $-n$ -го порядка одинакова. В случае дифракции света на искаженной волне распределение интенсивности света

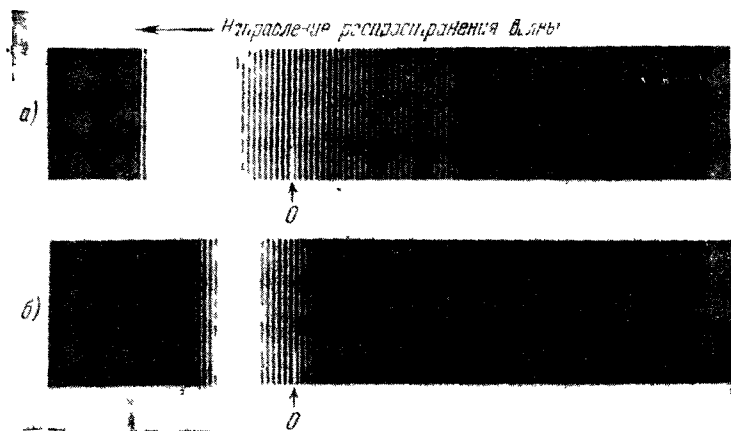


Рис. 19. Спектрограмма, полученная при дифракции света (синяя линия ртутного спектра $\lambda^* = 4358 \text{ \AA}$) на ультразвуке частоты 583 кГц в воде. а) $Re_0 = 50$, $\sigma = 0,7$; б) $Re_0 \simeq 65$, $\sigma = 2,2$ (по Михайлову и Шутилову).

становится несимметричным относительно спектра нулевого порядка [3, 12, 13, 11]. На рис. 19 показаны спектрограммы, иллюстрирующие несимметрию (спектры нулевого порядка отмечены стрелками). Первая из спектрограмм получена при дифракции на волне, которая еще не превратилась в пилообразную (форма профиля волны близка к форме, приведенной на рис. 18, б), вторая — на уже сформировавшейся пилообразной волне.

Теория дифракции света на волнах, близких к пилообразным, в предположении, что ультразвуковая решетка модулирует только фазу световой волны, развита в [13, 14]. Согласно теории, при дифракции света на пилообразной волне с шириной фронта λ максимумы освещенности

наблюдаются в порядках дифракционных спектров, номера которых

$$n_1 = \frac{2L \cdot \Delta n}{\lambda^*} \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \quad \text{и} \quad n_2 = - \frac{2L \cdot \Delta n}{\lambda^*} \frac{\lambda}{\kappa},$$

где L — путь, пройденный светом в звуковом поле, Δn — амплитуда изменения показателя преломления под действием звука, λ^* — длина волны света.

В асимметрии при дифракции света на монохроматической волне играет, по-видимому, определенную роль

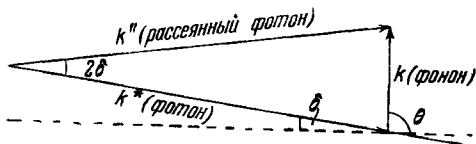


Рис. 20. Схема взаимодействия фотона с фононом.

селективное отражение от высокочастотных компонент спектра звуковой волны. Остановимся несколько на явлении селективного отражения при дифракции света на монохроматическом ультразвуке высокой частоты. В этом случае дифракция может трактоваться как взаимодействие фотона с фононом. Из квантовых законов сохранения энергии и импульса следует, что угол, при котором становится возможным такое взаимодействие между одним фотоном и одним фононом, определяется из условия (см. рис. 20)

$$\cos \theta = \left[\frac{c_0}{c^*} \left(1 + \frac{\omega}{2\omega^*} \right) - \frac{\omega}{2\omega^*} \frac{c^*}{c_0} \right], \quad (4.1)$$

где c_0 и c^* — соответственно скорости звука и света, а ω и ω^* — частоты звука и света. Для частот мегагерцевого диапазона $\omega \sim 10^6 - 10^7$ угол θ практически равен $\pm 90^\circ$. Для высоких частот ультразвукового и особенно гиперзвукового диапазона из (4.1) следует, что взаимодействие становится возможным только под углом, который определяется соотношением

$$\cos \theta \simeq - \frac{\omega}{2\omega^*} \frac{c^*}{c_0}; \quad (4.2)$$

при этом наблюдается селективное отражение (полностью асимметричная дифракция) под брэгговским углом $\delta = \theta - 90^\circ$. При этом взаимодействии квант света либо присоединяет, либо отщепляет квант звука так, что при селективном отражении частота дифрагировавшего света отличается от частоты падающего на $\pm \omega$. Это дублет Мандельштама — Бриллюэна, впервые экспериментально наблюдавшийся Гроссом при рассеянии света в твердых телах на дебаевских тепловых волнах, а затем рядом авторов в жидкостях. Трудность экспериментального исследования дублета Мандельштама — Бриллюэна заключается в необходимости разрешения очень близких частот (частота видимого света $\sim 10^{15}$, частота дебаевских волн $\sim 10^{10}$), чему мешает, помимо ограниченной разрешающей способности оптических спектральных аппаратов, еще и естественная ширина спектральных линий источников света. С развитием квантовых методов получения чрезвычайно монохроматического света (оптических квантовых генераторов) стала возможной экспериментальная проверка сдвига частоты света при дифракции на волне даже ультразвуковой частоты [15]. Возвращаясь к асимметрии освещенности при дифракции света на искаженной волне, в спектре которой есть составляющие высокой частоты, можно предполагать, что селективное отражение при взаимодействии фотонов с высокочастотными гармониками искаженной волны может вносить определенный вклад в асимметрию наблюдаемой дифракционной картины.

По асимметрии дифракционной картины можно не столько определять действительную форму профиля волны или выделить гармонические составляющие акустической волны, сколько измерить степень искажения и ширину фронта волны по положениям дифракционных максимумов с наибольшей освещенностью. Для определения малых нелинейных искажений делались попытки измерения различия освещенностей в положительных и отрицательных спектрах малых порядков [16]. Здесь, однако, возникают трудности, связанные с нелинейной зависимостью интенсивности света в дифракционных спектрах от звукового давления. Подробности использования дифракции света для определения малых нелинейных иска-

жений акустической волны можно найти в [11], где приведена также полная библиография.

Разрешающая способность дифракционной решетки, как известно, зависит от числа штрихов или, для случая дифракции на ультразвуке, от числа длин волн звука, укладываемых на ширине светового пучка. При ширине светового пучка в несколько длин волн разрешение дифракционных линий еще достаточно хорошее. Дальнейшее уменьшение ширины светового пучка до размеров

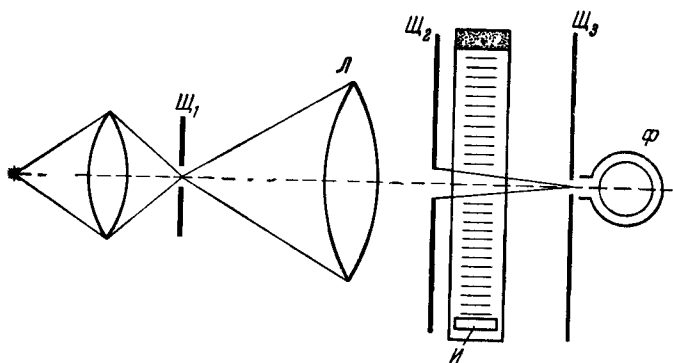


Рис. 21. Схема оптической установки для наблюдения искажения формы волны по методу «размытой щели».

длины ультразвуковой волны приводит к тому, что четкая дифракционная картина смазывается, наблюдается, как иногда говорят, размытое изображение щели. Как показали работы [17, 11], непрерывное распределение освещенности в этой картине так же асимметрично, как и в случае дифракции широкого светового пучка, и имеет максимумы освещенности под теми же углами.

На рис. 21 показана схема оптической установки для такого определения искажения формы волны. Изображение щели Ш₁, освещаемой источником света, фокусировалось длиннофокусной линзой Л на щель Ш₃. Щель Ш₂ ограничивала ширину пучка света так, что эта ширина составляла $\sim 0,1-0,4 \lambda$. Поэтому в плоскости щели Ш₃ при распространении звука от источника И изображение щели Ш₃ размывалось. При очень малой ширине щели

Π_3 , перемещая Π_3 в своей плоскости, можно по постоянной составляющей фототока, даваемого фотоумножителем Φ , определить распределение интенсивности света в размытом изображении. По асимметрии этого изображения можно судить о степени искажения волны. На рис. 22 приведены полученные таким образом распределения освещенности.



Рис. 22. Распределение освещенности в изображении размытой щели, полученное при распространении ультразвука (1 *Мгц*) в воде на расстояниях от источника звука 10 см (1), 50 см (2), 90 см (3). Напряжение на кварцевом излучателе 500 в.

угольного импульса

$$\frac{p_2'}{p_0} = 2\tau F \frac{\sin \pi \tau f_0}{\pi \tau f_0},$$

где τ — длительность импульса, F — частота повторения, f_0 — несущая частота (предполагалось, что электромеханический преобразователь передает импульс без искажения; для оценки «импульсной второй гармоники» такое приближение возможно). Тогда, если $N = \tau f_0$ — число колебаний в импульсе,

$$\frac{p_2'}{p_0} = \frac{2}{\pi} \frac{F}{f_0} \sin \pi N \leq \frac{2}{\pi} \frac{F}{f_0}.$$

Более точный вариант «метода размытой щели» развивается в работе [18], где в изображении «размытой щели» закрывается часть изображения, в результате чего световой поток на фотоумножителе оказывается модулированным. По форме светового сигнала можно судить об искажении формы профиля волны.

До сих пор речь шла о методах, где не использовалась модуляция звукового излучения. Часто используется импульсная амплитудная модуляция. Она удобна тем, что позволяет работать с бегущими волнами даже тогда, когда избавиться от стоячих волн иным способом нельзя (например, в твердых телах). При импульсной модуляции, как известно, появляется электрическая «импульсная вторая гармоника», которая ошибочно может быть принята за искажение в среде. В случае прямо-

Обычно на частотах меггерцового диапазона $F \approx 10^2 - 10^3$ и $p_2'/p_0 \leq 10^{-3} - 10^{-4}$, т. е. за исключением измерения чрезвычайно малых искажений ($p_2/p_0 \sim 10^{-3}$, с «импульсной» гармоникой можно не считаться, так как ее величина еще уменьшается за счет сравнительно узкой полосы пропускания электромеханических преобразователей.

Блок-схема установки для импульсного метода определения нелинейного искажения [19] приведена на рис. 23.

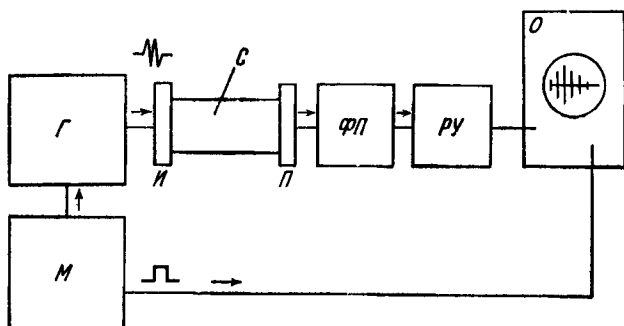


Рис. 23. Блок-схема установки для выделения второй гармоники при работе в импульсном режиме.

Импульсный модулятор M модулирует колебания генератора G и одновременно дает синхронизирующий импульс на развертку электронно-лучевого осциллографа O . Радиопульс генератора G после преобразования с помощью излучателя I , имеющего резонанс на несущей частоте, в акустический импульс распространяется в среде C . Приемник P с резонансной частотой, соответствующей частоте гармоники, принимает сигнал. Поскольку в этом сигнале помимо выделяемой гармоники есть еще и первая гармоника (и, вообще говоря, другие гармоники), уровень которой велик по сравнению с уровнем выделяемой гармоники, перед резонансным усилителем $ПУ$ ставится фильтр-пробка $ФП$ для первой гармоники, улучшающий отношение выделяемой гармоники к первой. На экране осциллографа O , если затухание в материале невелико, наблюдается серия импульсов выделяемой гармоники: первый импульс, прошедший одну длину образца; второй

импульс, прошедший тройную длину образца; N -й импульс, прошедший длину образца $2N - 1$ раз. Если размеры образца меньше расстояния стабилизации выделяемой гармоники, то второй (или даже более высокого порядка) импульс имеет амплитуду большую, чем амплитуда первого (или предыдущих импульсов).

На рис. 24 показана серия импульсов второй гармоники в магниево-алюминиевом сплаве МА-8 [19]; четко виден

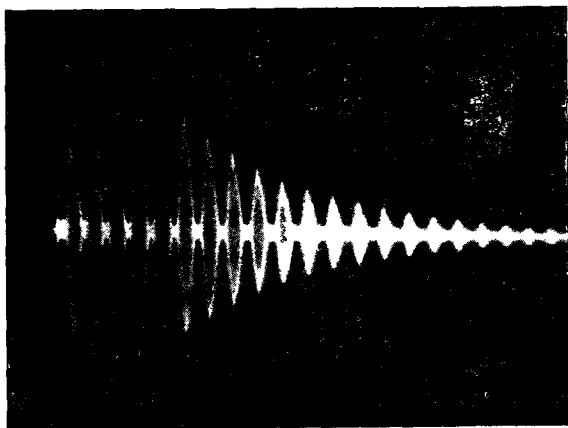


Рис. 24. Серия импульсов второй гармоники в коротком образце из магниево-алюминиевого сплава МА-8. Несущая частота 5 Мгц.

максимум второй гармоники, приходящийся на третий импульс. Неэкспоненциальное спадание серии импульсов при распространении звука в волноводе, поперечные размеры которого составляют 10—20 длин волн, возможно и по ряду других причин (неоднородность колебаний излучающей пьезоэлектрической пластинки, дифракционные явления и др.), поэтому целесообразно проверять, не связан ли такой вид серии импульсов второй гармоники с этими причинами (в [19] для этого наблюдалась серия отраженных импульсов волны малой амплитуды с несущей частотой, равной частоте второй гармоники, которая должна спадать экспоненциально).

Помимо импульсной электрической модуляции возможна любая другая амплитудная модуляция. Особенно удобна амплитудная синусоидальная модуляция. В этом случае за счет нелинейных свойств среды можно выделить частоту модуляции (акустическое детектирование); по величине этого сигнала можно судить о нелинейных свойствах среды. Близкий к этому метод был использован в [20]. На кварцевый излучатель от двух генераторов подавались две несколько разные частоты (различие частот было невелико, для того чтобы обе частоты находились в полосе пропускания кварцевого преобразователя). В результате нелинейного взаимодействия волн в спектре сигнала появлялись суммарная и разностная частоты. Последняя была на 1—2 порядка ниже*), чем исходные частоты, и выделялась приемным устройством.

Поскольку среда, в которой распространяются звуковые волны, нелинейна, возможны методы не электрической, а акустической модуляции, «акустического гетеродинирования», при котором «смещение» волн происходит в среде с нелинейными свойствами. В [21], например, наблюдалось появление в среде разностной и суммарной частот при распространении двух ультразвуковых волн в одном направлении («акустическое гетеродинирование»).

Чувствительный метод, ранее разработанный И. Л. Бернштейном для исследования малых изменений фазы радиоволн, применен в [22] для определения нелинейного взаимодействия акустических волн: стоячая волна ультразвуковой частоты ω модулировалась низкочастотной звуковой волной Ω , пересекающей ультразвуковую волну под прямым углом. В результате модуляции фаза волны ω на приемнике по отношению к фазе на излучателе изменялась с частотой Ω . Это изменение определялось с помощью балансной схемы, детектора, выделяющего частоту Ω , и затем усиливалось резонансным усилителем на частоту Ω . Помимо фазовой модуляции имела

*) В этих экспериментах разностная частота не могла быть сделана очень низкой, так как измерения проводились в ограниченных объемах, где трудно было избавиться от отражений от стенок. Другим ограничением получения очень низкой разностной частоты в этом эксперименте, по-видимому, может быть стабильность частот генераторов.

место также и амплитудная модуляция. Следует иметь в виду, что если в качестве модулирующей волны используется волна низкой частоты, направленность которой не может быть сделана хорошей, то необходима уверенность, что нелинейное взаимодействие происходит в среде, а не на нелинейных элементах приемно-усилительного тракта (см. гл. 2, § 7). Метод взаимодействия волн впоследствии был применен для определения нелинейных параметров жидкостей [23].

Поскольку в некоторых задачах нелинейного распространения упругих волн необходимы абсолютные измерения и сравнение с теорией, геометрия звукового поля имеет существенное значение. Большинство измерений обычно проводится в ближнем поле излучателя, где волну еще можно считать плоской. Поскольку ближнее поле чрезвычайно неоднородно, такие измерения возможны только тогда, когда размеры приемника существенно больше неоднородностей поля и, следовательно, приемник усредняет эти неоднородности. С приемниками, размеры которых меньше или порядка длины волны, измерения обычно проводятся в дальнем поле [24], где уже начинает сказываться расходямость, что обычно учитывается при сравнении теории с экспериментом.

При исследовании нелинейных искажений в газах [7, 25, 26] на звуковых частотах для получения плоской волны использовались волноводы с жесткими стенками. Эти работы проводились в трубах, конец которых, противоположный источнику звука, был тщательно заглушен.

Переходим теперь к результатам исследования нелинейных искажений в жидкостях и газах.

Исследования нелинейных искажений в газах проводились сравнительно давно. Область небольших искажений, когда максимальное значение второй гармоники по отношению к первой не превосходило нескольких процентов, исследовалась в [25]. Эти исследования были продолжены в [7], где работа велась уже с волнами, близкими по форме к пилообразным. Результаты измерения второй гармоники по [7, 25, 26] приведены на рис. 25. Они удовлетворительно согласуются с теоретическим значением гармоники по Бесселю — Фубини. Систематическое отклонение от теории в [26] объясняется влиянием стенок трубы

В жидкостях спектральный метод исследования искажения был применен в [1]. Было установлено, что ультразвуковые волны мегагерцевого диапазона при звуковых давлениях порядка нескольких атмосфер искажаются

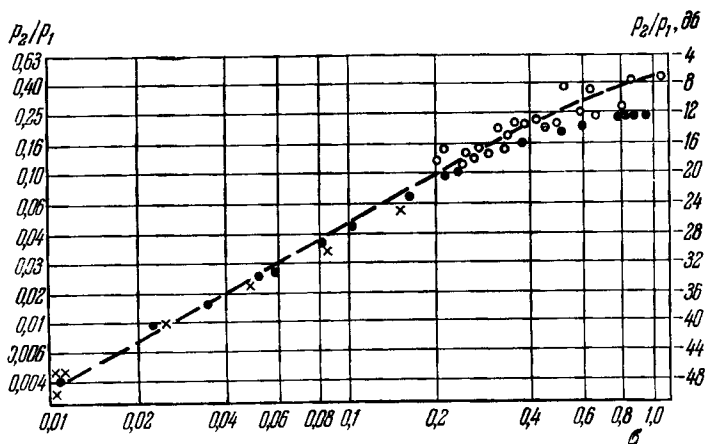


Рис. 25. Отношение звукового давления второй гармоники к давлению первой гармоники в воздухе для плоской волны в зависимости от безразмерного расстояния (в долях расстояния образования разрыва). Пунктирная линия — теоретическая по Бесселю — Фубини. \circ — по работе [7], частота 1000 гц; \times — по работе [25], частота 600 гц; \bullet — по работе [26], частота 500 гц.

весьма значительно. Вскоре в [9, 24] было показано, что относительно несложным является получение в такой жидкости, как вода, пилообразных ультразвуковых волн. В дальнейшем нелинейному искажению ультразвуковых волн в жидкостях был посвящен ряд работ [2, 27, 28, 8, 29, 30, 31]. Большинство этих работ проведено в области интенсивностей $Re \lesssim 10$ и на безразмерных расстояниях от источника звука $\sigma = \epsilon k x M = 0 \div 3,0$. Сравнение результатов экспериментов с теорией при средних числах Рейнольдса затруднено ввиду того, что для этой области имеется (см. гл. 3, § 2) лишь квазилинейный метод расчета амплитуд гармоник [32, 33]. Естественно, что при средних числах Рейнольдса решение Бесселя — Фубини (2.74) для невязкой среды на расстояниях от источника

звука таких, что $\alpha_0 x$ уже нельзя считать малой величиной, становится непригодным.

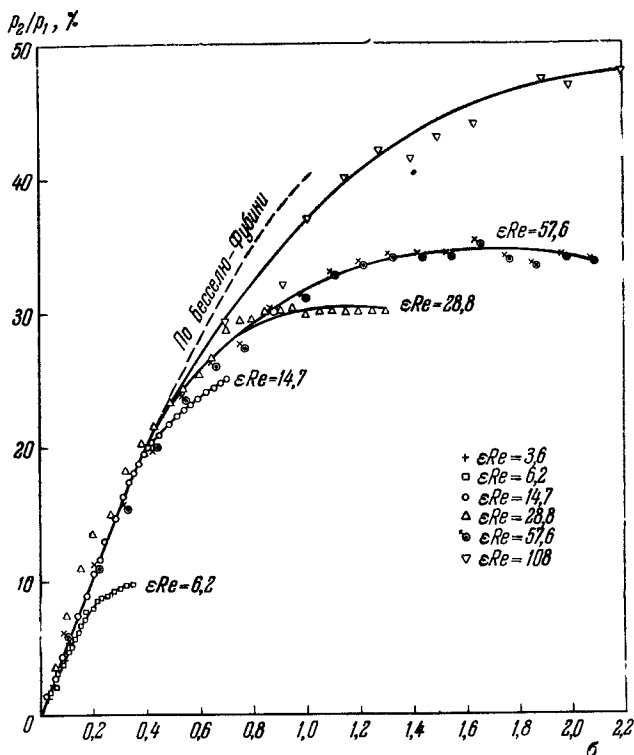


Рис. 26. Отношение звукового давления второй гармоники к давлению первой гармоники в воде для плоской волны в зависимости от безразмерного расстояния (в долях расстояния образования разрыва). ▽ — данные [8], все остальное — данные В. В. Шкловской-Корди. Числа Re рассчитаны по звуковому давлению у источника звука.

На рис. 26 приведены данные по измерению второй гармоники, полученной спектральным методом на разных расстояниях от источника звука в воде (кривые пригодны для любых сред, однако наибольшее количество надежных экспериментальных данных имеется для воды). Как вид-

но из этого рисунка, при малых σ все измерения (даже при относительно небольших числах Рейнольдса) хорошо следуют решению Бесселя — Фубини (2.74). Это обстоятельство, в частности, использовалось для определения нелинейных параметров жидкостей. Интересно, что вторая гармоника продолжает расти на расстояниях, больших расстояния образования разрыва ($\sigma = 1$). В этой области,

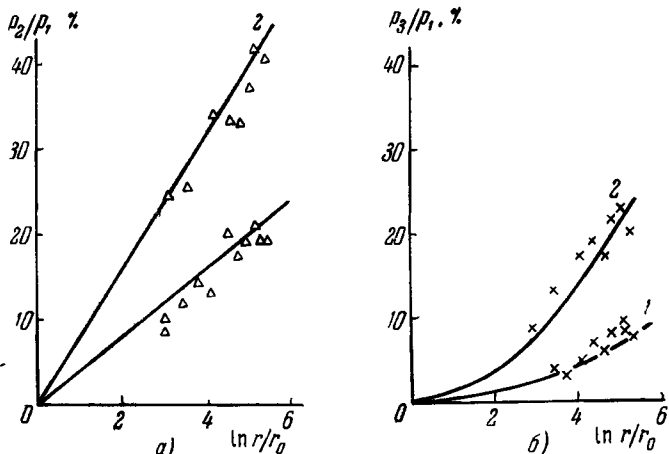


Рис. 27. Искажение сферически расходящейся волны в воде. 1 — амплитуда звукового давления у источника звука $p_0 = 14,2$ атм, 2 — $p_0 = 26$ атм [34].

как это следует из теории (см. гл. 3, § 2), происходит формирование пилообразной волны; в области существования пилообразной волны гармоника достигает максимального значения.

Данные рис. 26 относятся к плоской волне; на рис. 27 показаны изменения второй и третьей гармоник в сферически расходящейся волне, полученные для $Re_0 \simeq 55$ (кривая 1) и $Re_0 \simeq 100$ (кривая 2) при $kr_0 \simeq 38$ [34]. Сплошные кривые — теоретические (для второй гармоники по (3.49) при $\alpha_0 = 0$).

Не все имеющиеся в литературе данные хорошо согласуются с решением Бесселя — Фубини и тем более с квазилинейной теорией для вязкой жидкости. Это объясняется отчасти тем, что абсолютные измерения звукового

поля, необходимые для сравнения с теорией, как известно, могут быть сделаны сравнительно неточно.

Исследования распространения волн конечной амплитуды в релаксирующих средах немногочисленны. В одной из первых работ [27] наблюдалось искажение и дисперсия в уксусной кислоте при $\omega\tau = 1; 2; 3$ ($\tau \sim 3 \cdot 10^{-7}$ сек). Из-за большого поглощения в концентрированной уксусной кислоте удалось получить только малые числа $Re \sim 10^{-4}$. Несколько бóльшие Re , но все-таки остающиеся много меньшими единицы, были получены в водных растворах уксусной кислоты. При таких числах Рейнольдса в области релаксации гармоника была порядка одного процента; несколько бóльшими искажения (так же как и Re) были при $\omega\tau = 3$. Наблюдение дисперсии осуществлялось по сдвигу фазы второй гармоники при изменении расстояния излучатель — приемник относительно «опорной» фазы первой гармоники. При этом было установлено, что при целом числе длин волн по первой гармонике (возвращении фазы к исходному положению) по второй гармонике из-за дисперсии возвращения фазы к исходному положению не было. По порядку величины дисперсия, измеренная в интервале частот $\omega\tau = 1 \div 8$, согласуется с полученной ранее другими линейными методами. Этот результат экспериментально подтвержден также в [8] для водного раствора $MnSO_4$, где измеренный аналогичным методом при $\omega\tau \sim 0,3 \div 1,0$ сдвиг фазы второй гармоники относительно первой оказался в два раза меньшим, чем сдвиг фазы в гипотетическом случае невзаимодействующих первой и второй гармоник.

Этот метод, по-видимому, может быть применен для определения малой дисперсии в жидкостях. В этой же работе было показано, что при изменении звукового давления в 5—6 раз величина дисперсии в пределах точности измерения не меняется.

При числах $Re \geq 1$ искажение формы волны в релаксирующих средах наблюдалось в [8, 35]. В этих работах исследовался спектральный состав ультразвуковых волн в водных растворах электролитов $MnSO_4$, $Al_2(SO_4)_3$ и $CoSO_4$, хорошо следующих теории релаксации с одним временем релаксации. При $\omega\tau \ll 1$, как это следует и из теории распространения волн конечной амплитуды

(см. § 6 гл. 3), релаксационные процессы не препятствуют образованию пилообразной волны.

На рис. 28 показан спектральный состав пилообразных волн, образовавшихся при $\omega\tau \sim 0,05$ в растворах $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ разной концентрации (спектральный состав дан

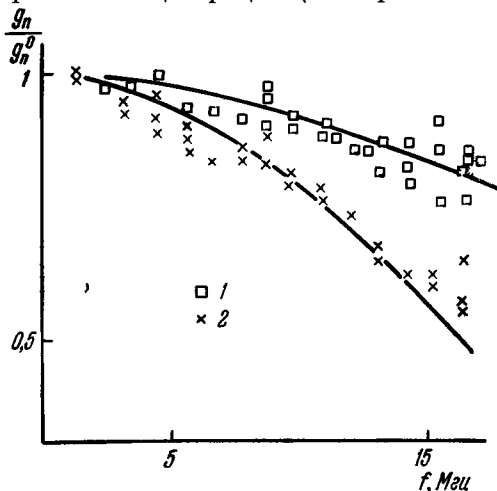


Рис. 28. Спектральный состав пилообразной волны в водном растворе $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ по отношению к спектральному составу в чистой воде. 1 — концентрация раствора 0,1 моль/л, 2 — 0,5 моль/л. Частота 1,1 МГц. Амплитуда пилообразной волны 3,9 атм.

по отношению к спектральному составу в чистой воде g_n^0). Сплошные кривые проведены по (3.26), где безразмерная ширина фронта определялась по (3.23). Таким образом, этот результат можно рассматривать как подтверждение того, что при работе вдали от области релаксации влияние релаксации сказывается только в том, что к сдвиговой вязкости и теплопроводности добавляется еще и объемная вязкость. Иначе обстоит дело, когда частота релаксации близка к частоте первой гармоники. Как следует из [35] при $\omega\tau \sim 0,25$, высокочастотные гармоники в волне убывают медленнее, чем это следует по (3.26), так как они попадают за область релаксации, где объемная вязкость меньше, чем в области релаксации.

Ранее уже отмечалось, что нелинейные акустические эффекты можно наблюдать не только по искажению монохроматических сигналов, но также по ряду других нелинейных эффектов: «акустическому детектированию»,

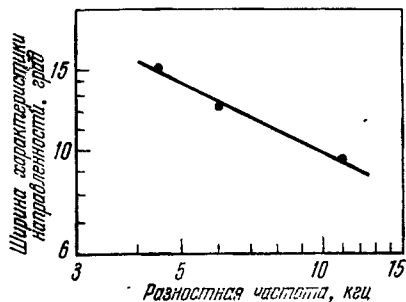


Рис. 29. Ширина характеристики направленности волн разных разностей частот.

«акустическому гетеродинированию» и др. Такие эксперименты проводились как в воздухе, так и в жидкостях. Комбинационные частоты или частоты модуляции сравнительно легко могут быть выделены. Представляет определенный интерес экспериментальная проверка возможности создания нелинейных параметрических излучателей с острой характеристикой направленности. В [20] определялась ширина характеристики направленности волны разностной частоты Ω , появляющейся в результате взаимодействия двух волн частот

$$f_1 = f_p - \frac{\Omega}{2} \quad \text{и} \quad f_2 = f_p + \frac{\Omega}{2},$$

где f_p — резонансная частота источника высокочастотных волн, имеющего полосу пропускания более широкую, чем Ω . В [20] $f_p = 350$ кгц, а диаметр высокочастотного источника 2,54 см. На рис. 29 показана ширина характеристики направленности для волны разностной частоты при разных разностных частотах; эти измерения производились в воздухе. В качестве сравнения отметим, что для получения на частоте 4,5 кгц ширины характеристики направленности $\sim 15^\circ$ понадобился бы источник звука диаметром 25,4 см.

Скорость распространения волн конечной амплитуды определялась в [36, 12, 37]. В этих работах (как и во всех работах с ультразвуком малой амплитуды) определялась скорость нулей того или иного параметра волны

(звукового давления или колебательной скорости), т. е. точек волны, где данная величина не отличается от соответствующей величины в невозмущенной среде. Скорость нулей римановой волны равна скорости звука волны малой амплитуды; с другой стороны, скорость сильной ударной волны относительно невозмущенной среды больше скорости звука. Измерения в [37] проведены с точностью до величин порядка числа Маха и показали, что слабые разрывы с этой точностью распространяются со скоростью звука малой амплитуды. Это позволяет считать, что в отличие от измерений поглощения, где результаты очень чувствительны к величине амплитуды звука, измерения скорости могут проводиться и при больших интенсивностях — это не приведет к ошибкам.

§ 2. Определение нелинейных параметров

Искажение волн и ряд других нелинейных явлений зависит от нелинейных свойств среды. Эти свойства были бы известны, если бы было известно точное уравнение состояния среды. В большинстве случаев такое уравнение неизвестно. В нелинейной акустике часто предполагается, что уравнение состояния среды можно представить в виде $p = p(\rho, s)$, где s — энтропия. Разлагая p в ряд по малым отклонениям от равновесия, получим:

$$p = p_0 + \rho_0 c_0^2 \left[\mu + (n-1) \frac{\mu^2}{2} + \dots \right] + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\substack{\rho=\rho_0 \\ s=s_0}} (s - s_0) + \dots, \quad (4.3)$$

где $p_0 = p(\rho_0, s_0)$, $\mu = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ — сжатие,

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=\rho_0 \\ s=s_0}}, \quad c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=s_0}$$

— скорость звука в невозмущенной среде и местная скорость звука,

$$n = \left. \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=\rho_0 \\ s=s_0}} + 1$$

— безразмерный нелинейный параметр второго порядка.

Нелинейный параметр n связан с используемым выше параметром ε соотношением

$$n = 2\varepsilon - 1. \quad (4.4)$$

Отметим, что для жидкостей иногда используется другая величина $B/A = n - 1$. Для идеального газа $n \equiv \gamma$.

Поскольку возрастание энтропии при переходе через фронт ударной волны — величина третьего порядка малости, а для акустических волн — еще более высокого порядка, нелинейный параметр второго порядка n не зависит от того, отклоняется ли процесс в волне от адиабатического.

Здесь шла речь о величинах второго порядка, аналогично могут быть введены нелинейные параметры более высокого порядка. В том случае, когда газ следует уравнению Пуассона, параметры более высокого порядка определенным образом связаны с γ . Для жидкостей используется эмпирическое уравнение состояния Тэта:

$$p = P_* \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma, \quad (4.5)$$

где P_* и Γ — эмпирические параметры. Сравнивая это уравнение с уравнением Пуассона, можно сказать, что P_* — величина, характеризующая упругость жидкости. Иногда эта величина называется внутренним давлением, ибо при $\rho = \rho_0$ имеем $p = P_*$. Γ — параметр, характеризующий отклонение жидкости от закона Гука. Легко видеть, что нелинейный параметр n для жидкости Тэта равен Γ . Для жидкости Тэта, так же как и для идеального газа, нелинейные параметры более высокого порядка связаны с Γ .

Таким образом, вопрос о нелинейных параметрах более высокого порядка эквивалентен вопросу о том, следуют ли реальные газы и жидкости соответственно уравнению Пуассона и уравнению Тэта. Для газов этот вопрос в достаточной мере изучен: при температурах, высоких по сравнению с температурой кипения, и не очень больших давлениях все реальные газы вполне удовлетворительно подчиняются уравнению идеального газа (и, следовательно, в адиабатическом процессе — уравнению

Пуассона). Значительно меньше изучен вопрос о жидкостях. Есть, однако, указания на то, что величины порядка малости более высокого, чем второй, в жидкостях с достаточной точностью могут быть рассчитаны по нелинейному параметру второго приближения, определяемому экспериментально, так что жидкости, по-видимому, с достаточной для нас точностью следуют уравнению Тэта.

Адиабатический модуль объемной сжимаемости

$$K_{\text{ад}} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \rho c^2 \quad (4.6)$$

можно для идеального газа представить в виде

$$K_{\text{ад}} = \gamma(p' + p_0), \quad (4.7)$$

где p' — избыточное, а p_0 — атмосферное давление. Для жидкости Тэта

$$K_{\text{ад}} = \Gamma(p' + P_*), \quad (4.8)$$

где $p' = p - P_*$ — избыточное давление.

Методы определения γ для газов общеизвестны, и мы на них не будем останавливаться. Одним из методов, в частности, является метод Квинке измерения $\gamma = c_p/c_v$ по скорости звука. Для жидкости аналогичный метод не может быть применен, так как в соотношении для скорости звука в жидкости $c_0^2 = \Gamma P_*/\rho_0$ входит помимо неизвестного нелинейного параметра $\Gamma \equiv n$ еще и неизвестное внутреннее давление P_* (в случае газов аналогом этого давления является легко измеримое атмосферное давление). Известны методы определения P_* в изотермических процессах (см. [38]). Поскольку внутреннее давление не зависит от характера термодинамического процесса, по измерению скорости звука и изотермическому P_* в этом случае можно определить нелинейный параметр. Этот метод, однако, значительно более трудоемок, чем описанные дальше чисто акустические методы. По определению

$$n - 1 = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial p} \right)_{\substack{\rho=\rho_0 \\ s=s_0}} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{\substack{\rho=\rho_0 \\ s=s_0}}.$$

Таким образом, нелинейный параметр может быть найден по измерению зависимости скорости звука от давления. Трудность, иногда ошибочно не принимаемая во внимание, заключается в том, что давление при этом должно изменяться адиабатически. В адиабатическом процессе изменение скорости происходит как за счет изотермического изменения давления, так и за счет изобарического изменения температуры, что дает [39]:

$$n - 1 = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{T=T_0} + \frac{2c_0 T_0 \beta}{\rho_0 c_p} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{p=p_0}, \quad (4.9)$$

где β — изобарический температурный коэффициент объемного расширения. Таким образом, для определения нелинейного параметра нужны экспериментальные изотермическая зависимость скорости звука от давления и изобарическая зависимость скорости звука от температуры. Этот метод позволяет получить большую точность определения n , однако n несколько отличаются от параметров, определенных другими методами, в частности по нелинейному искажению волн (см. табл. 4).

Наиболее просто нелинейный параметр может быть экспериментально определен по нелинейным эффектам при распространении волн конечной амплитуды (искажению или взаимодействию волн). Экспериментальную трудность здесь представляет абсолютное измерение звуковых давлений, что ограничивает точность определения нелинейного параметра для жидкостей и газов. Наилучшие измерения сейчас сделаны по-видимому с ошибкой 5—10%. В твердых телах ошибка измерения нелинейного параметра еще больше (~ 20 —30%). Эта трудность, во всяком случае для жидкостей, может быть устранена проведением сравнительных измерений. В этом методе ошибка в основном определяется ошибкой измерения n в жидкости сравнения.

Метод измерения нелинейного параметра по искажению волны обычно заключается в измерении в бегущей волне скорости нарастания в пространстве второй гармоники. При малых $\alpha_0 x$ и любых числах Рейнольдса, как это следует из (3.10) для малых Re и из (2.76) для больших Re , а также из экспериментальных данных, приведенных

Т а б л и ц а 3

Отношение теплоемкостей $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

Газ	Температура, °C	γ
Азот	20	1,401
Аргон	0	1,667
Бензол	20	1,40
Воздух	0—17	1,401
Водород	4—17	1,407
Гелий	0	1,63
Кислород	5—14	1,400
Пары воды	100	1,334
Углекислый газ	4—11	1,300

на рис. 25 и 26, амплитуда второй гармоники

$$v_2 = \frac{v_{10}\sigma}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{v_{10}^2}{c_0} kx, \quad (4.10)$$

или для давления

$$p_2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{p_{10}^2}{\rho_0 c_0^2} kx \right), \quad (4.11)$$

где индексом «10» отмечены величины для первой гармоники у источника звука. Для определения ε необходимо абсолютное измерение p_{10} и p_2 . Сравнительный метод [31] заключается в сравнении величин вторых гармоник в средах, где n неизвестно, с соответствующими величинами для среды, где n известно (где были проведены абсолютные измерения), при постоянных значениях $p_{10}^2 kx / \rho_0 c_0^2$. Естественно, что такое сравнение возможно только на расстояниях от источника звука, где вторая гармоника растет в обеих жидкостях линейно, т. е. влияние затухания звука мало. Это ограничивает возможности применения этого метода для очень вязких жидкостей.

Скорость изменения профиля волны конечной амплитуды, а с нею и нелинейный параметр, можно также

Нелинейный параметр Γ и внутреннее давление P_* жидкостей

Жидкость	Γ		$P_* \cdot 10^{-3}, \text{кг/см}^2$
	Измерено по нелинейным акустическим эффектам	Рассчитано	
Азот жидкий	4,1 ¹¹⁾	4,2 ⁵⁾	—
Ацетон	10,0 ¹⁾	9,6 ²⁾	—
Амилацетат	6,1 ¹¹⁾	—	—
Бензин А-70	11,2 ¹⁾	11,2 ²⁾	—
Бензол	9,4 ²⁾	7,8 ⁷⁾	7,5 ⁹⁾
Вода	7,1 ¹⁾ ; 7,6 ²⁾ ; 7,2 ³⁾ ; 6,06 ⁴⁾	5,8 ⁷⁾	6,8 ⁸⁾
Глицерин	10,4 ²⁾	9,8 ⁸⁾	—
Дихлорэтан	8,6 ¹⁾	8,7 ²⁾	—
<i>n</i> -Ксилол	9,7 ¹⁾	10,6 \pm 1 ⁸⁾	—
Ртуть	—	12,0 ⁸⁾	—
Сероуглерод	—	12,0 ⁸⁾ 6,4 ⁷⁾ ; 7,2 ⁹⁾	—
Скипидар	10,5 ¹¹⁾	—	—
Спирт <i>n</i> -пропиловый	9,9 ¹⁾	9,0 ⁷⁾	—
Спирт <i>n</i> -бутиловый	9,6 ¹⁾	9,4 ⁷⁾	—
Спирт <i>n</i> -гексиловый	10,7 ¹⁾	—	—
Спирт <i>n</i> -октиловый	9,7 ¹⁾	—	—
« <i>n</i> -нониловый	10,0 ¹⁾	—	—
« <i>n</i> -дециловый	9,6 ¹⁾	—	—
« метиловый	9,7 ¹⁾ ; 8,6 ²⁾ ; 9,0 ¹¹⁾	8,6 ⁷⁾ ; 10,2 ⁸⁾	—
« этиловый	10,8 ¹⁾ ; 10,6 ²⁾ ; 11,0 ⁴⁾	9,0 ⁷⁾ ; 11,2 ⁸⁾	—
Толуол	10,4 ¹⁾	8,9 ⁹⁾	—
Трансформаторное масло	7,5 ¹⁾	—	—
Четыреххлористый угле-	11,4 ¹⁾ ; 11,8 ²⁾	10,2 ⁷⁾	—
род	11,5 ¹⁾ ; 11,6 ²⁾	—	—
Хлороформ	6,0 ¹¹⁾	—	—
Этилацетат	4,1 ¹¹⁾	—	—
Эфир этиловый	—	—	—

1) Измерение методом сравнения (жидкость сравнения — дистиллированная вода, $\Gamma=7,1\pm 0,2$). Температура 20°C. Частота 1,5 Мгц [31]. 2) Измерения искажения оптическим методом. Температура комнатная. Частота 570 кгц [23]. 3) Измерение искажения с акустическим фильтром. Оптическое определение параметров второй гармоники [40]. Частота 3 Мгц. 4) По взаимодействию двух волн [23]. 5) Измерение методом сравнения (жидкость сравнения — ацетон, $\Gamma=10,0$). Температура —195°C. Частота 5 Мгц [41]. Эти данные исправлены с учетом измерений скорости в кипящем жидком азоте. 6) Данные, использованные для сравнения экспериментального поглощения с теоретическим [42]. 7) Термодинамический расчет по экспериментальной зависимости скорости звука от температуры и давления [43]. 8) Расчет по $\Gamma=\rho_0 c_0^2/P_*$; P_* — из статических измерений [38]. 9) Термодинамический расчет по экспериментальной зависимости скорости звука от температуры и давления [39]. 10) Данные статических измерений [38]. 11) Измерение методом сравнения (жидкость сравнения — бутиловый спирт, $\Gamma=9,6$). Частота 2 Мгц.

Таблица 5

Зависимость нелинейного параметра Γ некоторых жидкостей от температуры

°C	Вода		Этиловый спирт		Бензол	Серовуглерод
	По [39]*)	По [31]**)	По [39]*)	По [31]**)	По [39]*)	По [31]**)
0	5,2	—	11,5	—	—	—
10	5,6	—	11,3	—	—	7,4
20	6,0	7,1	11,3	10,8	—	—
25	—	—	—	—	7,5	7,2
30	6,2	7,0	11,4	10,7	—	—
40	6,4	7,4	11,8	10,0	9,5	7,1
50	—	7,3	11,9	9,6	—	—
60	6,7	7,6	11,9	—	—	—
63	—	—	—	10,0	—	—
77,5	—	—	—	9,6	—	—
78,5	—	—	—	10,4	—	—
80	7,0	7,7	—	—	—	—
90	—	8,0	—	—	—	—
95	—	8,1	—	—	—	—
100	7,1	—	—	—	—	—

*) Расчет по изобарической зависимости скорости звука от температуры и изотермической зависимости скорости звука от давления.
**) Эксперимент по нелинейному искажению ультразвуковых волн.

определить оптическим методом по порядкам дифракционных спектров, в которых наблюдается максимум освещенности [28]. Этот метод удобен тем, что здесь исключаются абсолютные измерения звукового давления; однако он применялся только при значительных интенсивностях звука.

В табл. 3 приведены значения γ для газов, а в табл. 4 — значения нелинейного параметра ряда жидкостей. Эти параметры для газов и жидкостей несколько зависят от температуры. Зависимость Γ для некоторых жидкостей от температуры приведена в табл. 5.

§ 3. Поглощение волн конечной амплитуды

Прежде чем переходить к методике измерения поглощения волн конечной амплитуды, остановимся на некоторых вопросах, которые уже затрагивались в § 4 гл. 3. Это, во-первых, относится к различию между парциальными коэффициентами поглощения гармоник (в том числе и первой гармоники) и коэффициентом поглощения волны конечной амплитуды. Эти коэффициенты, как отмечалось, совпадают только в области стабилизации волны. Поэтому, если речь идет об измерении коэффициента поглощения волны конечной амплитуды, измерительное устройство должно иметь достаточно широкую и равномерную полосу пропускания. Другой особенностью коэффициента поглощения волн конечной амплитуды является то, что этот коэффициент зависит от координат и можно говорить только о дифференциальном коэффициенте поглощения. Поэтому здесь точность измерения коэффициента поглощения, как правило, значительно ниже, чем точность измерения коэффициента поглощения волн малой амплитуды. И, наконец, следует отметить еще одну особенность измерения поглощения волн конечной амплитуды: такие измерения обычно возможны только в ближнем поле, где звуковое поле крайне неоднородно. Это позволяет использовать только приемники, размеры которых существенно больше длины звуковой волны. При работе в дальнем поле можно использовать миниатюрный приемник [24], мало возмущающий звуковое поле. Однако в этом случае возникают трудности, связанные с расходимостью звукового пучка и необходимостью знания характера расходимости, которая должна учитываться при определении коэффициента поглощения из экспериментальных данных.

Использование резонансных акустических приемников (скажем, пьезоэлектрических пластинок) позволяет, вообще говоря, определить только парциальный коэффициент поглощения. Единой методики для измерения поглощения в жидкостях и газах, естественно, нет. В качестве широкополосных приемников в технике измерения интенсивных ультразвуковых волн в жидкостях применяются приемники типа акустического «абсолютно черного тела».

В [44, 45] для измерения интенсивности звукового поля использовались сосуды Дьюара с поглотителем звука или без него. В том случае, когда вся звуковая энергия, входящая в сосуд Дьюара, поглощается внутри, по нагреву жидкости в течение определенного промежутка времени можно судить об энергии звукового поля. Измерение распределения энергии в звуковом поле позволяет определить поглощение звука. Следует отметить, что эта методика успешно применялась только для ультразвука весьма большой интенсивности (порядка нескольких десятков $вт/см^2$) и, следовательно, большого поглощения. Из аналогичных приемников, пригодных для меньших интенсивностей, следует также отметить термоэлектрические приемники [46, 47], где измерение нагрева поглощающей среды (жидкости или твердого поглощающего покрытия термопары) производится термопарой.

Применение механических приемников звукового радиационного давления в интенсивных звуковых полях осложняется тем, что волна обычно сопровождается постоянным потоком (см. гл. 6), динамическое давление которого может сказаться на результатах измерения.

Наибольшее количество работ по измерению поглощения волн конечной амплитуды проведено в жидкостях на частотах ультразвукового диапазона [24, 36, 42, 45, 48—54]. На рис. 30 показаны результаты измерения поглощения волн конечной амплитуды в воде в области стабилизации по данным различных авторов. Сплошная кривая проведена для $p_x/b\omega > 1$ по (3.38) при $\Gamma = \gamma = n = 7,1$. Наблюдающийся разброс экспериментальных результатов связан, с одной стороны, с теми трудностями измерения коэффициента поглощения, о которых шла речь выше, и, с другой стороны, с тем, что не все данные, по-видимому, относятся к области стабилизации волны *); этим можно объяснить отклонение экспериментальных результатов в меньшую сторону. При наибольших интенсивностях ультразвука измерение поглощения в воде было проведено в [45]. Числа Рейнольдса в этих измерениях были $\sim 10^2 - 10^3$. В этой области α остается пропорциональным

*) Часть экспериментальных данных, приведенных на рис. 30, получена еще в то время, когда особенности поглощения волн конечной амплитуды были изучены недостаточно.

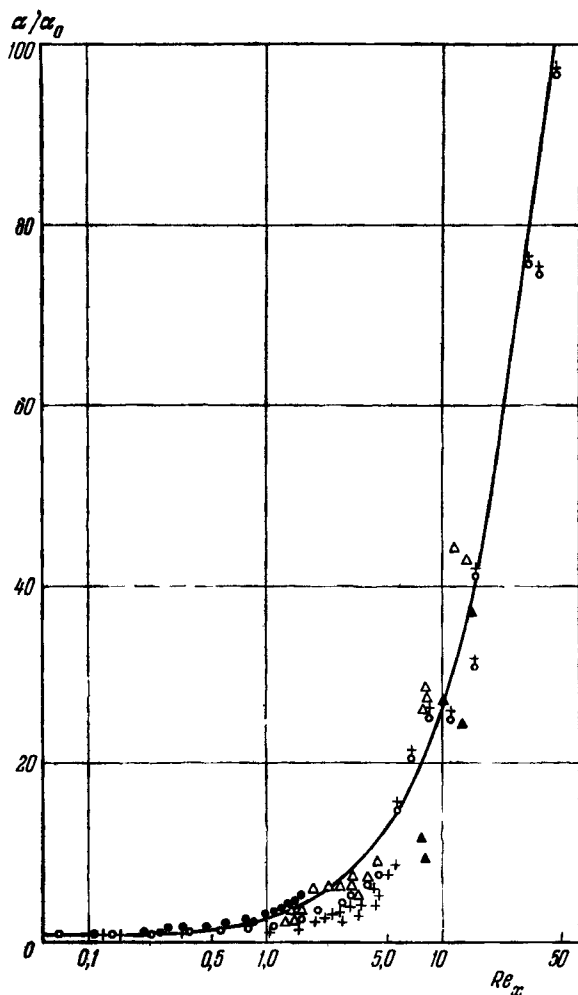


Рис. 30. Относительный коэффициент поглощения волны конечной амплитуды в воде в зависимости от $Re_x = p_x/b\omega$. Величина p_x — амплитуда звукового давления в точке измерения

- [42], 10 Мгц, $T = 20 \pm 2^\circ \text{C}$;
- [36], 8,73 Мгц, $T = 26^\circ \text{C}$;
- + [51], 3,85—8,74 Мгц, $T = 20\text{—}23^\circ \text{C}$;
- ▲ [49], 1,5 Мгц, $T = 19\text{—}20^\circ \text{C}$;
- △ [54], 1,5—4,5 Мгц, $T = 17\text{—}22^\circ \text{C}$;
- ⊖ [24], 1,0 Мгц.

звуковому давлению и частоте (легко видеть, что при квадратичной зависимости α_0 от частоты из (3.38) следует, что $\alpha \sim \omega$). Экспериментальные результаты вполне удовлетворительно подтверждают формулу (3.38) для поглощения пилообразных волн.

На рис. 31 показано распределение средней интенсивности ультразвука вдоль звукового пучка (при разных начальных интенсивностях у источника звука). Эти кривые показывают характерную для расстояний, больших расстояния образования разрыва, слабую зависимость передаваемой через среду интенсивности от излучаемой. Как видно из рисунка, увеличение начальной интенсивности более чем в два раза приводит к незначительному увеличению интенсивности на расстояниях, больших 10 см (расстояние образования разрыва для интенсивности 100 вт/см^2 на $1,5 \text{ Мгц}$ — около 6 см). Это также согласуется с выводами теории (см. § 4 гл. 3). Неэкспоненциальный характер спадания интенсивности, хорошо видный на нижней из кривых рис. 31, приводит к тому, что коэффициент поглощения непостоянен, о чем уже говорилось выше.

На рис. 32 приведены значения α/α_0 в воде на различных безразмерных расстояниях (в долях расстояния образования разрыва) [45]*). Эти измерения относятся к случаю, когда в среде формируются пилообразные волны. Максимальные значения α приходятся для разных

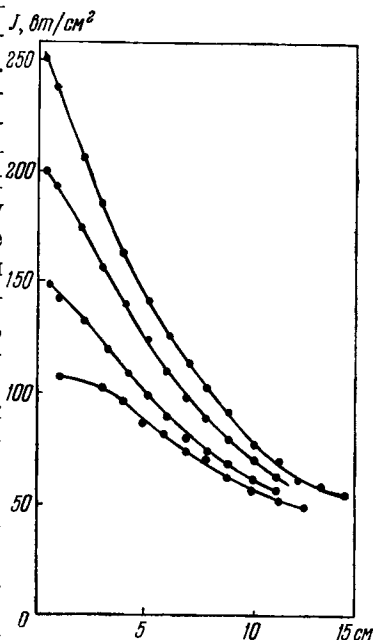


Рис. 31. Зависимость интенсивности ультразвука ($1,5 \text{ Мгц}$) от расстояния до источника в воде [45].

*) Данные работы [45] пересчитаны и приводятся в безразмерных параметрах.

частот и интенсивностей на различные расстояния $x = (1,2 \div 1,8)x_p$ от источника звука, т. е. на ту область, где формируется пилообразная волна. В этой области от-

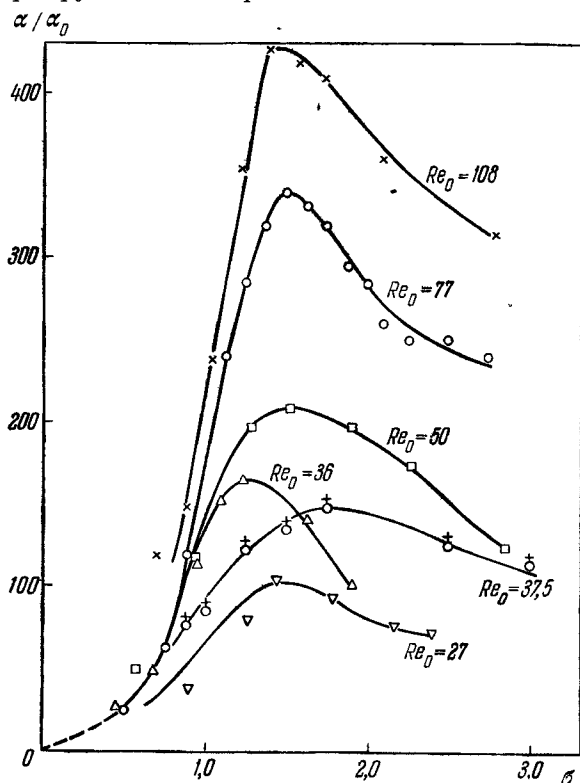


Рис. 32. Зависимость относительного коэффициента поглощения волны конечной амплитуды от безразмерного расстояния при разных Re_0 (неэкспоненциальный характер поглощения волн конечной амплитуды).

ношение второй гармоники (так же как и гармоник более высоких номеров) к первой достигает максимального значения (см. рис. 26). Следует отметить качественное сходство кривых рис. 32 с рассчитанными для меньших Re_0 на основе квазилинейного метода и приведенными

на рис. 8. Это сходство, впрочем, ограничивается расстояниями $\sigma \lesssim 1,5$. Согласно следующему из теории для $Re \gg 1$ соотношению (3.37) после образования пилообразной волны коэффициент поглощения последней должен уменьшаться по мере роста σ . Максимальные экспериментальные значения $\alpha/\alpha_0 \simeq \epsilon Re_0$, что следует из (3.37) только при $\sigma = 1$.

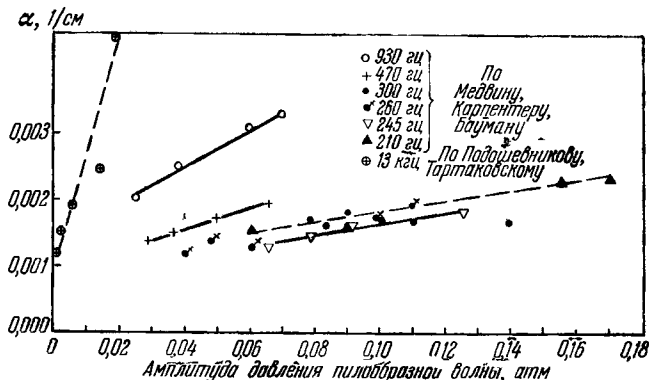


Рис. 33. Зависимость коэффициента поглощения пилообразных волн разных частот в воздухе от звукового давления.

Значительно меньше экспериментальных результатов по поглощению волн конечной амплитуды в газах. На рис. 33 приведены результаты измерения поглощения пилообразных волн в воздухе на разных частотах [55, 56] (данные [55] пересчитаны); коэффициент поглощения, как это и следует из теории, пропорционален давлению. Однако результаты [55] не совсем согласуются с (3.38). Экспериментальные результаты лучше следуют соотношению

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma\pi} Re,$$

полученному также теоретически [57]. Как нам кажется, в настоящее время вопрос о поглощении пилообразных волн в газах изучен экспериментально еще недостаточно для того, чтобы делать вывод о непригодности соотношения (3.38) для газов. Измерение поглощения плоских

волн на звуковых частотах производится в трубах, и стенки труб могут оказывать влияние как на спектральный состав волны [26], так и на ее затухание. На рис. 33 также приведены данные по затуханию в трубе радиуса 12,4 см звука частоты 13 кгц [56]. Следует отметить, что измерения поглощения в [55] проведены при числах Рейнольдса $p/b\omega \sim 10^4 \div 10^5$, так что здесь можно было ожидать увеличения коэффициента поглощения на четыре-пять порядков по сравнению с коэффициентом поглощения волны малой амплитуды, что действительно и наблюдается. В [56] числа Рейнольдса $p/b\omega \lesssim 10^3$ и увеличение коэффициента поглощения на три порядка согласуется с теоретической формулой (3.38). Ввиду трудностей измерения поглощения пилообразных волн в воздухе (влияние стенок трубы, трудности измерения абсолютных значений давления и др.) вряд ли следует ожидать согласия с теорией лучшего, чем по порядку величины.

Экспериментальные результаты, приведенные в этом разделе, качественно, а в некоторых случаях и вполне удовлетворительно количественно следуют теории, приведенной в гл. 3. Там, где количественного согласия с теорией нет (а таких результатов довольно много), можно предполагать, что на результаты измерения либо оказывал влияние ряд побочных, не учитываемых теорией факторов, либо трудности абсолютного измерения звукового поля привели к значительным ошибкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Шкловская-Корди В. В., Об искажении формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в жидкости. Докл. АН СССР 109, 485 (1956).
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Шкловская-Корди В. В., О распространении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях. Акуст. ж. 3, 29 (1957).
3. Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Оптические исследования ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях. IV Всесоюзная акустическая конференция (реферат докладов). Изд. АН СССР, 1958.
4. Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Дифракция света на гармониках ультразвуковой волны, искаженной в процессе распространения в жидкости. Акуст. ж. 5, 77 (1959).

5. Zankel K. L., Hiedemann E. A., Simple demonstration of the presence of second harmonic in progressive ultrasonic waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.* **30**, 582 (1958).
6. Mayer W. C., Interferometric analysis of even harmonic distortion of ultrasonic waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **32**, 509 (1960).
7. Мясников Л. Л., К вопросу об «опрокидывании» звуковой волны большой амплитуды. *ЖТФ* **8**, 1896 (1938).
8. Романенко Е. В., Искажение формы волны конечной амплитуды при распространении в релаксирующей среде. *Акуст. ж.* **6**, 374 (1960).
9. Буров В. А., Красильников В. А., Непосредственное наблюдение искажения форм интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. *Докл. АН СССР* **118**, 920 (1958).
10. Schlemm H., Schlierenoptische untersuchungen an starken luftschallwellen in rohren. *Acustica* **10**, 237 (1960).
11. Hiedemann E. A., Zankel K. L., The study of ultrasonic waveform by optical methods. *Acustica* **11**, 213 (1961).
12. Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Дифракция света на ультразвуковых волнах большой амплитуды. *Акуст. ж.* **3**, 203 (1957).
13. Михайлов И. Г., Шутилов В. А., Дифракция света на ультразвуковых волнах большой амплитуды. *Акуст. ж.* **4**, 174 (1958).
14. Шутилов В. А., Оптические исследования формы ультразвуковой волны большой амплитуды в жидкости. *Акуст. ж.* **5**, 231 (1959).
15. Cummins H., Knable N., Gampel L., Frequency shifts in light diffracted by ultrasonic waves in liquid media. *Appl. Phys. Letters* **2**, № 3, 62 (1963).
16. Zankel K. L., Hiedemann E. A., Diffraction of light by ultrasonic waves progressing with finite but moderate amplitudes in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* **31**, 44 (1959).
17. Breazeal M. A., Hiedemann E. A., Investigation of progressive ultrasonic waves by light refraction. *J. Acoust. Soc.* **30**, 751 (1958).
18. Colbert H. M., Zankel K. L., Light diffraction by ultrasonic waves. Fresnel region. *J. Acoust. Soc. Am.* **35**, 359 (1963).
19. Гедройц А. А., Красильников В. А., Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука. *ЖЭТФ* **43**, 1592 (1962).
20. Bellin J. L. S., Beyer R. T., Experimental investigation of an end-fire array. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1051 (1962).
21. Михайлов Г. Д., О взаимодействии ультразвуковых волн в жидкостях. *Докл. АН СССР* **89**, 663 (1953).
22. Горелик А. Г., Зверев В. А., К вопросу о взаимодействии звуковых волн в жидкостях. *Акуст. ж.* **1**, 339 (1955).
23. Зверев В. А., Калачев А. И., Измерение взаимодействия звуковых волн в жидкостях. *Акуст. ж.* **4**, 321 (1958).
24. Наугольных К. А., Романенко Е. В., К вопросу о распространении волн конечной амплитуды в жидкости. *Акуст. ж.* **4**, 200 (1958).

25. Thuras A. L., Jenkins R. T., O'Neil A. T., Extraneous frequencies generated in air carrying intense sound waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 6, 173 (1935).
26. Blackstock D. T., 4-th Intern. Congress on Acoustics, Copenhagen, 1962. *Congr. Report, Vol. 1, № 15.*
27. Красильников В. А., Хаминев Д. В., Распространение ультразвуковых волн конечной амплитуды в релаксирующей жидкости. *Акуст. ж.* 5, 166 (1959).
28. Михайлов И. Г., Шутитов В. А., Об искажении формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в различных жидкостях. *Акуст. ж.* 6, 340 (1960).
29. Ryan R. P., Lutsch A. G., Beyer R. T., Measurement of the distortion of finite ultrasonic waves in liquids by a pulse method. *J. Acoust. Soc. Am.* 34, 31 (1962).
30. Loeber A. P., Hiedemann E. A., Investigation of stationary ultrasonic wave by light refraction. *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 27 (1956).
31. Шкловская - Корди В. В., Акустический метод определения внутреннего давления в жидкостях. *Акуст. ж.* 9, 107 (1963).
32. Lester W. W., On the theory of the propagation of plane, finite amplitude waves in a dissipative fluid. *J. Acoust. Soc. Am.* 33, 1196 (1961).
33. Cook B., New procedure for computing finite-amplitude distortion. *J. Acoust. Soc. Am.* 34, 941 (1962).
34. Романенко Е. В., Экспериментальное исследование распространения сферических волн конечной амплитуды. *Акуст. ж.* 5, 101 (1959).
35. Романенко Е. В., Пилообразные волны в электролитах. *Акуст. ж.* 6, 508 (1960).
36. Towle D. M., Lindsay R. B., Absorption and velocity of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* 27, 530 (1955).
37. Зарембо Л. К., Шкловская - Корди В. В., К вопросу о скорости распространения ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкости. *Акуст. ж.* 6, 47 (1960).
38. Корнфельд М., Упругость и прочность жидкостей. Гостехиздат, 1951.
39. Beyer R. T., Parametr of nonlinearity of fluids. *J. Acoust. Soc. Am.* 32, 719 (1960).
40. Adler L., Hiedemann E. A., Determination of nonlinearity parametr В/А water and *m*-xylene. *J. Acoust. Soc. Am.* 34, 410 (1962).
41. Гунь-Сю-Фэнь, Зарембо Л. К., Красильников В. А., Измерение акустического нелинейного параметра жидкого азота. *Акуст. ж.* 9, 382 (1963).
42. Fox F. E., Wallace W. A., Absorption of finite amplitude sound waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 26, 994 (1954).
43. Rudnick I., On the attenuation of finite amplitude waves in a liquid. *J. Acoust. Soc. Am.* 30, 564 (1958).
44. Буров А. К., Ультразвуковые колебания высокой интенсивности для воздействия на злокачественные опухоли животных и человека. *Докл. АН СССР* 106, 239 (1956).

45. Буров В. А., Красильников В. А., О поглощении ультразвуковых волн большой интенсивности в воде. Докл. АН СССР 124, 571 (1959).
46. Fry W. J., Fry R. B., Determination of absolute sound levels and acoustic absorption coefficient by thermocouple probes. *Theory. Experiment. J. Acoust. Soc. Am.* 26, 294, 311 (1954).
47. Зарембо Л. К., О термоэлектрических приемниках звука. *Измерит. техника*, № 5, 74 (1958).
48. Fox F. E., Dependence of ultrasonic absorption on intensity and the phenomenon of the cavitation. *Nuovo Cimento* 7, Ser. IX, Suppl. 2, 198 (1950).
49. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Шкловская-Корди В. В., О поглощении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях. Докл. АН СССР 109, 731 (1956).
50. Зарембо Л. К., К вопросу о температурной зависимости поглощения волн конечной амплитуды в вязких жидкостях. *Акуст. ж.* 3, 164 (1957).
51. Narasimhan V., Beyer R. T., Attenuation of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* 28, 1233 (1956).
52. Beyer R. T., Narasimhan V., Note on finite amplitude waves in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* 29, 532 (1957).
53. Михайлов И. Г., Федорова Н. М., Поглощение ультразвуковых волн большой амплитуды в структурированных растворах полимеров. *Акуст. ж.* 3, 239 (1957).
54. Зарембо Л. К., О поглощении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях. Диссертация, МГУ, 1958.
55. Medwin H., Carpenter H., Bauman R., Attenuation of repeated shock waves in air. *Proc. III Intern. Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959. Vol. 1, p. 312.*
56. Подошевников Б. Ф., Тартаковский Б. Д., О затухании плоских звуковых волн конечной амплитуды в газах. *Акуст. ж.* 4, 369 (1958).
57. Westervelt P. J., Self-scattering of high intensity sound. *Proc. III Intern. Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959. Vol. I, p. 316.*

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ

§ 1. Радиационные силы в свободном пространстве

В звуковом поле помимо переменного звукового давления возникают постоянные, не меняющиеся во времени (в стационарном звуковом поле) силы. Они могут иметь различную природу (см., например, [1, 2]). Здесь нас будут интересовать силы, возникающие в результате того, что переносимый волной средний по времени импульс в некотором объеме может измениться. В результате на этот объем будет действовать независимая от времени сила. Эта сила носит название радиационной и присуща любым волновым процессам. Такого рода силы воздействуют на излучающие, отражающие или поглощающие звук поверхности.

Отличие акустических радиационных сил от электромагнитных заключается не только в том, что уравнения гидродинамики нелинейны, но также и в том, что в акустическом случае среда и поверхность препятствия, вообще говоря, совершают колебания под действием волны, в то время как в электродинамике типичным является случай, когда среда или поверхность препятствия неподвижны. Поэтому при рассмотрении акустического радиационного давления существенным является вопрос о том, в каких координатах определяется давление. Как всегда, радиационные силы в эйлеровой системе координат — постоянные силы, действующие на поверхность или объем, фиксированный относительно неподвижного пространства. Радиационные силы в лагранжевой системе координат — постоянные силы, действующие на поверхность или объ-

ем, совершающий колебания. Точное значение радиационного давления, вообще говоря, различно в эйлеровой и лагранжевой системах. В лагранжевых координатах радиационное давление — среднее по времени значение звукового давления на поверхности, совершающей колебания в звуковом поле. Это радиационное давление часто называют рэлеевским радиационным давлением.

В эйлеровых координатах изменение импульса звуковой волны, вызывающее действие силы на некоторый объем, где меняется импульс, как было показано Бриллюэном [3], определяется как скалярное произведение тензора плотности потока импульса на единичный вектор нормали к поверхности. В этом смысле радиационное давление правильнее было бы назвать радиационным напряжением, поскольку величина действующей силы зависит от ориентации площадки относительно направления распространения волны. Термин «радиационное давление», однако, широко распространен в литературе, и мы будем пользоваться им. Радиационное давление по Бриллюэну для некоторых частных случаев (ограниченного звукового пучка плоской волны) называют иногда ланжевенским радиационным давлением. Мы в дальнейшем это радиационное давление будем называть давлением по Ланжевену — Бриллюэну.

Задача определения радиационных сил, действующих в звуковом поле на препятствия, может быть разделена на несколько более простых. Отдельно можно рассмотреть радиационные силы в свободном звуковом поле, например силы, действующие на источник звука в свободном поле, или силы, действующие на какой-то выделенный объем однородной среды. Более сложной задачей является определение радиационных сил, действующих на препятствия в звуковом поле. Поскольку препятствие изменяет звуковое поле, радиационные силы здесь создаются не только различием потоков импульса до препятствия и за ним, но также и потоком импульса рассеянной волны. Таким образом, в этом случае для определения радиационной силы надо решить задачу о дифракции звуковой волны на препятствии. На величину радиационной силы, кроме того, может оказывать влияние импеданс поверхности препятствия.

Радиационное давление в линейной акустике — квадратичная величина. При определении радиационного давления даже в линейной акустике необходимо учитывать величины второго порядка малости, не обращающиеся в нуль после усреднения по времени. Даже в сравнительно интенсивных звуковых полях радиационное давление намного меньше амплитуды переменного давления в волне. Это создает определенные трудности при экспериментальном исследовании радиационного давления. Методы измерения радиационного давления также рассмотрены в этой главе. Следует сказать, что в настоящее время в различных трактовках радиационного давления имеется ряд разногласий и неопределенностей,

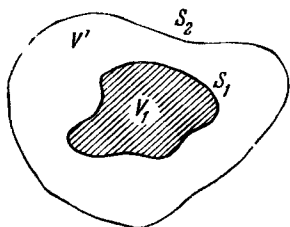


Рис. 34. К определению радиационных сил по Ланжевону — Бриллюэну.

которые можно было бы разрешить путем постановки точных экспериментов. К сожалению, таких экспериментальных работ еще мало и они не позволяют с достаточной определенностью ответить на возникающие вопросы. Имея в виду, что радиационное давление довольно широко используется для абсолютного измерения звуковых полей на сравнительно высоких частотах (в мегагерцевом диапазоне), нельзя считать все эти вопросы несущественными.

а) Радиационная сила по Ланжевону — Бриллюэну

Как было показано в гл. 1, сила, действующая на фиксированный относительно неподвижного пространства объем (эйлеровы координаты), вызванная изменением импульса волны в этом объеме, определяется (1.16):

$$F_i = - \oint_S T_{ij} n_j ds, \quad (1.16)$$

где T_{ij} — компоненты тензора плотности потока импульса,

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}, \quad (1.15)$$

n_j — j -я компонента единичного вектора нормали к поверхности S .

Для радиационных сил по Ланжевону — Бриллюэну справедливо следующее утверждение. Если импульс волны меняется в некотором замкнутом объеме V_1 (рис. 34), ограниченном поверхностью S_1 , то радиационная сила на поверхность S_2 , ограничивающую объем V_2 , внутри которого находится объем V_1 , равна радиационной силе, действующей на поверхность S_1 , если импульс не меняется в объеме $V' = V_2 - V_1$.

Для доказательства рассмотрим силу, действующую на объем V' :

$$F'_i = - \oint_{S_1} T_{ij} n_j ds + \oint_{S_2} T_{ij} n_j ds.$$

Из условия постоянства импульса в объеме V' следует, что $F'_i = 0$, отсюда

$$F_i^2 = F_i^1, \quad (5.1)$$

т. е. радиационная сила по Ланжевону — Бриллюэну не зависит при указанных ограничениях от выбора поверхности интегрирования. Это облегчает задачу определения радиационных сил в эйлеровых координатах на поверхности, совершающей колебания под действием звука.

Радиационная сила определяется как среднее по времени от (1.16), что дает:

$$\bar{F}_i = - \oint_S \bar{T}_{ij} n_j ds. \quad (5.2)$$

Во втором приближении, имея в виду (1.15), получим:

$$\bar{F}_i = - \oint_S [(\bar{p}' + \bar{p}'') \delta_{ij} + \rho_0 \overline{v_j' v_i'}] n_j ds; \quad (5.3)$$

здесь штрихом отмечены величины первого порядка малости, двумя штрихами — величины второго порядка. В том случае, когда поле скоростей потенциально, т. е.

$$v_j' = - \frac{\partial \psi'}{\partial x_j}; \quad v_j'' = - \frac{\partial \psi''}{\partial x_j}, \quad (5.4)$$

пользуясь уравнениями гидродинамики в тензорной форме (1.11), (1.12) и уравнением Пуассона (1.6), легко показать, что с точностью до величин второго порядка

малости

$$\left. \begin{aligned} p' &= \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial t}; \\ p'' &= \rho_0 \frac{\partial \psi''}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \psi')^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Формулы (5.4) и (5.5) позволяют записать тензор плотности потока импульса в виде

$$T_{ij} = \left\{ \rho_0 \left[\frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \psi''}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi')^2 + \frac{1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \delta_{ij} + \\ + \rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} \frac{\partial \psi'}{\partial x_j}. \quad (5.6)$$

Этим соотношением для тензора плотности потока импульса часто пользуются для определения радиационного давления.

В случае квазистационарного периодического звукового поля (см. гл. 1, § 3), как это следует из (1.57), радиационное давление на замкнутый в звуковом поле объем должно обращаться в нуль. Этот результат естествен, так как в таком звуковом поле средний по времени импульс в «трубке тока» сохраняется. Условие квазистационарности не выполняется, например, на границе звукового пучка, при отражении звука от препятствий конечного размера. Эти случаи требуют более тщательного анализа. Из (1.58) следует, что радиационное давление P на идеальный поглотитель направлено вдоль «трубки тока» и равно

$$\bar{P} = \overline{\rho v^2} = 2\bar{E}_k, \quad (5.7)$$

где \bar{E}_k — средняя по времени плотность кинетической энергии.

В качестве примера рассмотрим тензор плотности потока импульса во втором приближении в плоской волне, распространяющейся в направлении оси x . Средний по времени тензор плотности потока импульса имеет вид

$$\{\bar{T}_{ij}\}_2 = \begin{vmatrix} \bar{p}'' + \rho_0 \overline{v_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}'' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}'' \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Этот тензор может быть представлен в виде суммы двух тензоров:

$$\{\bar{T}_{ij}\}_2 = \{\bar{T}_{ij}^{(1)}\}_2 + \{\bar{\tau}_{ij}\}_2, \quad (5.8a)$$

где

$$\{\bar{\tau}_{ij}\}_2 = \begin{vmatrix} \bar{p}'' & 0 & \bar{0} \\ 0 & \bar{p}'' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}'' \end{vmatrix}.$$

Тензор $\{\bar{\tau}_{ij}\}_2$ определяет дополнительное гидростатическое давление, возникающее в звуковом поле.

Как уже отмечалось (§ 3 гл. 1 и § 3, 4 гл. 2), средние по времени от величин второго порядка малости в существенной мере зависят от граничных и начальных условий в звуковом поле. Например, при условии постоянства массы в звуковом поле простой волны (и $\bar{\rho}'' = 0$) из (2.47)

$$\bar{p}'' = \frac{\gamma - 1}{2} \bar{E}_2,$$

из (2.44) полная плотность звуковой энергии

$$\bar{E}_2 = \rho_0 \bar{v}^{\prime 2}$$

и тензор плотности потока импульса из (5.8)

$$\{\bar{T}_{ij}\}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\gamma + 1}{2} \bar{E}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma - 1}{2} \bar{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma - 1}{2} \bar{E}_2 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Этот тензор плотности потока импульса в свободном поле плоской волны был получен Бриллюэном [3] как следствие применения к волновому полю метода адиабатических инвариантов Больцмана — Эренфеста. Компоненты вектора радиационной силы определяются из (5.9) по (5.2). В области, занятой звуковым полем, уменьшается среднее гидростатическое давление на $(\gamma - 1)\bar{E}_2/2$. Из

(5.9), в частности, следует, что радиационное давление на полностью поглощающую звук поверхность, на которую звук падает нормально, имеет значение

$$\bar{P} = \frac{\gamma + 1}{2} \bar{E}_2. \quad (5.10)$$

Иное выражение для тензора плотности потока импульса можно получить, если считать, что в периодическом квазистационарном звуковом поле отсутствует поток массы. Напомним, что по крайней мере во втором приближении решение Ирншоу (см. гл. 2, § 4) задачи о конечных колебаниях поршня удовлетворяет именно этому условию. В этом случае из (2.51)

$$\bar{p}^{\prime\prime} = \frac{\gamma - 3}{4} \rho_0 \bar{v}^{\prime 2}$$

и из (5.8)

$$\{\bar{T}_{ij}\}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\gamma + 1}{2} \bar{E}_{2k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma - 3}{2} \bar{E}_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma - 3}{2} \bar{E}_{2k} \end{vmatrix}, \quad (5.11)$$

где $\bar{E}_{2k} = \frac{1}{2} (\rho_0 \bar{v}^{\prime 2})$ — средняя по времени плотность кинетической энергии в волне. Изменение гидростатического давления в звуковом поле здесь отличается от полученного в (5.9). Итак, здесь, так же как при определении плотности звуковой энергии и потока звуковой энергии, радиационное давление зависит от дополнительных условий, налагаемых на звуковое поле. Эти условия получаются из решения граничной и начальной задачи.

Одно интересное следствие из (5.8) можно получить [4, 5], если считать, что этот тензор плотности потока импульса применим для звукового пучка ограниченного размера. Выделяя объем, включающий границу раздела между звуковым полем и невозмущенной средой, можно показать, что на звуковой пучок со стороны невозмущенной среды действует давление $\bar{p}^{\prime\prime}$, стремящееся выравнять разницу между давлением в невозмущенной среде

и давлением в звуковом поле. Область, занятая звуковым полем, будет поджиматься до тех пор, пока статическое давление в ней не станет равным гидростатическому давлению в невозмущенной среде. В этом весьма общем случае радиационное давление, действующее в направлении распространения волны, из (5.7) будет иметь вид:

$$\bar{P} = \rho_0 \overline{v'^2} = 2\bar{E}_{\text{жк}}. \quad (5.12)$$

Часто в линейной акустике считается, что радиационное давление в ограниченном звуковом пучке равно средней по времени плотности звуковой энергии (а не удвоенному значению средней по времени плотности кинетической энергии). Это, как видно из (5.12), справедливо только тогда, когда плотность кинетической энергии равна плотности потенциальной, как, например, в (5.9). Вообще, например в (5.11), это неверно (см. гл. 2, § 4) даже для линейной акустики.

Отметим, что давление в ограниченном звуковом пучке (5.12) отличается, вообще говоря, от компоненты давления в неограниченном пучке; последнее

$$\text{по (5.9) } \bar{P} = \frac{\gamma+1}{2} \bar{E}_2, \quad \text{по (5.11) } \bar{P} = \frac{\gamma+1}{2} \bar{E}_{\text{жк}}.$$

Это отличие особенно велико, если иметь в виду, что для жидкостей нелинейный параметр $\Gamma \equiv \gamma$ имеет значения $4 \div 12$ (см. гл. 4, § 2). Вопрос об экспериментальном определении «поджатия» ограниченного звукового пучка, которое могло бы помочь здесь разобраться, неоднократно ставился; однако, насколько нам известно, до настоящего времени такие эксперименты не проводились. Высказывался ряд соображений о справедливости приведенного рассмотрения ограниченных звуковых пучков, подтверждающего «поджатие». В частности, при определении среднего давления газа на стенки сосуда получается результат, согласующийся с молекулярно-кинетической теорией, если считать, что в газе распространяются тепловые упругие волны, удовлетворяющие также условию «поджатия» [6].

б) Рэлеевское радиационное давление

По определению рэлеевское давление есть усредненное по времени давление в лагранжевых координатах. Для плоской волны, пользуясь уравнением непрерывности (1.33), а также считая, что среда следует уравнению Пуассона (1.6), легко получить среднее по времени давление в лагранжевых координатах с точностью до величин второго порядка малости в виде

$$\bar{p}_L = p_0 - p_0 \gamma \bar{\xi}_a + \frac{\gamma(\gamma+1)p_0}{2} \overline{\xi_a^2}, \quad (5.13)$$

где ξ — смещение.

Покажем, что для неограниченной плоской волны рэлеевское давление в свободном пространстве совпадает с компонентой T_{11} тензора плотности потока импульса с точностью до величин второго порядка малости. Для этого воспользуемся приближенным переходом от эйлеровых к лагранжевым координатам (1.45); тогда компоненту тензора плотности потока импульса получим в виде

$$\begin{aligned} T_{11} = p_E + \rho_0 v_E^2 &= \left(p_L - \xi \frac{\partial p_L}{\partial a} \right) + \rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \partial t} \right)^2 \simeq \\ &\simeq p_L + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + O_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь было использовано уравнение движения (1.34) и через O_3 обозначены члены третьего и более высокого порядка малости. Усредняя (5.14) по времени, получим:

$$\bar{T}_{11} = \bar{p}_E + \rho_0 \overline{v_E^2} = \bar{p}_L + \bar{O}_3, \quad (5.15)$$

т. е. с точностью до величин второго порядка малости давление, определяемое компонентой тензора T_{11} , совпадает с рэлеевским [4].

В заключение следовало бы сказать несколько слов о том, что следует понимать под термином «радиационное давление в свободном пространстве». Поскольку рассматривается невязкая среда, в которой имеется периодическое звуковое поле, то согласно (1.57) равна нулю радиационная сила по Ланжевену — Бриллюэну, действующая на любой объем, не включающий источников, поглотителей

или отражателей звука. Но в присутствии последних поле уже нельзя считать свободным. В этом заключается некоторая терминологическая неточность. Обычно под радиационным давлением в свободном пространстве понимается давление на площадку, полностью поглощающую звук.

§ 2. Радиационное давление на препятствия

При определении радиационного давления на препятствия по Ланжевону — Бриллюэну необходимо учитывать полное изменение импульса волны, связанное как с рассеянием волны на препятствии, так и, вообще говоря, с возможным нелинейным взаимодействием падающей и рассеянной волн. Для радиационного давления во втором приближении взаимодействием падающей и рассеянной волн можно пренебречь. Тогда для k -й компоненты радиационной силы по (5.2)

$$\bar{F}_k = - \oint_S (\bar{T}_{kj}^i + \bar{T}_{kj}^s) n_j ds, \quad (5.16)$$

где T_{kj}^i — компоненты тензора плотности потока импульса в падающей волне, а T_{kj}^s — компоненты в рассеянной волне.

Следует отметить, что для абсолютно твердого препятствия нормальные компоненты скорости v , $n_j = 0$ и радиационная сила из (5.16) в этом частном случае определяется средним по времени эйлеровским давлением. Таким образом, среднее по времени давление в эйлеровых координатах дает радиационное давление только в частном случае абсолютно твердых препятствий.

Пользуясь независимостью радиационной силы от выбора поверхности, окружающей рассеивающее препятствие [см. (5.1)], для плоской ограниченной звуковой волны радиационные силы при некоторых ограничениях можно выразить через поперечники рассеяния и поглощения препятствием, а также через асимптотические соотношения для рассеянной энергии [7]. Рассмотрим звуковой пучок плоской волны (рис. 35); площадь его поперечного сечения A , средняя по времени плотность потока энергии \bar{J}_i ,

Нас будет интересовать сила, действующая на препятствие O . Поток энергии в падающей волне $A\bar{J}_i$, в прошедшей $A\bar{J}_E$. Изменение потока связано, во-первых, с рассеянием.

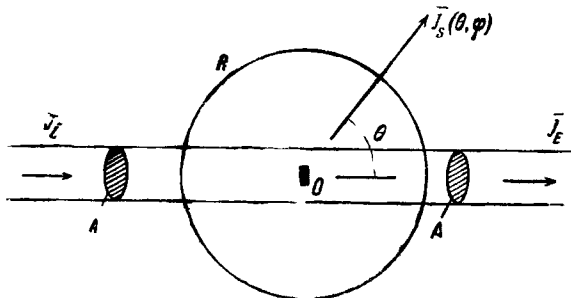


Рис. 35. К определению радиационной силы плоской волны на препятствие.

Поток рассеянной энергии через некоторую сферу радиуса R , окружающую препятствие, выразится, очевидно, в виде

$$\bar{Q}_s = \oint_S \bar{J}_s(\theta, \varphi) ds,$$

где $\bar{J}_s(\theta, \varphi)$ при достаточно большом R — асимптотическая плотность потока рассеянной энергии в направлении полярных углов θ и φ , S — поверхность сферы радиуса R . Изменение потока связано также с поглощением препятствием; эту часть потока обозначим через \bar{Q}_A . Закон сохранения потока энергии можно записать в виде

$$A\bar{J}_i = A\bar{J}_E + \bar{Q}_s + \bar{Q}_A, \quad (5.17)$$

или, введя поперечники рассеяния и поглощения

$$\sigma_s = \frac{\bar{Q}_s}{\bar{J}_i} \quad \text{и} \quad \sigma_A = \frac{\bar{Q}_A}{\bar{J}_i},$$

из (5.17) получим:

$$\bar{J}_E = \bar{J}_i \left(1 - \frac{\sigma_s + \sigma_A}{A} \right). \quad (5.18)$$

Для ограниченного звукового пучка, как это следует из (5.12), радиационное давление во втором приближении равно удвоенной плотности кинетической энергии. Связь плотности звуковой энергии с плотностью потока энергии в плоской волне из-за нелинейного искажения профиля волны, вообще говоря, не определяется условием $\bar{J} = c_0 \bar{E}$ (см. гл. 2, § 4). Однако при $\gamma = -1$, т. е. в гипотетической среде, где распространение волны происходит без изменения ее профиля, $\bar{J} = c_0 \bar{E}$. Кроме того, в этой среде средняя по времени плотность кинетической энергии равна средней по времени плотности потенциальной энергии, т. е. радиационное давление из (5.12) равно средней по времени плотности полной звуковой энергии. Сред с $\gamma = -1$ нет, однако реализация волнового процесса, в котором профиль волны не изменяется, возможна, когда учитывается вязкость среды (см. гл. 3, § 2) и акустические числа Рейнольдса малы. В этом «линейном» приближении обычно рассматриваются задачи о радиационных силах, действующих на препятствия. В этом приближении из (5.18) может быть определена сила в направлении распространения волны, возникающая из-за разницы импульсов в падающей и прошедшей волнах:

$$\bar{F}^{(1)} = A \left(\frac{\bar{J}_i}{c_0} - \frac{\bar{J}_E}{c_0} \right) = \bar{E}_i (\sigma_s + \sigma_A), \quad (5.19)$$

где $\bar{E}_i = \bar{J}_i / c_0$ — средняя по времени плотность энергии в падающей волне. Помимо этой силы на препятствие действует еще сила, связанная с рассеянием звука на препятствии [7]:

$$\bar{F}^{(2)} = -\bar{E}_i \oint_S \kappa \cos \theta ds, \quad (5.20)$$

где $\kappa(\theta, \varphi) = \bar{J}_s(\theta, \varphi) / \bar{J}_i$. Из (5.19) и (5.20) радиационная сила

$$\bar{F} = \bar{E}_i \left(\sigma_s + \sigma_A - \oint_S \kappa \cos \theta ds \right). \quad (5.21)$$

Таким образом, вопрос о радиационной силе в этом приближении сводится к определению поперечников поглощения и рассеяния звука препятствием, а также асимптотической плотности потока рассеянной энергии.

a) Радиационное давление на малые частицы

Радиационные силы на несжимаемую сферу, размеры которой много меньше длины звуковой волны, были рассмотрены в [8] и затем рассматривались для сжимаемой сферы в ряде работ [9, 10].

Из решения этой задачи следует, что на сжимаемую сферу в поле плоской бегущей волны в направлении волнового вектора действует сила

$$\bar{F} = 4\pi a^2 \bar{E} (ka)^4 \Phi(\delta, \mu). \quad (5.22)$$

Здесь a — радиус сферы; E — удвоенное значение средней по времени плотности кинетической энергии; $\Phi(\delta, \mu)$ — функция от $\rho_0/\rho_* = \delta$ и $c_*/c_0 = \mu$, где ρ_0 и c_0 — плотность и скорость звука в среде, ρ_* и c_* — плотность и скорость звука в материале сферы.

Согласно [10]

$$\Phi(\delta, \mu) = \frac{\delta^2}{(\delta + 2)^2} \left[\left(\frac{1}{\delta} - \frac{2 + \delta}{3\mu^2} \right)^2 + \frac{2}{9} \left(\frac{\delta - 1}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (5.23)$$

В стоячей плоской волне радиационная сила в направлении колебаний

$$\bar{F} = 4\pi a^2 \bar{E} ka \sin 2kh \Psi(\delta, \mu), \quad (5.24)$$

где h — расстояние центра сферы от узла скорости, и согласно [10, 11]

$$\Psi(\delta, \mu) = \frac{1 + \frac{2}{3}(1 - \delta)}{2 + \delta} - \frac{\delta}{3\mu^2}. \quad (5.25)$$

В бегущей волне эффективный поперечник давления *) из (5.22) пропорционален $(ka)^4$, в то время как для стоячей волны этот поперечник пропорционален ka , т. е. в стоячей волне (при прочих равных условиях) радиационная сила,

*) При рассмотрении сил, действующих на рассеивающие звук препятствия, удобно пользоваться не поперечником $\sigma = \bar{F}/\bar{E}$, а эффективным поперечником $\varphi = \sigma/S_0$, где S_0 — геометрическая площадь препятствия со стороны падающего звука.

действующая на малые частицы, значительно больше, чем в бегущей.

Удвоенная пространственная периодичность радиационной силы в стоячей волне (5.24) приводит к тому, что равновесным положением может быть либо узел, либо пучность, и маленькие частицы под действием этой силы собираются либо в узлах, либо в пучностях стоячей волны.

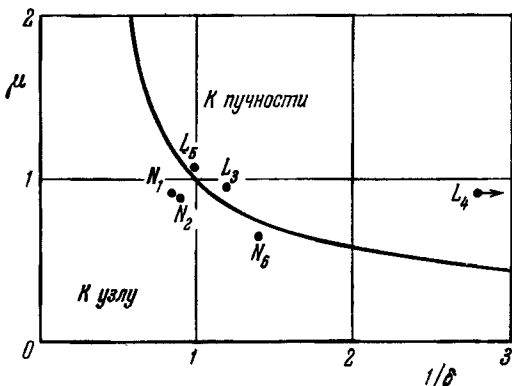


Рис. 36. Зависимость направления движения малых частиц под действием радиационной силы в стоячей волне от относительных параметров частиц. Точками отмечены экспериментальные результаты. 1 — толуол в воде; 2 — бензол в воде; 3 — нитробензол в воде; 4 — ртуть в воде; 5 — ортотолуол в воде; 6 — четыреххлористый углерод в 2,5%-ном водном растворе Na_2CO_3 [10].

Если $\Psi(\delta, \mu) = 0$, то $\bar{F} = 0$ и частицы не перемещаются в поле стоячей волны. Как показывает анализ, при $\Psi(\delta, \mu) > 0$ (плотность частиц больше плотности среды) частицы собираются в пучностях скорости, при $\Psi(\delta, \mu) < 0$ (плотность частиц меньше плотности среды), наоборот, — в узлах скорости [10].

На рис. 36 показана кривая $\Psi(\delta, \mu) = 0$ и нанесены результаты экспериментального исследования суспензий. Частицы суспензий собирались в пучностях скорости (точки, отмеченные буквой L) или в узлах (N) [10].

Экспериментально распределение частиц исследовалось также в работе [12]. Показано, что тяжелые частицы,

находящиеся в жидкости до включения звука, концентрируются в пучностях скорости, что согласуется с приведенными выше выводами теории. Однако если частицы вводились в звуковое поле, то они собирались в узлах скорости. Возможно, что противоречие с результатами теории связано с плохой смачиваемостью частиц в этом эксперименте.

Отметим еще один интересный случай действия радиационных сил на сжимаемые маленькие сферы. Это случай, когда плотность сферы намного меньше плотности среды, $\delta \sim (ka)^{-2}$. Этот случай реализуется, например, для радиационных сил на газовые пузырьки в жидкостях. Расчет этих сил был проведен в [10], где получено для силы в направлении распространения бегущей волны:

$$\bar{F} = 4\pi a^2 \bar{E} (ka)^4 \frac{1}{(ka)^6 + \left[\frac{3\mu^2}{\delta} - (ka)^2 \right]^2}. \quad (5.26)$$

При условии

$$ka = \mu \sqrt{\frac{3}{\delta}} \quad (5.27)$$

радиационная сила (5.26) намного превышает силу на несжимаемую сферу или сферу, сжимаемость которой незначительно отличается от сжимаемости окружающей среды. Условие (5.27) соответствует условию резонанса газового пузырька [см. (7.13)]. Таким образом, в бегущей волне особенно велика радиационная сила на резонансные газовые пузырьки.

В стоячей волне радиационная сила на газовый пузырек дается соотношением

$$\bar{F} = \frac{4\pi a^2}{ka} \bar{E} \sin 2kx \frac{\mu^2 \left[\frac{3\mu^2}{\delta} - (ka)^2 \right]}{(ka)^6 + \left[\frac{3\mu^2}{\delta} - (ka)^2 \right]^2}, \quad (5.28)$$

т. е. на пузырьки резонансного размера, удовлетворяющие условию (5.27), не будет действовать сила радиации. Сила, действующая на пузырьки, размеры которых незначительно отличаются от резонансных, будет намного превышать радиационную силу на несжимаемую сферу. Легко видеть, что для пузырьков, размеры которых меньше резонансного,

эта сила направлена так, что пузырьки перемещаются в узлы стоячей волны. Наоборот, пузырьки, размеры которых больше резонансного, перемещаются к пучностям стоячей волны. Экспериментально это наблюдалось в [13].

До сих пор рассматривались радиационные силы в поле плоской волны. Для произвольного звукового поля радиационные силы при условии $ka \ll 1$ могут быть определены через потенциал $\bar{F} = -\nabla U$, где потенциал имеет вид [11]

$$U = 2\pi a^3 \rho_0 \left\{ \frac{\overline{p_i^2}}{3\rho_0^2 c_0^2} \left(1 - \frac{\delta}{\mu^2} \right) - \frac{\overline{v_i^2}}{2} \frac{2(1-\delta)}{2+\delta} \right\}; \quad (5.29)$$

здесь p_i и v_i — соответственно давление и скорость в падающей звуковой волне.

б) Радиационное давление на препятствия, размеры которых больше длины волны или сравнимы с ней

Простые аналитические выражения для радиационных сил можно получить только для предельного случая препятствий, малых по сравнению с длиной волны. В этом случае, естественно, силы не зависят от формы препятствия. В случае же препятствий, размеры которых сравнимы или несколько больше длины волны, решения задачи о диффракции звука имеют весьма сложный вид, поэтому и радиационная сила, теперь уже зависящая от формы препятствия, имеет значительно более сложный вид. Радиационное давление здесь рассмотрено для сравнительно небольшого числа различных форм препятствия.

Сфера. Радиационное давление на жесткую сферу радиуса a в плоской волне было рассмотрено в [14, 15]. На рис. 37 показана зависимость эффективного поперечника давления

$$\varphi(ka) = \frac{\sigma}{\pi a^2} = \frac{\bar{F}}{\pi a^2 E}.$$

Для сжимаемой сферы в плоской бегущей волне радиационная сила определена в [10]:

$$\bar{F} = 2\pi \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \{D_{1n} D_{2(n+1)} - D_{2n} D_{1(n+1)}\}^2}{\{D_{1n}^2 + D_{2n}^2\} \{D_{1(n+1)}^2 + D_{2(n+1)}^2\}}, \quad (5.30)$$

где

$$D_{1n} = ka \left\{ \frac{1}{\mu} J'_n \left(\frac{ka}{\mu} \right) \mathcal{J}_n(ka) - \frac{1}{\delta} J_n \left(\frac{ka}{\mu} \right) J'_n(ka) \right\},$$

$$D_{2n} = ka \left\{ \frac{1}{\mu} J'_n \left(\frac{ka}{\mu} \right) N_n(ka) - \frac{1}{\delta} J_n \left(\frac{ka}{\mu} \right) N'_n(ka) \right\}.$$

Здесь J_n — функция Бесселя n -го порядка, N_n — функции Неймана, $\mu = c^*/c_0$, $\delta = \rho_0/\rho_*$; звездочками отмечены скорость звука и плотность сферы.

Давление на сжимаемую сферу рассмотрено также в [17].

Плоское препятствие конечного размера (диск, полоска). Радиационное давление плоской волны на плоское

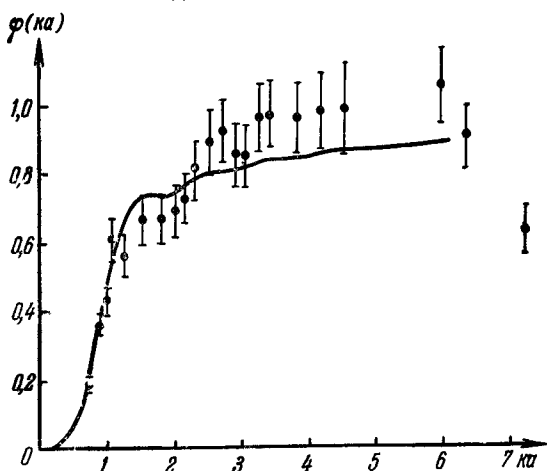


Рис. 37. Эффективный поперечник давления $\varphi(ka)$ на жесткую сферу для плоской бегущей волны. Кривая — теоретическая по [15]; точки — эксперимент [16].

препятствие конечного размера, нормаль к которому ориентирована в направлении колебаний, рассматривалось в ряде работ. В [18] была рассмотрена не только радиационная сила, но и постоянные моменты, действующие на полосу шириной d в поле плоской звуковой волны. При $kd \ll 1$ такой приемник более чувствителен к моментам, повора-

чивающим его в поле, и, следовательно, на низких частотах его удобнее использовать не как радиометр, а как аналог диска Рэлея. При высоких частотах $kd \gg 1$ полоска более чувствительна к радиационным силам. Эта работа теоретически подтвердила давно используемый в экспериментальной технике факт: при измерении на низких частотах более чувствительным является диск Рэлея, где параметры звукового поля определяются по закручиванию подвеса диска; на высоких частотах (обычно — частотах мегагерцевого диапазона) более чувствительным является приемник радиационного давления — радиометр.

Радиационное давление на круглый диск рассчитывалось в работах [19, 20]. При малых ka , где a — радиус диска, радиационная сила в бегущей плоской волне, направленная по волновому вектору, имеет значение

$$\bar{F} = \frac{16}{27} a^2 \bar{E} (ka)^4 \left(\frac{1}{1 + 1/\Theta} \right)^2, \quad (5.31)$$

где \bar{E} — средняя по времени удвоенная плотность кинетической энергии, Θ — отношение массы диска m к присоединенной массе жидкости:

$$\Theta = \frac{3m}{8\rho_0 a^3}.$$

В другом предельном случае $ka \gg 1$ для отражающего диска бесконечно большой массы [19]

$$\bar{F} = 2\pi a^2 \bar{E}$$

и эффективный поперечник давления $\varphi = 2$. Для промежуточных значений ka эффективный поперечник

$$\varphi = \frac{\bar{F}}{\pi a^2 \bar{E}}$$

зависит как от ka , так и от Θ . На рис. 38 показана эта зависимость для плоской бегущей волны по [20].

В стоячей звуковой волне, как это видно хотя бы из (5.24), радиационная сила, а с нею и эффективный поперечник давления зависят от положения радиометра

относительно узлов и пучностей стоячей волны. Радиационная сила имеет максимумы и минимумы; в этих точках

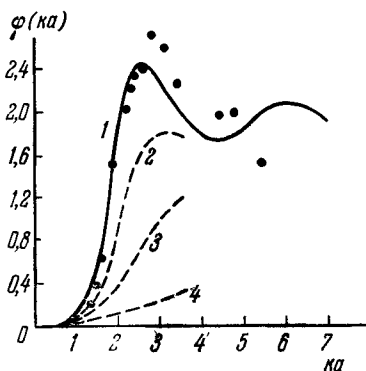


Рис. 38. Эффективный поперечник давления $\varphi(ka)$ на круглый диск в бегущей волне: 1) $\Theta = \infty$; 2) $\Theta = 3,0$; 3) $\Theta = 1,0$; 4) $\Theta = 0,3$ [20]. Точками отмечены экспериментальные результаты для жесткого диска [16].

давления «в геометрическом приближении» рассмотрены ниже.

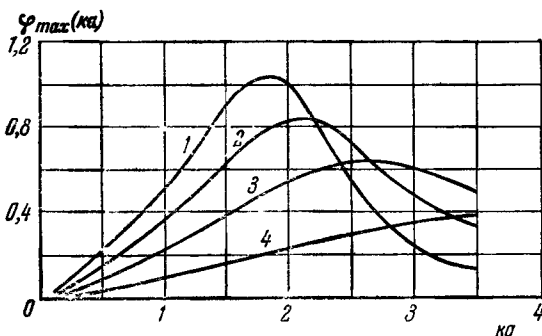


Рис. 39. Максимальный эффективный поперечник давления на круглый диск в плоской стоячей волне. 1) $\Theta = \infty$; 2) $\Theta = 3,0$; 3) $\Theta = 1,0$; 4) $\Theta = 0,3$ [20].

Рассмотрим, во-первых, радиационное давление ограниченного звукового пучка с равномерным распределением

поперечник максимален. На рис. 39 показан максимальный эффективный поперечник давления на круглый диск радиуса a в стоячей волне [20].

Плоское препятствие бесконечного размера. В том случае, когда размеры препятствия больше поперечного размера звукового пучка, а последний достаточно велик по сравнению с длиной волны, дифракционные явления могут не учитываться. Некоторые примеры радиационного

плотности энергии по сечению пучка, падающего на полностью поглощающее плоское препятствие под углом θ к нормали. Пользуясь условием $F_i = S' T_{ij} n_j$, определим силу в направлении распространения волны:

$$\bar{F}_1 = S' \bar{E} \cos \theta; \quad (5.32)$$

здесь S' — проекция площади звукового пучка на препятствие, E — среднее по времени удвоенное значение плотности кинетической энергии. Разлагаем эту силу на нормальную и тангенциальную:

$$\bar{F}_n = S' \bar{E} \cos^2 \theta; \quad \bar{F}_\tau = S' \bar{E} \cos \theta \sin \theta. \quad (5.33)$$

Поскольку $S' = S / \cos \theta$, где S — площадь сечения пучка, получим:

$$\bar{F}_n = S \bar{E} \cos \theta; \quad \bar{F}_\tau = S \bar{E} \sin \theta. \quad (5.34)$$

Отметим здесь также, что на идеальный поглотитель в направлении распространения волны будет действовать сила, не зависящая от угла падения:

$$\bar{F}_1 = S \bar{E}. \quad (5.35)$$

В том случае, когда препятствие полностью отражает звук, очевидно, получим:

$$\bar{F}_n = 2S \bar{E} \cos \theta; \quad \bar{F}_\tau = 0. \quad (5.36)$$

На полностью отражающее препятствие в направлении распространения звука действует сила:

$$\bar{F}_1 = 2S \bar{E} \cos^2 \theta. \quad (5.37)$$

Если звуковой пучок падает на границу раздела двух сред, где частично отражается, частично преломляется (рис. 40), из закона сохранения потока энергии легко получить для нормальной компоненты силы:

$$\bar{F}_n = \bar{E}_1 S \cos \theta [(1 + K) - (1 - K) \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}], \quad (5.38)$$

где $n = c_1/c_2$ — показатель преломления, \bar{E}_1 — средняя по времени удвоенная плотность кинетической энергии в падающей волне и K — коэффициент отражения по энергии:

$$K = \left[\frac{\rho_2 \cos \theta - \rho_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\rho_2 \cos \theta + \rho_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right]^2. \quad (5.39)$$

Для тангенциальной компоненты силы:

$$\bar{F}_\tau = (1 - K) \bar{E}_1 S \sin \theta (1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}). \quad (5.40)$$

При согласовании волновых сопротивлений сред $\rho_2 c_2 \simeq \rho_1 c_1$ и нормальном падении вся звуковая энергия проходит границу раздела ($K = 0$), однако из (5.38) следует, что

$$\bar{F}_n = \bar{E}_1 S (1 - n), \quad (5.41)$$

т. е. на границе сред из-за различия плотностей энергии (при $c_1 \neq c_2$) возникает радиационная сила. Направление

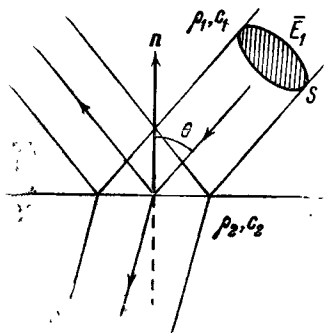


Рис. 40. К радиационному давлению на границе двух сред.

этой силы зависит от знака $c_2 - c_1$. При $c_2 - c_1 < 0$ радиационная сила направлена к источнику звука и в этом же направлении деформируется граница раздела сред. Это экспериментально наблюдалось в [21], где были подобраны две несмешивающиеся жидкости с близкими ρ , но разными скоростями; для пар жидкостей с $c_2 - c_1 < 0$ наблюдался прогиб поверхности в сторону, противоположную направлению распространения волны.

Рассмотрим далее радиационные силы, действующие на плоскопараллельную частично поглощающую пластинку (рис. 41). K^* — коэффициент отражения от пластины по энергии*), а t — коэффициент прозрачности пластины по энергии. Введем коэффициент поглощения пластины в виде $a = Q/c\bar{E}_1$, где Q — энергия, поглощаемая единицей площади пластины в единицу времени, c — скорость звука в окружающей среде. Тогда из закона сохранения потока энергии имеем:

$$K^* + t + a = 1. \quad (5.42)$$

*) Коэффициент отражения от пластин, толщина которых сравнима с длиной волны, отличается от K , выражаемого (5.39) для границы раздела двух полупространств.

Легко видеть, что нормальная компонента радиационной силы

$$\bar{F}_n = (1 + K^* - t) \bar{E}_1 S \cos \theta = (a + 2K^*) \bar{E}_1 S \cos \theta, \quad (5.43)$$

тангенциальная компонента

$$\bar{F}_\tau = a \bar{E}_1 S \sin \theta. \quad (5.44)$$

Интересно отметить, что тангенциальная компонента отлична от нуля только для поглощающей пластинки. Это обстоятельство можно использовать [22] для определения коэффициента отражения и поглощения (в сильно поглощающих материалах) тонких пленок по измерению нормальной и тангенциальной компонент радиационной силы.

в) Рэлеевское давление в стоячей волне

Рассмотрим радиационное давление между двумя неподвижными стенками, расположенными на расстоянии целого числа полувольт, если распределение смещения задано в виде

$$\xi = \xi_0 \sin ka \sin \omega t. \quad (5.45)$$

Из (5.13) или (1.43) среднее по времени давление

$$\bar{p}_L - p_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\rho_0 v_0^2}{4} (1 + \cos 2ka), \quad (5.46)$$

где $v_0 = \omega \xi_0$ — амплитуда скорости. В этом случае можно считать, что общее количество жидкости в звуковом поле не меняется. Тогда из (1.54) средняя по пространству и времени плотность звуковой энергии

$$\bar{E} = \frac{\rho_0 v_0^2}{4},$$

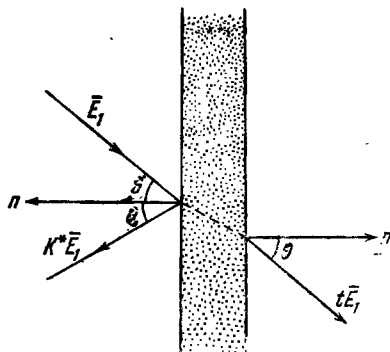


Рис. 41. К радиационному давлению на плоскопараллельную поглощающую пластинку.

и окончательно

$$\bar{p}_L - p_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \bar{E} (1 + \cos 2ka). \quad (5.47)$$

Радиационное давление имеет постоянную и меняющуюся в пространстве составляющие; давление на стенки равно $(\gamma + 1) \bar{E}$ [23].

Такоо определение радиационного давления несколько противоречиво. Как уже отмечалось (гл. 2, § 6), в недиссипативной среде распределение смещения в виде (5.45) неустойчиво: с течением времени в волне будут нарастать компоненты более высоких частот, которые (так же как при определении энергетических характеристик) должны приниматься во внимание при определении радиационного давления. Такой расчет радиационного давления в среде без диссипации был бы справедлив для среды, подчиняющейся уравнению Пуассона с $\gamma = -1$, где волна не меняет формы профиля, однако в этом случае и давление из (5.47) обращается в нуль. Можно все же думать, что рэлеевское давление имеет место в том случае, когда диссипативные процессы в существенной мере препятствуют искажению формы профиля волны.

В [24] был рассмотрен случай рэлеевского давления в стоячей волне, когда одна из стенок совершает колебания. Если расстояние между стенками L , то радиационное давление на жесткую стенку

$$\bar{p}_L - p_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \bar{E} \left(1 + \frac{\sin 2kL}{2kL} \right). \quad (5.48)$$

§ 3. Экспериментальные методы определения радиационного давления

Радиационное давление — квадратичная величина. Отношение радиационного давления к амплитуде звукового давления в волне — порядка числа Маха. Поэтому экспериментальное определение радиационного давления связано с измерением относительно малых давлений. Метод абсолютного измерения звукового поля радиометром, как правило, применяется в жидкостях на частотах мегагерцевого диапазона. В настоящее время разработан целый ряд конструкций радиометров (краткий обзор можно найти в [25]), которые различаются как по возможности работать в вертикальном или горизонтальном звуковом пучке, так и,

в основном, по методам индикации давления. Радиометр, применяемый в вертикальном звуковом пучке, обычно представляет собой очень чувствительные весы [26, 27], одна из чашек которых заменена приемным элементом радиометра. Радиометр, применяемый в горизонтальном звуковом пучке, имеет вид легкого маятника, возвращающей силой которого может быть либо сила тяжести [22], либо упругость закрученной нити [28, 25].

Методы индикации отклонения радиометра не отличаются от методов определения малых смещений или малых поворотов: здесь применяются оптические методы, при которых луч отражается от маленького легкого зеркальца, закрепленного на радиометре, наблюдение отклонения в микроскоп и др. В [16] для определения отклонения радиометра применен легкий блок конденсаторов; ротор блока соединялся с подвижным коромыслом радиометра; по изменению емкости конденсаторов можно было судить об отклонении радиометра. Оригинальная разновидность «радиометра» предложена в [29]. Радиационное давление определялось по деформации свободной поверхности жидкости. Этим методом широко пользуются для качественного определения интенсивности сравнительно мощного ультразвука в жидкостях.

В технике измерения радиационного давления часто используют нулевой метод*), т. е. тем или иным способом определяют силу, необходимую для возвращения приемного элемента радиометра в то положение, которое он занимал до включения звука. Наиболее просто это делается в весах, которые после включения звука снова уравниваются снятием груза со свободной чашки. В работе [30] в качестве уравнивающих сил применялись силы взаимодействия тока с магнитным полем. Для этого на подвижном коромысле радиометра была укреплена легкая катушка провода, находящаяся в поле постоянного магнита. По величине постоянного тока, пропускаемого через катушку в соответствующем направлении и необходимого для возвращения радиометра в нулевое положение, определялась радиационная сила. Этот прибор позволял

*) Необходимость использования нулевого метода особенно очевидна в случае больших плоских отражающих приемных элементов радиометра (см. далее).

измерять (с приемником в виде латунного шара диаметром 1,1 см) силы от 10^{-3} до 10^3 дн. В [25] в качестве уравновешивающей силы использовалось закручивание предварительно калиброванной проволоки, на которой было подвешено приемное коромысло радиометра; по углу закручивания определялась радиационная сила.

Измерение радиационного давления затрудняется рядом явлений. В звуковом поле на показания радиометра могут влиять конвективные потоки от источника звука (особенно в вертикальном звуковом поле), силы поверхностного натяжения жидкости, пузырьки, осаждающиеся на приемном элементе радиометра, и ряд других причин. Но особенно сильное влияние на показания радиометра оказывает акустическое течение (см. гл. 6) *). Для уменьшения этого влияния использовалось несколько методов, эффективность которых, по-видимому, все-таки недостаточна.

Во-первых, перед радиометрами помещают преграды (обычно на ультразвуковых частотах — это тонкие полимерные пленки), которые бы пропускали звук полностью (или почти полностью), а поток задерживали. Этот метод не устраняет полностью влияния потока, поскольку течение возникает (правда, при некоторых условиях значительно более слабое) сразу же за преградой. Другой метод разделения давления потока и радиационного давления — это работа «в баллистическом режиме» [33]. Здесь используется то не совсем изученное свойство акустического течения, что время установления течения, по-видимому, существенно больше, чем время установления звукового поля, и, следовательно, радиационное давление начинает действовать практически сразу же после включения поля,

*) Есть, правда, работы, как теоретические [31], так и экспериментальные [22, 32], согласно которым уменьшение радиационного давления из-за поглощения в среде полностью компенсируется гидродинамическим давлением возникающего акустического течения и, следовательно, для определения плотности звуковой энергии у излучателя достаточно одновременно измерить радиационное давление и гидродинамическое давление акустического течения на некотором расстоянии от источника звука. В этом случае акустическое течение, по-видимому, не мешает измерениям. Этот метод, однако, еще нельзя считать достаточно обоснованным как теоретически, так и экспериментально.

в то время как действие потока запаздывает. Однако вопрос о развитии акустического течения недостаточно изучен (см. гл. 6, § 8). Кроме того, радиометры, особенно чувствительные, чрезвычайно инерционны, и для абсолютных измерений звукового поля этот метод вряд ли может быть рекомендован. Более эффективным методом устранения течения является выбор такой конфигурации звукового поля, когда возникновение течения затруднено (подробнее об этом см. гл. 6, § 6).

Во многих случаях для определения моментов, закручивающих диск Рэлея, и радиационного давления применялась низкочастотная модуляция амплитуды излучаемого звука [34—37]. Приемником радиационного давления в этом случае может быть чрезвычайно чувствительный микрофон. В [36] для этой цели использовался конденсаторный микрофон с тонкой ($\sim 0,002$ см) посеребренной целлофановой мембраной. Для диска Рэлея, где частота модуляции достаточно низка, можно использовать резонанс крутильных колебаний подвеса. Эти методы, однако, недостаточно теоретически обоснованы. В частности, остается неясным вопрос о том, какую роль при такого рода экспериментах играют нелинейные взаимодействия в среде и как результат такого взаимодействия — акустическое детектирование.

Интересные эксперименты в жидкости по определению векторного характера радиационного давления описаны в работе [22]. Для измерений использован радиометр в виде коромысла, вращающегося на двух иголках с подпятниками. На нижнем конце коромысла крепились приемные элементы радиометра (диски, размеры которых больше поперечного размера ультразвукового пучка): отражающий в виде двух тонких листов меди (между ними — слой воздуха) и поглощающий, покрытый несколькими слоями пористой резины. Имелась возможность поворачивать приемный элемент радиометра относительно направления распространения волны, не меняя или меняя одновременно положение игольчатого подвеса. Если положение этого подвеса не менялось, то, как нетрудно видеть, измерялась радиационная сила в направлении распространения звука. Если же подвес поворачивался заодно с приемной головкой радиометра, то отклонение радиометра было пропорциональным нормальной к поверхности диска компоненте

радиационного давления. На рис. 42 показаны результаты измерения нормальной и тангенциальной компонент радиационной силы, действующей на отражающий и поглощающий диски. Кривая 1 проведена по (5.36), кривые 2 и 3 — по (5.34). В работе [22] также были экспериментально пол-

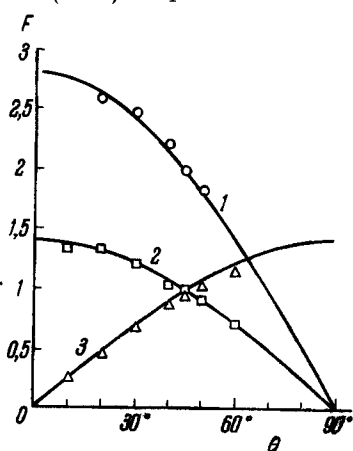


Рис. 42. Зависимость компонент радиационной силы (в условных единицах) от угла падения [22]. 1 — нормальная компонента силы на отражающий диск; 2 — нормальная компонента на поглощающий диск; 3 — тангенциальная компонента на поглощающий диск. Сплошные кривые — теоретические.

ны от угла падения на отражающий диск по (5.37) следует необходимость использования нулевого метода (особенно при измерении больших интенсивностей) при всех конструкциях радиометров, где этот угол под действием звука меняется.

В случае полностью поглощающего приемного элемента по (5.35) радиационная сила не зависит от угла отклонения и нулевой метод не обязателен (если, разумеется, радиационная сила не меняется от перемещения приемного элемента радиометра).

тверждены соотношения (5.35) и (5.37) для радиационной силы в направлении распространения волны (независимое измерение плотности звуковой энергии не проводилось, так что, говоря о подтверждении указанных соотношений, мы имеем в виду подтверждение угловых зависимостей).

Эти результаты интересны тем, что они показали анизотропный характер радиационных сил в звуковом поле и, следовательно, справедливость бриллюэновского рассмотрения радиационного давления.

Отметим также полезные результаты этой работы для экспериментального измерения радиационного давления: из зависимости радиационного давления в направлении распространения волн

ПИТЕРАТУРА

1. Westervelt P. J., The theory of steady forces caused by sound waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **23**, 312 (1951).
2. Каневский И. Н., Постоянные силы, возникающие в звуковом поле. *Обзор. Акуст. ж.* **7**, 3 (1961).
3. Brillouin L., Sur les tensions de radiation. *Ann. Phys.* **4**, 528 (1925).
4. Borgnis F. E., Theory of acoustic radiation pressure. *Rev. Mod. Phys.* **25**, 653 (1953).
5. Brillouin L., Les pression de radiation et leur aspect tensoriel. *J. Phys. Radium* **17**, 379 (1956).
6. Lucas L., Les tensions de radiation en acoustique. *J. Phys. Radium* **17**, 395 (1956).
7. Westervelt P. J., Acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 26 (1957).
8. King L. V., On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **147**, 212 (1934).
9. Hurt R. W., Sound scattering of a plane wave from a nonabsorbing sphere. *J. Acoust. Soc. Am.* **23**, 323 (1951).
10. Yosioka K., Kawasima Y., Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acustica* **5**, 167 (1955).
11. Горьков Л. П., О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости. *Докл. АН СССР* **140**, 88 (1961).
12. Keck G., Die einstellung von teilchen und lösungen in feld stehender ultraschallwellen. *Acustica* **5**, 131 (1955).
13. Yosioka K., Kawasima Y., Hirano H., Acoustic radiation pressure on bubbles and their logarithmic decrement. *Acustica* **5**, 174 (1955).
14. Maidanik G., Westervelt P. J., Acoustic radiation pressure due to incident plane progressive waves on spherical objects. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 936 (1957).
15. Olsen H., Romberg W., Wergeland H., Radiation force on bodies in a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.* **30**, 69 (1958).
16. Budal K., Hoy E., Olsen H., Measurements of acoustic radiation force. *J. Acoust. Soc. Am.* **31**, 1536 (1959).
17. Maidanik G., Acoustic radiation pressure due to incident plane progressive waves on spherical objects. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 738 (1957).
18. Yensen H. H., Saermark K., On the theory of the Rayleigh disk and the sound pressure radiometer. *Acustica* **8**, 79 (1958).
19. Levine H., Acoustic radiation pressure on a circular disk. *Proc. Sympos. Appl. Math.* **5**, 63 (1954).
20. Awatani J., Studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 282 (1955).
21. Hertz G., Mende H., Der schallstrahlungsdruck in flüssigkeiten. *Z. Phys.* **114**, 354 (1939).
22. Herrey E. M. J., Experimental studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 891 (1955).

23. Rayleigh, On the momentum and pressure of gaseous of vibrations and on the connection with virial theorem. *Phil. Mag.* 10, 364 (1905).
24. Гольдберг Э. А., Наугольных К. А., О рэлеевском радиационном давлении. *Акуст. ж.* 9, 28 (1963).
25. Gabrielly I., Iernetti G., Torsion balance for radiation pressure measurements. *Acustica* 13, 175 (1963).
26. Hsu E., Measurement of supersonic absorption in water by the balance method with the mechanical integration. *J. Acoust. Soc. Am.* 17, 127 (1945).
27. Beyer R. T., Smith M. S., Ultrasonic absorption in copper acetate and ethyl acetate. *J. Acoust. Soc. Am.* 18, 424 (1946).
28. Соколов И. Т., Применение математической теории Кинга к радиометрическим измерениям звуковых давлений в жидкости. *ЖТФ* 15, 223 (1945).
29. Корнфельд М. И., Молокова Н., Изгиб поверхности жидкости под действием ультразвукового излучения. *Докл. АН СССР* 105, 476 (1955).
30. Мотулевич Г. П., Фабелинский Л. П., Штейнгауз Л. Н., Абсолютный акустический микрорадиометр. *Докл. АН СССР* 70, 29 (1950).
31. Borgnis F. E., On the forces due to acoustic wave use in the measurement of acoustic intensity. *J. Acoust. Soc. Am.* 25, 546 (1953).
32. Cady W. G., Gitting C. E., On the measurement of power radiated from the acoustic source. *J. Acoust. Soc. Am.* 25, 892 (1953).
33. Liberman E. N., Second viscosity of liquids. *Phys. Rev.* 75, 1415 (1949).
34. Sivian L. J., A modification of the Rayleigh disk method for measuring sound intensities. *Phil. Mag.* 5, 615 (1928).
35. Barone A., Nuovo M., Misuratore di intensita ultrasonora. *Ricerca Sci.* 21, 516 (1951).
36. McNamara F. L., Beyer R. T., A variation of the radiation pressure method of measuring sound absorption in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.* 25, 259 (1953).
37. Зверев В. А., О возможности абсолютной калибровки излучателей и приемников звука по давлению радиации без использования радиометра. *Акуст. ж.* 2, 378 (1956).

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Общие замечания

Акустическими течениями (иногда также встречается термин «звуковой ветер» или «кварцевый ветер») обычно называют стационарные вихревые потоки жидкости или газа, возникающие в звуковом поле. Распространение интенсивных звуковых и особенно ультразвуковых волн в газах и жидкостях, как правило, сопровождается образованием таких вихревых потоков. Эти потоки возникают как в свободном неоднородном звуковом поле, так и особенно вблизи препятствий различного рода, помещенных в звуковом поле, или вблизи колеблющихся тел.

Вихревые потоки над колеблющейся мембраной, по-видимому, впервые наблюдал Фарадей [1] еще в 1831 г. Теория этого явления была дана Рэлеем в конце прошлого столетия. Им было показано, что постоянные силы, возникающие в звуковом поле из-за вязкости среды, зависящие квадратично от переменных поля, должны привести к образованию стационарных потоков, имеющих вихревой характер. После этого теория акустического течения неоднократно привлекала и продолжает привлекать к себе внимание многих исследователей до самого последнего времени. Эти теоретические работы подверглись многочисленным экспериментальным проверкам.

Такой интерес к акустическим потокам вызван не только тем, что потоки могут иметь большое значение в различного рода эффектах, связанных с воздействием интенсивных звуковых и особенно ультразвуковых волн (например, в очистке под действием ультразвука или в воздействии звуковых колебаний или вибраций на теплоотдачу нагретых тел), но также и тем, что в теории

акустического течения есть еще очень много невыясненных вопросов. Связано это с общей для всей нелинейной акустики вязкой среды особенностью: невозможностью отыскания точных решений, а приближения, которые делаются в некоторых теоретических работах, не всегда достаточно очевидны. В настоящее время нет более или менее общей теории акустического течения. Приведенные в этом разделе приближенные теории относятся к стационарному течению. Скорость стационарного течения в эйлеровых (или лагранжевых) координатах — усредненное по времени значение скорости (вообще говоря, точного значения скорости) в соответствующих координатах:

$$\bar{v} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v dt.$$

Для стационарного течения \bar{v} не должно зависеть от времени усреднения τ . Вопрос о скорости течения требует еще дополнительного анализа, так как в решении некоторых задач нелинейной акустики (см., например, гл. 2, § 4) появляется постоянная составляющая скорости, не связанная, однако, с переносом массы, ибо средний по времени поток массы равен нулю.

В настоящее время можно считать более или менее завершенной теорию акустических течений только второго приближения. Естественно, что эта теория применима только тогда, когда скорость стационарного потока много меньше амплитуды колебательной скорости в звуковой волне. Это условие приводит к ограничениям как амплитуды звука, так, в некоторых случаях, и геометрических областей звукового поля, где эта теория еще применима. Когда это условие не выполнено, необходимо либо отыскание более высоких приближений [2], либо выделение стационарного потока из уравнений, не используя метод последовательных приближений, что приводит, конечно, к своеобразным трудностям (см. [3]).

В теории акустического течения существенную роль играет величина $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$, определяющая толщину акустического пограничного слоя. Легко видеть, что

$$k\delta = \left(\frac{2M}{Re} \right)^{1/2},$$

где M и Re — акустические числа Маха и Рейнольдса. При $Re \gg M$ (что эквивалентно условию: длина звуковой волны много больше толщины пограничного слоя) можно разделить течение на течение в пограничном слое, зависящее от вязкости (задача о пограничном акустическом течении во втором приближении была рассмотрена Шлихтингом [4] и это течение можно было бы назвать шлихтинговским), и течение вне пограничного слоя, скорость которого не зависит от вязкости среды (это течение было рассмотрено впервые Рэлеем [5] и мы его будем называть рэлеевским). В практически трудно осуществимом случае $Re < M$ четко выраженного пограничного слоя нет, скорость течения зависит во всем пространстве от вязкости.

Отметим, что эти условия, связывающие толщину пограничного слоя с длиной звуковой волны, никак не ограничивают амплитуду звука. Указанное ранее ограничение амплитуды, согласно которому скорость течения должна быть меньше колебательной скорости, как будет видно в дальнейшем, приводит к условию $M \ll 1$. Это не ограничивает акустических чисел Рейнольдса для течения с четко выраженным пограничным слоем, но ограничивает Re только малыми числами в случае вязкого течения ($Re < M$ и, следовательно, $Re \ll 1$).

Выше речь шла о вихревых потоках, в образовании которых так или иначе играла роль вязкость среды. Следует указать еще на одну возможность возникновения потоков в идеальной невязкой среде. В гл. 2 при решении задачи о конечных колебаниях поршня в эйлеровых координатах [см. (2.63) — (2.64)] помимо колебательных составляющих появилась еще и постоянная составляющая скорости, которая, однако, не может рассматриваться как поток, ибо средний по времени поток массы для этого решения равен нулю. Этот результат довольно очевиден, так как колеблющийся поршень предполагался неограниченного размера и для выполнения уравнения непрерывности потока массы не должно было бы быть. Для ограниченных звуковых пучков точное решение в настоящее время не известно. Поскольку звуковое поле изменяет средние по времени параметры среды [6, 7], не исключена возможность того, что для ограниченного звукового пучка некоторую роль в образовании потока может играть «насосное действие источника

звука». Этот «нелинейный ветер» [8], однако, в настоящее время почти совершенно не исследован и здесь рассматриваться не будет.

Отнюдь не все колебательные движения конечной амплитуды в вязкой жидкости вызывают потоки. Например, вязкая волна, вызванная колеблющейся в своей плоскости стенкой и распространяющаяся нормально к поверхности стенки (в этом случае, как известно, возможно точное решение), не сопровождается переносом массы. Уравнения гидродинамики в этом случае решаются точно и не дают не зависящих от времени потоков.

§ 2. Акустическое течение в плоском пограничном слое, вызываемое стоячими звуковыми волнами

При числе Рейнольдса $Re > M$ (при малой толщине пограничного слоя по сравнению с длиной звуковой волны) течение различно в пограничном слое и вне его. Прежде чем рассматривать течение в пограничном слое, следует остановиться на глубине проникновения вязких волн, ибо эта величина, как будет видно из дальнейшего, определяет толщину акустического пограничного слоя.

Вязкими обычно называют волны в вязкой среде, возбуждаемые колебанием стенки в своей плоскости. Возможное в этом случае точное решение уравнений гидродинамики показывает, что амплитуда возбуждаемой вязкой волны экспоненциально убывает по направлению нормали к колеблющейся стенке. На расстоянии $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ амплитуда волны убывает в e раз. Длина вязкой волны $\lambda' = 2\pi\delta$. При распространении акустической волны в направлении, параллельном плоскости стенки, влияние стенки на волну (из-за того, что скорость на стенке в вязкой среде должна обращаться в нуль, а вдали должна быть равна скорости в свободном поле) сказывается на расстояниях $\sim \delta$.

Рассмотрим задачу о плоском нестационарном акустическом пограничном слое [4, 9]. Для этого воспользуемся уравнениями Прандтля. Вблизи плоскости $y = 0$ они, как

известно, имеют вид:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad (6.2)$$

где v_1 и v_2 — x - и y -компонента скорости, $U(x, t)$ — известная скорость потока вдали от границы. Так как граница находится при $y = 0$ и рассматривается полупространство $y \geq 0$, эти уравнения должны решаться с граничными условиями

$$v_1|_{y=0} = v_2|_{y=0} = 0 \text{ и } v_1 \rightarrow U(x, t) \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Пользуясь методом возмущений, можно представить скорости в виде

$$v_i = v_i' + v_i'' + \dots \quad (i = 1, 2), \quad (6.3)$$

где штрихи указывают порядок малости величин. Тогда уравнения для пограничного слоя в первом приближении:

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_1'}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial v_1'}{\partial x} + \frac{\partial v_2'}{\partial y} = 0; \quad (6.5)$$

для второго приближения:

$$\frac{\partial v_1''}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_1''}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - v_1' \frac{\partial v_1'}{\partial x} - v_2' \frac{\partial v_1'}{\partial y}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial v_1''}{\partial x} + \frac{\partial v_2''}{\partial y} = 0. \quad (6.7)$$

Решение этой системы уравнений упрощается при введении функции тока $\psi = \psi' + \psi''$, такой, что

$$v_1' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}; \quad v_2' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}; \quad v_1'' = \frac{\partial \psi''}{\partial y}; \quad v_2'' = -\frac{\partial \psi''}{\partial x}. \quad (6.8)$$

При выводе уравнений пограничного слоя, как известно, используется то обстоятельство, что градиенты скорости v_1

в направлении вдоль границы существенно меньше градиентов v_1 в направлении нормали к границе. В случае акустического пограничного слоя это приводит к условию $k\delta \ll 1$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Это условие, как уже отмечалось, эквивалентно $Re \gg M$ и не ограничивает амплитуду звука, а является ограничением вязкости среды: уравнения пограничного слоя применимы для сред с небольшой вязкостью.

Для стоячей волны, имеющей вдали от границы вид

$$U(x, t) = U_0(x) \cos \omega t,$$

решение (6.4) и (6.5) дает:

$$\psi' = \frac{U_0(x) \delta}{2} \operatorname{Re} \{ \sigma'(\mu) e^{j\omega t} \}, \quad (6.9)$$

где

$$\sigma'(\mu) = 2\mu - 1 + j + (1 - j) e^{-(1+j)\mu} \quad (6.10)$$

и введено безразмерное расстояние $\mu = y/\delta$.

Пользуясь (6.9), получаем решение уравнений первого приближения в виде

$$v_1' = U_0(x) [\cos \omega t - e^{-\mu} \cos(\omega t - \mu)], \quad (6.10a)$$

$$v_2' = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} \frac{dU_0}{dx} \left[\sqrt{2} \mu \cos \omega t - \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-\mu} \cos\left(\omega t - \mu - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (6.10b)$$

Из (6.6), (6.7), (6.9) функция тока второго приближения

$$\psi'' = \frac{\delta}{2\omega} U_0 \frac{dU_0}{dx} \operatorname{Re} \{ \sigma_1''(\mu) e^{j2\omega t} + \sigma_2''(\mu) \}, \quad (6.11)$$

где

$$\sigma_1''(\mu) = \frac{1+j}{2\sqrt{2}} e^{-(1+j)\sqrt{2}\mu} + j\mu e^{-(1+j)\mu} - \frac{1+j}{2\sqrt{2}}, \quad (6.12)$$

$$\sigma_2''(\mu) = -\frac{1}{4} e^{-2\mu} - 3e^{-\mu} \cos \mu - e^{-\mu} (2 + \mu) \sin \mu - \frac{3}{2} \mu + \frac{13}{4}. \quad (6.13)$$

Как видно из (6.11), во втором приближении в акустическом пограничном слое помимо колебаний удвоенной ча-

стоты имеется еще и постоянная составляющая скорости. Для скорости потока из (6.8) и (6.11) следует:

$$\overline{v_1''} = \frac{1}{2\omega} U_0 \frac{dU_0}{dx} \frac{d\sigma_2''}{d\mu}, \quad (6.14)$$

$$\overline{v_2''} = -\frac{\delta}{2\omega} \left[\left(\frac{dU_0}{dx} \right)^2 + U_0 \frac{d^2 U_0}{dx^2} \right] \sigma_2''. \quad (6.15)$$

Отметим, что скорость потока имеет только нормальную компоненту в точках, где

$$U_0 = 0$$

или

$$dU_0/dx = 0.$$

Вид функции $\sigma_2''(\mu)$, определяющей скорость течения в акустическом пограничном слое стоячей волны, показан на рис. 43. В частном случае

$$U_0(x) = -v_0 \cos kx$$

компоненты скорости потока имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{v_1''} = -\frac{v_0^2}{4c_0} \sin 2kx \left[\frac{1}{2} e^{-2\mu} + (1-\mu) e^{-\mu} \cos \mu + \right. \\ \left. + (4+\mu) e^{-\mu} \sin \mu - \frac{3}{2} \right], \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v_2''} = -\frac{v_0^2}{2c_0} k\delta \cos 2kx \left[\frac{1}{4} e^{-2\mu} + 3e^{-\mu} \cos \mu + \right. \\ \left. + e^{-\mu} (2+\mu) \sin \mu + \frac{3}{2} \mu - \frac{13}{4} \right]. \quad (6.17) \end{aligned}$$

При $\mu \ll 1$ (вблизи границы, так как $ky \ll k\delta \ll 1$) с точностью до величин $\sim \mu$ из (6.16) и (6.17)

$$\overline{v_1''} = -\frac{v_0^2}{4c_0} \mu \sin 2kx, \quad (6.18)$$

$$\overline{v_2''} = 0.$$

Как следует из (6.18), скорость течения вблизи границы зависит от кинематической вязкости $\sim \nu^{-1/2}$; скорость

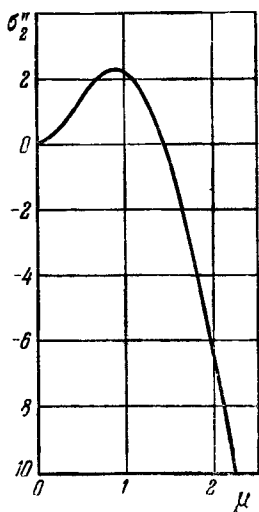


Рис. 43. Функция $\sigma_2''(\mu)$, определяющая скорость течения в акустическом пограничном слое.

обращается в нуль в узлах и пучностях стоячей волны. Весьма существенным является то, что направление скорости течения вдоль стенки, как это следует из (6.14), зависит от знака производной $d\sigma_2''/d\mu$. Эта производная (см. рис. 43) при $\mu \simeq 1$ меняет знак на обратный. Это приводит к тому, что течение в пограничном слое стоячей волны имеет вихревой характер (см. далее), причем размеры вихрей $\sim (\lambda/4)2\delta$. Шлихтинговское решение для течения в пограничном слое применимо для $M \ll 1$; ограничений Re сверху, по-видимому, нет, если амплитуда смещения в волне много меньше характерного размера тела.

Результаты (6.9) и (6.11), полученные для пограничного слоя вблизи плоской границы, пригодны также и тогда, когда поверхность изогнута, если местный радиус кривизны поверхности много

больше длины вязкой волны [10].

§ 3. Рэлеевское течение между плоскостями, вызванное стоячей волной. Течение в трубке Кундта

Рэлеем [5] было рассмотрено течение, возникающее между двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2y_1$, вызываемое стоячей звуковой волной. Фронт волны перпендикулярен к плоскостям. Решение уравнений вязкой жидкости для v_1' при $U_0(x) = -v_0 \cos kx$ совпадает с получаемым из (6.9):

$$v_1' = v_0 \cos kx [-\cos \omega t + e^{-\mu} \cos(\omega t - \mu)], \quad (6.19)$$

для v_2'

$$v_2' = v_0 \frac{k\delta}{\sqrt{2}} \sin kx \left[\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\mu} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \mu\right) \right]; \quad (6.20)$$

здесь $\mu_1 = y_1/\delta$. Движение симметрично относительно плоскости $y = y_1$. Соотношения (6.19) и (6.20) описывают движение только при $0 \leq y \leq y_1$. Заменой $y = 2y_1 - y'$ можно получить решение для $y_1 \leq y' \leq 2y_1$.

При отыскании второго приближения предполагалось, что длина звуковой волны много больше толщины акустического пограничного слоя. Это условие, часто применяемое при решении задач об акустическом течении, как уже указывалось, эквивалентно условию: $Re \gg M$. Приведенное ранее решение Шлихтинга для течения в пограничном слое было найдено также при этом условии. Помимо этого предполагается, что толщина акустического пограничного слоя мала по сравнению с расстоянием между плоскостями. Решение уравнений второго приближения дает для скорости потока вне пограничного слоя:

$$\overline{v_1''} = -\frac{v_0^2}{4c_0} \sin 2kx \left[\frac{1}{2} e^{-2\mu} + e^{-\mu} \cos \mu + 2e^{-\mu} \sin \mu + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 \right], \quad (6.21)$$

$$\overline{v_2''} = -\frac{v_0^2}{8c_0} k\delta \cos 2kx \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\mu} + 3e^{-\mu} \cos \mu + e^{-\mu} \sin \mu + \frac{3}{2} \mu_1 \left[\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)^3 \right] \right\}. \quad (6.22)$$

Это решение приближенно удовлетворяет граничным условиям, но не дает правильного значения скорости течения в пограничном слое (при $\mu \rightarrow 0$).

Вдали от границы, где членами $e^{-\mu}$ можно пренебречь, из (6.21) и (6.22) следует:

$$\overline{v_1''} = -\frac{3v_0^2}{16c_0} \sin 2kx \left[1 - 3 \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 \right], \quad (6.23)$$

$$\overline{v_2''} = -\frac{3v_0^2}{16c_0} ky_1 \cos 2kx \left[\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right) - \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)^3 \right]. \quad (6.24)$$

Характер течения по (6.23) и (6.24) показан на рис. 44. Течение состоит из чередующихся с периодом $\lambda/2$ вдоль

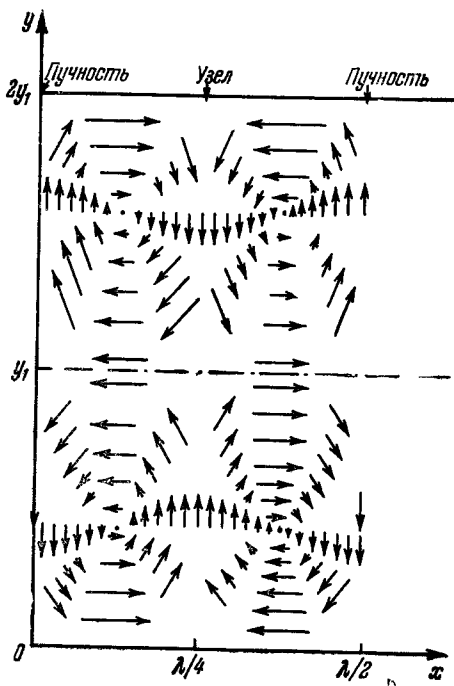


Рис. 44. Рэлеевское течение вне пограничного слоя.

оси Ox вихрей. Вращение вихрей происходит вокруг точек с координатами

$$(x = \lambda/8; y = 0,423y_1),$$

$$(x = \frac{3\lambda}{8}; y = 0,423y_1), \dots, (x = \frac{(2n-1)\lambda}{8}; y = 0,423y_1),$$

а также

$$(x = \frac{\lambda}{8}; y = 1,577y_1), \dots, (x = \frac{(2n-1)\lambda}{8}; y = 1,577y_1).$$

В отличие от течения в пограничном слое, даваемого (6.18), скорость течения вне пограничного слоя не зависит

от вязкости. Несмотря на это, для образования вихревого движения вне пограничного слоя необходима вязкость среды. Вихри, образовавшиеся в акустическом пограничном слое, обязаны своим происхождением вязкости среды; рэлеевские вихри вне пограничного слоя (6.23), (6.24) возникают в результате взаимодействия с вихрями в пограничном слое. Легко видеть, что x -компонента скорости течения

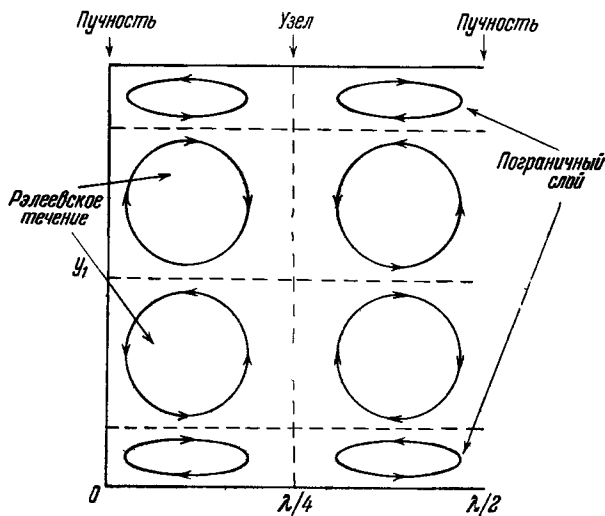


Рис. 45. Схема рэлеевского течения и течения в пограничном слое.

вблизи границы (6.18) имеет знак, противоположный x -компоненте скорости вне пограничного слоя на периферии (6.23). Таким образом, вращение вихрей в пограничном слое происходит в направлении, противоположном вращению вихрей в среде. Схематически это показано на рис. 45.

Задача об акустическом течении, вызываемом стоячей волной в узкой цилиндрической трубке (трубка Кундта) при соленоидальном поле скоростей первого приближения (это эквивалентно тому, что рассматриваемая область меньше длины звуковой волны и $kR \ll 1$, где R — радиус трубки), была рассмотрена в [11]. В качестве первого при-

ближения использовано решение Стокса — Кирхгофа:

$$v_z = jv_0 e^{j\omega t} \cos kz [1 - e^{-(1+j)\kappa}], \quad (6.25)$$

$$v_r' = jv_0 \frac{k\delta}{1+j} e^{j\omega t} \sin kz [1 - e^{-(1+j)\kappa}], \quad (6.26)$$

где $\kappa = (R - r)/\delta$, v_0 — амплитуда скорости на оси трубки. Второе приближение найдено при условии, что толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом трубки. Подставляя (6.25) и (6.26) в (6.47), можно получить для скорости стационарного потока:

$$\begin{aligned} \overline{v_z''} = -\frac{3}{8} \frac{v_0^2}{c_0} \sin 2kz \left\{ 1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{e^{-\kappa}}{3} \left[\left(2 + 3 \frac{\delta}{r} \right) \cos \kappa + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(4 + \frac{\delta}{r} \right) \sin \kappa + \left(1 + \frac{\delta}{2r} \right) e^{-\kappa} \right] \right\}, \quad (6.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v_r''} = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{c_0} kr \cos 2kz \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\delta}{3r} e^{-\kappa} \left[3 \cos \kappa + \sin \kappa + \frac{1}{2} e^{-\kappa} \right] \right\}. \quad (6.28) \end{aligned}$$

Это решение, так же как и решение Рэлея, приближенно удовлетворяет граничным условиям, так как при $r = R$

$$\overline{v_z''} \sim \frac{\delta}{R} \frac{v_0^2}{c_0}, \quad \overline{v_r''} \sim k\delta \frac{v_0^2}{c_0}.$$

Вблизи оси трубки, при $\kappa \gg 1$, из (6.27) и (6.28) следует характерное для Пуазейлевского течения параболическое распределение скорости:

$$\overline{v_z''} = -\frac{3}{8} \frac{v_0^2}{c_0} \sin 2kz \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6.29)$$

$$\overline{v_r''} = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{c_0} kr \cos 2kz \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (6.30)$$

Скорость течения вблизи оси трубки не зависит от вязкости среды и пропорциональна v_0^2/c_0 . Течение имеет пространственный период $\lambda/2$. При $r = 0,707 R$ обращается в нуль z -компонента скорости. Из (6.27) и (6.28) вблизи

стенки при $r \rightarrow R$ и $\kappa \rightarrow 0$:

$$\overline{v_z''} = -\frac{7}{16} \frac{v_0^2}{c_0} \frac{\delta}{R} \sin 2kz, \quad (6.31)$$

$$\overline{v_r''} = \frac{7}{8} \frac{v_0^2}{c_0} \frac{\delta}{R} kr \cos 2kz. \quad (6.32)$$

Следует отметить, что приведенное решение для трубки Кундта пригодно только вблизи пучностей скорости стоячей волны, где скорость приближенно можно считать соленоидальной. Характер течения аналогичен рэлеевскому течению между двумя плоскостями.

§ 4. Течение около препятствий

Мы уже отмечали, что результаты решения задачи об акустическом пограничном слое вблизи плоской поверхности можно применить для определения течения над изогнутыми поверхностями, местный радиус кривизны которых существенно больше длины вязкой волны. Рассмотрим течение вокруг круглого цилиндра. При $Re \gg M$ (при пограничном слое, тонком по сравнению с длиной звуковой волны) и $ka \ll 1$, где a — радиус цилиндра, для определения течения вблизи цилиндра [4, 2] можно воспользоваться решением (6.14) и (6.15) для плоского пограничного слоя. Отсчитывая координату x по поверхности цилиндра, получим: $U_0(x) = 2v_0 \sin \frac{x}{a} = 2v_0 \sin \varphi$, где φ — угловая координата, $\varphi = 0$ соответствует точке ветвления потока. Из (6.14) и (6.15) следует для потока в акустическом пограничном слое цилиндра:

$$\overline{v_\varphi''} = \frac{v_0^2}{c_0} \frac{1}{ka} \sin 2\varphi \cdot \frac{d\sigma_2''}{d\mu}, \quad (6.33)$$

$$\overline{v_r''} = -\frac{2v_0^2}{c_0} \frac{k\delta}{(ka)^2} \cos 2\varphi \cdot \sigma_2'', \quad (6.34)$$

где $\mu = r/\delta$ ($r = 0$ на поверхности цилиндра), а $\sigma_2''(\mu)$ определяется формулой (6.13). Характер течения вокруг цилиндра по (6.33) и (6.34) показан на рис. 46 [2] для

$a/\delta = 7^*$). Как и в случае рэлеевского течения, вихрь в пограничном слое вращается в направлении, противоположном вихрю вне пограничного слоя. При обтекании цилиндра в неограниченной среде центр вращения внешнего вихря находится на бесконечности, в ограниченной среде он размещается на конечном расстоянии от центра цилиндра. По [2] решение (6.33), (6.34) применимо при $kaRe \gtrsim 1200$.

Теория второго приближения пригодна только для малых акустических чисел Маха и ламинарного акустического течения.

При больших амплитудах звуковой скорости или смещения, когда течение еще остается ламинарным, характер обтекания цилиндра стационарным потоком перестает быть таким, как на рис. 46. В [2] обтекание цилиндра было определено с точностью до величин четвертого порядка малости. Линии тока показаны на рис. 47 для $a/\delta = 7$ и $M/ka = 10$. Как видно

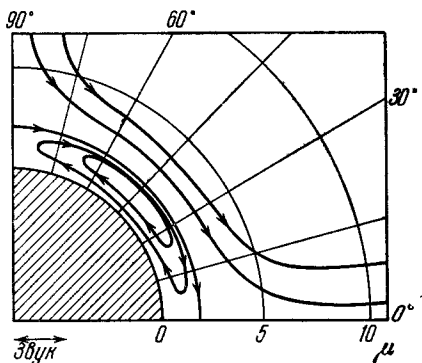


Рис. 46. Течение в пограничном слое вблизи цилиндра при больших $kaRe$ [2].

из сравнения рис. 46 и рис. 47, вихри в пограничном слое деформируются. Экспериментально такое изменение формы пограничных вихрей при увеличении амплитуды звуковой волны наблюдалось в [12].

При $Re \lesssim M$, т. е. при толщине акустического пограничного слоя, сравнимой или даже большей длины звуковой волны, решение, основывающееся на уравнениях пограничного слоя, так же как рэлеевский подход к теории акустического течения, становится недостаточно точным. Поправки к решению для пограничного слоя, позволяющие применить его для средних $kaRe$, получены в [13]. Решение для $kaRe \leq 10$ найдено в [14], для $kaRe \leq 2$ —

*) Как показывают экспериментальные результаты, при $a \leq 30\delta$ толщина пограничного вихря больше, чем это следует из теории Шлихтинга. Поэтому рис. 46 и 47 дают только качественную характеристику потока.

в [15]. Из этих решений следует, что по мере уменьшения Re размеры пограничного вихря становятся все большими и большими, причем эти размеры могут значительно превышать δ , и, наконец при очень малых Re пограничное течение занимает все пространство (см. рис. 48, где $a/\delta = 1,4$ и $kaRe < 10$). Несмотря на то, что качественная картина здесь ясна, числа $kaRe$, определяющие переход от вязкого течения, занимающего все пространство, к явно выраженным вихрям в пограничном слое и невязкому вихревому течению вне пограничного слоя, еще не установлены более или менее точно. Согласно экспериментальным работам [12, 13, 15, 16], а также теории [14, 15] для цилиндра и сферы, числа $kaRe < 10$ малы, а $kaRe \gg 10$ велики. Задача о течениях около сферы при малых и средних $kdRe$, где d — диаметр сферы, рассмотрена в [17]; в экваториальной плоскости течение отличается от течения около цилиндра только тем, что центр вращения пограничного вихря находится не при $\varphi = 45^\circ$, как для цилиндра, а при $\varphi = 54^\circ 43'$.

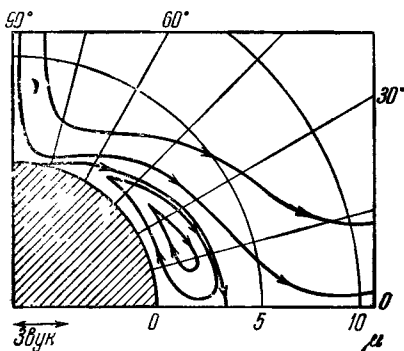


Рис. 47. Изменение линий тока пограничного течения вблизи цилиндра при увеличении амплитуды колебания в звуковой волне [2].

Течения возникают не только у неподвижных препятствий, помещенных в звуковое поле, но также и около колеблющихся с конечной амплитудой тел. Это будет видно далее на примере экартовского потока. Это также следует из теоремы Вестервельта [18, 19], согласно которой скорость стационарного потока в лагранжевых координатах вблизи колеблющихся тел инвариантна относительно преобразований координат, приводящих к тому, что в новой системе координат поверхность тела неподвижна, а колебания совершает жидкость. Теорема Вестервельта справедлива для несжимаемого акустического течения

(что практически всегда выполняется, так как скорости течения малы по сравнению со скоростью звука), при достаточно правильной геометрии поверхности тела и характерных размерах тела, меньших длины звуковой вол-

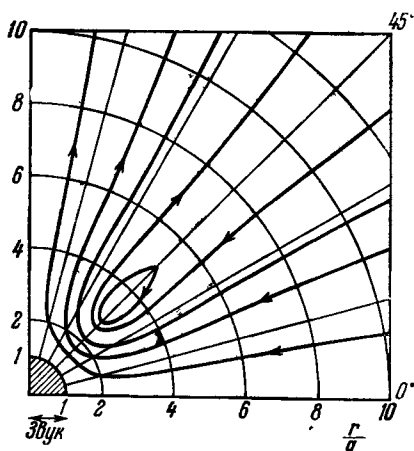


Рис. 48. Течение вблизи цилиндра при малых $kaRe$ [15].

но, но больших амплитуды смещения (колеблющегося тела или волны). Течение около вибрирующего цилиндра при $kaRe < 10$ определено в [19] и оказалось удовлетворяющим теореме Вестервельта. Экспериментально справедливость этой теоремы также подтверждена на примере вибрирующих цилиндров в области малых и средних $kaRe$ [13]. В области больших $kaRe$ наблюдалось [20] течение около вибрирующей пластинки, качественно соответствующее течению около цилиндра при больших $kaRe$.

Мы рассмотрели потоки, возникающие около цилиндра и сферы. Естественно, что вблизи других препятствий, помещаемых в звуковое поле, также возникают течения. Особенно велика может быть скорость около препятствий с мягкими границами, например около воздушных пузырьков в звуковом поле [10]. Течение около резонатора, возбуждаемого звуковой волной, рассматривалось в [24].

§ 5. Общая теория стационарного акустического течения во втором приближении

Выше были рассмотрены случаи течения около препятствий. Основным параметром, определяющим характер течения, были акустические числа Маха и Рейнольдса $Re = v'_0 \lambda / \nu$. При этом решения были различными для боль-

ны, но больших амплитуды смещения (колеблющегося тела или волны). Течение около вибрирующего цилиндра при $kaRe < 10$ определено в [19] и оказалось удовлетворяющим теореме Вестервельта. Экспериментально справедливость этой теоремы также подтверждена на примере вибрирующих цилиндров в области малых и средних $kaRe$ [13]. В области больших $kaRe$ наблюдалось [20] течение около вибрирующей пластинки, качественно соответствующее течению около цилиндра при больших $kaRe$.

ших Re и для малых Re по сравнению с числами Маха (граничные числа Рейнольдса, определяющие переход от вязкого течения к течению с четко выраженным пограничным слоем, зависят от геометрии препятствия и в настоящее время еще не определены сколько-нибудь точно). В [22] была развита более общая теория стационарного течения во втором приближении.

Следуя [22], будем исходить из уравнения (1.22) для вязкой сжимаемой жидкости при $f = 0$ в виде

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{\eta} \left\{ \nabla \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \nabla \mathbf{v} - p \right] - \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \nabla \rho \mathbf{v} - \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right\}, \quad (6.35)$$

где η и η' — сдвиговая и объемная вязкости соответственно. Ротор от (6.35) дает:

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = - \frac{1}{\eta} \nabla \times \left\{ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right\}. \quad (6.36)$$

После усреднения (6.36) по времени получим *):

$$\overline{\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}} = - \frac{1}{\eta} \overline{\nabla \times [\mathbf{v} \nabla \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}]}. \quad (6.37)$$

Далее, используя метод возмущения, для величин второго порядка малости из (6.37) имеем:

$$\overline{\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}''} = - \frac{\rho_0}{\eta} \overline{\nabla \times [\mathbf{v}' \nabla \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}']}, \quad (6.38)$$

где \mathbf{v}' — скорость в первом, а \mathbf{v}'' — во втором приближении. Для решения вида

$$\mathbf{v} = v_1(x, y, z) \sin n\omega t + v_2(x, y, z) \cos n\omega t + v_3(x, y, z), \quad (6.39)$$

где n — целое число, дифференциальные операторы в (6.38) коммутируют с операцией усреднения по времени.

*) Время усреднения здесь, разумеется, должно быть большим времени установления стационарного течения и тем более большим периода волны.

Вместе с тем решение первого приближения может быть представлено в форме (6.39).

Что касается решений второго и более высоких приближений, то во многих граничных задачах они также могут быть представлены в таком виде. Поэтому из (6.38) можно получить

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \bar{v}'' = - \frac{\rho_0}{\eta} \{ \nabla \times \bar{v}' \nabla v' + \nabla \times (\bar{v}' \nabla) v' \}. \quad (6.40)$$

Следует отметить, что метод выделения из точного уравнения (6.37) приближенных уравнений (6.38) и (6.40) связан с ограничением области чисел Re , где последующая теория может быть применена. Если L' — масштаб движения первого приближения (расстояние, на котором существенно меняется скорость первого приближения), а L'' — масштаб стационарного потока, то при получении (6.38) предполагалось, что

$$\frac{\bar{v}''}{L''^3} \sim \frac{\rho_0 v_0'^2}{\eta L'^2},$$

т. е.

$$\frac{\bar{v}''}{v_0'} \sim Re \left(\frac{L''}{\lambda} \right) \left(\frac{L''}{L'} \right)^2.$$

Применение метода последовательных приближений возможно при $\bar{v}''/v_0' \ll 1$, откуда следует ограничение на числа Рейнольдса

$$Re \ll \left(\frac{\lambda}{L''} \right) \left(\frac{L'}{L''} \right)^2.$$

Масштаб движения первого приближения можно считать равным длине звуковой волны; масштаб движения во втором приближении зависит от условий задачи. Для крупномасштабных по сравнению с длиной звуковой волны акустических течений эта теория ограничивается малыми акустическими числами Рейнольдса; мелкомасштабные течения могут рассматриваться в рамках этой теории при больших числах Рейнольдса.

Уравнение (6.40) является исходным уравнением при решении задач об акустическом течении с указанными ограничениями. К этому уравнению необходимо еще добавить уравнение непрерывности. Усредняя уравнение непрерывности в форме (1.3а) при $m = 0$, получим:

$$\overline{\nabla v''} = -\overline{v' \nabla \ln \rho'} \quad (6.41)$$

Вместе с тем, ограничиваясь в (1.3а) членами только первого порядка малости, после интегрирования имеем:

$$\ln \rho' = -\nabla \int v' dt + \ln \rho_0, \quad (6.42)$$

что вместе с (6.41) для однородной среды дает:

$$\Delta \overline{v''} = \overline{v' \nabla \nabla \int v' dt}. \quad (6.43)$$

Уравнения (6.40) и (6.43) с граничными условиями определяют задачу о стационарном акустическом течении во втором приближении.

Пользуясь известным соотношением из векторного анализа, уравнение (6.40) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \nabla \times \overline{v''} &= \\ &= -\frac{\rho_0}{\eta} \overline{\{ \nabla v' \cdot \nabla \times v' + \nabla \nabla v' \times v' + \nabla \times (v' \nabla) v' \}} \quad (6.44) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \nabla \times \overline{v''} &= \\ &= -\frac{\rho_0}{\eta} \overline{\{ \nabla v' \cdot \nabla \times v' + \nabla \nabla v' \times v' - \nabla \times [v' \times (\nabla \times v')] \}}. \quad (6.45) \end{aligned}$$

Для плоского течения, когда скорость первого приближения можно представить в виде

$$v' = [\Phi_1(x, y) \sin \omega t + \Phi_2(x, y) \cos \omega t] i,$$

где i — единичный вектор в направлении оси Ox ,

уравнение (6.45) имеет вид:

$$\begin{aligned} & (v_1)_{xxv} + (v_1)_{yyv} - (v_2)_{yyx} - (v_2)_{xxx} = \\ & = \frac{1}{2v} \{ (\varphi_1)_v [2(\varphi_1)_x + (\varphi_1)_v] + (\varphi_2)_v [2(\varphi_2)_x + (\varphi_2)_v] + \\ & + \varphi_1 [2(\varphi_1)_{xy} + (\varphi_1)_{yy}] + \varphi_2 [2(\varphi_2)_{xy} + (\varphi_2)_{yy}] \} = \Phi(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned} \quad (6.46)$$

где v_1 и v_2 — соответственно x - и y -компонента скорости течения.

Для плоского течения несжимаемой жидкости (а акустическое течение практически всегда можно считать несжимаемым) можно ввести функцию тока ψ так, что

$$v_1 = \psi_y; \quad v_2 = -\psi_x;$$

тогда (6.46) переходит в

$$\Delta \Delta \psi = \psi_{xxxx} + 2\psi_{xxvv} + \psi_{yyvv} = -\Phi(\varphi_1, \varphi_2),$$

т. е. функция тока должна удовлетворять неоднородному бигармоническому уравнению.

Теперь можно рассмотреть два различных случая, приводящих к упрощению основного уравнения (6.44) — (6.45). В том случае, когда характерный размер объема L'' , в котором возникает течение, или размеры препятствия d , помещенного в звуковое поле, много меньше длины звуковой волны, поле скоростей первого приближения можно считать соленоидальным, $\nabla \mathbf{v}' = 0$ (несжимаемая среда). При этих условиях из (6.44) — (6.45) получим:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{v}''} &= -\frac{\rho_0}{\eta} \nabla \times \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'} = \\ &= \frac{\rho_0}{\eta} \nabla \times [\overline{\mathbf{v}' \times (\nabla \times \mathbf{v}')}]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

В том случае, когда поле скоростей первого приближения является безвихревым, $\nabla \times \mathbf{v}' = 0$, из (6.44) — (6.45)

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \overline{\mathbf{v}''} = -\frac{\rho_0}{\eta} \overline{\nabla \nabla \mathbf{v}' \times \mathbf{v}'}. \quad (6.48)$$

Отметим еще, что вектор $\nabla \times \overline{\mathbf{v}''} =$ соленоидален и

$$\nabla \times \nabla \times \Omega'' = -\nabla^2 \Omega''. \quad (6.49)$$

Решение (6.44) — (6.45) может быть облегчено, как это делается при определении вектора по его ротору и дивергенции, введением векторного и скалярного потенциалов:

$$\vec{v}'' = \nabla \times \mathbf{A}'' - \nabla \psi''. \quad (6.50)$$

Тогда, пользуясь векторным тождеством $\nabla^2 \mathbf{A}'' = \nabla \nabla \mathbf{A}'' - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}''$, легко найти уравнения для потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}'' &= -\nabla \times \vec{v}'', \\ \nabla^2 \psi'' &= -\nabla \vec{v}''. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Потенциалы определяются с точностью до произвольной гармонической функции.

Уравнения для акустического течения были записаны в эйлеровых координатах. В лагранжевых координатах, как это было показано в [22], $\nabla \vec{v}''_L = 0$, т. е. в этих координатах акустическое течение имеет только вихревую часть и определяется только векторным потенциалом.

Подводя итог, можно сказать, что для определения стационарной скорости акустического течения необходимо решить уравнения первого приближения и полученные решения подставить в правые части (6.43) и (6.44) — (6.45), затем из (6.44) — (6.45) находятся $\nabla \times \vec{v}''$ и $\nabla \psi''$. После этого решение (6.51) дает векторный и скалярный потенциалы, откуда по (6.50) определяется скорость течения.

В отличие от рассмотренных ранее приближений для области пограничного слоя и вне его, где решение было дано для чисел Рейнольдса, больших по сравнению с числами Маха, в этой теории исходные уравнения упрощаются по кинематическому признаку: соленоидальному или безвихревому характеру поля скоростей первого приближения. Вблизи границ звукового поля или границ препятствий, помещаемых в звуковое поле, $\nabla \times \vec{v}' \neq 0$. По терминологии [23] это поверхностные источники стационарных вихрей. В этом случае при характерном размере препятствия, меньшем длины звуковой волны, можно считать \vec{v}' соленоидальным вектором и пользоваться уравнением (6.47). В однородном свободном акустическом поле $\nabla \times \vec{v}' = 0$ и может быть использовано уравнение (6.48). В этом случае по [23] играют роль объемные источники стационарных вихрей.

§ 6. Течение в свободном звуковом поле (экартовское течение)

При решении задачи об акустическом течении в свободном пространстве обычно предполагается, что поле скоростей первого приближения является безвихревым, т. е.

$$\nabla \times \mathbf{v}' = 0.$$

Рассмотрим на простых примерах, к каким ограничениям приводит это условие.

В наиболее простом случае волны, колебательная скорость в которой направлена по оси x ,

$$\nabla \times \mathbf{v}' = (v_1')_z \mathbf{j} - (v_1')_y \mathbf{k}.$$

Для плоской волны поле скоростей первого приближения можно считать безвихревым, однако решение задачи об акустическом течении в этом случае не может быть найдено, ибо при непроницаемом источнике волны невозможно удовлетворить уравнению непрерывности.

Для звукового пучка ограниченного размера $\nabla \times \mathbf{v}'$ существенно зависит от распределения скорости по сечению пучка.

В случае резкой границы пучка и постоянной по величине и направлению скорости внутри самого пучка *) $\nabla \times \mathbf{v}'$ обращается в бесконечность на границе и равно нулю во всем остальном пространстве; при плавном распределении $\nabla \times \mathbf{v}'$ отлично от нуля во всей области, занятой полем. Таким образом, на этих простых примерах видно, что для интересующих нас полей условие потенциального поля может выполняться только приближенно.

Это условие, однако, позволяет в некоторых случаях найти скорость течения в свободном пространстве. На частотах мегагерцевого ультразвукового диапазона при размерах источника звука, много больших длины волны, можно считать, что объем вихревой области на границе звукового пучка мал по сравнению с объемом, занятым звуковым полем. Безвихревое решение, как будет видно

*) Такое акустическое поле первого приближения не удовлетворяет волновому уравнению.

дальше, удовлетворительно согласуется с экспериментом. Следуя [22], будем предполагать поле v' потенциальным. Тогда уравнение для течения из (6.48) и (6.49) получим в виде:

$$\nabla^2 \Omega'' = \frac{\rho_0}{\eta} \overline{\nabla \nabla v' \times v'}. \quad (6.52)$$

Применим уравнение (6.52) для частного случая плоской бегущей волны с неравномерным распределением амплитуды по фронту волны. Будем считать, что скорость первого приближения в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид:

$$v_z' = U(r) e^{-\alpha z} \sin(\omega t - kz), \quad (6.53)$$

где функция $U(r)$ дает распределение колебательной скорости по фронту волны. Тогда (6.52) принимает вид:

$$\nabla^2 \Omega'' = \frac{bk^2}{4\eta c_0} \frac{dU^2}{dr} e^{-2\alpha z} [i \sin \varphi - j \cos \varphi], \quad (6.54)$$

где $b = \frac{4}{3} \eta + \eta'$, а i и j — единичные векторы, направленные по осям Ox и Oy .

В [24] уравнение (6.54) решалось для случая, когда волна (6.53) распространяется в цилиндрической трубе с твердыми стенками. С торца, противоположного излучателю, труба закрыта идеальным поглотителем звука. На участке, где поглощение можно считать малым*), пренебрегая в (6.54) экспоненциальным членом, ищем решение (6.54) в виде

$$\Omega'' = \Phi(r) [-i \sin \varphi + j \cos \varphi], \quad (6.55)$$

что дает:

$$\Phi(r) = \frac{bk^2}{4\eta c_0 r} \int_0^r r U^2 dr + 2\beta r + \frac{\gamma}{r}.$$

*) Аналогичное эккартовскому течение с поглощением звука рассматривалось в [25].

где β и γ — постоянные интегрирования. Из условия конечности v_z'' на оси трубы $\gamma = 0$. Далее рассматривается участок, где есть только z -компонента скорости потока. Тогда

$$\Omega'' = (\overline{v_z''})_i - (\overline{v_z''})_x j = \frac{dU}{dr} (i \sin \varphi - j \cos \varphi).$$

После определения постоянных интегрирования из условий, что масса через полное сечение трубы не переносится и на стенке трубы ($r = r_0$) скорость потока равна нулю, получаем скорость стационарного течения:

$$\begin{aligned} \overline{v_z''}(r) = \frac{bk^2}{4\eta c_0} \left\{ \int_r^{r_0} s U^2(s) \ln \frac{r_0}{s} ds + \ln \frac{r_0}{r} \int_0^r s U^2(s) ds + \right. \\ \left. + \frac{r^2 - r_0^2}{r_0^4} \int_0^{r_0} (s r_0^2 - s^3) U^2(s) ds \right\}, \quad (6.56) \end{aligned}$$

Решение (6.56) может быть специализировано для случая, часто встречающегося в экспериментальных условиях [24]: радиус звукового пучка r_1 меньше радиуса трубы r_0 . Наиболее простое решение получается при таком распределении звукового поля:

$$\left. \begin{aligned} U(r) &= v_0 \text{ при } r \leq r_1, \\ U(r) &= 0 \text{ при } r_1 < r \leq r_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

Тогда поперечное распределение скорости потока, полученное из (6.56), дается соотношениями:

$$\overline{v_z''}(r) = \left\{ \begin{aligned} U_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} y^2 \right) (1 - x^2) - \ln y \right\} & 0 \leq x \leq y, \\ -U_0 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} y^2 \right) (1 - x^2) + \ln x \right\} & y \leq x \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

где $x = r/r_0$, $y = r_1/r_0$ и

$$U_0 = \frac{b}{4\eta c_0} v_0^2 (kr_1)^2. \quad (6.59)$$

Отметим здесь, что в среде, где объемной вязкости нет, скорость экартовского акустического течения не зависит от вязкости, так же как не зависело от вязкости рэлеев-

ское течение. Это связано с тем, что в теории Эккарта исключается из рассмотрения тонкий вихревой слой на границе звукового пучка. Поскольку для волны, близкой к плоской, $kr_1 > 1$, а масштаб течения $L'' \sim r_1$, применение теории Эккарта ограничивается числами Рейнольдса $Re < 1$ (крупномасштабное течение).

Типичное распределение скорости стационарного акустического потока по (6.58) показано на рис. 49. Поток в звуковом пучке направлен от источника звука, по периферии трубы поток направлен к излучателю. При малых y поток от источника звука несколько больше диаметра звукового пучка. Зависимость максимальной скорости акустического течения, которая согласно (6.58) имеет место на оси трубы, от соотношения между радиусом трубы r_0 и радиусом звукового пучка r_1 показана на рис. 50. С увеличением r_0 / r_1 максимальная скорость медленно увеличивается, но имеет порядок U_0 . Согласно (6.58) скорость обращается в нуль в том случае, когда радиус звукового пучка равен радиусу трубки ($y = 1$). Этим последним обстоятельством можно пользоваться [26] для уменьшения влияния акустического течения в экспериментальных условиях.

Из (6.58) и (6.59) следует, что скорость стационарного потока пропорциональна интенсивности звука и квадрату частоты; U_0 зависит только от отношения объемной вязкости к сдвиговой. Это позволило утверждать [27], что измерение скорости акустического течения является новым методом определения объемной вязкости*). Легко,

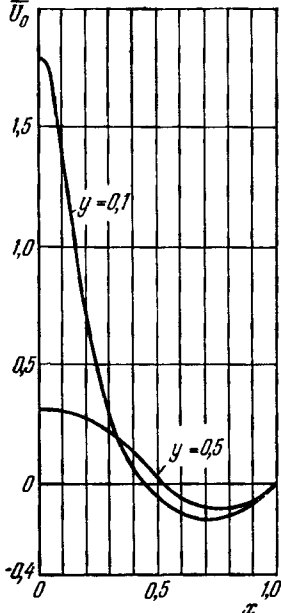


Рис. 49. Поперечное распределение скорости потока для эккартовского течения по (6.58).

*) Единственным методом определения объемной вязкости, как известно, является, метод определения ее по поглощению звука.

впрочем, видеть, что скорость пропорциональна коэффициенту поглощения звука $\alpha_0 = b\omega^2/2\rho_0 c^3_0$ и средней по времени плотности кинетической энергии $\bar{E}_k = \rho_0 v_0^2/4$. Действительно, из (6.59)

$$U_0 = \frac{2\alpha_0 \bar{E}_k}{\eta} r_1^2, \quad (6.60)$$

и, таким образом, измерение скорости потока является по существу новым методом определения поглощения, а не независимым методом определения объемной вязкости.

Поскольку в вязкой среде для плоской волны градиент плотности кинетической энергии пропорционален $\alpha_0 \bar{E}_k$,

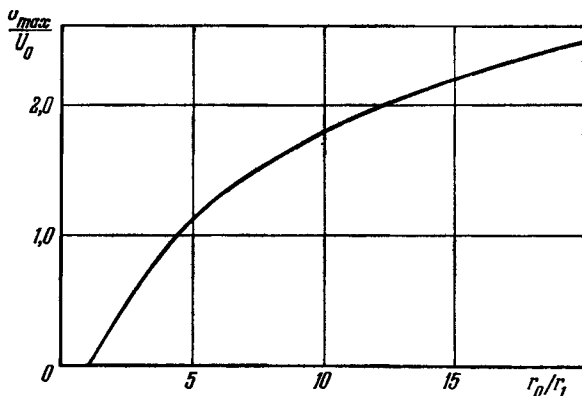


Рис. 50. Зависимость максимальной скорости на оси звукового пучка от отношения радиуса трубки r_0 к радиусу звукового пучка r_1 по (6.58).

из (6.60) следует, что скорость U_0 , а с нею и скорость акустического течения пропорциональны градиенту плотности кинетической энергии (или по (5.12) градиенту радиационного давления), вызванному поглощением волны. В одной из первых работ [28] по акустическому течению градиент радиационного давления считался основной причиной возникновения течения. Однако влияние градиента радиационного давления имеет место для экартовского течения вдали от источника звука и поглотителя в почти плоской волне и не может считаться определяющим

для акустических течений вблизи препятствий, где причины, вызывающие поток, не имеют такого прозрачного смысла.

Затухание звука, как известно, может быть вызвано разными причинами. В чистых жидкостях основной причиной затухания являются потери за счет сдвиговой и объемной вязкости, а при больших интенсивностях — также рассеяние на дегазационных пузырьках, потери, связанные с возникновением кавитации, и т. д. В газах существенную роль помимо вязкости играет теплопроводность. Поскольку скорость акустического течения намного меньше скорости звука, экартовское акустическое течение можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости под действием градиента радиационного давления, вызванного затуханием в результате действия всех причин, в то время как торможение акустического потока обусловлено только сдвиговой вязкостью. Поэтому скорость потока определяется отношением всех диссипативных коэффициентов к сдвиговой вязкости [32]. Экспериментально это, пожалуй, наиболее убедительно было показано по измерениям течений в аргоне [33], где объемная вязкость, как известно, равна нулю, а поглощение обусловлено только сдвиговой вязкостью и теплопроводностью.

В [29], основываясь на законе сохранения импульса, было показано, что сумма радиационного давления звуковой волны и динамического давления возникающего экартовского потока остается постоянной. Экспериментально это проверялось в [30, 31] и в пределах ошибки эксперимента подтвердилось.

В дальнейшем задача, аналогичная экартовской, для сферически расходящейся в некотором телесном угле волны с неравномерным распределением амплитуды по фронту волны была рассмотрена в [34, 35].

До сих пор рассматривалось течение, вызываемое волной монохроматической или, во всяком случае, близкой к монохроматической, причем интенсивность волны сравнительно мала, малы акустические числа Re . Вместе с тем интенсивные ультразвуковые волны могут искажаться так, что в результате образуется волна пилообразной формы (см. гл. 3). Естественно, что скорость течения в этом случае будет отличаться от скорости течения, вызванного

монохроматической волной. Акустическое течение, вызванное пилообразной волной, определено в [36], причем рассматривалась граничная задача, аналогичная экартовской, и использовалось решение (3.16) для пилообразной волны [37]; скорость течения при этом считалась величиной второго порядка малости по сравнению с акустической скоростью.

Рассмотрим экартовский поток в свободном пространстве от источника звука, представляющего собой пульсирующую сферу (источник нулевого порядка). В этом случае в сферических координатах

$$v'_r = U(r) \sin(\omega t - kr), v'_\theta = 0; v'_\phi = 0.$$

Поскольку $\nabla \times \mathbf{v}' = 0$, можно пользоваться уравнением (6.48). Правая часть уравнения (6.48) в этом случае обращается в нуль (это эквивалентно бесконечно большой вязкости среды), и, имея в виду (6.49), получим:

$$\nabla^2 \Omega'' = 0.$$

Если $\overline{\mathbf{v}''}$ имеет только радиальную компоненту, то уравнение имеет решение

$$\overline{\mathbf{v}''} \equiv 0.$$

Этот результат не является неожиданным, так как при возникновении потока в этом случае нарушались бы условия непрерывности. От сферического источника ненулевого порядка, естественно, потоки будут.

§ 7. Экспериментальные методы и результаты исследования течений

Отношение скорости течения к скорости смещения в звуковой волне имеет порядок акустических чисел Маха. Имея в виду, что геометрический фактор может в некоторой мере изменить величину скорости, трудно указать более или менее точный диапазон скоростей акустического течения, с которыми приходится иметь дело в экспериментальных условиях. В маловязких жидкостях максимальные скорости потоков, вызванных пилообразной или близкой к пилообразной волной, в мегагерцевом диапа-

зоне частот не превышали нескольких десятков *см/сек* (естественно, что в этих условиях теория Эккарта не может дать точного значения скорости). Обычно потоки исследуются при меньших интенсивностях звука и скорости потоков составляют несколько единиц или десятых долей *см/сек*. Поэтому экспериментальное изучение потоков, особенно в области применимости теории Эккарта, связано с измерением сравнительно малых скоростей течения в жидкостях или газах.

Чаще всего для измерения скорости используются маленькие взвешенные в потоке частицы аэрозолей (табачный дым или дым MgO) или гидрозолей (алюминиевая пыль). Фотографирование освещенных частиц с определенной экспозицией позволяет по длине треков на фотографии определить скорость потока. Поскольку скорость потока обычно различна в разных участках поля, боковую подсветку делают узким пучком света, для чего часто используют длиннофокусные цилиндрические линзы. Узкий пучок света позволяет исследовать течение в какой-то выбранной плоскости. Для получения хорошей освещенности применяют довольно мощные источники света. Этот метод дает скорость потока в лагранжевых координатах, если известно, что скорость взвешенных частиц равна скорости жидкости или газа. Частицы полностью увлекаются потоком, если размеры частиц очень малы, а их плотность незначительно отличается от плотности среды.

Для измерения скорости течения в жидкостях использовались [38] также термисторы: проходящий поток жидкости охлаждает головку термистора, что приводит к изменению его сопротивления. Инерционность такого измерителя скорости достаточно велика, так что за исключением инфразвуковых частот переменная составляющая звукового поля не влияет на показания термистора. Абсолютную градуировку этого измерителя скорости можно проводить, например, помещая термисторы в постоянный искусственно создаваемый поток жидкости известной скорости. Этот метод измерения скорости потока, как и метод измерения по скорости мелких частиц, имеет то преимущество, что не возмущает или возмущает в малой степени поле скоростей акустического течения, однако, в отличие

от предыдущего метода, позволяет определить скорость в эйлеровых координатах.

Скорость акустического течения принципиально можно определить также по динамическому давлению потока. Приемниками динамического давления могут быть различные устройства: либо это легкое коромысло (типа радиометра), одна часть которого помещается в звуковое поле, либо трубки типа трубок Пито. Такого рода измерения существенно осложняются тем, что помимо динамического давления потока на приемники действует радиационное давление, величина которого может иметь такой же порядок, что и величина динамического давления потока. В [39] было предложено использовать для определения динамического давления потока приемную головку радиометра, затянутую пленкой, «прозрачной» для звука и непроницаемой для потока.

В [27] для разделения радиационного давления звука и динамического давления потока использовалось то обстоятельство, что время установления стационарного звукового поля существенно меньше, чем время установления стационарного акустического течения. Включение звука приводит сразу же к отклонению радиометра за счет радиационного давления (правда, только в том случае, когда инерционность радиометра мала) и затем к постепенному увеличению отклонения за счет динамического давления потока. Этот метод вызвал ряд возражений [38]. Имея в виду различную зависимость динамического и радиационного давлений от параметров жидкости и звукового поля, можно все-таки думать, что в некоторых случаях этот метод может быть успешно применен для измерения радиационного давления, а следовательно, и скорости потока с достаточной точностью.

Поскольку исследование акустических течений связано с измерением малых скоростей, иногда возникает необходимость поддерживать постоянной температуру во всем исследуемом объеме, ибо температурные неоднородности, особенно сильные в том случае, когда исследуемый объем подсвечивается мощным источником света, могут привести к конвективным потокам, вносящим погрешность в результаты измерений. Это особенно важно при наблюдении потоков в газах [16].

Метод взвешенных частиц имеет еще одно преимущество по сравнению с другими упомянутыми методами: он позволяет получить линии тока акустического течения и,



Рис. 51. Эккартовское течение в бензоле на 5 *Мгц*.

таким образом, представление о характере течения в целом. На рис. 51 показана фотография акустического течения на 5 *Мгц* [20] от излучателя диаметром 2,5 см в бензоле; поток был сделан видимым с помощью мелких алюминиевых частиц. Наличие потока вообще легко обнаруживается введением в звуковое поле дыма (в случае газа), краски (в случае жидкости) или, как это было

сделано в [40], по изменению при включении звука картины конвективных потоков от нагретого тела. В работе [41] с помощью растворенной в воде краски делались видимыми линии тока акустического течения на границе двух несмешивающихся жидкостей: глицерина и вазелинового масла. Вода имеет промежуточную плотность — меньшую, чем глицерин, и большую, чем вазелиновое масло, поэтому капля окрашенной воды, опущенная в вазелиновое масло, доходит до границы раздела и останавливается на поверхности глицерина. При включении звука из-за различия скоростей потоков в глицерине и вазелиновом масле капля растягивается и принимает сначала форму распределения относительных скоростей (рис. 52, а), а затем, переходя на линии тока, «прочерчивает» линии тока (рис. 52, б, в, г).

Течение вблизи препятствий. Скорость и характер течения в существенной мере зависят от того, наблюдается ли течение вблизи препятствия или вдали от него. Из-за малой толщины пограничного слоя по сравнению с длиной звуковой волны весь объем практически занят течением вне пограничного слоя (рэлеевским течением). Скорость при этом вдали от границы не зависит от вязкости (или, как в экартовском течении, зависит от отношения объемной вязкости к сдвиговой): для рэлеевского течения из (6.23) и (6.24) скорость $\sim \omega^*$ или $\sim \sqrt{1 + g\omega^2}$, где g — постоянная. Пограничное течение за исключением случаев очень вязких жидкостей имеет микроскопический масштаб. Размеры пограничных вихрей, однако, как показывает эксперимент [13], при относительно небольших характерных размерах препятствия по сравнению с δ могут быть существенно большими, чем 2δ (как уже упоминалось, 2δ — размер, следующий из теории Шлихтинга).

Для внешних и пограничных вихрей различна не только зависимость скорости от частоты и вязкости, но, как видно из рис. 46 и рис. 48, при обтекании цилиндра для

* Такая зависимость скорости течения характерна для течения вблизи препятствия вне пограничного слоя и, по-видимому, в переходной области (см. рис. 54).

этих случаев различно также направление течения: для течения вне пограничного слоя (наружный вихрь на рис. 46) жидкость оттекает от цилиндра в точках $\varphi = 0; 180^\circ$, а при течении в пограничном слое (рис. 48) в этих

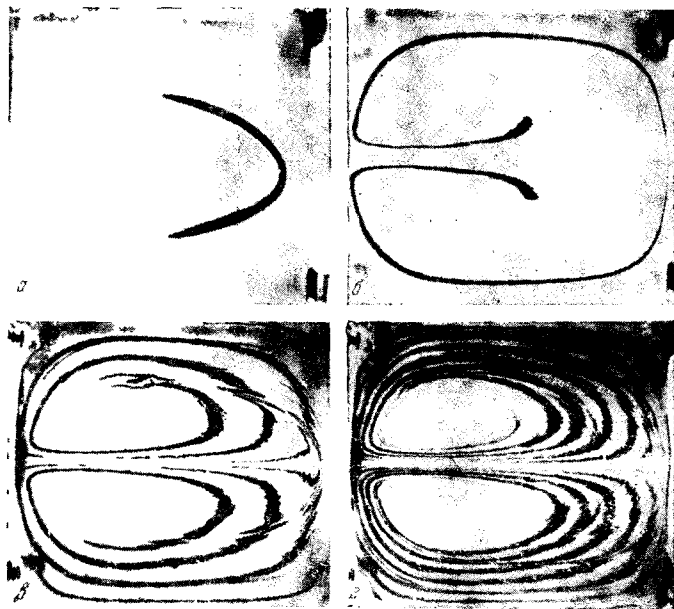


Рис. 52. «Визуализация» эккартовского течения на границе двух несмешивающихся жидкостей. Снимки делались через некоторый промежуток времени [41].

точках происходит подтекание жидкости к цилиндру. Экспериментально такое различие в направлении течения наблюдалось в работах [4, 16] для течения вне пограничного слоя при $kaRe \simeq 10^3 - 10^4$ и в работе [42] для течения в пограничном слое при $kaRe \sim 10 - 10^2$.

При течении между двумя плоскостями (см. рис. 45, стр. 217) рэлеевское течение вне пограничного слоя на периферии переносит жидкость от пучностей к узлам, в то время как шлихтинговское течение в пограничном слое вблизи стенки переносит жидкость от узла к пучно-

сти волны. Рэлеевское течение в цилиндрической трубке экспериментально исследовалось в [16], где было установлено хорошее согласие теоретической и измеренной скоростей.

Размер пограничного вихря по нормали к границе составляет приблизительно две толщины акустического пограничного слоя только для сравнительно больших радиусов цилиндра $a \geq 30\delta$. Когда это условие не выполняется, размер пограничного вихря больше 2δ , что видно из рис. 53, где приведены экспериментальные данные при обтекании цилиндра воздухом [14] и смесью воды и глицерина [13]. Аналогичное увеличение толщины пограничных вихрей при уменьшении $kaRe$ наблюдалось при обтекании сферы [17].

Течение в пограничном слое в воздухе и маловязких жидкостях наблюдалось только при использовании самых низких звуковых частот. В воде на частоте 100 гц толщина пограничного слоя $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ см; в воз-

духе на этой же частоте $\delta \sim 2 \cdot 10^{-2}$. Поэтому течение в пограничном слое на низких частотах обычно наблюдают в микроскоп.

Течение в жидкостях около вибрирующих излучателей звукового и ультразвукового диапазона частот исследовалось в [20]. В ультразвуковом диапазоне частот наблюдалось экартовское течение (см. далее). В звуковом диапа-

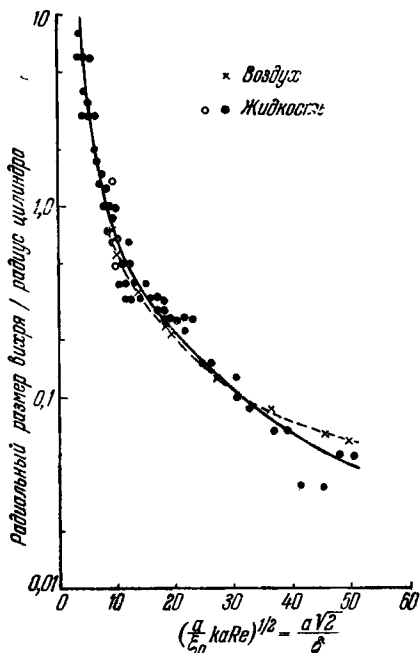


Рис. 53. Относительный размер пограничного вихря около цилиндра при малых и средних $kaRe$; ξ_0 — амплитуда смещения.

зоне течение вблизи колеблющихся пластинок аналогично течению около цилиндра. Во всем диапазоне частот при малой интенсивности звука скорость течения оказалась пропорциональной интенсивности. На рис. 54 приведена «удельная» скорость потока, создаваемого вибрирующими пластинками, в зависимости от частоты. Пропорциональ-

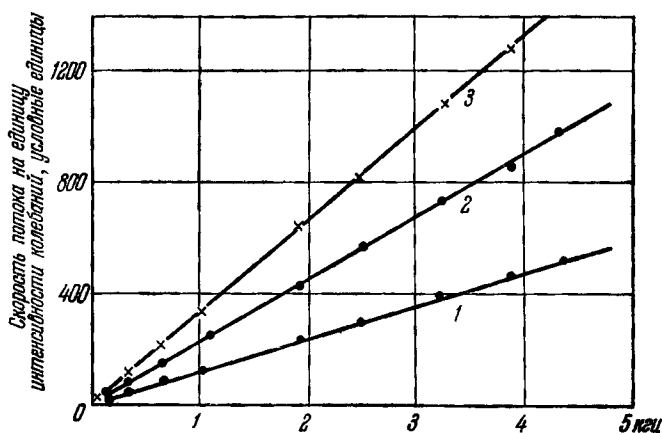


Рис. 54. «Удельная» скорость потока вблизи вибрирующих пластинок в зависимости от частоты вибрации для пластинок разной ширины: 1 — 8,3 мм; 2 — 4,7 мм; 3 — 3 мм.

ность скорости потока частоте характерна для этого типа потоков вне пограничного слоя. Из результатов измерений в различных жидкостях следует, что скорость потока $\sim \omega/\nu$, где ν — кинематическая вязкость; возможно, это связано с тем, что скорость измерялась на расстояниях от колеблющейся пластины, где играли роль члены $\sim \mu_2 = y^2/\delta^2$ (см. рэлеевское течение).

В ряде экспериментальных работ наблюдалась зависимость величины и направления скорости течения, а также характер линий тока от интенсивности звука. При малых интенсивностях звука поток выражен нечетко; есть указания на то, что течение возникает при достижении некоторой пороговой интенсивности [16], хотя этот факт не указывался в ряде последующих исследований. При достижении определенного уровня интенсивности ламинарный

поток становится устойчивым и течение четко выражено. Дальнейшее повышение интенсивности в некоторых случаях приводит к возникновению потока обратного направления. Такое обращение потока наблюдалось в случае обтекания цилиндра [43] и отверстия в стенке [44]. Еще большее увеличение интенсивности может привести к деформации линий тока [12] (см. рис. 46, 47), а для потоков вблизи отверстия — к пульсирующему режиму течения [44]. По-видимому, это предпереходные явления, связанные с неустойчивостью ламинарного режима течения при больших интенсивностях звука.

Проверка теории эккартовского течения. Можно считать, что систематической и достаточно полной проверки теории Эккарта до сих пор сделано не было, однако в ряде работ получены результаты, подтверждающие при определенных условиях справедливость этой теории. Наибольшее число работ было посвящено, пожалуй, не проверке теории, а использованию результатов теории для определения отношения сдвиговой вязкости к объемной, о чем будет идти речь ниже. Получаемые при этом значения объемной вязкости, близкие к измеренным по поглощению звука, могут служить доказательством правильности теории.

В [20] проведено наблюдение потоков в различных жидкостях, начиная с инфразвуковых частот (~ 4 гц) и кончая частотами порядка 10 Мгц. Условиям теории течения в свободном пространстве соответствовала только высокочастотная часть экспериментальных результатов; здесь скорость пропорциональна квадрату частоты и почти пропорциональна коэффициенту поглощения жидкости, что качественно соответствует теории.

В [45] исследовано поперечное распределение скорости потока, причем для получения однородного звукового поля использовалась штраубелевская кварцевая пластинка. В однородном звуковом поле распределение скоростей потока хорошо следует соотношению (6.58). Аналогичные измерения в газах были проделаны в [33], причем введены поправки в (6.58), учитывающие неоднородность звукового поля; экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими.

Естественно, что согласия с эккартовской теорией можно ожидать при малых акустических числах Re и

только в областях, где скорость течения имеет одинаковое направление с направлением распространения звука, т. е. в области, несколько отстоящей от источника звука и от поглотителя [33, 34]. Наблюдаемые отклонения от пропорциональности интенсивности звука [27] связаны, по-видимому, не с турбулизацией потока, а с неприменимостью теории для больших акустических чисел Рейнольдса, когда в среде происходит сильное искажение формы волны [46].

§ 8. Измерение поглощения ультразвука по скорости экартовского течения

В ряде работ [27, 47, 38, 26, 34, 48, 3] по результатам исследования акустического течения определены коэффициенты поглощения звука в жидкостях. Как видно из (6.58) и (6.60), для определения коэффициента поглощения методом акустического течения необходимо независимо измерить интенсивность (или плотность звуковой энергии) и скорость потока. Выше мы говорили, что радиационное давление оказывает существенные помехи при определении скорости потока по его динамическому давлению. Естественно и обратное: динамическое давление потока вносит ошибки в измерение радиационного давления механическими методами (см. гл. 5, § 3). При измерении коэффициента поглощения этим методом разделение динамического давления потока и радиационного давления несколько усложняется тем, что должны быть созданы условия, соответствующие теории Экарта.

В первой работе, где был применен этот метод [27] (см. также [48]), разделение основывалось на том, что скорость течения мала по сравнению со скоростью звука. Поэтому при включении источника звука радиометр быстро отклоняется под действием радиационного давления, затем происходит постепенное увеличение отклонения радиометра под действием потока до какого-то предельного, соответствующего сумме динамического и радиационного давлений. Этот метод встретил ряд возражений, сущность которых сводится к тому, что акустическое течение устанавливается во всем пространстве, занятом звуком, за время меньшее, чем время отклонения радио-

метра под действием радиационного давления (инерционность механических радиометров достаточно велика). Распространенным методом измерения радиационного давления при развитых акустических течениях является метод экранировки радиометра непроницаемыми для потока пленками, размещенными в непосредственной близости от приемной головки радиометра. Этот метод уменьшает влияние потока, но не полностью его исключает, так как поток возникает непосредственно за экраном.

Несколько иной метод определения коэффициента поглощения звука был предложен в [26]. Схема установки

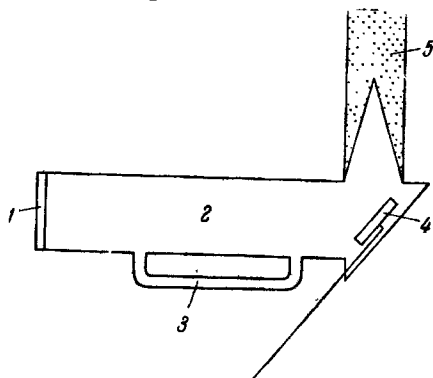


Рис. 55. Схема прибора для измерения поглощения ультразвука по скорости экартовского течения [26].

приведена на рис. 55. Ультразвуковое поле (1 Мгц), создаваемое источником 1, полностью заполняло трубку с исследуемой жидкостью 2. Трубка имела обводной капиллярный канал 3 для обратного потока. Согласно (6.58), при радиусе звукового пучка, равном радиусу трубы, скорость акустического течения обращается в нуль. В экспериментальных условиях, конечно, из-за неоднородности звукового поля по сечению трубки, а в описываемой установке также еще из-за тока жидкости через капиллярный канал 3, перенос жидкости имеется, однако скорость его существенно (не менее чем на порядок) меньше обычной скорости акустического течения. Поэтому можно считать, что влияние динамического давления потока на механический приемник радиационного давления 4 было мало:

Отраженный от приемника 4 звук поглощался поглотителем 5. Согласно закону Гагена — Пуазейля скорость движения жидкости по капилляру

$$v = \frac{\Delta p \cdot r^2}{4\eta l},$$

где Δp — разность давлений на концах капиллярной трубки, имеющей радиус r и длину l . Для малых скоростей течения (~ 1 мм/сек), которые имели место при измерении, влиянием изгибов трубки можно пренебречь. Поскольку для этих скоростей жидкость несжимаема, разность давлений Δp получалась в результате изменения радиационного давления. Считая, что радиационное давление $P = \bar{E}$, где \bar{E} — средняя по времени плотность звуковой энергии, скорость движения жидкости по капилляру имеет вид:

$$v = \frac{\bar{E}_0 (1 - e^{-2\alpha_0 l})}{4\eta l} r^2,$$

где \bar{E}_0 — средняя по времени плотность звуковой энергии у ближайшего к источнику звука конца капиллярной трубки, α_0 — коэффициент поглощения звука. Величина \bar{E}_0 определялась приемником 4, а скорость потока в капиллярной трубке 3 — по движению маленьких взвешенных в жидкости алюминиевых частиц, наблюдаемому под микроскопом. Предварительно прибор калибровался по жидкостям, поглощение в которых достаточно точно известно.

Остановимся на одном весьма существенном недостатке измерения коэффициента поглощения звука по акустическим течениям. При этих измерениях приходится пользоваться довольно большими интенсивностями звука. В некоторых работах, по-видимому, акустические числа Рейнольдса Re были ≥ 1 . Помимо того, что эйлеровская теория в этой области неприменима, коэффициент поглощения в этом случае из-за нелинейного искажения формы волны (см. гл. 3, § 4) больше, чем коэффициент поглощения волны малой амплитуды. Увеличение поглощения, по-видимому, приводит к тому, что скорость течения больше эйлеровской, и в результате экспериментальное отношение объемной вязкости к сдвиговой, или экспериментальный коэффициент поглощения, определенный этим

методом, как правило, несколько больше, чем из измерений поглощения звука. Особенно сильно это должно проявляться на низких частотах. Некоторые авторы, не учитывая этого обстоятельства, считают, что этим методом могут быть проведены измерения поглощения на низких частотах. По-видимому, все-таки область применения метода ограничена снизу частотами порядка сотен кГц, ибо при акустических числах Рейнольдса, меньших единицы, скорость потоков при сравнительно низкой частоте будет очень мала, если не использовать источники звука большого размера. Возможно, что использование других, неэкартовских течений позволит определить поглощение на низких частотах.

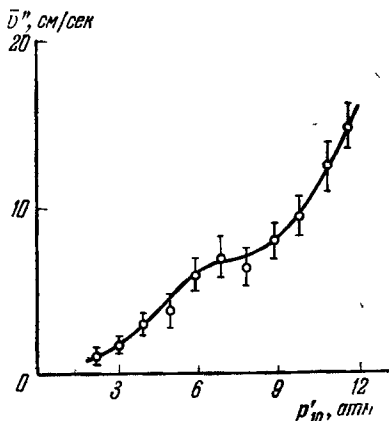


Рис. 56. Скорость эккартовского течения в воде на 1,2 МГц. При звуковых давлениях $p_0 \sim 7$ атм волна в точке наблюдения переходит в пилообразную.

Потоки в свободном пространстве, вызванные пилообразной волной, наблюдались в [46], где было показано, что скорость потока в этом случае пропорциональна

на (так же как и для случая эккартовского течения) интенсивности звука. На рис. 56 показана зависимость скорости потока \bar{v}'' в воде на расстоянии 40 см от источника звука (частота 1,2 МГц) от амплитуды звукового давления p'_{10} у поверхности источника. При переходе к течению, вызываемому пилообразной волной (при $p'_{10} \sim 7$ атм на расстоянии 40 см образуется пилообразная волна), меняется коэффициент пропорциональности. Течение при этом остается ламинарным.

В отличие от других вопросов нелинейной акустики, где нестационарные процессы совершенно не исследованы, для акустических потоков была сделана попытка экспериментального определения времени установления

стационарного течения [40]. Поскольку уравнение, описывающее экартовское течение, — уравнение диффузии вихрей [24], порядок времени установления (времени диффузии вихрей) может быть определен по $\tau = L''^2/\nu$, где L'' — характерный размер объема, занятого течением, а ν — кинематическая вязкость среды. Для жидкостей с сравнительно небольшой вязкостью ($\nu \sim 0,01$ пз) время установления экартовского течения из этого соотношения — порядка нескольких минут. В [40] в воде на 200 кгц качественно наблюдалось установление потоков в свободном пространстве при длительностях импульсов, меньших 0,02 сек, что противоречит приближенной оценке, сделанной выше. Это может быть связано с определением времени установления в эксперименте.

Уравнение (6.6) для течения в пограничном слое также представляет собой уравнение вынужденной диффузии. Время «диффузии вихрей в пограничный слой» $\tau \sim \delta^2/\nu = T/\pi$, где T — период звуковой волны. Таким образом, время установления стационарного течения в пограничном слое сравнимо с периодом волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faraday M., Phil. Trans. Roy. Soc. (London) 121, 229 (1831).
2. Andres J. M., Ingard U., Acoustic streaming at high Reynolds numbers. J. Acoust. Soc. Am. 25, 928 (1953).
3. Ивановский А. И., Теоретическое и экспериментальное изучение потоков, вызванных звуком. М., Гидрометеоиздат, 1959.
4. Schlichting H., Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen. Phys. Z. 33, 327 (1932).
5. Рэлей, Теория звука, т. II, § 352, Гостехиздат, 1955.
6. Westervelt P. J., The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas. J. Acoust. Soc. Am. 22, 319 (1950).
7. Blackstock D. T., Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. J. Acoust. Soc. Am. 34, 9 (1962).
8. Русаков И. Г., О звуковом ветре. Журн. прикл. физики 7, 67 (1930).
9. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, 1956.
10. Nyborg W. L., Acoustic streaming near a boundary. J. Acoust. Soc. Am. 30, 329 (1958).
11. Schuster K., Matz W., Über stationäre strömungen in Kundtsche rohr. Akust. Z. 5, 349 (1940).
12. Carrière M., Analyse ultramicroscopique des vibrations aeriennes. J. Phys. Radium 10, 198 (1929).

13. Raneý W. P., Correly J. S., Westervelt P. J., Acoustic streaming in the vicinity of a cylinder. *J. Acoust. Soc. Am.* **26**, 1006 (1954).
14. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S., Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. Am.* **26**, 26 (1954).
15. Andres J. M., Ingard U., Acoustic streaming at low Reynolds numbers. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 932 (1953).
16. Andrade E. N., On the circulation caused by the vibration of air in a tube. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **134**, 445 (1931).
17. Lane C. M. A., Acoustical streaming in the vicinity of a sphere. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 1082 (1955).
18. Westervelt P. J., Acoustic streaming near a small obstacle. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 1123 (1953).
19. Skavlem S., Tjötta S., Steady rotational flow of an incompressible, viscous fluid enclosed between two coaxial cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 26 (1955).
20. Gabriel A. M., Richardson E. G., A study of acoustic streaming in liquids over a wide frequency range. *Acustica* **5**, 28 (1955).
21. Кубанский П. Н., Осесимметричное акустическое течение у резонатора. *Акуст. ж.* **3**, 337 (1957).
22. Westervelt P. J., The theory of steady rotational flow generated by sound field. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 60 (1953).
23. Medwin H., Rudnick I., Surface and volume sources of vorticity in acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 583 (1953).
24. Eckart C., Vortices and streams caused by sound waves. *Phys. Rev.* **73**, 68 (1948).
25. Nyborg W. L., Acoustic streaming due to attenuated plane wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 68 (1953).
26. Piercy J. E., Lamb T., Acoustic streaming in liquids. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **226**, 43 (1954).
27. Liberman E. N., Second viscosity of liquids. *Phys. Rev.* **75**, 1415 (1949).
28. Fox F. E., Herzfeld K. T., On the forces producing the ultrasonic wind. *Phys. Rev.* **78**, 156 (1950).
29. Borgnis F. E., Theory of acoustic radiation pressure. *Rev. Mod. Phys.* **25**, 653 (1953).
30. Cady W., Gittings C., On the measurement of power radiated from an acoustic source. *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 892 (1953).
31. Herrey E. M. J., Experimental studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.* **27**, 891 (1955).
32. Doak P. E., Vorticity generated by sound. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **226**, 7 (1954).
33. Medwin H., Acoustic streaming experiment in gases. *J. Acoust. Soc. Am.* **26**, 332 (1954).
34. Johnsen I., Tjötta S., Eine theoretische und experimentelle untersuchung über den quartzwind. *Acustica* **7**, 7 (1957).
35. Tjötta S., Steady rotational flow generated by sound beam. *J. Acoust. Soc. Am.* **29**, 455 (1957).

36. Наугольных К. А., К вопросу о потоках, вызванных звуком. Докл. АН СССР 123, 1003 (1958).
37. Fay R. D., Plane sound waves of finite amplitude. J. Acoust. Soc. Am. 3, 222 (1931).
38. Richardson E. G., Acoustic experiments relating to the coefficients of viscosity of various liquids. Proc. Roy. Soc. (London) A 226, 16 (1954).
39. Spengler G., Über den einfluß des «quarzwindes» auf ultraschalleistungsmessungen. Naturwiss. 41, 59 (1954).
40. Darner C. L., Laid E. N., «Quartz wind» formation time. J. Acoust. Soc. Am. 26, 104 (1954).
41. Зарембо Л. К., Шкловская-Корди В. В., Визуализация акустического течения на границе двух несмешивающихся жидкостей. Акуст. ж. 3, 373 (1957).
42. Carriere M., L'inertie des regimes dans les fluides oscillants. J. Phys. Radium 1, 68 (1940).
43. West J. D., Circulation occurring in acoustic phenomena. Proc. Phys. Soc. (London) B 64, 483 (1951).
44. Ingard U., Labate S., Acoustic circulation effects and the nonlinear impedans of orifices. J. Acoust. Soc. Am. 22, 211 (1950).
45. Samuel E. W., Shankland R. S., The sound field of a Strubel X-cut crystal. J. Acoust. Soc. Am. 22, 589 (1950).
46. Романенко Е. В., Экспериментальное исследование акустических потоков в воде. Акуст. ж. 6, 92 (1960).
47. Karim S. M., Rosenheed L., Second coefficient of viscosity of liquids and gases. Rev. Mod. Phys. 24, 108 (1952).
48. Karim S. M., Second viscosity coefficient of liquids. J. Acoust. Soc. Am. 25, 997 (1953).

ЗВУКОВАЯ КАВИТАЦИЯ

§ 1. Прочность жидкостей на разрыв

Кавитация — явление, характерное только для жидкостей. Она играет значительную роль во всех тех течениях жидкости, где возможно возникновение отрицательных давлений. Различные кавитационные течения — довольно обширная область современной гидродинамики. Поскольку такие течения не обязательно связаны со звуковым полем, в настоящее время есть тенденция выделить из общего понятия кавитации звуковую (или ультразвуковую) кавитацию. Нас в этом разделе будет интересовать только звуковая (или ультразвуковая) кавитация, отличающаяся от обычной гидродинамической кавитации, пожалуй, только способом возбуждения.

Трудности, которые встречаются на пути включения кавитационных процессов в общую систему гидродинамических уравнений, являются одной из причин того, что теория звуковой кавитации в настоящее время находится в зачаточном состоянии. В этом разделе будет рассмотрена приближенная теория звуковой кавитации, а также приведен различный экспериментальный материал по звуковой кавитации.

Ввиду того, что звуковая кавитация сопровождается рядом побочных явлений, в литературе встречаются различные толкования терминов, связанных с кавитацией. Поэтому желательно сначала условиться о том, как называть различные процессы, происходящие при возникновении новой фазы в среде. При некоторых условиях возникающая при пониженных давлениях полость может быть заполнена паром жидкости или газом (если он был в этой полости или успел туда диффундировать в процессе понижения давления); соответственно различают кавитацию

кипения (по терминологии Я. И. Френкеля) и газовую кавитацию. В реальных условиях, по-видимому, всегда имеет место смешанная паро-газовая кавитация.

Важной характеристикой является время жизни возникшей полости. Как будет видно в дальнейшем, для газовой кавитации, если размер пузырька мал настолько, что его собственная резонансная частота несколько выше частоты звука, время жизни его в звуковом поле меньше периода звука (или при больших амплитудах звука, возможно, составляет несколько периодов); пузырек быстро захлопывается, при этом возникают большие давления и высокие температуры — образуется сферическая ударная волна.

Процессы подобного рода иногда называют «истинной кавитацией». Когда пузырек велик и его резонансная частота ниже частоты звука, он в звуковом поле совершает интенсивные колебания (при этом могут возбуждаться различные моды колебаний). Такие пузырьки не захлопываются, во всяком случае за несколько периодов волны. Не захлопываются также пузырьки очень малого размера. Эти большие и очень малые пузырьки взаимодействуют между собой и со звуковым полем таким образом, что возможна медленная односторонняя диффузия газа в пузырек для малых пузырьков и коагуляция больших пузырьков. Последнее приводит к бурному выделению газа из жидкости. Этот процесс иногда также называют газовой кавитацией, хотя он существенно отличается от «истинной кавитации». Чаще в отличие от «истинной газовой кавитации» этот процесс называют дегазацией. В экспериментальных условиях явление осложняется еще и тем, что «истинная кавитация» и дегазация, как правило, протекают в звуковом поле одновременно. В насыщенной газом жидкости, по-видимому, нет способов (за исключением анализа кавитационных шумов и вторичных эффектов; см. далее) отличить дегазацию от «истинной кавитации»; совершенно не ясны процессы влияния «истинной кавитации» на дегазацию.

Паровая кавитация исследована значительно меньше; она, по-видимому, имеет много общего с истинной газовой кавитацией. Паровые полости, возникающие при отрицательных давлениях, захлопываются (если в фазе положи-

Таблица 6

Жидкость	Внутреннее давление, кг/см ²		Экспериментальная и теоретическая прочность (при 20°C) жидкостей на разрыв, атм.					Экспериментальная
			[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	
Вода	3250	3200 *	1000	1320	1320	4030	1330	270
Этиловый спирт	1000	1000 *	177	538	223	523	241	39
Этиловый эфир	600	1900 *	71	268	138	1410	437	72
Хлороформ	—	1300 *	167	536	318	2530	269	290
Бензол	1200	—	166	750	352	2960	292	150
Уксусная кислота	—	—	225	678	325	753	322	288
Анилин	—	—	274	—	625	—	—	280
Четыреххлористый углерод	—	1300 *	153	656	315	2720	259	275
Ртуть	24500	—	12400	80900	23100	162000	11400	425

*) По данным ультразвуковых измерений (см. табл. 4 на стр. 166).

тельного давления успеваает конденсироваться весь пар), при этом образуется ударная волна.

По ультразвуковой кавитации имеются обзорные работы [1, 2].

При значительных амплитудах звукового давления жидкости подвергаются большим отрицательным давлениям. Рассмотрим сначала процессы, происходящие в жидкости при медленном понижении давления.

Постепенное понижение давления до давления насыщенных паров жидкости при данной температуре должно было бы привести к вскипанию жидкости, т. е. к кавитации кипения, при которой возникающие полости заполнены парами жидкости. Однако образование новой фазы может и не произойти, если нет «слабых» мест — так называемых зародышей кавитации; дальнейшее понижение давления в этом случае переводит жидкость в метастабильное состояние.

Верхняя граница прочности жидкости на разрыв равна внутреннему давлению в жидкости. Величина внутреннего давления определяется силами межмолекулярного взаимодействия и в большинстве жидкостей имеет порядок нескольких тысяч атмосфер. При приложении таких отрицательных давлений жидкость должна была бы распасться. В жидкости, однако, всегда имеются термодинамические флуктуации плотности, давления и температуры, допускается также существование стабильных зародышей, которые должны привести к локальному понижению прочности жидкости на разрыв. Разрыв при этом приводит не к распаду жидкости, а к образованию пузырьков, заполненных паром и газами, растворенными в жидкости. Из-за этого даже теоретическая прочность жидкости на разрыв, как правило, ниже величины внутреннего давления.

В табл. 6 приведены для некоторых жидкостей значения внутреннего давления и теоретическая и экспериментальная прочность на разрыв. Теоретическая прочность, полученная разными авторами, различна, что определяется прежде всего различными исходными точками зрения. В работе [3] за величину прочности берется давление, соответствующее минимуму изотермы Ван-дер-Ваальса. Методы статистической термодинамики применены в [4, 5], причем причиной уменьшения прочности считаются

флуктуации температуры, приводящие к образованию зародыша, способного при этих условиях (давлении и т. д.) расти. Естественно, что для малых пузырьков большую роль должно играть поверхностное натяжение. В настоящее время не известно, в какой мере макроскопическое понятие поверхностного натяжения может быть применено для комплекса, состоящего из небольшого количества молекул. Есть предположение о том, что поверхностное натяжение изменяется при сильном уменьшении размера поверхности. Так, в [6] показано, что поверхностное натяжение очень маленькой капли жидкости в газе меньше, чем поверхностное натяжение большой поверхности; для очень маленького пузырька газа или пара в жидкости поверхностное натяжение, наоборот, больше, чем для развитой поверхности. Эти результаты, естественно, существенно увеличивают рассчитываемые прочности жидкостей (см. табл. 6). В работе [7] показано, исходя из несколько других предположений, что, наоборот, у газовых пузырьков малого размера в жидкости поверхностное натяжение меньше, чем в случае развитых поверхностей, что, конечно, понижает прочность на разрыв (см. предпоследний столбец таблицы).

Теоретические работы по прочности жидкостей стимулировались тем, что экспериментально наблюдаемая прочность жидкостей (см. табл. 6) существенно меньше внутреннего давления. Даже при применении всех предосторожностей экспериментальная прочность жидкостей на один-два порядка меньше внутреннего давления и, как правило, меньше теоретической прочности. Низкая экспериментальная прочность жидкостей на разрыв вряд ли может быть объяснена термодинамическими флуктуациями из-за малой вероятности таких больших флуктуаций. В настоящее время предполагается, что причиной низкой прочности является существование в жидкости стабильных зародышей новой фазы.

Предположение о существовании зародышей в виде пузырька в жидкости может объяснить сравнительно низкую экспериментальную прочность жидкостей. Для этого рассмотрим изотермическое растяжение пузырька с постоянным содержанием идеального газа (пара). На границе пузырек — жидкость, как известно, есть скачок дав-

ления, так что давление p_n внутри пузырька будет:

$$p_n = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}, \quad (7.1)$$

где p_0 — внешнее давление (давление в жидкости), σ — поверхностное натяжение, R_0 — радиус пузырька.

Если размеры пузырька под действием внешнего давления изотермически увеличились в a раз, так, что количество газа в пузырьке не изменилось, то для внешнего уравновешивающего давления имеем:

$$p_a = \frac{p_n}{a^3} - \frac{2\sigma}{aR_0}. \quad (7.2)$$

Подставляя p_n из (7.1), получим:

$$p_a = \frac{1}{a^3} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{aR_0}. \quad (7.3)$$

Зависимость размера пузырька от давления p_a из этого соотношения показана на рис. 57 для двух пузырьков с начальными размерами $R_0 = 10^{-4}$ см и $R_0 = 10^{-5}$ см в воде ($\sigma = 80$ дн/см) при $p_0 = 10^6$ дн/см². Как видно из этого рисунка, размеры пузырька увеличиваются по мере уменьшения давления. По достижении некоторого критического размера для дальнейшего роста пузырька не требуется понижения давления, пузырек спонтанно растет. Критический размер пузырька определяется по минимуму функции $p_a = p_a(aR_0)$:

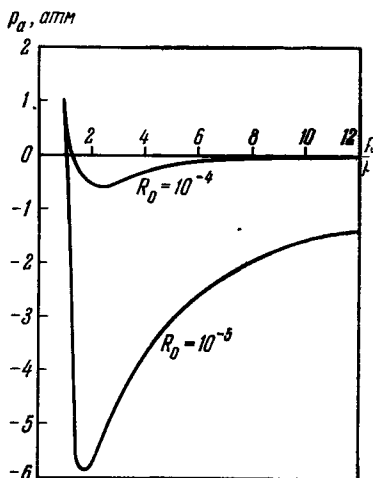


Рис. 57. Зависимость размера газового пузырька от внешнего давления.

$$R_{кр} = a_{кр} R_0 = R_0 \sqrt[3]{\frac{p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}}{\frac{2\sigma}{R_0}}}. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в (7.3), получим максимальное отрицательное давление, которое может выдержать без разрыва жидкость с пузырьками, начальный радиус R_0 которых одинаков:

$$P_{\max} = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma}{R_0}\right)^3}{3\left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)}}. \quad (7.5)$$

Эта величина может считаться изотермической прочностью на разрыв жидкости, в которой есть хотя бы один зародыш в виде пузырька радиуса R_0 . Зависимость p_{\max} от R_0 показана на рис. 58 [8]. Как видно из рисунка, прочность жидкости на разрыв при $R_0 > 10^{-7}$ см в этом случае существенно ниже теоретических величин, приведенных в табл. 6. Таким образом, для объяснения экспериментальной прочности жидкостей на разрыв достаточно предположить, что в жидкости стабильно могут существовать зародыши в виде газовых пузырьков, размеры которых больше 10^{-7} см.

В жидкостях при обычных температурах и давлениях, если не приняты специальные меры предосторожности, растворено некоторое количество газов. Для того чтобы объяснить экспериментальную прочность недегазированной воды, близкую к -1 атм, следует предположить, что в воде есть зародыши в виде пузырьков радиуса $\sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ см. Однако гипотеза о зародышах имеет свои трудности, основной из которых является вопрос о возможности стабильного существования зародыша. При внешнем гидростатическом давлении 1 атм давление внутри пузырьков радиуса $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$ см $\sim 3 - 20$ атм. Под таким давлением газ пузырька должен был бы быстро диффундировать в окружающую жидкость; например, время растворения пузырька $R_0 < 2 \cdot 10^{-3}$ см меньше 8 сек [9]. Если предположить, что зародыши в виде пузырьков имеют больший размер, то, с одной стороны, прочность на разрыв (как это следует из рис. 58) была бы меньше экспериментальной, с другой стороны, на такой пузырек действовала бы большая выталкивающая сила, заставляющая пузырек всплывать. По закону Стокса скорость

всплывания $v = 2R_0^2 \rho_0 g / 9\eta$, где ρ_0 — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, η — вязкость. В воде пузырьки, радиус которых $R_0 > 10^{-3}$ см, могут находиться (в экспериментальных сосудах разумного размера) не более нескольких минут.

В [9] было предположено, что поверхностное натяжение уменьшается за счет растворенных всегда в жидкостях органических веществ

(парафиновых кислот, углеводов и т. д.), кроме того, эти растворенные вещества препятствуют диффузии газа из пузырька. Влияние поверхностно-активных веществ, кстати говоря, подтверждается еще кажущимся «отвердением» воздушных пузырьков малых размеров при подъеме в жидкости (см. [10], § 281). Однако жидкости, в которых эти органические вещества растворимы (спирты, CCl_4 и др. и их

водные растворы), тоже кавитируют при сравнительно низких звуковых давлениях. Таким образом, гипотеза о том, что органические пленки понижают поверхностное натяжение и препятствуют диффузии газа, требует более тщательной экспериментальной проверки. Есть, впрочем, вещества, например протеин, которые нерастворимы в спиртах, CCl_4 и др. и которые могут быть ответственны за стабилизацию зародышей. Эти соображения, однако, в настоящее время носят гипотетический характер.

За последнее время высказывались предположения о возможности возникновения зародышей под действием космических лучей. Механизм возникновения зародышей аналогичен механизму возникновения пузырьков в водородных или пропановых камерах. Проведены предварительные эксперименты для выяснения влияния на

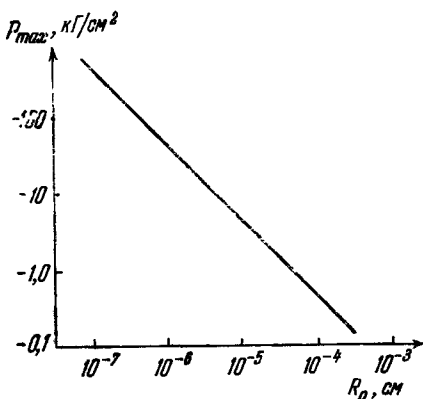


Рис. 58. Теоретическая прочность на разрыв воды ($\sigma = 72,7$ дин/см, $\rho_0 = 1$ атм) с пузырьком (или пузырьками) радиуса R_0 .

кавитационный порог радиоактивного излучения и космических частиц [11]. Они показали, что источник γ -лучей (источник Co^{60} , интенсивность излучения 50 милликюри) никак не повлиял на порог кавитации. В другой серии опытов выяснялось влияние космического излучения. При экранировке сосуда, где наблюдалась кавитация, свинцом толщиной 1,5 см кавитационный порог экспоненциально во времени понижался через несколько часов на 40—70% от начальной величины, а после снятия экрана через некоторое время возвращался к первоначальному значению.

В дальнейшем ряд экспериментов был проведен для определения воздействия нейтронов на порог кавитации в различных жидкостях [12—14]. Эти эксперименты однозначно показали, что под действием быстрых (4—10 Мэв), нейтронов порог кавитации в воде [13], пентане и ацетоне [12] понижается, причем в последних двух жидкостях — существенно. Замедление нейтронов парафиновым экраном [13] показало, что медленные нейтроны ($\sim 0,4$ —1 Мэв) не оказывают влияния на порог кавитации. Заряженные частицы (протоны, электроны, мезоны) также не оказывают влияния на порог кавитации. Таким образом, в космическом излучении на порог кавитации может оказывать влияние, по-видимому, только часть нейтронной компоненты с нейтронами больших энергий. Эти интересные эксперименты указывают на возникновение зародышей кавитации под действием космического излучения, но не могут рассматриваться как доказательство того, что это — единственная причина возникновения зародышей.

Развиваемая в настоящее время теория односторонней диффузии [15] (см. далее), не разрешая вопроса о природе начальных зародышей, позволяет понять механизм перехода от чрезвычайно маленьких воздушных пузырьков, которые, как следует из теории газовой кавитации, не участвуют в кавитации из-за большой величины давления, создаваемого поверхностным натяжением, к большим, которые уже могут рассматриваться как центры кавитации. Согласно теории односторонней диффузии колебания пузырьков очень малого размера в звуковом поле приводят к быстрому «перекачиванию» растворенного в жидкости воздуха в пузырек, который в результате этого быстро

достигает кавитационного размера. Большие пузырьки в результате односторонней диффузии растут очень медленно.

Выше рассматривался разрыв жидкости на стабильно существующих газовых зародышах. Возможен также разрыв на поверхностях твердых тел, находящихся в звуковом поле. Это могут быть, например, поверхность источника звука, стенки сосудов или твердые загрязнения, присутствующие в жидкости. При недостаточно хорошей смачиваемости разрыв жидкости в этих случаях облегчен.

§ 2. Теория роста и захлопывания кавитационных полостей

В этом разделе мы, следуя [16], рассмотрим теорию роста и захлопывания под действием звуковой волны одного кавитационного пузырька, заполненного газом, предполагая, что количество газа в процессе изменения его объема остается постоянным; жидкость несжимаема, ультразвуковое поле имеет синусоидальное распределение плотности, звукового давления и других характеризующих волну величин даже в непосредственной близости от пузырька; максимальный диаметр пузырька меньше длины волны.

Теория исходит из предположения, что в среде могут стабильно существовать зародыши в виде газовых пузырьков. Допустим, что в жидкости при гидростатическом давлении p_0 в начальный момент времени стабильно существует пузырек радиуса R_0 . Под действием звукового давления $p' = -p'_0 \sin \omega t$ размеры пузырька будут изменяться. Пользуясь (7.3), давление в жидкости можно записать в виде

$$p_a = \frac{1}{a^3} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{aR_0} + p'_0 \sin \omega t - p_0, \quad (7.6)$$

где p'_0 — амплитуда звукового давления. Работа, затраченная на изотермическое растяжение пузырька от радиуса

R_0 до R (имея в виду, что $a = R/R_0$):

$$W = \int_{V(R_0)}^{V(R)} p_a dV = \int_{R_0}^R 4\pi R^2 \left\{ \frac{R_0^3}{R^3} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R} + p_0' \sin \omega t - p_0 \right\} dR. \quad (7.7)$$

Эта работа равна кинетической энергии присоединенной массы жидкости:

$$W = 2\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (7.8)$$

Приравнявая (7.7) и (7.8), получим уравнение, определяющее движение стенки пузырька при изотермических колебаниях с постоянной массой газа:

$$\int_{R_0}^R 4\pi R^2 \left\{ \frac{R_0^3}{R^3} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R} + p_0' \sin \omega t - p_0 \right\} dR = 2\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (7.9)$$

Дифференцируя по R обе части равенства (7.9), получим:

$$2R \left[p_0' \sin \omega t - p_0 + \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \frac{R_0^3}{R^3} \right] = = 4\sigma + 3\rho_0 R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 2\rho_0 R^2 \left(\frac{d^2R}{dt^2} \right). \quad (7.10)$$

Или, интегрируя левую часть (7.9):

$$2R_0^3 \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \ln \frac{R}{R_0} - 2(R^2 - R_0^2)\sigma + + \frac{2}{3}(R^3 - R_0^3)(p_0' \sin \omega t - p_0) = \rho_0 R^3 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (7.11)$$

Для кавитации на твердой сферической частице, не смачиваемой жидкостью, уравнение (7.10) упрощается:

$$2R [p_0' \sin \omega t - p_0] = 4\sigma + 3\rho_0 R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 2\rho_0 R^2 \left(\frac{d^2R}{dt^2} \right). \quad (7.12)$$

Уравнения (7.10) и (7.11), одно из которых является

следствием другого, а также (7.12) нелинейны. Аналитическое решение этих уравнений не может быть найдено. В [16] для отыскания численных решений использовалась вычислительная машина. На рис. 59 показаны результаты численного решения (7.10). Предполагалось, что пузырек в воде имел начальный размер $R_0 = 0,8 \times 10^{-4}$ см, а амплитуда звукового давления $p_0' = 4 \cdot 10^6$ дн/см². Расчет сделан для двух различных частот: $\omega = 3 \cdot 10^7$ гц (кривая 1) и $\omega = 9 \cdot 10^7$ гц (кривая 2). Собственная частота газового пузырька при малых колебаниях, как известно [17, 18], равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right)}{\rho_0}}, \quad (7.13)$$

где ρ_0 — плотность жидкости, p_0 — гидростатическое давление, $\gamma = c_p/c_v$ для газа. Резонансные размеры воздушных пузырьков в воде по (7.13) показаны на рис. 60. В случае, показанном на рис. 59 (при $p_0 = 10^6$ дн/см²),

резонансная частота $\omega_0 \simeq 4 \cdot 10^7$ гц. Таким образом, для случая 1 (см. рис. 59) исходный пузырек имел размер меньший, чем резонансный, для случая 2, наоборот, — больший, чем резонансный. Как видно из рис. 59, при существовании в среде зародышей в виде заполненных газом пузырьков, размеры которых меньше резонансного, пузырек под действием отрицательного давления сначала растет, в момент времени t_m достигает максимального размера R_m , затем при положительном давлении быстро захлопывается*). Скорость движения стенки пузырька при

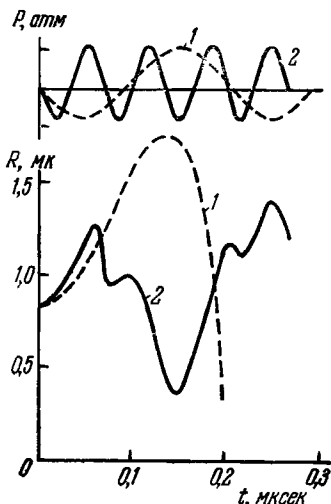


Рис. 59. Изменение размеров газового пузырька в звуковом поле. 1 — начальный размер пузырька меньше резонансного; 2 — начальный размер больше резонансного.

*) Захлопывание пузырька происходит несколько позднее, чем достигается максимальное положительное давление; это было подтверждено экспериментально в [37].

захлопывании столь велика, что на вычислительной машине не удалось провести расчеты до минимального размера пузырька. Как будет видно в дальнейшем, при захлопывании также возникают значительные давления и температуры. Это является характерной чертой «истинной кавитации».

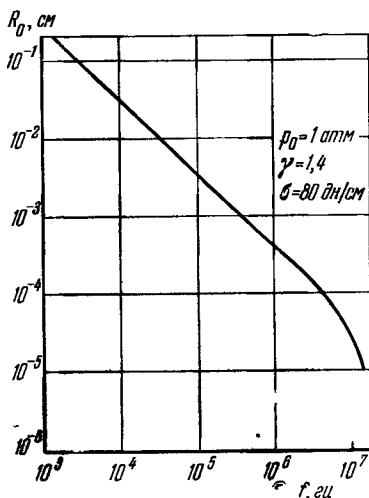


Рис. 60. Резонансные размеры воздушных пузырьков в воде.

Наоборот, пузырьки, размеры которых больше резонансного, будут под действием звуковой волны совершать колебания и, вообще говоря, не захлопнутся (см. кривую 2 на рис. 59). Таким образом, для заданной частоты звука существует верхний предел размеров зародышей, способных кавитировать: кавитируют только зародыши, размеры которых меньше резонансных. Следует, однако, сказать, что не все зародыши, размеры которых меньше резонансного для данной частоты, будут принимать участие в кавитации.

Очень маленькие зародыши из-за действия силы поверхностного натяжения находятся под таким большим давлением, что внешнее давление может и не изменить существенно их объема. Очень малые пузырьки совершают в звуковом поле гармонические колебания. Увеличение амплитуды звукового давления приводит к тому, что начинают кавитировать все более и более мелкие зародыши. Минимальный размер кавитирующего зародыша $(R_0)_{\min}$ при заданной амплитуде звукового давления может быть приближенно определен из условия разрыва жидкости (7.5). Отрицательное звуковое давление, очевидно, должно быть больше p_{\max} :

$$|p_0' - p_0| > \frac{2}{3} \sqrt{\frac{8\sigma^3}{3(R_0)_{\min} \left(p_0 + \frac{2\sigma}{(R_0)_{\min}} \right)}}.$$

Максимальный размер кавитирующего зародыша определяется из резонансного условия

$$\rho_0 [\omega (R_0)_{\max}]^2 = 3\gamma \left(p_0 + \frac{2\sigma}{(R_0)_{\max}} \right).$$

Таким образом, при заданной частоте и амплитуде звукового давления кавитируют зародыши, размеры которых удовлетворяют условию

$$(R_0)_{\min} < R_0 < (R_0)_{\max},$$

при этом $(R_0)_{\min}$ определяется амплитудой звукового давления, а $(R_0)_{\max}$ — частотой звука. Повышение частоты звука приводит к тому, что $(R_0)_{\max}$ делается все меньше и меньше (могут кавитировать только все более и более мелкие зародыши). При постоянной амплитуде звукового давления может оказаться, что $(R_0)_{\min} \geq (R_0)_{\max}$, тогда кавитация не возникает при любом наборе зародышей в жидкости. Отсюда, в частности, следует качественный вывод о том, что порог кавитации с увеличением частоты должен возрастать.

Как показывают расчеты в [16], в процессе «истинной кавитации» пузырек при расчетных звуковых давлениях не достигает резонансного размера. На рис. 61 показано, как зависят от частоты звука время роста пузырька t_m и максимальный радиус R_m , достигаемый за время роста; при расчете брали амплитуду звукового давления $p_0 = 4 \cdot 10^6$ дн/см² и начальный радиус зародыша $R_0 = 3,2 \cdot 10^{-4}$ см. На этом же рисунке показан резонансный радиус пузырька по (7.13). В процессе кавитации при относительно небольших амплитудах звукового давления максимальный радиус пузырька имеет порядок резонансного, но все же меньше его.

Как показывают экспериментальные и теоретические результаты, при больших амплитудах звукового давления скорость роста и максимальный радиус пузырька могут быть такими, что в фазе положительного давления он не успеет захлопнуться [44, 45].

Выше в общих чертах был рассмотрен процесс кавитации, описываемый уравнением (7.10). Результаты этой теории должны рассматриваться как качественные из-за ряда упрощающих предположений при выводе

исходных уравнений, не говоря уже о том, что теория применена для частного случая. Представляется весьма мало вероятным, чтобы содержание воздуха в пузырьке в процессе роста и особенно в процессе захлопывания пузырька оставалось постоянным. Другое предположение о несжимаемости жидкости при движении стенок пузырька заведомо не выполняется в фазе захлопывания пузырька.

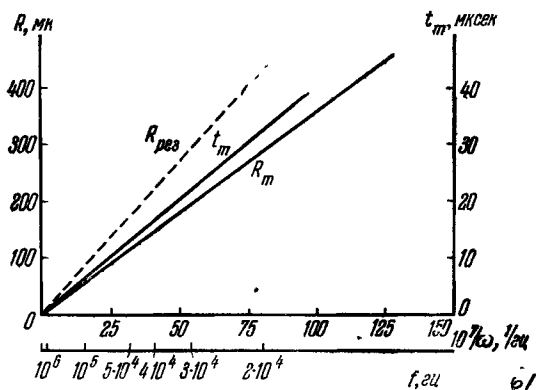


Рис. 61. Зависимость от частоты: R_m — максимального радиуса, достигаемого в процессе кавитации; t_m — времени роста пузырька. Пунктирной линией показан резонансный размер.

Изотермическое захлопывание пустой полости в несжимаемой жидкости было рассмотрено Рэлеем [19]. При движении стенок полости уменьшается ее объем и увеличивается кинетическая энергия окружающей жидкости. Приравнивая кинетическую энергию присоединенной массы окружающей жидкости к потенциальной энергии, получим:

$$2\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (R_m^3 - R^3), \quad (7.14)$$

где p_0 — давление в жидкости на бесконечности, ρ_0 — плотность жидкости, откуда скорость движения стенки полости

$$-\frac{dR}{dt} \sim R^{-3/2}.$$

При малых радиусах полости скорость движения стенки пузырька становится сравнимой со скоростью звука в жидкости [20] и необходимо учитывать сжимаемость жидкости. Из (7.14) может быть получено также время, через которое полость, начальный размер которой был R_m , полностью захлопывается:

$$\tau = 0,915 R_m \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}. \quad (7.15)$$

В дальнейшем рядом авторов была рассмотрена эта же задача с учетом сжимаемости жидкости [21], причем получено значение скорости при захлопывании

$$-\frac{dR}{dt} \sim R^{-1/\mu}.$$

Для μ сообщались разные значения: $\mu = 2; 1,27$ [21]. Таким образом, учет сжимаемости жидкости приводит к тому, что скорость стенок меньше, чем в случае несжимаемой жидкости, однако при $R \rightarrow 0$ по-прежнему $-\frac{dR}{dt} \rightarrow \infty$.

Давление, развивающееся при захлопывании пустой полости по Рэлею, максимально на расстоянии $4^{1/3}R$ от центра полости и равно

$$p_{\max} = 4^{4/3} p_0 \left(\frac{R_m}{R} \right)^3, \quad (7.16)$$

т. е. при $R \rightarrow 0$ $p_{\max} \rightarrow \infty$. Бесконечное давление получается и при учете сжимаемости жидкости.

Бесконечная скорость движения стенок и бесконечное давление в точке аннигиляции кавитирующего пузырька получаются в результате того, что полость предполагалась пустой; для реальной кавитации это было бы возможным только в том случае, когда весь газ, содержащийся в полости, успевал бы в процессе захлопывания диффундировать в окружающую жидкость. При этих расчетах не учитывалось поверхностное натяжение жидкости, ее вязкость, которые также могут существенно влиять на процесс захлопывания. Более сложные движения, чем простое движение к центру, не принимались во внимание.

В [16] была рассмотрена задача об адиабатическом захлопывании полости, заполненной газом. При этом предполагалось, что диффузия газа не происходит (т. е. в процессе захлопывания количество газа в пузырьке не меняется) и внешнее давление в процессе захлопывания остается постоянным. Если Q — давление газа в пузырьке при максимальном радиусе, а p_0 — давление в жидкости, то минимальный радиус, до которого будет сжат пузырек,

$$R_{\min} = R_m \left[\frac{Q}{(\gamma - 1) p_0} \right]^{\frac{1}{3(\gamma - 1)}}. \quad (7.17)$$

При минимальном радиусе, естественно, давление газа в пузырьке максимально и дается соотношением

$$p_{\max} = Q \left(\frac{R_m}{R_{\min}} \right)^{3\gamma} = Q \left[\frac{(\gamma - 1) p_0}{Q} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (7.18)$$

Стенка пузырька движется с максимальной скоростью

$$\left(- \frac{dR}{dt} \right)_{\max}^2 = \frac{2(\gamma - 1) p_0}{3\gamma p_0} \left[\frac{(\gamma - 1) p_0}{\gamma Q} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (7.19)$$

тогда, когда пузырек еще не достиг минимального размера (для воздуха, например, скорость $-\frac{dR}{dt}$ максимальна при $R \simeq 1,3 R_{\min}$). Для строго адиабатических условий захлопывания температура при минимальном радиусе

$$T_{\max} = T_0 \left[\frac{(\gamma - 1) p_0}{Q} \right]^{3(\gamma - 1)}, \quad (7.20)$$

где T_0 — абсолютная температура окружающей жидкости.

Формулы (7.17) — (7.20) позволяют определить порядки величин. В качестве примера допустим, что $R_{\min} = 0,1 R_m$; $p_0 = 10^6 \text{ дн/см}^2$; $\gamma = 4/3$; $T_0 = 300^\circ \text{ К}$. Тогда из (7.17) $Q = 3,3 \cdot 10^4 \text{ дн/см}^2$. Из (7.18) максимальное давление $p_{\max} = 330 \text{ атм}$ и из (7.20) $T_{\max} = 3000^\circ \text{ К}$. Этот пример показывает, что в фазе захлопывания получаются

чрезвычайно высокие давления и температуры, при которых вряд ли выполняются адиабатические условия.

Спектральный состав ультразвуковой люминесценции [22] указывает на то, что люминесцентное излучение соответствует излучению абсолютно черного тела при температуре $\sim 10\,000^\circ\text{K}$; это можно считать экспериментальным подтверждением возникновения высоких температур в фазе захлопывания. Размеры областей и время существования такой высокой температуры чрезвычайно малы. Однако, поскольку количество кавитационных полостей в звуковом поле может быть большим, интегральный эффект существования горячих «точек» с высоким давлением заметен при наблюдении химических реакций в звуковом поле, звуковой люминесценции некоторых жидкостей и ряда других явлений.

Давление на поверхности твердой сферы радиуса R_0 при захлопывании пустой кавитационной полости, возникшей вокруг этой сферы, дается соотношением

$$P_{\max} = \frac{2}{3} p_0 K \frac{R_m^3 - R_0^3}{R_0^3},$$

где K — модуль объемной сжимаемости материала твердой сферы. Отметим, что возникновение высоких давлений и температур при захлопывании кавитационных полостей не является, естественно, специфическим свойством ультразвуковой кавитации, ибо аналогичное химическое воздействие может быть получено и при других методах возбуждения кавитации. Например, кавитация может возбуждаться при пропускании через холодную воду пузырьков водяного пара; конденсация пара в этом случае приводит к захлопыванию пузырьков, а химическое воздействие в значительной мере аналогично воздействию интенсивного ультразвука.

До сих пор мы говорили о звуковой газовой кавитации на одном стабильно существующем зародыше. На самом деле в жидкости до возбуждения звукового поля имеется некоторое распределение воздушных пузырьков по размерам. Возбуждение звукового поля приводит к тому, что это распределение непрерывно изменяется. Этому способствуют помимо быстрых изменений давления и темпе-

ратуры в волне еще и флуктуации давления, температуры и числа молекул газа или пара в пузырьке [23]. Функция распределения сравнительно медленно изменяется также из-за односторонней диффузии газа в колеблющийся пузырек (см. далее) и из-за коагуляции воздушных пузырьков. Односторонняя диффузия, протекающая особенно быстро для пузырьков малого размера, по-видимому, является одним из основных механизмов, определяющих образование зародышей, способных кавитировать.

§ 3. Экспериментальные результаты

Кавитация не является достаточно исследованным явлением и с точки зрения экспериментальной. Результаты исследований различных авторов, как количественные, так иногда даже и качественные, в достаточной мере противоречивы. Еще не совсем ясно, от каких параметров существенно зависят различные характеристики кавитационного процесса. Поэтому приводимые ниже результаты можно рассматривать как иллюстрацию того, что эксперименты с ультразвуковой кавитацией в зависимости от условий и тщательности контроля разных параметров иногда приводят к совершенно различным результатам. Нам представляются полезными как те из них, где контроль различных параметров проводился достаточно тщательно, так и те, где контролю этих параметров не уделялось достаточного внимания, а очистка жидкостей, если она вообще производилась, оставляла желать лучшего. Если первые позволяют выяснить ряд принципиальных особенностей кавитации, то вторые дают полезные качественные сведения для практических применений ультразвуковой кавитации, при которых тщательная очистка среды от растворенных газов и твердых включений или затруднена, или вообще невозможна.

а) Кавитационный порог

Кавитация не возникает и не может возникнуть при малых звуковых давлениях. Если в среде есть много «слабых мест», зародышей, кавитация кипения может

возникнуть при амплитудах звукового давления $p'_0 = p_0 - p_s$, где p_s — давление насыщенных паров. Если же зародышей мало, то кавитация может не возникнуть и при существенно больших амплитудах звукового давления. В этом смысле возникновение кавитации — случайный процесс, и его характеристикой, вообще говоря, может быть вероятность возникновения кавитации в определенный промежуток времени озвучивания среды при заданном звуковом давлении. Под порогом кавитации можно понимать те амплитуды звукового давления, при которых возникновение кавитации в течение этого промежутка времени произойдет с вероятностью, равной единице.

Естественно, что это определение порога, если не указано время наблюдения, весьма неопределенно. В ряде работ, где экспериментально определялся порог кавитации, либо не указано время наблюдения, либо у разных авторов оно разное (от 10 сек до нескольких минут). Это одна из причин большого разброса экспериментальных результатов, но весьма возможно, что не основная.

Существует несколько методов наблюдения кавитационных порогов:

1) По кавитационным шумам, так как при захлопывании кавитационных полостей возникает шум в довольно широком диапазоне частот (см. далее).

2) Возникновение в среде «истинной кавитации» сопровождается различного рода вторичными физико-химическими эффектами (эрозией металлов, эмульгированием, окислительными реакциями, деполимеризацией, люминесценцией и др.), которые могут служить методом определения порога кавитации.

3) При возникновении кавитации звуковые сигналы, проходящие через среду, уменьшаются по амплитуде. Зависимость амплитуды принимаемого сигнала от напряжения на источнике звука становится нелинейной [24]*). Кроме того, принимаемый сигнал флуктуирует по амплитуде и фазе. Отметим, что для наблюдения кавитации по

*) Кавитация не является единственной причиной такого рода нелинейности. Это явление может быть также связано с особенностями поглощения волн конечной амплитуды (см. § 4 гл. 3 и § 3 гл. 4).

этому признаку может быть использован как звуковой сигнал, вызывающий кавитацию, так и посторонний источник и приемник звука.

4) Визуальные методы, применимые только для развитой кавитации, ибо на ультразвуковых частотах размеры полостей чрезвычайно малы и мало время их жизни. Кавитация, если она достаточно развита, наблюдается в виде помутнения среды, так как полости имеют малые размеры и малое время жизни. Для наблюдения кавитации могут оказаться полезными методы рассеяния света на кавитационных пузырьках.

5) Поскольку при развитой кавитации образуется значительное количество полостей, заполненных при кавитации кипящим паром жидкости, объем жидкости увеличивается, что дает возможность определить порог кавитации [25].

При наблюдении порога кавитации мешающим фактором является дегазация (если, разумеется, жидкость не дегазирована), протекающая, в отличие от «истинной кавитации», спокойно. Особенно сильно влияние дегазации сказывается на третьем и четвертом из этих методов.

Порог кавитации зависит от частоты звука, гидростатического давления в жидкости, от длительности воздействия ультразвука, вязкости жидкости, температуры жидкости и от ряда других параметров. В значительной мере порог кавитации зависит от степени очистки жидкости (отсутствия нерастворимых механических примесей), предварительной обработки жидкости (дистилляции, обжима высоким давлением), а также от условий облучения жидкости звуком. При повторном включении звука жидкость, как правило, начинает кавитировать при более низких звуковых давлениях. Однако доминирующим фактором, от которого зависит как величина порога, так и характер кавитации, является количество растворенного воздуха. По [26] эта зависимость проявляется особенно сильно при содержании воздуха, большем 1% от насыщения; при меньшем содержании воздуха в жидкости кавитационный порог практически не зависит от количества растворенного газа.

В экспериментальных работах по кавитации, как правило, не проводился одновременный контроль всех этих

факторов, что в значительной мере снижает их ценность и затрудняет сравнение данных различных экспериментов. В большинстве работ определялся кавитационный порог воды. Сведения о кавитационных порогах других жидкостей очень немногочисленны.

На рис. 62 приведена зависимость порога кавитации в воде при комнатных температурах от частоты [27]. Кривая 1 относится к дегазированной воде, кривая 2 — к воде, насыщенной воздухом. Порог кавитации определялся по шуму кавитации. Порог низок для частот до 10^5 Гц и резко возрастает для более высоких частот. Это согласуется с приведенными выше результатами теории газовой кавитации [16]. Приведенную зависимость следует рассматривать только как качественные сведения о пороге, хотя бы из-за различия условий эксперимента на разных частотах [1].

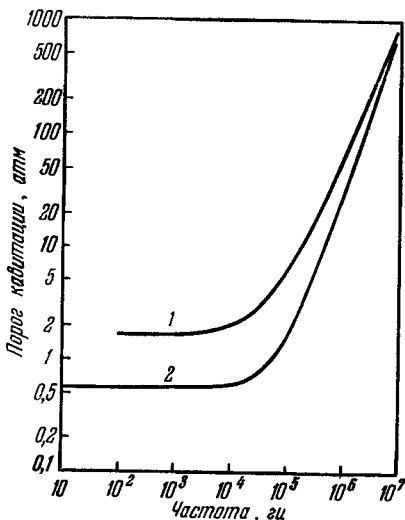


Рис. 62. Зависимость порога кавитации от частоты для дегазированной воды (1) и воды, насыщенной воздухом (2) [27].

Зависимость порога кавитации в воде от гидростатического давления показана на рис. 63 для разных температур*). Эти данные получены на частоте 60 кГц в фокусе сферического отражателя. Близкие по порядку величины получены в [28], где наблюдалась кавитация в сырой (необезгаженной) воде в бегущей волне на частоте 1 МГц при атмосферном давлении и затем результаты были пересчитаны на обезгаженную воду. В отличие от этих работ в [26] исследована зависимость порога от гидростатического давления при разном содержании

*) Данные Блейка (ссылка по [28]).

растворенного воздуха. По [26] в насыщенной воздухом воде порог кавитации близок к гидростатическому давлению; во всяком случае при этих давлениях начинается интенсивная дегазация. В тщательно очищенной воде с небольшим содержанием растворенного воздуха (парциальное давление воздуха 2—30 мм рт. ст.) кавитационный порог не зависит от гидростатического давления [26]. Зависимость порога кавитации от количества растворенного в воде воздуха на 25 кгц [29] показана на рис. 64.

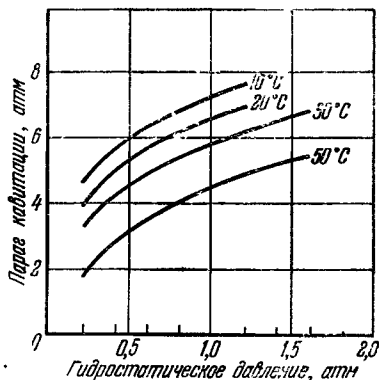


Рис. 63. Зависимость порога кавитации в воде от гидростатического давления при 60 кгц и разных температурах.

Из всех этих данных следует, что на частотах до 10^5 гц кавитационный порог в воде составляет несколько атмосфер. Такой низкий порог кавитации наблюдался тогда, когда кавитация происходила в больших объемах жидкости вблизи стенок или на поверхности источника звука, или, наконец, тогда, когда условия эксперимента таковы, что невозможно было избежать механических примесей и растворения некоторого количества газа в жидкости. Экспериментальная статическая прочность воды на разрыв (см. табл. 6) — 270 атм [30], что значительно выше приведенных здесь экспериментальных порогов кавитации. В настоящее время, однако, на ультразвуковых частотах получены пороги кавитации, по порядку величины близкие к статической экспериментальной прочности: 120 атм [26], а для тщательно дегазированной воды даже более высокие — 380 атм [31]. Это связано, во-первых, с тем, что в этих экспериментах удалось избежать влияния стенок: кавитация как в [26], так и в [31] наблюдалась при фокусировке, в малом объеме жидкости вдали от стенок экспериментального сосуда и от поверхности источника звука. Во-вторых, несмотря на интенсив-

ный массообмен в фокусе из-за сильных акустических течений, вероятность существования зародыша в малом объеме фокусного пятна мала. Это последнее обстоятельство могло сыграть значительную роль при получении столь высокого порога кавитации.

На рис. 65 показана зависимость порога кавитации в воде и бензине, полученная при температуре 22°C на частоте $26,3\text{ кгц}$, от парциального давления воздуха (при насыщении 760 мм рт. ст.). Из этого рисунка видно, что порог кавитации существенно зависит от количества растворенного газа при концентрациях, больших 1% от насыщения; при меньших концентрациях такой зависимости нет. Кавитационный порог в воде несколько уменьшается с ростом температуры (см. рис. 63).

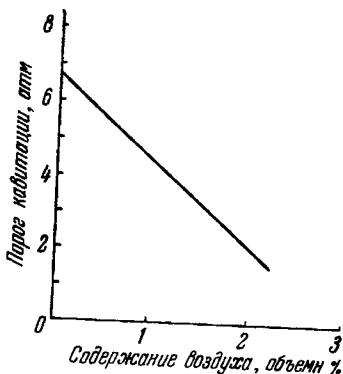


Рис. 64. Зависимость порога кавитации в воде на 25 кгц от объемной концентрации растворенного воздуха.

Порог кавитации зависит также от длительности воздействия звука на среду [27, 32, 24]. Применяя импульсный режим с достаточно короткими импульсами, можно

получить безкавитационный режим при высоких уровнях звуковой энергии в импульсе даже в не особенно тщательно дегазированной воде. На рис. 66 показана зависимость порога от длительности воздействия звука в дегазированной и сырой воде при температуре $16\text{—}18^{\circ}\text{C}$ [27].

Временная зависимость порога кавитации определяется различного рода случайными явлениями. В некоторой мере она может быть объяснена односторонней диффузией газа в колеблющийся воздушный пузырек-зародыш, размеры которого значительно меньше резонансного (согласно теории газовой кавитации эти пузырьки не кавитируют при амплитудах звукового давления, меньших давления, создаваемого поверхностным натяжением). В результате односторонней диффузии такой пузырек растет и превращается в зародыш, способный кавитировать.

Возникновение в среде газовых пузырьков приводит к изменению фазовой скорости распространения звука [33, 34]. При этом не только величина, но и знак изменения скорости при превращении системы в двухфазную зависит от соотношения между частотой звука и резонансной частотой пузырьков. Если частота звука меньше, чем

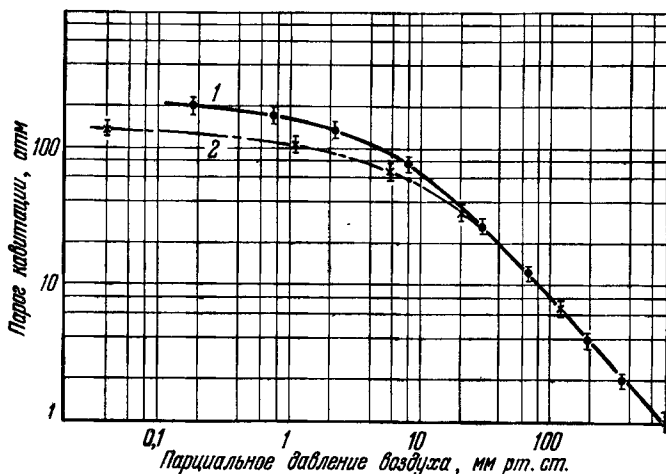


Рис. 65. Порог кавитации при атмосферном давлении и 22°C в зависимости от степени насыщения жидкости воздухом. 1 — вода; 2 — бензин [26].

резонансная частота пузырьков (размеры пузырьков в среде меньше, чем резонансные для данной частоты звука), то фазовая скорость звука в двухфазной системе меньше фазовой скорости в однофазной. Наоборот, если частота звука больше, чем резонансная частота пузырьков (среда заполнена пузырьками, размеры которых больше, чем резонансные размеры для данной частоты), то скорость звука больше, чем в однофазной системе. Эти результаты относятся к распространению звука в среде с искусственно вводимыми воздушными пузырьками. Переноса эти выводы на кавитацию, где при «истинной кавитации» возникают пузырьки, размеры которых меньше резонансного, следует предполагать, что при «истинной кавитации» фазовая

скорость звука должна уменьшаться. При развитой дегазации, обязательно сопровождающей кавитацию в недегазированных жидкостях, в среде возможно появление пузырьков, размер которых больше резонансного, что приводит к увеличению скорости и, естественно, маскирует эффект кавитационного уменьшения скорости [35].

б) Шумы кавитации

Захлопывание кавитационных пузырьков приводит к значительному локальному повышению давления и образованию ударной волны. Поэтому кавитация сопровождается шумом, который имеет довольно широкий спектр. Если бы возникновение и захлопывание кавитационного пузырька происходило каждый период, то в спектрах кавитационных шумов были бы только частоты nf_0 ($n = 1, 2, 3, \dots$), где f_0 — частота звука, и спектр был бы чисто линейчатым. Экспериментально, однако, наблюдаются спектры, несколько отличающиеся от такого спектра «идеальной кавитации».

На рис. 67 показаны спектры развитой кавитации на разных частотах [27]. В спектрах помимо гармоник основной частоты есть еще и серия $nf_0/2$, начинающаяся с унтертона $f_0/2$. Иногда помимо этой серии на низких частотах наблюдается серия $nf_0/4$, на высоких частотах — серия $nf_0/3$ и иногда $nf_0/6$ [36]. На рис. 67 для частоты 365 кГц видны, например, спектральные составляющие частот $f_0/3$; $\frac{2}{3} f_0$; $\frac{4}{3} f_0$ и т. д.

Далее, в отличие от чисто линейчатого спектра «идеальной кавитации», экспериментальный линейчатый спектр наблюдается на фоне белого шума, уровень которого вблизи частоты звука на 20—40 дБ ниже уровня

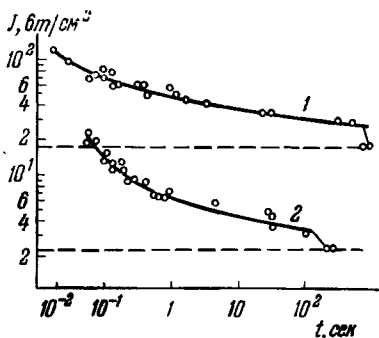


Рис. 66. Зависимость порога кавитации (в $\text{вт}/\text{см}^2$) от длительности воздействия звука. 1 — дегазированная вода, 500 кГц; 2 — сырая вода, 365 кГц.

линейчатого спектра. Об абсолютном уровне кавитационного шума качественно можно судить хотя бы по тому, что при развитой кавитации на частотах порядка нескольких сотен килогерц и интенсивности звука порядка десятков $\text{вт}/\text{см}^2$ четко слышно характерное шипение. Появление унтертонов в кавитационных спектрах часто объясняется

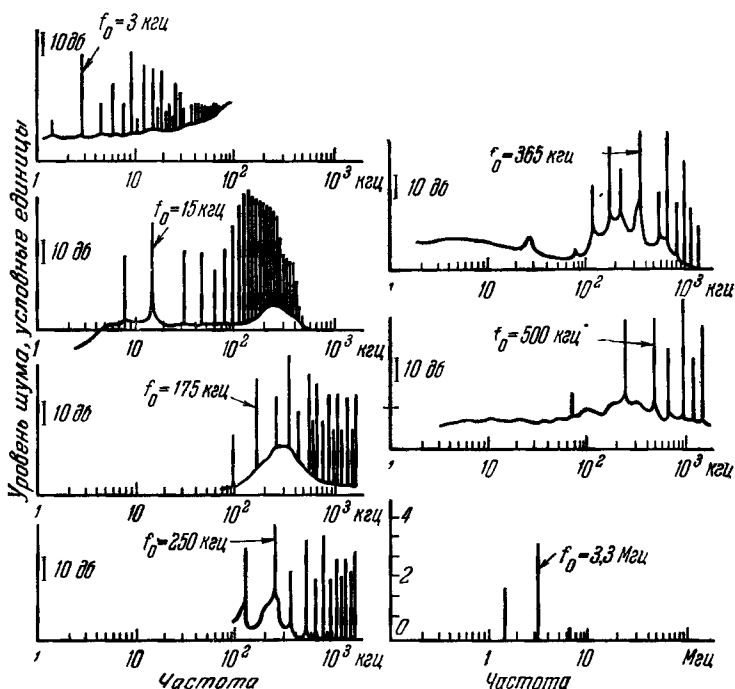


Рис. 67. Акустические спектры кавитационных шумов в воде; f_0 — частота звука, отмеченная стрелкой.

особенностями колебания пузырьков в звуковом поле [27]. Не отрицая такой возможности, следует указать на, пожалуй, более вероятную причину появления унтертонов: поскольку возникновение полости — случайный процесс, оно может произойти или не произойти при данном цикле колебаний в данной точке пространства. Существуют места (разные в разные моменты времени), где образование

полости может и не произойти. Пропуск одного цикла (в разных точках пространства в разные времена) уже может привести к появлению периода $2T$ и, следовательно, первого унтертона $f_0/2$ в том случае, когда наблюдается интегральный шум. На высоких частотах, когда вероятность разрыва жидкости уменьшается, такие пропуски могут даже иметь период $3T$, что приводит к появлению в спектре компоненты $f_0/3$. Уровни спектральных составляющих указывают на то, что «пропуски» разрыва не так уж редки. Непрерывный белый шум фона может определяться тем, что возникновение и захлопывание кавитационных полостей происходит не точно от периода к периоду в одной фазе волны. Это приводит к конечной ширине «линий спектра», а при нелинейном взаимодействии компонент спектра — к появлению белого шума (см. гл. 2, § 5), нарастающего в области высоких частот.

в) Исследование динамики кавитационного процесса

Поскольку при «истинной кавитации» и относительно небольших уровнях звука пузырьки, во всяком случае как правило, не достигают размеров резонансных, то даже при кавитации в ближнем ультразвуке (20—40 кгц) максимальные размеры воздушных пузырьков в воде не превышают десятых долей миллиметра (см. рис. 60, стр. 262). При кавитации на частотах мегагерцевого диапазона максимальные размеры кавитирующих пузырьков еще меньше, $\sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ см. Имея в виду, что длительность единичного кавитационного акта порядка периода волны, а также то, что наряду с «истинной» кавитацией в среде может происходить дегазация и ряд других процессов, можно сказать, что исследование динамики кавитационного процесса представляет довольно большие экспериментальные трудности. В настоящее время, насколько нам известно, не существует экспериментальных методов, позволяющих наблюдать кавитацию единичного зародыша, однако наблюдение всей кавитационной области позволяет получить интересные сведения о динамике процесса.

Несмотря на то, что кавитация, строго говоря, не является периодическим процессом, период которого

совпадает с периодом волны, большинство кавитирующих пузырьков все же успевает захлопнуться в течение одного периода и для большинства пузырьков этот процесс повторяется каждый период. Для развитой кавитации это позволяет использовать метод стробоскопического наблюдения. Стробоскопическое (с частотой звука) освещение

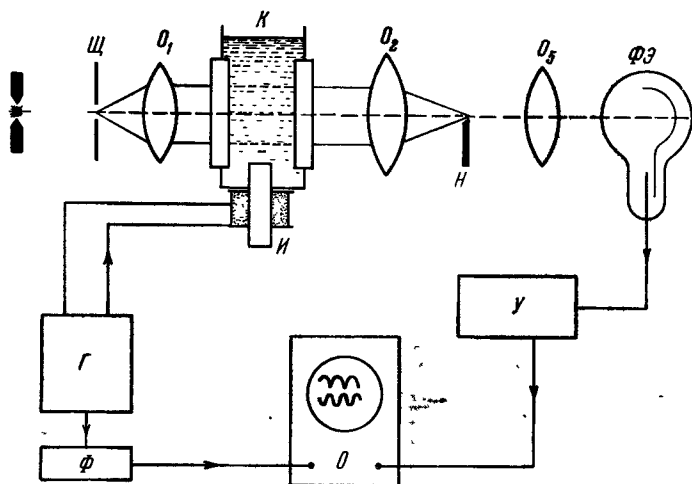


Рис. 68. Схема установки для одновременного наблюдения фазы кавитации и фазы звукового давления.

кавитационной области дает возможность определить ее размеры. Несколько расстраивая частоту стробоскопирования (или меняя фазу вспышек света), можно «замедлить» наблюдаемый процесс и проследить отдельные фазы развития кавитации. На частотах звукового диапазона такие наблюдения проводились в [37].

Полезные сведения о динамике кавитационного процесса можно получить при одновременном, перекрестном наблюдении различных характеристик кавитации. В [37] одновременно наблюдалась оптическая неоднородность жидкости, вызываемая кавитацией, и переменное давление, создаваемое источником звука. На рис. 68 показана схема этой установки. Оптическая неоднородность наблюдалась методом темного поля. Дуговой источник

света освещал щель $Щ$, находящуюся в фокусе линзы O_1 . Параллельный пучок света, проходя кювету с жидкостью K , собирался линзой O_2 , в фокусе которой помещался нож H . Линза O_3 давала изображение кавитационной области вблизи поверхности магнитострикционного излучателя I на приемном фотоэлементе $ФЭ$. При оптически однородной среде освещенность фотоэлемента мала, возникновение кавитации вызывало увеличение освещенности. Магнитострикционный излучатель I возбуждался генератором G . Сигнал фотоэлемента после усиления подавался на один из входов двухлучевого осциллографа O . На другой вход подавался сигнал от генератора через фазовращатель $Ф$ так, что этот сигнал по фазе соответствовал звуковому давлению у поверхности излучателя I . Таким образом, на экране двухлучевого осциллографа одновременно наблюдались как оптическая неоднородность жидкости, так и звуковое давление.

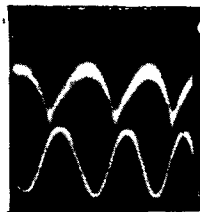


Рис. 69. Осциллограмма, полученная при одновременном наблюдении числа пузырьков и фазы звукового давления.

На рис. 69 показана полученная при этом картина. Верхняя осциллограмма относится к сигналу от фотоэлемента, нижняя — к звуковому давлению. Имея в виду, что наибольшая освещенность фотоэлемента имеет место при наибольших неоднородностях, можно считать, что максимумы верхней кривой соответствуют максимальным размерам кавитационных пузырьков. Как следует из рис. 69, максимальное уменьшение размеров кавитационных полостей происходит в фазе уже положительного давления; это соответствует теории кавитации единичной полости.

Перекрестное наблюдение оптической неоднородности среды, вызываемой кавитацией, и давления, создаваемого кавитационными пузырьками, показывает, что в момент минимальной освещенности фотоэлемента, т. е. при захлопывании кавитационных пузырьков, наблюдается острый пик давления из-за возникающей ударной волны [37].

Перекрестными методами, в частности, было показано, что вспышка люминесценции происходит также в момент захлопывания кавитационных полостей [38].

Эти методы, хотя и дают усредненные по кавитационному ансамблю результаты, пока что являются единственными, позволяющими получить некоторые сведения о динамике кавитации.

г) Химическое действие кавитации и звуколюминесценция

Звуколюминесценция — это слабая люминесценция (в обычных условиях световые потоки порядка 10^{-12} лм), возникающая при распространении интенсивного звука в жидкостях (чаще всего звуколюминесценция наблюдалась в воде и глицерине). Иногда различают звуко- и хемилюминесценцию. Последняя происходит также при кавитации, однако в результате фотохимических реакций.

Звуко- и хемилюминесценция наблюдаются далеко не во всех жидкостях; например, она не наблюдалась в четыреххлористом углероде, эфирах, ацетоне, бензине, метилом спирте. На интенсивность люминесценции оказывает сильное влияние газ, растворенный в жидкости [46]. Для возникновения люминесценции присутствие в жидкости растворенного кислорода не является необходимым. Люминесценция наблюдалась в жидкостях, насыщенных, например, азотом, аргоном или неоном. В жидкостях, насыщенных водородом или углекислым газом, люминесценция не наблюдалась. Более подробно химико-физический аспект звуковой люминесценции освещен в обзорной работе [39]. Звуколюминесценция исчезает при высоких температурах (для воды — при температурах выше $\sim 80^\circ$). Свечение звуколюминесценции*) имеет, как правило, непрерывный спектр в диапазоне от ультрафиолетовой области до зеленой с максимумом в ультрафиолетовой части. Спектральный состав свечения в некоторой мере зависит от газа и примесей, растворенных в жидкости.

*) Измерение спектральной плотности звуколюминесценции ввиду чрезвычайно слабого свечения представляет сложную экспериментальную задачу.

Имеется несколько гипотез звуколюминесценции. В работах [40, 41] предполагалось, что звуколюминесценция вызывается электрическим разрядом, происходящим в результате того, что при кавитации ионы различного знака оказываются на разных сторонах образовавшейся полости и, таким образом, создают сильное электрическое поле. При разумных предположениях величина этого поля $\sim 10^3$ в/см. Согласно этой теории, однако, люминесценция должна была бы возникать при очень высоких интенсивностях звука в фазе роста кавитационной полости.

Другая теория [16, 42] основывается на рассмотренной выше кинетике захлопывающейся кавитационной полости. Поскольку при захлопывании пузырька происходит сильное нагревание газа внутри пузырька, газ в результате нагрева начинает излучать свет в широком диапазоне частот. При $T = 9000^\circ \text{K}$ максимум излучения абсолютно черного тела должен приходиться на $\lambda \simeq 3220 \text{ \AA}$, чем может быть объяснено наблюдающееся голубое (с максимумом в ультрафиолетовой области спектра) свечение звуковой люминесценции. Помимо этого в [36, 38] было экспериментально показано, что вспышка люминесценции происходит в фазе захлопывания кавитационного пузырька. Это также подтверждает термический характер звуковой люминесценции. Есть, однако, экспериментальные данные, которые не согласуются с термической гипотезой звуковой люминесценции (см. обзор [2]).

д) Дегазация

Наряду с «истинной кавитацией» в недегазированной воде под действием интенсивного ультразвука происходит дегазация. Основными причинами дегазации, по-видимому, являются коагуляция воздушных пузырьков и в меньшей мере односторонняя диффузия газа в колеблющийся пузырек.

Коагуляция воздушных пузырьков происходит в результате того, что в звуковом поле на пузырьки действуют различные постоянные силы: бьеркнесовы силы, радиационные силы. Как было показано в [43], бьеркнесовы силы, возникающие между двумя колеблющимися

сферами, играют существенную роль в коагуляции пузырьков. Они пропорциональны объемным скоростям колеблющихся пузырьков и поэтому велики для интенсивно колеблющихся пузырьков больших размеров.

Механизм односторонней диффузии газа из жидкости в колеблющийся воздушный пузырек довольно прост: при сжатии происходит диффузия газа из пузырька в окружающую жидкость, при растяжении направление диффузии обратное. Поскольку в том и другом случае диффузия происходит через разную поверхность, большую в случае диффузии в пузырек, объем воздуха, диффундирующего в пузырек, больше объема, выходящего из пузырька, что приводит к росту пузырька. Результат приближенного решения нелинейного уравнения диффузии [15] для перезонасных пузырьков показывает, что закон роста радиуса пузырька со временем имеет вид:

$$R^2(t) = R_0^2 + \frac{4}{3} \left[\frac{D\beta_\infty}{\rho_r} \left(\frac{p'_0}{p_0} \right)^2 \right] t,$$

где R_0 — начальный радиус пузырька, D — коэффициент диффузии, β_∞ — концентрация газа в жидкости на далеком расстоянии от пузырька, ρ_r — плотность газа, p'_0 — амплитуда звукового давления, p_0 — гидростатическое давление в жидкости.

Характеристикой процесса односторонней диффузии является время τ , за которое радиус пузырька удваивается:

$$\tau = \frac{9}{4} \frac{R_0 \rho_r}{\beta_\infty D} \left(\frac{p_0}{p'_0} \right)^2.$$

Из этого соотношения, в частности, следует важный вывод о том, что пузырьки малого радиуса растут довольно быстро, в то время как удвоение радиуса **больших пузырьков требует** значительного времени. Например в воде, насыщенной воздухом, удвоение радиусов относительно больших пузырьков с $R_0 = 10^{-3} \div 10^{-1}$ см происходит за время от нескольких минут до нескольких часов. Таким образом, односторонняя диффузия приводит к тому, что в звуковом поле начальное распределение пузырьков по размерам быстро меняется в области малых размеров и остается почти стабильным в

области больших размеров, причем функция распределения меняется так, что увеличивается число пузырьков больших размеров. Это, естественно, понижает прочность жидкостей на разрыв и частично может объяснить временную зависимость порога кавитации, о чем говорилось выше. Весьма вероятно, что односторонняя диффузия является «поставщиком» зародышей, способных кавитировать.

Проблема прочности жидкостей на разрыв имеет много общего с проблемой прочности твердых тел. В последнем случае для объяснения ряда явлений и особенно пластичности реальных твердых тел развивается теория дефектов и теория дислокаций, которая имеет большое количество убедительных экспериментальных подтверждений. Значительно хуже обстоит дело с теорией прочности жидкостей. Экспериментальные результаты указывают на то, что прочность жидкостей на разрыв для многих жидкостей на порядок меньше теоретической. Для объяснения этого вводится гипотеза зародышей, которая пока что не нашла еще достаточно убедительного экспериментального доказательства. В настоящее время остается открытым вопрос о причинах стабильного существования зародышей. Это одна из задач, которая свидетельствует о несовершенстве наших представлений о жидкости. Отметим в этой связи, что в случае аморфных твердых тел (застеклованных жидкостей) теоретическая прочность на разрыв существенно ближе к экспериментальной, чем для жидкостей [5]. Проблемы прочности жидкостей возникают при объяснении звуковой кавитации, которая ни в теоретическом, ни в экспериментальном плане не может считаться завершенной областью нелинейной акустики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рой Н. А., Возникновение и протекание ультразвуковой кавитации. Обзор. Акуст. ж. 3, 3 (1957).
2. Сиротюк М. Г., Ультразвуковая кавитация. Обзор. Акуст. ж. 8, 255 (1962).
3. Temperley H. N. V., The behaviour of water under hydrostatic tension. III. Proc. Phys. Soc. (London) 59, 119 (1947).

4. Döring W., Die Überhitzungsgrenze und Zerreifestigkeit von Flüssigkeiten. Z. Phys. Chem. B 36, 371 (1937).
5. Fischer J. C., The fracture of liquids. J. Appl. Phys. 19, 1062 (1948).
6. Tolman R. C., The effect of droplet size on surface tension. J. Chem. Phys. 17, 333 (1949).
7. Wakeshima H., On the theory of the fracture of liquids. J. Phys. Soc. (Japan) 16, 6 (1961).
8. Корнфельд М., Упругость и прочность жидкостей. Гостехиздат, 1951.
9. Fox F. E., Herzfeld K. F., Gas bubbles with organic skin as cavitation nuclei. J. Acoust. Soc. Am. 26, 984 (1954).
10. Левич В. Г., Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
11. Sette D., Sonic cavitation and ionizing radiation. Proc. III Intern. Congress on Acoustics, Stuttgart, 1959, Vol. I, p. 330.
12. Lieberman D., Radiation-induced cavitation. Phys. Fluids 2, 466 (1959).
13. Sette D., Wanderlingh F., Nucleating by cosmic rays in ultrasonic cavitation. Phys. Rev. 125, 409 (1962).
14. Hahn B., Peacock R. N., Ultrasonic cavitation induced by neutrons. Nuovo Cimento 28, № 2, 334 (1963).
15. Hsieh Din Yu, Plesset M. S., Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles. J. Acoust. Soc. Am. 33, 206 (1961).
16. Nolting B. E., Neppiras E. A., Cavitation produced by ultrasonics. Proc. Phys. Soc. (London) B 63, 674 (1950); B 64, 1032 (1951).
17. Minnaert M., On the musical air-bubbles and the sounds of running water. Phil. Mag. 16, 235 (1933).
18. Smith F. D., On the destructive mechanical effects of the gas bubbles liberated by the passage of intense sound through a liquid. Phil. Mag. 19, 1061 (1935).
19. Rayleigh, On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Phil. Mag. 34, 94 (1915).
20. Mellen R. H., An experimental study of the collapse of a spherical cavity in water. J. Acoust. Soc. Am. 28, 447 (1956).
21. Hunter C., On the collapse of an empty cavity in water. J. Fluid Mech. 8, 241 (1960).
22. Srinivasan D., Holroyd L. V., The sonoluminescence of water. (Abstract.) Phys. Rev. 99, 633 (1955).
23. Зельдович Я. Б., К теории образования новой фазы. Кавитация. ЖЭТФ 12, 525 (1942).
24. Lange Th., Methoden zur untersuchung der schwingungskavitation in flüssigkeiten mit ultraschall. Akust. Beih. 2, 75 (1952).
25. Михайлов И. Г., Шутлов В. А., О простом способе обнаружения кавитации в жидкостях. Акуст. ж. 5, 376 (1959).
26. Galloway W. J., An experimental study of acoustically induced cavitation. J. Acoust. Soc. Am. 26, 849 (1954).
27. Esche R., Untersuchung der schwingungskavitation in flüssigkeiten. Akust. Beih. 4, 208 (1952).
28. Connoly W., Fox F. E., Ultrasonic cavitation thresholds in water. J. Acoust. Soc. Am. 26, 843 (1954).

29. Strasberg M., Onset of ultrasonic cavitation in tap water. *J. Acoust. Soc. Am.* 31, 163 (1959).
30. Briggs L. J., Limiting negative pressure of water. *J. Appl. Phys.* 24, 721 (1950).
31. Сиротюк М. Г., Экспериментальное исследование процесса развития ультразвуковой кавитации на частоте 500 кГц. *Акуст. ж.* 8, 216 (1962).
32. Briggs H. B., Johnson J. B., Mason W. P., Properties of liquids at high sound pressure. *J. Acoust. Soc. Am.* 19, 664 (1947).
33. Carstenstein E. L., Foldy L. L., Propagation of sound through a liquid containing bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 19, 481 (1947).
34. Laird D. T., Kendig P. M., Attenuation of sound in water containing air bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 24, 29 (1952).
35. Зарембо Л. К., Шкловская-Корди В. В., К вопросу о скорости распространения ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкости. *Акуст. ж.* 5, 47 (1960).
36. Katsuo Negishi, Experimental study on sonoluminescence and ultrasonic cavitation. *J. Phys. Soc. (Japan)* 16, 1450 (1961).
37. Möller H. G., Schoch A., Versuche über die entstehung der druckstösse bei der kavitation. *Akust. Z.* 6, 165 (1941).
38. Meyer E., Kutruff H., Zur phasenbeziehung zwischen sonolumineszenz und kavitationsvorgang bei periodischer angerung. *Z. angew. Phys.* 11, 325 (1959).
39. Эльпинер И. Е., Ультразвуковая люминесценция. *Обзор. Акуст. ж.* 6, 3 (1960).
40. Frenkel J., On electrical phenomena associated with cavitation due to ultrasonic vibrations in liquids. *Acta physicochimica USSR* 12, 317 (1940).
41. Bresler S., On the mechanism of the oxidation effect of ultrasonic vibrations. *Acta physicochimica USSR* 12, 323 (1940).
42. Griffing V., Sette D., Luminescence produced as a result of intense ultrasonic waves. *J. Chem. Phys.* 23, 503 (1955).
43. Казанцев В. Ф., Движение газовых пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле. *Докл. АН СССР* 129, 64 (1959).
44. Сиротюк М. Г., О поведении кавитационных пузырьков при больших интенсивностях ультразвука. *Акуст. ж.* 7, 499 (1961).
45. Воротникова М. И., Солоухин Р. И., Расчет пульсаций газовых пузырьков в несжимаемой жидкости под действием периодически изменяющегося давления. *Акуст. ж.* 10, 34 (1964).
46. Левшин В. Л., Ржевкин С. Н., К вопросу о механизме свечения жидкостей при воздействии ультразвука. *Докл. АН СССР* 16, 407 (1937).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 1. Общие замечания

Уравнения теории упругости, как и уравнения гидродинамики, нелинейны, поэтому распространение упругих волн сопровождается нелинейным искажением формы профиля волны, упругие волны в твердых телах взаимодействуют. Нелинейные свойства твердых тел были известны давно. Например, тепловое расширение твердых тел, так же как и отклонение теплоемкости твердого тела от закона Дюлонга — Пти при высоких температурах, объясняется тем, что силы взаимодействия между ионами, атомами или молекулами твердого тела нелинейно зависят от смещения иона, атома или молекулы из положения равновесия. Эта нелинейность приводит к тому, что тепловые колебания атомов или ионов в кристаллической решетке ангармоничны. Поскольку тепловые колебания могут быть представлены как набор дебаевских упругих волн, ангармоничность приводит к взаимодействию дебаевских волн или тепловых фононов решетки. Возможность фонон-фононного взаимодействия необходимо было привлечь также для объяснения теплопроводности твердого тела, установления теплового равновесия в твердых телах и т. д.; взаимодействием звуковых волн с тепловыми фононами решетки частично объясняется поглощение звука. Очевидно, что эта нелинейность на молекулярном уровне должна как-то проявиться в нелинейной упругости для макроскопических процессов.

Макроскопические исследования твердых тел показывают, что их упругие свойства, вообще говоря, не следуют закону Гука. При некоторых механических напряжениях начинаются отклонения от пропорциональности между

деформацией и напряжением (предел пропорциональности). Дальнейшее повышение напряжения приводит к пределу упругости, выше которого под действием нагрузки твердое тело начинает течь. Эти характеристики твердых тел зависят, особенно в случае монокристаллов, от существования различного рода микродефектов твердого тела. Исследование упругих свойств твердых тел обычно проводится на разрывных машинах или прессах, где точность измерения отклонения от линейности достаточно высока. Поэтому отклонение от пропорциональности, как правило, начинает проявляться при сравнительно больших напряжениях. Ультразвуковые методы, как это будет видно в дальнейшем, позволяют определить отклонения от линейного закона Гука при амплитудах переменного напряжения порядка 1 кг/см^2 .

В твердом теле возможны несколько причин нелинейности обобщенного закона Гука:

1. Одна из них присуща идеальному кристаллу, лишенному каких-либо дефектов, и обусловлена только тем, что межмолекулярные силы нелинейным образом зависят от смещения молекул. Эту нелинейность иногда называют молекулярной или решеточной нелинейностью.

2. Другая причина — неидеальность структуры твердых тел: существование различного рода дефектов (дислокаций) в кристаллах, внутренних напряжений различных масштабов в поликристаллических телах и кристаллах.

3. За последнее время начато также исследование еще одного типа упругой нелинейности — электронной нелинейности, имеющей место в пьезоэлектрических полупроводниках.

Исследование нелинейных свойств сейчас еще не находится в том состоянии, когда можно сказать, что указанными причинами ограничиваются нелинейные свойства твердых тел со сложными физическими свойствами.

Наблюдаемая экспериментально нелинейность твердых тел, вообще говоря, может быть «смесью» различных типов нелинейности. Однако, как будет видно в дальнейшем, при определенных экспериментальных условиях преобладающим может быть тот или иной тип.

Нелинейная упругость твердых тел проявляется еще и в том, что скорость распространения звука в твердых

телах зависит от предварительного статического напряжения; этот эффект по аналогии с фотоупругостью часто в литературе называют звукоупругим. Упругие модули третьего порядка *) до недавнего времени определялись только по зависимости скорости звука от статического напряжения. В настоящее время имеется большой экспериментальный материал по зависимости линейных упругих модулей от статического напряжения, однако при экспериментах только с всесторонним давлением этих данных недостаточно для отдельного определения нелинейных модулей даже изотропного твердого тела. Представлялось целесообразным все же привести здесь эти данные, поскольку они в некоторой мере позволяют судить о нелинейных свойствах разных материалов.

Нелинейная упругость твердых тел помимо искажения формы профиля волны приводит еще к тому, что акустические волны в твердых телах взаимодействуют. Распространение в твердых телах помимо продольных волн еще и волн сдвига приводит к тому, что здесь возможностей взаимодействия волн по сравнению с жидкостями и газами существенно больше. В жидкостях и газах без дисперсии, как это было рассмотрено в гл. 2 и гл. 3, взаимодействуют волны только с коллинеарными волновыми векторами; при косых пересечениях звуковых пучков комбинационного рассеяния звука на звуке нет, т. е. вне области взаимодействия нет звуковых волн комбинационных частот. Иначе обстоит дело в твердых телах.

*) В дальнейшем мы пользуемся уже сложившейся терминологией, согласно которой коэффициенты перед квадратичными членами в разложении внутренней энергии по инвариантам тензора деформации называются модулями второго порядка (иногда линейными модулями), а перед кубическими членами — модулями третьего порядка. Последние в обобщенном законе Гука определяют величину квадратичных членов и, следовательно, величину нелинейных эффектов во втором приближении.

Весьма интенсивное экспериментальное исследование упругих модулей третьего порядка в последние годы отчасти связано с одним практическим применением звукоупругого эффекта: возможностью определить величину напряжения в той или иной конструкции по различию скоростей сдвиговых волн, поляризация которых направлена в одном случае вдоль одноосного напряжения, в другом — перпендикулярно, а волновые векторы этих двух волн направлены перпендикулярно к направлению напряжения.

Как будет видно в дальнейшем, в твердых телах взаимодействие волн с неколлинеарными волновыми векторами при некоторых условиях становится возможным, и в этом случае вне области взаимодействия (при ограниченных звуковых пучках) возникает рассеянная волна комбинационной частоты. В этом смысле в твердых телах, в отличие от газов и жидкостей, комбинационное рассеяние звука на звуке при некоторых условиях возможно.

Интерес к нелинейным взаимодействиям упругих волн в твердых телах, наблюдающийся в настоящее время, связан еще и с тем, что в последние годы интенсивно идет освоение диапазона ультразвуковых упругих волн — гиперзвука (частоты выше 10^9 *гц*). В этой области нелинейные взаимодействия происходят значительно более эффективно, если удастся как-либо снизить затухание, и может быть можно рассчитывать на то, что именно в этой области удастся создать различные параметрические устройства, эффективно использующие различные акустические нелинейные эффекты. Вопрос о нелинейных эффектах в этой области интересен еще и потому, что здесь намечается очень перспективный метод генерации мощного гиперзвука с помощью оптических квантовых генераторов.

§ 2. Основы нелинейной теории упругости

В этом параграфе будут рассмотрены основы теории для изотропного твердого тела без потерь, а также очень кратко некоторые вопросы распространения волн конечной амплитуды в кристаллах. Заметим, что в отличие от рассмотрения газов и жидкостей, когда преимущественно выбирают эйлеровы координаты, при рассмотрении твердых тел, как правило, используют лагранжеву систему координат.

а) Деформации

Рассмотрим какую-либо точку M твердого тела (рис. 70), радиус-вектор которой r_M . В результате деформации эта точка переместится в положение M' и ее

новый радиус-вектор будет $r_{M'}$. Смещение точки M

$$u_M = r_{M'} - r_M$$

еще не является характеристикой деформации твердого тела, ибо такое смещение может быть получено, например, в результате вращения или перемещения твердого тела как целого. Характеристикой деформированного состояния, очевидно, может быть расстояние между двумя близкими точками M и N на рис. 70. Если квадрат расстояния между ними до деформации

$$ds^2 = |r_M - r_N|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i^2 *),$$

то в деформированном состоянии

$$ds'^2 = |r_{M'} - r_{N'}|^2 = |r_M + u_M - r_N - u_N|^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Поскольку

$$u = u(x_1, x_2, x_3) \text{ и } du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k,$$

изменение расстояния между точками M и N в результате деформации

$$ds'^2 - ds^2 = 2u_{ik} dx_i dx_k. \quad (8.1)$$

Здесь u_{ik} — компоненты тензора деформации, имеющие вид:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (8.2)$$

Тензор деформации (8.2) является точным и пригоден, вообще говоря, для любых деформаций, удовлетворяющих условию непрерывности вектора смещения u , а также его частных производных по координатам. Из (8.2) видно, что тензор деформаций симметричен: $u_{ik} = u_{ki}$.

Для выяснения физического смысла компонент тензора деформации рассмотрим относительное удлинение отрезка MN после деформации:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{ds' - ds}{ds}.$$

*) Здесь и далее производится суммирование по дважды входящим индексам.

Тогда из (8.1)

$$\frac{\Delta l}{l} \left[1 + \frac{\Delta l}{2l} \right] ds^2 = u_{ik} dx_i dx_k. \quad (8.3)$$

Если до деформации отрезок MN был ориентирован вдоль одной из координатных осей, скажем, оси l , то

$$\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_1 \left[1 + \left(\frac{\Delta l}{2l} \right)_1 \right] = u_{11},$$

откуда точное относительное удлинение этого отрезка

$$\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_1 = \sqrt{1 + 2u_{11}} - 1. \quad (8.4)$$

При $u_{11} \ll 1$ получаем: $(\Delta l/l)_1 = u_{11}$. Аналогичны относительные удлинения вдоль других осей.

Таким образом, компоненты тензора деформации u_{11} , u_{22} , u_{33} определяют по (8.4) относительное изменение расстояния между данными точками в направлении соответствующих осей. Отметим, что тензор деформации (8.2) нелинейно зависит от производных по координатам от компонент вектора смещения. Связано это с тем, что, строго говоря, для определения относительного удлинения изменение длины отрезка MN в результате деформации следует относить не к длине до деформации, а к длине после деформации. Изменение геометрических условий после деформации, вносящее нелинейность в уравнения теории упругости, не зависит от физической природы деформируемого тела; эту нелинейность принято называть геометрической нелинейностью.

Компоненты тензора деформации u_{ik} ($i \neq k$) определяют сдвиговые деформации. Действительно, прямоугольная система координат в точке M до деформации перейдет после деформации, вообще говоря, в криволинейную систему

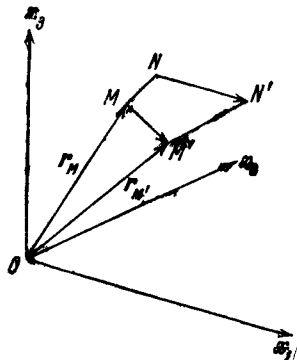


Рис. 70. К определению деформации твердого тела

координат в точке M' (рис. 71). Можно показать, что

$$\cos \varphi_{ik} = \frac{u_{ik}}{\left[1 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)_i\right] \left[1 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)_k\right]}, \quad (8.5)$$

где φ_{ik} — угол между касательными к координатным осям x_i' и x_k' . При малых деформациях отличие угла от прямого $\Delta\varphi_{ik} \simeq u_{ik}$. Таким образом, недиагональные компоненты тензора



Рис. 71. Изменение осей координат при деформации.

деформации определяют изменение углов прямоугольной системы координат после деформации, т. е. сдвиги.

Путем преобразования координат тензор деформации можно привести в данной точке твердого тела к диагональной форме; любая деформация, таким образом, может быть представлена как сжатие и растяжение вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, называемых главными направлениями деформации в данной точке. Можно показать (см., например, [1]), что инвариантами тензора деформации являются следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= u_{ii}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} (u_{ii}^2 - u_{ik}^2), \\ I_3 &= |u_{ik}| = \frac{1}{3} \left(u_{ik} u_{ii} u_{ki} - \frac{3}{2} u_{ik}^2 u_{ii} + \frac{1}{2} u_{ii}^3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Остановимся несколько на вопросе о малости деформации. За исключением таких твердых тел, как резина или резиноподобные материалы, при больших деформациях

циях твердые тела становятся пластичными. Здесь не будут рассматриваться упруго-пластические волны, амплитуда которых превосходит предел упругости; во всех рассматриваемых далее вопросах нелинейной акустики деформации могут считаться малыми по сравнению с единицей. Малость деформаций в случае твердых тел, размер которых хотя бы в одном из направлений мал, отнюдь не означает, что вектор смещения мал. Скажем, при распространении изгибной волны в тонкой пластине амплитуда изгибной волны может быть достаточно большой, в то время как деформации (при достаточно большой длине волны) остаются малыми.

б) Напряжения

В недеформированном состоянии отдельные части твердого тела находятся в механическом равновесии и равнодействующая сил на некоторый объем тела равна нулю. Выделим в твердом теле до деформации площадку dS . В результате деформации она перейдет в площадку dS' . На площадку dS' будет действовать сила, зависящая как от положения центра площадки в деформированном теле, так и от ориентации единичного вектора \mathbf{n}' нормали к dS' . Компоненты вектора силы

$$df_i = \tilde{\sigma}_{ik} n'_k dS', \quad (8.7)$$

где $\tilde{\sigma}_{ik}$ — тензор напряжения. В (8.7) все величины зависят от координат в деформированном состоянии. В случае малых деформаций различие между тензором деформации в координатах деформированного и недеформированного тела несущественно. Однако при учете членов даже второго порядка малости это различие должно приниматься во внимание. Можно показать [2], что, пользуясь координатами недеформированного тела, тензор напряжения определяется в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (8.8)$$

где U в случае адиабатических деформаций — внутренняя энергия. Эта величина, в дальнейшем называемая компонентой обобщенного тензора напряжений, имеет

смысл i -й компоненты силы на площадку dS' , причем до деформации нормаль к площадке была направлена вдоль оси k , отнесена эта сила к величине площадки до деформации dS . Соотношение (8.8) дает напряжение в теле после деформации с точностью до величин второго порядка малости (а в этом разделе все акустические задачи будут рассматриваться только во втором приближении). Отметим, что обобщенный тензор напряжений несимметричен: $\sigma_{ik} \neq \sigma_{ki}$.

в) *Внутренняя энергия изотропного деформированного твердого тела. Обобщенный закон Гука. Уравнения движения*

Для того чтобы найти уравнения движения частей твердого тела, нужно знать объемные и поверхностные силы, действующие на эти части в процессе деформирования. Внешние силы должны быть заданы. Объемные силы могут быть найдены, коль скоро известна внутренняя энергия деформированного тела (поскольку в дальнейшем нас будут интересовать адиабатические процессы). Относительно внутренней энергии можно сказать, что она должна быть инвариантна относительно преобразования координат. С другой стороны, внутренняя энергия является функцией компонент тензора деформаций*), поэтому для выполнения условия инвариантности необходимо, чтобы внутренняя энергия зависела от инвариантов тензора деформации (8.6):

$$U = U(I_1, I_2, I_3). \quad (8.9)$$

Разлагая эту функцию в ряд с точностью до величин третьего порядка малости, получим:

$$U = U(0, 0, 0) + \frac{\partial U}{\partial I_1} \Big|_0 I_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial I_2} \Big|_0 I_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial I_1^2} \Big|_0 I_1^2 \right) + \\ + \left[\frac{\partial U}{\partial I_3} \Big|_0 I_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial I_1 \partial I_2} \Big|_0 I_1 I_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial I_1^3} \Big|_0 I_1^3 \right]; \quad (8.10)$$

*) Здесь будут рассматриваться только идеальные упругие тела без диссипативных потерь, где энергия не зависит от скорости деформаций.

здесь в круглых скобках стоят величины квадратичные, а в квадратных скобках — кубические относительно компонент тензора деформации. Нас будет интересовать избыточная внутренняя энергия, поэтому $U(0, 0, 0) = 0$. В большинстве приложений представляют интерес равновесные начальные состояния твердого тела, что дает

$$\left. \frac{\partial U}{\partial I_1} \right|_0 = 0.$$

Введем обозначения производных внутренней энергии по инвариантам тензора деформации:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial I_2} \right|_0 &= -2\mu; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial I_3} \right|_0 = n = A; \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial I_1^2} \right|_0 = K + \frac{4}{3}\mu; \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial I_1 \partial I_2} \right|_0 &= -4m = -2A - 4B; \\ \left. \frac{\partial^3 U}{\partial I_1^3} \right|_0 &= 4m + 2l = 2A + 6B + 2C. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Как видно из (8.10) и (8.11), для описания нелинейных свойств изотропного твердого тела во втором приближении помимо двух линейных постоянных — модуля всестороннего сжатия K и модуля сдвига μ (модулей второго порядка) *) — необходимо ввести еще три нелинейные постоянные (модули третьего порядка). Как и в случае модулей второго порядка, модули третьего порядка могут быть выбраны различными путями. В первых работах по нелинейной теории упругости Мэрнаган [3] пользовался модулями третьего порядка l , m , n . В дальнейшем вслед за [2] мы будем пользоваться модулями третьего порядка A , B и C . Из (8.11) легко найти связь

*) Вместо этих линейных упругих модулей, как известно, могут быть использованы либо постоянные Ламэ λ и μ , либо модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ . Связь между этими постоянными такова:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu; \quad E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}; \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}.$$

постоянных Мэрнагана l, m, n с A, B, C :

$$\left. \begin{aligned} l &= B + C; & A &= n; \\ m &= \frac{A}{2} + B; & B &= m - \frac{n}{2}; \\ n &= A; & C &= l - m + \frac{n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Эта **нелинейная** теория упругости второго приближения иногда называется **пятиконстантной**. Из вида функции $U(I_1, I_2, I_3)$ следует, что для учета величин третьего порядка малости в изотропном теле потребовалось бы еще ввести дополнительно четыре модуля четвертого порядка. Вообще для учета величин n -го порядка малости в изотропном теле к уже существующим

$$\frac{n}{2} [2 + (n - 1)] - 1$$

модулям пришлось бы добавить $n + 1$ модулей $n + 1$ -го порядка. Расчеты становятся уже в достаточной мере громоздкими даже в случае пятиконстантной теории упругости. Поэтому здесь будут рассмотрены приложения только этой теории, соответствующей тому, что в уравнениях члены более высокого порядка малости, чем второй относительно малых деформаций, откидываются.

Естественно, что в пятиконстантной теории упругости, так же как и в линейной, двухконстантной теории, твердые тела предполагаются идеально упругими, т. е. между напряжениями и деформациями существует взаимно однозначное соответствие; такие явления, как текучесть, упругий гистерезис, из рассмотрения исключаются.

Возвращаясь к внутренней энергии (8.10), используя (8.11) и (8.6), запишем внутреннюю энергию в виде:

$$U = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) u_{ii}^2 + \frac{A}{3} u_{ik} u_{ii} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ii} + \frac{C}{3} u_{ii}^3. \quad (8.13)$$

Подставляя в (8.13) компоненты тензора деформации (8.2), можно получить с точностью до величин третьего

порядка малости:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{\mu}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 + \\
 & + \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \\
 & + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^3. \quad (8.14)
 \end{aligned}$$

Уравнение движения твердого тела:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (8.15)$$

где σ_{ik} — компоненты обобщенного тензора напряжений из (8.8). Пользуясь (8.14) для σ_{ik} , получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ik} = & \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} + \\
 & + \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \\
 & + \frac{K - \frac{2}{3}\mu + B}{2} \left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] + \frac{A}{4} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \\
 & + \frac{B}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + C \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 \delta_{ik}. \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

С оговорками, приведенными уже после (8.8), (8.16) можно назвать обобщенным законом Гука.

Пользуясь (8.16), из (8.15) получим уравнение движения в виде [4]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_i} = F_i, \quad (8.17)$$

где F_i — i -я компонента объемной силы, являющаяся величиной второго порядка малости относительно производных от смещения по координатам:

$$\begin{aligned}
 F_i = & \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \\
 & + \left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(K - \frac{2}{3} \mu + B \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \left(\frac{A}{4} + B \right) \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (8.18)
\end{aligned}$$

Уравнение (8.17) вместе с граничными и начальными условиями является основным уравнением пятиконстантной теории упругости. Это уравнение нелинейно. Формальными причинами нелинейности являются упомянутая ранее геометрическая нелинейность и нелинейность обобщенного закона Гука (8.16). Последнюю обычно называют физической нелинейностью, ибо она связана с нелинейной упругостью конкретного твердого тела. Физическая нелинейность во втором приближении определяется упругими модулями третьего порядка (8.12).

Пятиконстантная теория упругости является по существу нелинейной теорией с учетом величин второго порядка малости. Поэтому естественно здесь воспользоваться методом малого параметра: вектор смещения можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}'' + \dots, \quad (8.19)$$

где \mathbf{u}' — вектор смещения в первом (линейном) приближении, \mathbf{u}'' — вектор смещения во втором приближении, малый по сравнению с \mathbf{u}' . Тогда из (8.17) получим уравнения первого приближения:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i'}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_r^2} - \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_l'}{\partial x_l \partial x_i} = 0 \quad (8.20)$$

и уравнения второго приближения:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i''}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_k^2} - \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_l''}{\partial x_l \partial x_i} = F_i', \quad (8.21)$$

где $F_i' = F_i(\mathbf{u}')$. Из вида (8.21) следует, что величины второго порядка малости, так же как это было в случае жидкостей и газов, возникают под действием объемных сил, вызванных смещениями первого (линейного) приближения.

Дифференцируя (8.21) при $i = 1$ по x_1 , при $i = 2$ по x_2 , при $i = 3$ по x_3 и складывая эти уравнения, получим:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 (\nabla u'')}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \Delta (\nabla u'') = \nabla F'. \quad (8.22)$$

Аналогично

$$\rho_0 \frac{\partial^2 (\nabla \times u'')}{\partial t^2} - \mu \Delta (\nabla \times u'') = \nabla \times F'. \quad (8.23)$$

В этих уравнениях «продольная» компонента второго приближения, для которой $\nabla u'' \neq 0$, отделена от «поперечной» компоненты, для которой $\nabla \times u'' \neq 0$.

г) Физическая нелинейность изотропных твердых тел

Во втором приближении физическая нелинейность, как это было показано выше, определяется в изотропных твердых телах тремя модулями третьего порядка; для кристаллов кубической симметрии она определяется восемью, а в случае высокой симметрии — шестью модулями упругости третьего порядка. Следовательно, для измерения модулей третьего порядка изотропного твердого тела необходимо проведение по крайней мере трех независимых экспериментов, для измерения этих же величин в кубических кристаллах — по крайней мере восьми или шести независимых экспериментов. В настоящее время такие исследования проведены только для крайне ограниченного числа изотропных твердых тел и некоторых кубических кристаллов. Модули третьего порядка для подавляющего большинства твердых тел неизвестны. В этом разделе будут приведены некоторые данные, которые свидетельствуют о нелинейной упругости твердых тел и из которых, как правило, нельзя получить каждый из модулей третьего порядка отдельно. Эти данные могут представить определенный интерес для дальнейших исследований нелинейных свойств твердых тел.

На основании обширного экспериментального материала по сжимаемости различных твердых тел при давлениях до 10^5 кг/см² Бриджменом [5] получена эмпирическая формула для изменения объема твердого тела под

действием всестороннего сжатия:

$$-\frac{\Delta v}{v} = ap - bp^2, \quad (8.24)$$

где a и b — постоянные. Легко видеть, что $a = \frac{1}{K_0}$, где K_0 — модуль объемной сжимаемости при атмосферном давлении. Из (8.24) имеем связь давления с относительным изменением объема

$$p = -\frac{1}{a} \frac{\Delta v}{v} + \frac{b}{a^2} \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \quad (8.25)$$

и соотношение для модуля объемной упругости:

$$K = -\frac{dp}{d\left(\frac{\Delta v}{v}\right)} = \frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} \left(\frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{1}{a} + \frac{2b}{a^2} p, \quad (8.26)$$

откуда видно, что модуль объемной упругости линейно зависит от давления. Имеем также:

$$\beta_K = \frac{1}{K_0} \left(\frac{dK}{dp}\right)_0 = \frac{2b}{a}. \quad (8.27)$$

В дальнейшем было установлено, что до давлений $\sim 10^4$ кг/см² линейно зависят от всестороннего давления не только модуль K , но и другие модули второго порядка (модуль сдвига, модуль Юнга, коэффициент Пуассона). Имея это в виду, любой из линейных модулей можно представить в виде

$$M = M_0(1 + \beta p), \quad (8.28)$$

где M_0 — значение модуля при атмосферном давлении,

$$\beta = \frac{1}{M_0} \left(\frac{dM}{dp}\right)_0.$$

Экспериментальные значения коэффициентов β приведены в табл. 7. При всестороннем сжатии изотропное тело остается изотропным же, и поэтому по двум коэффициентам, например β_K и β_μ , пользуясь связью других модулей с K и μ (см. примечание на стр. 295), могут быть определены β_E , β_σ , β_λ . Например:

$$\beta_E = \beta_K + \beta_\mu - \frac{3K_0\beta_K + \mu_0\beta_\mu}{3K_0 + \mu_0}; \quad (8.29)$$

$$\beta_\sigma = \frac{3K_0\beta_K - 2\mu_0\beta_\mu}{3K_0 - 2\mu_0} - \frac{3K_0\beta_K + \mu_0\beta_\mu}{3K_0 + \mu_0}. \quad (8.30)$$

Т а б л и ц а 7

Коэффициенты, определяющие изменение модуля объемной упругости, модуля сдвига, модуля Юнга и коэффициента Пуассона при всестороннем сжатии (до давлений $\lesssim 10^4$ кг/см²)

Материал	$\beta_K \cdot 10^6$, см ² /кгГ	$\beta_\mu \cdot 10^6$, см ² /кгГ	$\beta_E \cdot 10^6$, см ² /кгГ	$\beta_\sigma \cdot 10^6$, см ² /кгГ
Алюминий	6,0 [8]; 5,1 [9]	7,61 [5]; 7,5 [8]; 9,6 [9]	7,20 [7]	-0,5 [8]
Магний	11,4 [8]	8,9 [8]	9,0 [8]	1,2 [8]
Сталь	—	2,2 [5]	2,30 [7]	—
Железо	2,9 [8]; 2,5 [9]; 1,6 [10]	1,8 [8]; 4,1 [9]; 7,5 [10]	2,1 [8]	0,3 [8]
Медь	—	2,71 [5]	4,30 [7]	—
Никель	—	1,8 [5]	—	—
Бериллий	4,6 [8]	1,7 [8]	2,7 [8]	27 [8]
Молибден	1,8 [8]	0,15 [5]	1,3 [8]	0,3 [8]
Вольфрам	—	-0,3 [5]	—	—
Тантал	—	0,3—1,5 [5]	—	—
Платина	—	2,4 [5]	—	—
Стекло (пирекс) . .	-10 [10]	-7,1 [10]	—	—
Плавленный кварц . .	-14,2 [9]	-9,7 [9]	—	—
Полистирол	230 [10]	114 [10]	—	—

Зависимость модулей второго порядка от всестороннего сжатия можно интерпретировать в терминах теории Мэрнагана *). Для этого предполагается [6], что компоненты тензора деформации имеют вид

$$u_{ik} = \delta_{ik}u_0 + u'_{ik},$$

*) Естественно, что теория Мэрнагана применима до тех пор, пока между напряжениями и деформациями существует взаимно однозначное соответствие. Как показывают эксперименты, для большинства твердых тел при всестороннем сжатии до давлений $\sim 10^4$ атм модули упругости второго порядка линейно зависят от давления, что указывает на применимость пятиконстантной теории до этих давлений.

где u_0 — деформации, вызванные гидростатическим давлением p , а величина u'_{ik} — малая добавка к компонентам тензора деформации. Тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik}p + \sigma'_{ik},$$

где σ'_{ik} — малая добавка. Связь между малыми напряжениями σ'_{ik} и малыми деформациями u'_{ik} естественно зависит от гидростатического давления, что может быть интерпретировано как зависимость упругих модулей второго порядка от гидростатического давления. Эта связь может быть также выражена через упругие модули третьего порядка A , B и C . Однако нетрудно видеть, что определенные зависимости двух модулей второго порядка от гидростатического давления дает только две (например β_k и β_μ) величины для определения A , B и C . Таким образом, измерение модулей второго порядка в зависимости от всестороннего сжатия (гидростатического давления) не позволяет найти все модули третьего порядка. Для этого в случае изотропного тела необходим еще один независимый эксперимент. Таким независимым экспериментом может быть, например, эксперимент с односторонним сжатием (или растяжением) твердого тела. Определение зависимости любого из модулей второго порядка от одностороннего напряжения позволяет найти все модули третьего порядка изотропного твердого тела [10]. Поскольку возможностей осуществления одностороннего напряжения достаточно много, этим методом могут быть также определены упругие коэффициенты третьего порядка для кристаллов [11].

Следует остановиться на методической стороне такого рода измерений. Принципиально возможно определение зависимости от внешних статических напряжений как изотермических [5, 7, 8], так и адиабатических [9—13] модулей второго порядка. В первом случае определяются изотермические модули A , B и C . Что касается второго из этих методов, то использование его для определения A , B и C , строго говоря, приводит к неким средним между изотермическими и адиабатическими модулями третьего порядка. Впрочем, в настоящее время такой ригоризм вряд ли необходим, так как, с одной стороны, известно,

что адиабатические линейные упругие модули не более чем на несколько процентов отличаются от изотермических, а для модуля сдвига такого отличия вообще не должно быть; с другой стороны, из-за недостаточно совершенной методики такого рода измерений точность определения упругих модулей третьего порядка чрезвычайно мала (иногда можно считать, что определяется только порядок величины). Поэтому в дальнейшем в этом разделе мы не будем делать различия между адиабатическими и изотермическими модулями третьего порядка и их комбинациями.

Зависимость адиабатических линейных упругих модулей от статического напряжения обычно определяется по скорости ультразвука в образцах, подвергнутых всестороннему [11] или одностороннему сжатию [9, 10]. В [10] на основании теории Мэрнагана рассчитаны зависимости скорости распространения звука от внешних статических напряжений. Скорость продольных c_l и поперечных c_τ волн зависит от гидростатического давления p следующим образом:

$$\rho_0 c_l^2 = K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 - \frac{p}{3K_0} \left(7K_0 + \frac{16}{3} \mu_0 + 2A + 10B + 6C \right), \quad (8.31)$$

$$\rho_0 c_\tau^2 = \mu_0 - \frac{p}{3K_0} (3K_0 + 4\mu_0 + A + 3B). \quad (8.32)$$

При одноосном напряжении σ , приложенном в направлении распространения волны, имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_{l\parallel}^2 = & K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 - \frac{\sigma}{3K_0} \left[K_0 - \frac{2}{3} \mu_0 + \frac{K_0 + \frac{1}{3} \mu_0}{\mu_0} \times \right. \\ & \times \left(4K_0 + \frac{22}{3} \mu_0 \right) + \frac{2(K_0 + \frac{1}{3} \mu_0)}{\mu_0} A + \frac{(4K_0 + \frac{10}{3} \mu_0)}{\mu_0} B + 2C \left. \right], \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\rho_0 c_{\tau\parallel}^2 = \mu_0 - \frac{\sigma}{3K_0} \left[4K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 + \frac{K_0 + \frac{4}{3} \mu_0}{4\mu_0} A + B \right]. \quad (8.34)$$

При одноосном напряжении σ , приложенном в направлении, перпендикулярном к направлению распространения для продольной волны:

$$\rho_0 c_{\perp}^2 = K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 + \frac{\sigma}{3K_0} \left[4K_0 - \frac{8}{3} \mu_0 + \frac{2(K_0 - \frac{2}{3} \mu_0)^2}{\mu_0} + \frac{K_0 - \frac{2}{3} \mu_0}{\mu_0} A + 2 \frac{K_0 - \frac{5}{3} \mu_0}{\mu_0} B - 2C \right]. \quad (8.35)$$

Для поперечной волны в этом последнем случае скорость зависит от того, как ориентировано напряжение σ относительно поляризации поперечной волны. Если направления поляризации и напряжения совпадают,

$$(\rho_0 c_{\perp}^2)_1 = \mu_0 - \frac{\sigma}{3K_0} \left[K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 + \frac{K_0 + \frac{4}{3} \mu_0}{4\mu_0} A + B \right]; \quad (8.36)$$

если они взаимно перпендикулярны,

$$(\rho_0 c_{\perp}^2)_2 = \mu_0 - \frac{\sigma}{3K_0} \left[2K_0 - \frac{4}{3} \mu_0 + \frac{K_0 - \frac{2}{3} \mu_0}{2\mu_0} A - B \right]. \quad (8.37)$$

Приведенные соотношения могут быть интерпретированы как зависимость упругих модулей второго порядка от статического напряжения. Для отдельного определения A , B и C необходимо измерение по крайней мере трех зависимостей скорости звука от давления. В работах [10, 14] такие измерения сделаны в некоторых изотропных твердых телах, результаты приведены в табл. 8. Точность этих измерений, как видно из таблицы, невелика.

Адиабатические модули третьего порядка принципиально могут быть измерены также по искажению и взаимодействию упругих волн в твердых телах. Величины этих акустических нелинейных эффектов (см. § 3 этой главы) зависят от различных комбинаций A , B и C . Однако этот метод имеет свои весьма существенные трудности. Как и при определении нелинейного параметра жидкости (см. гл. 4, § 2), нужны абсолютные измерения звукового поля. В прозрачных твердых телах их можно сделать оптическими методами; в непрозрачных же

Таблица 8

Упругие модули третьего порядка некоторых изотропных твердых тел

Материалы	Модули Мэрнагана $\times 10^{-11}$, Dи/см^2			Модули третьего порядка $\times 10^{-11}$, Dи/см^2		
	l	m	n	A	B	C
Полистирол [10]	$-1,89 \pm 0,32$	$-1,33 \pm 0,29$	$-1,00 \pm 0,14$	$-1,00 \pm 0,14$	$-0,83 \pm 0,36$	$-1,06 \pm 0,68$
Железо армко [10]	$-3,48 \pm 6,5$	$-103,0 \pm 7,0$	110 ± 110	110 ± 110	-158 ± 62	$123,2 \pm 68,5$
Стекло (шпрекс) [10]	$1,4 \pm 4,0$	$9,2 \pm 5,0$	42 ± 35	42 ± 35	$-11,8 \pm 22,5$	$-13,2 \pm 26$
Никелевая сталь REX535 [14]	$-4,6$	$-59,0$	$-73,0$	$-73,0$	$-22,5$	$17,9$
Сталь С1018*)	—	—	$-57,3 \pm 3,0$	$-57,3 \pm 3,0$	—	—
Алюминий 6016-Т6*)	—	—	$-31,2 \pm 1,2$	$-31,2 \pm 1,2$	—	—
Алюминий 1100-Г*)	—	—	$-47,7 \pm 3,8$	$-47,7 \pm 3,8$	—	—
Плавленый кварц*)	—	—	$-22,9 \pm 0,6$	$-22,9 \pm 0,6$	—	—

*) По Ролинсу, Кобетту и Дюнсу (ссылка взята по [15]).

твердых телах такого рода измерения представляют большие трудности, что, естественно, приводит к значительным ошибкам в определении модулей третьего порядка. Использование сравнительного метода, применяемого в жидкостях, здесь, по-видимому, невозможно по ряду причин. Прежде всего, различие в затухании в твердых телах велико; кроме того, на интенсивность ультразвука сильно влияет акустический контакт излучатель — твердое тело.

Акустические исследования нелинейных свойств твердых тел до настоящего времени могли быть сделаны только при сравнительно малых интенсивностях, и поэтому влияние затухания звука было велико *). Это, как уже отмечалось в разделе о жидкостях, является серьезным препятствием при определении нелинейных параметров сравнительным методом. До сих пор акустическими методами измерены комбинации модулей третьего порядка только для твердых тел с сравнительно малым затуханием (алюминий, магниево-алюминиевые сплавы, щелочно-галлоидные кристаллы).

Необходимо отметить еще одну трудность определения отдельно каждого из модулей третьего порядка акустическими методами даже в том случае, когда проведены три независимых эксперимента и абсолютные измерения звукового поля в изотропном теле или соответствующее количество экспериментов в кристалле. Обычно эти модули (так же как и в жидкостях) определяются из результатов амплитудных измерений величин второго порядка малости. Одни только амплитудные измерения не дают возможности определить знак нелинейного параметра, состоящего из комбинации модулей третьего порядка и характеризующего данный нелинейный эффект. Практически это приводит к невозможности определить отдельно модули третьего порядка. Эти методы дают возможность определить некоторые комбинации упругих модулей третьего порядка (нелинейный параметр); что касается их знака, то здесь могут быть высказаны только качест-

*) По аналогии с газами и жидкостями, в твердых телах формально также можно ввести число Рейнольдса, где в качестве вязкости следовало бы взять «эффективную вязкость», вызывающую затухание звука. В известных нам акустических работах эти числа Re были меньшими единицы.

венные соображения. Например, модуль объемной упругости $K + \frac{4}{3}\mu$, как известно, является величиной положительной, что следует из самого понятия упругости; при большом всестороннем (объемном) сжатии отклонение от закона Гука по крайней мере для большинства реальных твердых тел должно быть таким, чтобы дальнейшее объемное сжатие было еще более затруднено (иначе говоря, твердые тела при всестороннем сжатии до давлений $\sim 10^3 - 10^4$ атм должны себя вести как жесткая пружина)*). Легко видеть, что в этом случае

$$\left. \frac{\partial^3 U}{\partial I_1^3} \right|_0 < 0,$$

т. е. согласно (8.11)

$$(A + 3B + C) < 0.$$

Эта комбинация модулей третьего порядка как раз определяет согласно (8.45) искажение формы профиля продольной волны. Значения этой комбинации для некоторых твердых тел экспериментально определены в [10, 16] (табл. 9).

Т а б л и ц а 9

Относительный нелинейный параметр третьего порядка для всестороннего сжатия

Материал	$-(A+3B+C)/\rho_0 c^2 l$
Полистирол	$8 \pm 1,6$ [10]
Железо армко	$8,7 \pm 0,7$ [10]
Стекло (пирекс)	$-2,8 \pm 1,9$ [10]
Вольфрам	3,8 [16]
Магниево-алюминиевый сплав МА-8	4,3 [16]

Говоря об определении модулей третьего порядка, остановимся еще на одном весьма существенном обстоятельстве. Пятиконстантная теория упругости, так же как и обычная линейная теория упругости, предполагает, что

*) Исключением, как видно из табл. 9, является стекло.

упругое тело в любой точке идеально изотропно. Это предположение уже само по себе исключает из рассмотрения различного рода неоднородности и дефекты в твердых телах. Как известно, в твердых телах имеются границы и стыки зерен; текстура, возникающая при обработке твердых материалов; остаточные внутренние напряжения; дислокации в отдельных зернах, и т. д. В монокристаллах также имеются остаточные внутренние напряжения, дислокации, вакансии и т. д., которые не учитываются теорией упругости кристаллов второго приближения. Возникает вопрос о том, влияют ли каким-либо образом такого рода неоднородности на нелинейные упругие свойства твердых тел. Известно, например, что отрыв и движение дислокаций в монокристаллах металлов в существенной мере определяют характеристики этих монокристаллов в области отклонения от линейного закона Гука.

В общем случае дефекты твердых тел оказывают влияние на упругие модули третьего порядка. В настоящее время имеются прямые экспериментальные доказательства такого влияния [17, 18] (см. § 4 этой главы). Следовательно, измеряемые экспериментально модули третьего порядка имеют «примесь», связанную с дефектами твердого тела. В некоторых случаях эта «примесь» мала по сравнению с модулями третьего порядка идеального изотропного твердого тела. Так, по-видимому, обстоит дело при измерении нелинейного параметра для продольных волн в свободных от внешних механических напряжений образцах; экспериментальное значение нелинейного параметра при этом удовлетворительно совпадает с тем, что можно получить на основании элементарной теории твердого тела Борна или из значения коэффициента теплового расширения твердых тел [19]. В других случаях, например при искажении формы профиля поперечной волны (второй сдвиговой гармоники), «примесь» является основной причиной наблюдаемого эффекта; согласно пятиконстантной теории упругости этот эффект не должен был бы наблюдаться вовсе (см. далее).

В твердых телах со сложным комплексом различных свойств нелинейная упругость может зависеть от различных внешних воздействий, отличных от механических на-

пряжений. Примером может служить пьезоэлектрический фотополупроводник сульфид кадмия. Его нелинейные упругие свойства, как недавно выяснилось [20, 21], сильно зависят от освещенности, изменяющей концентрацию носителей тока. Это явление в настоящее время изучено еще очень мало. Можно думать, что вообще в тех случаях, когда есть сильное взаимодействие решетки с какой-либо внутренней системой или частицами (например, с электронами в пьезополупроводниках n -типа, с системой спинов в ферромагнетиках с магнитострикционными свойствами и др.), нелинейную упругость можно менять, действуя внешними полями на эту внутреннюю систему или на частицы.

д) Начала нелинейной теории упругости кристаллов

Для кристаллов член внутренней энергии, кубический относительно компонент тензора деформации, записывается в виде [22]

$$C_{ijkl}u_i u_k u_l,$$

где u_i — компоненты тензора деформации ($i, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$):

$$u_1 = u_{11}; u_2 = u_{22}; u_3 = u_{33};$$

$$u_4 = u_{23} = u_{32}; u_5 = u_{13} = u_{31}; u_6 = u_{12} = u_{21},$$

C_{ijk} — упругие модули третьего порядка.

Легко видеть, что модулей третьего порядка всего 216. Эти модули симметричны относительно перестановки индексов, т. е.

$$C_{ihl} = C_{hil} = C_{ilh}$$

Из условий симметрии кристаллов [22] могут быть найдены еще дополнительные соотношения, связывающие модули третьего порядка. В общем случае кристаллов триклинной симметрии число модулей третьего порядка сокращается до 56 [23]. В кристаллах, имеющих более высокую симметрию, число модулей третьего порядка еще меньше. Например, для кристаллов, имеющих оси третьего порядка (такую симметрию имеют все пять классов кубической системы), остается всего 20 независимых модулей третьего порядка, а если к этому добавляется еще

наличие по крайней мере трех осей второго порядка (что тоже имеет место для всех классов кубической системы), число модулей сокращается до 8. Отличны от нуля модули третьего порядка C_{111} , C_{112} , C_{113} , C_{144} , C_{155} , C_{166} , C_{123} , C_{456} . Для классов $m\bar{3}m$ и 432 кубической системы, имеющих три оси четвертого порядка, $C_{155} = C_{166}$ и $C_{113} = C_{112}$, т. е. остается всего 6 модулей третьего порядка. Внутренняя энергия в этом последнем случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{c_{11}}{2} (u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2) + c_{12} (u_{11}u_{22} + u_{22}u_{33} + u_{33}u_{11}) + \\
 & + c_{44} (u_{12}^2 + u_{21}^2 + u_{23}^2 + u_{32}^2 + u_{13}^2 + u_{31}^2) + \\
 & + C_{111} (u_{11}^3 + u_{22}^3 + u_{33}^3) + C_{112} \{u_{11}^2 (u_{22} + u_{33}) + \\
 & + u_{22}^2 (u_{11} + u_{33}) + u_{33}^2 (u_{11} + u_{22})\} + C_{123} u_{11} u_{22} u_{33} + \\
 & + C_{456} (u_{12} u_{23} u_{31} + u_{21} u_{13} u_{32}) + \frac{C_{144}}{2} \{u_{11} (u_{23}^2 + u_{32}^2) + \\
 & + u_{22} (u_{13}^2 + u_{31}^2) + u_{33} (u_{12}^2 + u_{21}^2)\} + \\
 & + \frac{C_{166}}{2} \{(u_{11} + u_{22}) (u_{12}^2 + u_{21}^2) + (u_{22} + u_{33}) (u_{23}^2 + u_{32}^2) + \\
 & + (u_{33} + u_{11}) (u_{13}^2 + u_{31}^2)\}. \quad (8.38)
 \end{aligned}$$

Модули третьего порядка в ряде кристаллов кубической симметрии рассчитаны [24] и измерены [41, 19, 25, 26]. Значения модулей приведены в табл. 10.

Если выполняется правило Коши, т. е. $c_{12} = c_{44}$, то число модулей третьего порядка кубического кристалла уменьшается до четырех. Модули третьего порядка связаны соотношениями:

$$C_{456} = 8C_{123}; \quad C_{144} = 2C_{123}; \quad C_{166} = 4C_{112}. \quad (8.39)$$

Правило Коши для линейных модулей, как известно, хорошо выполняется только для ионных кристаллов. Что касается нелинейного аналога правила Коши (8.39), то, как видно из данных табл. 10, оно удовлетворительно выполняется для ионных кристаллов (по расчетным данным [28]), а для германия все соотношения, кроме последнего из (8.39), не выполняются. В табл. 11 приведены для некоторых кубических кристаллов линейные упругие модули и коэффициенты, определяющие изменение этих модулей под действием гидростатического давления.

Таблица 10
 Значение упругих модулей третьего порядка и их комбинаций для некоторых кубических монокристаллов при комнатных температурах ($\times 10^{-11}$, дин/см^2)

Кристалл	Лит.	C_{111}	C_{112}	C_{113}	C_{144}	C_{440}	C_{110}	$C_{110} + \frac{C_{114}}{2}$	$6C_{111} + 4C_{112}$	$\frac{1}{2}C_{112} + 4C_{113}$
KCl	[24]	-8,9	-1,7	1,01	3,2	6,4	-5,9	-4,3	-60,2	-5,8
KCl	[19]	-27								
KCl	[25]			0,73	2,3	5,6	-4,9	-3,5	-81	-1,5
KBr	[24]	-7,9	-1,51							
KBr	[19]	-17,5								
KJ	[24]	-8,1	-1,21	0,45	2,1	4,2	-3,8			
NaF	[24]	-13,3	-5,28	5,12	11,4	22,8	-20			
NaCl	[24]	-9,7	-2,54	1,99	5,3	10,6	-9,3	-6,7	-68,7	-8,2
NaCl	[24]*)	-10,7								
NaCl	[19]	-45								
NaCl	[25]			8,7	20	40	-35,5	-11	-100	-1,4
LiF	[24]	-37,1	-9,5							
LiF	[19]	-77								
Ce	[11]	-12,2±0,8	-14,5±1,5	21,6±2,1	-1,7±1,9	-16,5±1,9	-60,7±2,8			
Ce	[26]	-11,8±0,1	-19,5±0,2	-1,8±0,6	-4,6±3,2	-21,2±2,8	-58,4±1,6			
Si	[26]	-13,8±0,2	-22,6±0,3	-6,4±1,0	+2,4±5,0	-12,4±4,0	-12,8±4,0			
Al	[19]	-90								

*) Эксперимент Паркера, Келли и Болева (ссылка по [24]).

Таблица 11

Упругие модули и коэффициенты, определяющие изменение упругих модулей с гидростатическим давлением, для некоторых кубических кристаллов

Кристалл	Лит.	$c_{11}(0) \cdot 10^{-11}$, $\frac{дн}{см^2}$	$\frac{dc_{11}}{dp}$	$c_{12}(0) \cdot 10^{-11}$, $\frac{дн}{см^2}$	$\frac{dc_{12}}{dp}$	$c_{44}(0) \cdot 10^{-11}$, $\frac{дн}{см^2}$	$\frac{dc_{44}}{dp}$
KCl	[12]	4,10	12,3	0,70	1,0	0,63	-0,5
NaCl	[12]	4,91	12,3	1,23	2,7	1,28	0,25
CuZn	[12]	12,91	4,8	10,97	4,2	8,24	2,6
Cu	[12]	17,10	5,5	12,39	3,3	7,57	0,9
Cu	[13]		5,4		4,3		2,35
Al	[12]	10,56	8,4	6,39	2,2	2,85	2,1
Ag	[13]		6,0		4,7		2,31
Au	[13]		6,0		5,1		1,79

§ 3. Нелинейная теория распространения и взаимодействия упругих волн в твердых телах

а) *Взаимодействие волн, распространяющихся в одном направлении*

Рассмотрим вслед за [4] плоскую волну, распространяющуюся в сплошной среде вдоль оси x . Вектор смещения в этом случае:

$$u(x, t) = i u_1(x, t) + j u_2(x, t) + k u_3(x, t). \quad (8.40)$$

Здесь индексом 1 отмечены смещения вдоль оси x , индексом 2 — вдоль y , 3 — вдоль z . Уравнения первого приближения из (8.20) в этом случае представляют три волновых уравнения, одно из которых — для продольной волны, распространяющейся со скоростью $c_l = \left[(K + \frac{4}{3} \mu) / \rho_0 \right]^{1/2}$, два других — для поперечных волн, распространяющихся со скоростью $c_t = (\mu / \rho_0)^{1/2}$. Изотермические линейные модули упругости и скорости звука в некоторых твердых телах приведены в табл. 12.

Таблица 12

Плотности, изотермические модули упругости второго порядка и скорости звука в некоторых твердых телах (при 20° С)

Материал	$\rho \cdot 10^{-3}$, г/см ³	Изотермические модули упругости				Скорость звука [27]		
		$K \cdot 10^{-5}$, кг/см ²	$\mu \cdot 10^{-5}$, кг/см ²	$B \cdot 10^{-4}$, кг/см ²	σ	$c_1 \cdot 10^{-3}$, см/сек	$c_2 \cdot 10^{-3}$, см/сек	V стержне $\cdot 10^{-3}$, см/сек
Алюминий . . .	2,695	7,7	2,7	7,2	0,35	6,19—6,42	3,04—3,03	5,00—5,24
Бериллий . . .	1,87	—	—	—	0,05	12,89	8,88	12,87
Вольфрам . . .	18,8	—	—	41,8	0,35	5,41—5,46	2,62—2,64	4,31—4,32
Дюралюминий . .	2,8	7,3	—	7,1	0,335	6,32	3,13	5,15
Железо . . .	7,7	17,2	8,4	21,6	0,29	5,83—5,95	3,18—3,24	5,00—5,20
Золото . . .	19,0	22,2	2,76	8,0	0,43	3,24	1,20	2,03
Индий . . .	7,3	—	—	—	0,315	2,3—2,5	1,3—1,44	—
Латунь . . .	8,6	—	3,6	10,2	0,374	4,18—4,70	2,02—2,44	3,13—3,58
Магний . . .	1,74	—	1,66	4,34	0,306	5,75—5,77	3,05—3,08	4,60—4,97
Медь . . .	8,96	14,0	4,9	13,1	0,343	4,72—5,01	2,27	3,75—3,79
Моель . . .	8,9	—	—	—	0,327	5,35	2,72	4,40
Никель . . .	8,8	16,4	8,1	20,8	0,28—0,34	6,04—5,63	2,96—3,00	4,78—4,90
Олово . . .	7,2	—	—	—	0,34	3,32	1,67	2,73

Таблица 12 (продолжение)

Материал	ρ_0 , г/см ³	Изоэрические модули упругости				Скорость звука [27]		
		$K \cdot 10^{-9}$, кг/см ²	$\mu \cdot 10^{-9}$, кг/см ²	$E \cdot 10^{-9}$, кг/см ²	σ	$c_L \cdot 10^{-3}$, см/сек	$c_T \cdot 10^{-3}$, см/сек	v средние $\cdot 10^{-3}$ см/сек
Плавленый кварц	2,20	3,74	3,4	—	0,17	5,96—5,98	3,764	5,760
Платина	21,4	—	6,2	17,2	0,303	3,26	1,73	2,69—2,80
Полистирол	1,05— 1,86	0,39	0,14	0,38	0,34—0,4	2,35	1,12	1,86—2,24
Полиэтилен	1,05	—	—	—	0,405	1,95	0,54	0,92
Свинец	11,3	4,7	0,57	1,65	0,44	1,96—2,40	0,69—0,7	1,21—1,32
Серебро	10,5	10,6	3,1	8,45	0,37	3,65—3,70	1,61—1,69	2,61—2,80
Сталь	7,9	—	8,3	21,5	0,3	5,79	3,10	5,00
Стекло (ширекс)	2,32	3,9	2,81	—	0,24	5,64	3,28	5,17
Стекло (флинт- глас)	3,9	—	2,1—2,5	5,1—6,1	0,224	3,76—4,80	2,38—2,56	3,49—4,55
Стекло (крон- глас)	2,25	—	2,6—3,3	6,6—7,9	0,274	5,10—6,12	2,84—3,55	4,54—5,30
Стекло органи- ческое (плексиг- глас)	1,2	—	—	—	0,34—0,4	2,68	1,10—1,12	1,84—2,14
Цинк	7,1	6,1	3,7	9,2	0,25	4,17—4,21	2,44	3,70—3,85

В первом приближении упругие волны распространяются не взаимодействуя. Уравнения второго приближения из (8.21) и (8.18):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \tau \left(\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2} \frac{\partial u_2'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2} \frac{\partial u_3'}{\partial x} \right), \quad (8.41)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2''}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_2''}{\partial x^2} = \tau \left(\frac{\partial^2 u_2'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_2'}{\partial x} \right), \quad (8.42)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3''}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_3''}{\partial x^2} = \tau \left(\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_3'}{\partial x} \right); \quad (8.43)$$

здесь введены обозначения

$$\alpha = K + \frac{4}{3} \mu; \quad \beta = 3\alpha + 2A + 6B + 2C; \quad \tau = \alpha + \frac{A}{2} + B.$$

Если в первом приближении есть только продольная волна, то система уравнений (8.41) — (8.43) переходит в одно уравнение, имеющее вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x}. \quad (8.44)$$

Это уравнение совпадает со вторым приближением уравнений гидродинамики в переменных Лагранжа (1.38) и при граничных условиях $u_1(0, t) = u_0(1 - \cos \omega t)$ имеет решение (2.94), которое теперь запишется в виде

$$u_1'' = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{k_l^2 x u_0^2}{8} [1 - \cos 2(\omega t - k_l x)]; \quad (8.45)$$

здесь $k_l = \omega/c_l$ — волновое число для продольных волн. Для скорости смещения из (8.45) получим:

$$v_1'' = -\frac{\beta}{4\alpha} \frac{\omega x v_0^2}{c_l^2} \sin 2(\omega t - k_l x); \quad (8.46)$$

здесь $v_0 = \omega u_0$. Сравнивая это соотношение с (2.94), легко видеть, что аналогом нелинейного параметра n для продольных волн в твердых телах будет величина

$$n_l = -\frac{\beta}{\alpha} - 1 = -4 - \frac{2(A + 3B + C)}{\alpha}. \quad (8.47)$$

Выше отмечалось, что для большинства твердых тел величина $(A + 3B + C) < 0$. Знак (или, точнее, фаза) v_1'' при измерениях только амплитуды второй гармоники не

может быть определен. Экспериментальные результаты показывают (см. табл. 9 и 10), что нелинейный параметр n_1 по (8.47) для твердых тел, таких как щелочно-галлоидные кристаллы и металлы (алюминий и магниево-алюминиевый сплав), колеблется от ~ 3 до 14, т. е. имеет тот же порядок величины, что и для жидкостей. Поскольку, однако, скорость звука в металлах существенно больше, чем в жидкостях, амплитуда второй гармоники продольной волны (даже без учета диссипативных потерь) в твердых телах при прочих равных условиях по крайней мере на порядок меньше, чем в жидкостях. В твердых телах можно также наблюдать взаимодействие продольных волн, распространяющихся в одном направлении, в результате такого взаимодействия генерируется волна комбинационной частоты.

Рассмотрим далее поперечную волну [4]. Допустим, что в первом приближении есть только поперечная волна, поляризованная в направлении оси z :

$$u_1' = u_2' = 0; u_3' \neq 0.$$

Из (8.43) следует, что компонента смещения u_3'' должна удовлетворять однородному волновому уравнению, но поскольку $u_3''(0, t) = 0$, очевидно, что $u_3'' \equiv 0$, т. е. при распространении поперечной волны в изотропном твердом теле не генерируется поперечная вторая гармоника. Этот результат физически довольно очевиден, так как при распространении поперечных волн не изменяется плотность среды и в изотропном твердом теле упругие напряжения при сдвиговых деформациях не зависят от знака деформации. Последнее, в частности, проявляется в том, что для плоских волн внутренняя энергия (8.13) является четной функцией сдвиговых компонент тензора деформации. По этой же причине две поперечные волны, распространяющиеся в одном направлении, не будут взаимодействовать.

Как следует из (8.41), при распространении поперечной волны в среде во втором приближении возникают продольные деформации. Ранее, когда речь шла о средах с дисперсией (гл. 3, § 6), уже отмечалось, что из-за различия фазовых скоростей распространения вынуждающего процесса (в данном случае поперечной волны) и вы-

нуждаемого процесса (в данном случае продольных смещений), т. е. при отсутствии синхронизма, непрерывно нарастающего в пространстве, решения второго приближения нет, возникают пространственные биения. Типичным примером этого является возникновение продольных смещений второго приближения в поперечной волне. Если поперечные смещения на границе заданы в виде

$$u_3'(0, t) = w_0(1 - \cos \omega t),$$

то решение уравнения первого приближения имеет вид:

$$u_3'(x, t) = w_0 [1 - \cos(\omega t - k_\tau x)], \quad (8.48)$$

где $k_\tau = \omega/c_\tau$. Подставляя (8.48) в (8.41), получим уравнение для продольных смещений. Имея в виду, что $u_1''(0, t) = 0$, получим решение в виде [4]:

$$u_1'' = \frac{\tau \omega w_0^2}{4\rho_0 c_\tau^3 (a^2 - 1)} \sin [(k_\tau - k_l) x] \cos [2\omega t - (k_\tau + k_l) x], \quad (8.49)$$

где $a = c_l/c_\tau$. Как следует из (8.49), отсутствие синхронизма приводит к «модуляции» амплитуды возникающей продольной волны в пространстве. Пространственный период «модуляции»

$$\Delta x = \frac{\pi c_l}{\omega(a - 1)} = \frac{\lambda_l}{2(a - 1)}. \quad (8.50)$$

Когда различие в скоростях продольной и поперечной волн невелико, $a \gtrsim 1$ (физически нереальный случай для твердых тел), пространственный период модуляции достаточно велик. При $(k_\tau - k_l)x \ll \pi$, т. е. при малом различии скоростей, (8.49) переходит в решение второго приближения для недиссипативной среды без дисперсии (2.76), где величины второго порядка малости нарастают пропорционально x . В релаксирующих жидкостях (см. гл. 3, § 6) дисперсия скорости также приводит к модуляции амплитуды волны в пространстве (к пространственным биениям). В этих жидкостях, в отличие от рассматриваемого случая твердых тел, дисперсия скорости мала, и на пространственное распределение второй гармоники оказывает основное влияние не дисперсия, а вязкое затухание волны. В случае же твердых тел $a \sim 1,5-2$

(можно было бы сказать, что в этом случае имеет место сильная дисперсия без поглощения), и период «модуляции» имеет порядок длины поперечной волны. Естественно, что на таких малых расстояниях (порядка длины волны второй продольной гармоники) эффекты второго порядка не могут развиваться сколько-нибудь существенным образом; возникающая сложная волна (8.49)*), как иногда говорят, будет все время оставаться величиной второго порядка малости. Таким образом, при отсутствии синхронизма не происходит накопления нелинейных искажений, «сильная дисперсия» (из-за различия фазовых скоростей продольных и поперечных волн) весьма эффективно препятствует развитию нелинейных эффектов.

Рассмотрим, далее, несколько более общий случай, когда наряду с поперечной волной в твердое тело излучается также и продольная волна той же частоты. Этот случай представляет несколько бóльший интерес, так как практически излучение поперечной волны кварцевыми пластинками Y - или BT -среза обычно сопровождается хотя и слабым, но вполне заметным излучением продольной волны. Последняя будет в дальнейшем считаться величиной того же порядка малости, что и поперечная, т. е.

$$u_1' = u_0 [1 - \cos(\omega t - k_1 x)],$$

$$u_3' = w_0 [1 - \cos(\omega t - k_\tau x)].$$

Имея в виду (8.41), для продольных смещений второго приближения u_1'' , очевидно, получим решение в виде суммы (8.45) и (8.49):

$$u_1'' = -\frac{\beta}{8\alpha} k_1^2 x u_0^2 [1 - \cos 2(\omega t - k_1 x)] +$$

$$+ \frac{\tau \omega w_0^2}{4\rho_0 c_\tau^3 (a^2 - 1)} \sin [(k_\tau - k_1) x] \cos [2\omega t - (k_\tau + k_1) x]. \quad (8.51)$$

Как видно из (8.43), во втором приближении возникает также сложная поперечная волна (условия синхронизма

*) В (8.49) пространственный период «модуляции» порядка длины волны, и поэтому говорить об амплитудно-модулированной волне в обычном смысле этого слова нельзя. Здесь еще нет установившейся терминологии; для сокращения в дальнейшем такого рода волны мы будем называть сложными.

здесь не выполнены). Решение для этой сложной волны, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, имеет вид:

$$u_3'' = \frac{\tau \omega u_0 \omega_0}{\rho_0 c_\tau^3} \sin \left[\frac{x}{2} (k_\tau - k_l) \right] \left\{ \frac{a+1}{3a^2 - 2a + 1} \times \right. \\ \left. \times \cos \left[2\omega t - \frac{x}{2} (3k_\tau + k_l) \right] - \frac{1}{a-1} \cos \left[\frac{x}{2} (k_\tau - k_l) \right] \right\}. \quad (8.52)$$

Таким образом, при одновременном излучении продольной и поперечной волн одинаковых частот помимо второй гармоники продольной волны (первый член в (8.51)) возникает продольная сложная волна (второй член в (8.51)), вызванная поперечной волной, и поперечная сложная волна (8.52). Последняя может генерироваться только тогда, когда излучаются одновременно и продольная и поперечная волны конечной амплитуды. Поперечная сложная волна (8.52) имеет пространственную «модуляцию» с периодом порядка длины продольной волны $2\Delta x$, где Δx дается соотношением (8.50).

В заключение следует подчеркнуть, что амплитуда второй гармоники (8.45) пропорциональна k_l^2 , в то время как для сложных волн второго приближения (8.49), (8.52) «амплитуда» пропорциональна k_τ .

*б) Взаимодействие волн при их пересечении
(комбинационное рассеяние звука на звуке)*

Ранее было рассмотрено искажение и взаимодействие волн, распространяющихся в сплошной среде в одном направлении. В твердых телах, благодаря тому, что скорость распространения продольной волны отличается от скорости распространения поперечной волны, становится возможным при выполнении некоторых условий, иногда называемых резонансными, взаимодействие волн при их пересечении под некоторым углом. В результате такого взаимодействия генерируется бегущая волна комбинационной частоты, направление распространения которой определяется резонансными условиями. Резонансные условия проще всего получить, рассматривая звуковые волны

как фононы*). В настоящее время в физике твердого тела развиваются направления, исследующие взаимодействие различных элементарных частиц и возбужденных состояний с фононами [28]. Нас здесь будут интересовать только фонон-фононные взаимодействия. При трехфононном взаимодействии законы сохранения энергии и квазиимпульса фононов могут быть представлены в виде

$$\omega' + \omega'' = \omega''', \quad (8.53)$$

$$k' + k'' = k'''. \quad (8.54)$$

Второе из этих условий определяет направления взаимодействующих и рассеянной волн. В частности, из (8.54) легко видеть, что в случае бездисперсионной среды и только одной скорости звука возможно взаимодействие волн, распространяющихся только в одном направлении. Отсюда еще раз следует, что комбинационного рассеяния звука на звуке (см. гл. 2, § 7) в жидкостях без дисперсии не может быть. В отличие от жидкостей, в твердых телах из-за возможности распространения волновых процессов с двумя различными скоростями при выполнении резонансных условий комбинационное рассеяние звука на звуке становится возможным.

Из (8.53) и (8.54) видно, что в твердом теле, если нет дисперсии скорости в обычном смысле этого слова, возможны следующие четыре типа взаимодействия фононов с образованием фонона суммарной частоты:

$$L(\omega') + L(\omega'') = L(\omega' + \omega''),$$

$$T(\omega') + T(\omega'') = T(\omega' + \omega''),$$

$$L(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' + \omega''),$$

$$T(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' + \omega''),$$

где введены условные обозначения: $L(\omega^s)$ — продольный фонон частоты ω^s , а $T(\omega^p)$ — поперечный фонон частоты ω^p . Первые два из этих четырех типов взаимодействия

*) Имея в виду, что на ультразвуковых частотах энергия фононов очень мала, можно было бы здесь не привлекать квантовые представления, однако, как будет видно в дальнейшем, квантовые представления позволяют простыми методами найти необходимые условия взаимодействия.

возможны, согласно (8.54), только в том случае, когда k' и k'' коллинеарны и волны распространяются в одном и том же направлении. Эти случаи были уже рассмотрены выше в рамках нелинейной теории упругости. Первый из типов взаимодействия включает искажение формы профиля продольной волны. Что касается второго типа, то, хотя условия (8.53) и (8.54) и выполняются, как было показано выше, искажения и взаимодействия коллинеарных поперечных волн в изотропном твердом теле нет (см. также далее). Пользуясь квантовой терминологией, в этом последнем случае вероятность взаимодействия фононов равна нулю.

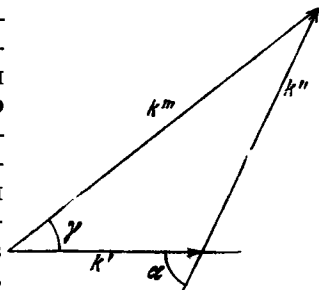


Рис. 72. Схема фонон-фононного взаимодействия.

Рассмотрим подробнее два последних типа взаимодействия. Из (8.54), если α — угол между направлениями взаимодействующих фононов (рис. 72), следует:

$$\left(\frac{\omega'''}{c'''}\right)^2 = \left(\frac{\omega'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{\omega''}{c''}\right)^2 + 2 \frac{\omega'}{c'} \frac{\omega''}{c''} \cos \alpha, \quad (8.55)$$

где c — скорость соответствующих фононов. Угол γ между направлением первого из взаимодействующих фононов и рассеянным фононом определяется из условия

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\omega''}{c''} \frac{c'}{\omega'} \sin \alpha}{1 + \frac{\omega''}{\omega'} \frac{c'}{c''} \cos \alpha}. \quad (8.56)$$

Для взаимодействия $T(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' + \omega'')$ из (8.55) и (8.53) получим:

$$\cos \alpha = \frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{(1-a^2)(x^2 \mp 1)}{2x} \right]; \quad (8.57)$$

здесь $x = \omega''/\omega'$, $a = c_1/c_2$. Из (8.56)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x \sin \alpha}{1 + x \cos \alpha}. \quad (8.58)$$

Из условия $-1 < \cos \alpha < 1$ следует, что этот тип взаимодействия возможен для отношения частот, ограниченного условием

$$\frac{a-1}{a+1} < x < \frac{a+1}{a-1}. \quad (8.59)$$

Аналогично для взаимодействия $L(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' + \omega'')$ из (8.55), (8.53) и (8.56) получим:

$$\cos \alpha = \frac{1}{a} + \frac{x}{2a} (1 - a^2), \quad (8.60)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{ax \sin \alpha}{1 + ax \cos \alpha}. \quad (8.61)$$

Это взаимодействие возможно для отношения частот взаимодействующих волн, удовлетворяющего условию

$$0 < x < \frac{2}{a-1}. \quad (8.62)$$

Подобным образом могут быть рассмотрены взаимодействия с образованием разностных комбинационных частот. Из условий сохранения энергии и квазиимпульса можно получить только резонансные условия. Полное решение квантовомеханических уравнений позволяет получить также вероятность взаимодействия фононов. Квантовое рассмотрение условий взаимодействия выходит, однако, за рамки этой книги.

Взаимодействие упругих волн в сплошной среде рассмотрено в [29] на основании пятиконстантной теории упругости. Представляя решение первого приближения (решение однородного уравнения (8.20)) в виде двух волн:

$$u' = A_0 \cos(\omega' t - k' r) + B_0 \cos(\omega'' t - k'' r), \quad (8.63)$$

для F' из (8.18) можно получить:

$$F'(r, t) = I^+ \sin[(\omega' + \omega'') t - (k' + k'') r] + \\ + I^- \sin[(\omega' - \omega'') t - (k' - k'') r], \quad (8.64)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}^{\pm} = & -\frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{4} A \right) [(A_0 B_0) (k'' k'') k' \pm (A_0 B_0) (k' k') k'' + \\
 & + (B_0 k') (k'' k'') A_0 \pm (A_0 k'') (k' k') B_0 + 2 (A_0 k'') (k' k'') B_0 \pm \\
 & \pm 2 (B_0 k') (k' k'') A_0] - \frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{4} A + B \right) \times \\
 & \times [(A_0 B_0) (k' k'') k'' \pm (A_0 B_0) (k' k'') k' + (B_0 k'') (k' k'') A_0 \pm \\
 & \pm (A_0 k') (k' k'') B_0] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} A + B \right) [(A_0 k'') (B_0 k') k' \pm \\
 & \pm (A_0 k') (B_0 k') k'' + (A_0 k'') (B_0 k') k'' \pm (A_0 k'') (B_0 k') k'] - \\
 & - \frac{1}{2} (B + 2C) [(A_0 k') (B_0 k'') k'' \pm (A_0 k') (B_0 k'') k'] - \\
 & - \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} \mu + B \right) [(A_0 k') (k'' k'') B_0 \pm (B_0 k'') (k' k') A_0].
 \end{aligned} \tag{8.65}$$

Уравнение (8.21) теперь может быть представлено в векторной форме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}''}{\partial t^2} - c_l^2 \nabla \nabla \mathbf{u}'' - c_\tau^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}'' = \frac{\mathbf{F}'}{\rho_0} = \mathbf{q}. \tag{8.66}$$

Решение задачи в [29] проведено для хорошо коллимированных звуковых пучков; в этом случае вектор \mathbf{q} отличен от нуля только в области пересечения звуковых пучков. Рассеянное звуковое поле, вызванное источниками в области пересечения пучков, рассматривается в дальней зоне, где можно считать, что $|\mathbf{u}''| \sim 1/r$. В этом случае решение (8.66) можно найти с помощью функции Грина для неограниченной среды. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}''(r, t) = & \frac{(I^+ r_0) r_0}{4\pi c_l^2 \rho_0 r} \int_V \sin \left[\left(\frac{\omega' + \omega''}{c_l} r_0 - k' - k'' \right) r' - \right. \\
 & \left. - (\omega' + \omega'') \left(\frac{r}{c_l} - t \right) \right] dV' + \frac{(I^- r_0) r_0}{4\pi c_l^2 \rho_0 r} \int_V \sin \left[\left(\frac{\omega' - \omega''}{c_l} r_0 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - k' + k'' \right) r' - (\omega' - \omega'') \left(\frac{r}{c_l} - t \right) \right] dV' + \\
 & + \frac{I^+ - (r_0 I^+)}{4\pi c_\tau^2 \rho_0 r} \int_V \sin \left[\left(\frac{\omega' + \omega''}{c_\tau} r_0 - k' - k'' \right) r' - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\omega' + \omega'') \left(\frac{r}{c_\tau} - t \right) \Big] dV' + \frac{I - (r_0 I^-) r_0}{4\pi c_\tau^2 \rho_0 r} \times \\
& \times \int_V \sin \left[\left(\frac{\omega' - \omega''}{c_\tau} r_0 - k' + k'' \right) r' - (\omega' - \omega'') \left(\frac{r}{c_\tau} - t \right) \right] dV'.
\end{aligned} \tag{8.67}$$

Здесь r_0 — единичный вектор в направлении r , r' — переменный вектор в области пересечения; интегрирование ведется по области пересечения, объем которой V . Первые два члена представляют продольные рассеянные волны с комбинационными частотами, последние два — поперечные волны. При интегрировании по объему пересечения под знаком синуса меняется только первый член, в который входит переменный вектор r' . Величина подинтегрального выражения осциллирует при произвольно выбранном направлении и величине r' и, следовательно, осциллирует также амплитуда рассеянной волны в зависимости от величины объема взаимодействия V . Есть, однако, направление (при заданных k' и k'' и типах взаимодействующих волн — единственное), в котором рассеянная волна не зависит от направления и величины r' и амплитуда ее будет пропорциональна объему взаимодействия. Это направление определяется из условий

$$\left[\frac{\omega' + \omega''}{c_l} \right] r_s - k' - k'' = 0, \tag{8.68}$$

$$\left[\frac{\omega' - \omega''}{c_l} \right] r_s - k' + k'' = 0, \tag{8.69}$$

$$\left[\frac{\omega' + \omega''}{c_\tau} \right] r_s - k' - k'' = 0, \tag{8.70}$$

$$\left[\frac{\omega' - \omega''}{c_\tau} \right] r_s - k' + k'' = 0. \tag{8.71}$$

где r_s — единичный вектор в направлении рассеянной волны. Первое и третье из этих резонансных условий совпадают с (8.53) и (8.54) и связаны с условием образования волн суммарной частоты; (8.70), как отмечалось выше, описывает только взаимодействие двух поперечных волн, распространяющихся в одном направлении, или искажение формы, профиля поперечной волны. Из (8.67) и (8.65) следует, что $u''(r, t)$ в этом случае равно нулю, т. е. поперечная волна не искажается — результат, о котором уже

была речь ранее. Возможные типы взаимодействия и условия взаимодействия волн приведены в табл. 13.

Отметим некоторые характерные особенности комбинационного рассеяния звука на звуке.

1) Амплитуда смещения в рассеянной волне пропорциональна k^3 . Этим комбинационное рассеяние отличается от искажения, при котором амплитуда второй гармоники $\sim k^2$, или от сложных волн, образующихся при отсутствии синхронизма, «амплитуда» которых $\sim k$. Следовательно, комбинационное рассеяние особенно эффективно в области высоких ультразвуковых частот, а тем более в области гиперзвуковых частот; наблюдать его, впрочем, можно и в мегагерцевом диапазоне частот (§ 4 этой главы).

2) Как было показано выше, пользуясь только законами сохранения энергии и квазиимпульса фононов (8.53) и (8.54), можно определить резонансные условия для того или иного типа взаимодействия. На рис. 73 показаны области изменения ω'' при заданных значениях ω' . При этом предполагалось, что $a = 2$; общности последующих рассуждений это не меняет. Из рисунка следует, что за исключением взаимодействий (2) и (4) резонансные условия выполняются только тогда, когда частоты взаимодействующих волн имеют один порядок. Возможность взаимодействия с очень низкими частотами (2) и (4) кажущаяся, так как, хотя резонансные условия и выполнены, амплитуда рассеянной волны (см. табл. 13) при $x \rightarrow 0$ также стремится к нулю. Таким образом, рассеяние практически исключено в том случае, когда различие в частотах взаимодействующих волн велико.

Поскольку спектр дебаевских тепловых фононов таков, что максимальное число фононов приходится на область частот $\sim 10^{12} - 10^{13}$ *гц*, комбинационное рассеяние ультразвуковых волн на тепловых колебаниях решетки в рассматриваемом здесь смысле невозможно. Условие взаимодействия таково, что вероятность взаимодействия тепловых фононов между собой значительно больше вероятности взаимодействия с ультразвуковой волной. Энергия (или частота) и направление движения теплового фонона меняются за время τ , значительно меньшее, чем период ультразвуковой волны, что исключает прямое комбинационное рассеяние ультразвуковой волны на тепловых фононах. В этом

Комбинационное рассеяние упругих волн в изотропных твердых телах

Тип взаимодействия	Угол взаимодействия $\cos \alpha$	Угол рассеяния	Пределы частот
$1. T(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' \mp \omega'')$	$\frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{(1-a^2)(x^2+1)}{2x} \right]$	$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x \sin \alpha}{1 + x \cos \alpha}$	$\frac{a-1}{a+1} < x < \frac{a+1}{a-1}$
$2. L(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' + \omega'')$	$\frac{1}{a} + \frac{x}{2a}(1-a^2)$	$\operatorname{tg} \gamma = \frac{ax \sin \alpha}{1 + ax \sin \alpha}$	$0 < x < \frac{2}{a-1}$

Таблица 13

Поляризация исходных волн*)	Амплитуда смещения в рассеянной волне	Поляризация рассеянной волны
	$\frac{A_0 B_0 V \omega^3}{8\pi\rho_0 r c_l^4 c_l (1+a)} \left\{ -\left(\mu + \frac{A}{4}\right) (2x^2 \cos \alpha \cos 2\alpha + x^3 \cos 2\alpha + x \cos 2\alpha) - \left(K + \frac{1}{3}\mu + \frac{A}{4} + B\right) \times \right. \\ \left. \times (2x^2 \cos^3 \alpha + x \cos^3 \alpha + x^3 \cos^3 \alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{4} + B\right) (2x^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + x \sin^2 \alpha + x^3 \sin^2 \alpha) \right\}$	—
⊥	0	—
⊥ ⊥	$\frac{A_0 B_0 V \omega^3}{16\pi\rho_0 r c_l^4} \left\{ -\left(\mu + \frac{A}{4}\right) [(x^3 + 1)(1 - a^2)a^2 - x(x + 1)(1 + a^2)a^3] - \left(K + \frac{\mu}{4} + \frac{A}{4} + B\right) \times \right. \\ \left. \times [(3 - a^2)(x + x^2) + (1 - a^2)(x^3 + 1)] \right\}$	—
—	$\frac{A_0 B_0 V \omega^3}{8\pi\rho_0 r c_l^4 c_l (1+a)} \left\{ -\left(\mu + \frac{A}{4}\right) \sin \alpha \left(3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a} \cos \alpha + 4 \frac{x}{a^3} \cos \alpha + 4 \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha\right) - \right. \\ \left. - \left(K + \frac{1}{3}\mu + \frac{A}{4} + B\right) \times \left(2 \frac{x^2}{a^2} \cos \alpha + 2 \frac{x}{a^3} + \frac{x^3}{a}\right) \sin \alpha \cos \alpha - \right. \\ \left. - \left(K - \frac{2}{3}\mu + B\right) \frac{x^2}{a^2} \sin \alpha - \left(\frac{A}{4} + B\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{x}{a^3} \cos \alpha + \frac{x^3}{a} \cos \alpha\right) \sin \alpha \right\}$	—
— ⊥	0	—

Тип взаимодействия	Угол взаимодействия $\cos \alpha$	Угол рассеяния	Пределы частот
3. $L(\omega') \nabla L(\omega'') = T(\omega' - \omega'')$	$a^2 \nabla \left[\frac{(1-a^2)(x^2+1)}{2x} \right]$	$\sin \gamma = \frac{x}{a(1-x)} \sin \alpha$	$1 < \frac{x^2+1}{2x} < \frac{a^2+1}{a^2-1}$
4. $L(\omega') + T(\omega'') = L(\omega' - \omega'')$	$\frac{1}{a} + \frac{x}{2a}(a^2-1)$	$\sin \gamma = \frac{ax}{(1-x)} \sin \alpha$	$0 < x < \frac{2}{a+1}$
5. $L(\omega') + T(\omega'') = T(\omega' - \omega'')^{**}$	$a + \frac{1}{2xa}(1-a^2)$	$\sin \gamma = \frac{x}{1-x} \sin \alpha$	$\frac{a-1}{2a} < x < \frac{a+1}{2a}$

*) Знак \parallel означает, что волна поляризована параллельно лярно; первый из знаков относится к первой из исходных волн.

***) Рассеянная волна возникает при любой поляриза-

Таблица 13 (продолжение)

Поляризация исходных волн*)	Амплитуда смещения в рассеянной волне	Поляризация рассеянной волны
— —	Не рассчитывалась	
—	$\frac{A_0 B_0 V \omega'^3 \sin \alpha}{4\pi c_T^4 c_l \rho_0 r (1-a)} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \times \right.$ $\times \left(\frac{3x^2}{a^2} + 4 \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{x^3}{a} \cos \alpha - 4 \frac{x}{a^3} \cos \alpha \right) -$ $- \frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{3} \mu + \frac{A}{4} + B \right) \times$ $\times \left(2 \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{x}{a^3} \cos \alpha - \frac{x^3}{a} \cos \alpha \right) -$ $- \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{4} + B \right) \times$ $\times \left(\frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{x}{a^3} \cos \alpha - \frac{x^3}{a} \cos \alpha \right)$	—
— ⊥	0	—
—	Не рассчитывалась	
— ⊥	$\frac{A_0 B_0 V \omega'^3}{8\pi c_T^4 c_l \rho_0 r} \left[\left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{x}{a} \cos \alpha - 2x^2 \cos^2 \alpha \right) \right. \right]$ $\left. + \left(K + \frac{1}{3} \mu + \frac{A}{4} + B \right) \frac{x}{a} \cos \alpha - \right.$ $\left. - \left(K - \frac{2}{3} \mu + B \right) x^2 \right]$	⊥

плоскости, проходящей через k' и k'' , знак ⊥ — перпендику-

ции $T(\omega'')$.

была своеобразная трудность объяснения поглощения ультразвука в твердых телах за счет непосредственного взаимодействия с дебаевскими тепловыми фононами. Эта трудность была разрешена Ахиезером [30], предположившим возможность нарушения равновесного распределения

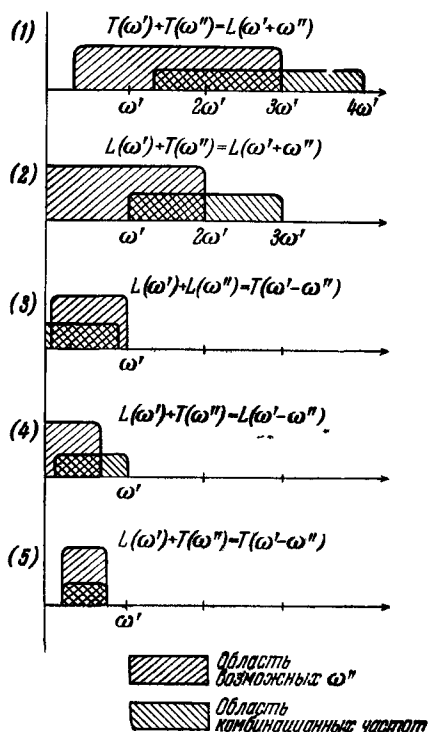


Рис. 73. Область взаимодействующих частот ω'' (при заданной частоте ω') и комбинационных частот для разных типов взаимодействия.

фононов под действием звуковой волны; отклонение от равновесия приводит к необратимому возрастанию энтропии и, следовательно, к поглощению.

3) Что касается области частот рассеянных волн, то во втором приближении частоты рассеянной волны также не

отличаются значительно от частот взаимодействующих волн. Кажущимся исключением здесь является взаимодействие (3) (см. рис. 73), позволяющее, на первый взгляд, получить очень низкие разностные частоты. Однако, как следует из (8.65), (8.67) и табл. 13, при $x \rightarrow 1$ $\cos \alpha \rightarrow 1$ и амплитуда рассеянной волны обращается в нуль. Из фоновых представлений качественно очевидно, что в случае генерации волны разностной частоты отношение энергии рассеянной волны к энергии одной из взаимодействующих будет $\sim (\omega' - \omega'')/\omega'$, что также указывает на малую эффективность нелинейного преобразования частоты в области низких частот.

Подводя итог, можно сказать, что «участниками» взаимодействия во втором приближении могут быть волны относительно близких частот. В остальных случаях взаимодействие либо запрещается резонансными условиями, либо происходит весьма неэффективно. Более интенсивное «перемешивание» спектра может происходить при учете более высоких приближений, чем второе.

Комбинационное рассеяние может найти некоторые практические применения. Выше (гл. 4, § 1) уже шла речь о параметрических устройствах (параметрическом излучателе и параметрическом усилителе) в жидкостях и отмечались ограничения, связанные с тем, что при отсутствии дисперсии в результате искажения волны «накачки» вплоть до образования пилообразной волны параметрический усилитель не может иметь коэффициент усиления больший, чем примерно 1,5. В твердых телах в настоящее время еще не получены пилообразные волны; для перехода в область больших чисел Рейнольдса нужно существенно увеличивать интенсивность звука, а при малых интенсивностях «накачки» коэффициент усиления еще меньше. Имея в виду, что при комбинационном рассеянии амплитуда рассеянной волны $\sim \omega^3$, можно, используя это и увеличивая объем взаимодействия (или осуществляя многократное взаимодействие), получить, по-видимому, вполне приемлемый коэффициент усиления. Причем вполне очевидно, что такой усилитель может эффективно работать только в области очень высоких частот, если удастся хотя бы частично компенсировать затухание. Не исключена возможность того, что этим методом удастся непосредственно наблюдать

низкочастотную часть спектра дебаевских тепловых колебаний решетки.

Выше речь шла о волнах в сплошной среде. В ограниченных твердых телах могут распространяться волны других типов. Например, волны в стержнях, волны на свободной границе твердых тел (рэлеевские волны), изгибные волны и волны других типов. Вопрос о том, в какой мере нелинейные эффекты проявляются при их распространении, частично рассматривался в [31—33]. В [33] был рассмотрен ряд случаев распространения волн конечной амплитуды в ограниченных твердых телах. В пластине возможно, как известно, возникновение волн продольных, поперечных и изгибных, причем для каждого типа волн имеется набор различных мод (или нормальных волн). Волны (или моды) с дисперсией фазовой скорости в [33] не рассматриваются (наличие дисперсии приводит к тому, что непрерывно нарастающих решений второго приближения нет). Из всех нормальных волн только две волны — нулевая продольная волна и нулевая поперечная волна, поляризованная в плоскости пластинки, — не имеют дисперсии. Нулевая продольная волна, как показывает анализ, будет искажаться, причем при направлении распространения волны вдоль оси x объемная сила имеет такой же вид, как первый член в правой части (8.41), а в граничных условиях (обращение в нуль соответствующих напряжений на свободных границах) также должны быть учтены члены второго порядка малости из (8.16). Нулевая поперечная волна в пластине, как и в случае сплошной среды, искажаться не будет, так как возникающая объемная сила ортогональна к смещениям во второй гармонике.

Аналогично в бесконечном стержне, из всех возможных типов волн (продольных, изгибных, крутильных) без дисперсии распространяются только нулевые продольная и крутильная волны; первая из них искажается, вторая — нет. Рэлеевская волна на плоской границе упругого тела с вакуумом, как известно, не имеет дисперсии. Возникающие при ее распространении объемные и поверхностные силы, как показано в [33], приводят к тому, что рэлеевская волна искажается.

Изгибные волны, как известно, имеют дисперсию. Характер и величина дисперсии зависят от геометрических

условий распространения упругих колебаний в среде. В [31] были найдены формы конечных изгибных колебаний пластины, которые могут распространяться без изменения. Распространение изгибных колебаний без изменения формы, по-видимому, становится возможным благодаря дисперсии.

Искажение формы изгибной волны в пластине при конечных колебаниях какого-то цилиндрического участка пластины с частотой ω было найдено в [32]. Вторая гармоника при этом не появляется; члены порядка ξ_0^2/h^2 , где ξ_0 — заданное возбуждающее смещение, h — толщина пластины, имеют частоты ω и 3ω .

За последнее время в акустике весьма интенсивно начинает развиваться направление, связанное с исследованием нелинейных явлений в различных упругих ограниченных системах (перегородках, подверженных сильным случайным вибрациям, и т. д.), а также с исследованием внешних звуковых полей, создаваемых этими системами. Из-за ограниченного объема книги эти вопросы здесь не будут рассматриваться.

§ 4. Экспериментальное исследование искажения и взаимодействия ультразвуковых волн в твердых телах

В настоящее время сравнительно большие амплитуды механического напряжения можно получать в области ближнего ультразвука (на частотах $< 10^5$ гц), применяя специальные концентраторы (см. гл. 9). При этом удалось получать столь большие амплитуды, что наблюдалась усталость и даже разрушение металлических концентраторов в процессе работы. В самое последнее время намечается перспектива получения чрезвычайно больших интенсивностей в области гиперзвуковых частот путем генерации звука когерентным светом оптических квантовых генераторов (несколько подробнее об этом см. гл. 9, § 3).

На ультразвуковых частотах мегагерцевого диапазона в твердых телах сравнительно трудно получить амплитуды переменного механического напряжения, превышающие

несколько атмосфер. Большинство экспериментальных работ по исследованию нелинейных эффектов проведены именно с такими переменными напряжениями. При этом, конечно, искажение продольных волн в твердых телах выражено слабее, чем в жидкостях (при тех же звуковых давлениях), и, следовательно, методы определения нелинейных искажений в твердых телах должны быть несколько более чувствительными, чем в случае жидкостей. Для возможности работы с бегущими волнами в твердых телах, как правило, используется импульсный режим.

Работ по экспериментальному исследованию различных нелинейных волновых явлений в твердых телах сравнительно мало. Вместе с тем исследование этих явлений помимо изучения особенностей нелинейного взаимодействия волн в твердых телах позволяет принципиально определить адиабатические модули третьего порядка, значения которых могут оказаться полезными в ряде вопросов физики твердого тела, нелинейной акустики, а также в ряде технических приложений звукоупругого эффекта. Модули третьего порядка раньше определялись только по зависимости модулей второго порядка от давления; эти методы в достаточной мере трудоемки и пригодны только для твердых тел, выдерживающих сравнительно большие механические напряжения без разрушения. Акустические методы, впрочем, также не свободны от некоторых трудностей, которые уже отмечались выше.

В одной из первых работ [34] по исследованию распространения волн конечной амплитуды в твердых телах была сделана попытка определить увеличение затухания ультразвуковых волн в плексиглазе при увеличении интенсивности ультразвука. Результат этой работы был отрицательным: при увеличении интенсивности ультразвука затухание в пределах ошибки измерения не изменилось. С точки зрения нынешних представлений об искажении продольных волн в твердых телах этот результат вполне естественен, так как при использованных интенсивностях ультразвука нелинейные искажения малы (максимальное значение звукового давления второй гармоники составляет несколько процентов от звукового давления первой гармоники). При малых нелинейных искажениях мало и увеличенные затухания (см. гл. 3, § 4).

Существенно более чувствительный спектральный метод (метод выделения второй гармоники различными резонансными системами) был применен в [35, 16, 19, 36] для определения нелинейного искажения продольных ультразвуковых волн (5 Мгц) в поликристаллических металлах (Al, магниево-алюминиевом сплаве МА-8) и щелочно-галлоидных кристаллах (NaCl, KCl, LiF). Амплитуда электрического напряжения на излучающем кварце в этих экспериментах была порядка киловольта, в то время как напряжение второй гармоники на приемном кварце — порядка милливольт. В этих работах, по-видимому, впервые четко наблюдалось проявление нелинейных свойств твердых тел при распространении звуковых волн. Экспериментальные методы спектрального выделения гармонических составляющих уже рассмотрены в § 1 гл. 4, и мы не будем здесь на них останавливаться.

Отметим одну особенность работы в импульсном режиме в твердых телах с использованием спектральных методов выделения гармоник. Для разрешения импульсов необходимо, чтобы удвоенная длина образца $2L$ была большей, чем длина импульса в образце $l = n\lambda$, где n — число колебаний в импульсе; тогда длительность импульса $\tau = n/f$, а ширина радио- и акустических устройств для удовлетворительной передачи импульса $\Delta f \sim f/n$. Следовательно, $L > c/2\Delta f$, т. е. чем более узкополосна система, тем длиннее должны быть образцы исследуемого твердого тела.

Узкополосность приемного тракта в спектральном методе необходима не столько потому, что нужно отстроиться от мешающего влияния основной частоты (различие частот в октаву при выделении второй гармоники не накладывает жестких ограничений на ширину полосы приемного тракта), сколько для увеличения чувствительности. В излучающем тракте узкополосность необходима для увеличения амплитуды излучаемого ультразвука. Вместе с тем работа с длинными образцами не всегда возможна, скажем, из-за отсутствия достаточно длинных образцов некоторых монокристаллов или из-за сильного затухания.

Результаты определения модулей второго порядка акустическим методом приведены в этой главе в § 2 (см. табл. 9 и 10). На основании измерений искажения

продольных волн, как это следует из (8.45), может быть определен с точностью до знака только один нелинейный параметр:

$$\beta = 3\alpha + 2A + 6B + 2C,$$

где $\alpha = K + \frac{4}{3} \mu$. Однако изучение других типов нелинейного взаимодействия позволяет определить другие комбинации модулей второго и третьего порядка. Для этого могут быть использованы взаимодействия, приведенные в табл. 13. Раздельное определение модулей A , B и C (или l , m и n) при измерении только амплитуды возникающих в результате нелинейного взаимодействия волн представляет определенные трудности, так как в этом случае комбинации нелинейных модулей известны только с точностью до знака (по модулю).

Оригинальный метод наблюдения нелинейного взаимодействия ультразвуковых волн был применен в [37]. В этой работе в качестве «приемника» использовались расщепленные в магнитном поле уровни ядерных спинов арсенида галлия. Величина магнитного поля подбиралась такой, чтобы разностная частота двух взаимодействующих ультразвуковых волн (25 и 10 $M\mu$) соответствовала переходу между двумя подуровнями. При включении ультразвука наблюдалось насыщение сигнала ядерного магнитного резонанса на частоте 15 $M\mu$. В работе указывается несколько механизмов, которые могли бы привести к этому эффекту, но наиболее вероятным авторы считают нелинейное взаимодействие ультразвуковых волн.

В самое последнее время начались исследования нелинейных эффектов в твердых телах на частотах гиперзвукового диапазона. Ранее уже указывалось, что в твердых телах без затухания комбинационное рассеяние, например, пропорционально кубу частоты, искажение формы профиля волны — квадрату частоты. Поэтому, если есть возможность уменьшить затухание, на гиперзвуковых частотах эти нелинейные эффекты должны быть выражены четче, чем на ультразвуковых частотах. Сравнительно недавно было установлено [38—40], что в таких твердых телах, как кварц, кремний, германий, рубин, корунд, при переходе в область гелиевых температур из-за уменьше-

ния «фононной вязкости» резко уменьшается затухание гиперзвуковых волн.

В [41] при гелиевых температурах наблюдалась генерация второй гармоники в кварце на $4,5 \cdot 10^9$ гц. Схема установки, показанная на рис. 74, принципиально не отличается от используемых на частотах ультразвукового диапазона: в криостате 1, заполненном жидким гелием, помещался резонатор 2 на частоту $4,5 \cdot 10^9$ гц. Возбуждение гиперзвука в кварцевом стержне 3 осуществлялось так же, как в работах [42, 43] см. также обзор [44]): конец кварцевого стержня помещался в пучность электрического поля в резонаторе 2. Приемный резонатор 4 был настроен на частоту второй гармоники $9 \cdot 10^9$ гц (на частоте $3 \cdot 10^9$ гц наблюдалась также третья гармоника). Гармоники наблюдались в кварцевых стержнях X- и AC-срезов, а также в непьезоэлектрическом срезе Z. Отмечаются некоторые трудности эксперимента: генерация гармоник могла происходить в зазоре между стержнем и резонатором; при мощности $\sim 0,1$ вт резонатор пробивался.

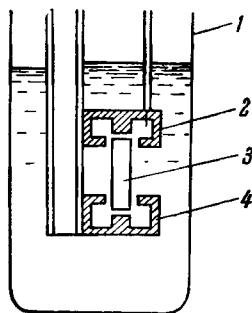


Рис. 74. Схема установки для исследования генерации второй гармоники на гиперзвуковых частотах [41].

Ряд косвенных признаков нелинейного искажения и взаимодействия волн на частоте $9 \cdot 10^9$ гц наблюдался в [45]: увеличение поглощения при увеличении интенсивности гиперзвука. В этой работе также делалась попытка параметрического усиления двух гиперзвуковых продольных волн, распространяющихся в одном направлении, однако выяснилось, что дисперсия вблизи частоты парамагнитного резонанса недостаточно велика для того, чтобы существенно препятствовать развитию нелинейных эффектов.

Возвращаясь к частотам мегагерцевого диапазона, остановимся на модуляционном методе, возможном в ограниченных твердых телах. Этот метод весьма чувствителен и позволяет наблюдать нелинейное взаимодействие при таких интенсивностях ультразвука, которые еще недавно считались областью линейной акустики. Метод заключается

в выделении компоненты спектра, образовавшейся в результате нелинейного взаимодействия, акустическим резонатором; при высокой добротности акустического резонатора может быть получена большая чувствительность.

Блок-схема одного из вариантов этого метода [46] показана на рис. 75. Здесь 1 — низкочастотный модулятор. Мо-

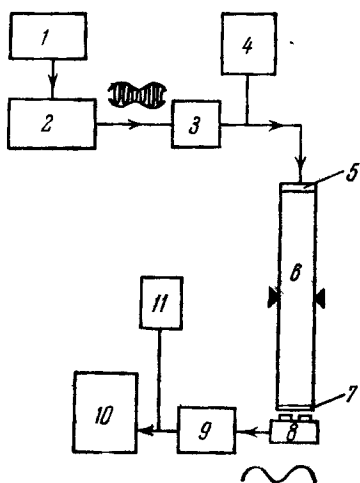


Рис. 75. Блок-схема модуляционного метода исследования нелинейной упругости твердых тел.

дулированный по амплитуде высокочастотный сигнал от генератора 2, после фильтра-пробки 3 на частоту модуляции, подается на источник ультразвука 5 (кварцевую пластинку). В стержне 6, в результате нелинейного взаимодействия компонент спектра модулированного сигнала, выделяется низкая частота модуляции, иначе говоря, происходит детектирование на нелинейной упругости стержня. Если частота детектированного сигнала совпадает с одной из низших собственных частот стержня, наблюдается резонанс. При высокой добротности стержня детектированный сигнал достаточно велик и принимается низкочастотным бесконтактным магнитоэлектрическим приемником 8, затем усиливается усилителем 9 и подается на осциллограф 10; 4 и 11 — вольтметры. На немагнитные стержни приклеивалась ферромагнитная пластинка 7.

Напряжение детектированного сигнала зависит не только от совпадения частоты модуляции с собственной частотой стержня, но также (при достаточно малом затухании высокочастотной волны на длине стержня) и от несущей частоты. На рис. 76 показана такая зависимость для алюминиевого стержня, в который излучается продольная волна частоты около 3 Мгц. Характерный тройной «резонанс»

де высокочастотный сигнал от генератора 2, после фильтра-пробки 3 на частоту модуляции, подается на источник ультразвука 5 (кварцевую пластинку). В стержне 6, в результате нелинейного взаимодействия компонент спектра модулированного сигнала, выделяется низкая частота модуляции, иначе говоря, происходит детектирование на нелинейной упругости стержня. Если частота детектированного сигнала совпадает с одной из низших собственных частот стержня, наблюдается резонанс. При высокой добротности стержня детектированный сигнал доста-

связан с тем, что в спектре излучения есть три частоты (несущая и две боковые) и максимумы соответствуют условию, при котором стержень помимо резонанса на частоте модуляции еще резонирует на несущей или боковых частотах. При относительно высокой добротности стержня на низкой частоте ($\sim 10^5$) и коэффициенте усиления низкочастотного усилителя $\sim 10^3-10^4$ акустическое детектирование, например, в алюминии, можно наблюдать в мегагерцевом диапазоне частот при напряжении на кварцевом излучателе порядка десятков вольт.

Помимо образования волн комбинационной частоты, при некоторых условиях могут генерироваться сложные волны, отличающиеся по

характеру колебательного смещения от исходной волны. Такой нелинейный эффект должен наблюдаться согласно [4] при распространении чисто поперечной волны. В этом случае [см. (8.49)] возникает сложная продольная волна, амплитуда которой периодически меняется в пространстве. Связано это с тем, что фазовая скорость порождаемого возмущения (в данном случае — продольных смещений) отличается от фазовой скорости порождающей волны (в данном случае — сдвиговой), т. е. с тем, что в данном случае нет синхронизма, или, что то же самое, не выполняются резонансные условия (8.53—54).

Экспериментальная проверка этого эффекта представляет определенные трудности, так как на ультразвуковых частотах, используя для излучения поперечной волны кварцевые пластинки Y - или BT -среза, практически невозможно избавиться от излучения также слабой продольной волны. Помимо того, что эта продольная волна искажается (вторая гармоника этой волны дается первым членом

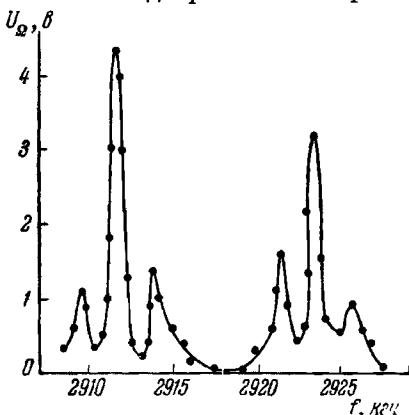


Рис. 76. Зависимость амплитуды акустически детектированного сигнала от несущей частоты.

(8.51)) так, как если бы не было поперечной волны, эта волна еще и взаимодействует с поперечной. В результате этого взаимодействия появляется сложная поперечная волна (8.52). Вклад поперечной волны в продольную вторую гармонику дает сложную продольную волну удвоенной частоты (в (8.51) — второй член). Таким образом, небольшая «примесь» продольной волны в излучении значительно усложняет нелинейное взаимодействие волн.

Как видно из (8.49), а также из (8.51) и (8.52), «амплитуды» сложной продольной и сложной поперечной волн меняются не только в пространстве, но и при постоянном расположении излучателя и приемника (случай, типичный для твердых тел), также и при изменении частоты. Если расстояние между излучателем и приемником L , то согласно (8.49) «амплитуда» продольной второй гармоники периодически меняется при изменении частоты на

$$\Delta f = \frac{c_l c_r}{2(c_l - c_r)L},$$

т. е. для характерных случаев совершается полный цикл при изменении частоты на несколько десятков килогерц. При работе в мегагерцевой области такое изменение частоты вполне возможно, так как ширина полосы излучателя, как правило, достаточно велика. До сих пор, однако, периодическое изменение амплитуды не наблюдалось, так как чрезвычайно трудно выделить этот эффект на фоне других, более сильных нелинейных эффектов. Возможность наблюдения нелинейной трансформации типов волн (возникновение продольных колебаний при сдвиговом возбуждении) представляется при использовании модуляционного метода, о котором речь была выше. Если кварцевая пластинка 5 (см. рис. 75) излучает поперечную волну, то при частоте модуляции, равной частоте собственных продольных колебаний стержня, наблюдается четкий резонанс.

В отличие от жидкостей без дисперсии, в твердых телах при выполнении резонансных условий становится возможным рассеяние звука на звуке с образованием волн комбинационных частот. Как следует из (8.67) (см. табл. 13), таких взаимодействий может быть достаточно много. За последнее время выполнено несколько экспериментальных

работ по исследованию комбинационного рассеяния звука на звуке [47—50]. Типичная блок-схема установки показана на рис. 77. Два источника I_1 и I_2 возбуждаются разными генераторами G_1 и G_2 (B_1 и B_2 — вольтметры) и излучают ультразвуковые волны, вообще говоря, разных частот, пересекающиеся в блоке A под углом

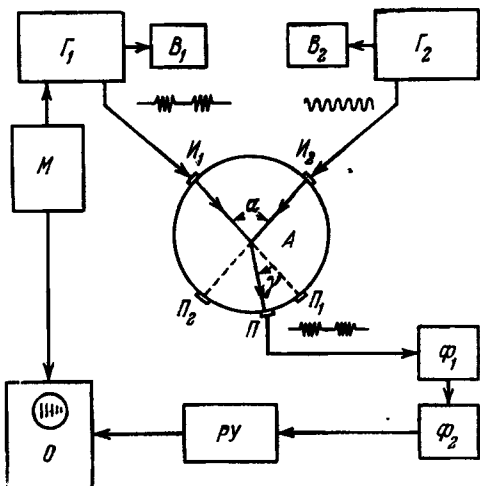


Рис. 77. Блок-схема установки для исследования комбинационного рассеяния звука на звуке.

α (в [49, 50] наблюдения проводились в блоке из поликристаллического алюминия). Рассеянная под углом γ волна комбинационной частоты принималась приемником Π , имеющим резонанс на комбинационной частоте. Электрический сигнал после фильтров-пробок Φ_1 и Φ_2 на каждую из взаимодействующих частот и усиления резонансным усилителем $ПУ$ осциллографировался, развертка осциллографа запускалась модулятором M . Если оба генератора G_1 и G_2 работают в импульсном режиме, необходимы условия одновременного прихода импульсов в область взаимодействия. Возможна также работа одного из генераторов в непрерывном режиме; рассеянный сигнал, естественно, остается импульсно модулированным. Выделение рассеянной волны

здесь принципиально проще, чем при исследовании искажения формы профиля, так как помимо различия в частотах взаимодействующих и рассеянной волн могут быть различны еще и типы волн, а направление рассеяния зачастую сильно отличается от направлений распространения взаимодействующих волн (при достаточно больших линейных размерах области взаимодействия по сравнению с длиной волны рассеянное излучение имеет относительно узкую характеристику направленности). Кроме того, отключая поочередно один из источников звука, можно избежать ошибки в отождествлении наблюдаемого сигнала с рассеянным. Для того чтобы иметь представление о порядках величин, приведем некоторые цифры: в алюминиевом блоке на частоте 3 Мгц при взаимодействии $T(\omega) + T(\omega) = L(2\omega)$ и равном напряжении на каждом из излучателей 750 в рассеянный сигнал создает на кварцевой резонансной приемной пластинке напряжение порядка долей милivolта, что составляет $\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ от напряжения на одном из контрольных приемников Π_1 или Π_2 .

Результаты экспериментов по комбинационному рассеянию соответствуют предсказанным теорией: взаимодействие возможно при выполнении резонансных условий *); величина рассеянного сигнала при прочих равных условиях растет пропорционально кубу частоты [50].

Остановимся теперь на экспериментах, показывающих, что дефекты структуры твердых тел оказывают влияние на нелинейные волновые процессы.

Из пятиконстантной теории упругости Мэрнагана следует, что при распространении чисто сдвиговой волны в изотропном теле не должна генерироваться вторая сдвиговая гармоника **). Что касается кубических кристаллов, то анализ (8.38) показывает, что эта гармоника не генерируется при распространении звука вдоль одной из кубических осей [100], [010], [001] или вдоль диагоналей граней

*) Наблюдение, правда, более слабого рассеянного сигнала при небольших отклонениях от условий резонанса, что можно делать либо перемещая приемную пластинку Π , либо меняя частоту одной из взаимодействующих волн, связано с дифракцией звука на конечной апертуре излучателей.

**) Это не исключает возможности возникновения нечетных гармоник более высокого порядка.

[110], [101], [011]. Как показал эксперимент [17], вторая сдвиговая гармоника генерируется сдвиговой волной в ряде поликристаллов (алюминий, магний, магниево-алюминиевые сплавы), монокристаллов металлов (алюминий, кадмий) и ряде щелочно-галогидных кристаллов. Далее выяснилось, что в монокристаллах металлов амплитуда второй сдвиговой гармоники сильно зависит от слабых внешних воздействий: небольшой статической нагрузки боковой стороны стержня или небольших локальных нагреваний. Влияние нагрузки наиболее эффективно в том случае, когда вектор силы, приложенной к телу, коллинеарен вектору смещения в сдвиговой волне.

На рис. 78 показаны осциллограммы второй сдвиговой гармоники в чистом монокристалле алюминия (волна распространяется вдоль одной из кубических осей) при различных нагрузках. Как видно из осциллограмм, амплитуды импульсов второй продольной гармоники, неизбежно возникающей из-за излучения помимо сдвиговой еще и продольной волны, не меняются при боковой нагрузке стержня, в то время как амплитуды импульсов второй сдвиговой гармоники меняются весьма значительно.

Генерация второй сдвиговой гармоники не связана с взаимодействием излучаемой сдвиговой волны с продольной. Внешние силы настолько малы по сравнению с силами межмолекулярного взаимодействия, что они не могли бы сколько-нибудь заметно изменить решеточную нелинейность; эффект связан с процессами, имеющими сравнительно малую энергию активации. Наиболее вероятной причиной возникновения второй сдвиговой гармоники в [17] считались внутренние напряжения в кристалле, вызванные дислокациями. Воздействие внешних нагрузок с этой точки зрения находит простое объяснение: в чистых монокристаллах алюминия, как известно, дислокации закреплены в достаточной мере слабо, скольжение начинается при напряжениях, составляющих несколько $\kappa\Gamma/\text{см}^2$. Дополнительное напряжение, создаваемое нагрузкой, приводит сначала (при небольших напряжениях) к тому, что дислокационные петли выгибаются в направлении составляющей силы в плоскости скольжения, и если вектор смещения в волне имеет составляющую в этой плоскости (при распространении волны вдоль кубической оси алюминия

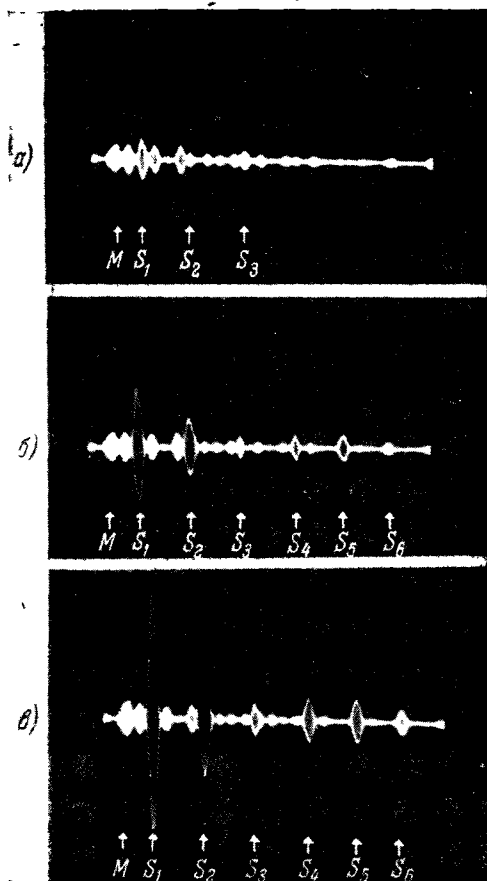


Рис. 78. Осциллограммы второй сдвиговой гармоники в монокристалле алюминия при разных нагрузках: а) без нагрузки; б) нагрузка 1 кг; в) нагрузка 5 кг. Направление силы, создаваемой нагрузкой, совпадает с направлением поляризации волны. Импульсы второй поперечной гармоники отмечены индексами S_i (i — номер импульса); M — электрическая наводка. Импульсы, амплитуда которых не меняется под нагрузкой, — вторая гармоника продольной волны, вызванная побочным излучением продольной волны пластинкой кварца BT -среза [36].

такая составляющая есть), то напряжения сдвига в одном направлении и противоположном становятся все более и более неэквивалентными. Это как раз и есть условие того, что квадратичная сдвиговая нелинейность растет и, следовательно, амплитуда второй сдвиговой гармоники увеличивается. Наблюдаемая без внешних воздействий вторая сдвиговая гармоника, по-видимому, обусловлена различного рода внутренними напряжениями. В отличие от монокристаллов, в поликристаллических металлах для внешнего воздействия на поле внутренних напряжений необходимы значительно большие внешние напряжения, поэтому воздействие сравнительно небольшой нагрузки не меняло амплитуды гармоники в этом случае.

В дальнейшем влияние дислокаций на упругие нелинейные эффекты было подтверждено в [18], где также исследовалось действие внешней нагрузки на амплитуду теперь уже продольной гармоники, возникающей в продольной же волне в монокристалле алюминия. В случае продольных волн внешние силы должны прикладываться так, чтобы имелась составляющая силы вдоль направления распространения звука; в этой работе направление растяжения стержня совпадало с направлением распространения продольной волны.

Эти эксперименты показывают, что нелинейные модули твердых тел имеют не только решеточную часть, но в некоторой мере зависят также от внутренних напряжений, вносимых различного рода дефектами. Соотношение между решеточной частью и дислокационной для различных модулей третьего порядка (если бы даже удалось включить дефекты в пятиконстантную теорию), по-видимому, будет трудно указать и в дальнейшем, когда будет накоплен больший экспериментальный материал, так как дислокационная часть, как всегда, определяется не только самим материалом, но и историей приготовления данного образца. Отметим все же, что вторая сдвиговая гармоника в [17] для поликристаллических металлов была на 1—2 порядка меньше продольной гармоники; в [18] при относительно небольших нагрузках в монокристалле алюминия вторая продольная гармоника увеличивалась в два раза, т. е. в растянутом кристалле дислокационная часть была приблизительно равна решеточной.

В заключение этого параграфа остановимся на экспериментальных работах по исследованию упругих нелинейных свойств кристаллов сульфида кадмия. Эти кристаллы имеют гексагональную структуру, обладают фотополупроводниковыми и помимо этого пьезоэлектрическими свойствами. С тех пор как было установлено, что этот набор свойств позволяет получить прямое усиление ультразвуковых и даже гиперзвуковых волн дрейфом носителей тока, сульфид кадмия привлек внимание многочисленных исследователей.

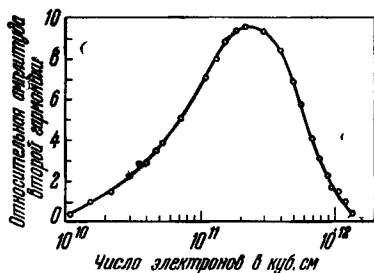


Рис. 79. Зависимость амплитуды второй гармоники, генерируемой в сульфиде кадмия, от концентрации электронов [20].

В связи с возможностью усиления, вопрос о нелинейности сульфида кадмия представляет интерес еще и потому, что нелинейные эффекты ограничивают усиление. В материале с таким сложным комплексом свойств возможны различного рода нелинейные эффекты. Мы остановимся на тех эффектах, которые непосредственно наблюдаются на «акустической стороне».

Как показали исследования [20, 21], в сульфиде кадмия при распространении упругих волн в пьезоактивных направлениях, т. е. продольных волн в направлении оси c или поперечных волн, поляризованных вдоль оси c , упругая нелинейность сильно зависит от концентрации носителей тока; последняя, поскольку сульфид кадмия фоточувствителен, может изменяться под действием света. Характерная зависимость амплитуды второй гармоники сдвиговой волны от числа электронов (или от освещенности кристалла) показана на рис. 79. Уменьшение нелинейности при концентрациях электронов, больших $3 \cdot 10^{11}$ $1/\text{см}^3$, объясняется экранировкой пьезоэлектрического поля объемным зарядом. Освещение частей кристалла показало, что этот эффект объемный [20]. Там же было установлено, что при заданной концентрации электронов нелинейность сульфида кадмия зависит также от приложенного к кристаллу постоянного электрического поля (этот эксперимент про-

водился в кристаллах n -типа и поле прикладывалось так, чтобы направление движения электронов совпадало с направлением распространения ультразвуковой волны), причем генерация второй гармоники минимальна в области напряженности поля, при которой дрейфовая скорость электронов равна скорости звука. При больших напряженностях поля гармоника сильно возрастает.

Имеющиеся в настоящее время данные по нелинейности сульфидов кадмия носят, конечно, предварительный характер. Однако они открывают возможность регулировать нелинейные свойства в несколько больших пределах, чем это можно делать, скажем, воздействуя внешними статическими силами на поле дислокаций в металлических монокристаллах. Следует сказать, что отыскание твердого тела с достаточно большой упругой нелинейностью и вместе с тем не очень большим затуханием упругих волн (что, имея в виду «фононную вязкость», само по себе противоречиво), по-видимому, позволило бы использовать различные нелинейные акустические устройства в радиотехнике. В настоящее время потери на электроакустическое и акустоэлектрическое преобразования, складываясь с потерями на нелинейное акустическое преобразование (большими из-за малости нелинейных модулей исследованных твердых тел), дают настолько большие суммарные потери, что, если и можно говорить о каких-либо приложениях, то только в области мощной радиоэлектроники.

Из других областей возможного применения нелинейных волновых процессов нужно указать на некоторые измерительные методы. Это в первую очередь относится к определению упругих модулей более высокого порядка, чем второй, и, возможно, в дальнейшем к интегральному исследованию дислокаций в монокристаллах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
3. Murnaghan F. D., Finite deformation of an elastic solid. New York, John Wiley, 1951.

4. Гольдберг З. А., О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн. Акуст. ж. 6, 307 (1960).
5. Бриджмен П. В., Физика высоких давлений. Л., ОНТИ, 1935.
6. Birch F., The effect of pressure upon elastic parameters of isotropic solids, according to Murnaghans theory of finite strain. J. Appl. Phys. 9, 279 (1938).
7. Ехлаков А. Д., Гладковский В. А., Новый метод определения зависимости модуля Юнга твердых тел от давления. ФММ 7, 116 (1959).
8. Воронов Ф. Ф., Верещагин Л. Ф., Влияние гидростатического давления на упругие свойства металлов. I. Экспериментальные данные. ФММ 9, № 3 (1961)
9. Hughes D. S., Maurette C., Dynamic elastic moduli of iron, aluminum and fused quartz. J. Appl. Phys. 27, 1184 (1956).
10. Hughes D. S., Kelly J. L., Second-order elastic deformation of solids. Phys. Rev. 92, 1145 (1953).
11. Bateman T., Mason W. P., McSkimin H. J., Third-order elastic moduli of germanium. J. Appl. Phys. 32, 928 (1961).
12. Lazarus D., The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, NaCl, CuZn, Cu and Al with pressure to 10 000 bars. Phys. Rev. 76, 545 (1949).
13. Daniels W. D., Smith C. S., Pressure derivatives of the elastic constants of copper, silver and gold to 10 000 bars. Phys. Rev. 111, 713 (1958).
14. Crecraft D. J., Ultrasonic wave velocities in stressed nickel steel. Nature 195, № 4847, 1193 (1962).
15. Smith R. T., Stress-induced anisotropy in solids — the acousto-elastic effect. Ultrasonics 1, 135 (1963).
16. Гедройц А. А., Красильников В. А., Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука. ЖЭТФ 43, 1592 (1962).
17. Гедройц А. А., Зарембо Л. К., Красильников В. А., Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов. Докл. АН СССР 150, 515 (1963).
18. Akira Hikata, Chick B. B., Elbaum C., Dislocation contribution to the second harmonic generation of ultrasonic waves. J. Appl. Phys. 36, 229 (1965).
19. Гедройц А. А., Зарембо Л. К., Красильников В. А., Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и агармоничность решетки. Вестн. МГУ, сер. физ., № 3, 92 (1962); Elastic waves of finite amplitude in solids and anharmonicity of the lattice. Acustica 13, 1086 (1963).
20. Kroger H., Electron-stimulated piezoelectric nonlinear acoustic effect in CdS. Appl. Phys. Letters 4, № 11, 190 (1964).
21. Elbaum C., Truell R., Dependence of ultrasonic anharmonic effects and stress wave propagation on density of charge carriers in cadmium sulphide. Appl. Phys. Letters. 4, 212 (1964).
22. Birch F., Finite elastic strain of cubic crystals. Phys. Rev. 71, 809 (1947).
23. Нраньян А. А., Упругие постоянные высших порядков твердых тел. ФТТ 6, № 7, 2124 (1964).

ЛИТЕРАТУРА

24. Нраньян А. А., Упругие постоянные третьего порядка щелочно-галогидных кристаллов. ФТТ 7, 917 (1965).
25. Neaгmon R. F. S., «Third-order» elastic coefficient. Acta Cryst. 6, 331 (1953).
26. McSkimin H. J., Andreath P., Measurement of third-order moduli of Si and Ge. J. Appl. Phys. 35, 3312 (1964).
27. American Institute of Physics Handbook. McGraw Hill, 1957.
28. Займан Дж., Электроны и фононы. М., ИЛ, 1963.
29. Jones G. L., Kobbet D. R., Interaction of elastic waves in an isotropic solid. J. Acoust. Soc. Am. 35, 5 (1963).
30. Ахизер А., On the absorption of sound in solids. J. Phys. USSR, 1, 277, 289 (1939).
31. Исакович М. А., Изгибные волны конечной амплитуды, сохраняющие форму профиля при распространении. Акуст. ж. 6, 121 (1960).
32. Викторов И. А., Распространение изгибных колебаний конечной амплитуды в плоской пластинке. Акуст. ж. 8, 363 (1962).
33. Викторов И. А., Об эффектах второго приближения при распространении волн в твердых телах. Акуст. ж. 9, 296 (1963).
34. Maуег W. G., Hiedemann E. A., Light diffraction by progressive ultrasound waves in plexiglass. Acustica 10, 65 (1960).
35. Красильников В. А., Гедройц А. А., Об искажении ультразвуковых волн конечной амплитуды в твердых телах. Вестн. МГУ, сер. физ., № 2, 92 (1962).
36. Гедройц А. А., Нелинейные эффекты при распространении ультразвуковых волн в твердых телах. Диссертация, МГУ, 1964.
37. Mahler R. J., Mahon H. P., Miller S. C., Tanttilla W. H., Nonlinear acoustic excitation in GaAs. Phys. Rev. Letters 10, 395 (1963).
38. Dobbs E. R., Chick B. B., Truell R., Attenuation of sound in germanium crystal at ultra-high frequencies and low temperatures. Phys. Rev. Letters 3, 332 (1959).
39. Bömmel H., Dransfeld K., Excitation and attenuation of hypersonic waves in quartz. Phys. Rev. 117, 1245 (1960).
40. Fitzgerald T. M., Chick B. B., Truell R., Ultrasonic attenuation in Al_2O_3 at ultrahigh frequencies and low temperature. J. Appl. Phys. 35, 2647 (1964).
41. Carr P. H., Harmonic generation of microwave phonons in quartz. Phys. Rev. Letters 13, 332 (1964).
42. Баранский К. П., Возбуждение в кварце колебаний гиперзвуковых частот. Докл. АН СССР 114, 517 (1957).
43. Bömmel H., Dransfeld K., Excitation of very high frequency sound in quartz. Phys. Rev. Letters 1, 234 (1958).
44. Tehon S. W., Wanuga S., Microwave acoustics. Proc. IEEE 52, № 10, 1113 (1964). Русск. перевод: «Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике» 52, № 10, 1210 (1964).
45. Shiren N. S., Nonlinear acoustic interaction in MgO at 9 Gc/sec. Phys. Rev. Letters 11, 3 (1963).

46. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Случ В. Н., Сухаревская О. Ю., О некоторых явлениях при вынужденных нелинейных колебаниях акустических резонаторов. Акуст. ж. (в печати).
47. Rollins F. R., Interaction of ultrasonic waves in solid media. Appl. Phys. Letters 2, 147 (1963).
48. Rollins F. R., Taylor L. N., Todd P. H., Ultrasonic study of three-phonon interactions. Phys. Rev. 136, A597 (1964).
49. Гунь Сю-фэнь, Зарембо Л. К., Красильников В. А., Нелинейное взаимодействие упругих волн в твердых телах. Акуст. ж. 11, 112 (1965).
50. Гунь Сю-фэнь, Зарембо Л. К., Красильников В. А., Экспериментальное исследование комбинационного рассеяния звука на звуке в твердом теле. ЖЭТФ 48, 1598 (1965).

ПОЛУЧЕНИЕ МОЦНЫХ ЗВУКОВЫХ И УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Этот раздел посвящен методам получения мощных звуковых и ультразвуковых колебаний и волн в газах, жидкостях и твердых телах. Здесь не будут рассматриваться методы получения средних и малых интенсивностей, так как по этим вопросам есть много различных руководств. Нам хотелось бы обратить внимание читателей на ряд особенностей получения интенсивных колебаний и волн, а также отметить возможные причины, ограничивающие, во всяком случае в настоящее время, дальнейшее повышение интенсивности звука.

В последнее время разработаны разнообразные методы получения очень интенсивных непериодических возмущений, которые вызываются различными источниками (ударная трубка, мощные искровые разряды, химические или ядерные реакции, сопровождающиеся взрывом, и др.) и при которых уже становятся неприменимыми нелинейные акустические приближения. Это область сильных ударных волн. Методы получения сильных ударных волн не будут здесь рассматриваться.

§ 1. Искусственные источники (генераторы) мощного звука в газах

Имеется ряд источников мощных звуков и особенно шумов, возникающих в различных системах (реактивных ракетных и самолетных двигателях, мощных топках и т. д.), где эти явления нежелательны, а зачастую даже вредны. Генерация звука (шума) в потоке рассмотрена в гл. 10 и 11, а генерация под действием тепловых источников — в гл. 12. В этом параграфе рассматриваются

только искусственные генераторы, позволяющие получать мощные звуки с возможностью использовать их для различных практических целей.

Более или менее точное измерение плотности энергии или уровня звука при очень мощных звуках представляет определенные трудности, поэтому следует относиться с

достаточной осторожностью к цифрам, приводимым в различных работах.

Наиболее интенсивные искусственные звуковые и ультразвуковые колебания в газах получены с помощью сирен. В 1941—1942 гг. для предупреждения о воздушных налетах в США была разработана звуковая сирена [1], потребляющая энергию около 70 л. с. и отдающая энергию в виде звуковой волны

около 50 л. с. (37,3 квт). Максимальный измеренный уровень звука этой сирены был определен на выходе из рупора и составлял 164 дб (по отношению к интенсивности 10^{-16} вт/см²) (2,5 вт/см²) на частоте 500 гц. Пересчет уровня к горлу рупора показывает, что уровень звука составлял 184 дб (~ 263 вт/см²).

Сирена значительно меньшей общей мощности описана в [2]. Она позволяла получать в диапазоне 3—30 кгц уровни от 145 дб до 160 дб (0,03—1,00 вт/см²). Схема конструкции этой сирены показана на рис. 80. По патрубку 1 воздух подавался в камеру 2, откуда, проходя через зубцы на краях ротора 3, попадал на конические выходные отверстия 4 статора 6. Отверстия 4 располагались в горле рупора, который не показан на рисунке. Ротор закреплен на оси мотора 5 и вращается на очень близком ($\sim 0,001$ мм) расстоянии от статора; винт 7 служит для регулировки этого зазора. Ширина зубцов ротора несколько шире, чем отверстия статора, что улучшает акустиче-

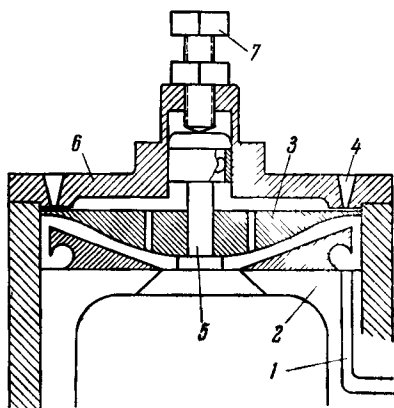


Рис. 80. Схема мощной сирены.

скую отдачу сирены. Поскольку сирена рассчитывалась также и на ультразвуковой диапазон частот, т. е. на большее число оборотов ротора (до 20 000 *об/мин*), особое внимание было уделено механической прочности и легкости ротора. Ротор сделан из прочного алюминиевого сплава. Помимо этого, одна из образующих ротора, как это видно на рис. 80, имеет экспоненциальную форму, что сделано для того, чтобы при вращении в теле ротора не возникали механические напряжения, превышающие предел прочности. В стоячей волне с помощью этой сирены удалось получить уровень ~ 170 *дб* (10 *вт/см²*).

Приблизительно такие же уровни звука были получены на частотах 400—1200 *гц* в [3], где звук, создаваемый сиреной, концентрировался в узкой трубке; пиковые значения звукового давления на некотором расстоянии от источника звука составляли 0,11 *атм*.

Особенности конструкции сирены на частоты до 15 *кгц* с уровнем звука 163—165 *дб* (2 — $3,1$ *вт/см²*) приведены в [4]. Сирена на частоты 60—300 *гц* с общей акустической мощностью $\sim 2,2$ *квт*, создающая максимальный уровень 153 *дб* ($0,22$ *вт/см²*), описана в [5].

Сирены не являются монохроматическими источниками звука; в спектре излучения (особенно мощного) помимо основной частоты, определяющей скоростью вращения ротора и числом зубцов, присутствуют еще и гармоники.

Для получения интенсивного звука и ультразвука могут быть также использованы ультразвуковые свистки различных типов. Они, однако, имеют более низкий коэффициент полезного действия, чем сирены, и, кроме того, дают (во всяком случае конструкции, разработанные до сих пор) меньшие интенсивности звука.

Возможность получения больших интенсивностей в результате хаотичной интерференции при реверберации была использована в [6]. Громкоговорители были в этой работе нагружены на реверберационный ящик сравнительно малого размера с хорошо отражающими поверхностями. Таким образом были получены уровни до 143 *дб* ($0,02$ *вт/см²*). Этот метод применялся для исследования воздействия мощного шума на различную аппаратуру. Следует сказать, что возможности «накачивания» звуковой энергии в объемы, ограниченные хорошо (без потерь)

отражающими поверхностями, лимитируются возникновением в среде разрывов, что приводит к существенному увеличению диссипации звуковой энергии (см. гл. 3—4).

Максимальные акустические числа Рейнольдса, полученные до сих пор в воздухе, $\sim 10^6$ — 10^7 ; это по крайней мере на два порядка больше максимального числа для воды ($\sim 10^4$), т. е. нелинейные диссипативные потери в газах, по-видимому, играют значительную роль. Предельно достижимые интенсивности звука в воздухе, вероятно, ограничиваются звуковыми давлениями порядка 1 атм. При этом в разрежениях будет достигаться вакуум. Для плоской синусоидальной волны в воздухе это соответствует интенсивности $\sim 1,2 \text{ квт/см}^2$. До настоящего времени, однако, такие интенсивности не были получены экспериментально.

При больших интенсивностях возникает сильный акустический ветер (даже когда приняты меры для того, чтобы устранить потоки, связанные с особенностями работы источника звука, например, перекрыть экраном, «прозрачным» для звука, потоки воздуха от сирены). В работе [2] при интенсивностях $\sim 1 \text{ вт/см}^2$ в воздухе скорость течения была порядка нескольких м/сек. В интенсивном звуковом или ультразвуковом поле происходит быстрое нагревание сильно поглощающих материалов. При работе сирены, показанной на рис. 80, в течение 17 мин удавалось зажечь вату, помещенную в сосуде Дьюара; сосуд находился перед работающей сиреной [2]. Из-за большого поглощения при этом зажигался только тонкий поверхностный слой. В этой же работе сделан ряд эффектных опытов (кипячение кофе, зажигание табака в трубке и др.). Возможно, эти наблюдения в дальнейшем послужили основанием для разработки методов сушки различных материалов в звуковом поле.

§ 2. Получение интенсивного ультразвука в жидкостях

Наибольшие интенсивности ультразвука получены в жидкостях с помощью различного рода электромеханических преобразователей. Применение фокусировки позволило получить здесь интенсивности, по крайней мере на

порядок превышающие максимальные интенсивности, полученные в газах [7].

Методы получения мощного ультразвука в жидкостях существенно отличаются от методов получения интенсивного ультразвука в газах. Подавляющее большинство работ относится к диапазону частот от нескольких сотен килогерц до нескольких мегагерц. Это объясняется тем, что на более низких частотах мощный ультразвук сопровождается энергичным развитием кавитационных процессов. На более высоких частотах часто применяемые в качестве электромеханических преобразователей кварц или пластинки из других пьезоэлектриков слишком тонки, механически и электрически не прочны, что практически исключает возможность работ с ними при высоких интенсивностях.

Ультразвуковые волны средней интенсивности (порядка нескольких $вт/см^2$) могут быть получены с помощью магнитострикционных преобразователей или, скажем, преобразователей из поликристаллического титаната бария. Однако внутренние механические потери при мощных колебаниях таких преобразователей велики; это приводит к сильному разогреву преобразователя в процессе излучения, к изменению его рабочих параметров — уходу резонансной частоты и др. Все это в значительной мере затрудняет использование такого рода преобразователей при получении больших интенсивностей. Поэтому во всех работах, где были получены рекордно большие интенсивности без фокусировки, в качестве преобразователя использовался кварц.

Кварц является наиболее подходящим пьезоэлектриком для получения интенсивностей, больших $15-20 \text{ вт/см}^2$. Есть, однако, ряд причин, ограничивающих сверху уровень получаемых интенсивностей и при использовании кварцевых преобразователей. Рассмотрим факторы, оказывающие влияние на работу кварцевого преобразователя при излучении интенсивного ультразвука.

Максимальная интенсивность в той или иной мере может ограничиваться [8]: 1) механической прочностью кварца; 2) электрической прочностью кварца; 3) электрической прочностью окружающей среды; 4) электрической прочностью системы кварц — среда — кварцедержатель;

5) кавитацией у поверхности кварцевой пластинки; 6) прочностью металлических электродов, нанесенных на поверхность кварца; 7) добротностью кварца с кварцедержателем.

Каждый из этих факторов сложен и недостаточно изучен сам по себе, однако по тем сведениям, которые имеются в литературе, можно судить о их влиянии.

а) Факторы, ограничивающие мощность пьезоэлектрических преобразователей

При получении мощного ультразвука амплитуда колебаний становится настолько большой, что принципиально возможно разрушение преобразователя. Для грубой оценки порядка интенсивности, при которой это становится возможным, будем считать, что применимо определение интенсивности из линейной акустики (1.61) и что линейный закон Гука выполняется вплоть до разрушения. Тогда максимальная интенсивность для пластины, работающей на резонансе:

$$J_{\max} = \frac{\rho_0 c_0}{2} \left(\frac{\pi c_1 E_{\max}}{E} \right)^2, \quad (9.1)$$

где ρ_0 и c_0 — плотность и скорость звука в среде, c_1 — скорость звука в пьезоэлектрике, E_{\max} — предел механической прочности пьезоэлектрической пластинки, E — ее модуль Юнга. Известно [9], что сопротивление маленьких образцов кварца разрыву (на порядок меньшее, чем сопротивление раздавливанию) составляет $\sim 10^3$ кг/см². Подставляя это значение E_{\max} в (9.1), получим для кварцевой пластинки $J_{\max} \sim 10^5$ вт/см² *). Поскольку эта интенсивность на три порядка превышает максимальные интенсивности, получаемые экспериментально, даже при такой весьма приближенной оценке можно считать, что механическая прочность кварца не ограничивает повышения интенсивности.

Электрический импеданс кварца велик. Поэтому для получения больших интенсивностей звука на кварцевый преобразователь подается высокое напряжение, при кото-

*) Приводимая в [8] максимальная интенсивность на порядок меньше, что, однако, не меняет вывода.

ром становится возможным пробой кварца. Известно [9], что электрическая прочность кварца в направлении, перпендикулярном к оптической оси, составляет $4 \cdot 10^6 \div 7 \cdot 10^6$ в/см. При подаче таких напряженностей электрического поля интенсивность звука (разумеется, при сохранении линейных пьезоэлектрических соотношений) была бы $\sim 10^6$ вт/см². Максимальные экспериментальные напряженности поля при излучении интенсивного ультразвука в мегагерцевом диапазоне, однако, не превышают $\sim (6 \div 10) \cdot 10^4$ в/см.

Отметим, что значения механической и электрической прочности кварца в значительной мере зависят от условий измерения этих величин и от особенностей образцов, подвергнутых исследованию. Однако, поскольку эти значения принципиально позволяют получать интенсивности ультразвука, на 3—4 порядка бóльшие, чем максимальные полученные экспериментально до настоящего времени, можно считать, что эти оба фактора не определяют верхний предел интенсивности звука.

При получении ультразвука большой интенсивности кварцевая пластинка обычно помещается в жидкий диэлектрик (трансформаторное масло или другое изолирующее масло). Электрическая прочность не особенно тщательно очищенного трансформаторного масла, часто используемого в качестве жидкого изолятора, при постоянном напряжении составляет $\sim (1 \div 2) \cdot 10^4$ в/см. Как следует из сказанного ранее, эта прочность на два порядка ниже электрической прочности кварца и практически определяет максимально возможные экспериментальные интенсивности ультразвука [8, 10, 11]. При тщательной очистке масла от газообразных, жидких и твердых загрязнений пробивные напряжения удаётся повысить в несколько раз; так обычно и делается при получении больших мощностей. Помимо этого, излучатели мощного ультразвука, как правило, имеют ряд конструктивных особенностей, снижающих опасность электрического пробоя. Форма и расположение электродов выбираются такими, чтобы не было опасных локальных повышений напряженностей электрического поля и чтобы расстояние между электродами в жидком диэлектрике было по возможности бóльшим.

Электрическая прочность жидких диэлектриков более высока при работе в импульсном режиме или даже при работе с кратковременным включением пистолета звука (манипуляционный режим), что позволяет получить при прочих равных условиях большие интенсивности ультразвука. Эти режимы более благоприятны также тем, что не возникает кавитация в жидком диэлектрике (см. гл. 7), которая не только облегчает электрический пробой, но и приводит к уменьшению излучаемой мощности из-за уменьшения волнового сопротивления среды, потерь на кавитацию и рассеяние звука. Электрический пробой приводит, как правило, к местному сильному разогреву и в результате этого к растрескиванию кварцевой пластины.

б) Экспериментальные работы по получению интенсивных ультразвуков

К настоящему времени опубликован ряд работ по получению интенсивных ультразвуковых колебаний в нефокусированном пучке. В большинстве случаев интенсивный ультразвук использовался для воздействия на биологические объекты. Вуд и Люмис [12] на частоте 350 кГц получили 35 вт/см². Ойяма [13] получил на частоте 450 кГц 37 вт/см². Эпштейн, Андерсон и Харден [8] 43 вт/см² на частоте 1 МГц. Зелман и Уилкинс [10] получили 41 вт/см² в диапазоне частот 950 ÷ 1700 кГц и 55 вт/см² на частоте 1,2 МГц; применение в этой работе простого концентратора позволило увеличить интенсивность до 73 вт/см². 44—45 вт/см² на частоте 200 кГц было получено Кингом [14]. Барда [11] на частоте 1000 кГц получил интенсивность 42,2 вт/см². Все перечисленные работы были проведены с кварцевыми преобразователями. Дальнейшее повышение интенсивности в большинстве случаев лимитировалось электрической прочностью жидкого изолирующего диэлектрика (трансформаторного масла).

Интенсивность измерялась во всех случаях тепловыми методами: определялись либо температура трансформаторного масла в ванне излучателя, либо нагревание облучаемой жидкости в калориметре. В [8] измерение интенсивности производилось методом теплового замещения:

определялась температура трансформаторного масла в ванне при работе излучателя и затем производилось эквивалентное нагревание электрическим нагревателем. Точность измерения интенсивности обычно не превышает 10%. Следует отметить, что в некоторых из перечисленных работ калориметр располагался при измерении на некотором расстоянии от излучателя, что не могло не привести к занижению значений интенсивности из-за увеличения поглощения при больших интенсивностях (см. гл. 3, 4). Приведенные работы относятся к непрерывным режимам излучения.

Целая серия работ по применению мощного ультразвука для биологических и терапевтических целей была проделана за последнее десятилетие [15—17]. В этих работах был получен мощный ультразвук порядка нескольких сотен вт/см^2 . Поскольку при этих экспериментах не было необходимости в длительном воздействии (более или менее длительное воздействие такого мощного звука приводит к различного рода нежелательным явлениям: параличу конечностей у мелких животных, сильному повреждению поверхностных тканей ожогового характера и др.), излучатель работал либо в манипуляционном режиме: некоторое сравнительно небольшое (порядка нескольких секунд) время, либо в импульсном режиме. Так, в работе [16] сообщается о получении с плоского кварцевого излучателя 350 вт/см^2 и в импульсном режиме 550—600 вт/см^2 , в работе [15]—300 вт/см^2 .

в) «Предельная» интенсивность плоских пьезоэлектрических излучателей

Интенсивность звука, создаваемая пьезоэлектрической пластиной, нагруженной на среду с волновым сопротивлением $\rho_0 c_0$, определяется по формуле

$$J_{\max} = A \frac{f^2 v_{\text{эфф}}^2}{\rho_0 c_0} = A \frac{c_1^2 E_{\text{эфф}}^2}{4 \rho_0 c_0}, \quad (9.2)$$

где A — постоянная, зависящая от пьезоэлектрических свойств пластины, односторонней или двухсторонней нагрузки пластины; $f = c_1/2d$ — собственная частота пластины,

c_1 — скорость звука в материале пластины, d — ее толщина, $V_{\text{эфф}}$ — эффективное напряжение, а $E_{\text{эфф}}$ — эффективная напряженность поля. Как уже отмечалось, ограничение на максимальные интенсивности накладывается величиной пробивной напряженности поля жидкого диэлектрика. При расстояниях между высоковольтными электродами, больших 0,01 мм, пробивная напряженность поля может быть представлена в виде эмпирической формулы:

$$E_{\text{пр}} = E_0 e^{-\alpha d'},$$

где E_0 и α — постоянные, зависящие от расположения и формы электродов, от электрической прочности жидкого диэлектрика и от длительности приложения напряжения; d' — эффективная длина пути пробоя: $d' \simeq d + d_0$, где d_0 — расстояние, зависящее от ширины неметаллизованного ободка пьезоэлектрической пластины.

Подставляя это значение $E_{\text{пр}}$ в (9.2), получим:

$$J_{\text{max}} = A \frac{c_1^2 E_0'^2}{4\rho_0 c_0} e^{-\frac{\alpha c_1}{f}}, \quad \text{где } E_0' = E_0 e^{-\alpha d_0}. \quad (9.3)$$

Поскольку E_0' и α известны недостаточно точно, постольку и теоретические «предельные» интенсивности из (9.3) в некоторой мере произвольны. Однако некоторые качественные закономерности для J_{max} выполняются: наибольшие интенсивности могут быть получены в области частот порядка нескольких Мгц.

В [8] были рассчитаны по (9.3) «предельные» ультразвуковые интенсивности для кварца при различных частотах (табл. 14)*. (Предполагалось, что для трансформаторного масла $E_0' = 130$ кв/см, $\alpha = 0,58 \div 0,86$, а для кварца постоянная $A = 1,44 \cdot 10^{-13}$.)

К этому расчету нужно подходить с осторожностью как при низких частотах, ибо для больших расстояний d соотношение $E_{\text{пр}} = E_0 e^{-\alpha d}$ перестает быть справедливым, так и при очень высоких частотах, где определяющую роль начинает играть хрупкость пластины.

*) В таблице приведены значения J_{max} также и в тех областях, где пьезокварцевые пластины не применяются в качестве источников звука.

Таблица 14

f , кГц	E_{\max} , кВ/см	J_{\max} , Вт/см ²
0	0	0
100	19	17
500	89	377
1000	108	554
1500	115	629
2000	118	671
4000	124	739
∞	130	814

Подводя итог, можно сказать, что основным фактором, затрудняющим получение больших ультразвуковых интенсивностей с помощью плоских пьезоэлектрических излучателей в мегагерцевой области частот, является электрическая прочность жидкого диэлектрика. Электрическую прочность можно несколько увеличить тщательной очисткой и осушкой диэлектрика, укорочением рабочих экспозиций до нескольких секунд, работой в импульсном режиме, увеличением электрической прочности системы крепления кварца. Эти меры, однако, принципиально не позволяют получить резкого увеличения интенсивности в нефокусированном пучке. В настоящее время экспериментально получены интенсивности ультразвука, по порядку величины равные «предельным» [16]. Однако акустические числа Маха для волн от плоских излучателей все-таки остаются много меньшими, чем единица. Существенное увеличение интенсивности ультразвука можно получить, применяя фокусировку.

г) Получение интенсивного ультразвука с помощью фокусировки

В этом разделе мы не будем рассматривать различного рода фокусирующие системы и их особенности; читатель может найти этот материал в обстоятельной работе [18].

До сих пор фокусировка применялась на ультразвуковых частотах и, как правило, в жидкостях и твердых телах. Выше отмечалось, что максимальные интенсивности излучения плоских пластинок не превышают нескольких сот $вт/см^2$. Применение фокусировки позволяет получить во всяком случае на порядок большие интенсивности ультразвука. При этом большие интенсивности получаются в сравнительно небольших объемах акустического поля, однако это, по-видимому, не может считаться недостатком метода, так как применение любого другого метода (если бы это было возможно) из-за громадного нелинейного затухания (см. гл. 3—4) привело бы к тому, что очень большая плотность звуковой энергии была бы также сосредоточена в сравнительно небольшом объеме.

Фокусированное излучение можно получить, применяя специальным образом вырезанные пластинки кварца. В одной из первых работ [19] был применен кварцевый излучатель в виде сферически изогнутой пластинки (конкавный излучатель), вырезанной так, что в центре излучателя был X-срез; край пластинки, таким образом, отличался от X-среза. Это обстоятельство неблагоприятно сказывалось на работе такого источника звука не только потому, что края излучателя имели другую пьезоэлектрическую постоянную, но и потому, что к краям менялся упругий модуль. При постоянной толщине такого излучателя краевые участки работали не на резонансной частоте. С помощью этого излучателя удалось получить интенсивность в фокусе до $3,4 \text{ квт/см}^2$.

Фокусирующие излучатели, сферические и цилиндрические, впоследствии начали делать из поликристаллического титаната бария (см., например, [20]). Титанатовые излучатели имеют ряд преимуществ (возможность однородной поляризации, относительно простой процесс формовки излучателей сложной конфигурации и т. д.), однако, как уже отмечалось, они сильно разогреваются в процессе работы, и максимальные интенсивности, полученные до сих пор с таких излучателей вблизи поверхности, не превышают $\approx 10 \text{ вт/см}^2$, что существенно ниже интенсивности, получаемой с кварцевых излучателей.

Решение задачи о получении мощного ультразвука с помощью фокусировки звука, излучаемого кварцевыми

пластинками, предложено в [7]. Этот метод свободен от недостатков конкавной пластинки. Схема фокусирующего излучателя показана на рис. 81. На полуволновой алюминиевой сферической оболочке 1 крепились 200 кварцевых пластинок 2, поверхность которых отшлифована по форме алюминиевой оболочки. Последняя одновременно служила сосудом, в который наливалась тщательно обезгаженная

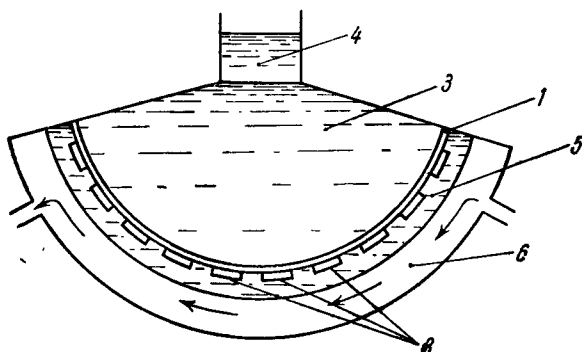


Рис. 81. Схема фокусирующего излучателя для получения сверхмощного ультразвука.

вода 3. В фокусе мог помещаться сосуд 4 с исследуемой средой. Кварцевые пластинки работали в электроизоляционном кремний-органическом масле 5, охлаждаемом проточной водой 6, что позволяло работать с напряжением 6—7 кв. Резонансная частота 500 кГц выбрана потому, что на более высоких частотах растет поглощение в жидкости, снижающее эффективность фокусировки, а на более низких частотах увеличиваются размеры фокального пятна. Радиус фокального пятна на этой частоте 1,98 мм. Предварительное испытание такого излучателя, проведенное со сравнительно небольшими напряжениями, показывает, что средняя интенсивность в фокусе $\sim 6 \text{ квт/см}^2$, что соответствует звуковым давлениям 140—150 атм; максимальная интенсивность в центре фокального пятна $\sim 18—20 \text{ квт/см}^2$. Авторы предполагают получить звуковые давления $\sim 10^3 \text{ атм}$, что приближается к максимальным интенсивностям, которые могут быть получены при фокусировке (см. ниже).

При фокусировке мощного ультразвука становится возможным сильное нелинейное искажение формы профиля волны вплоть до образования пилообразной волны. Поскольку это приводит к увеличению поглощения (см. гл. 3—4), при расчете эффективности концентраторов необходимо учитывать эти особенности распространения интенсивного ультразвука [21, 22].

В [23] было показано, что для сферического концентратора нелинейные искажения должны приниматься во внимание в зависимости от величины параметра

$$a = -\frac{1}{\pi} + \frac{2\varepsilon}{\lambda c_0} F v_0 \ln \left(\frac{F}{r_\phi} \right), \quad (9.4)$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, F — фокусное расстояние концентратора,

$$r_\phi = \frac{\lambda}{\pi \sin |\alpha_m|},$$

α_m — половина угла раскрытия концентратора, v_0 — амплитуда колебательной скорости на поверхности концентратора. При $a < 0$ пилообразная волна не успевает образоваться до фокуса, при $a \geq 0$ она образуется до фокуса и необходимо принимать во внимание сильное затухание пилообразной волны. В последнем случае амплитуда колебательной скорости в фокусе будет:

$$v_\phi = \frac{F v_0}{r_\phi} \left[1 - \frac{1}{\pi} + \frac{2\varepsilon}{\lambda c_0} F v_0 \ln \left(\frac{F}{r_\phi} \right) \right]^{-1}. \quad (9.5)$$

Выше говорилось, что на заданное расстояние через нелинейную среду может быть передана ограниченная мощность. Из (9.5) также следует, что нелинейные искажения принципиально ограничивают сверху максимальные амплитуды колебательной скорости, которые могут быть получены методом фокусировки со сферическим концентратором. Действительно, при амплитуде скорости на поверхности концентратора $v_0 \rightarrow \infty$ из (9.5) следует предельная амплитуда колебательной скорости в фокусе сферического концентратора:

$$v_\phi^{\text{пред}} = \frac{\lambda c_0}{2\varepsilon r_\phi \ln(F/r_\phi)}. \quad (9.6)$$

Считая $\sin \alpha_m \sim 1$, получим для предельного акустического числа Маха

$$M_{\Phi}^{\text{пред}} = \frac{\pi}{2\varepsilon \ln \left(\frac{F\pi}{\lambda} \right)}.$$

Таким образом, для обычных сферических концентраторов акустические числа Маха не превышают десятые доли единицы *). Строго говоря, эта оценка приближенна, так как при $v_0 \rightarrow \infty$ не пригодно акустическое приближение; концентратор перестает в этом случае выполнять свои функции, ибо амплитуда скорости на поверхности сферы больше амплитуды в фокусе.

Аналогично для цилиндрического концентратора:

$$a = -\frac{1}{\pi} + \frac{4\varepsilon}{\lambda c_0} v_0 F^{1/2} (F^{1/2} - r_{\Phi}^{1/2}),$$

где

$$r_{\Phi} = \left(\frac{\lambda}{4F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \alpha_m}.$$

При $a \geq 0$ необходимо считаться с нелинейными искажениями и связанной с этим диссипацией энергии в сходящейся цилиндрической волне.

Не только образование пилообразной волны и ее затухание влияет на работу концентратора при получении предельно больших интенсивностей звука. Даже при специальных мерах предосторожности вблизи фокуса может возникнуть кавитация **). Поскольку возникновение кавитационного пузырька — явление случайное, в фокусирующих системах это может привести к сильным флуктуациям интенсивности звука в фокусе.

Оценим те интенсивности, при которых даже очень хорошо дегазированная вода все-таки будет кавитировать. Известно (см. гл. 7), что максимальная полученная экспериментально прочность воды на разрыв $\sim 280 \text{ кг/см}^2$, что дает для интенсивности $\sim 20 \text{ кв/см}^2$. Эта интенсивность на два порядка меньше, чем максимальная интенсивность,

*) Предельные интенсивности в воде при этом $\sim 10^6 \text{ вт/см}^2$.

***) В фокусирующих системах из-за того, что область больших звуковых давлений мала, а вероятность разрыва пропорциональна размеру этой области, влияние кавитации несколько уменьшается.

получаемая в результате образования и сильного поглощения пилообразной волны по (9.6), т. е. в фокусирующих устройствах ограничение интенсивностей сверху, по-видимому, определяется в основном кавитацией.

§ 3. Получение интенсивного звука и ультразвука в твердых телах

Если в газах и жидкостях методы получения больших интенсивностей звука более или менее разработаны, то в случае твердых тел этого сказать нельзя. Более или менее исследованной областью частот здесь является область ультразвука. В области ближнего ультразвука разработаны весьма эффективные методы получения мощных колебаний в стержневых системах.

Наибольшие интенсивности колебаний в настоящее время получены с помощью твердых стержневых концентраторов в звуковом и ближнем ультразвуковом диапазоне частот. Схема такого концентратора показана на рис. 82. К электрическому преобразователю 1 (это может быть как магнитострикционный, так и пьезоэлектрический преобразователь) крепится трансформатор (концентратор) 2. Сечение концентратора меняется по определенному закону. В зависимости от закона изменения образующей концентратора меняется коэффициент трансформации. Приведем данные для некоторых типов концентраторов, полученные в предположении,

Рис. 82. Схема концентратора для получения мощных колебаний в звуковой и ближней ультразвуковой области частот.

что в концентраторе распространяется идеальная плоская волна.

Для конического концентратора [24] резонансная длина l определяется из условия:

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{(kl)^2 N + 1}, \quad (9.7)$$

где $N = d_0/d_l$ — отношение диаметра концентратора на входе к диаметру на выходе, $k = \omega/c_0$, c_0 — скорость звука в стержне. Коэффициент усиления по скорости, т. е. отношение колебательной скорости на свободном узком конце к колебательной скорости на входе, при резонансной длине концентратора таков:

$$|R| = \left| N \left[\cos kl - \frac{N-1}{Nkl} \sin kl \right] \right|. \quad (9.8)$$

Для этого типа концентраторов $R < N$; при $N \rightarrow \infty$ для концентратора, работающего на нижней резонансной частоте, максимально возможный коэффициент усиления $\simeq 4,61$ [24, 25].

Экспоненциальный концентратор, диаметр которого изменяется по закону $d_x = d_0 e^{-\alpha x}$, если на широком конце задана амплитуда смещения, а другой конец свободен, позволяет получить усиление:

$$R = \frac{k' e^{\alpha L}}{\alpha \operatorname{sh} k' L \mp k' \operatorname{ch} k' L}, \quad (9.9)$$

где $k' = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, k — волновое число для стержня, L — длина концентратора. Из (9.9) видно, что усиление возможно лишь при $\alpha < k$. Условие $\alpha = k$ определяет граничную, часто называемую критической, частоту $\omega_k = c_0 \alpha$, ниже которой концентратор работает как «закритический волновод», т. е. затухание становится настолько большим, что концентратор перестает выполнять свои функции.

Из (9.9) коэффициент усиления максимален при резонансной длине:

$$L_p = \frac{n\lambda}{2} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad (9.10)$$

здесь n — целое число.

Резонансный коэффициент усиления:

$$R_p = N = e^{\alpha L_p} = e^{\frac{n\pi \left(\frac{\alpha}{k} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right]^{1/2}}}. \quad (9.11)$$

Из (9.11) видно, что при резонансной частоте концентратора, близкой к критической, можно получить с помощью

экспоненциального концентратора (в отличие от конического) достаточно большие усиления.

Согласно [24] еще более удачным в смысле коэффициента усиления является катеноидальный концентратор, диаметр которого изменяется по закону $d_x = d_l \operatorname{ch} \gamma(l - x)$. Уравнение для определения его резонансных частот:

$$k'l \operatorname{tg} k'l = -\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} \operatorname{Arch} N, \quad (9.12)$$

где $k' = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, $N = d_0/d_l$. Для концентратора резонансной длины коэффициент усиления

$$|R| = \left| \frac{N}{\cos k'l} \right|. \quad (9.13)$$

Как видно из (9.13), с катеноидальным концентратором можно получить $R > N$.

Для двойного четвертьволнового ступенчатого цилиндрического концентратора, показанного на рис. 83, коэффициент усиления дается соотношением:

$$R = \left(\frac{d_0}{d_l} \right)^2 = N^2.$$

Последний концентратор, наряду с катеноидальным, дает коэффициент усиления, больший N . Однако ступенчатый концентратор используется не всегда, поскольку максимальные напряжения, возникающие в месте перехода от большого сечения к малому, могут привести к разрушению металла и выходу из строя концентратора, а также потому, что этот концентратор имеет весьма узкую резонансную кривую и небольшие нагрузки конца концентратора резко меняют амплитуду колебаний.

Для твердых концентраторов максимальные амплитуды механического напряжения принципиально ограничиваются величиной напряжения разрыва материала концентратора E_{\max} . Вместе с тем распределение и максимальная величина переменного напряжения в теле концентратора зависят существенным образом от его формы. Оценка максимально возможных скоростей может быть сделана [26] по соотношению

$$v_{\max} \sim E_{\max} \Phi / \rho c_0,$$

где Φ — формфактор, зависящий от формы концентратора.

В таблице 15 приведены значения максимальных скоростей смещения в концентраторе оптимальной формы по [26]. Интересно отметить, что максимально достижимые числа Маха здесь, как и в случае концентраторов, работающих в жидкости, меньше единицы (за исключением концентратора из титана).

Влияние нелинейных эффектов на работу концентраторов при больших коэффициентах усиления почти не исследовано. Возможно, что трансформация типов волн, характерная для этих эффектов (см. гл. 8), может снизить расчетный коэффициент усиления и предельные колебательные скорости.

Отметим, что значения предела прочности, использованные при расчетах табл. 15, относятся к статической и однократной нагрузке образца. При работе концентратора с удвоенной частотой изменяется знак механического напряжения, что, имея в виду усталость металла и др. особенности металлов,

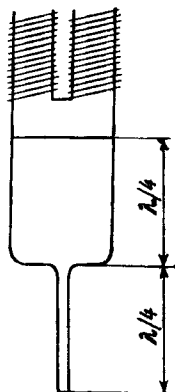


Рис. 83. Четверть-волновый ступенчатый концентратор.

Т а б л и ц а 1

Максимальные (расчетные) колебательные скорости, которые могут быть получены с оптимальным трансформатором из разных материалов

Материал	Плотность ρ_0 , г/см ³	Скорость звука $c_0 \cdot 10^{-5}$, см/сек	Напряжение разрыва $E \cdot 10^{-9}$, дн/см ²	Максимальная колебательная скорость v_{\max} , см/сек
Латунь	8,45	3,23	1,5	1726
Бронза	8,5	4,07	1,85	1680
Дюралюминий	2,79	5,13	1,9	4150
Монель	8,9	4,3	1,78	1460
Сталь	7,9	5,24	5,5	4150
Титан	4,51	4,9	7,2	10240

также может существенно понизить предельные колебательные скорости.

Возбуждение колебаний большой амплитуды в твердых телах (и не только в твердых) возможно с использованием не только принципа концентрации, но и других принципов, скажем, интерференции упругих волн или параметрического усиления. Например, на рис. 84 показана схема установки для возбуждения колебаний большой

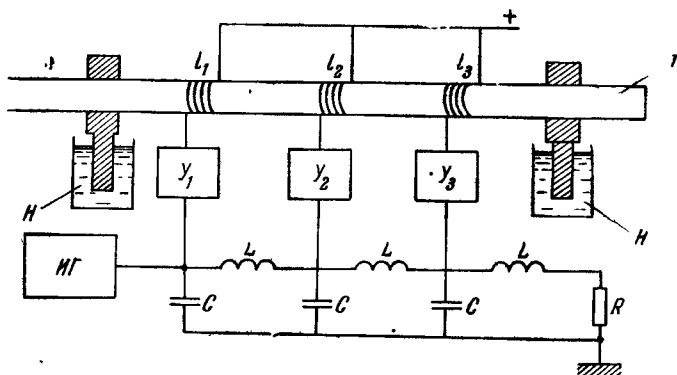


Рис. 84. Схема параметрического усилителя бегущей волны.

амплитуды в магнестрикционной трубке T , аналогичная электронному усилителю с бегущей волной [27]. Импульсный генератор $ИГ$ посылает импульс в усилитель Y_1 и линию задержки, состоящую из LC . Время задержки в линии LC равно времени пробега акустическим импульсом, возбуждаемым обмоткой l_1 в трубке T , расстояния до следующей обмотки l_2 . Таким образом, l_2 возбуждает акустический импульс, накладывающийся на импульс, возбужденный l_1 , и т. д. В результате происходит параметрическое усиление акустического сигнала. Для того чтобы избавиться от нежелательной интерференции, связанной с отражениями от концов трубки T , концы демпфируются (в работе таким образом возбуждались крутильные колебания тонкостенной трубки с магнитным демпфированием) соответствующими нагрузками H ; линия задержки имеет нагрузку R , равную волновому сопротивлению.

Если до сих пор речь шла о получении больших амплитуд в области сравнительно низкочастотного ультразвука, то в заключение этого раздела следует несколько остановиться на новом принципе генерации звука светом, который, по-видимому, открывает возможность получения чрезвычайно больших интенсивностей ультразвуковых и, что особенно интересно, гиперзвуковых волн в твердых телах и жидкостях [28—31]. Исследование этого явления начато в самое последнее время, но полученные уже результаты позволяют считать эти методы перспективными не только для получения больших интенсивностей, но также и для изучения различных свойств твердых тел и жидкостей.

Основные принципы генерации звука светом весьма просты.

В гл. 4 были определены резонансные условия взаимодействия света со звуком (4.1) или взаимодействия фотона с фононом. Эти условия по существу определяли условия дифракции световой волны на звуковой волне. В результате такого взаимодействия частота дифрагировавшего света отличается от частоты падающего света на частоту звука. Если теперь посчитать резонансные условия для взаимодействия двух фотонов с энергиями $h\omega$ и $h(\omega - \Omega)$, в результате которого появляется фонон с энергией $h\Omega$, то эти условия не отличаются от (4.1). Таким образом, при дифракции на звуке когерентного света дифрагировавшая волна может взаимодействовать с падающей световой волной так, что в результате этого взаимодействия возникает звуковая волна, частота и направление распространения которой совпадают с частотой и направлением звуковой волны, вызвавшей дифракцию, т. е. звуковая волна может усиливаться.

Как уже отмечалось, резонансные условия указывают только на возможность, но никак не определяют вероятность того или иного взаимодействия. Вероятность взаимодействия определяется электрострикционными характеристиками среды π , естественно, квадратом напряженности электрического поля световой волны в среде. При вероятности взаимодействия двух фотонов, равной единице, каждая пара взаимодействующих фотонов «отщепляет» фонон; таким образом, максимальная энергия,

преобразуемая в звук, пропорциональна Ω/ω . На самом деле энергия, преобразуемая в звуковую, будет меньше, так как нельзя рассчитывать на то, что каждая пара взаимодействующих фотонов «отщепит» фонон.

Из этих качественных рассуждений видно, что для генерации звука необходимо использовать когерентный свет. При использовании света, скажем, рубинового лазера для генерации гиперзвука частоты $\sim 10^{10}$ *гц* нельзя рассчитывать на получение энергий гиперзвука, больших, чем 10^{-4} от энергии лазерного излучения; при генерации более низких частот эффективность преобразования световой энергии в звуковую еще ниже. Поскольку, однако, лазерная техника бурно развивается и в настоящее время гигантские лазерные импульсы имеют мощность 10^7 — 10^8 *вт*, метод генерации гиперзвука светом является весьма перспективным.

Генерация гиперзвука наблюдалась косвенно по стимулированному бриллюэновскому рассеянию [29]. Прямой эксперимент по усилению и генерации ультразвука (в области десятков *Мгц*) в жидкости проведен в [30]. При очень больших интенсивностях гиперзвуковых волн создаются большие высокочастотные переменные механические напряжения. Кроме того, гиперзвуковые волны очень быстро затухают, передавая свою энергию тепловым колебаниям решетки, что эквивалентно сильному локальному разогреву твердого тела. Предельные интенсивности здесь определяются пределом механической прочности твердых тел. При нынешнем уровне лазерной техники эти предельные интенсивности, вероятно, уже достигнуты и даже пре-
взойдены.

В этой главе в общих чертах были рассмотрены методы получения больших интенсивностей, а также вопрос о предельных интенсивностях, которые принципиально могут быть получены в газах, жидкостях и твердых телах.

Экспериментально в настоящее время получены интенсивности, на порядок или даже несколько порядков меньшие, чем предельные (за исключением, быть может, еще мало исследованных оптических методов генерации). Это

может быть связано с недостаточным исследованием ряда фактов, понижающих верхний предел (например, недостаточно исследовано влияние кавитации в жидкостях на излучаемую мощность, влияние нелинейной трансформации типов волн в твердых телах и др.).

В табл. 16 приведены максимальные экспериментальные интенсивности звука и порядки расчетных предельных интенсивностей, а также ориентировочные причины ограничений.

Максимальные интенсивности звука (равно как и плотности акустической энергии) принципиально, по-видимому,

Таблица 16

Максимальные экспериментальные интенсивности звука и порядки расчетных предельных интенсивностей в разных средах

Среда	Частота, гц	Максимальные экспериментальные интенсивности, $вт/см^2$	Расчетные предельные интенсивности, $вт/см^2$
Газ	$5 \cdot 10^3$	~ 263 [1]	$\sim 1,2 \cdot 10^3$ (образование вакуума в разрежениях)
Жидкость	$1,5 \cdot 10^6$	350—[16], манипуляц. режим, не фокусир.	$\sim 2 \cdot 10^4$ (прочность на разрыв очень чистой воды)
	$1,5 \cdot 10^6$	600—[16], импульсн. режим, не фокусир.	$\sim 10^6$ (нелинейное поглощение в фокусирующих системах)
	$5 \cdot 10^6$	6000—[7], фокусировка	
Твердые тела	$2 \cdot 10^4$	$\sim 10^5$ (расчет для стержневых концентраторов по формулам для плоской волны)	$\sim 10^9—10^{11}$ (предел механической прочности металлов)

могут быть получены в твердых телах, где нет кавитации, а влияние рассмотренных выше нелинейных эффектов сказывается несколько меньше, чем в жидкостях. Для стержневых систем, длина которых, как правило, порядка половины длины ультразвуковой волны, нелинейные искажения (за исключением возможной трансформации типов волн), видимо, не имеют большого влияния и амплитуда напряжений ограничивается пределом прочности материала. Можно сказать, что твердые тела являются несколько лучшими проводниками интенсивных акустических волн, чем другие среды.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Jones R. C., Fifty horsepower siren. *J. Acoust. Soc. Am.* 18, 371 (1946).
- 2 Allen C. H., Rudnick I., A powerful high frequency siren. *J. Acoust. Soc. Am.* 19, 857 (1947).
- 3 Werth G. S., Delsaso L. P., Attenuation of repeated shock waves in tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* 26, 59 (1954).
- 4 Медников Е. П., Две конструкции экспериментальных звуковых сирен. *Акуст. ж.* 4, 59 (1958).
- 5 Вяльцев В. В., Хоргуани В. В., Мощная низкочастотная звуковая сирена. *Акуст. ж.* 7, 377 (1961).
- 6 Hilliard J. K., Fiala W. T., Methods of generating high intensity sound with loudspeakers for environmental testing of electronic components subjected to jet and missile engine noise. *J. Acoust. Soc. Am.* 30, 535 (1958).
- 7 Розенберг Л. Д., Сиротюк М. Г., Установка для получения ультразвука высокой интенсивности. *Акуст. ж.* 5, 206 (1959); Концентратор для получения ультразвуковых колебаний сверхвысокой интенсивности при частоте 1 Мгц. *Акуст. ж.* 9, 61 (1963).
- 8 Epstein L. F., Anderson W. M. A., Harden L. R., High intensity ultrasonics: power output of a piezoelectric quartz crystal. *J. Acoust. Soc. Am.* 19, 248 (1947).
- 9 Кэди У., Пьезоэлектричество и его практические применения, ИЛ, 1949.
- 10 Selman G. G., Wilkins M. H. F., The production of high intensity ultrasonics at megacycle frequency. *J. Sci. Instr.* (London) 26, 229 (1947).
- 11 Bharda T. S., On the generation of high intensity ultrasonic energy and measurement of the output power density of a quartz crystal. *Indian J. Phys.* 27, 496 (1953).
- 12 Wood R. W., Lumis A. L., The physical and biological effects of high frequency sound waves of great intensity. *Phil. Mag.* 4, 417 (1927).

13. Oyama H., Generation and application of intense supersonic acoustic waves. Rep. Radio Res. (Japan) 4, 41 (1934).
14. King A. J., The generation of high intensity ultrasonics. Nuovo Cimento 7, Ser. IX, Suppl. № 2, 129 (1950).
15. Wall P. D., Tucker D., Fry F. J., Mosberg W. H., Use of high intensity ultrasound in experimental neurology. J. Acoust. Soc. Am. 25, 281 (1953).
16. Буров А. К., Получение ультразвуковых колебаний высокой интенсивности для воздействия на злокачественные опухоли у животных и человека. Докл. АН СССР 106, 239 (1956).
17. Скардс И. В., Мощная ультразвуковая установка для озвучивания микроорганизмов. Акуст. ж. 2, 84 (1956).
18. Розенберг Л. Д., Звуковые фокусирующие системы. Изд. АН СССР, 1949.
19. Willard G. W., Focusing ultrasonic radiators. J. Acoust. Soc. Am. 21, 360 (1949); Ultrasonically induced cavitation in water: a step-by-step process. J. Acoust. Soc. Am. 25, 669 (1953).
20. Matliat O., Transducers for producing ultrasonic waves. J. Acoust. Soc. Am. 25, 291 (1953).
21. Хаминов Д. В., Зависимость коэффициента усиления звуковой фокусирующей системы от интенсивности ультразвука в воде. Акуст. ж. 3, 294 (1957).
22. Наугольных К. А., Романенко Е. В., О зависимости коэффициента усиления фокусирующей системы от интенсивности звука. Акуст. ж. 5, 191 (1959).
23. Наугольных К. А., Розенберг Л. Д., Об оптимальном режиме работы мощного концентратора. Акуст. ж. 6, 352 (1960).
24. Меркулов Л. Г., Расчет ультразвуковых концентраторов. Акуст. ж. 3, 230 (1957).
25. Ensminger D., Solid cone in longitudinal half-wave resonance. J. Acoust. Soc. Am. 32, 194 (1960).
26. Neppiras E. A., Very high energy ultrasonics. Brit. J. Appl. Phys. 11, 143 (1960).
27. Rabinow J., Apstein M., Distributed transducer for ultrasonic power. Electronics 27, № 7, 160 (1963).
28. Garmire E., Pandarese F., Townes C. H., Coherently driven molecular vibration and light modulation. Phys. Rev. Letters 11, 160 (1963).
29. Chiao R. J., Townes C. H., Stoicheff B. P., Stimulated Brillouin scattering and coherent generation of intense hypersonic waves. Phys. Rev. Letters 12, 592 (1964).
30. Korpel A., Adler R., Alpiner B., Direct observation of optically induced generation and amplification of sound. Appl. Phys. Letters 5, 86 (1964).
31. Kroll N. M., Excitation of hypersonic vibrations by means of photoelastic coupling of high-intensity light waves to elastic waves. J. Appl. Phys. 36, 34 (1965).

ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ В ОТСУТСТВИЕ ГРАНИЦ

§ 1. Исходные положения и уравнения

В предыдущих главах (гл. 2, 3, 4) мы занимались слабыми нелинейными взаимодействиями типа «давление — давление» (PP -взаимодействие по терминологии гл. 1). В гл. 6 речь шла о нелинейных взаимодействиях типа ΩP («завихренность — давление»). В этой и следующей главах речь будет идти о нелинейном взаимодействии типа «завихренность — завихренность» ($\Omega\Omega$), приводящем к генерации шума (звука) аэродинамическим потоком. Изучение взаимодействия $\Omega\Omega$, даже если речь идет о потоке в отсутствие в нем твердых тел, приводит к обширному кругу задач, связанных с аэродинамической генерацией звука. Под звуком или шумом аэродинамического происхождения мы будем понимать упругие возмущения (давления, плотности), распространяющиеся со скоростью звука и внутренне присущие потоку, так что часть энергии потока тем или иным способом преобразуется в эти возмущения — вне зависимости от того, движется (или колеблется) имеющееся в потоке тело или нет, и есть ли оно в потоке вообще.

Вопрос о порождении звука аэродинамическим потоком занимал многих физиков-акустиков с давних пор. Такие явления, как, например, эоловы тона или вихревой звук и краевой тон, изучались уже более ста лет назад. Однако при изучении указанных явлений, в теории которых велики прежде всего заслуги Рэля, основное внимание было уделено таким сторонам явления, как, например, определение частоты возникающих колебаний. Задача о нахождении интенсивности как вихревого зву-

ка, так и краевого тона не ставилась, и можно считать, что это было одним из упущений теории. Интерес к аэродинамической генерации звука вновь возник в 40-х годах в связи с возможными техническими применениями этой области акустики. К началу 50-х годов в изучении этих задач были достигнуты определенные успехи, которые в некоторой мере отражены в известной монографии Блохинцева «Акустика неоднородной движущейся среды» [1]. К числу этих успехов следует отнести, например, работы Гутина по звуку вращения, Юдина и Блохинцева по вихревому звуку, а также работы по распространению звука в среде со случайными неоднородностями коэффициента преломления (турбулентная атмосфера). Многие из этих вопросов изложены также в монографиях [2—4].

С развитием аэрогидродинамики и реактивной техники возникли новые акустические задачи, связанные с генерацией звука и шума аэродинамическим потоком — как безграничным, так и при наличии в этом потоке твердых тел. Сюда относятся шум дозвуковых и сверхзвуковых струй, как «холодных», так и «горячих», шум турбулентного пограничного слоя, вибрационное горение, вызванное акустическими колебаниями, связанная с ним неустойчивость в работе реактивных двигателей и т. д.

В 1952—1954 гг. появились известные работы Лайтхилла [5, 6], которые заложили основы общей теории аэродинамической и гидродинамической генерации звука. Эти работы вместе с другими, последовавшими за ними, дали возможность для дозвуковых скоростей потока определить интенсивность порожденного шума, его частотный спектр и пространственное распределение. При рассмотрении шума турбулентного происхождения необходимо, как будет видно из дальнейшего, располагать пространственно-временными корреляционными функциями турбулентного потока, т. е. располагать сведениями о его внутренней кинематической структуре, имеющей статистический характер. Современная статистическая теория турбулентности в полной мере не может дать эти сведения, в особенности для таких сложных турбулентных течений, как реактивная струя. Еще сложнее обстоит дело в случае шума, создаваемого сверхзвуковыми потоками. Здесь теоретические исследования только начинаются;

некоторое количество экспериментальных работ имеется, и важность проблемы достаточно осознана.

Эти исследования становятся все более важными в практическом отношении в связи с развитием авиационной и ракетной техники. Поля давлений, создаваемые, например, струей реактивного двигателя, генерируют мощный шум и вызывают вибрации различных конструкций (фюзеляж самолета, корпус ракеты), что приводит к усталости конструкций и сильному воздействию шума на электронную аппаратуру. К решению возникающих здесь задач, естественно, необходим статистический подход. При этом реакция системы на случайное силовое поле может быть линейной, но при больших амплитудах вибраций — и нелинейной. Здесь мы не будем заниматься этими проблемами в таком широком плане, отсылая читателя к ряду статей, содержащихся, например, в [7].

Общая теория аэрогидродинамической теории звука нашла свое применение в разработке теории вихревого звука, краевого тона, шума пограничного турбулентного слоя, генерации шума турбулентными струями, рассеяния звука в турбулентном потоке и т. д. Следует отметить, что многочисленные экспериментальные результаты в основных чертах находятся в хорошем согласии с теорией.

Проблема аэродинамической генерации звука в целом — это типичная проблема нелинейной акустики, которой мы занимаемся в этой книге. Мы имеем здесь дело с теми слабыми нелинейными взаимодействиями, о которых шла речь в гл. 1 и о которых было сказано выше.

Звук или шум, создаваемый потоком, распространение звука в потоке с его особенностями, например турбулентностью, влияние тепловых явлений на распространение звука и его генерацию, — все эти вопросы часто принято теперь объединять одним термином — аэротермоакустика. Недостатком этого термина служит, однако, то обстоятельство, что из этой области при таком названии исключаются шумы и звуки, создаваемые потоком жидкости, а не газа; в то же время значение последней области в настоящее время все более возрастает. Быстрое развитие всех этих разделов приводит к определенной трудности охватить все то ценное, что имеется в литера-

туре до настоящего времени. К этому следует также добавить, что благодаря новизне возникающих задач многое еще нельзя считать установившимся, и, возможно, в дальнейшем теория подвергнется существенной переработке. Вместе с тем можно считать, что уже имеющиеся достижения несомненно закладывают фундамент наших знаний по проблеме аэрогидродинамической генерации звука.

Рассмотрим объем сжимаемой жидкости g , находящейся в произвольном (например турбулентном) движении [5].

Напишем уравнения, описывающие изменения (флуктуации) плотности ρ в большой области вне области g (назовем ее областью G), где жидкость покоится, и сравним их с уравнениями, которые описывают флуктуации плотности в g (рис. 85). Для области G эти уравнения таковы: уравнение неразрывности (1.11) и уравнения движения (1.12). В качестве замыкающего систему гидродинамических уравнений соотношения мы берем условие адиабатичности или изэнтропичности — уравнение (1.6).

Если при малых v_i конвективным (нелинейным) членом в (1.12) можно пренебречь, то из уравнений (1.11) и (1.12) получается волновое уравнение для изменений плотности:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = 0. \quad (10.1)$$

Таким образом, в однородной покоящейся среде, где нет источников, флуктуации плотности распространяются акустически со скоростью c_0 , подчиняясь волновому уравнению (10.1); мы имеем дело с обычным распространением звука. В области G имеется поле гидростатического давления $c_0^2 \rho$, изменения которого пропорциональны изменению ρ с постоянной пропорциональности, равной квадрату скорости звука.

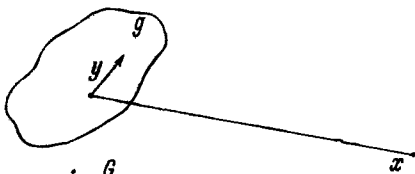


Рис. 85. Области произвольного потока (g) и неподвижной акустической среды (G)

Напишем теперь уравнения для области g . Здесь жидкость не покоится, а находится в произвольном движении, и мы должны воспользоваться не приближенным, а точным уравнением (1.12). Точное уравнение сохранения импульса может быть взято в виде (1.27):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0. \quad (10.2)$$

Здесь P_{ij} — тензор напряжений, имеющий вид:

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \eta \left\{ -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} = p\delta_{ij} - \sigma'_{ij}, \quad (10.3)$$

где тензор вязких напряжений σ'_{ij} определен по (1.26а) при $\eta' = 0$.

Уравнение сохранения импульса можно записать теперь так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (10.4)$$

где тензор плотности потока импульса T_{ij} определяется по (1.26). Взяв производную по x_i от этого уравнения и производную по времени от уравнения неразрывности (1.11) и вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (10.5)$$

Вычтем из обеих сторон этого уравнения $c_0^2 \nabla^2 \rho$. Тогда получим:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}). \quad (10.6)$$

Вводя обозначение

$$\tilde{T}_{ij} = \rho v_i v_j + P_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}, \quad (10.7)$$

имеем основное уравнение теории:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (10.8)$$

Рассматривая \tilde{T}_{ij} , мы можем сказать, что это есть разность между эффективными напряжениями в реальной жидкости, занимающей объем g , и (вспоминая смысл $c_0^2 \rho \delta_{ij}$, о чем говорилось раньше) напряжениями в одно-

родной покоящейся среде. Тогда, сравнивая волновое уравнение (10.8) для области g и волновое уравнение для области G (10.1), мы приходим к такому выводу: флуктуации ρ в реальной сжимаемой жидкости, находящейся в произвольном (например, турбулентном) движении, будут совпадать с флуктуациями, которые имели бы место в однородной покоящейся акустической среде, если бы эта среда находилась под действием системы внешнего поля напряжений (сил), создаваемых разностью между эффективными напряжениями в действительной жидкости и напряжениями в однородной акустической среде.

Мы приходим к выводу, что (это основная идея Лайтхилла) точные уравнения произвольного движения сжимаемой жидкости могут быть записаны как уравнения распространения звука в однородной акустической покоящейся среде, находящейся под действием внешних приложенных флуктуирующих напряжений. Таким образом, имеется точная связь между флуктуациями плотности в сжимаемой жидкости, находящейся в произвольном движении, и флуктуациями плотности в однородной покоящейся акустической среде, находящейся под действием внешних приложенных флуктуирующих напряжений.

Это означает, что флуктуирующий поток в ограниченном объеме при остальном объеме, находящемся в состоянии покоя, порождает те же флуктуации плотности, какие получились бы в стационарной акустической среде за счет внешних приложенных напряжений. Лайтхиллу удалось, таким образом, свести нелинейное турбулентное движение к порождаемому этим движением акустическому полю и для решения задачи далее использовать известные в классической акустике методы.

Как отмечает Лайтхилл, использование такого метода имеет большие преимущества. Во-первых, это точное уравнение, без приближений. Во-вторых, поскольку обратной реакции звука на поток мы не учитываем, удобно рассматривать звук как вынужденные колебания под действием флуктуаций потока жидкости. В-третьих, удобнее иметь дело со свободной системой, находящейся под действием внешних сил, т. е. с акустической покоящейся средой; в противном случае было бы необходимо

рассматривать изменения, вызванные конвекцией звука турбулентным потоком и распространением звука с переменной скоростью внутри него. Все это трудные вопросы. Описанным же методом все эти эффекты, так же как и такие эффекты, как затухание звука, включены в правую часть (10.8); они включены в гипотетическое внешнее поле сил (подходяще выбранное распределение квадрупольей, см. ниже).

Вместе с тем использование такого метода имеет ряд недостатков. Уравнение (10.8) есть уравнение в частных производных, тогда как оно должно быть записано в полных производных, поскольку мы имеем дело с акустикой движущейся среды. Это обстоятельство приводит к тому, что все рассмотрение оказывается справедливым только для чисел Маха потока, меньших единицы. Далее мы увидим, что, поступая более последовательным образом [8], можно получить уравнение Лайтхилла как частный случай более общих уравнений, справедливых для случая $M > 1$, где $M = v/c$.

Итак, исходным уравнением теории служит уравнение (10.8). Прежде всего из этого уравнения мы заключаем, что если, например, рассматривается задача об излучении звука турбулентным потоком и точка наблюдения лежит вне этого потока (например, изучается шум турбулентной струи вне самой струи — задача, о которой ниже мы будем говорить подробно), то вне самого потока правая часть (10.8) равна нулю. В области G мы имеем только распространяющийся звук (шум), подчиняющийся обычному волновому уравнению (10.1). Источники звука (правая часть уравнения (10.8)) определяются на основании выражения (10.7) для \tilde{T}_{ij} .

При некоторых предположениях это выражение может быть существенно упрощено.

Тензор вязких напряжений в P_{ij} определяет затухание звука. Отличие $p - p_0$ от $c_0^2(\rho - \rho_0)$ (здесь индекс «0» относится к значениям p и ρ , соответствующим невозмущенной среде), если отвлечься от нелинейности уравнения состояния, вызывается теплопроводностью и определяет поглощение звука за счет теплопроводности.

Если пренебречь поглощением звука за счет этих эффектов, что справедливо, вообще говоря, для не слишком

высоких частот, то (опуская далее знак над T_{ij})

$$T_{ij} \simeq \rho_0 v_i v_j. \quad (10.9)$$

Тогда исходное уравнение (10.8) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \leftarrow c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (10.10)$$

Замена ρ на ρ_0 в (10.9) может быть произведена лишь при условии

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1,$$

т. е. при малых значениях M .

Обратим внимание, что мы получили тот же результат, что и в гл. 1, когда речь шла о слабых нелинейных взаимодействиях (взаимодействие завихренность — завихренность, уравнение (1.78)).

Физический механизм генерации звука безграничным аэродинамическим потоком согласно уравнению (10.10) можно грубо представить себе следующим образом. Возникающие изменения потока импульса T_{ij} должны приводить к появлению сил, приводящих к изменениям давления. Но при увеличении давления увеличивается плотность, т. е. увеличивается масса газа в данном объеме. Это значит, что имеется источник массы, а в другом случае, при уменьшении давления, — сток массы. Но это есть не что иное, как источник упругих возмущений, т. е. источник звука, мощность которого зависит от скорости изменения потока импульса.

§ 2. Излучение точечного источника (монополя), диполя и квадруполь

Для понимания дальнейшего будет полезно кратко остановиться на некоторых характеристиках акустических излучателей. Как мы далее увидим, аэродинамическую генерацию звука свободным турбулентным потоком при $M < 1$, описываемую уравнением (10.8), можно рассматривать как генерацию звука (шума) полем соответствующим образом распределенных квадруполь. При

наличии в потоке каких-либо твердых тел, кроме квадрупольного излучения играют роль также дипольное излучение и излучение монополями (см. следующую главу).

Точечный источник (монополю). Наиболее простой тип источника — это точечный источник (пульсирующая сфера, радиус которой меньше длины излучаемой волны). Физический механизм излучения состоит в том, что в малой (по сравнению с длиной волны) области пространства имеется источник и сток массы. Изменение массы m со временем дается некоторой функцией $q(t) = dm/dt$. Тогда скорость этого изменения $\dot{q}(t)$ есть производительность источника, и давление на расстоянии r от монополя определяется выражением:

$$p_m - p_0 = \frac{\dot{q} \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{4\pi r}. \quad (10.11)$$

Это давление пропорционально \dot{q} с учетом запаздывания на время r/c_0 , связанного с конечной скоростью распространения звука.

Если вместо изменения массы в точке мы имеем дело с изменением массы в единице объема, то тогда вместо $q(t)$ будем иметь некоторую функцию $Q(t)$. При наличии источника $Q(t)$ в уравнение неразрывности (1.11), в правую его часть, нужно включить эту величину. Тогда в волновом уравнении (10.1) правая часть будет равна $\partial Q/\partial t$. Решение этого неоднородного волнового уравнения имеет вид (аналогичный запаздывающему потенциалу в электромагнитной теории):

$$p_m - p_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int \frac{\partial}{\partial t} Q \left(y, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right) \frac{dy}{|x - y|}, \quad (10.12)$$

где y — текущие координаты объема g и x — координаты точки наблюдения (начало координат расположено внутри g).

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о мощности излучения различного рода источников. Для монополя излученная мощность I_m может быть получена из

приведенной формулы, имея в виду, что на больших расстояниях $|x|$ эта мощность может быть представлена в виде

$$I_M = 4\pi x^2 J(x) = 4\pi x^2 \frac{(\overline{\Delta\rho})^2 c_0^3}{\rho_0} \quad (10.13)$$

(черта сверху означает взятие среднего).

Здесь мы воспользовались тем, что для плоской волны интенсивность определяется формулой $J = p^2/\rho c_0$. В нашем случае

$$J(x) = \frac{\overline{p^2}}{\rho c_0} = \frac{(\overline{\rho - \rho_0})^2 c_0^4}{\rho c_0} = \frac{(\overline{\Delta\rho})^2 c_0^3}{\rho} \quad (10.14)$$

Из формулы (10.12) при больших $|x|$

$$\overline{(\Delta\rho)^2} \sim \frac{1}{c_0^4 x^2} f^2 \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 V = \frac{1}{c_0^4 x^2} f^2 q^2 V, \quad (10.15)$$

где V — объем, занимаемый массой m , и $f \sim \frac{\partial}{\partial t}$ — частота колебаний монополя. Тогда из (10.13) и (10.15)

$$I_M \sim \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 f^2}{\rho c_0} \sim \frac{\left(\frac{d^2 m}{dt^2}\right)^2}{\rho c_0}, \quad (10.16)$$

поскольку при синусоидальных колебаниях дифференцирование по t сводится к умножению на $2\pi f$.

Если объем V охватывается поверхностью S , то $dm/dt = q = \rho v S$, где v — скорость частиц на поверхности S . Тогда, отвлекаясь от деталей, характеризующих источник, и вводя характерные величины для размеров l и амплитуды скорости U колебаний поверхности монополя, положим $v \sim U$, $S \sim l^2$, $f \sim U/l$. Из (10.16) получим:

$$I_M \sim \frac{\rho U^4 l^2}{c_0} \sim \rho U^3 l^2 \left(\frac{U}{c_0}\right) = \rho U^3 l^2 M. \quad (10.17)$$

Диполь. В отличие от монополя, когда имеется источник (и сток) жидкости, в случае диполя (следующий по сложности излучатель звука) мы имеем дело с источником (и стоком) количества движения. Другими словами, акустический диполь эквивалентен силе (сосредоточенной в точке), изменяющейся по величине и по направлению.

Первое указание на то, что диполь представляет собой силовой источник, было дано Лэмбом [9].

Давление в некоторой точке r для диполя, сосредоточенного в точке с координатами x_1, x_2, x_3 , имеет вид (формула Лэмба):

$$p_d - p_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{F_i \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{r} \right] = \\ = \frac{x_i}{4\pi r^2} \left\{ \frac{1}{c_0} \dot{F}_i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) + \frac{1}{r} F_i \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \right\}, \quad (10.18)$$

где сила $F(t)$ имеет компоненты F_1, F_2, F_3 .

Согласно Лэмбу диполь с моментом $m = m_0 e^{-i\omega t}$, $|m| = \lim_{d \rightarrow 0} (Qd)$ (рис. 86), эквивалентен силовому источнику с силой $F = \rho \dot{m}$ и, наоборот, силовой источник эквивалентен диполю с моментом $m = \frac{1}{\rho} \int F dt$.

Отметим также, что если звуковое давление, развиваемое монополем, есть p_M , диполем p_d и квадруполем $p_{кв}$ (см. ниже), то

$$p_d = -\frac{\partial p_M}{\partial x} d = -\frac{\partial p_M}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} d = -d \cos \theta \frac{\partial p_M}{\partial r}; \quad (10.19)$$

здесь

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta; \\ p_{кв} = -d \frac{\partial p_d}{\partial x} = d^2 \frac{\partial^2 p_M}{\partial x^2}. \quad (10.20)$$

Итак, если мы имеем дело с внешним полем сил F_i на единицу объема, то F_i нужно включить в правую часть уравнения сохранения импульса (1.27). Тогда в волновом уравнении (10.1) правая часть будет равна $-\partial F_i / \partial x_i$. Решение этого уравнения, имеющее вид

$$p - p_0 = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int F_i \left(y, t - \frac{|x-y|}{c_0} \right) \frac{dy}{|x-y|}, \quad (10.21)$$

представляет собой результат действия объемного распределения диполей с силой F_i на единицу объема.

Выполняя дифференцирование по x_i в (10.21), мы получим два члена, один из которых убывает с r как $1/r$ и другой как $1/r^2$. На больших расстояниях $|r| = |x - y|$, поэтому, пренебрегая вторым членом, имеем

$$\rho - \rho_0 \simeq \frac{1}{4\pi c_0^2} \int \frac{x_i - y_i}{|x - y|^2} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} F_i \left(y, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right) dy. \quad (10.22)$$

Если $r \gg D$, где $D = g^{1/3}$ — поперечные размеры области g , то $x_i - y_i \simeq x_i$, $|x - y| \simeq |x|$ и

$$\rho - \rho_0 \simeq \frac{1}{4\pi c_0^2} \int \frac{x_i}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial t} [F_i] dy. \quad (10.23)$$

Здесь и дальше квадратные скобки означают, что величины в скобках берутся в момент $t - (x/c_0)$, т. е. учитывается запаздывание на время распространения звука от точки в объеме области g до точки наблюдения.

Уравнение (10.23) показывает, что амплитуда звука в точке наблюдения, удаленной на большое расстояние от области g , зависит от скорости изменения напряженности диполя с учетом запаздывания $\partial[F_i]/\partial t$, т. е. от того, насколько звуковые волны, приходящие в точку наблюдения одновременно, были излучены неодновременно.

Пользуясь формулами (10.13), (10.14) и (10.23), имеем для мощности, излученной диполем:

$$I_{\text{д}} \sim \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 \frac{1}{\rho c_0^3} \sim \left[\frac{d^2(mv)}{dt^2} \right]^2 \frac{1}{\rho c_0^3} \sim \left[\frac{d(mv)}{dt} \right]^2 \frac{f^2}{\rho c_0^3}. \quad (10.24)$$

Поскольку $dm/dt = \rho v S = \rho v d^2$, то, полагая, как и в случае монополя, $v \sim U$, $d \sim l$, $f \sim U/l$, получаем:

$$I_{\text{д}} \sim \frac{\rho U^6 l^2}{c_0^3} = \rho U^3 l^2 \left(\frac{U}{c_0} \right)^3 = \rho U^3 l^2 M^3. \quad (10.25)$$

Сравнивая с выражением (10.17) для $I_{\text{м}}$, видим, что при $M < 1$ излучение диполем менее эффективно, чем излучение монополем, поскольку $I_{\text{д}} \sim M^3$, тогда как

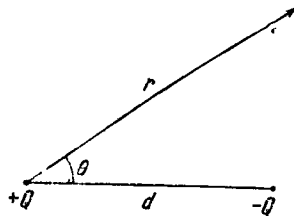


Рис. 86. Диполь.

$I_M \sim M$. Это объясняется тем, что в случае диполя в первом приближении излучение компенсируется колеблющимися в противофазе монополями и только во втором приближении этой компенсации нет.

Квадруполь. Обратимся теперь к следующему по сложности источнику звука — квадруполью. Если монополь мы представляем себе как источник или сток массы, диполь — как источник или сток силы, квадруполь можно

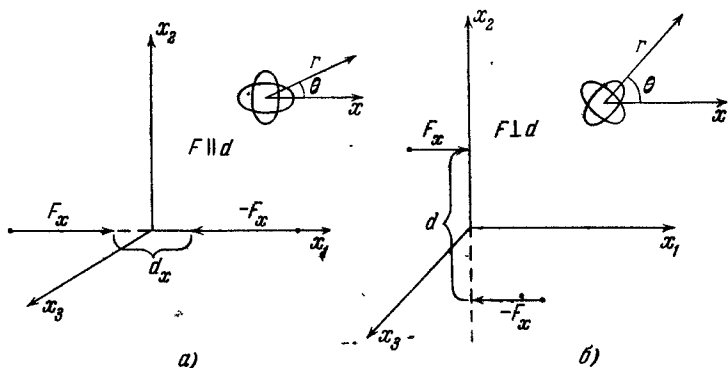


Рис. 87. Продольный (а) и поперечный (б) квадруполь. Вверху показаны деформации шара под действием указанных сил.

представить как источник или сток градиента потока количества движения через фиксированную поверхность, а поле квадруполья — как градиент дипольного поля:

$$\lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \left[\frac{\left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) \right\}}{\Delta x_3} \right] \quad (10.26)$$

(см. также формулу (10.20)). «Продольный» и «поперечный» квадрупольи изображены на рис. 87.

В случае квадрупольного поля излучения в уравнении сохранения импульса (10.2) правая часть должна равняться $\partial T_{ij}/\partial x_i$, где T_{ij} дается выражением (10.7). Тогда волновое уравнение имеет вид (10.8). Решение этого уравнения записывается в виде

$$\rho(x, t) - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int [T_{ij}] \frac{dy}{|x - y|}. \quad (10.27)$$

Для точки наблюдения, находящейся далеко от потока, дифференцирование можно отнести только к T_{ij} , что дает

$$\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 \simeq \frac{1}{4\pi c_0^2} \int \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [T_{ij}] d\mathbf{y}. \quad (10.28)$$

Из этой формулы следует, что если T_{ij} не меняется со временем, т. е. если картина неоднородностей в потоке (например, турбулентные пульсации поля скоростей) просто переносится потоком, оставаясь неизменной («замороженная турбулентность»), то флуктуации плотности обращаются в нуль — никакой аэродинамической генерации звука не происходит. Это ясно и из чисто энергетических соображений: если в потоке нет изменения T_{ij} — нет расхода энергии, которая должна была бы идти на образование акустического поля, — нет и этого поля.

Для нахождения мощности, излученной квадруполем, следует воспользоваться формулами (10.19) и (10.28), применяя, так же как для монополя и диполя, соображения подобия и размерности. Тогда при больших $|\mathbf{x}|$ имеем:

$$I_{\text{кв}} \sim \left[\frac{d(mv^2)}{dt} \right]^2 \frac{f^2}{\rho c_0^5} \sim \rho \frac{U^3 l^2}{c_0^5} = \rho U^3 l^2 \left(\frac{U}{c_0} \right)^5 = \rho U^3 l^2 M^5. \quad (10.29)$$

Сравнивая эту формулу с формулами (10.17) и (10.25) для монополя и диполя соответственно, заключаем, что при $M < 1$ излучение квадруполя при прочих равных условиях существенно меньше, чем диполя, и еще меньше, чем монополя. В формулах (10.17), (10.25) и (10.29) $\rho U^3 l^2$ представляет собой величину, пропорциональную потоку энергии; поэтому эффективность преобразования механической энергии потока в акустическое поле для монополя, диполя и квадруполя соответственно пропорциональна M , M^3 и M^5 .

§ 3. Генерация шума турбулентностью

Теперь на основе общей теории, изложенной в § 1, рассмотрим порождение шума турбулентным потоком в том случае, когда поток не имеет границ и никаких твердых тел в потоке нет. Будем сначала рассматривать случай, когда средняя скорость потока равна нулю (далее мы

учтем эту скорость) и не равны нулю лишь турбулентные или пульсационные скорости v . Можно сказать, что одно из главных достижений общей теории генерации шума состоит в том, что эта теория объясняет основные закономерности генерации шума развитым свободным турбулентным потоком. Этот поток при достаточно большой скорости является, по-видимому, наиболее мощным искусственным источником шума; речь идет о шуме струи, вытекающей из сопла реактивного двигателя. При этом такой мощный шум генерируется малоэффективными, вообще говоря, типами источников — квадрупольями; это объясняется сильной зависимостью интенсивности шума от скорости потока — так называемым «законом восьмой степени» (см. ниже).

Аэродинамическая генерация звука потоком так или иначе связана со сжимаемостью среды, поэтому и генерация шума турбулентностью относится к проблеме турбулентности сжимаемой жидкости. Однако основные результаты современной статистической теории турбулентности относятся к турбулентному движению несжимаемой жидкости. Если учесть сжимаемость, проблема турбулентности становится весьма сложной и еще мало разработанной. При этом возникает и новый ее аспект. В сжимаемой жидкости возникающие возмущения распространяются со скоростью звука; они будут действовать на движение жидкости вдали от источника возмущения через интервал времени, необходимый для того, чтобы возмущение дошло до данной области жидкости. Другими словами, в турбулентной сжимаемой жидкости возникает звуковое поле, происходит генерация звука турбулентными возмущениями. Для описания флуктуаций гидродинамических параметров потока становится необходимым пользоваться концепцией запаздывания.

Итак, задача состоит в определении интенсивности звука (шума), порождаемого свободным турбулентным потоком. Далее нас будут интересовать спектр шума и пространственные характеристики шума (направленность).

В этом параграфе будет идти речь об интенсивности шума, создаваемого турбулентностью.

На основании соображений подобия и размерности можно заключить, что акустическая мощность, рассчитан-

ная на единицу массы жидкости, находящейся в турбулентном движении, определяется зависимостью:

$$I = \varepsilon \varphi(Re, M_T); \quad (10.30)$$

здесь $\varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{d\bar{v}^3}{dt}$ — диссипация энергии единицы массы жидкости [10], φ — некоторая универсальная функция, $Re = (\bar{v}^2)^{1/2} l / \nu$ — число Рейнольдса турбулентности, $M_T = (\bar{v}^2)^{1/2} / c$ — турбулентное число Маха и $l = (\bar{v}^2)^{3/2} / \varepsilon$ — масштаб турбулентных пульсаций скорости v .

Можно высказать гипотезу, что при больших числах Re акустическая мощность I не будет зависеть от Re в широком диапазоне изменения этого числа. Большие вихри, имеющие масштаб всего потока в целом, вносят небольшой вклад в I , так же как вносят малый вклад в I и вихри малых масштабов, таких, в которых начинает сказываться вязкость среды. Если принять эту гипотезу, то

$$I = \varepsilon \varphi(M_T). \quad (10.31)$$

Лайтхилл показал, что излучение шума турбулентностью представляет собой квадрупольное излучение, для которого акустическая мощность пропорциональна M_T^5 (см. (10.29)). Отсюда

$$I = \alpha \varepsilon M_T^5, \quad (10.32)$$

где α — некоторая постоянная. Естественно, что величину α нельзя получить из соображений подобия и размерностей. Для того чтобы определить α , следует произвести расчет на основе решения уравнения (10.10) и привлечь сведения из статистической теории турбулентности о корреляции в турбулентном потоке пульсаций скоростей и их производных по времени в разных точках потока.

Итак, вычислим интенсивность шума J в точке наблюдения $|\mathbf{x}|$, удаленной на большое расстояние от турбулентной области g , так что $|\mathbf{x}| \gg g^{1/3} = D$. На больших расстояниях от турбулентной области $|\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \simeq |\mathbf{x}|$, и из (10.28) имеем:

$$\Delta p = p(\mathbf{x}, t) - p_0 \simeq \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} [T_{ij}] d\mathbf{y}. \quad (10.33)$$

Полагая $F_{ij} \simeq \rho_0 v_i v_j$ (напомним, что здесь v_i, v_j — турбулентные пульсации скорости потока), получим:

$$\Delta p \simeq \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \rho_0 \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v_i v_j] dy. \quad (10.34)$$

Будем считать, что мы имеем дело с однородным турбулентным потоком в области g . Тогда

$$\Delta p \simeq \frac{\rho_0}{4\pi c_0^4} \frac{1}{x} \int \frac{\partial^2 [v_x^2]}{\partial t^2} dy, \quad (10.35)$$

где v_x — компонента скорости турбулентных пульсаций, взятая по направлению x .

Воспользовавшись формулой (10.14), получаем на основании (10.35):

$$J(x, t) = \frac{\rho_0}{16\pi^2 c_0^5 x^2} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x^2 - \overline{v_x^2}) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x'^2 - \overline{v_x'^2}) \right] dy dy', \quad (10.36)$$

где квадратные скобки означают, как и раньше, учет запаздывания, а возведение интеграла в квадрат заменено двойным интегралом.

Для однородной турбулентности функция корреляции

$$B = \overline{\frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x^2 - \overline{v_x^2}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x'^2 - \overline{v_x'^2})}, \quad (10.37)$$

где оба члена берутся в один и тот же момент времени, есть функция t , направления x и вектора $y - y'$.

Можно вычислить это выражение для простейшего случая изотропной турбулентности [11]. При этом, вообще говоря, следует принимать во внимание наличие запаздывания во времени. Однако зависимость $t - r'/c_0$ от y (здесь $r' = |x - y'|$) может считаться несущественной, если считать турбулентность стационарной на промежутке времени корреляции $\tau = l/c_0$, где l — интервал (масштаб) корреляции, на котором B убывает до определенного условленного значения, например, в e раз.

Если корреляция

$$B_\tau = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x^2 - \overline{v_x^2}) \right]_t \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_x'^2 - \overline{v_x'^2}) \right]_{t+\tau} \quad (10.38)$$

примерно равна 1 для всех $\tau < l/c_0$, а на расстояниях, больших l , эта корреляция мала, то (10.36) можно приближенно записать в виде

$$J(x, t) \simeq \frac{\rho_0}{16\pi^2 c_0^5 x^2} \int \left[\int B_\tau d\rho \right]_{t-\frac{r}{c_0}} dz \simeq \frac{\rho_0 V}{16\pi^2 c_0^5 x^2} \int B_\tau d\rho, \quad (10.39)$$

где $\rho = \mathbf{y} - \mathbf{y}'$, $z = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{y}')$, V — объем турбулентной области и B_τ зависит только от относительных координат ρ .

Масштаб l может быть взят как мера наибольших компонент от v_x^2 , генерирующих заметное количество шума. Турбулентность можно считать стационарной на интервале l/c_0 , если наиболее быстрые компоненты v_x^2 , генерирующие шум, не перемещаются заметно за промежуток времени, который нужен звуку для того, чтобы пробежать масштаб l .

Звук, достигая точки вне турбулентной области, приходит от различных участков турбулентности, находящихся в различной стадии затухания. Таким образом, для того чтобы можно было пренебречь зависимостью $t - (r/c_0)$ от \mathbf{y} , турбулентность, кроме того, не должна заметно затухать за время, необходимое звуку, чтобы пересечь турбулентную область. Поскольку временной масштаб затухания определяется величиной $\bar{v}^2/\varepsilon = l/(\bar{v}^2)^{1/2}$, то это условие состоит в том, чтобы выполнялось соотношение $D/c_0 \ll l/(\bar{v}^2)^{1/2}$. Так как $l \lesssim D$, то

$$M_\tau \ll \frac{l}{D} \ll 1.$$

Таким образом, при условии $M_\tau \ll 1$ сделанные допущения оправданы.

Выражение для полной мгновенной акустической мощности получится умножением (10.39) на $4\pi x^2$:

$$I \simeq \frac{\rho_0 V}{4\pi c_0^5} \int B_\tau d\rho. \quad (10.40)$$

Для определения I нужно, таким образом, в явном виде знать функцию корреляции B_τ . Если не учитывать затухания изотропной турбулентности (что дает поправку, по

оценкам Праудмана [11], всего порядка 1% к общей величине излучаемой акустической мощности), то

$$I \simeq \frac{\rho_0 V}{4\pi c_0^5} \int \overline{\frac{\partial^2}{\partial t^2} [v^2(0, t)] \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v^2(\rho, t)]} d\rho. \quad (10.44)$$

Современная статистическая теория турбулентности не дает возможности определить точное значение корреляции вторых производных по времени от квадратов пульсационных скоростей, даже взятых в один и тот же момент времени в разных точках потока. Можно, однако, как это сделал Праудман, использовать гипотезу, высказанную Миллиончиковым [12]: в изотропной турбулентности распределение вероятностей скоростей в двух точках пространства есть нормальное (гауссово) распределение. Эта гипотеза, вообще говоря, имеет ограниченное применение, поскольку она предполагает, что третьи моменты (и вообще нечетные моменты) обращаются в нуль, а это приводит к отбрасыванию нелинейного взаимодействия в динамике турбулентного движения. Будем считать тем не менее, что корреляция B в интеграле (10.44), т. е. четвертый момент, имеет гауссов вид. При не слишком малых масштабах пульсаций можно принять такую гипотезу как рабочую, если пытаться определить лишь порядок величины I . Делая такое предположение, момент четвертого порядка сразу можно свести к моментам второго порядка. Используя затем то обстоятельство, что турбулентное движение жидкости можно считать несжимаемым (если речь идет о внутренних динамических свойствах потока), можно воспользоваться соотношениями для корреляционных функций

$$\overline{v_i v_j}, \quad \overline{\frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial v_j}{\partial t}}, \quad \overline{\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}},$$

выразив их через одну скалярную корреляционную функцию $f(x)$. Для этой функции Праудман использует вид, рассмотренный Гейзенбергом [12], а также представление ее в виде гауссовой функции:

$$f(x) = e^{-\pi x^2/4}.$$

В результате расчетов для α в выражении (10.32) получаются такие значения (без учета заглухания):

$$\alpha = 37,7 \text{ для } f(x) \text{ по Гейзенбергу,}$$

$$\alpha = 13,2 \text{ для } f(x) = e^{-\pi x^2/4}.$$

Отсюда видно, что значение α не сильно меняется при изменении вида функции корреляции.

Характер зависимости $J(x)$ от таких гидродинамических параметров турбулентного потока, как l , ρ , c и v , в общем виде можно определить (не прибегая к детальному расчету) из соображений подобия и размерностей, если исходить из формулы (10.36).

Для $M_T \ll 1$, как уже говорилось, мы можем полагать $T_{ij} \simeq \rho_0 v^2$, и, поскольку $\partial^2/\partial t^2 \sim (v/l)^2$,

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \sim \left(\frac{v}{l}\right)^2 \rho_0 v^2 \quad (10.42)$$

Пользуясь формулой (10.34), имеем тогда, что

$$\rho - \rho_0 \sim \frac{1}{c_0^4} \frac{1}{x} \left(\frac{v}{l}\right)^2 \rho_0 v^2 l^3 = \rho_0 \left(\frac{v}{c_0}\right)^4 \frac{l}{x}. \quad (10.43)$$

Как мы видим, в точке наблюдения, удаленной на расстояние x от центра объема вихря l^3 , флуктуации плотности оказываются пропорциональными четвертой степени числа M_T . Отметим, что внутри самого потока, когда $l/x \sim 1$, $(\rho - \rho_0) \simeq \rho_0 M_T^2$. Действительно,

$$\Delta p \simeq \rho_0 v^2 \quad (10.44)$$

и

$$\Delta p \simeq \rho_0 v^2 \frac{\Delta p}{\Delta p} = \rho_0 \frac{v^2}{c^2} = \rho_0 M_T^2. \quad (10.45)$$

Пропорциональность флуктуаций плотности M_T^4 в первом случае при $x \gg \lambda$, где λ — длина звуковой волны, показывает, что излучение звука (шума) турбулентностью в дальнюю зону обязано квадратичной природе излучения.

Пользуясь формулой (10.36), имеем (на основании (10.43)):

$$J(x, t) \sim \frac{\rho_0}{c_0^5 x^2} \left(\frac{v}{l}\right)^4 v^4 l^6 = \rho_0 v^8 c_0^{-5} \left(\frac{l}{x}\right). \quad (10.46)$$

Отсюда, умножая $I(x, t)$ на $4\pi x^2$, получаем, что для общей акустической мощности шума турбулентной области, имеющей объем l^3 ,

$$I(x, t) \sim \rho_0 v^8 l^2 c_0^{-5} = \rho_0 v^3 l^2 M_T^5. \quad (10.47)$$

Наиболее характерным обстоятельством является здесь пропорциональность $I(x, t)$ восьмой степени пульсационной скорости потока v . Поскольку пульсационную скорость в турбулентном потоке трубе можно считать пропорциональной средней скорости потока U , мы имеем существенный результат, впервые полученный Лайтхиллом: мощность шума, создаваемого турбулентным потоком, пропорциональна восьмой степени скорости этого потока («закон восьмой степени») Этот закон при $U/c_0 = M < 1$ хорошо оправдывается на опыте (см. ниже, § 7).

Проводя подобные рассуждения, из формулы (10.41) нетрудно получить, что

$$I(x, t) \sim \frac{\rho^2 U^4 f^4 l^8 V}{c_0^5 \rho_0}, \quad (10.48)$$

где ρ_0 и ρ — значения плотности в областях G и g .

Акустическая излучаемая энергия составляет, вообще говоря, малую долю от энергии, идущей на поддержание потока. Энергия на единицу объема, идущая на поддержание потока, приближенно пропорциональна $\rho_0 U^2$, а полная скорость подвода энергии пропорциональна $(\rho_0 U^2) U l^2$. Отсюда для отношения выходной акустической мощности к подводимой мощности, которое можно назвать коэффициентом полезного действия η аэродинамической генерации звука или эффективностью преобразования механической энергии потока в акустическую энергию, имеем:

$$\eta \simeq \frac{\rho_0 U^8 c_0^{-5} l^2}{\rho_0 U^2 U l^2} = M^5 \quad (10.49)$$

(см. также (10.29)), т. е. при $M < 1$ величина η очень мала. Как показывают эксперименты, η/M^5 имеет значение $\sim 10^{-4}$. Из (10.49) видно, что при малых U ($M \ll 1$) излучение шума очень мало.

§ 4. Спектр шума, излучаемого изотропной турбулентностью

Если вопрос об интенсивности шума, порождаемого турбулентностью при $M < 1$, теоретически в определенной степени изучен, то с вопросом о спектре этого шума дело обстоит сложнее. Как увидим ниже, для решения задачи о спектральном составе шума необходимо знать пространственно-временную корреляцию вторых производных от квадратов пульсационных скоростей потока; значения же этой корреляции современная статистическая теория турбулентности пока не дает. Тем не менее можно попытаться, опираясь на установленные закономерности локально-изотропной турбулентности, провести некоторые рассуждения о характере распределения энергии шума по спектру на высоких и на низких частотах [13].

Для дальнейшего будет удобнее вместо скоростей в (10.36) перейти к давлениям. Для этого вспомним, что v_i — это гидродинамические, а не звуковые скорости, и поэтому, считая поле турбулентных скоростей несжимаемым, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения Навье — Стокса, мы получим:

$$\frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p. \quad (10.50)$$

Тогда на больших расстояниях $r \simeq x$ от турбулентной области g согласно (10.34) имеем:

$$\rho - \rho_0 = \Delta p(r, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int p(y', t - \frac{|x - y'|}{c_0}) dy'. \quad (10.51)$$

Здесь p — давление, обязанное своим происхождением турбулентному движению. Временная корреляция флуктуаций плотности имеет поэтому вид:

$$\overline{\Delta p(t) \Delta p(t - \tau)} = \frac{1}{(4\pi c_0^4 r)^2} \int dy' \int dy'' \frac{\partial^2 p'}{\partial t'^2} \frac{\partial^2 p''}{\partial t''^2}. \quad (10.52)$$

При усреднении по времени величины, подлежащие усреднению, вычисляются с учетом запаздывания — в моменты

$$t' = t - \frac{|x - y'|}{c_0} \quad \text{и} \quad t'' = t - \tau - \frac{|x - y''|}{c_0}.$$

Будем считать, как и в предыдущем параграфе, турбулентность незатухающей и однородной. Тогда результат временного усреднения зависит только от относительного времени $\tau = t' - t''$ и не зависит от самого момента времени; кроме того, он зависит от разности $\xi = y'' - y'$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \overline{p'}}{\partial t'^2} \frac{\partial^2 \overline{p''}}{\partial t''^2} = \rho_0^2 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} B \left(\xi, \tau - \frac{|x - y''| - |x - y'|}{c_0} \right), \quad (10.53)$$

где

$$B(\xi, \tau) = \frac{1}{\rho_0^2} [p(y', t'') p(y'', t'') - \overline{p(y', t')} \overline{p(y'', t'')}] \quad (10.54)$$

Для больших y можно пренебречь эффектом запаздывания и считать, что

$$\frac{|x - y'| - |x - y''|}{c_0} \simeq 0.$$

Тогда (10.52) будет иметь вид:

$$\overline{\Delta \rho(t) \Delta \rho(t - \tau)} = \frac{\rho_0}{(4\pi c_0^4 r)^2} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \iint d\mathbf{y}' d\mathbf{y}'' B(\xi, \tau). \quad (10.55)$$

Полную акустическую мощность I , излученную турбулентностью, получим, умножив (10.14) на $4\pi r^2$ при условии $\tau = 0$:

$$I = \frac{4\pi r^2}{\rho_0} c_0^3 \overline{\Delta \rho(x, t) \Delta \rho(x, t)}. \quad (10.56)$$

Спектр мощности шума $I_1(\omega)$ определится Фурье-преобразованием:

$$I_1(\omega) = \frac{2r^2 c_0^3}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \overline{\Delta \rho(r, t) \Delta \rho(r, t - \tau)}^t. \quad (10.57)$$

Пользуясь (10.55), имеем для I и $I_1(\omega)$ по (10.56) и (10.57):

$$I = \frac{\rho_0}{4\pi c_0^5} \int d\mathbf{y}' \int d\mathbf{y}'' \left[\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} B(\xi, \tau) \right]_{\tau=0}, \quad (10.58)$$

$$I_1(\omega) = \frac{\rho_0}{8\pi^2 c_0^5} \int d\mathbf{y}' \int d\mathbf{y}'' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} B(\xi, \tau). \quad (10.59)$$

Выражение (10.59) можно записать в виде

$$I_1(\omega) = \frac{\rho_0 V}{8\pi^2 c_0^5} \int d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} B(\xi, \tau) d\tau, \quad (10.60)$$

где V — объем турбулентной области.

Если, далее, $V^{1/3} \gg L$, где L — масштаб наибольших вихрей, то (10.58) переходит в

$$I = \frac{\rho_0 V}{4\pi c_0^5} \int d\xi \left[\frac{\partial^4}{\partial \tau^4} B(\xi, \tau) \right]_{\tau=0}. \quad (10.61)$$

Для того чтобы идти дальше и определить $I_1(\omega)$, требуется, как мы видим, знать пространственно-временную корреляционную функцию $B(\xi, \tau)$.

На основе соображений подобия и размерности статистическая теория локально-изотропной турбулентности, развитая Колмогоровым, дает возможность определения так называемых структурных функций. Так, имеется «закон $2/3$ » для пульсаций скоростей, полученный Колмогоровым и Обуховым [2, 10], «закон $4/3$ » для пульсаций поля давления [2] и ряд других закономерностей микроструктуры развитого турбулентного потока.

Для масштабов вихрей ξ , лежащих в области $l_{\min} < \xi < L$ (l_{\min} — так называемый внутренний масштаб турбулентности, определяемый вязкостью среды), которую часто называют инерциальной подобластью спектра, функция $B(\xi, 0)$ с точностью до постоянной имеет вид («закон четырех третей»):

$$B(\xi, 0) = (\varepsilon \xi)^{4/3}, \quad (10.62)$$

где ε — диссипация энергии на единицу массы жидкости.

Когда мы переходим к пространственно-временной корреляционной функции $B(\xi, \tau)$, которая определяет спектр акустической мощности, положение осложняется. Дело в том, что при распространении соображений подобия на пространственно-временную корреляционную функцию возникает следующее затруднение. Структура мелкомасштабных вихрей (пульсаций) не должна зависеть от крупномасштабных пульсаций, что, по существу, и дает возможность развить теорию подобия и получить все важнейшие выводы, содержащиеся в теории, развитой Колмогоровым.

Однако при введении временного интервала корреляции следует учесть, что на мелкомасштабных вихрях сказывается перенос их крупномасштабными вихрями. Но тогда скорость мелкомасштабных вихрей будет зависеть от скорости крупных вихрей, а это нарушает всю концепцию.

Эти конвективные эффекты можно, однако, исключить при помощи введения так называемой лагранжевой корреляции, представляющей собой корреляцию в системе, скорость которой совпадает со средней скоростью потока.

Можно определить лагранжеву пространственно-временную корреляционную функцию следующим образом. Введем для пространственного разделения ξ и временной задержки τ среднюю скорость, определяемую как мгновенное среднее значение скорости по объему порядка ξ^3 . Важно, чтобы ξ и τ были много меньше соответственно масштаба и периода макровихрей. Если это сделано, то при вычислении корреляций средняя скорость не будет меняться при переходе от одной точки к другой. Если мы определим лагранжеву корреляцию как корреляцию величин, взятых в системе координат, движущейся со скоростью v , мы можем высказать разумную гипотезу, что такие корреляции имеют подобие в инерционной подобласти спектра турбулентности. Например, лагранжева корреляция скоростей может быть записана в виде

$$\tilde{L}(\xi, \tau) = (\varepsilon \xi)^{2/3} \varphi \left(\frac{\varepsilon^{1/3} \tau}{\xi^{2/3}} \right), \quad (10.63)$$

где φ — некоторая универсальная функция безразмерного параметра.

Лагранжева функция корреляции для пульсаций давления в инерционной подобласти спектра при $l_{\min} < \xi < L$ и при $\tau \ll l/v$ будет иметь вид (ср. с (10.63)):

$$\tilde{B}(\xi, \tau) = (\varepsilon \xi)^{1/2} \psi(x), \quad (10.64)$$

где $x = \varepsilon^{1/2} \xi^{-3/2} \tau$ и $\psi(x)$ — некоторая универсальная функция. При $\xi > L$ будет $\tilde{B}(\xi, \tau) = 0$.

Теперь для вычисления спектра шума можно воспользоваться выражением для спектра мощности (10.60). Следует при этом иметь в виду следующее. Мы должны, поскольку пользуемся лагранжевой функцией корреляции, производить вычисления спектра шума в системе, движущейся со скоростью v .

щейся со скоростью крупных вихрей v . Поскольку уравнения Навье — Стокса инвариантны относительно галилеевских преобразований координат, выражение (10.60) имеет тот же вид; точка наблюдения также движется со скоростью v .

Для неподвижного наблюдателя отличие в приеме шума по сравнению с движущимся наблюдателем будет только на доплеровский сдвиг. Этим сдвигом, вообще говоря, можно пренебречь при малых числах Маха для турбулентных пульсаций $M_T = v/c_0 = (\epsilon L/c_0^3)^{1/2}$. Таким образом, при малых M_T высокочастотная область спектра шума может быть получена простой подстановкой лагранжевой корреляционной функции \tilde{B} (10.64) в выражение для спектра $I_1(\omega)$ (10.60) вместо $B(\xi, \tau)$. Производя замены переменных, имеем:

$$I_1(\omega) = \frac{3}{4\pi} \rho_0 V c_0^2 M_T^{3/2} \left(\frac{c_0}{\omega L}\right)^{7/2} \int_0^{\omega L/c_0 M_T} dy y^{5/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iyx} \frac{d^4 \psi(x)}{dx^4}. \quad (10.65)$$

Пусть $\omega L/c_0 M_T$ велико и предел первого интеграла можно считать равным бесконечности (высокочастотный спектр шума).

Для больших x имеем: $\psi(x) < \text{const} \cdot x^2$, что следует из (10.64) в пределе при $\xi \rightarrow 0$ при фиксированном τ . Поэтому, благодаря наличию четвертой производной от $\psi(x)$, внутренний интеграл сходится и при больших y будет стремиться к нулю. Отсюда следует, что для высоких частот спектр мощности шума пропорционален $M_T^{21/2} \omega^{-7/2}$.

В рамках тех предположений, которые были сделаны, этот характер зависимости является универсальным и не зависит от природы сил, вынуждающих турбулентное движение. Спектр низкочастотного шума получается из (10.65) при малых $\omega L/c_0 M_T$ и будет зависеть от крупномасштабных вихрей λ , таким образом, не может определяться универсальным образом.

Если произвести интегрирование внутреннего интеграла в (10.65) по частям, то получим:

$$I_1(\omega) = \text{const} \cdot \rho_0 V c_0^2 M_T^3 \left(\frac{\omega L}{c_0}\right)^4, \quad (10.66)$$

где const содержит интеграл от $\psi(x)$. Таким образом, спектральная мощность шума растет как ω^4 .

Сравнение экспериментальных данных по изучению спектра шума турбулентных струй с полученными теоретическими выводами будет проведено ниже (§ 7).

В рассуждениях о спектре шума полезно иметь в виду следующее. Период τ изменения турбулентной скорости v на масштабе вихря l должен быть порядка периода звука T , т. е.

$$\tau = \frac{l}{v} \simeq T = \frac{\lambda}{c}$$

Отсюда $\lambda \simeq l/M_T$ и поскольку $M_T \ll 1$, то $\lambda > l$. Отметим, что для турбулентных струй эксперимент при $M < 1$ дает

$$l \simeq (0,01 \div 0,05) \lambda,$$

что в общем согласуется с приведенной выше формулой, если считать, что пульсационная скорость v составляет 10—15% от средней скорости потока U .

§ 5. Шум потока при учете его средней скорости

До сих пор мы считали, что средняя скорость потока равна нулю, и имели дело только со скоростями пульсаций. Найдем теперь, как изменятся основные соотношения теории, если область потока, излучающая шум, сама движется со скоростью U . Если поток есть турбулентная струя, то U представляет собой осевую скорость струи вблизи сопла и число Маха струи будет $M = U/c_0$. Турбулентные неоднородности или «вихри», переносимые потоком, будут иметь, вообще говоря, меньшую скорость конвекции или переноса v_k . Эксперимент показывает (см. § 7), что для турбулентной струи $v_k \simeq 0,5 U$; число Маха для этих «вихрей» $M_k = v_k/c_0$.

В § 3 были приведены формулы (10.11), (10.18) для давления, развиваемого элементарными источниками — монополем и диполем, в том случае, если эти источники

неподвижны. Если они движутся с постоянной скоростью v_k , то эти формулы изменяются и имеют вид [14]:

$$p - p_0 = \frac{\dot{q} \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{4\pi r (1 - M_k \cos \theta)} \quad \text{для монополя;} \quad (10.67a)$$

$$p - p_0 = \frac{x_i \dot{F}_i \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{4\pi r^2 c_0 (1 - M_k \cos \theta)^2} \quad \text{для диполя;} \quad (10.67b)$$

$$p - p_0 = \frac{x_i x_j \dot{T}_{ij} \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}{4\pi r^3 c_0^2 (1 - M_k \cos \theta)^3} \quad \text{для квадруполья.} \quad (10.67b)$$

Здесь r — расстояние от точки наблюдения до точки излучения, где источник находился в момент времени $t - (r/c_0)$, и θ — угол между направлением движения источника и направлением излучения (рис. 88). Сравнивая эти выражения с (10.11), (10.18) и (10.28), мы видим, что в знаменателях (10.67) появляются множители $(1 - M_k \cos \theta)$, $(1 - M_k \cos \theta)^2$ и $(1 - M_k \cos \theta)^3$, которые приводят к возрастанию (по сравнению с соответствующими неподвижными источниками) излучения по направлению вперед при малых углах θ ; в направлении назад влияние этих множителей меньше.

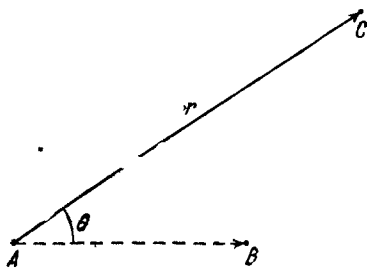


Рис. 88.

Формулы (10.67) могут быть получены, если излучение движущегося источника выразить относительно его положения, которое он имел в момент излучения [5].

Рассмотрим, например, излучение движущегося квадруполья. За время $|x - y|/c_0 = |r|/c_0$, затрачиваемое излучением квадруполья на то, чтобы пройти расстояние от y (координаты квадруполья) до x (точка наблюдения), оси

координат передвинутся на расстояние $M_k |x - y|$, и поэтому в (10.28) выражение для T_{ij} нужно взять в виде

$$T_{ij} \left(y + M_k |x - y|, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right) = T_{ij} \left(\eta, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right),$$

где

$$\eta = y + M_k |x - y|.$$

В (10.28) необходимо ввести якобиан преобразования; тогда

$$d\eta = dy \left(1 - \frac{M_k (x - y)}{|x - y|} \right), \quad (10.68)$$

и изменение плотности, создаваемое квадруполем на расстоянии $|x - y|$, будет:

$$\rho - \rho_0 = \Delta\rho = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int T_{ij} \left(\eta, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right) \times \\ \times \frac{d\eta}{|x - y| - M_k |x - y|}. \quad (10.69)$$

Если точка наблюдения находится далеко от квадруполя, то дифференцирование можно применить только к T_{ij} . При этом

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x - y| = \frac{x_i - y_i}{|x - y| - M_k |x - y|}. \quad (10.70)$$

Подобным же образом находится $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |x - y|$. Мы получим:

$$\Delta\rho \simeq \frac{1}{4\pi c_0^2} \int \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{(|x - y| - M_k (x - y))^3} \frac{1}{c_0^3} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij} \left(\eta, t - \frac{|x - y|}{c_0} \right) d\eta. \quad (10.71)$$

Таким образом, в отличие от (10.28) в знаменателе подинтегрального выражения появляется множитель $(1 - M_k)^3$ или $(1 - M_k \cos \theta)^3$, если ввести угол θ . Если вместо квадруполя мы имели бы диполь, нужно было бы ограничиться первой производной $\frac{\partial}{\partial x_i} |x - y|$ и соответственно вместо (10.22) мы имели бы то же выражение, но в знаменателе стоял бы множитель $(1 - M_k \cos \theta)^2$. Для монополя знаменатель $(1 - M_k \cos \theta)$ появляется лишь вследст-

вие якобиана преобразования. Якобиан преобразования с физической точки зрения означает, что при движении источника вперед его эффективный объем увеличивается. За счет эффекта Доплера волны излучения вперед «сжимаются» и компенсация лучей от различных частей квадруполья менее сказывается для волн, излученных вперед, поскольку интервал времени между излучением от его «носовой» и от его «кормовой» частей возрастает; в этом проявляется роль производных вида (10.70). Поскольку для амплитуды флуктуации плотности $\Delta\rho$ или звукового давления p мы имеем фактор $(1 - M_k \cos \theta)^{-3}$, то интенсивность шума от движущегося квадруполья будет отличаться от интенсивности покоящегося квадруполья на фактор $(1 - M_k \cos \theta)^{-6}$.

Если теперь мы имеем дело с движущейся со скоростью U областью потока g , состоящей из множества квадрупольей, и скорость конвекции этих квадрупольей v_k , то следует, в отличие от случая одного квадруполья, еще учесть, что излучение не всех квадрупольей придет одновременно в точку наблюдения x , а только тех из них, которые занимают некоторый объем. Одновременно придет излучение только от того числа квадрупольей, которое получится, если общее число квадрупольей области g уменьшить на фактор $(1 - M_k \cos \theta)$. Если считать, что интенсивности всех квадрупольей просто складываются, то тогда интенсивность излучения шума областью потока будет отличаться от излучения этой области при $v_k = 0$ на фактор $(1 - M_k \cos \theta)^{-5}$ [14, 15]. Этими обстоятельствами определяется характер направленности излучения шума движущейся турбулентной областью g .

Если струя вытекает из сопла реактивного двигателя самолета, скорость которого относительно неподвижного наблюдателя равна U_c , а она направлена в противоположную сторону относительно скорости струи, то в этом случае [15] интенсивность, воспринимаемая неподвижным наблюдателем, будет меньше на фактор $(1 + M_c \cos \theta)$, где $M_c = U_c/c$. Таким образом, общий фактор изменения интенсивности по сравнению со случаем, когда скорость потока $U = 0$ и скорость самолета $U_c = 0$, будет

$$(1 + M_c \cos \theta)^{-1} (1 - M_k \cos \theta)^{-5}.$$

§ 6. Излучение шума потоком при числах Маха, больших единицы

В § 2 этой главы указывалось на то, что теория, развитая Лайтхиллом, соответствует числам M потока, меньшим 1, и чтобы решить вопрос об излучении шума потоком при $M > 1$, следует исходить из уравнений акустики движущейся среды. Такое исследование было выполнено Филиппсом [8].

Будем рассматривать движение газа, когда можно не принимать во внимание эффекты диссоциации и эффекты релаксации. Можно считать, что такое рассмотрение для воздуха годится до температуры 2000° К. Поэтому будем считать, что уравнение состояния идеального газа выполняется. В неподвижной системе координат уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (10.72)$$

где $D \equiv \partial/\partial t + v_i(\partial/\partial x_i)$ — оператор полной производной. Поскольку плотность можно рассматривать как функцию давления и энтропии, то это уравнение запишется в виде

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \frac{Ds}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (10.73)$$

Согласно второму закону термодинамики

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho d \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (10.74)$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho = \frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_\rho - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = -\rho^{-1} (c_v + R) = -\frac{c_p}{\rho}, \quad (10.75)$$

где мы воспользовались уравнением состояния и тем, что $c_p - c_v = R$. Так как, кроме того,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (10.76)$$

где c — местная скорость звука и $\gamma = c_p/c_v$, то (10.73) запишется в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{c_p} \frac{Ds}{Dt}. \quad (10.77)$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad (10.78)$$

где P_{ij} определяется по (10.3). Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{D}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (10.79)$$

то (10.77) — (10.79) дают:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = & - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(e_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10.80)$$

где

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Взяв от (10.77) производную D/Dt и подставляя ее значение в (10.80), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \log \left(\frac{p}{p_0} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \log \left(\frac{p}{p_0} \right) \right\} = & \gamma \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \\ + \gamma \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c_p} \frac{Ds}{Dt} \right) - \gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(e_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (10.81)$$

при этом мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \frac{D}{Dt} \log \left(\frac{p}{p_0} \right); \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_i} \log \left(\frac{p}{p_0} \right). \quad (10.82)$$

Уравнение (10.81) представляет собой исходное уравнение теории. Это есть волновое уравнение в полных производных, как и должно быть в акустике движущейся среды. Правая часть этого уравнения состоит из трех членов; каждый из них представляет источник, генерирующий флуктуации давления за счет пульсаций скоростей (первый член), за счет флуктуаций энтропии (второй член) и флуктуаций вязких напряжений (третий член).

В отличие от теории Лайтхилла, учет средней скорости движения жидкости и изменение местной скорости звука естественным образом включается в левую часть уравнения (10.81), поэтому здесь нет необходимости прибегать к при-

влечению соответствующим образом подобранного распределения квадрупольей в акустической среде.

Интересуясь вопросами аэродинамической генерации звука, а не структурой сильных ударных волн (см. ниже), вторым и третьим членами в (10.81) можно пренебречь. Тогда получим уравнение

$$\left\{ \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \log \frac{\rho}{\rho_0} = \gamma \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (10.83)$$

Если процессы адиабатические и $\rho \sim \rho^\gamma$, то это уравнение для изменений плотности примет вид:

$$\left\{ \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \log \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (10.84)$$

Используя уравнение неразрывности (10.72), нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \left(\frac{D \ln \rho}{Dt} \right)^2 - 2v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D \ln \rho}{Dt} \right).$$

При $M \ll 1$ из (10.84) с учетом этого выражения сразу же следует исходное уравнение (10.10) теории Лайтхилла.

При $M \gg 1$ в турбулентном потоке возникают ударные волны, и поэтому, вообще говоря, ни теплопроводностью κ , ни вязкостью η , т. е. вторым и третьим членами в (10.81), пренебрегать нельзя, поскольку η и κ определяют структуру ударной волны, в частности ширину ее фронта.

В этом состоит одна из трудностей решения вопроса о генерации шума турбулентным потоком при $M \gg 1$. Да и само рассмотрение этого вопроса в рамках использования основных уравнений гидродинамики вместе с уравнением непрерывности становится, вообще говоря, неприменимым.

Имеется возможность, однако, рассмотреть на основе уравнения (10.81) задачу, когда можно разделить и рассматривать отдельно процессы генерации шума (волн давления) и процессы, связанные с ролью диссипативных членов в уравнении (10.81). Это можно сделать, например, для турбулентного слоя с поперечным сдвигом, примером чего может быть плоская турбулентная струя или турбулентный пограничный слой (см. гл. 11). Волны давления возникают внутри этого слоя и далее по мере распространения от места возникновения в этом слое переходят в слабые

или сильные ударные волны. Пусть расстояние образования разрыва больше, чем толщина турбулентного слоя. В этом случае можно рассматривать только процесс генерации волн давления, а влиянием диссипативных процессов за счет действия η и κ здесь в этом слое можно пренебречь; их действие скажется незначительно на малой толщине слоя. Таким образом, в этом случае, если интересоваться только вопросом генерации волн давления, можно опустить второй и третий члены в правой части уравнения (10.81).

Физический механизм генерации шума при $M > 1$ грубо можно представить следующим образом. Отдельные вихри или турбулентные неоднородности, переносящиеся потоком со сверхзвуковой скоростью, должны излучать волны Маха аналогично тому, как такие волны излучаются твердыми телами, движущимися со сверхзвуковыми скоростями. Эти случайные вихревые волны Маха создают шум, который должен обладать определенной направленностью, так что пространственное распределение такого шума должно обладать особенностями. Более подробное обсуждение этого вопроса и сравнение изложенной теории с экспериментом мы отложим до следующей главы.

Здесь мы кратко остановимся еще на работе Вильямса [15], в которой делается попытка расширить область применения теории Лайтхилла для потоков с $M > 1$. Вильямс отмечает, что по существу имеются два возражения попыткам экстраполировать теорию Лайтхилла на случай $M > 1$. Во-первых, то, что при этом нельзя рассматривать тензор напряжений T_{ij} как для несжимаемой жидкости и считать его равным $\rho_0 v_i v_j$. Решение же задачи с точным выражением (10.7) для T_{ij} приводит к непреодолимым трудностям.

Однако сжимаемость, т. е. отличие $\rho v_i v_j$ от $\rho_0 v_i v_j$, начинает проявляться в том случае, когда турбулентное число Маха $v/c = M_T$ становится не малым. Поэтому в струях, где пульсации скорости турбулентного происхождения не превышают 20% от скорости потока у выхода из сопла, положение не так безнадежно, как это может показаться с первого взгляда, во всяком случае до $M \leq 2^*$).

*) Доклад Лайтхилла на Втором Всесоюзном съезде механиков, Москва, 3 февраля 1964 г.

Второе возражение состоит в том, что при $M > 1$ мы должны иметь дело со сверхзвуковой конвекцией вихрей, и использование уравнения (10.8), справедливое для $M < 1$, становится сомнительным.

Относительно этого второго возражения можно привести следующие рассуждения. При малых скоростях квадруполь v_k эффективность излучения звука квадруполем мала благодаря тому, что имеется почти полная компенсация излучения от источников противоположного знака более низкого порядка. При увеличении v_k компенсация уменьшается и излучение возрастает, но оно не может увеличиться больше, чем та интенсивность, которую дают отдельные составляющие квадруполь монополи; компенсация полностью отсутствует при $M_k = 1$.

Если квадруполь движется с дозвуковой скоростью (см. предыдущий параграф), интенсивность возрастает на фактор $(1 - M_k \cos \theta)^{-5}$.

При условии $M_k \cos \theta = 1$ квадруполь движется к наблюдателю со скоростью, равной скорости звука; тогда никакой компенсации между излучением отдельных монополей в квадруполе нет и наблюдатель слышит звук, порожденный этими отдельными монополями. Так как монополь — наиболее эффективный источник звука, то в этом случае будет наблюдаться максимальная интенсивность излучения. При сверхзвуковой конвективной скорости наиболее интенсивное излучение должно наблюдаться при углах Маха

$$\theta = \arccos \frac{1}{M_k}$$

— эффект, наблюдаемый Лауфером [16].

При скорости $v_k > c$ снова начинает проявляться компенсация между отдельными монополями в квадруполе, и при дальнейшем увеличении M_k излучение становится все менее эффективным, снова становится существенным фактор $(1 - M_k \cos \theta)^{-5}$. При больших M_k этот фактор можно приближенно заменить просто на M_k^{-5} . Тогда, поскольку, согласно теории Лайтхилла, интенсивность пропорциональна $v^8 c_0^{-5}$ (см. (10.47)), мы приходим к заключению, что в этом случае интенсивность оказывается про-

порциональной v^3 , а не v^8 , как это имеет место при $M < 1$.

Следует отметить, что проводимые рассуждения также приводят к механизму образования шума вихревыми волнами Маха, как это было рассмотрено в [8].

§ 7. Экспериментальная проверка теории генерации шума турбулентным потоком (эксперименты со струями)

После появления в 1952—1954 гг. работ Лайтхилла по теории порождения шума турбулентным потоком довольно скоро было установлено, что как эксперименты по шумам струй, имевшиеся к этому времени, так и вновь поставленные опыты со струями достаточно хорошо подтверждают выводы этой теории и в первую очередь закон восьмой степени. Поскольку весь круг вопросов по аэродинамической генерации звука имеет кроме чисто научного интереса также большое значение в авиационной и ракетной технике, после работ Лайтхилла стало появляться большое количество экспериментальных работ в этой области, обширная библиография которых имеется в [14, 17, 18, 19].

Как уже отмечалось, шумы реактивных струй представляют собой мощный искусственный источник звука. Так, шум струи мощных ракет на расстоянии ~ 100 м составляет 150 и более децибел (отнесенных, как обычно, к уровню 10^{-16} вт/см²). Излучаемая акустическая энергия составляет при этом, вообще говоря, относительно небольшую величину — не более 1% от мощности двигателя. Однако при колоссальной мощности двигателей ракет абсолютная величина акустической излучаемой мощности оказывается огромной.

Струя, вытекающая из сопла, — это весьма сложный гидродинамический поток, и поэтому для проверки основных выводов теории по генерации шума турбулентным потоком следовало бы выбрать более подходящий объект для исследования, чем шум такой струи. Однако для получения заметной интенсивности шума следует иметь дело с большими скоростями потока, как это следует из закона восьмой степени, а получить такие скорости, не обращаясь

к использованию струи, затруднительно. Вообще говоря, в принципе можно было бы изучать шум такого свободного турбулентного потока, каким является ветер в приземном слое атмосферы, так как микроструктура такого потока хорошо исследована [2]. Хотя такие измерения и осложнялись бы побочными шумами, например, благодаря возникновению вихревого звука или краевого тона (см. гл. 11)

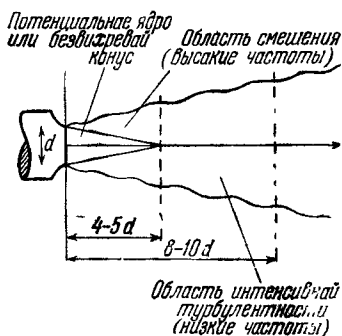


Рис. 89. Схема турбулентной реактивной струи.

из-за неизбежного при проведении измерений присутствия твердых тел в потоке, но можно было бы с использованием корреляционного метода попытаться освободиться от этих помех и обнаружить действительный шум ветра и более аккуратно проверить, например, закон восьмой степени. Однако таких измерений до сего времени пока еще не сделано.

В изучении шума турбулентной струи интерес представляют интенсивность этого

шума и зависимость интенсивности шума от осевой скорости потока в струе, от сечения струи и пр. Кроме того, важно пространственное распределение шума и его спектр.

Здесь мы ограничимся шумом «холодных» турбулентных струй, оставляя в стороне роль тепловых процессов. Прежде чем переходить к изучению шума струи, естественно следует знать гидродинамику струи [10, 20, 21] и характер турбулентности отдельных ее участков.

Дозвуковая турбулентная затопленная струя характеризуется следующими свойствами. Плоская струя занимает область турбулентного потока между двумя тангенциальными поверхностями разрыва. Эксперимент показывает, что угол между этими поверхностями, или угол раствора, составляет $25-30^\circ$. Скорость жидкости в каждом поперечном сечении струи при удалении от оси струи уменьшается и на поверхности разрыва становится малой по сравнению со скоростью на оси. При выходе из круглого отверстия диаметром d до расстояния $4-5d$ имеется так называемая

ваемое потенциальное ядро или потенциальный конус струи, в котором скорость струи постоянна (рис. 89). Это ядро далее «съедается» постепенным утолщением пограничного слоя струи по мере увеличения x . Далее вдоль оси скорость струи U убывает с увеличением расстояния x от сопла, так что $U \sim \text{const} \cdot x^{-1}$. Число Рейнольдса Re для струи одинаково для всех участков, поскольку Ur (здесь r — радиус струи) постоянно вдоль струи. Как следует из

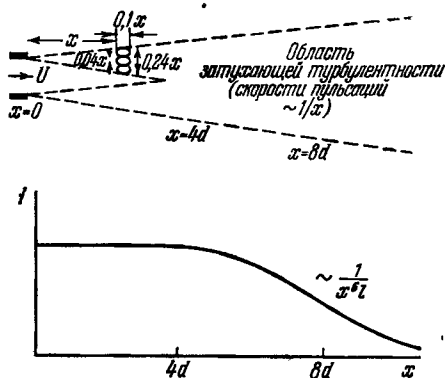


Рис. 90. Турбулентная струя; измерения при $M = 0,3$ и $Re = 6 \cdot 10^5$ (Лоуренс, [22]). В области смешения среднее квадратичное пульсаций скорости достигает $\sim 0,14 U$ и средняя скорость переноса вихрей составляет $\sim 0,5 U$. По оси ординат на нижнем рисунке отложена акустическая мощность на единицу длины струи (масштаб произволен).

экспериментов Лоуренса [22, 14], при скорости истечения струи из отверстия, соответствующей $M = 0,3$ и $Re \simeq 6 \cdot 10^5$, область смешения, занимающая пространство между границей потенциального конуса и внешней границей струи, становится полностью турбулентной уже на расстоянии $x = 0,5 d$. Область смешения увеличивается линейно с x вплоть до $x \simeq 4d$, ее ширина составляет $\sim 0,24 x$ (рис. 90).

Если сравнить корреляцию пульсаций скорости во времени в фиксированной точке области смешения с пространственной корреляцией в двух точках, взятых вдоль потока, то можно определить скорость переноса «вихрей» v_k ,

которая оказывается приблизительно равной $v_k = 0,5 U$, где U — осевая скорость струи (ср. § 5 этой главы). При этом максимум среднего квадратичного пульсаций скорости оказывается примерно $\sim 0,14 U$.

Продольный и поперечный радиусы корреляции пульсаций скорости в зоне смещения не одинаковы и составляют соответственно $0,1 x$ и $0,04 x$. За область смещения, после $x = 4 d$, имеется зона развитой турбулентности, размеры которой возрастают с x , тогда как $V \sqrt{v^2}$ убывает как $1/x$. Отметим, что в работе [23] методом термоанемометра для струи, вытекающей из круглого отверстия, при внутренних числах Рейнольдса $Re_{l_{\min}} \sim 800$, где l_{\min} — внутренний масштаб поля пульсаций скоростей, т. е. для достаточно больших Re самого потока, экспериментально исследовано поле турбулентных пульсаций скорости и показано, что достаточно хорошо выполняется колмогоровский вид спектра («закон $5/3$ »). Ряд сведений о турбулентности струи имеется в [24].

Эксперименты по изучению шума дозвуковых струй проводились двумя основными методами: методом реверберационной камеры и измерением в свободном пространстве. Каждый из этих методов обладает своими достоинствами и недостатками. Метод с использованием реверберационной камеры удобен для исследования источника звука, обладающего направленностью, в том отношении, что благодаря многократным отражениям от стенок камеры звуковое поле имеет приблизительно одинаковую плотность энергии во всей камере. Тогда вычисление звуковой мощности источника в данной полосе частот может быть произведено из данных измерения звукового давления в какой-либо точке камеры. Однако здесь возникает трудность, состоящая в том, что диффузия звукового поля происходит не одинаково на высоких и на низких частотах. Во втором методе существенно влияние условий погоды и отражений от земли. Если работать в заглушенной камере, последние трудности отпадают, однако необходимо производить измерения во многих точках, чтобы учесть характеристику направленности источника; кроме того, в этом случае изучение шума возможно (как и в реверберационной камере) только с моделями, т. е. для струй с небольшим диаметром сопла.

Эксперименты по изучению зависимости интенсивности шума, излучаемого струей, от осевой скорости струи у выхода из сопла проводились большим количеством авторов как в заглушенных и реверберационных камерах на

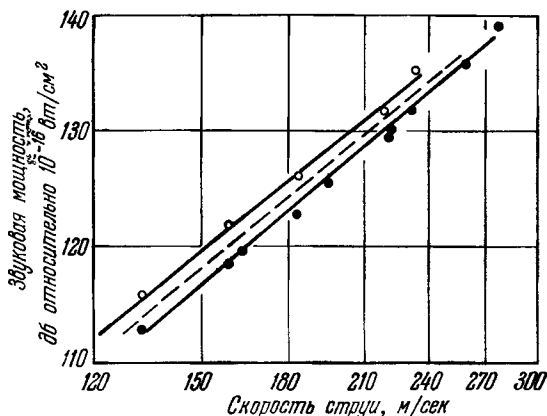


Рис. 91. Результаты экспериментов Уотерхауза и Берендта, 1958. Диаметр сопла 1,25 см. Светлые кружки — цилиндрическая труба, черные кружки — слабо суживающееся сопло, пунктир — «закон восьмой степени». Сила тяги одинакова [26].

моделях, так и с большими соплами реактивных двигателей, установленными на открытом воздухе. Данные этих экспериментов и измерений показывают, что хорошо оправдывается формула для акустической мощности:

$$I = K \frac{\rho^2 U^8 d^2}{\rho_0 c_0^5}. \quad (10.85)$$

Здесь ρ — плотность газа в струе, ρ_0 — в окружающей среде и d — диаметр сопла. Величину K можно считать близкой к постоянной величине, но изменяющейся при изменении уровня начальной турбулентности струи и изменении конфигурации сопла. Так, для струй с низким уровнем турбулентности $K \sim 3 \cdot 10^{-5}$; для струй, выходящих из прямых труб, $K \sim 6 \cdot 10^{-5}$; для струй с высоким начальным уровнем турбулентности $K \approx 10^{-4}$ [14, 25].

На рис. 91 приведены результаты экспериментов, произведенных Уотерхаузом и Берендтом [26] в реверберационной камере на моделях. Как видно, имеется достаточно хорошее согласие с «законом восьмой степени» Лайтхилла. На рис. 92, взятом из [19], приведен сводный график зависимости I/d^2 от осевой скорости струи U , где учтены результаты многих авторов, ссылки на которых имеются в

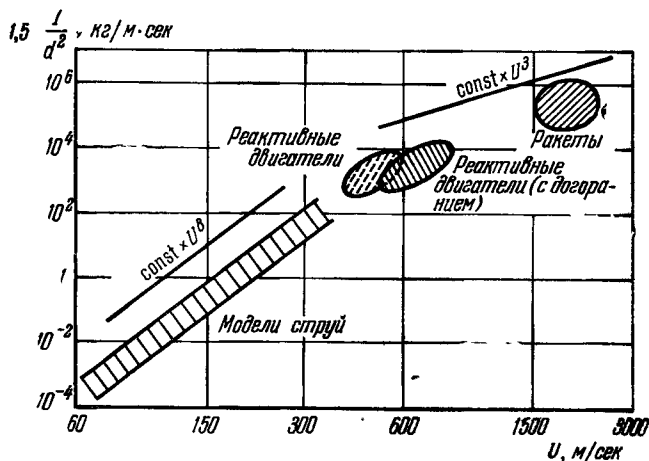


Рис. 92. Сводный график зависимости отношения интенсивности звука I к квадрату диаметра сопла от скорости струи у отверстия сопла [19].

этой работе. Из этого рисунка видно, что при U , меньших 600 м/сек (модели струй, струи реактивных двигателей), хорошо выполняется «закон восьмой степени». Для больших скоростей U (реактивные двигатели с догоранием, ракеты) зависимость интенсивности шума от U становится более слабой, приближаясь скорее к закону U^3 (ср. с выводами § 6).

Перейдем теперь к экспериментальным данным по спектру шума турбулентной дозвуковой струи. На рис. 93 ([19], см. также [17]) приведена кривая зависимости излучаемой мощности шума от безразмерного параметра fd/U , полученная в результате усреднения экспериментальных данных с моделями струй, реактивных двигателей и

ракет (сплошная кривая), и подобная кривая (частый пунктир) для одного из типичных реактивных двигателей (двигатель авиакомпания «Дуглас», $U = 600$ м/сек, $d = 54$ см, температура струи 1295° С). На этом рисунке редкий пунктир означает теоретическую кривую. Максимум

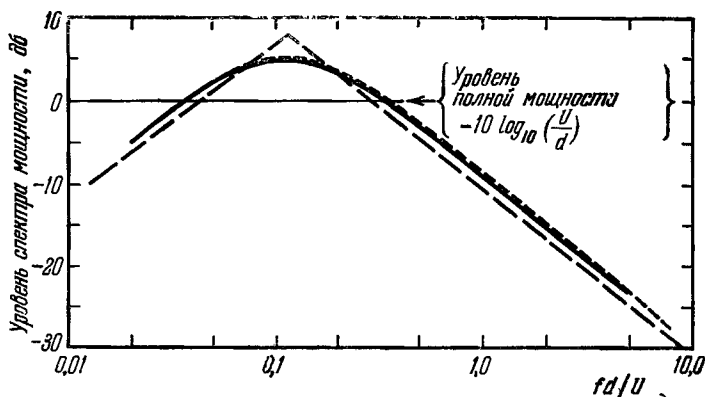


Рис. 93. Спектр для моделей струй, реактивных двигателей и ракет и типичного реактивного двигателя в зависимости от безразмерного параметра fd/U [19].

теоретической спектральной кривой совмещен с максимумом экспериментальных спектральных кривых, имеющим место при $fd/U = 0,13$.

Теоретическая кривая спектра шума струи получена на основе соображений подобия и использования основных экспериментальных данных по кинематической структуре струи. Согласно этому рассмотрению, которое мы ниже проведем, мощность низкочастотной части шума, излучаемая областью струи в пределах $x = 4d$ и $x = 8d$, растет как f^2 , а мощность высокочастотного шума, излучаемая областью смещения (от места расположения сопла при $x = 0$ до $x \simeq 4d$), падает с f как f^{-2} . Этот вывод получается из следующих рассуждений. Турбулентность струи, конечно, неоднородна. Однако можно в первом приближении считать, что отклонения от однородности подобны в зависимости от диаметра струи d и скорости струи у отверстия (сопла) U_j . Разобьем струю на две области: область А от

сопла до конца потенциального конуса (область смешения) и далее область B . Можно считать, что процессы будут подобны для различных струй и в этих областях [19, 27].

Введем безразмерное расстояние по оси струи $\xi = x/d$. Используя соображения подобия и размерностей, а также экспериментальные данные для областей A и B , можно считать, что для области A

$$U \sim U_j, \quad f \sim \frac{U_j}{d\xi}, \quad l^3 \sim d^3\xi^3, \quad S \sim \xi d^2; \quad (10.86)$$

для области B

$$U \sim \frac{U_j}{\xi}, \quad f \sim \frac{U_j}{d\xi^2}, \quad l^3 \sim d^3\xi^3, \quad S \sim d^2\xi^2. \quad (10.87)$$

Здесь l — масштаб корреляции пульсаций скоростей, l^3 — характерный объем неоднородности (вихря) и S — поперечное сечение струи. Воспользуемся теперь формулой (10.48). Тогда для области смешения

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_A \sim \frac{\rho U_j^4 l^3 S}{c^5}, \quad (10.88)$$

где мы приняли во внимание, что $dV = S dx$ и $U \sim U_j$. Пользуясь (10.86), имеем:

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_A \sim \rho U_j^8 \frac{d}{c^5}. \quad (10.89)$$

Для области B на основании (10.87) и (10.88) получим:

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_B \sim \left(\frac{\rho U_j^3 d}{c^5}\right) \xi^{-7}. \quad (10.90)$$

Поскольку

$$\frac{dI}{df} = \frac{dI}{dx} \frac{dx}{df}, \quad (10.91)$$

из (10.91), (10.86), (10.90) имеем для вида спектра:

$$\left(\frac{dI}{df}\right)_A \sim \left(\frac{\rho U_j^3 d}{c^5}\right) f^{-2}, \quad (10.92)$$

$$\left(\frac{dI}{df}\right)_B \sim \left(\frac{\rho U_j^3 d^6}{c^5}\right) f^2, \quad (10.93)$$

т. е. результат, который был сформулирован выше.

Все эти использованные соображения, конечно, очень грубы, тем не менее они приводят к результатам, в общих чертах согласующимся с экспериментом. Заметим, что при достаточно интенсивном звуковом поле реактивных струй на виде спектра шума должно сказаться нелинейное взаимодействие между отдельными спектральными компонентами шума, о чем речь шла в гл. 2, § 5. Однако этот вопрос почти совсем не изучен.

Сравнивая эти результаты с теоретическими выводами § 4, основанными на предположении о генерации шума изотропной турбулентностью, мы видим, что соображения подобия и размерностей вместе с использованием экспериментальных данных по гидродинамике струи приводят к похожим, но несколько отличным выводам. Вспомним, что теоретическая зависимость от частоты в § 4 была получена такой, что мощность высокочастотной области шума $\sim f^{-7/2}$ и мощность низкочастотной области шума $\sim f^4$.

В § 5 шла речь о том, что если учесть среднюю скорость струи, а не ограничиваться только турбулентными пульсационными скоростями, то излучение шума струей будет обладать определенным пространственным распределением или направленностью. В частности, там указывалось, что для неподвижного сопла направленность струи будет определяться фактором $(1 - M_k \cos \theta)^{-5}$, где $M_k = v_k/c$ и v_k — скорость переноса вихрей.

На рис. 94, взятом из [14], приведено пространственное распределение шума воздушной струи, вытекающей из сопла со скоростью 300 м/сек, в децибелах относительно угла $\theta = 75^\circ$ (угол $\theta = 0$ соответствует оси струи); здесь использованы экспериментальные результаты Ли (o), Лэсситера (x) и Вестли и Лилли (Δ). Проведенная теоретическая кривая, определяемая фактором $(1 - M_k \cos \theta)^{-5}$, как видно, достаточно хорошо соответствует экспериментальным точкам. Измерения шума реактивного двигателя самолета ТУ-124 [28] также приводят к удовлетворительному согласию с приведенными в § 5 теоретическими соображениями о направленности звукового поля струи.

Отметим, что экспериментальный максимум излучения свободной турбулентной струи, вытекающей из покоящегося сопла, соответствует приблизительно 30° относительно оси струи.

Заканчивая на этом рассмотрение очень малой доли из имеющихся экспериментальных результатов для дозвуковых холодных струй, мы можем заключить, что эти резуль-

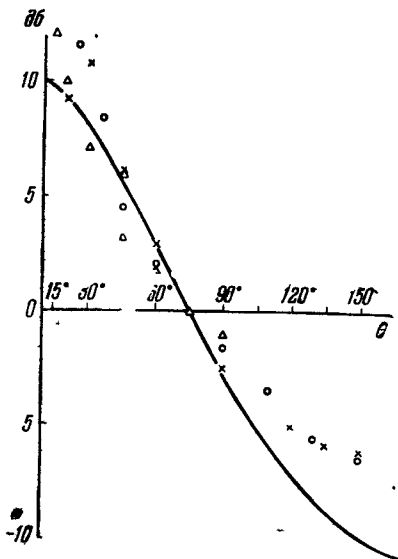


Рис. 94. Направленность излучения звука от воздушной струи, вытекающей со скоростью 300 м/сек, относительно $\theta = 75^\circ$ [14].

таты в целом дают удовлетворительное согласие с теорией. При этом речь идет об основных и главных закономерностях; что касается более детальных и тонких вопросов, то здесь остается еще много нерешенного. Здесь мы совсем не касались вопросов шумоглушения струй — проблемы, представляющей большое значение для авиационной техники [14, 29]; ее решение в существенной мере определяется достижениями теории аэродинамической генерации звука. Отметим только, что один из методов заглушения шума струи состоит в том, чтобы сместить шум струи в более

высокочастотную область; это достигается разбиением сопла на ряд сопел меньшего диаметра.

До сих пор в этом параграфе речь шла о дозвуковых струях. Шум струи, имеющей околосзвуковую и сверхзвуковую осевую скорость, отличается от шума дозвуковой струи тем, что в спектре появляются отдельные частоты большой интенсивности. Это объясняется тем, что такая струя при $M \geq 1$ имеет ячеистую или периодическую структуру [30—33], и эти частоты излучаются благодаря наличию ячеек; механизм этого излучения в полной мере еще не выяснен. При $M > 1$ струя, кроме того, начинает излучать благодаря начинающему действовать механизму

образования вихревых волн Маха, о чем шла речь в предыдущем параграфе (подробнее см. гл. 11).

Таким образом, сверхзвуковая струя излучает по крайней мере за счет трех механизмов излучения: излучения турбулентностью в том виде, как мы с ним имели дело для дозвуковых струй (лайтхилловский механизм), излучения за счет ячеистой периодической структуры струи и излучения вихревыми волнами Маха. При этом шум низкочастотной области сверхзвуковой струи (частоты ниже частоты $f \sim 0,2 \frac{U}{d}$), по-видимому, генерируется лайтхилловским механизмом, тогда как за высокочастотную область спектра шума ответственны два других механизма — как генерация шума вихревыми волнами Маха, так и генерация отдельных выраженных компонент шума периодической ячеистой структурой струи [34].

В [34] при диаметре сопла $d = 5$ мм (конфузор) и избыточном давлении, большем критического (0,9 атм), околосвуковая струя воздуха создавала шум, который можно было обнаружить вплоть до частот 1 Мгц. При этом интенсивность высокочастотной области шума падает с частотой как $f^{-\sigma}$, где $5 < \sigma < 6$, т. е. более быстро, чем для дозвуковых струй, для которых, как мы видели, $\sigma \gtrsim 2$.

Излучение высокочастотной области шума происходит в направлении, отличном от направления максимума излучения для дозвуковых струй. Если для дозвуковых струй это направление составляет угол с осью струи в $\sim 30^\circ$, то для сверхзвуковых струй этот угол с увеличением M все более приближается к углу $\sim 90^\circ$. Последнее обстоятельство находится в согласии с представлением об излучении высокочастотной области спектра сверхзвуковой струи вихревыми волнами Маха (см. гл. 11, § 4).

Отметим в заключение, что изучение шума сверхзвуковых струй в значительной степени выходит из рамок данной книги, поскольку здесь мы уже отходим от области слабых нелинейных взаимодействий и начинаем иметь дело с образующимися сильными ударными волнами.

Общая теория генерации шума при $M \ll 1$ может быть применена также для случая жидких сред. Однако здесь необходимо учесть то обстоятельство, что при определенных условиях в этом случае возможно появление кавита-

ции; при этом можно считать, что шум за счет захлопывающихся кавитационных пузырьков генерируется монополями. Изучение шума турбулентной струи воды, втекающей в водную же среду, производилось в [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И., Акустика неоднородной движущейся среды. Гостехиздат, 1946.
2. Татарский В. И., Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. Изд. АН СССР, 1959.
3. Андреев Н. Н., Русаков И. Г., Акустика движущейся среды. ГТТИ, 1934.
4. Чернов Л. А., Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. Изд. АН СССР, 1958.
5. Lighthill M. J., On sound generated aerodynamically. I. General theory. Proc. Roy. Soc. (London) A 211, 564 (1952).
6. Lighthill M. J., On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. Proc. Roy. Soc. (London) A 222, 1 (1954).
7. Symposium on the response of nonlinear systems to random excitation. J. Acoust. Soc. Am. 35, 1683 (1963).
8. Phillips O. M., On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. J. Fluid Mech. 9, 1 (1960).
9. Ламб Г., Гидродинамика, стр. 629. Гостехиздат, 1947.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, гл. III. Гостехиздат, 1953.
11. Proudman I., The generation of noise by isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. (London) A 214, 119 (1952).
12. Бэтчелор Дж., Теория однородной турбулентности, гл. VII; § 5. ИЛ, 1955.
13. Meecham W., Ford G., Acoustic radiation from isotropic turbulence. J. Acoust. Soc. Am. 30, 318 (1958).
14. Lighthill M. J., The Bakerian lecture, 1961. Sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc. (London) A 267, 147 (1962).
15. Williams J. E. F., The noise from turbulence convected at high speed. Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A 255, 469 (1963).
16. Laufer J., Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels. J. Aeronaut. Sci. 28, 685 (1961).
17. Von Gierke, Aircraft noise sources Handbook of noise control. McGraw-Hill Co., New York, Toronto, London, 1957.
18. Von Gierke, Aircraft noise control. Handbook of noise control. McGraw-Hill Co., New York, Toronto, London, 1957.
19. Powell A., On the generation of noise by turbulent jets. Amer. Soc. Mech. Engrs Paper, № 59-AV-53 (1959).
20. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
21. Б а й Ш и - и, Теория струй. Физматгиз, 1960.

22. Laurence J. C., Intensity, scale and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. N.A.S.A. Rep. № 1292, 1956.
23. Gibson M. M., Spectra of turbulence in a round jet. J. Fluid Mech. 15, 161 (1963).
24. Ричардс Е., Некоторые новые успехи в исследовании шума реактивных струй. Сб. «Проблемы современной акустики». Изд. АН СССР, 1963.
25. Власов Е. В., Мунин А. Г., Исследование акустических характеристик свободной турбулентной струи. Акуст. ж. 10, 271 (1964).
26. Waterhouse R. V., Berendt R. D., Reverberation chamber study of the sound power output of subsonic air jets. J. Aeronaut. Sci. 30, 114 (1958).
27. Powell A., Similarity and Turbulent jet noise. J. Acoust. Soc. Am. 31, 812 (1959).
28. Мельников Б. Н., О влиянии скорости полета самолета ТУ-124 на излучаемый его двигателями шум. Акуст. ж., 10, 327 (1964).
29. Гирке Х., Успехи и проблемы авиационной акустики. Сб. «Проблемы современной акустики». Изд. АН СССР, 1963.
30. Прандтль Л., Гидроаэромеханика. ИЛ, 1949.
31. Бергман Л., Ультразвук. ИЛ, 1956.
32. Powell A., On the mechanism of choked jet noise. Proc. Phys. Soc. (London) B 66, 1039 (1953).
33. Davies M. G., Oldfield D. E. S., Tones from a choked axisymmetric jet. I. Cell structure, eddy velocity and source locations. Acustica 12, 257 (1962).
34. Красильников В. А., Шихлинская Р. Э., Высокочастотная область спектра шумообразования струи. Вестн. МГУ, сер. III, № 3, 72 (1964).
35. Jorgensen D. W., Noise from cavitating submerged water jets. J. Acoust. Soc. Am. 33, 1334 (1961).

АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ПРИ НАЛИЧИИ В ПОТОКЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 1. Влияние твердых границ на генерацию звука потоком. Общая теория

До сих пор рассматривалось излучение звука потоком в отсутствие каких-либо твердых тел. Генерация звука турбулентным потоком происходит, как было показано в предыдущей главе, за счет нелинейного взаимодействия $\Omega\Omega$; при этой генерации обратная реакция возникающего звука (шума) на сам поток оказывается несущественной. При $M < 1$ решение задачи, как мы видели, приводит к тому, что звуковое поле можно представить в виде поля соответствующим образом распределенных квадрупольей, возникающих благодаря нестационарному (например турбулентному) движению жидкости.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если в потоке имеются твердые границы. Здесь возникающие явления становятся сложнее и разнообразнее. Можно ожидать, что роль твердых границ проявится по крайней мере в трех отношениях.

Во-первых, звук (шум), генерированный квадрупольями, будет отражаться от границ и испытывать на них дифракцию.

Во-вторых, поток жидкости может вызывать появление соответствующим образом распределенных на самих границах источников типа монополей и диполей.

Наконец, в-третьих, благодаря тем или иным твердым телам, находящимся в потоке (например, резонаторы или заостренные тела типа клина, находящиеся вблизи отверстия, из которого вытекает струя), при малых числах Re

возможна обратная реакция процесса, связанного с рождением звука, на сам поток, вследствие чего замыкается обратная связь и возникают автоколебания.

Задача состоит в решении основного уравнения (10.8) с учетом указанных возможных эффектов; решение кроме объемного интеграла типа (10.7) должно также содержать соответствующие поверхностные интегралы; должны выполняться на имеющихся границах необходимые граничные условия.

Используя общие методы решения неоднородного волнового уравнения (см., например, [1]), Кэрль [2] на основе теории Лайтхилла получил такую формулу для флуктуаций плотности в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от области g :

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 = & \frac{1}{c_0^2} \int_S \frac{\partial}{\partial t} [\rho v_i n_i] \frac{dS(\mathbf{y})}{4\pi r} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S [(\rho v_i v_j + P_{ij}) n_j] \frac{dS(\mathbf{y})}{4\pi r} + \\ & + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{[T_{ij}]}{4\pi r} dV(\mathbf{y}). \quad (11.1) \end{aligned}$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — направляющие косинусы внешней нормали к имеющейся в потоке поверхности S и x_i — координаты точки наблюдения.

Смысл этого выражения заключается в том, что общее излучение состоит из трех частей. Первый интеграл представляет собой акустическое поле простых источников (монополь), распределенных на поверхности S , напряженность которых связана с пульсациями скорости и равна скорости изменения массы. Для акустически жестких поверхностей можно считать, что $n_i v_i = 0$ и монополи отсутствуют. Напротив, для акустически «мягких» поверхностей первый член оказывается доминирующим; акустическое поле обусловлено главным образом действием пульсаций скорости у поверхности. Второй интеграл представляет собой излучение диполями, распределенными на S , напряженность которых равна локальной скорости изменения импульса. Эти источники связаны с пульсациями давления и вязких напряжений. Наконец третий интеграл дает квадрупольное излучение в объеме V (объем области g).

Отметим, что здесь, как и в случае отсутствия в потоке твердых тел (§ 1 предыдущей главы), не делалось никаких упрощающих предположений и полученная формула является точной. При этом, так же как и в случае безграничной среды, средняя скорость потока полагалась равной нулю. На основе соображений подобия и размерностей нетрудно показать, как это было сделано в § 2 предыдущей главы, что при $M_T = \frac{v}{c} \ll 1$ полная мощность излучения объемных или квадрупольных источников пропорциональна v^8 , мощность излучения поверхностных дипольных источников пульсаций давления и вязких напряжений пропорциональна v^6 , а мощность излучения монополей, обусловленных пульсациями скорости, пропорциональна v^4 .

Задача определения акустического поля, хотя бы и вдали от поверхностей, в зоне Фраунгофера, когда в аэродинамическом *) потоке имеются акустически «мягкие» поверхности, оказывается более сложной, чем для акустически жестких поверхностей. В этом случае псевдозвук — гидродинамические пульсации давления в потоке, вызванные полем скоростей, — будет превращаться в истинный звук. Наиболее сложный и общий случай будет иметь место, когда твердые тела не акустически мягкие и не акустически жесткие, а представляют собой упругие тела. При этом форма их может быть произвольна — это могут быть, например, мембраны, стержни, оболочки, заделанные в экраны. На такие поверхности могут действовать со стороны потока регулярные сторонние силы или, как, например, в случае турбулентного потока, случайное поле сил. Под действием этих сил, имеющих свой характерный спектр частот, колебание той или иной поверхности будет совершаться сложным образом, в зависимости от свойств этой поверхности.

К решению задачи об акустическом поле, обусловленном колебанием произвольной упругой поверхности под действием сил аэродинамического потока, можно подойти несколькими методами. Первый метод сводится к непосредственному решению краевой задачи для того или иного

*) И в гидродинамическом также. В последнем случае дело может осложняться процессами кавитации.

конкретного случая. Другой метод решения задачи об излучении сводится к следующему. Основная идея состоит в том, что на основе математической формулировки принципа взаимности в акустике движущейся среды можно вывести некоторое интегральное соотношение, которое связывает решение двух краевых задач: задачи излучения и задачи дифракции звука на том или ином тонком теле, находящемся в потоке (оболочке, пластинке, стержне и т. д.). При помощи этого интегрального соотношения решение задачи излучения звука, например оболочкой, сводится к квадратурам, если решение задачи о дифракции звука на данной оболочке известно. При этом вновь решать задачу о дифракции звука на данной оболочке оказывается ненужным [3]. По существу этот метод основан на применении функции Грина; подобный подход имеется также в [4].

Положим, что требуется определить поле излучения оболочки, колеблющейся под действием распределенных по ее поверхности сил F . Из принципа взаимности в акустике движущейся среды при некоторых достаточно широких условиях можно получить следующее интегральное соотношение [3]:

$$\int_V Q^{(2)}(\mathbf{r}) p^{(1)}(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} F^{(1)}(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}), \quad (11.2)$$

связывающее решение краевых задач дифракции на тонких упругих телах, находящихся в потоке газа, и задачи излучения звука упругими телами в движущейся среде, когда оболочка совершает колебания под действием внешних гармонических сил, моментов, смещений и т. д. Здесь n — внешняя нормаль к поверхности S , поле давления $p^{(1)}(\mathbf{r})$ создается некоторой системой источников $Q^{(1)}(\mathbf{r})$ в объеме V и поле $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ — источниками $Q^{(2)}(\mathbf{r})$. При этом создаваемые источниками поля $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ и $p^{(1)}(\mathbf{r})$ подчиняются уравнениям, сопряженным друг другу [5]. Граничные условия состоят в задании уравнений движения оболочки и условия ее непроницаемости; необходимо также выполнение условия погашаемости (условие на бесконечности). Из соотношения (11.2) можно найти поле излучения $p^{(1)}(\mathbf{r})$ в некоторой точке \mathbf{r}_1 объема V . Помещая в эту

точку вспомогательный источник $Q_0^{(2)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, поле которого $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ известно (решение соответствующей дифракционной задачи), находим:

$$p^{(1)}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{Q_0^{(2)}} \int_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial n}(\mathbf{r}) F^{(1)}(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}). \quad (11.3)$$

Если силы на поверхности распределены статистически, то

$$\overline{|p^{(1)}(\mathbf{r}_1)|^2} = \frac{1}{|Q_0^{(2)}|^2} \iint_S \iint_S \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}')}{\partial n} \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r}'')}{\partial n} \times \\ \times \overline{F^{(1)}(\mathbf{r}') F^{(1)}(\mathbf{r}'')} dS(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}''), \quad (11.4)$$

где $\overline{F^{(1)}(\mathbf{r}') F^{(1)}(\mathbf{r}'')}$ — функция корреляции, которая для однородных случайных полей есть функция только расстояния между точками наблюдения $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|$. Таким образом, если решение соответствующей дифракционной задачи известно и $\tilde{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ задано и (в статистическом случае) задана, кроме того, функция корреляции сторонних сил, то задача сводится к квадратурам.

Пользуясь указанным методом, можно, при достаточно общих предположениях, получить формулу, аналогичную (11.1). Для этого нужно воспользоваться основным уравнением аэродинамической генерации звука и соответствующими граничными условиями, воспользоваться также обобщенной математической формулировкой принципа взаимности в акустике [3] и, если результат выразить не через флуктуации давления, а через флуктуации плотности, то от давления нужно перейти к плотности ρ .

Вопросу поведения упругих тел (оболочек, пластинок и т. д.) под действием случайного поля сил акустического происхождения посвящен ряд других работ; см., например, [6—9].

§ 2. Вихревой звук и звук вращения

Применим теперь общую теорию к различным конкретным задачам аэродинамической генерации звука при наличии в потоке твердых тел.

При больших числах Re шум, порождаемый безграничным турбулентным потоком, составляет малую долю (мень-

ше процента даже при больших скоростях потока) от средней мощности самого потока. Поэтому естественно, что в задачах о генерации звука турбулентным потоком обратная реакция возникающего звука на породивший его поток несущественна. В другом крайнем случае, при малых Re , но все же таких, когда поток уже неустойчив, обратная реакция может иметь существенное значение.

В качестве примера, относящегося к этому случаю, можно указать на появление так называемого краевого тона и подобных явлений, возникающих в различного рода свистках и воздушных трубах; эти явления носят автоколебательный характер. В промежуточных случаях, когда Re настолько велико, что мощность потока существенно больше мощности возникшего звука и все же настолько мало, что турбулентность еще не наступает, в зависимости от конкретной задачи следует либо пренебречь обратной реакцией, либо учесть ее.

К последнему кругу задач можно отнести возникновение вихревого звука в дотурбулентном режиме, к которому относятся давно известные так называемые эоловы тона.

Вихревой звук и звук вращения, так же как и крайевой тон, принадлежат к классу явлений в акустике, имеющих большую давность.

Интересно отметить, что эти явления после довольно большого перерыва опять привлекли к себе значительное внимание за последние десятилетия, когда связь между акустикой и гидродинамикой снова стала более тесной, как это было во времена Рэлея. Эти явления теперь, после развития общей теории аэродинамической генерации звука, получили достаточное теоретическое обоснование.

Начало теории «вихревого звука», классическим примером которого служат эоловы тона, возникающие, например, при обдувании ветром натянутой проволоки, было положено Рэлеем [10] при объяснении известных экспериментов Струхалия [11].

Как и в других задачах аэродинамической генерации звука, основные вопросы, которые надлежит решить, — это найти спектр звука (шума), интенсивность звука и его пространственное распределение. Эксперименты Струхалия по звукообразованию при вращении проволоки показали,

что частота возникающего-звука f определяется формулой

$$f = St \frac{v}{d}, \quad (11.5)$$

где v — скорость потока, набегающего на проволоку, d — диаметр проволоки и St — число Струхала, которое для цилиндра равно приблизительно 0,2 в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса (см. рис. 95) $10^3 \leq Re \leq 10^4$.

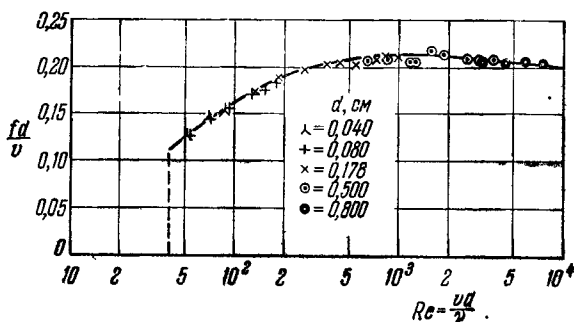


Рис. 95. Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса для цилиндра [12].

Рэлей пришел к заключению, что причина образования эловых тонов связана с нестабильностью вихревой картины в следе за телом, обтекаемом потоком воздуха. Он отметил также, что хотя интенсивность звука увеличивается, если собственная частота колебаний цилиндра (проволоки) совпадает с частотой нестабильности вихревой картины, наличие колебаний цилиндра не принципиально. Эловы тона возникают при жестком цилиндре, не совершающем никаких колебаний.

Мы знаем теперь, что эловы тона появляются вследствие срыва вихрей с обтекаемого цилиндра, и поэтому этот звук, порождаемый чисто аэродинамическими причинами, называют вихревым звуком. Расчет интенсивности вихревого звука был впервые проведен из соображений размерности Блохинцевым [13], считавшим на основании экспериментов Юдина [14], что излучение имеет дипольный характер. Экспериментами было установлено, что периодические силы между средой (потоком) и телом, вызываю-

щие периодический срыв вихрей, действуют под прямым углом к потоку таким образом, что эквивалентные этим силам акустические диполи расположены перпендикулярно к потоку и излучение имеет максимум в этом направлении. Интенсивность вихревого звука от цилиндрического тела выражается формулой

$$J = \alpha (Re) \cos^2 \theta \frac{ld}{r^2} \frac{\rho v^6}{c^3}, \quad (11.6)$$

где $\alpha (Re)$ — коэффициент, который, естественно, не может быть определен из соображений размерности; угол $\theta = 0$ соответствует направлению оси диполя; v — скорость потока, l — длина цилиндра и d — его диаметр. Как видно из этой формулы, интенсивность вихревого звука (излучение диполями) подчиняется закону шестой степени скорости потока, в отличие от закона восьмой степени для квадратного излучения.

Расчет интенсивности вихревого звука может быть произведен на основе теории, изложенной в предыдущем параграфе. При этом оказывается возможным определить постоянную α в формуле (11.6) [15].

Считая поток несжимаемым и оставляя главные части интегралов в выражении (11.1), получаем, что дальнейшее поле излучения звука, возникающего благодаря движению жидкости вблизи твердой границы, определяется выражением

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 \simeq & \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} [T_{ij}] dV(\mathbf{y}) + \\ & + \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{x^2} \int_S \frac{\partial}{\partial t} [(\rho_0 v_i v_j + P_{ij})] dS_j(\mathbf{y}) - \\ & - \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\rho_0}{x} \int_S \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} \right] dS_i(\mathbf{y}). \quad (11.7) \end{aligned}$$

Если считать, что граница неподвижна и акустически жесткая, то $v_i = 0$ на поверхности $S_i(\mathbf{y})$. Менее жестким является ограничение, приводящее к тому же результату и состоящее в том, что твердое тело несжимаемо и поэтому простые источники (монополи), связанные с расширением или сжатием, отсутствуют. Можно также показать

(применяя теорему Гаусса), что в этом случае член с напряжениями Рейнольдса во втором интеграле также исчезает, если поверхность движется как жесткое тело. Поэтому выражение (11.7) сводится к следующему:

$$\rho(x, t) - \rho_0 \simeq \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_V \frac{\partial^2 [T_{ij}]}{\partial t^2} dV(\mathbf{y}) - \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{x^2} \frac{d[F_i]}{dt}, \quad (11.8)$$

где $[F_i] = - \int_S [P_{ij}] dS_j(\mathbf{y})$ — полная сила, с которой тело

действует на жидкость. Первый (квадрупольный) член имеет порядок M^4 , тогда как второй (дипольный) имеет порядок M^3 , поэтому при $M \ll 1$

$$\rho(x, t) - \rho_0 \simeq - \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{x^2} \frac{dF_i}{dt}. \quad (11.9)$$

Далее следует учесть, что срыв вихрей с цилиндра (провода) происходит нерегулярно и согласно эксперименту в спектре вихревого звука имеется основная (струхалевская) частота, более высокие гармоники и шумовой фон. Эксперимент показывает [15], что действие потока на цилиндр в различных его точках некогерентно, если расстояния между этими точками, взятыми вдоль оси цилиндра, становятся больше некоторой величины. Это безразмерное расстояние s , выраженное в диаметрах цилиндра, будем считать расстоянием корреляции. Таким образом, действие потока на цилиндр можно считать случайным процессом.

Пользуясь формулами (11.8) и (10.14), находим для интенсивности эолового тона цилиндра длиной l (концевыми поправками пренебрегаем и считаем, что $l \gg sd$):

$$J(x) \simeq \frac{x_i x_j}{16\pi^2 \rho c^3 x^4} l \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\frac{\partial f_i(z_0)}{\partial t} \frac{\partial f_j(z_0 + z)}{\partial t}} dz \simeq \frac{1}{16\pi^2 \rho c^3 x^4} \overline{\left(x_i \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2} s dl. \quad (11.10)$$

Здесь $f_i(z)$ — флуктуация силы на единицу длины в аксиальном направлении z . Для вычисления $J(x)$ нужно, та-

ким образом, зная среднее квадратичное $\left(x \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2$ и аксиальный масштаб корреляции s . Первую величину, оказывается, можно определить из экспериментов, проведенных Коважным [12], изучавшим вихревую цепочку Бенара — Кармана при числах Re , лежащих в пределах 40—160. Измерения в аэродинамической трубе с помощью специально разработанного термоанемометра дают картину вихрей, изображенную на рис. 96.

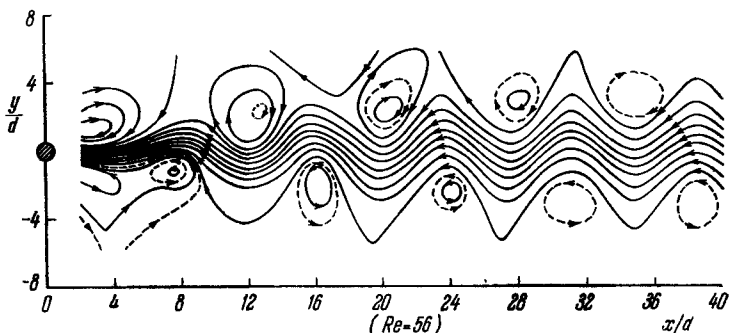


Рис. 96. Развитие и затухание вихревой картины за обтекаемым цилиндром при $Re = 56$ [12].

Флуктуации силы можно разложить на флуктуации силы перпендикулярно к направлению потока f_l и силы в направлении потока f_d . Величины флуктуаций f_d и f_l на единицу длины определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} f_d &= \rho \frac{d}{dt} \iint u' dx dy, \\ f_l &= \rho \frac{d}{dt} \iint v' dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

где u' — компонента флуктуации скорости в направлении потока, интегрирование производится по плоскости, нормальной к оси цилиндра, и v' — компонента флуктуации скорости поперек потока. Величина u' для такого потока может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} u'(x, y, t) &= \varphi_1(x, y) \cos 2\pi[\zeta_1(x) + ft] + \\ &+ \varphi_2(x, y) \cos 4\pi[\zeta_2(x) + ft], \end{aligned} \quad (11.12)$$

где амплитудные функции φ_1 и φ_2 медленно изменяются с изменением x (координата вдоль потока) и быстро изменяются с y (координата поперек потока). При этом φ_1 — нечетная, а φ_2 — четная функции y ; $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ — функции от x со слабой нелинейностью, которая учитывает небольшую неоднородность в пространственном расположении вихрей (см. рис. 96); частота f постоянна во времени. Функции φ_1 и φ_2 , так же как и ζ_1 , ζ_2 , измерены в [12] до значений $x/d = 40$. Функция φ_1 — нечетная относительно y , поэтому интеграл, взятый от первого члена (11.12), исчезает и флуктуации в f_d имеют удвоенное значение частоты относительно ее основного значения f . Функция $\varphi_2(x, y)$ быстро убывает при увеличении y , и значение интеграла (11.11) быстро сходится.

Используя уравнение несжимаемости для пульсаций скорости u' и v' , уравнения (11.11) и (11.12) и экспериментальные данные Коважного, оказывается возможным определить f_i и f_d . Такой расчет произведен в [15], где получено:

$$f_i \simeq 0,38 \rho_0 v^2 d \cos 2\pi ft. \quad (11.13)$$

Величина f_d составляет примерно 10% от f_i ; этим подтверждается то, что диполи расположены перпендикулярно к потоку. Согласно (11.13)

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \simeq -2,4 \rho_0 v^3 St \sin 2\pi ft, \text{ где } St = \frac{fd}{v}. \quad (11.14)$$

Отсюда

$$\overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2} \simeq 2,8 \rho_0^2 v^6 St^2. \quad (11.15)$$

Филипс из своих экспериментов определил, что в диапазоне $100 < Re < 160$ масштаб корреляции $s \simeq 17$. Используя эти данные, можно получить, пользуясь (11.10) и (11.15), что интенсивность золотого тона, порожденного обтеканием цилиндра, определяется формулой

$$J(r) \simeq 0,27 \cos^2 \theta \frac{ld}{r^2} \frac{\rho_0 v^6}{c_0^3} St^2, \quad (11.16)$$

где θ — угол между направлением потока и направлением линии, соединяющей точку наблюдения с цилиндром. При больших Re величина s уменьшается; особенно уменьше-

ние заметно при наступлении турбулентного течения ($Re > 300$).

Рассмотренная теория генерации вихревого звука относилась к случаю неподвижного стержня (цилиндра), обтекаемого потоком. Можно учесть влияние колебаний тела (стержня), находящегося в потоке, на интенсивность и направленность излучения вихревого звука [16]; задача может быть решена для случая малых колебаний стержня, при условии, если можно пренебречь влиянием этих колебаний на картину самого потока, что, вообще говоря, не является очевидным.

Тот факт, что интенсивность вихревого звука пропорциональна шестой степени скорости потока, можно считать установленным еще экспериментами Юдина [14]. Однако проверка формулы для интенсивности вихревого звука (11.16) пока еще не произведена достаточно корректно с экспериментальной точки зрения. В еще большей степени это замечание относится к экспериментальной проверке роли колебаний стержня в генерации эоловых тонов.

Вихревой звук возникает также при вращении лопасти винта, с которого срываются вихри. Этот звук составляет, однако, только часть звука винта. На низких частотах звук, создаваемый винтом, в основном составляет так называемый звук вращения; частота звука вращения определяется числом оборотов и количеством лопастей винта.

Благодаря различной угловой скорости вращения элементов лопасти винта, частота срывающихся с лопасти вихрей увеличивается по мере приближения к концу лопасти. По этой причине, а также благодаря тому, что срыв вихрей есть случайный процесс, спектр вихревого звука неперIODический и обычно частоты его преимущественно лежат выше 1000 $гц$ при числах M конца лопасти, меньших 1. Вихревой звук имеет максимум направленности вдоль оси винта. В этом направлении звук вращения теоретически отсутствует, а вихревой звук максимален, поскольку этот звук дипольного происхождения и диполи расположены в плоскости вращения.

Имеется много работ по изучению звука, создаваемого винтом. Одна из первых важных работ по звуку вращения винта была сделана Гутиным [17], который впервые выска-

зал предположение о замене периодических сил, с которыми каждый элемент лопасти действует на среду (вследствие чего возникает сила тяги и момент вращения винта), диполями. Далее в этом направлении был проделан ряд важных работ, в которых было учтено поступательное движение винта. Здесь мы не будем заниматься этими вопросами, отсылая читателя, например, к [13, 18, 19].

Развитая Гутиным теория применима и для винта, работающего в воде при отсутствии кавитации. Однако в этом случае, когда при вращении винта имеется кавитация, шум, создаваемый винтом, в существенной мере определяется ею. В [20] отмечено, что излучение гребных винтов в режиме кавитации на низких звуковых частотах обладает характерными свойствами. Весьма вероятно, что дискретные составляющие спектра шумов, в том числе и гармоники звука вращения, имеют кавитационную природу и обусловлены излучением совокупности пузырьков.

Возникшие кавитационные пузырьки подвергаются периодическому воздействию со стороны следующих друг за другом зон повышенного и пониженного давления, создаваемых набегающими лопастями, вследствие чего появляются периодические пульсации пузырьков. При этом частота пульсаций главным образом определяется произведением числа оборотов на число лопастей винта, т. е. равна частоте звука вращения.

§ 3. Краевой тон

Под термином «краевой тон» понимают звук, который возникает, когда газ (жидкость), вытекающий из щели или отверстия, на своем пути встречает твердое тело в виде клина (см. рис. 97), как это имеет место в обычных свистках (или, в случае кругового отверстия и закругленного края, в птичьих манках). Вместо клина может использоваться тот или иной резонатор.

Краевой тон известен очень давно. Имеется большое число экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению этого явления, но существенный прогресс в понимании всего круга вопросов, связанных с краевым тоном, достигнут, пожалуй, лишь в последние

10—15 лет, главным образом в связи с развитием общей теории аэродинамической генерации звука. Опыт показывает, что звук возникает при сравнительно небольших числах Re , когда турбулентность еще не наступила и существенно обратное влияние процессов, связанных с возникновением звука, на сам поток.

Звук возникает лишь при некоторых условиях, определяемых скоростью набегающего на твердое тело (клин) потока v , расстоянием h от отверстия, из которого вытекает струя, до начальной точки клина, геометрическими характеристиками струи и вязкостью. Другими словами, звук краевого тона имеет место в определенной области чисел Рейнольдса и Струхалья:

$$Re = \frac{v\delta}{\nu} \text{ и } St = \frac{f\delta}{v},$$

где f — частота звука и δ — характерный размер отверстия, из которого вытекает струя. Так, в [21] наблюдались три области звучания краевого тона. При этих экспериментах отверстие прямоугольного сечения имело меньшую сторону $\delta = 0,1$ см, большую сторону $b = 2,54$ см (почти плоская струя). Отношение h/δ менялось в пределах от 3 до $25 \div 30$. Число Рейнольдса лежало в пределах $100 \div 2000$, число Струхалья — в пределах $0,02 \div 0,30$.

При различных Re и St имеется ряд областей возбуждения краевого тона; при изменении h/δ эти области скачком переходят одна в другую, наблюдается явление гистерезиса. Так, если интересоваться звуковым давлением краевого тона в некоторой точке наблюдения x , то при изменении h/δ скачок из первой области во вторую происходит при разных значениях, в зависимости от того, увеличивается или уменьшается это отношение. Подобным образом обстоит дело, если в зависимости от h/δ определять силу, действующую на вершину клина. Каждая из этих областей характеризуется своим значением частоты краевого тона.

Физический механизм возникновения краевого тона можно пояснить следующим образом (рис. 97). Допустим, что по какой-либо причине в точке a на краю клина возник вихрь b . Этот вихрь захватывает окружающую жидкость, в том числе и отверстие, из которого вытекает струя, где

его влияние слабое, но достаточное, чтобы несколько отклонить струю от первоначального направления. Последнее обстоятельство приведет к возникновению в точке d небольшого вихря, который благодаря неустойчивости струи при своем движении с потоком (струей) будет расти (усиливаться). При подходе вихря к краю клина за счет



Рис. 97. Схема, поясняющая физический механизм возникновения краевого тона.

поперечной компоненты скорости в точке b возникает опять свободный вихрь, который, как первоначально было указано, вызывает свободный вихрь у отверстия. Таким образом возникает цепочка вихрей, поочередно действующая с противоположной фазой на край клина, вследствие чего происходят колебания клина и струи и генерация звука. Возникновение звука в свою очередь способствует образованию вихрей (см. также гл. 6, §§ 2—4). Мы имеем дело с типичной автоколебательной системой.

В точке a на краю клина на жидкость действует источник типа диполя. Поскольку для классического краевого тона система в целом такова, что она находится в зоне ближнего поля дипольного источника, расположенного у края клина, разделение механизмов на два возможных — один типа «гидродинамического», другой «акустического», как это проводилось, например, в [22], — делать не следует [21]. Для поддержания автоколебаний необходимо, чтобы силы, действующие на край клина, передача возмущения от края к месту расположения отверстия, действие на струю при выходе из отверстия и усиление возмущения на пути от отверстия до края были в определенных фазовых и амплитудных соотношениях между собой, т. е. было бы соблюдено условие самовозбуждения.

Вопросы возникновения и установления колебаний достаточно подробно изложены в работах [21], [23] и [24].

Здесь, следуя [21], мы остановимся только на эффективности применения общей теории аэродинамической генерации звука в форме (11.1) для решения задачи об интенсивности краевого тона.

Если считать, что $T_{ij} \simeq \rho_0 v_i v_j$, то в дальнейшем поле (точке наблюдения x) при условии отсутствия простых источников (жесткий край и $v_i n_i \equiv 0$) имеем для давления *):

$$4\pi p(x) \simeq \frac{1}{xc_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho_0 [v_x^2] dV - \frac{1}{xc_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_S [p_x] dS, \quad (11.17)$$

где v_x — компонента акустической скорости в направлении точки наблюдения x и p_x — звуковое давление. Здесь квадратные скобки означают, как и раньше, учет запаздывания на время x/c_0 ; объемный интеграл берется по объему V , в который входит весь поток струи вместе с краем, и поверхностный интеграл — по поверхности S , содержащей поверхность края сопла, края клина и других имеющих в потоке поверхностей. Как об этом говорилось в предыдущем параграфе, первый (квадрупольный) член мал по сравнению со вторым (дипольным); p_x можно положить приближенно равным $p_x \simeq \rho_0 v_x c_0$. Тогда условие того, что второй член больше первого, будет таково:

$$\frac{\rho_0 \omega}{c_0} v_x c_0 S \gg \frac{\rho_0 \omega^2}{c_0^2} v_x^2 V, \quad (11.18)$$

где $S = b\delta$ — площадь струи. Из этого условия следует, что длина струи $h \ll \lambda$, что всегда имеет место для классического краевого тона с малой скоростью набегающего потока v . При указанном условии в дальнейшем поле ($x \gg \lambda$)

$$p(x) \simeq - \frac{1}{4\pi} \frac{i\omega [F]}{xc_0} \cos \theta, \quad (11.19)$$

где F — периодическая сила, действующая на край клина со стороны жидкости, θ — угол между нормалью к плоскости струи и направлением на точку наблюдения. На рис. 98 приведено пространственное распределение звука краевого тона и абсолютное значение величины звукового давления $p(x)$ в зависимости от угла θ , полученное из экспериментов Пауэла и Унфрида [21]. Характеристика

*) Здесь мы воспользовались формулой (11.7), переписав ее для давления p , имея в виду, что $p(x) = \{p(x) - \rho_0\} c_0^2$.

направленности излучения краевого тона дана здесь (для случая $v = 1080$ см/сек, $x = 18,2$ см, $f = 1000$ гц, $\delta = 0,1$ см, $b = 2$ см, $h = 0,45$ см) в двух перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по нормали к плоскости струи; эта нормаль проведена через конец края. Измерения проводились слева и справа от оси струи, вверх и

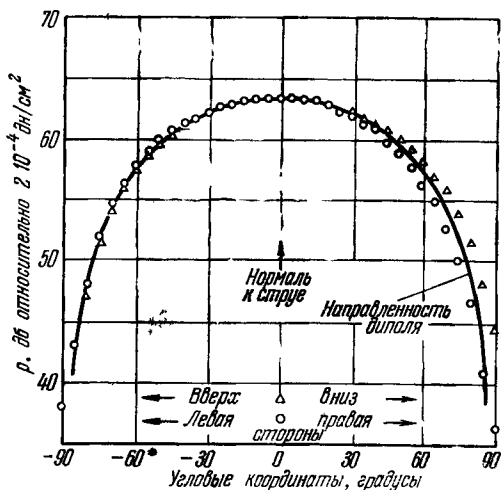


Рис. 98. Характеристика направленности краевого тона [21].

вниз по потоку. Как видно из этого рисунка, не возникает сомнения в справедливости приведенной формулы и, таким образом, в том, что здесь мы имеем дело с дипольным источником звука.

Частоту краевого тона f можно определить из условия самовозбуждения системы. Согласно [23]

$$f = \left(N + \frac{1}{4}\right) \frac{v_c}{h}, \quad (11.20)$$

где $N = 1, 2, 3, \dots$ — номер области, где возникает крайовой тон; здесь v_c — скорость переноса вихрей. Эта формула достаточно хорошо оправдывается экспериментально; близкая к этому выражению формула имеется в [24]. Мы имеем здесь дело с последовательностью частот, не находящихся

в гармоническом отношении; эти отношения изменяются как $1 : \frac{9}{5} : \frac{13}{5} \dots$

Остановимся еще кратко на зависимости давления краевого тона в дальней зоне $p(x)$ от скорости потока v . В [21] имелись три области возбуждения краевого тона, в зависимости от отношения расстояния от сопла до края

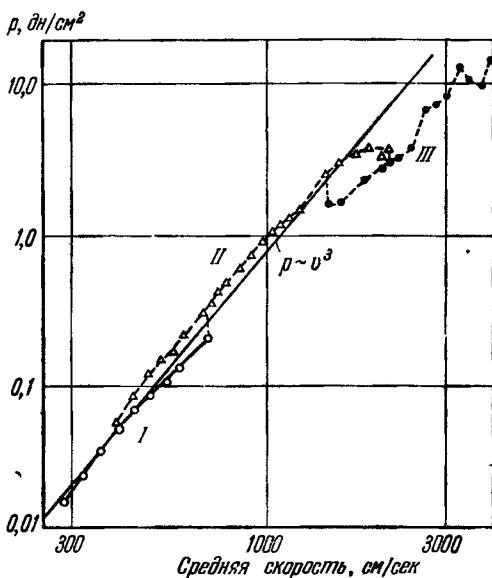


Рис. 99. Изменение звукового давления краевого тона как функция скорости потока [21]; $\delta = 0,1$ см; $b = 2,54$ см; $h/\delta = 20$; $x = 20$ см; $\theta = 0$. I, II, III — области возбуждения краевого тона.

h к ширине струи δ . Для первой ($4 < h/\delta < 8$) и второй ($7 < h/\delta < 15$) областей возбуждения оценки, совпадающие с экспериментом, показывают, что

$$|F| \simeq (2 \div 5) \rho_0 v^2 b \delta. \quad (11.21)$$

Пользуясь этим выражением, согласно (11.19) можно оценить, какое давление $|p|$ будет в дальней зоне на

расстоянии x от края клина:

$$|p| \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{\omega F}{x c_0} \cos \theta = \frac{a}{2} \rho_0 \frac{St v^3}{x c_0} \cos \theta, \quad (11.22)$$

где a — постоянная.

Как видно из этой формулы, $p^2 \sim v^6$, т. е. мы имеем здесь тот же закон шестой степени скорости потока, который справедлив для вихревого звука, имеющего также дипольный характер.

На рис. 99 представлены экспериментальные данные (взятые из [21]) для зависимости p от средней скорости потока; цифрами *I*, *II* и *III* отмечены области возбуждения краевого тона. Сплошная прямая линия — теоретическая, она соответствует значениям $a = 4$, $St = 0,056$ и $\theta = 0$. Как видно из рисунка, формула (11.22) достаточно хорошо согласуется с данными эксперимента. Отметим, что поскольку $St \cdot v^3 \sim St^{-2} \delta^3 f^3$, амплитуда развиваемого давления при постоянном St пропорциональна кубу частоты краевого тона.

§ 4. Шум турбулентного пограничного слоя

Теперь обратимся к рассмотрению аэродинамического шума при наличии твердых тел в потоке, когда числа Re таковы, что поток в пограничном слое этих тел становится турбулентным.

При движении твердого тела в газе или жидкости возникают так называемые шумы обтекания. Начальный участок обтекания может создавать шум типа краевого тона (см. предыдущий параграф), тогда как след, образующийся за обтекаемым телом, который становится турбулентным уже при числе Рейнольдса для следа $Re \sim 100$, генерирует шум квадрупольного происхождения. При обтекании тел может возникать вихревой звук; большое значение имеет шероховатость обвода тела.

Одним из основных источников шума обтекания служит турбулентный пограничный слой. Так, этот шум внутри кабины реактивного самолета (а не шум двигателя) оказывается наибольшим, если только скорость потока велика (хотя и меньше скорости звука) и если

двигатель самолета отнесен в хвостовую часть. Внутри кабины реактивного дозвукового самолета шум турбулентного пограничного слоя составляет более 110—120 дб [25].

Теория и экспериментальные исследования пограничного слоя представляют собой большую и важную проблему современной гидроаэромеханики [26, 27, 28]. Акустический аспект этой проблемы начал развиваться сравнительно недавно, после того как были созданы основы общей теории аэродинамической генерации звука. Пограничный слой, возникающий на обводах тела, из-за трения о стенки становится турбулентным при значительно ббльших Re пограничного слоя, чем это имеет место для турбулентного следа; эти числа Re составляют несколько тысяч.

В начальном участке обтекания тела пограничный слой весьма тонок и имеет ламинарный характер. Толщина δ этого слоя определяется выражением

$$\delta = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{xv}{v_{\infty}}}, \quad (11.23)$$

где x — расстояние вдоль потока, v — кинематическая вязкость и v_{∞} — скорость невозмущенного набегающего потока. Как следует из этой формулы, толщина слоя δ растет с расстоянием как \sqrt{x} .

В случае обтекания пластинки постоянная в формуле (11.23), если считать скорость $v(y)$ (y — координата, перпендикулярная к стенке) отличающейся на 1% от v_{∞} , оказывается приблизительно равной 5.

Часто употребляется понятие эффективной толщины пограничного слоя δ^* (так называемая «толщина вытеснения», см. [27]):

$$\delta^* = \frac{1}{v_{\infty}} \int_0^{\infty} (v_{\infty} - v(y)) dy, \quad (11.24)$$

причем

$$\delta^* \simeq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{10} \right) \delta.$$

Для турбулентного пограничного слоя

$$\delta \sim \frac{v'x}{v_{\infty}}, \quad (11.25)$$

где v' — некоторая характерная турбулентная скорость.

Таким образом, δ для турбулентного пограничного слоя растет с расстоянием быстрее, чем для случая ламинарного пограничного слоя.

В проблеме шума турбулентного пограничного слоя можно выделить ряд задач, имеющих с акустической точки зрения свои особенности. Можно считать, что наиболее характерными являются следующие три задачи.

Первая задача — это определение шума турбулентного пограничного слоя в волновой зоне, вдали от самих источников шума. В этом случае можно считать, что генерация шума происходит за счет нестационарного турбулентного потока в пограничном слое. Для нахождения интенсивности этого шума следует воспользоваться основным уравнением (11.1) теории аэродинамической генерации звука при наличии твердых тел в потоке. При этом конкретные условия постановки этой задачи значительно различаются в зависимости от того, как ведет себя поверхность тела под действием приложенных со стороны жидкости сил, имеющих случайный характер. Эта поверхность может быть акустически жесткой и, таким образом, не будет совершать колебания под действием этих сил; поверхность может быть акустически мягкой, и тогда пульсации давления в турбулентном пограничном слое будут переизлучаться ею в виде истинного звука; наконец, поверхность может быть упругой и в ней (например в оболочке) будут распространяться под действием сторонних сил различные типы упругих волн (см. § 1 этой главы).

Вторая задача — это определение шума в ближнем поле непосредственно под турбулентным пограничным слоем (практически важная задача о воздействии пульсаций давления на вмонтированный заподлицо с обтекаемой поверхностью приемник звука; см. ниже). В этом случае мы имеем дело с непосредственным воздействием на обтекаемую поверхность пульсаций поля давлений, вызванных полем пульсаций скоростей турбулентного пограничного слоя. Эти пульсации давления (или псевдозвук, по терминологии, введенной Блохинцевым [43]) действуют на помещенный в поток приемник звука так, как если бы они были истинным звуком, поскольку приемник не знает, звук это или не звук. Однако эти флуктуации давления не есть истинный звук; они не связаны со сжимаемостью

среды и распространяются со скоростью потока, а не со скоростью звука. Эти флуктуации давления (псевдозвук) уравниваются в основной своей части флуктуациями ускорения жидкости, и только небольшая часть энергии этих флуктуаций распространяется как звук. Вдали от потока над плоской поверхностью — в волновой зоне, где имеется истинный звук, — амплитуда звукового давления убывает как $1/r$, звук доминирует над псевдозвучком, для которого флуктуации давления убывают по крайней мере как $1/r^2$.

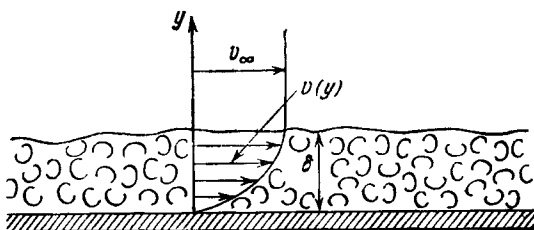


Рис. 100. Схема пограничного турбулентного слоя над плоской стенкой.

Промежуточная область, где звук и псевдозвук имеют один и тот же порядок, — наиболее трудная для теоретического и экспериментального исследования. Изучение этой области представляет собой третью задачу в исследовании шумов турбулентного пограничного слоя.

Рассмотрим наиболее простой случай — турбулентный пограничный слой над жесткой стенкой (рис. 100). В принципе решение задачи об интенсивности шума, создаваемого таким слоем вдали от него, может быть проведено на основе общей формулы (11.1). Однако здесь возникает ряд трудностей.

Как было отмечено в § 1 этой главы, турбулентные флуктуации давления и скорости вблизи твердых границ, находящихся в потоке, ответственны за появление напряжений. Нормальные компоненты напряжений представляют собой пульсирующие давления, тангенциальные компоненты — напряжения сдвига. Далее мы увидим, что напряжения сдвига меньше, чем нормальные давления

на стенку, поэтому эти эффекты можно в основном представить подходяще выбранным распределением диполей, перпендикулярных к стенке.

Считая границу жесткой, так что $v_i n_i \equiv 0$, имеем согласно (11.1) *):

$$\rho - \rho_0 \simeq - \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S [n_i P_{ij}] \frac{dS(\mathbf{y})}{r}, \quad (11.26)$$

где $n_j P_{ij} = p_i$ — сила на единицу площади, действующая на жидкость в точке \mathbf{y} поверхности, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ и $|\mathbf{r}| = r$.

Будем интересоваться шумом турбулентного пограничного слоя, излучаемым в пространство вне этого слоя (первая задача, сформулированная выше). Тогда при $|\mathbf{x}| = r \gg l$, где l — масштаб пульсаций давления, характеризующий расстояние, на котором эти пульсации коррелированы, $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ и

$$\frac{r_i}{r^2} = \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \simeq \frac{x_i}{r^2}. \quad (11.27)$$

На большом расстоянии от S главный вклад при дифференцировании по x_i будет только от p_i , так что **)

$$\rho - \rho_0 \simeq \frac{x_i}{4\pi c_0^3 r^2} \int \frac{\partial}{\partial t} [p_i] dS(\mathbf{y}). \quad (11.28)$$

Если требуется найти шум за стенкой (например внутри кабины самолета), необходимо учесть затухание, вносимое этой стенкой при распространении звука через нее.

Отсюда среднее квадратичное флуктуаций звукового давления от единицы площади пограничного слоя будет ***)

*) Квадрупольным излучением пренебрегаем, монополи согласно написанному выше условию отсутствуют. Насколько это справедливо, будет обсуждено ниже.

**) См. также (10.21) и (10.23), где речь идет об объемном распределении диполей.

***) Вывод этой формулы аналогичен выводу (10.39) и (10.40), — преобразование квадрата интеграла в двойной интеграл и далее введение соответствующей замены переменных; в (11.26) величина S перед интегралом положена равной единице.

иметь значение

$$\begin{aligned} \overline{p^2} &= \rho c_0 J(x) = \rho c_0 \frac{\overline{c_0^3 (\rho - \rho_0)^2}}{\rho_0} \approx \\ &\approx \frac{x_i x_j}{16\pi^2 c_0^2 x^4} \int_S \frac{\partial p_i(\mathbf{y})}{\partial t} \frac{\partial p_j(\mathbf{y})}{\partial t} dS(\mathbf{y}). \quad (11.29) \end{aligned}$$

Для того чтобы двигаться дальше, необходимо, таким образом, иметь данные о корреляции производных от компонент давления по времени в турбулентном пограничном слое вблизи стенки. Эти данные пока не могут быть получены теоретически. Их, однако, можно найти в экспериментальных работах по изучению пульсаций давления в турбулентном пограничном слое, некоторые результаты которых мы здесь изложим.

Изучению поля пульсаций давления в турбулентном пограничном слое посвящен ряд экспериментальных работ, из которых следует указать на работы Вилмарта [29], Вилмарта и Вулдриджа [30], Така, Смита и Ламберта [31]. В работе [30] проводилось изучение пульсаций давлений, действующих на стенку в аэродинамической трубе при скоростях потока 47 м/сек и 62 м/сек. При этом толщина турбулентного пограничного слоя δ составляла 12,5 см (считая δ до того значения скорости потока в пограничном слое $v(y)$, которое составляет 0,99 от скорости потока вне слоя v_∞). Числа Re основного потока составляли $2,5 \cdot 10^7$ и $3,1 \cdot 10^7$ и пограничного слоя соответственно 29 000 и 38 000. Принятые специальные меры предосторожности позволили считать, что наблюдаемые пульсации давления происходили именно от процессов, развивающихся в пограничном слое у обтекаемой стенки. Измерения давления производились миниатюрными пьезомикрофонами давления (титанат цирконат свинца) с диаметром чувствительной площади приемника $d \sim 4$ мм (без искажения фиксировались частоты до 10 кгц). Пьезомикрофоны были заделаны заподлицо с гладкой поверхностью (отполированный с маслом стальной диск толщиной 2,5 см и диаметром 50 см). Шероховатость составляла не более $\pm 0,0025$ см. Этот диск составлял часть стенки трубы и был акустически развязан с ней. Измерялось среднее квадратичное пульсаций давления, спектр мощности давления, пространственно-временная корреляция давления (дву-

мя приемниками) параллельно направлению потока и пространственная корреляция поперек потока (в плоскости стенки).

Было установлено, что корень квадратный из среднего квадратичного пульсаций давления $\sqrt{\overline{p^2}}$ на стенку при скорости потока $v_\infty = 62$ м/сек в 2,19 раза больше, чем напряжение сдвига на стенке $\rho u'v'$, где v' и u' — пульсации скорости соответственно по направлению потока и перпендикулярно к этому направлению (в плоскости стенки). Для стенки, шероховатость которой составляла $\pm 0,01$ см, это отношение составляло 3,09. Отношение $\sqrt{\overline{p^2}}$ к динамическому давлению (напору) потока $q_\infty = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ составляло $4,66 \cdot 10^{-3}$ для гладкой стенки и $7 \cdot 10^{-3}$ для шероховатой стенки с указанной выше шероховатостью.

Измерения показали, что вихри как больших, так и малых масштабов затухают по прохождении расстояния, пропорционального их масштабу. Эти вихри или пульсации давления, как показывают измерения корреляции давления вдоль потока, переносятся со скоростью, изменяющейся в пределах $0,5 \div 0,8$ от v_∞ . Низкие скорости переноса получаются, когда пространственное разделение приемников давления мало или когда коррелированы только флуктуации давления на высоких частотах. Большие конвективные скорости получаются в том случае, когда пространственное разделение приемников давления велико или когда коррелированы только низкие частоты. Таким образом, низкочастотные флуктуации давления проносятся мимо приемников с большей скоростью. Поперечные (в плоскости стенки) и продольные масштабы пульсаций давления, как показали измерения, имеют один и тот же порядок — порядок эффективной толщины пограничного слоя δ^* .

Безразмерный спектр квадрата давлений на стенку представлен на рис. 101. При значениях $\delta^* \omega / v_\infty = \delta^* / v_\infty \tau < 0,11$ измерения не давали повторяющихся результатов*). Здесь $1/\tau$ — частота пульсаций, которая может быть опре-

*) Вид спектра шумов обтекания на низких частотах (левее пунктирной линии рис. 101) согласно работе [40] не зависит от частоты (см. ниже). Отметим, что вид спектра шумов обтекания приблизительно подобен виду спектров пульсаций скорости v' и напряжений Рейнольдса $u'v'$.

делена как $V_{\overline{p^2}}/V_{\overline{p^2}}$, и τ —время, за которое пульсация давления перемещается на расстояние, на котором (как условно можно принять) корреляция убывает до 0,5. На

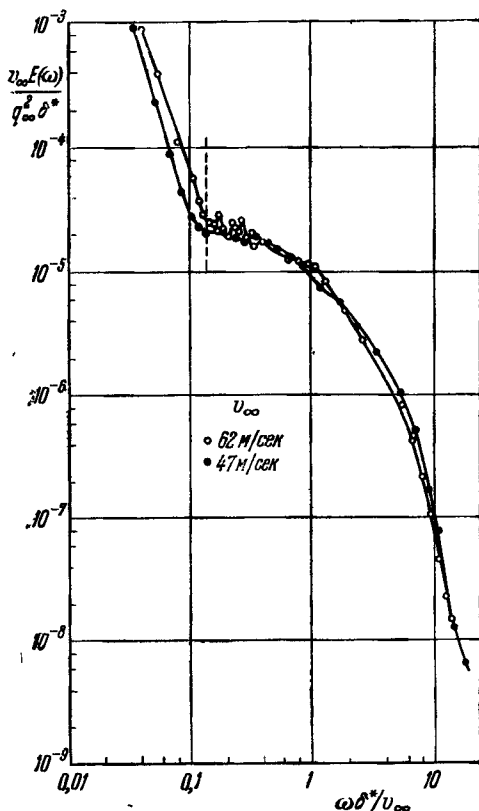


Рис. 101. Безразмерный спектр мощности давления, действующего на стенку [30].

этом рисунке $E(\omega)$ представляет собой спектральную плотность среднего квадрата давления $\overline{p^2}$:

$$E(\omega) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} \overline{p^2} R_{pp}(0, 0, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (11.30)$$

где $R_{pp}(x, z, \tau)$ — коэффициент пространственно-временной

корреляции; ось x — направление вдоль потока, ось z — поперек потока в плоскости стенки. При этом

$$\overline{p^2 R_{pp}}(0, 0, \tau) = \int_0^{\infty} E(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (11.31)$$

Из рассмотрения корреляции для двух разнесенных приемников, установленных вдоль по потоку, можно заключить, что пространственная картина пульсаций давле-

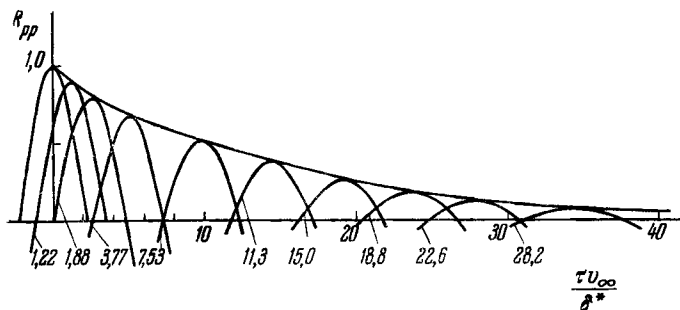


Рис. 102. Максимумы продольной пространственно-временной корреляции в области частот $300 < f < 700$ [30]. Цифры у корреляционных кривых означают расстояние между двумя приемниками в величинах δ^* .

ния с относительно большим масштабом корреляции переносится вдоль стенки со скоростью приблизительно $0,8 v_{\infty}$ (см. выше). В диапазоне частот $300-700$ гц (см. рис. 102) $\tau v_{\infty} / \delta^* = 1,8$ при $R_{pp}(\tau = 0) = 0,5$. Тогда масштаб корреляции $l = \tau \cdot 0,8 v_{\infty}$, т. е. $l \simeq 1,4 \delta^*$. Типичную частоту можно определить из того же рисунка, замечая, что при $R_{pp}(x, z, \tau) = 0,5$ имеем $\tau v_{\infty} / \delta^* = 10$; получаем:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} = \frac{v_{\infty}}{10 \delta^*}. \quad (11.32)$$

Таким образом, для того, чтобы оценить шум, излученный акустическими диполями стенки, их следует рассматривать как изменяющуюся картину дипольных источников, переносимую вниз по потоку со скоростью $0,8 v_{\infty}$ и

$$\omega l = 1,4 \delta^* \cdot 0,1 \frac{v_{\infty}}{\delta^*} \simeq 0,14 v_{\infty}, \quad (11.33)$$

что дает порядок для флуктуаций скорости в пограничном слое*). Эти флуктуации скорости существенно меньше, чем скорость переноса вихрей, равная $0,8 v_\infty$, которая характеризует картину возмущений, воспринимаемых наблюдателем в фиксированной точке обтекаемой поверхности.

Теперь, после обсуждения этих данных, мы снова можем вернуться к формуле (11.29) и оценить среднее квадратичное звукового давления, развиваемого единицей площади пограничного слоя на достаточно большом расстоянии от нее.

Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{p^2(x)} &\simeq \frac{r_1^2}{16\pi^2 c_0^2 r^4} \int \frac{\partial p_i(0, t)}{\partial t} \frac{\partial p_j(y, t)}{\partial t} dS \simeq \\ &\simeq \frac{r_1^2}{16\pi^2 c_0^2 r^4} \overline{p_b^2} \omega^2 \pi l^2, \end{aligned} \quad (11.34)$$

где πl^2 — проекция площади вихря на поверхность S и r_1 — компонента r , перпендикулярная к стенке.

Полагая теперь из результатов эксперимента Вилмарта и Вулдриджа

$$\overline{p_b^2} = \left(\frac{4,66}{2} \cdot 10^{-3} \rho v_\infty^2 \right)^2, \quad \omega l = 0,14 v_\infty,$$

имеем:

$$\overline{p^2(x)} \simeq (\rho v_\infty^2 M)^2 \frac{r_1^2}{r^4} \cdot 10^{-9}. \quad (11.35)$$

Отметим, что зависимость интенсивности шума получается пропорциональной v^6 , как это и должно быть согласно общей теории (поскольку мы оставили при рассмотрении только излучение диполями).

Из этого выражения можно получить акустический к.п.д., т. е. отношение энергии излученного звука к энергии, затраченной на поверхностное трение. Это отношение составляет $\sim 10^{-6} M^3$. Если проинтегрировать вклад шума от каждой из стенок аэродинамической трубы квадратного сечения и пренебречь отражениями, то можно получить,

*) Все эти оценки имеют, конечно, значение только по порядку величины. При других условиях получаемые величины будут заметно отличаться.

что в центре трубы

$$\frac{V \overline{p^2}}{\rho v_{\infty}^2 / 2} \simeq a \cdot 10^{-4} M, \quad (11.36)$$

где коэффициент a — порядка 1.

Таким образом, уровень флуктуаций давления весьма мал при малых M , поэтому измерение этого отношения при малых скоростях потока затруднено, так как ошибочно можно за шум пограничного слоя принять другие источники шумов.

Оценки для $\overline{p^2}$ (формула (11.35)) и акустического к.п.д., исходя из выражения (11.36), заимствованы здесь из работы Лайтхилла [32] *). Они основаны, как мы видели, на том, что шум турбулентного пограничного слоя имеет дипольное происхождение; при этом все рассуждения проводились для акустически жесткой поверхности тела.

Имеется, однако, ряд возражений по поводу того, что в случае акустически жесткой бесконечной плоской стенки излучение шума носит дипольный характер.

Мы отмечали, что второй член в основной формуле (11.1) аэродинамической генерации шума согласно выводам Кэрля представляет собой излучение диполями, распределенными на поверхности. Эти выводы Кэрля для жесткой поверхности, находящейся в потоке, нашли применение в теории эоловых тонов и краевого тона, о чем шла речь в предыдущих параграфах, где было отмечено, что эта теория достаточно хорошо оправдывается экспериментально. Однако, если поверхность акустически жесткой стенки плоская и безграничная и если в плоскостях, параллельных поверхности, движение статистически однородно и жидкость несжимаема, Филипс [33] показал, что шум (звук) дипольного происхождения должен отсутствовать. Этот результат кажется естественным; действующие на поверхность напряжения не должны, казалось бы, приводить к возникновению звука, поскольку эти напряжения не совершают работы, так как на этой поверхности $b = 0$. Поэтому наличие акустически жесткой безгранич-

*) За исключением того, что численные оценки основывались здесь на результатах работы [30] для указанного выше диапазона частот.

ной поверхности в потоке, где имеются квадрупольные источники звука, должно лишь приводить к возрастанию интенсивности излученного звука в 4 раза просто за счет отражения.

Этот вопрос о роли акустически жесткой поверхности, находящейся в поле квадрупольных источников, обсуждался далее в ряде других работ. Пауэл [34] развил метод с использованием мнимых источников и принципа отображения и обобщил результаты Кэрля на случай, когда не вся поверхность погружена в поток, где имеется генерация шума. Из этой работы следует, что плоская жесткая безграничная поверхность играет чисто пассивную роль отражателя квадрупольного излучения и ничего больше, и дипольное излучение уничтожается. Таким образом, здесь шум имеет опять-таки квадрупольное происхождение и его интенсивность пропорциональна v^8 , а не v^6 , как это должно было бы иметь место для дипольного излучения. С другой стороны, в этой работе показано, что когда не вся поверхность погружена в ту часть потока, где имеются квадрупольные источники звука, действительно должно быть дипольное излучение. Этим объясняется, почему теория, основанная на представлении об источниках излучения как о диполях, приводит к правильным результатам в задаче о вихревом звуке и краевом тоне, а в случае бесконечной плоской жесткой поверхности, помещенной в среду с квадрупольными источниками, приводит к отсутствию дипольного излучения.

В работах Мичема [35] и [36] также указывается, что наличие бесконечной жесткой поверхности в потоке, где имеются квадрупольные источники, приводит, благодаря эффекту отражения, просто к перераспределению звукового поля и его увеличению в 4 раза (по интенсивности); увеличение же поля на два порядка, как это должно быть при дипольном механизме излучения, объяснить трудно. В [36] показано, что эти выводы не изменяются, если поверхность не плоская и если принять во внимание и вязкие напряжения.

Отвечая на критику работы Кэрля, содержащуюся в [35] и [36], Вильямс [37] отметил, что теория, развитая Кэрлем, является основанием теории турбулентного пограничного слоя и что результаты Пауэла [34] могут быть

получены из этой работы. Компенсация или уничтожение дипольного поля для бесконечной жесткой поверхности, с его точки зрения, не имеет существенного практического значения, поскольку поверхности, имеющиеся в реальных условиях, таковы, что их нельзя считать бесконечными.

Однако далее Мичем [38] показал, что в большинстве практически встречающихся случаев турбулентного пограничного слоя шум дипольного происхождения существенно меньше, чем шум квадрупольный. Две основные причины, почему это так, состоят в том, что, во-первых, квадрупольное излучение существенно увеличивается в пограничном слое благодаря наличию в нем градиента скорости потока, и, во-вторых, что дипольное излучение от пограничного слоя уменьшается в отношении $(\delta/R)^2$, где δ — толщина пограничного слоя и R — радиус кривизны поверхности обтекаемого участка тела. Вместе с тем, в [38] отмечается, что в случае шероховатости стенки дипольное излучение может играть существенную роль.

Корректной экспериментальной проверки всех этих соображений пока еще не предпринято.

Следует отметить, что если решать задачу о шуме турбулентности пограничного слоя на основе общей формулы теории (11.1), выполняя указанные в ней математические операции, то, поскольку при $M < 1$ эта формула точная, никаких сомнений в правильности решения не возникало бы. В силу сложности этой формулы и отсутствия теоретических данных о различных корреляционных функциях, входящих в выражение для интенсивности звука (шума), получающегося на основе (11.1), в конкретных задачах приходится, однако, прибегать к оценкам в ней отдельных членов, почему и возникают те трудности, о которых шла речь.

До сих пор речь шла об обтекании жесткой бесконечной плоской стенки и о шуме турбулентного пограничного слоя такой стенки. Если происходит обтекание плоской стенки конечных размеров, то в этом случае дополнительно возникают еще два вида шумов: шум, возникающий от передней части стенки и имеющий характер краевого тона (см. § 3 этой главы), и шум от задней части стенки — шум турбулентного следа.

Рассмотрения, основанные на соображениях подобия [39], показывают, что при очень малых M шум обтекания в основном имеет характер шума типа краевого тона, интенсивность которого пропорциональна v^6 . При увеличении скорости потока становится существенной интенсивность шума турбулентного следа, пропорциональная v^8 .

Если обтекаемая стенка податлива, положение существенным образом изменяется; псевдозвук переизлучается в виде истинного звука. Мы не имеем здесь возможности остановиться на этом вопросе сколько-нибудь подробно. Для решения задачи о поле излучения упругих оболочек под действием турбулентного поля пульсаций скоростей в турбулентном пограничном слое можно воспользоваться теорией, изложенной в § 1 этой главы. Решение сводится к квадратурам, если известны корреляционные функции поля пульсаций скоростей или поля пульсаций давления и известно решение дифракционной задачи о дифракционном поле в присутствии данной упругой поверхности.

В работе [9] в качестве таких корреляционных функций предлагается использовать специальный вид пространственно-временной корреляционной функции поля пульсаций давления:

$$\overline{p(x, t) p(x', t')} = p^2(x, t) e^{-K_0 |\xi - v_0 \tau| - \frac{\tau}{\theta_0}}, \quad (11.37)$$

где $\xi = x - x'$ — пространственное разделение между двумя точками наблюдения, K_0 — величина, обратная среднему радиусу вихря, θ_0 — среднее время жизни турбулентных пульсаций давления, v_0 — средняя скорость переноса вихря, $\tau = t - t'$ — задержка во времени, соответствующая координатам точек наблюдения x и x' .

Шумы обтекания играют важную роль в гидроакустике, когда приемники установлены на движущемся теле. При гладкой поверхности обвода тела они возникают главным образом благодаря непосредственному действию на приемник пульсаций давления у стенки в турбулентном пограничном слое (ближнее поле). Эта задача не отличается от такой же задачи для движения газа вдоль тех или иных твердых поверхностей, кроме одного обстоятельства. При определенных скоростях — в зависимости от

того, на какой глубине движется тело, каково газосодержание водной среды и какова степень шероховатости поверхности тела, — возникает кавитационный режим и уровень шумов резко возрастает.

В докавитационном режиме шум турбулентного пограничного слоя при обтекании твердых гладких поверхностей изучался Скучиком и Хэддлом [40, 41]. Их экспериментальная работа имеет много общего с работой [30], только выполнена она для случая водной среды. Из их экспериментов следует, что приемник в носовой части обтекаемого тела шумит меньше, чем приемники, установленные на боковом обводе, где турбулентный пограничный слой уже существенно развит. Носовой приемник отмечает неоднородности в среде, на которые набегают движущееся тело, и поэтому на его выходе имеется сравнительно низкочастотный шум. Боковые приемники воспринимают высокочастотные компоненты шума от турбулентного пограничного слоя. Уровень шума приемников в существенной мере зависит от их площади. С увеличением радиуса приемника до значения $\sim \lambda/2$ происходит постепенное уменьшение уровня за счет сглаживания пульсаций давления (усреднение поверхностью). Этот вопрос теоретически разобран в [42].

Эксперименты Скучика и Хэддла показывают, что шум, измеренный в пограничном турбулентном слое вращающегося цилиндра гидрофонами диаметром 12,5 см, на частоте 24 кгц совпадает с уровнем шума, измеренным теми же гидрофонами на расстоянии 1 м от пограничного слоя. Таким образом, уровень шума в этих условиях одинаков как под пограничным слоем, так и вдали от него. Это говорит о том, что приемник, имеющий большие размеры, в основном воспринимает истинный звук; ближнее поле пульсаций давления усредняется таким приемником.

Влияние ближнего поля пульсаций давления на приемник грубо можно представить как непосредственное действие импульса давления, проносающегося мимо поверхности приемника. В отличие от шума турбулентного пограничного слоя вдали от него, происходящего в конечном счете благодаря нестационарности турбулентности, в рассмотренном случае ближнего поля нестационарность ока-

зывается несущественной и картину движущихся пульсаций давления можно считать неизменяющейся.

Импульс давления, пересекающий зону расположения приемника, имеет масштаб δ^* и спектр его можно представить в виде

$$\frac{\sin x}{x}, \text{ где } x = \frac{\omega \delta}{2\pi v_\infty} \simeq \frac{5\omega \delta^*}{2\pi v_\infty} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

и ω_0 — частота повторения импульсов. В таком спектре низкочастотная его часть не зависит от того, какова тонкая структура распределения давления внутри импульса; эта часть пропорциональна средней величине давления в импульсе и не зависит от частоты. Напротив, на высоких частотах спектральная плотность мощности должна зависеть от этой тонкой структуры и должна убывать с частотой.

В [40] спектр мощности шумов обтекания (ближнее поле) $E(\omega)$ дается в виде

$$\left. \begin{aligned} E(\omega) &= 0,75 \cdot 10^{-5} \alpha^2 \rho_0^2 v_\infty^3 \delta^*, & \omega < \omega_0, \\ E(\omega) &= 1,5 \cdot 10^{-5} \alpha^2 \rho_0^2 v_\infty^6 (\omega^3 \delta^{*2})^{-1} & \omega > \omega_0, \end{aligned} \right\} (11.38)$$

где α — некоторая постоянная турбулентности, имеющая для воздуха значение ~ 3 и для воды $\sim 0,7 \div 1$. Как видно из этих формул, полученных с привлечением результатов теоретической работы [43], на низких частотах $\omega < \omega_0$ спектр мощности не зависит от частоты; мощность пропорциональна кубу скорости и эффективной толщине пограничного слоя. На высоких частотах $E(\omega)$ пропорциональна шестой степени скорости и обратно пропорциональна кубу частоты и квадрату толщины пограничного слоя. Формулы (11.38) для спектра мощности шумов обтекания хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в работах [30] и [40].

Механизм генерации шума турбулентным пограничным слоем при $M > 1$ существенным образом отличается от разобранный выше случая, когда $M < 1$.

Как уже говорилось в § 6 гл. 10, если расстояние образования разрыва больше толщины слоя, где происходит генерация звука, и если интересоваться только вопросом генерации волн давления, можно опустить второй и третий члены в правой части уравнения (10.81).

Рассмотрим, следуя Филиппсу [44], турбулентную зону среза толщиной $2L$ (рис. 103); средняя скорость \bar{v}_1 меняется только в направлении x_3 в пределах от $-U$ до $+U$ при изменении x_3 в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Результаты рассмотрения такой плоской симметричной задачи можно применить к пограничному турбулентному слою (тогда

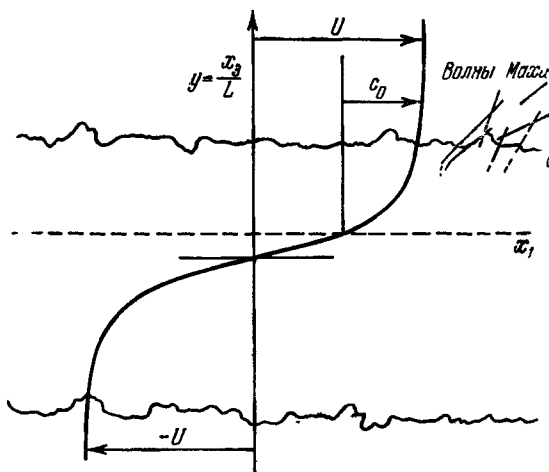


Рис. 103. Схема турбулентной зоны среза.

следует поместить при $x_3 = 0$ твердую стенку и рассматривать только верхнюю полуплоскость) и к плоской турбулентной струе.

Итак, пренебрежем вторым и третьим членами в правой части уравнения (10.81) и будем считать далее, что все средние величины являются только функциями x_3 и не зависят от x_1 , x_2 и t . Тогда, оставляя в стороне такие процессы, как конвекция и рассеяние звука турбулентностью, считая при этом, что $\bar{c}^2 = \bar{c}^2(x_3)$, получим такое уравнение:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial \bar{c}^2}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} - \bar{c}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right\} \log \frac{p}{p_0} = 2\gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}. \quad (11.39)$$

Если ввести безразмерные переменные

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{v_i}{U}, & V &= \bar{u}_i, & y_i &= \frac{x_i}{L}, \\ \tau &= \frac{Ut}{L}, & M &= \frac{y}{c_0}, & A(y_3) &= \frac{\bar{c}^2}{c_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

где c_0 — скорость звука вне зоны, то уравнение (11.39) примет вид:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + V \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{A}{M^2} \frac{d^2 A}{dy_3^2} - \frac{A^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right\} \zeta(\mathbf{y}, \tau) = G(\mathbf{y}, \tau); \quad (11.41)$$

здесь

$$\zeta(\mathbf{y}, \tau) = A(y_3) \log \left(\frac{p}{p_0} \right), \quad (11.42)$$

$$G(\mathbf{y}, \tau) = \gamma A(y_3) \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial u_j}{\partial y_i}. \quad (11.43)$$

Пользуясь преобразованием Фурье, можно представить $\zeta(\mathbf{y}, \tau)$ и $G(\mathbf{y}, \tau)$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\mathbf{y}, \tau) &= \iint \tilde{w}(y_3, \mathbf{k}, f) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{y} + f\tau)} d\mathbf{k} df, \\ G(\mathbf{y}, \tau) &= \iint \Gamma(y_3, \mathbf{k}, f) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{y} + f\tau)} d\mathbf{k} df, \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

где интегрирование ведется по всем значениям частоты f и волнового вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ в плоскости зоны среза. При таком представлении $\zeta(\mathbf{y}, \tau)$ и $G(\mathbf{y}, \tau)$ уравнение (11.41) запишется в виде

$$\frac{d^2}{dy^2} \tilde{w}(y, \mathbf{k}, f) + \left\{ \frac{M^2}{A^2} (f + V k_1)^2 - k^2 - \left(\frac{A''}{A} \right) \right\} \tilde{w}(y, \mathbf{k}, f) = - \frac{M^2}{A^2} \Gamma(y, \mathbf{k}, f); \quad (11.45)$$

здесь индекс у y_3 опущен, $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, A и V являются функциями только y и $A'' = d^2 A / dy^2$.

Для области вне зоны среза, а мы интересуемся именно ею,

$$y > 1, \quad G(y) \simeq 0, \quad A(y) \simeq 1, \quad V(y) \simeq 1,$$

и (11.45) приобретает вид:

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{dy^2} + \{M(f + k_1)^2 - k^2\} \tilde{w} = 0. \quad (11.46)$$

Решение этого уравнения, которое имеет колебательный характер и которое нас только и интересует, будет при

$$M^2(f + k_1)^2 - k^2 > 0. \quad (11.47)$$

Это неравенство можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим некоторый слой в зоне среза, лежащий между $y = Y$ и $y = Y + \delta Y$. Турбулентные пульсации переносятся в этом слое со скоростью $V_c = \bar{v}_1/U$, приблизительно равной местной скорости потока. Если эта скорость больше скорости звука, то можно пренебречь изменением картины поля пульсаций скорости, когда она проносится мимо неподвижной точки наблюдения (в отличие от случая $M \ll 1$, когда излучение звука потоком происходит именно благодаря изменению во времени перемещающихся пульсаций). Если компонента волнового вектора k , не изменяясь, проносится мимо неподвижной точки наблюдения со скоростью V_c , то частота f определится выражением:

$$f = -k_1 V_c. \quad (11.48)$$

Излучение, выходящее за турбулентную зону среза, возникает, таким образом, от некоторого слоя внутри зоны, для которого

$$M^2 k_1^2 (1 - V_c)^2 > k^2. \quad (11.49)$$

Если θ — угол между направлением вектора k и направлением средней скорости потока, то $\cos \theta = k_1/k$, и это условие принимает вид:

$$\cos^2 \theta > [M(1 - V_c)]^{-2}. \quad (11.50)$$

Переходя к размерным переменным, имеем отсюда, что

$$(U - v_1)^2 > \frac{c_0^2}{\cos^2 \theta}. \quad (11.51)$$

Отсюда можно заключить, что при скоростях потока, больших скорости звука, излучение звука (шума) турбулентной зоны среза происходит на основе механизма образования маховских вихревых волн.

Маховские вихревые волны излучаются теми слоями зоны среза, для которых разность между средней скоростью газа вне зоны среза и местной конвективной скоро-

стью вихрей больше, чем скорость звука вне зоны. В этом смысле генерация вихревых маховских волн имеет аналогию с образованием волн Маха при движении тонких тел со сверхзвуковой скоростью, — отсюда и термин «вихревые маховские волны».

Таким образом, излучаемые из зоны среза волны давления с волновым числом k и частотами f генерируются некоторым слоем внутри этой зоны, который лежит на

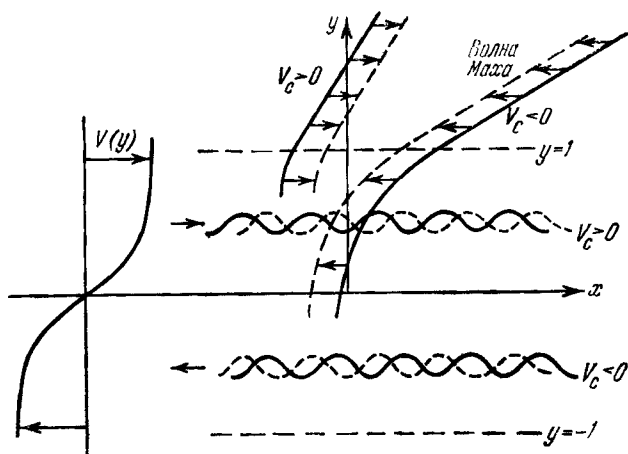


Рис. 104. Схема излучения волн Маха волнообразной стенкой, движущейся со сверхзвуковой скоростью.

расстоянии $y = x_3/L$ от центра зоны, определяемом из условия $f + k_1 V(y) = 0$. Другими словами, можно сказать, что на расстоянии y имеется «замороженная» вихревая картина, которая движется вниз по потоку со скоростью $V(y)$; эта скорость больше скорости звука в свободном потоке. Эта картина движется как волнообразная или неровная стенка со сверхзвуковой скоростью и излучает при своем движении волны Маха, причем направление распространения волн зависит от относительной скорости между $V(y)$ и скоростью свободного потока U (рис. 104).

Более подробное рассмотрение, проведенное в [44], приводит к тому, что если $(p - p_0) \ll p_0$, т. е. если ограни-

читься учетом только слабых ударных волн, генерируемых турбулентностью, то при некоторых дополнительных упрощающих предположениях

$$\begin{aligned} \frac{\overline{(p - p_0)^2}}{p_0^2} &\simeq 8\gamma^2 U^{3/2} c_0^{-3/2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 \frac{L^3}{U^2} = \\ &= 8\gamma^2 U^{3/2} c_0^{-3/2} \left(\frac{v_3^2}{U^2} \right) \frac{L^3}{l^2}, \quad (11.52) \end{aligned}$$

где l — дифференциальный масштаб длины (в направлении потока) флуктуаций скорости, нормальных к зоне среза. Сравнивая этот результат при $M \gg 1$ с законом восьмой степени Лайтхилла для шума, порождаемого турбулентностью, при $M \ll 1$, мы видим, что если v_3^2 / U^2 слабо меняется при изменении U , интенсивность $\sim U^{3/2}$.

Экспериментальные данные по шуму пограничного слоя (см. [44] и § 7 гл. 10) указывают на существенное отличие от закона восьмой степени в сторону более слабой зависимости интенсивности шума от скорости потока. Эффективность акустического преобразования (см. (10.49)) для случая $M \gg 1$ на основании (11.52) будет

$$\eta \sim M^{-3/2} \quad (11.53)$$

в отличие от случая $M \ll 1$, когда $\eta \sim M^5$. Максимальное значение η следует ожидать при $M \simeq 1$. При $M \rightarrow 0$ η быстро убывает; при $M \rightarrow \infty$ η убывает более медленно. Отсюда следует важный вывод, что энергия, генерируемая турбулентным потоком, всегда мала по сравнению с энергией, поддерживающей поток, и поэтому при любых M можно пренебречь обратной реакцией звука на поток.

Направленность излучения турбулентного слоя с поперечным сдвигом такова, что при $M \rightarrow \infty$ все большая часть излучения маховскими вихревыми волнами концентрируется по направлению, близкому к перпендикулярному к потоку (см. § 7 гл. 10). Это понятно, если вспомнить физический механизм излучения. При увеличении M волны Маха, излучаемые отдельными движущимися неоднородностями, имеют угол с направлением x_1

$$\alpha = \arccos \frac{c_0}{U [1 - V(y)]}, \quad (11.54)$$

приближающийся к 90° .

На рис. 105 представлен график [44], рассчитанный для профиля скорости в слое вида

$$|V(y)| = 1 - e^{2|y|}. \quad (11.55)$$

Функция $f(\alpha)$, характеризующая направленность излучения и выражающаяся в виде

$$f(\alpha) = \left[\frac{dV(y)}{dy} \right]^{1/2} \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.56)$$

сосчитана для чисел Маха 2, 4 и 6, соответствующих числам Маха для разности скоростей по обе стороны зоны среза в 4, 8 и 12.

Поскольку в теории не принимается во внимание нелинейное взаимодействие между отдельными волнами и не рассматривается рассеяние при углах, близких к 90° , имеется резкий спад излучения (рис. 105). Наличие этих явлений должно привести также и к излучению назад, т. е. для углов $\alpha > 90^\circ$.

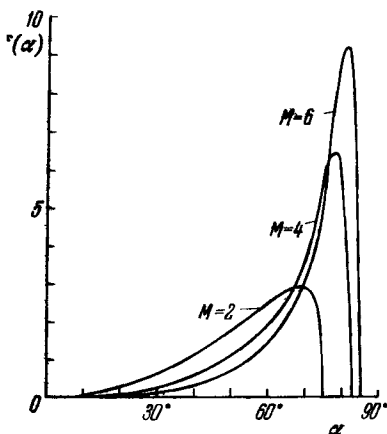


Рис. 105. Направленность излучения вихревых волн Маха в зоне среза при различных числах Маха [44].

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, стр. 374. Гостехиздат, 1948.
2. Curle N., The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proc. Roy. Soc. (London) A 231, 505 (1955).
3. Лямшев Л. М., О некоторых интегральных соотношениях в акустике движущейся среды. Докл. АН СССР 138, 575 (1961).
4. Doak P. E., Acoustic radiation from turbulent fluid containing foreign bodies. Proc. Roy. Soc. (London) A 254, 129 (1960).
5. Лямшев Л. М., Излучение звука упругими оболочками, возбуждаемыми турбулентным аэродинамическим потоком. Акуст. ж. 7, 59, (1961).
6. Lyon R. H., Responce of a nonlinear string to a random excitation. J. Acoust. Soc. Am. 32, 953 (1960).

7. Блейх Х., Динамическое взаимодействие между конструкцией и жидкостью. Библиографический сборник «Механика». Аэрогидроупругость. ИЛ, 1961.
8. Lyon R. H., Responce of strings to random noise. J. Acoust. Soc. Am. 28, 391 (1956).
9. Dyer I., Responce of plates to a decaying and convecting random pressure field. J. Acoust. Soc. Am. 31, 922 (1959).
10. Рэлей, Теория звука, т. II, стр. 401. Гостехиздат, 1944.
11. Strouhal V., Ueber eine besondere Art der Tonerregung. Ann. Phys. 5, 216 (1878); Wied. Ann. 5, 216 (1879).
12. Kovasznay L. S. G., Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers. Proc. Roy. Soc. (London) A 198, 174 (1949).
13. Блохинцев Д. И., Акустика неоднородной движущейся среды. Гостехиздат, 1946.
14. Юдин Е. Я., Исследование шума вентиляторов. Кандидатская диссертация, ЦАГИ, 1942.
15. Phillips O. M., The intensity of aeolian tones. J. Fluid Mech. 1, 607 (1956).
16. Лямшев Л. М., Об эоловых тонах. Акуст. ж. 8, 91 (1962).
17. Гутин Л. Я., О звуковом поле вращающегося воздушного винта. Ж. техн. физ. 6, 899 (1936).
18. Garrick I. E., Watkins C. E., A theoretical study of the effect of forward speed on the free-space sound pressure field around propellers. NASA Rep. № 1198, 1954.
19. Von Gierke H. E., Aircraft noise sources. Handbook of noise control. McGraw-Hill, New York, 1957.
20. Александров И. А., О физической природе звука вращения гребного винта в режиме кавитации. Акуст. ж. 8, 34 (1962).
21. Powell A., On the edgetone. J. Acoust. Soc. Am. 33, 396 (1961).
22. Richardson E. G., Flow noise. Technical aspects of sounds. Vol. 3, Amsterdam — New York, Elsevier, 1962.
23. Powell A., Vortex action in edgetones. J. Acoust. Soc. Am. 34, 163 (1962).
24. Curle N., The mechanics of edgetones. Proc. Roy. Soc. (London) A 216, 412 (1953).
25. Von Gierke H. E., Aircraft noise control. Handbook of noise control. McGraw-Hill, New York, 1957.
26. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
27. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, стр. 536. Гостехиздат, 1950.
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
29. Willmarth W. W., Wall pressure fluctuations in a turbulent boundary layer. J. Acoust. Soc. Am. 28, 1048 (1956).
30. Willmarth W. W., Wooldridge C. E., Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. 14, 187 (1962).
31. Tack D. H., Smith M. W., Lambert R. F., Wall pressure correlations in turbulent airflow. J. Acoust. Soc. Am. 33, 410 (1961).

32. Lighthill M. J., The Bakerian lecture, 1961. Sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc. (London) A 267, 147 (1962).
33. Phillips O. M., On the aerodynamical surface sound from a plane turbulent boundary layer. Proc. Roy. Soc. (London) A 234, 327 (1956).
34. Powell A., Aerodynamic noise and the plane boundary. J. Acoust. Soc. Am. 32, 982 (1960).
35. Meecham W. C., On noise produced by boundary-layer turbulence. J. Acoust. Soc. Am. 35, 116 (1963).
36. Meecham W. C., Further discussion of noise produced by boundary layer turbulence. J. Acoust. Soc. Am. 35, 931 (1963).
37. Williams J. E. F., On the noise produced by boundary-layer turbulence. J. Acoust. Soc. Am. 35, 930 (1963).
38. Meecham W. C., Surface and volume sound from boundary layers. J. Acoust. Soc. Am. 37, 516—522 (1965).
39. Powell A., On the aerodynamic noise of a rigid flat plate moving at zero incidence. J. Acoust. Soc. Am. 31, 1649 (1959).
40. Skudrzyk E. J., Huddle C. P., Noise production in a turbulent boundary layer by smooth and rough surfaces. J. Acoust. Soc. Am. 32, 19 (1960).
41. Скучик Е., Хэддл Г., Шум обтекания, теория и эксперимент. Сб. «Подводная акустика», лекция 14, стр. 342. Изд. «Мир», 1965.
42. Corcos C. M., Resolution of pressure in turbulence. J. Acoust. Soc. Am. 35, 192 (1963).
43. Kraichnan R. H., Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. Am. 28, 378 (1956).
44. Phillips O. M., On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. J. Fluid Mech. 9, 1 (1960).

ТЕРМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА (АЭРОТЕРМОАКУСТИКА)

§ 1. Генерация звука тепловыми источниками

Как указывалось в гл. 1, при слабых возмущениях вязкого теплопроводящего сжимаемого газа (или жидкости) возникшее движение может быть представлено в виде трех видов возмущений: давления (звук) P , завихренности (турбулентность) Ω и энтропии (теплота) S . До сих пор мы занимались различными нелинейными взаимодействиями возмущений давления P и возмущений завихренности Ω и оставляли в стороне возмущение тепла S . Так, в предыдущих двух главах речь шла об аэродинамической генерации звука без учета роли тепла; например, излучение шума струями отнеслось к холодным струям. В этой главе мы в некоторой мере восполним этот пробел.

Имеется большое количество интересных и важных задач, где проявляется взаимодействие P и S . К этому кругу проблем относится и задача о термической генерации звука, которой мы будем здесь заниматься. Эта задача в последнее время стала привлекать к себе все больше внимания, главным образом в связи с существенным значением в современной технике (в особенности в реактивной технике) вибрационного горения, в котором взаимодействие PS оказывается весьма важным.

Термическая генерация звука может происходить по крайней мере по двум причинам. Во-первых, излучение звука может происходить при изменении температуры неподвижной границы теплового источника, что сопровождается расширением и сжатием окружающей среды. Это изменение температуры может происходить нерегулярно (например, горение в турбулентной струе) или периоди-

чески. В качестве примера термической генерации звука при периодическом изменении температуры границы теплового источника можно привести термофон, в котором излучение звука происходит при пропускании переменного тока через металлическую проволоку или фольгу и, таким образом, при периодическом нагревании их. Задачу о возникновении звукового давления при периодическом или мгновенном изменении температуры для тел такой простой формы, как бесконечная стенка или шар, можно решить в линейном приближении на основе уравнений гидродинамики вязкого сжимаемого теплопроводящего газа. Эти вопросы мы кратко обсудим в начале этой главы.

Термическая генерация звука, во-вторых, может также происходить при автоколебаниях в тепловых системах, в которых обратная связь обеспечивается возникшей звуковой волной, оказывающей влияние на процессы нагрева или горения и регулирующей переход энергии теплового источника в энергию звуковых колебаний. Здесь мы имеем дело с такими давно открытыми явлениями, как явление Рийке и явление поющих пламен, излучение звука неравномерно нагретыми резонаторами Гельмгольца; наконец, сюда относятся явления вибрационного горения. Интерес ко всем этим явлениям повысился вновь после того, как было установлено, что вибрационное горение в камерах сгорания реактивных двигателей во многих случаях приводит к их нестабильной работе — недопустимым по величине вибрациям, выгоранию стенок камер сгорания и, таким образом, к разрушению двигателей. Поскольку в большинстве задач этого рода вибрационное горение происходит в трубах, в § 2 даются основные уравнения, описывающие движение газа в трубе. Приводятся решения этих уравнений для случая одномерной задачи.

Далее, в § 3, обсуждаются основные особенности вибрационного горения и формулируются граничные условия на сосредоточенном теплоподводе, находящемся в трубе, которые конкретизируются для некоторых типичных случаев.

Удовлетворяя решения уравнений граничным условиям как на концах трубы, так и на теплоподводе, можно определить как области возбуждения автоколебаний, так

и возможные частоты этих автоколебаний (§ 4). В двух последних параграфах этой главы кратко обсуждаются два примера автоколебаний, вызванных акустическим механизмом обратной связи: явление Рийке и вибрационное горение в жидкостных реактивных двигателях (ЖРД).

Следует иметь в виду, что современное состояние теории таково, что задачи вибрационного горения, как и явления Рийке, решаются в линейном приближении — основные исходные уравнения гидродинамики и уравнения, описывающие свойства теплоподвода, линеаризуются. Поэтому в результате решения тех или иных задач вибрационного горения выясняется, в первую очередь, вопрос о границах динамической неустойчивости системы, т. е. о границах области, где возможны автоколебания, и определяются частоты возможных автоколебаний. Как известно, линейная теория не может дать ответа на вопрос о величине амплитуды установившихся автоколебаний; это может сделать лишь теория, учитывающая нелинейность процессов. Отсюда видно, насколько важно построение теории с учетом нелинейностей. Однако, в силу математических трудностей, учет нелинейностей в задаче об автоколебаниях тепловых систем фактически еще не проводился достаточно корректно. Таким образом, хотя в задачах, связанных с вибрационным горением, нелинейности определяют характер процесса, теория этих явлений по существу линейна. В данной книге мы не только излагаем теорию нелинейных акустических явлений, но и делаем попытку подвести читателя к постановке тех задач, которые должны решаться с учетом нелинейностей. В этом — оправдание включения этой главы, как, впрочем, и предыдущих двух глав, в эту книгу.

Итак, любое изменение температуры неподвижной стенки приводит к возникновению упругого возмущения, распространяющегося от стенки со скоростью звука, т. е. к возникновению звуковой волны. Решение системы уравнений (1.3), (1.22), (1.23), (1.6) для этого случая довольно громоздко. Здесь, следуя [1], мы приведем только окончательные результаты такого решения.

Асимптотическая формула для относительного изменения давления $\Delta p/p_0$, появляющегося в случае мгновенного повышения температуры бесконечной неподвижной стен-

ки на большом расстоянии x от нее в момент времени t , имеет вид:

$$\frac{\Delta p(x, t)}{p_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi} \left[\frac{2\nu}{3\gamma c_0 x}\right]^{1/4} \exp\left[-\frac{(c_0 t - x)^2}{\frac{16}{3}\gamma \nu t}\right]. \quad (12.1)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, T_0 — невозмущенная температура газа, γ — отношение теплоемкостей, c_0 — скорость звука; при выкладках число Прандтля $Pr = c_p \eta / \kappa$ было положено, для упрощения расчетов, равным $3/4$, что с достаточной точностью справедливо для газов. Импульс давления, выражаемый этой формулой, представляет собой острый пик, центр которого перемещается от стенки со скоростью звука. Его интенсивность пропорциональна температурному возмущению ΔT и убывает как корень четвертой степени из проходимого расстояния x . С возрастанием t ширина импульса возрастает как \sqrt{t} , т. е. подобно тому, как это имеет место для процессов молекулярной диффузии.

В качестве примера можно указать, что при $\Delta T/T_0 \sim \simeq 0,003$ ($\Delta T \simeq 1^\circ \text{C}$ при комнатных температурах), $c = 341$ м/сек, $\nu = 0,16$ см²/сек, $\gamma = 1,4$, на расстоянии 1 см от источника импульса (стенки) пик давления составляет $9,4 \cdot 10^{-5}$ атм, т. е. 113 дб относительно 0,0002 бар; на расстоянии 1 м соответственно $3 \cdot 10^{-5}$ атм или 102 дб. Ширина импульса составляет 0,105 см и время его прохождения мимо неподвижного наблюдателя $3,08 \cdot 10^{-6}$ сек.

Естественно, что мгновенного повышения температуры стенки хотя бы на 1° достичь невозможно, поэтому приводимые данные дают только представление о возможных порядках величин. Если импульс давления генерируется сферическим источником радиуса r_0 , формула принимает вид:

$$\frac{\Delta p(r, t)}{p_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi} \left(\frac{2\nu}{3\gamma c_0 r_0}\right)^{1/4} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{(c_0 t - r)^2}{\frac{16}{3}\gamma \nu t}\right]. \quad (12.2)$$

Из этой формулы следует, что при $\Delta T = 1^\circ \text{C}$ сфера радиуса 1 мм создает давление на расстоянии 1 м от центра

сферы, равное 35 дб. Если температура стенки источника изменяется по синусоидальному закону с частотой ω , то

$$\frac{\Delta p(x, t)}{p_0} = \frac{\Delta T}{T_0} 2\gamma \left(\frac{v\omega i}{3c_0^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{4v\gamma\omega^2 x}{3c_0^2} \right) \times \\ \times \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right] \left(\frac{2x}{x_0} \right)^{(1-m)/2}, \quad (12.3)$$

где m — число измерений задачи и x_0 — радиус цилиндра или шара. Здесь мы имеем дело с распространяющейся слабо затухающей бегущей волной; при частоте 1000 гц средняя амплитуда давления, согласно этой формуле, при $\Delta T = 1^\circ \text{C}$ составляет 92 дб для плоской волны и 26 дб для сферической волны радиусом 1 м, распространяющейся от сферического источника радиусом 1 мм.

Можно также рассмотреть задачу о возникновении пограничного слоя у стенки, вдоль которой распространяется звуковая волна (см. гл. 6, § 2). Тогда этот пограничный слой взаимодействует с первоначальной волной; при этом создается довольно сложная картина звукового поля [1].

Решение рассмотренных задач с учетом нелинейностей уравнений гидродинамики пока не проводилось.

К числу только что рассмотренных задач примыкает задача о шуме при турбулентном горении газа. Известно, что интенсивность такого шума при некоторых условиях заметно больше, чем холодной струи.

Допустим [2], что малый элемент топлива массы m сгорает при постоянном давлении, потребляя при этом массу воздуха, в α раз большую, чем m . Если при сгорании объем, занимаемый продуктами сгорания, в k раз больше первоначального объема (обычно $k \simeq 4-5$), то при этом перемещается масса окружающего газа, равная $(k-1)\alpha m$. При перемещении такой массы газа возникает волна давления. Амплитуда этой волны давления зависит от скорости сгорания.

Мощность излучаемого звука J (рассматриваем это излучение как излучение монополя)

$$J = \frac{\dot{Q}^2}{4\pi r c}, \quad (12.4)$$

где

$$Q = (k - 1) \alpha \dot{m}, \quad (12.5)$$

\dot{m} — скорость сгорания топлива, или, если считать, что топливо сгорает полностью, скорость полной подачи топлива.

При ламинарном пламени (см. подробнее § 3) скорость сгорания топлива постоянна и $\dot{Q} = 0$; процесс сгорания бесшумен. Однако, если зона горения турбулентна, а именно этот случай и рассматривается, то если даже расход топлива в среднем постоянен, локальная скорость горения меняется во времени и для малого элемента объема $\dot{Q} \neq 0$. Турбулентность непрерывно возмущает пламя; в каждый данный момент горение ограничено этим пламенем или серией пламен, занимающих случайное положение в зоне горения.

Будем считать, что сгорание топлива происходит, когда пламя толщиной d проходит данный малый элемент объема ΔV . Положим, что масштаб турбулентности $l > d$ и в турбулентной зоне горения малый элемент объема $\Delta V \simeq d^3$. В элементе объема ΔV условия сгорания могут поэтому считаться однородными и скорость горения в малом элементе ΔV может изменяться от нуля до скорости горения, имеющей место в ламинарном пламени. Положим, что в таком пламени \dot{m}_f есть средняя скорость сгорания единицы объема топлива. Если пламя через элемент объема ΔV под действием потока проходит со скоростью v , то средняя скорость изменения \dot{m}_f будет порядка $\pm \dot{m}_f \Delta V v / d$. Часть времени, в течение которой в среднем имеется такая скорость, представляет собой отношение средней скорости сгорания в турбулентной зоне горения с объемом V к средней скорости сгорания в ламинарном пламени, т. е. $\dot{m} / V \dot{m}_f$. Таким образом, среднее квадратичное скорости изменения \dot{m}_f в элементе ΔV будет:

$$\frac{\dot{m}}{V \dot{m}_f} \left(\frac{\dot{m}_f v \Delta V}{d} \right)^2.$$

Поскольку число элементов ΔV в V есть $V / \Delta V$, то полная мощность шума, излучаемого областью турбулентного го-

рения, согласно (12.4) и (12.5) запишется в виде

$$I = \sum J = (k-1)^2 \alpha^2 \frac{V}{\Delta V} \frac{\dot{m}}{V \dot{m}_f} \left(\frac{\dot{m}_f v \Delta V}{d} \right)^2 \frac{1}{4\pi r c}. \quad (12.6)$$

Отношение η этой мощности к полной мощности, выделяемой при сгорании топлива, запишется в виде

$$\eta = \frac{I}{\dot{m} H} = \frac{(k-1)^2 \alpha}{4\pi} \left(\frac{\alpha \dot{m}_f d}{\rho c} \right) \left(\frac{\Delta V}{d^3} \right) \left(\frac{v^2}{H} \right), \quad (12.7)$$

где H — теплотворная способность топлива. В этом выражении $\Delta V/d^3 \simeq 1$ и $\alpha \dot{m}_f d = \rho v_f$, где v_f — скорость ламинарного пламени. Отсюда

$$\frac{\alpha \dot{m}_f d}{\rho c} = \frac{v_f}{c} = M_f, \quad (12.8)$$

где M_f — число Маха распространения пламени. Итак, согласно (12.7) шум горения пропорционален M_f . Интенсивность шума в рассматриваемом случае турбулентного горения возрастает при увеличении скорости потока v как v^2 .

Для жидкого углеродного топлива, сгорающего в предварительно нагретом воздухе, который движется с достаточно большой скоростью, $k = 4$, $\alpha = 15$, $v_f/c \simeq 10^{-3}$ и $v^2/H \simeq 10^{-4}$; из (12.7) получаем, что $\eta \simeq 10^{-6}$.

Как видим, эффективность преобразования энергии горения в энергию шума весьма мала. Однако мощности современных турбореактивных двигателей весьма велики, поэтому интенсивности шума горения по своей абсолютной величине не так малы. Так, например, при мощности двигателя 60 Мвт будем иметь источник шума, по мощности равный 60 вт. Этот источник на расстоянии 30 м создает уровень шума в 108 дб. Шум холодной струи при этих условиях существенно больше, однако при малых скоростях истечения струи шум, создаваемый горением, может иметь большое значение, поскольку при горении изменения плотности не малы даже для малых M потока. Шум холодной струи имеет квадрупольное происхождение и его интенсивность пропорциональна v^8 , тогда как шум турбулентного горения согласно (12.6) пропорционален v^2).

*) В работе [40] показано, что шум горения (диффузионное пламя газовой горелки) вблизи от отверстия, из которого вытекает струя газа, обогащенного воздухом, генерируется монолами и интенсивность шума $I \sim v^2$; вдали от отверстия, где пламя сильно турбулизовано, $I \sim v^4$.

Шум горения согласно [2] должен иметь спектр частот, определяемый спектром турбулентности с центральной частотой вблизи значения $\frac{v}{d} \frac{m}{m_f} V^{-1}$. Для обычных условий значение центральной частоты имеет порядок нескольких сот герц.

Все это рассмотрение, проведенное в [2], является, конечно, только качественным и весьма грубым; однако оно дает некоторое представление как о порядке величины возникающего шума, так и о самом механизме его возникновения.

В качестве другого интересного примера термической генерации шума упомянем генерацию звука нагреванием поверхности твердого или жидкого тела электронной бомбардировкой и поглощением электромагнитной радиации. В [3, 4] приводятся результаты такого рода экспериментов и их обсуждение. Поверхность (предварительно зачерненная) облучалась светом от рубинового лазера или высокочастотными радиоимпульсами. При поглощении электромагнитной радиации поверхность нагревалась, и вследствие теплового расширения возникали упругие импульсы, распространяющиеся по образцу. Электронная бомбардировка поверхности также приводит к генерации упругих импульсов.

§ 2. Звуковые волны в трубе, заполненной движущимся газом

Перейдем к генерации звука, вызванной автоколебаниями в тепловых системах. Поскольку колебания в таких системах в большинстве технических задач происходят в трубах, в этом параграфе мы остановимся кратко на основных уравнениях, описывающих распространение звуковых волн в трубе, заполненной движущимся неизэнтропическим газом (рис. 106).

Исходными уравнениями служат уравнения сохранения для вязкого теплопроводящего сжимаемого газа (уравнения сохранения массы, сохранения импульса и сохранения энергии) и уравнение состояния — (1.3),

(1.22), (1.23), (1.6) (вторую вязкость рассматривать не будем, параметры газа c_p , c_v , η и κ считаем постоянными).

Для получения акустических уравнений следует применить метод возмущений. Положим, как это делает Карьер [5],

$$v_i = v_{i0}(x, r) + c[\text{grad } \varphi(x, r, \tau) + \text{rot } \mathbf{n}\psi(x, r, \tau)]; \quad (12.9a)$$

$$p_i = p_0(x, r)[1 + p'(x, r, \tau)]; \quad (12.9б)$$

$$\rho_i = \rho_0(x, r)[1 + \rho'(x, r, \tau)]; \quad (12.9в)$$

$$T = T_0(x, r)[1 + T'(x, r, \tau)]; \quad (12.9г)$$

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad r^2 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{L^2}, \quad c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad \tau = \frac{ct}{L}. \quad (12.9д)$$

Здесь L — длина трубы, \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный к направлениям x и r , p' , ρ' , T' — относительные приращения соответственно давления, плотности и температуры, $\text{grad } \varphi$ — относительное приращение потенциальной компоненты скорости, $\text{rot } \mathbf{n}\psi$ — относительное приращение вихревой компоненты скорости.

Эти выражения следует подставить в исходные уравнения. Тогда, если провести линеаризацию полученных уравнений и оставить только члены первого порядка относительно p' , ρ' , T' , φ и ψ , то уравнения для возмущенных величин будут (при этом считаем, что $v_{20} = v_{30} = 0$, $v_{10} = Mc$):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + M \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \Delta \varphi = 0; \quad (12.10a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + M \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma^{-1} p' = \frac{4}{3} \varepsilon \Delta \varphi; \quad (12.10б)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \tau} + M \frac{\partial T'}{\partial x} - (\gamma - 1) \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} - (\gamma - 1) M \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{4}{3} \gamma \varepsilon \Delta \psi; \quad (12.10в)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + M \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon \Delta \psi; \quad (12.10г)$$

$$p' = \rho' + T', \quad (12.10д)$$

где $\varepsilon = \eta/\rho cL$; здесь полагалось, что число Прандтля, как и раньше, $Pr = 3/4$. Эти уравнения должны быть решены с учетом того, что на стенке трубы флуктуации скорости и

температуры отсутствуют; должны также быть удовлетворены краевые условия на концах трубы. При наличии теплоподвода внутри трубы должны также быть удовлетворены краевые условия на нем.

Рассмотрим сначала случай, когда теплоподвод отсутствует. Для решения системы уравнений (12.10) следует исключить ρ' , p' и T' . Искомое решение для φ и ψ обычно ищется в виде экспоненциальных функций от x и τ :

$$\varphi(x, r, \tau) = \varphi(r) \exp [i(\alpha\tau \mp kx)],$$

$$k^2 \simeq \alpha^2$$

— акустических волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях и образующих систему стоячих волн в трубе, и волны энтропии $\psi(x, r, \tau)$, распространяющейся вместе с потоком. В [6] показано, что наличие вязкости и теплопроводности влияет на малые колебания только вблизи самого теплоподвода; ограничимся поэтому сначала рассмотрением задачи для случая изэнтропического движения идеального газа в трубе, полагая η и κ равными нулю. В этом случае уравнения (12.10) будут иметь вид:

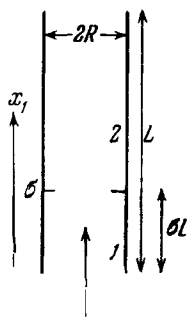


Рис. 106. Труба, открытая с обоих концов, с теплоподводом на расстоянии $x_1 = \sigma L$ от нижнего конца.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} + M \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

где $\tilde{v} = \frac{v'}{c} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\tilde{p} = \frac{p - p_0}{\gamma p_0} = p'/\gamma$; $\tilde{s} = \frac{s - s_0}{c_p} = \tilde{p} - \tilde{\rho}$ — возмущение энтропии (здесь $\tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$).

Если искать частное решение этой системы уравнений в виде экспоненциальных функций, то оно будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v} &= [\tilde{v}_0 \Phi_1(x) + \tilde{p}_0 \Phi_2(x)] e^{\beta \tau}; \\ \tilde{p} &= [\tilde{v}_0 \Phi_2(x) + \tilde{p}_0 \Phi_1(x)] e^{\beta \tau}; \\ \tilde{s} &= \tilde{s}_0 \Phi_3(x) e^{\beta \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

где \tilde{v}_0 , \tilde{p}_0 , \tilde{s}_0 — значения \tilde{v} , \tilde{p} , \tilde{s} в сечении $x = 0$ при $\tau = 0$ и $\beta = \zeta + i\omega$ — комплексная частота. Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{1}{2} (e^{-m_1 \rho x} + e^{-n_1 \beta x}); \\ \Phi_2(x) &= \frac{1}{2} (e^{-m_1 \rho x} - e^{-n_1 \beta x}); \\ \Phi_3(x) &= e^{-q_1 \rho x}, \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{M+1}; \quad n_1 = \frac{1}{M-1}; \quad q_1 = \frac{1}{M}.$$

Для полного решения задачи необходимо учесть начальные и краевые условия. В задачах о возникновении автоколебаний, которыми мы будем интересоваться далее, начальные условия не играют существенной роли и поэтому дальше не рассматриваются. Краевые условия на концах трубы запишем для двух главных типичных случаев: случая трубы, открытой с обоих концов, и случая трубы, открытой с одного конца и закрытой с другого; волну энтропии, которая определяется третьим уравнением системы (12.11), рассматривать не будем (см. ниже).

Рассмотрим первый случай. На концах трубы имеются узлы давления и пучности скорости (и смещения), поэтому

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= 0 \text{ при } x = 0 \ (\tau \geq 0), \\ \tilde{p} &= 0 \text{ при } x = 1 \ (\tau \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Решение уравнений (12.12) (без опущенного в этой системе третьего уравнения для \tilde{s}), удовлетворяющее сформу-

лированным выше граничным условиям, как нетрудно показать*), приводит к тому, что

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \omega &= (1 - M^2) n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Отметим, что эти же результаты имеют место также в том случае, когда оба конца трубы закрыты и на них $\tilde{v} = 0$. Исключая случай $n = 0$, не относящийся к колебаниям, получаем, что наименьшая собственная частота ($n = 1$) будет при

$$\omega = (1 - M^2)\pi;$$

период колебаний при $M \simeq 0$ оказывается равным $T = 2L/c$.

Таким образом, труба может быть возбуждена на частотах, для которых ее длина составляет целое число полуволн (или четное число четвертей волн).

На рис. 107 показано (при $M = 0$) распределение вдоль трубы давления и скорости частиц воздуха для $n = 1, 2, 3$.

Для случая трубы, закрытой с одного конца, на закрытом конце должен быть узел скорости (и смещения), а на открытом — пучность скорости (и смещения) и узел давления. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= 0 \text{ при } x = 0 \quad (\tau \geq 0), \\ \tilde{v} &= 0 \text{ при } x = 1 \quad (\tau \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

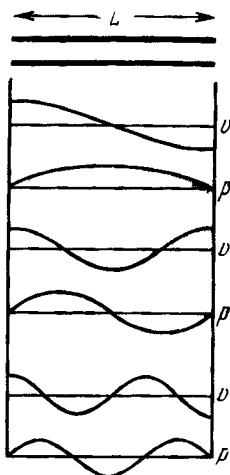


Рис. 107. Распределение вдоль трубы, открытой с обоих концов, скорости (смещения) и давления частиц воздуха для первых трех собственных частот.

*) См. [7]. Подробнее о распространении звуковых волн в трубах и сложных звукопроводах см. в [8].

Решение (12.12) удовлетворяет таким граничным условиям, если выполняются равенства

$$\zeta = 0, \quad \omega = (1 - M^2) \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (12.17)$$

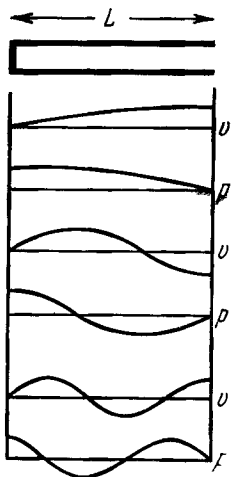
Таким образом, труба, закрытая с одного конца, имеет при $M = 0$ собственные частоты такие, когда на длине трубы укладывается нечетное число четвертей длин волн (рис. 108).

Отметим, что из решения (12.12) следует, что при $\zeta < 0$ течение устойчиво, при $\zeta > 0$ течение неустойчиво; при $\zeta = 0$ в системе имеют место установившиеся колебания. Эти неравенства, таким образом, могут служить критерием устойчивости течения в трубе.

Вообще говоря, при возрастании $e^{\zeta\tau}$ ($\zeta > 0$) возмущения перестают быть малыми и уравнения (12.11) перестают быть справедливыми. Найденные решения пригодны поэтому только для описания начальной стадии возникновения колебаний.

Если не делать предположения о том, что вязкость и теплопроводность равны нулю и, таким образом рассматривать неизэнтропическое движение газа, то следует решать систему уравнений (12.10). Выполнение граничных условий на стенках трубы приводит к системе уравнений, нетривиальным решением которой служит равенство нулю детерминанта этих уравнений.

Рис. 108. Распределение вдоль трубы, закрытой с одного конца, скорости (смещения) и давления частиц воздуха для первых трех собственных частот.



Решением получаемого характеристического уравнения служит следующее выражение для k [5]:

$$k = \pm \alpha \left[1 + \frac{(\gamma - 1) \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}}{r_1} - \left(\frac{\varepsilon}{i\beta_1}\right)^{1/2} \right], \quad (12.18)$$

где $r_1 = R/L$ (R — радиус трубы) и $\beta_1 = \alpha - kM$. Мнимая часть k определяет затухание волны, связанное с поглощением и влиянием теплопроводности вблизи стенок трубы.

Далее следует учесть краевые условия на концах трубы. Карьер указывает, что если плоская волна, распространяющаяся по оси трубы и падающая изнутри трубы на открытое (выходное) отверстие, в некоторой точке x имеет амплитуду акустического давления

$$p_i = p \exp i\omega t,$$

то отраженная волна имеет амплитуду давления

$$p_r = pN \exp i\omega t,$$

где коэффициент отражения есть функция $\frac{\omega R}{c}$ и M вида

$$N = N \left[\frac{\omega R}{c} (1 - M^2)^{1/2} \right].$$

Отношение p_r/p_i при падении волны на нижний конец трубы дается Карьером в виде

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{(1 - M)}{(1 + M)} N \left[\frac{\omega R}{c} (1 - M^2)^{1/2} \right]. \quad (12.19)$$

Коэффициент отражения N при $M = 0$ для открытой трубы без фланца вычислен в [9]. Если рассматривать задачи, когда скорость течения газа мала (например, в явлении Рийке, о котором подробно речь будет идти в § 5, $M \simeq 10^{-3}$), то учет скорости течения дает малую поправку: при $S \simeq \omega R/c \sim 0,1$ получим: $N(S) \simeq 1 - S^2/2$. При этом следует учесть поправку на конец, составляющую 0,613 R .

Если в трубе имеется нагреватель (плоскость σ на рис. 106), то тогда для нижнего конца трубы

$$N_1 = 1 - \frac{(\alpha r_1)^2}{2}; \quad (12.20)$$

для верхнего конца трубы

$$N_2 = 1 - \frac{(\nu_1 \alpha r_1)^2}{2}, \quad (12.21)$$

где $v_1 = c_1/c_2$; c_1 и c_2 — скорости звука соответственно в нижней и верхней частях трубы. Выражения для φ для частей трубы 1 и 2 (см. рис. 106) оказываются такими:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)} &= A_1 \exp [i\alpha\tau - ik_1(x-1)] - \\ &\quad - |N_1| \exp [i\alpha\tau + ik_1(x-1)], \\ \varphi^{(2)} &= A_2 \exp [i\alpha\tau - ik_2x] - |N_2| \exp [i\alpha\tau - ik_2x], \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \alpha \left[1 + \frac{1 + (\gamma - 1) \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}}{r_1} \right] \left(\frac{\varepsilon}{i\alpha}\right)^{1/2} = k_1' - ik_1'', \\ k_2 &= v_1\alpha \left[1 + \frac{1 + (\gamma - 1) \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}}{r_1} \right] \left(\frac{\varepsilon}{iv_1\alpha}\right)^{1/2} = k_2' - ik_2'' \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

и k' — действительная часть α .

Флуктуирующие части v и p имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} v^{(1)} &= c_1\varphi_x^{(1)}, & v^{(2)} &= c_2\varphi_x^{(2)}, \\ p^{(1)} &= -i\alpha\gamma\varphi^{(1)}, & p^{(2)} &= v_1\alpha\gamma\varphi^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

Эти формулы говорят о том, что наличие теплоподвода в трубе, вообще говоря, существенно осложняет картину стоячих волн по сравнению с картиной стоячих волн в трубе без теплоподвода. При подходе волн к теплоподводу возникают дополнительные отраженные и проходящие волны.

Что касается волны энтропии, распространяющейся вместе с потоком газа, то можно показать [5], что в рамках принятых приближений эта волна может иметь значение лишь вблизи теплоподвода и ее вклад в колебания столба газа в трубе по сравнению с вкладом акустических колебаний весьма мал.

§ 3. Вибрационное горение.

Граничные условия на теплоподводе

Для решения задачи о неизэнтропическом движении газа в трубе при наличии в ней теплоподвода следует теперь сформулировать граничные условия на этом теплоподводе. Имеется большое разнообразие в характере и

свойствах теплоподвода. Это может быть просто нагреватель в виде частой металлической сетки, как это имеет место в трубе Рийке (см. § 5), это может быть сосредоточенное или распределенное горение со всеми его особенностями, и т. д.

В этом параграфе мы остановимся на граничных условиях на теплоподводе, относящихся к горению, когда последнее может рассматриваться как сосредоточенное — в виде плоского фронта пламени. Теплоподвод, связанный не с горением, а, например, с нагреванием, можно рассматривать как частный случай граничных условий на теплоподводе в виде фронта пламени.

Термин «вибрационное горение» означает горение, связанное с процессами колебаний. Здесь мы будем интересоваться вибрационным горением, представляющим собой автоколебательный процесс, в основе которого лежит тот или иной акустический механизм обратной связи.

Приведем краткие сведения о горении, необходимые нам в дальнейшем. Горение представляет собой экзотермическую химическую реакцию (химическое превращение), протекающую достаточно быстро. При этой реакции происходит соединение горючего с окислителем (например, с кислородом). При известных условиях возникает воспламенение. Воспламенение может быть самопроизвольным (при определенных T и p) или вызвано поджиганием. Различают гомогенное горение (газы, заранее перемешанные газовые смеси) и гетерогенное горение (жидкое и твердое горючее). Горение может быть ламинарным. При таком горении пламя представляет собой резко очерченную границу, которую можно трактовать как поверхность разрыва; ширина фронта пламени имеет порядок сотых долей миллиметра.

Скорость фронта пламени v_f относительно самого газа в нормальном к фронту направлении называется скоростью пламени. Эта скорость обычно невелика (сантиметры и метры в секунду) и $v_f/c \ll 1$. Скорость пламени v_f зависит от температуры T по экспоненциальному закону, быстро увеличиваясь с ростом T .

Теоретически плоский фронт пламени всегда неустойчив. Такой результат получается на основе метода малых возмущений без учета вязкости и сжимаемости среды и

кривизны фронта пламени [10]. В технических задачах, однако, фронт пламени до определенных чисел Re практически может считаться устойчивым, поскольку область его устойчивости трудно определить. Начиная с некоторых, вообще говоря, достаточно больших, чисел Re , про-

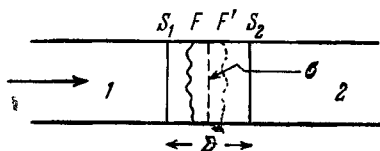


Рис. 109. Схема расположения теплоподвода (горения) в трубе, открытой с обоих концов.

исходит турбулизация фронта пламени. Фронт размывается, скорость пламени увеличивается, возникает так называемое турбулентное горение. При таком горении v_f зависит от масштабов потока; при турбулентном горении в трубе ширина области горения порядка диаметра

трубы. Скорость распространения турбулентного пламени на порядок больше, чем ламинарного пламени.

В построении теории вибрационного горения задача прежде всего состоит в разумной идеализации возмущенного процесса горения, с тем чтобы сформулировать условия в зоне теплоподвода, необходимые для составления исходных уравнений сохранения массы, импульса и энергии.

Рассмотрим трубу, в которой имеется поток газа слева направо (рис. 109). В зоне Σ , ограниченной двумя поверхностями S_1 и S_2 , происходит горение, так что пламя (неправильная поверхность F) не выходит за пределы этой области. Будем считать, что при длине трубы L размер зоны горения $\Sigma < L$. Так как $L \sim \lambda$, где λ — длина волны возможных акустических волн в трубе, то $\Sigma < \lambda$. Поэтому область горения между плоскостями S_1 и S_2 можно заменить поверхностью разрыва σ .

Начальный участок зоны горения, где горение еще не развилось полностью, особенно чувствителен к возмущениям скорости и давления газа, набегающего на зону горения, которые, например, могут вызываться звуком.

Предположение о таком сосредоточенном горении является принципиальным. Оно позволяет отделить газодинамическую задачу от чисто химической задачи (вообще говоря, эти задачи должны решаться совместно) и рас-

считать устойчивость поверхности разрыва σ под действием тех или иных факторов, не конкретизируя происходящих в самой зоне горения химических процессов, детальная количественная теория которых пока отсутствует.

На поверхности разрыва σ должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии. Эта поверхность разрыва, вообще говоря, существенно отличается от поверхности разрыва, образованной ударной волной. Отличие состоит в малой скорости горения, в том, что здесь газы слева и справа от σ химически различны, и в том, что на σ могут иметься источники массы, импульса и энергии.

Обратимся к составлению уравнений сохранения на поверхности σ . Напишем сначала эти уравнения для трехмерной области Σ .

Уравнение сохранения массы в интегральной форме будет иметь вид

$$\oint \rho v n dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho' dV + m'. \quad (12.25)$$

Здесь n — единичный вектор внешней нормали к dS , m' — источник массы внутри области Σ и V — объем этой области. В таких задачах, как явление Рийке, и в случае медленного горения газов в трубе $m' = 0$. При горении в жидкостных реактивных двигателях (случай вибрационного горения, который мы кратко рассмотрим в § 7) $m' \neq 0$.

Уравнение сохранения импульса с учетом добавочного импульса P , возникающего, например, за счет гидравлического сопротивления, вызываемого стабилизаторами пламени в зоне горения, будет:

$$\oint T_{ij} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV + P'_i. \quad (12.26)$$

Наконец, уравнение сохранения энергии при наличии теплоподвода в виде фронта пламени и теплоподвода Q' , не связанного с процессом горения (например, теплоподвод нагретой сеткой), будет иметь вид:

$$\oint \rho v \left(\frac{v^2}{2} + c_p T + q \right) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + Q'. \quad (12.27)$$

Здесь q — скрытая химическая энергия единицы массы горючей смеси, изменение которой при прохождении зоны горения означает переход части этой энергии в тепло за счет горения.

Переходя от зоны Σ объемом V к поверхности разрыва σ , получим, используя индекс «1» для левой (холодной) части потока и индекс «2» для правой (горячей) части потока:

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \rho dV + m, \quad (12.28)$$

$$\rho_2 v_2^2 + p_2 = \rho_1 v_1^2 + p_1 - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \rho v_x dV + P_x, \quad (12.29)$$

$$\rho_2 v_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + c_p T_2 + q_2 \right) = \rho_1 v_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 + q_1 \right) - \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \rho \left(\frac{v^2}{2} + c_v T + q \right) dV + Q, \quad (12.30)$$

где

$$m = \frac{m'}{S}, \quad P_x = \frac{P_x'}{S}, \quad Q = \frac{Q'}{S}.$$

Поскольку при переходе от зоны Σ к поверхности σ объем V следует положить равным нулю, члены с интегралами в каждом из этих уравнений следует рассматривать как некоторые фиктивные источники соответственно массы, импульса и энергии на поверхности σ .

В левой части равенства (12.30) присутствует величина q_2 , что свидетельствует о том, что сгорание может происходить не полностью.

Для того чтобы теперь, при сделанных довольно общих предположениях о наличии реальных и фиктивных источников массы, импульса и энергии, скрытой химической энергии q , теплоподвода Q , не связанного с процессом горения, получить уравнения, характеризующие вибрационное горение, вызванное акустическим механизмом обратной связи, следует применить метод возмущений, полагая, что на поверхность разрыва наложено акустическое поле. Тогда величины v_1 , v_2 , p_1 , p_2 , ρ_1 , ρ_2 , m , P_x , q , Q и т. д. получат некоторые малые приращения. Подставляя выражения для этих величин в уравнения (12.28) — (12.30) и проводя линеаризацию полученных уравнений, отбрасывая члены

второго и более высоких порядков малости относительно приращений, получим систему из трёх уравнений, которые связывают приращения слева и справа относительно σ и которые могут быть положены в основу теории вибрационного горения при принятых допущениях. Мы, однако, не будем выписывать эту довольно громоздкую систему уравнений (см., например, [7, 11]), поскольку в теории вибрационного горения, как правило, не приходится иметь дело сразу со всеми введенными параметрами, вызывающими вибрационное горение, и сразу со всеми величинами, характеризующими поток слева и справа от σ . Поэтому, рассматривая далее конкретные случаи вибрационного горения, мы приведем эти уравнения именно для них.

Возмущения параметров v , p , ρ , G , q , t , P_x и фиктивных источников массы, импульса и энергии приводят так или иначе к возникновению звукового давления, т. е. к акустической волне. Последняя, распространяясь в трубе и отражаясь от конца трубы, снова попадает на теплоподвод, приводя опять к возмущениям тех или иных параметров и к новому появлению звукового давления. Если амплитуда возмущений, вызываемых волной, достаточно велика и фаза благоприятна, обратная акустическая связь замыкается и возникают термические автоколебания.

В таком сложном явлении, как вибрационное горение, имеется большое разнообразие в механизмах обратной связи, вызывающих процесс автоколебаний, в том числе и не акустических по своей природе. Если же ограничиться только акустическими механизмами обратной связи, то можно разделить их на механизмы воздействия звука на смесеобразование, вихреобразование и собственно горение [7].

Механизм поддержания колебаний, связанный со смесеобразованием, может вызываться неравномерной (с некоторой периодичностью) подачей горючего, колеблющимся расходом воздуха (бедная или богатая смесь за счет колеблющегося давления перед зоной горения), колебанием качества распыления (вследствие акустического поля может происходить периодическое изменение скоростного напора потока $\rho v^2/2$) и т. д.

Возникшие акустические колебания могут изменить характер течения, сообщая ему некоторую периодичность,

связанную, например, с периодическим возникновением вихрей, наподобие того, как это имеет место в явлении краевого тона (см. § 3 гл. 11 и § 2 гл. 6). Может быть вихреобразование, например, перед зоной горения, и тогда входящий в зону вихрь меняет свойства теплоподвода. Вихреобразование может быть в самой зоне горения; это приводит к периодическим явлениям, например к колебаниям отрыва пламени от стабилизатора пламени.

Наконец, могут быть механизмы обратной связи в явлении собственно самого горения. Скорость нормального распространения пламени может зависеть от температуры смеси T и давления p ; может происходить периодическое нарушение поджигания смеси, запаздывание процесса сгорания (механизм, играющий одну из основных ролей в вибрационном горении в камерах сгорания ЖРД), может возникнуть неустойчивость фронта пламени и т. д.

Такое многообразие причин, вызывающих вибрационное горение, приводит к большим трудностям как в построении теории, так и в инженерных решениях конструкций реактивных двигателей, свободных от возникновения вибрационного горения.

Обратимся к граничным условиям некоторых случаев термических автоколебаний. Положим, что только возмущения теплоподвода Q , не связанного с горением, отличны от нуля, а возмущения m , P_x , q , фиктивных источников массы, импульса и энергии равны нулю. Нетрудно показать, применяя метод малых возмущений, что в этом случае из уравнений (12.28) — (12.30), проводя их линеаризацию, можно получить такие условия на теплоподводе:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_2 &= \tilde{v}_1 + \frac{(\gamma-1)}{2(1-M^2)} \tilde{Q}, \\ \tilde{p}_2 &= \tilde{p}_1 - \frac{M(1-\gamma)}{2(1-M^2)} \tilde{Q}, \end{aligned} \right\} \quad (12.31)$$

где

$$\tilde{v} = \frac{\Delta v}{c}; \quad \tilde{p} = \frac{\Delta p}{\gamma p_0}; \quad c_1 = c_2; \quad M_1' = M_2 = M.$$

Безразмерное возмущение теплоподвода определяется выражением

$$\tilde{Q} = 2M^3 \frac{\Delta Q}{\rho_1 v_1^3}, \quad \text{где} \quad Q = \frac{Q'}{S}. \quad (12.32)$$

В том случае, когда скорости течения газа малы, (12.31) приближенно можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_2 &= \tilde{v}_1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \tilde{Q}, \\ \tilde{p}_2 &\simeq \tilde{p}_1. \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Отметим, что \tilde{v}_2 при положительном \tilde{Q} больше \tilde{v}_1 на величину $\frac{(\gamma-1)}{2} \tilde{Q}$, т. е. при пересечении зоны теплоподвода амплитуда возмущения скорости течения увеличивается.

Граничные условия на фронте пламени в ЖРД (подробнее см. § 6) получаются из (12.28) — (12.30), если учесть, что $m \neq 0$, а все остальные источники возмущения отсутствуют. Тогда уравнение сохранения массы запишется в виде

$$\frac{1}{M} \tilde{v}_2 + \tilde{p}_2 = \frac{1}{M} \tilde{v}_1 + \tilde{m}, \quad (12.34)$$

где

$$\tilde{m} = \frac{m_{\text{сг}} - m_{\text{вп}}}{m_{\text{вп}}}$$

и где, в свою очередь, $m_{\text{вп}}$ — секундный расход топлива (скорость впрыска), а $m_{\text{сг}}$ — масса сгоревшего в единицу времени топлива (скорость сгорания). Если, кроме того, сделать упрощающее предположение, что среда по обе стороны фронта горения σ имеет одинаковую температуру, то $\tilde{p}_1 \simeq \tilde{p}_2$ и $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2$.

Для случая вибрационного горения в неподвижном газе, находящемся в закрытой с одного конца трубе, M_1 и $M_2 \simeq 0$, $m = 0$, и нетрудно получить следующие условия на теплоподводе, которым является в этом случае плоский фронт пламени:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_2 &= \frac{c_1}{c_2} \tilde{v}_1 + \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{c_1 c_2} \tilde{v}_f, \\ \tilde{p}_2 &= \tilde{p}_1, \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

где $\tilde{v}_f = \Delta v_f / c_0$ — безразмерное возмущение скорости пламени.

§ 4. Условия возбуждения термических автоколебаний

Если ограничиться вопросом только о нахождении условий возникновения автоколебаний и не интересоваться частотами колебаний (а они, вообще говоря, близки к частотам акустических колебаний в трубе в отсутствие теплоподвода), то эту задачу можно решить более просто так называемым энергетическим методом [7, 12], не обращаясь к решениям общих уравнений, описывающих движение газа в трубе при наличии в ней теплоподвода. Этот метод, на котором мы кратко остановимся, состоит в следующем.

Обратимся снова к рис. 109. В зоне Σ к газу подводится тепло, и можно сказать, что при определенных условиях в этой зоне генерируется акустическая энергия, которая затем переносится волнами направо и налево от Σ . Обозначим через ΔJ изменение потока этой энергии при прохождении области Σ . Очевидно, что при наличии потерь энергии W условия устойчивости и неустойчивости сведутся к тому, что в первом случае (устойчивость) должно быть $\Delta J < W$, во втором случае (неустойчивость) $\Delta J > W$.

Напишем поток энергии для одномерного течения газа:

$$E = \rho v \left(\frac{v^2}{2} + c_v T \right) + pv. \quad (12.36)$$

Первое слагаемое, связанное с переносом массы (поток кинетической и внутренней энергии), интереса не представляет; при акустическом рассмотрении существен только второй член. Допустим, что установились гармонические колебания и $p = p_0 + p'$, $v = v_0 + v'$. Положим $p' = |p'| \sin \omega t$; $v' = |v'| \sin(\omega t + \phi)$ и $pv = p_0 v_0 + p_0 v' + v_0 p' + p' v'$.

Средний за период поток акустической энергии J будет:

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T p' v' dt = \frac{1}{2} |p'| |v'| \cos \phi. \quad (12.37)$$

С другой стороны, вспоминая смысл индексов «1» и «2» (рис. 109), имеем:

$$\Delta J = \frac{1}{T} \int_0^T (p'_2 v'_2 - p'_1 v'_1) dt. \quad (12.38)$$

Положим

$$p'_2 - p'_1 = \Delta P, \quad v'_2 - v'_1 = \Delta v_a. \quad (12.39)$$

Физический смысл этих величин таков. Перепад статического давления $p_2 - p_1$ возникает вследствие теплового и гидравлического сопротивления зоны Σ ; изменение этого сопротивления во времени будет $p'_2 - p'_1$. Таким образом, величина ΔP представляет собой изменение сопротивления зоны Σ . Величина Δv_a представляет собой колебание скорости расширения (сжатия) объема газа внутри Σ — это основная величина, входящая в критерий Рэлея.

Согласно (12.38) и (12.39) имеем:

$$\Delta J = \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta v_a \cdot p'_1 + \Delta P \cdot v'_1 + \Delta P \cdot \Delta v_a) dt. \quad (12.40)$$

Следует отметить, что здесь мы нигде не конкретизировали характер теплового источника; в качестве него может быть и весьма сложный процесс горения со всеми его особенностями. Таким образом, все многообразие источников энергии для поддержания автоколебаний по сути дела может быть сведено к двум величинам — Δv_a и ΔP и для нахождения ΔJ в принципе достаточно знать эти две величины, из которых главную роль (во всяком случае в тех задачах, которые мы рассматриваем в данной главе) играет Δv_a . (Учет влияния ΔP подробно проведен в [7].)

Пусть сдвиг фаз между Δv_a и p'_1 есть ψ_1 . Полагая $\Delta P = 0$, имеем:

$$\Delta J = \frac{1}{2} |\Delta v_a| |p'_1| \cos \psi_1. \quad (12.41)$$

Отсюда легко видеть, что условие возбуждения $\Delta J > W$ будет выполняться при $-\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$.

Если ограничиться рассмотрением только медленных течений, то можно считать, что колебательная составляющая скорости расширения близка по фазе к колебательной

составляющей теплоподвода. Тогда $\psi_1 = 0$ будет условием наилучшего возбуждения системы, т. е. максимум теплоподвода должен происходить в момент наибольшего сжатия. Именно в этом и состоит так называемый критерий Рэлея возникновения автоколебаний в тепловых системах.

В случае термических автоколебаний колебательные составляющие у Δv_a возникают вследствие колебаний теплоподвода или колебаний фронта пламени или одновременно того и другого.

Допустим, что с акустической частотой колеблется теплоподвод ΔQ и скорость распространения пламени Δv_f , что приведет к появлению Δv_a . Если Δv_a имеет соответствующую величину и необходимую фазу относительно p' , нетрудно показать, что при этом возникает генерация акустической энергии в зоне горения Σ и в системе будут поддерживаться акустические колебания.

Для самовозбуждения колебаний необходимо, чтобы они сами вызывали возмущения процесса горения, т. е. чтобы под их действием в соответствующей фазе и с определенными амплитудами возникали снова ΔQ и Δv_f .

Колебания фронта пламени могут возникать по крайней мере за счет двух причин. Акустическая скорость (если имеется звуковое поле) или флуктуация скорости течения могут перемещать фронт пламени. Эта причина не связана с процессом горения и имеет, вообще говоря, меньшее значение. С другой стороны, фронт пламени может смещаться за счет изменения местной скорости распространения пламени, вызванного особенностями горения.

Пользуясь приведенными рассуждениями и конкретными выражениями, входящими в (12.41), можно показать, что если возмущение процесса горения имеет определенную амплитуду и соответствующую фазу, то в системе возникает вибрационное горение. Этот случай соответствует так называемому жесткому возбуждению, по терминологии, принятой в теории автоколебаний. Случай мягкого возбуждения будет соответствовать тому, что последнее возникает при сколь угодно малых начальных амплитудах, которые быстро увеличиваются до величины определяемой нелинейностью системы.

Как уже было сказано, энергетический метод не дает возможности определить частоты автоколебаний; для

определения этих частот задачу об условиях возникновения автоколебаний нужно решать иначе. Для этого, после того как сформулированы основные соотношения на теплоподводе в конкретном случае термических автоколебаний, следует найти решение задачи о неизэнтропическом течении газа в трубе при выполнении не только граничных условий на концах трубы, но и граничных условий на самом теплоподводе, расположенном в каком-либо участке трубы.

Общий путь решения задачи такой. Следует воспользоваться решением уравнений § 2 в виде распространяющихся в трубе в противоположных направлениях звуковых волн и, как обсуждалось в § 3, потребовать выполнения на теплоподводе граничных условий. Последнее приводит к так называемому характеристическому уравнению, исследование которого позволяет ответить на вопрос об условиях, при которых возникают автоколебания в системе, и о возможных частотах автоколебаний.

Рассмотрим случай трубы, открытой с обоих концов, и теплоподвода в виде плоскости σ , расположенной на расстояниях x_1 и x_2 от концов трубы. Начало координат расположим в сечении σ ; таким образом, на левом конце трубы $x_1 < 0$ и на правом конце трубы $x_2 > 0$ (рис. 110). Краевые условия будут:

$$\tilde{p}_1(x_1) = 0, \quad \tilde{p}_2(x_2) = 0.$$

Решение (12.12) при таких краевых условиях будет:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_1 \Phi_2(x_1) + \tilde{p}_1 \Phi_1(x_1) &= 0, \\ \tilde{v}_2 \Phi_2(x_2) + \tilde{p}_2 \Phi_1(x_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.42)$$

где \tilde{v}_1 , \tilde{p}_1 , \tilde{v}_2 , \tilde{p}_2 — значения возмущений \tilde{v} и \tilde{p} в сечении $x = 0$ соответственно слева и справа от σ . Положим

$$\tilde{v}_1 = r \tilde{v}_2 - \Delta \tilde{v}_a, \quad \tilde{p}_1 = m \tilde{p}_2. \quad (12.43)$$

Здесь

$$r = \frac{c_2}{c_1}, \quad m = \frac{p_2}{p_1}, \quad \Delta \tilde{v}_a = \frac{\Delta v_a}{c_0}.$$

Положим далее

$$\Delta \tilde{v}_a = \alpha \tilde{p}_1, \quad (12.44)$$

где α — некоторое комплексное число. Такое предположе-

ние — не что иное, как формальное введение обратной связи; колебания \tilde{p}_1 вызывают колебательный процесс в зоне теплоподвода. Если колеблется \tilde{p}_1 , то колеблется с той же частотой и Δv_a .

Система (12.42) будет иметь нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} r\varphi_2(x_1) & -am\varphi_2(x_1) + m\varphi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_2) & \varphi_1(x_1) \end{vmatrix} = 0, \quad (12.45)$$

откуда

$$r \frac{\varphi_1(x_1)}{\varphi_2(x_2)} - m \frac{\varphi_1(x_1)}{\varphi_2(x_1)} = am. \quad (12.46)$$

Здесь функции φ_1 и φ_2 определяются по (12.13).

Анализ этого характеристического уравнения дает возможность найти условия устойчивости течения подогреваемого газа и найти частоты колебаний. Приравнявая нулю вещественную и мнимую части этого уравнения, можно найти два уравнения относительно ζ и ω , совместное решение которых дает пары значений ζ и ω . Такой анализ достаточно подробно для различных условий дан

в [7]. Естественно, что условия возбуждения автоколебаний получаются теми же, какие следуют из применения энергетического метода; система возбуждается при $\zeta > 0$, когда фазовый сдвиг между Δv_a и \tilde{p}_1 по абсолютному значению меньше $\pi/2$. Однако кроме этого результата здесь получаются выражения для частот автоколебаний.

Как в этом, так и в предыдущих двух параграфах мы наметили основные пути того, как строится теория термических автоколебаний. Мы обращали внимание на то, что эта теория основана на линеаризации уравнений гидродинамики и условий сохранения массы, энергии и импульса на теплоподводе; как сами исходные уравнения для возмущений, так и граничные условия на теплоподводе при го-

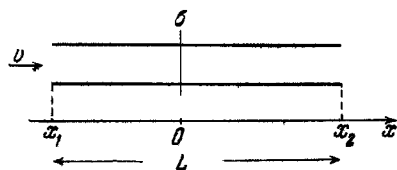


Рис. 110. Расположение поверхности теплоподвода σ (сосредоточенное горение) в трубе, открытой с обоих концов.

рени берутся линейными. Таким образом, эта теория годится только для выяснения вопроса об условиях возникновения автоколебаний и справедлива для описания лишь начальной стадии этих колебаний, не давая сведений об амплитудах возникших колебаний, которые определяются нелинейностью системы.

Между тем ясно, что при тех больших амплитудах, которые возникают при термических автоколебаниях, в особенности при вибрационном горении в ряде технических устройств, безусловно должны учитываться нелинейные эффекты. Для случая, когда колебания давления весьма велики и волны сжатия можно считать ударными, в [13] учитывается нелинейное взаимодействие при наложении ударных волн и волн разрежения при их распространении в трубе. Промежуточный случай не слишком малых, но и не слишком больших амплитуд, которым мы интересуемся в этой книге, по-видимому пока не рассматривался в достаточно корректном виде.

Вообще говоря, имеют место два источника нелинейности в рассматриваемой нами задаче: во-первых, нелинейность, связанная с нелинейностью исходных уравнений гидродинамики, и, во-вторых, нелинейность в явлении собственно горения. В задачах вибрационного горения, по-видимому, последняя играет более существенную роль.

В [7] сделана попытка учесть нелинейную связь между процессом теплоподвода и амплитудой колебания газового потока, оставляя при этом исходные уравнения линейными. В зоне теплоподвода в уже линеаризованные уравнения вводятся наиболее существенные нелинейности. Такая операция не вполне корректна, однако получаемые результаты, согласно автору, находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом.

Акустический интерес задачи о термических автоколебаниях, в том числе задачи вибрационного горения, состоит не только в выяснении условий возбуждения автоколебаний, но и в определении интенсивности излучаемого звука при возникших автоколебаниях и ее зависимости от ряда факторов. Однако при рассмотрении вибрационного горения этот вопрос имеет меньшее значение; в этом случае решение задачи, изложенной в § 2, следует проводить с учетом потерь на излучение концами трубы [7].

§ 5. Явление Рийке

Одним из наиболее показательных и физически наиболее прозрачных примеров термической генерации звука при автоколебаниях, на котором проще всего познакомиться с особенностями этого рода задач и возникающими здесь трудностями, служит явление, открытое еще в 1859 г. Рийке [14]. Это явление состоит в следующем. Если в вертикально расположенной открытой с обоих концов трубе длиной L поместить достаточно частую металлическую сетку на расстоянии приблизительно четверти длины трубы от ее нижнего конца и затем при помощи газовой горелки нагреть эту сетку, то после того, как горелка убрана, труба будет звучать на частоте своего основного тона, соответствующего длине волны $\lambda \sim 2L$; после охлаждения сетки звучание прекратится. Сетку можно накаливать электрическим нагревателем, и тогда звучание может продолжаться неограниченно долго, если только каким-либо путем охлаждать стенки трубы. В горизонтально расположенной трубе звучание не возникает; это говорит о том, что существенную роль играет поток воздуха через трубу благодаря конвекции (тяги). Если на расстоянии четверти длины трубы от верхнего ее конца поместить не сетку-нагреватель, а сетку-охладитель, то труба также начинает звучать; эти эксперименты были осуществлены в опытах Босша (см. [17]) и Рисса [15, 16].

Прежде чем перейти к более или менее строгой теории, полезно провести качественное рассмотрение процесса возникновения и поддержания колебаний в трубе Рийке.

Первое такое объяснение явления Рийке, сыгравшее в дальнейшем важную роль во всей теории термической генерации звука при автоколебаниях в тепловых системах, было дано Рэлеем [17]. Основная идея этого объяснения состоит в следующем. Если в трубе каким-либо образом возникли звуковые колебания, то они будут поддерживаться (будет компенсация потерь) за счет теплового источника в том случае, когда количество тепла, передаваемого газу от нагревателя в момент наибольшего сжатия газа вблизи нагревателя (т. е. при наибольшей температуре этого участка газа), будет больше, чем количество тепла, передаваемого в момент разрежения (при наименьшей

температуре газа) — см. § 4 настоящей главы, где обсуждался этот критерий Рэля.

В трубе, открытой с обоих концов, собственные колебания, как об этом говорилось в § 2, представляют собой стоячие волны, причем акустическая скорость v в некоторой точке x трубы (см. рис. 107) опережает по фазе давление p на четверть периода $T/4$. В том случае, когда сетка расположена в нижней части трубы и $0 < x < L/2$, за $T/4$ до максимального сжатия скорость v достигает максимального значения и направлена вверх, т. е. через сетку проходит холодный воздух и теплоотдача улучшена. Поскольку теплоотдача происходит с инерцией, максимум теплоотдачи будет несколько запаздывать по фазе относительно скорости v , в результате чего нагрев будет почти совпадать по фазе с давлением p . При сетке, расположенной выше $x = L/2$, амплитуда скорости меняет знак на обратный; за $T/4$ до максимального давления скорость будет максимальной и направлена вниз, т. е. к сетке будет подходить нагретый воздух и теплоотдача будет ухудшена (она будет улучшена, если сетка является не нагревателем, а охладителем). В сжатии не будет передаваться тепло и колебания не будут поддерживаться.

«Как в опытах Рийке, так и в опытах Рисса переменная передача тепла зависит от колебательного движения, между тем как эффект передачи зависит от изменения давления. Сетку поэтому следует помещать там, где оба эффекта заметны, т. е. не вблизи узла и не вблизи пучности. Наиболее благоприятное положение — это на расстоянии четверти длины трубы от верхнего или нижнего конца» ([17], стр. 228).

Как уже говорилось, из приведенных рассуждений следует, что для поддержания колебаний необходимо, чтобы к сетке постукали холодные слои воздуха; это означает, что необходим постоянный поток воздуха. Если бы этого постоянного потока не было, то, поскольку нагрев происходит в одном месте, переменного потока тепла не могло бы возникнуть.

Как видно из этого грубого качественного рассмотрения, колебания в трубе Рийке представляют собой типичный автоколебательный процесс. Энергия, за счет которой поддерживаются колебания, берется от теплового источни-

ка; механизм обратной связи состоит в обратном воздействии акустических колебаний на теплоподвод (нагреватель), фазовые и амплитудные соотношения определяются расположением сетки (нагревателя); колебания в системе не зависят от начальных условий. Поскольку труба Рийке (ее звучание) — типичная автоколебательная система, теория происходящих в ней явлений не может быть построена на основании простых методов — необходимо привлечение методов теории нелинейных колебаний. Однако, если интересоваться только определением границы динамической устойчивости системы, т. е. определением условий возникновения колебаний и нахождением частоты колебаний, и не задаваться вопросом о нахождении установившейся амплитуды колебаний, то оказывается возможным линеаризовать систему и, таким образом, отвлечься от нелинейности уравнений. В этом плане, более подробно обсужденном в §§ 2, 3, 4, и делались до сих пор все попытки построения теории явления Рийке.

Как видно из проведенных выше качественных рассуждений, в теории явления Рийке определяющее значение имеет выяснение физического механизма термоакустического преобразования при нестационарном обтекании нагревателя. Только выяснив этот механизм и сформулировав правильно граничные условия на нагревателе, можно надеяться получить удовлетворительную теорию явления Рийке.

В работах Лемана [18], Нейрингера и Хадсона [19], Путнема и Кервина (см. [20]) наряду с экспериментами было проведено теоретическое рассмотрение явления Рийке на основе критерия Рэлея. Однако в этих работах не было уделено должного внимания выяснению механизмов термоакустического преобразования и, несмотря на ценность этих исследований, они приводили к результатам, которые не все совпадали с экспериментом.

Первой теоретической работой, где была сделана попытка объяснить механизм термоакустического преобразования нагретой сеткой в трубе Рийке, была работа Карьера [5]. В этой работе теория явления Рийке развивается следующим образом. Сначала решается задача о неинтегрируемом распространении волн в трубе, открытой с обоих концов, при наличии в ней потока, скорость

которого подвержена флуктуациям (см. § 2 этой главы). Учитывается роль нагревателя и выясняется вид краевых условий на нем. Задача состоит в оценке флуктуаций тепла, передаваемого сеткой потоку, скорость которого меняется заданным образом (на среднюю скорость потока наложено поле акустической скорости частоты ω).

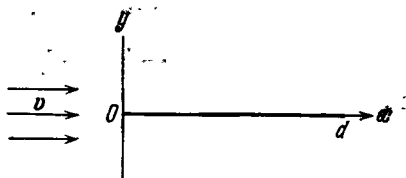


Рис. 111. Геометрия обтекания тонкой ленты шириной d потоком, имеющим скорость v .

Геометрия задачи изображена на рис. 111. Тонкая лента шириной d обтекается

в направлении x потоком, имеющим скорость v . Исходным служит уравнение сохранения энергии в виде

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T \right) - \kappa \Delta T = 0, \quad (12.47)$$

где T — температура газа. Таким образом, задача рассматривается без учета вязкости и, следовательно, вязкий пограничный слой считается отсутствующим. Далее делается еще одно существенное упрощение: член $v \operatorname{grad} T$ заменяется на avT_x , где v — скорость свободного потока и постоянная a приблизительно равна 0,43. Эта замена произведена на основе анализа такого приближения при малых Re потока. Пусть температура газа

$$T(x, y, t) = \theta(x, y) + \vartheta(x, y)e^{i\tau}$$

и температура ленты

$$T_0 = T + \delta e^{i\tau},$$

где

$$\tau = \frac{ct}{L} \text{ и } \vartheta \ll \theta, \delta \ll T.$$

Будем считать, что T и δ не зависят от расстояния x , что, вообще говоря, есть грубое приближение. Положим далее

$$av = v_0 + v' e^{i\tau};$$

здесь v' — флуктуационная компонента скорости потока, т. е. акустическая скорость. Тогда, при условии, что

$\frac{\vartheta}{\theta} \ll 1$, дифференциальное уравнение (12.47) может быть записано в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta - b\theta_x &= 0, \\ \Delta\vartheta - b\vartheta_x - i\beta\vartheta &= \frac{bv'}{v_0} \theta_x, \end{aligned} \right\} \quad (12.48)$$

где

$$b = \frac{\rho c_p v_0}{\kappa}, \quad \beta = \frac{\rho c_p \omega}{\kappa}.$$

Используя граничные условия на поверхности ленты

$$\theta \rightarrow 0 \text{ при } \operatorname{Im} (x + iy)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0; \quad \theta(x, 0) = T,$$

$$\vartheta \rightarrow 0 \text{ при } \operatorname{Im} (x + iy)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty; \quad \vartheta(x, 0) = \delta$$

и применяя метод возмущений с соответствующей линеаризацией, получаем окончательный результат. Флуктуационный добавок тепла q за единицу времени от ленты в поток оказывается таким:

$$\begin{aligned} q &= -2\kappa l \int_0^d \theta_y(x, 0) dx = \\ &= \frac{-2ib^{3/2}\kappa l T v'}{\beta v_0} [(\xi)^{1/2} \operatorname{erf}(\xi d)^{1/2} + (\pi d)^{-1/2} [\exp(-\xi d) - 1]]; \end{aligned} \quad (12.49)$$

для тонкой ленты дополнительный член, содержащий выражение, пропорциональное δ , опущен, поскольку он вносит несущественный вклад. Здесь l — эффективная длина нагревателя, ξ — корень уравнения $z^2 - bz - i\beta = 0$, который стремится к нулю при $\beta = 0$:

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{4i\omega}{bv_0} \right)^{1/2} - 1 \right] b. \quad (12.50)$$

Анализ выражения, стоящего в квадратных скобках в (12.49), показывает, что для больших β/b^2 оно становится почти чисто мнимым и фазовый сдвиг между теплоотдачей и флуктуацией скорости потока мал (положение, имеющее место в термоанемометрии). Наоборот, при малых β/b^2 фазовый сдвиг достигает $3\pi/8$, что в определенной степени согласуется с экспериментами с трубой

Рийке. Можно показать, что количество тепла Q_0 , передаваемое газу лентой эффективной длины l путем конвекции, есть

$$Q_0 = 4\kappa l T \left(\frac{bd}{\pi} \right)^{1/2},$$

и тогда формулу (12.49) можно записать в виде

$$q = -\frac{i}{2} Q_0 \frac{v_0}{\omega d} [(\pi \xi d)^{1/2} \operatorname{erf}(\xi d)^{1/2} + (e^{-\xi d} - 1)] \frac{v'}{v_0}. \quad (12.51)$$

Располагая данными по нестационарной теплоотдаче нагретой ленты в потоке с пульсациями скорости, теперь можно сформулировать краевые условия на нагревателе. Для этого нужно воспользоваться краевыми условиями (12.30) на теплоподводе (нагревателе), которые были получены в § 3. В рамках принятой линеаризации эти условия имеют вид:

$$v_2 = v_1(1 + \lambda), \quad p_1 = p_2, \quad (12.52)$$

где

$$\lambda = \frac{(\gamma - 1)q}{\gamma \pi R^2 p_0}.$$

Величина q определяется формулой (12.51) и индексы «1» и «2» относятся соответственно к нижней и верхней частям трубы (см. рис. 106).

Теперь следует воспользоваться граничными условиями для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ при $x = \sigma$ в уравнениях (12.22), в которых нужно использовать (12.52). Приравнивая детерминант полученных уравнений нулю, можно получить довольно сложное характеристическое уравнение для нахождения условий возбуждения колебаний, которое мы здесь не будем выписывать [5]. Условие поддержания колебаний получается в том случае, когда нагреватель расположен в нижней части трубы и $\sigma < \frac{1}{2}$, в соответствии с данными эксперимента.

Мы отмечали выше слишком грубую идеализацию рассмотрения вопроса о нестационарной теплоотдаче, проведенного в [5]. Более строгое решение этой задачи, с учетом пограничного слоя для бесконечно длинной цилиндрической проволоки, обтекаемой потоком, скорость которого меняется по синусоидальному закону, было дано в [21]. В этой работе предполагается, что пограничный слой ла-

минарный и амплитуда изменения скорости потока (т. е. акустическая скорость) мала по сравнению со средней скоростью потока, что хорошо оправдывается при звучании трубы Рийке; средняя скорость потока газа в трубе обычно больше чем на порядок превышает скорость акустических колебаний.

На рис. 112, взятом из этой работы, приведена кривая изменения фазового запаздывания ψ возмущения тепло-

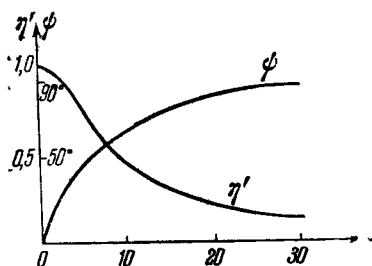


Рис. 112. Амплитуда возмущения теплоподвода η' и фазовое запаздывание ψ при передаче тепла от проволоки течению воздуха, скорость которого изменяется по синусоидальному закону.

отдачи ΔQ от нагретой проволоки относительно скорости потока v и кривая отношения амплитуд $\eta' = |\Delta Q| / |\Delta Q_{ст}|$, где $\Delta Q_{ст}$ — стационарное значение теплоотдачи при $\omega = 0$. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр $\omega d/v$, где d — диаметр проволоки. Как видно из этого рисунка, при $\omega = 0$ фаза ψ стремится к нулю, тогда как при увеличении частоты колебаний скорости потока фаза ψ возмущения теплоотдачи ΔQ отстает от

фазы возмущения скорости на угол $\pi/2$, а амплитуда возмущения теплоотдачи η' убывает с увеличением ω .

Данные работы [21] и приведенный график могут быть использованы при более строгой формулировке краевых условий на нагревателе, чем это было сделано в [5]. Такая попытка была сделана Раушенбахом [7]. Автор этой работы справедливо отмечает, что данные [21], относящиеся к нестационарной теплоотдаче от проволоки газу, непосредственно применять к нагретой сетке в трубе Рийке следует с осторожностью, поскольку в этом последнем случае процесс теплоотдачи, безусловно, должен отличаться от случая одной проволоки. Поэтому, пока нет данных о нестационарной теплоотдаче от нагретой сетки потоку, точная количественная теория явления Рийке даже в линейном приближении построена быть не может. Несмотря на это

замечание, использование работы [21] при рассмотрении теории явления Рийке представляется интересным.

При формулировке условий на нагревателе следует еще учесть, что густая сетка в трубе Рийке вносит определенное гидравлическое сопротивление потоку*). Можно оценить величину этого сопротивления, если считать, что применима гипотеза стационарности.

Если потери давления на сетке обозначить через p_ζ , то

$$p_\zeta = \zeta \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{и} \quad \Delta p_\zeta = \zeta \rho v \Delta v,$$

где ζ — некоторый коэффициент. Величина $P_x = -\Delta p_\zeta$ характеризует силовое воздействие сетки на поток. В безразмерных переменных

$$\tilde{P}_x = -\frac{\Delta p_\zeta}{\rho v^2} = -\frac{\zeta}{M} \tilde{v}, \quad (12.53)$$

где $M = v/c_0$ и $\tilde{v} = \Delta v/c_0$. Для проволочной сетки с отношением «живого» сечения к сечению трубы порядка 0,4—0,5, которое имело место в опытах Лемана [18] (см. ниже), согласно данным по гидравлике $\zeta \approx 5$.

Условия, описывающие процесс теплоотдачи от сетки потоку, были уже сформулированы в виде формулы (12.52). Эти условия идентичны условиям (12.33) с величиной \tilde{Q} , определяемой (12.32). Величина Q в (12.32) соответствует теплоотдаче от сетки при наличии возмущений течения, т. е. при нестационарном процессе, и, вообще говоря, нам неизвестна. Ее можно грубо определить при известной теплоотдаче от сетки потоку при стационарном процессе $Q_{ст}$, если воспользоваться работой [21], учтя фазовый сдвиг ψ между ΔQ и $\Delta Q_{ст}$. Для тонкой проволоки $Q_{ст}$ может быть найдено по формуле Кинга (см., например, [22]):

$$Q_{ст} = \alpha [T_{II} - T] l,$$

где

$$\alpha = \kappa \left(1 + \sqrt{\frac{2\pi r c_v d \cdot v}{\kappa}} \right); \quad (12.54)$$

*) Учет гидравлического сопротивления следует проводить, лишь когда над нагревателем расположена густая сетка. В наших экспериментах с явлением Рийке труба звучала при нагревателе в виде спирали без дополнительной сетки.

здесь κ — теплопроводность воздуха, l — длина проволоки, d — диаметр, v — скорость потока, ρ — плотность воздуха, $T_{\text{п}}$ — температура проволоки, T — температура среды.

Формулы (12.32), (12.33), (12.54) вместе с параметрами η' и ψ , характеризующими отклонение от стационарности, описывают процесс на поверхности нагревателя при том предположении, что не учитывается влияние изменения средней температуры газа вблизи сетки, которое для явления Рийке, вообще говоря, невелико (после прохождения сетки газ нагревается на $100\text{--}150^\circ\text{C}$ и $M_1 \simeq M_2$ *).

Теперь можно на основании этих данных решить крайнюю задачу, найти характеристическое уравнение и провести его анализ для определения возможных частот колебаний и области возбуждения этих колебаний, таким же путем, какой был использован в работе [5], где использовались условия на теплоподводе в виде (12.52) с величиной q , даваемой выражением (12.49).

Однако, если не ставить своей задачей нахождение возможных частот колебаний, которые мало отличаются от частот, получающихся обычным путем при решении задач об акустических колебаниях в трубе без нагревателя, а интересоваться только выяснением области значений параметров задачи, при которых возникают колебания, можно применить более простой энергетический метод, о котором речь шла в предыдущем параграфе.

В опытах с трубой Рийке в [18] эксперименты проводились с длиной трубы $L = 114$ см, в которой возбуждались частоты 165 гц и 330 гц (вторая гармоника). Скорость v течения газа менялась в пределах от 0 до 0,7 м/сек; при этом наиболее сильное звучание наблюдалось для v в пределах от 0,3 до 0,45 м/сек. Нагреватель состоял из проволоки диаметром 0,2 мм с шагом 2 мм, натянутой на штифтах таким образом, чтобы при нагреве «выбирался» провис. Непосредственно над нагревателем (мощность 272—400 вт) помещалась густая металлическая сетка; одна раскаленная проволока без сетки не приводила к появле-

*) Определенное значение в явлении Рийке должно иметь распределение температуры T вблизи нагревателя. Это распределение неравномерно: T увеличивается при приближении к центру и к стенкам трубы.

нию звучания*). Частая сетка имела на 1 см^2 от 50 до 1000 ячеек — диаметр проволочек от 0,1 до 0,5 мм. При этих условиях $\omega d/v \simeq 1$ и $\eta' \simeq 1$, а запаздывание $\psi \simeq 6^\circ$.

Пользуясь основными соотношениями для акустических колебаний в трубе, открытой с обоих концов, экспериментальными данными, приведенными в [18], кривыми для ψ и η' (рис. 112), а также учитывая гидравлическое сопротивление, оказываемое густой сеткой потоку, в [7] энергетическим методом рассчитаны области возбуждения колебаний для трубы Рийке.

Если положение сетки по длине трубы меняется, можно положить, что

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_1| &= a_1 \cos n\pi x, \\ |\tilde{p}_1| &= a_1 \sin n\pi x, \end{aligned}$$

где

$$a_1 > 1; n = 1, 2, \dots; 0 \leq x \leq 1.$$

Используя условие возбуждения автоколебаний $\Delta J > W$ (см. предыдущий параграф) и выражение (12.40), можно найти углы $\varphi = n\pi x$, при которых возможны автоколебания. Оценка показывает, что возбуждения автоколебаний возможны в области изменения углов φ в пределах от $\varphi = 10^\circ$ до $\varphi = 90^\circ$.

Учет потерь энергии, связанных с излучением открытыми концами трубы, приводит к сужению области изменений углов; автоколебания возникают в этом случае для углов φ , находящихся в пределах от $\varphi = 14^\circ$ до $\varphi = 87^\circ$. При этом для второй гармоники диапазон изменений углов φ оказывается в пределах от $\varphi = 13^\circ$ до $\varphi = 83^\circ$. Эти области возбуждения колебаний для двух первых гармоник, как отмечается в [7], согласуются с экспериментами Лемана. Следует заметить, однако, что хорошего совпадения с экспериментом, вообще говоря, трудно ожидать, поскольку в теории делаются весьма грубые упрощения.

При экспериментальном изучении явления Рийке установлено, что звучание трубы имеет место лишь в определенном диапазоне изменения средней скорости потока газа через трубу, причем максимум колебаний звукового давления наблюдается при некоторой скорости, лежащей

*) См. примечание на стр. 501.

приблизительно посредине этого диапазона. В [23] дается теоретическое рассмотрение этого вопроса. Следует отметить, что теоретические соображения, развиваемые в этой работе, дают возможность несколько более простым путем, чем использование характеристического уравнения, определить область возбуждения автоколебаний. Исходным служит следующее уравнение [24]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\gamma - 1}{c^2} \rho \frac{\partial Q^*}{\partial t}, \quad (12.55)$$

где Q^* — скорость передачи тепла единице массы газа. Правая часть этого уравнения представляет собой тепловой источник, вызывающий колебания звукового давления. Предполагается, что нагреватель имеет малую протяженность в направлении x и может быть представлен δ -функцией (в пространстве) и что флуктуирующая часть Q^* — величина q — пропорциональна скорости частиц газа v' (акустическая скорость) непосредственно у нагревателя.

Если положить

$$p = p(x) \exp kct \text{ и } v'(x, t) = v'(x) \exp kct,$$

где $k = k' - ik''$, то приходим к уравнению

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - k^2 p = - \frac{\gamma - 1}{c} k \rho F'(v_0) v'(x_h - \varepsilon) \delta(x - x_h). \quad (12.56)$$

Здесь ε — малое число, v_0 — средняя скорость потока газа, x_h — положение нагревателя и флуктуация $F'(v_0)$ определяется выражением $q = F'(v_0)v'$. Для того чтобы найти условие возбуждения звука в трубе, нужно найти k ; труба будет звучать при $\text{Re}(k) > 0$, при $\text{Re}(k) < 0$ возникшие колебания будут затухать.

Простейший путь нахождения k — это разложить p в ряды по ортогональным функциям, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} - \gamma_n^2 \varphi_n = 0,$$

и затем удовлетворить соответствующим граничным условиям. Уравнение, определяющее устойчивость системы для одной основной моды колебаний ($n = 1$), оказывается следующим:

$$k^2 - \gamma_1^2 = - \frac{\gamma - 1}{c^2} F'(v_0) \varphi_1(x_h) \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=x_h}. \quad (12.57)$$

Из (12.55) при подходящем выборе собственной функции задачи φ_1 можно найти k' , т. е. действительную часть k . Анализ полученного выражения для k показывает, что колебания в трубе возможны, когда нагреватель находится в нижней части трубы, как и должно быть. При оптимальном расположении нагревателя, когда $x_h = L/4$, для возбуждения автоколебаний должно выполняться условие

$$F_i'(v_0) > \frac{1}{G} \frac{(kL)^2 c^2}{\pi(\gamma-1)}, \quad (12.58)$$

где $F_i'(v_0)$ — мнимая часть $F'(v_0)$ и G — добротность трубы. С другой стороны, функцию $F_i'(v_0)$ можно определить, воспользовавшись формулой (12.51). В измерениях автора [23] $v'/v_0 \simeq 0,05 \div 0,1$, поэтому в формуле (12.51) можно воспользоваться асимптотическим представлением функции ошибок erf . В результате оказывается возможным найти выражение для зависимости $F_i'(v_0)$ от средней скорости потока газа; она оказывается такой:

$$F_i'(v_0) = \frac{Q_0 A}{\rho_0 v_0^2 S}, \quad (12.59)$$

где A — коэффициент при v'/v_0 в уравнении (12.51) и S — площадь поперечного сечения трубы.

Автор провел измерения в установке, состоящей из латунной трубы длиной 90 см и диаметром 8,75 см, с нагревателем из нихромовой ленты. Измерения показали, что следует учесть влияние потерь вблизи стенок трубы за счет вязкости и теплопроводности. Добротность трубы оказалась равной $G = 49$. Эксперимент показал, что труба звучит, если средняя скорость потока v_0 находится в пределах от 0,4 до 0,91 м/сек (при мощности нагревателя $I = 1290$ вт), от 0,4 до 0,87 м/сек ($I = 1100$ вт) и от 0,4 до 0,84 м/сек ($I = 930$ вт). Вычисления по приведенным выше формулам дают хорошее совпадение с экспериментальными данными по зависимости $F_i'(v_0)$ от средней скорости потока.

Интересное видоизменение трубы Рийке было осуществлено в [25]. Использовалась горизонтальная труба, закрытая с обоих концов подвижными поршнями, так что изменение длины трубы и изменение положения нагревателя в трубе легко достигалось передвижением этих поршней. Применялось водяное охлаждение трубы; поток газа

проходил через кольцевые пазы в поршнях. На этой установке были проведены измерения звукового давления (калиброванный микрофон устанавливался на головке одного из поршней) в зависимости от длины трубы и от положения нагревателя. Авторы отмечают, что имеющиеся расхождения с теорией (например с теорией, изложенной в [23]) связаны, по-видимому, с неточным знанием законов переменной теплоотдачи от нагретой сетки потоку.

Изучение звучания трубы Рийке показывает, что наряду с основной частотой колебаний присутствует вторая гармоника. Отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой гармоники растет с увеличением уровня звука *). В [5] этому дается такое качественное объяснение. Если скорость потока через нагреватель равна нулю, а $v' \neq 0$, то благодаря симметрии задачи и тому, что нагреватель реагирует только на абсолютное значение акустической скорости, колебания v' с частотой ω вызовут флуктуации теплоотдачи с частотой 2ω . Если имеется нелинейность в теплоотдаче, должны появиться гармоники более высокого порядка.

Если $v_0 \neq 0$, то акустическое поле частоты ω приведет к теплоотдаче (и, таким образом, к появлению звука) с частотами ω , 2ω ,... При увеличении v'/v_0 отношение амплитуды колебаний второй гармоники к первой будет возрастать, как это следует из эксперимента.

Некоторую роль могут играть также нелинейные свойства газа (см. гл. 2).

Выше отмечались трудности построения теории явления Рийке, которые главным образом состоят в отсутствии теории теплоотдачи от нагретой сетки потоку. Разработка теории для случая больших амплитуд, которая учитывала бы нелинейность как уравнений движения, так и уравнений, описывающих теплоотдачу нагревателей, насколько нам известно, пока не проводилась.

К тому же классу, что и явление Рийке, можно отнести термические автоколебания в неравномерно нагретых резонаторах Гельмгольца, в которых теплоподвод, как и в

*) При обычных условиях звучания трубы Рийке отношение амплитуды звукового давления второй гармоники p_2 к амплитуде звукового давления основной частоты p_1 составляет несколько процентов.

явлении Рийке, связан не с горением, а только с нагревом среды. Известно, что при выдувании стеклодувом шарика на конце стеклянной трубки диаметром в несколько миллиметров и длиной 10—15 см наблюдается такое явление. Пока шарик горячий — трубка звучит на частоте, соответствующей основной частоте резонатора Гельмгольца

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S}{\rho_0 l V}}$$

где p_0 — нормальное атмосферное давление, ρ_0 — плотность газа в резонаторе, V — объем резонатора, S — площадь поперечного сечения трубки и l — длина трубки до устья резонатора. Теория этого явления дана в [26].

§ 6. Некоторые примеры вибрационного горения. Автоколебания в жидкостных реактивных двигателях

Более сложные явления термической генерации звука при автоколебаниях имеют место при вибрационном горении. К числу примеров вибрационного горения*), где возбуждение колебаний обуславливается акустическим механизмом обратной связи, можно отнести давно известное явление, называемое поющим пламенем. Это явление, часто используемое как эффектный лекционный эксперимент, состоит в том, что если внутри открытой с обоих концов вертикально расположенной трубы на расстоянии приблизительно четверти длины трубы от нижнего конца поместить газовую горелку, то при определенных условиях возникают акустические колебания и труба начинает интенсивно звучать.

Это явление имеет много общего с рассмотренным в предыдущем параграфе явлением Рийке. В отличие от трубы Рийке, где теплоподводом, компенсирующим акустические потери, служит нагретая неподвижная сетка, здесь акустические колебания столба воздуха в трубе поддерживает колеблющееся пламя.

*) Обширная библиография по вибрационному горению содержится в [27] и [28].

Теория поющего пламени разрабатывалась в [29] и [30]. Явление поющего пламени, вообще говоря, более сложно, чем звучание трубы Рийке. В нем, наряду с выполнением критерия Рэля, существенную роль играют такие факторы, как скорость подачи топлива по трубке, которая находится внутри основной трубы и заканчивается диффузионным пламенем, имеющим определенное протяжение, длина этой подводящей трубки, характер резервуара, из которого берет начало эта трубка, и т. д.

Если в трубе имеется медленное течение горючей смеси, то при определенных положениях пламени по длине трубы, там, где колебательная составляющая скорости тепловыделения совпадает по фазе с колебательной составляющей давления, т. е. выполняется критерий Рэля, возникают автоколебания. Теория этого явления достаточно подробно дана в [7, 31, 32]. В [32] и [33] описываются эксперименты, результаты которых находятся в удовлетворительном согласии с теорией.

Более сложным оказывается случай вибрационного горения в трубе, закрытой с одного конца и заполненной неподвижной горючей смесью. Опыт показывает [34], что если поджечь смесь с открытого конца трубы, фронт пламени будет медленно распространяться к закрытому концу трубы; через небольшой промежуток времени возникают акустические колебания с частотами, меняющимися скачками; эти частоты близки к собственным частотам колебаний газового столба в трубе.

В [35, 36, 37] разработана теория этого явления на основе дальнейшего развития работы Ландау [10] о неустойчивости плоского фронта пламени. В этих работах сделана попытка учесть влияние кривизны фронта пламени (см. также [38]). Там же излагаются результаты экспериментальной проверки. Установлено, что неустойчивость фронта пламени при определенных условиях приводит к ячеистой структуре фронта. Ячейки на фронте пламени имеют более или менее близкие размеры. Оказывается, что если на такой фронт пламени падает звуковая волна, то существенно изменяется его поверхность и это вызывает изменение эффективной скорости сгорания горючей смеси. В результате снова генерируется определенное количество акустической энергии и таким образом возникает акусти-

ческий механизм обратной связи, если только выполнены соответствующие фазовые и амплитудные соотношения. Физический механизм воздействия акустических колебаний на фронт пламени состоит, по-видимому, в действии поля ускорения в волне.

Рассмотрим теперь еще один пример вибрационного горения, в котором обратная связь вызывается акустическим механизмом, — так называемую высокочастотную неустойчивость или высокочастотное вибрационное горение в ЖРД.

Схема ЖРД показана на рис. 113. Двигатель состоит из цилиндрической трубы, представляющей собой камеру сгорания. Левая (закрытая) часть трубы, называемая головкой, содержит трубопровод Γ , заканчивающийся форсунками, подающими и распыляющими горючее (например, спирт), и трубопровод O для подачи окислителя (например, жидкого кислорода).

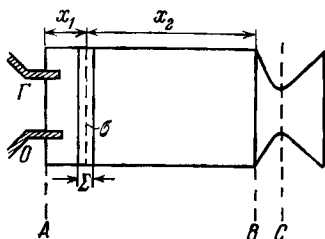


Рис. 113. Упрощенная схема ЖРД.

Для однокомпонентных топлив имеется только один трубопровод. Правая часть трубы заканчивается соплом (обычно соплом Лавала).

Вибрационное горение в ЖРД принято разделять на низкочастотное, когда автоколебания в трубопроводах и камере происходят с частотой в несколько десятков герц и вызываются различными неакустическими причинами, и высокочастотные автоколебания в камере сгорания, в основе которых лежит акустический механизм обратной связи. Высокочастотные автоколебания происходят на одной из собственных частот колебаний трубы — на основной частоте или гармониках. Вибрационному горению в ЖРД посвящена обширная литература, в том числе известная монография Крокко и Чжена [39]. Мы, однако, не будем заниматься здесь этим вопросом подробно и наша задача будет состоять лишь в том, чтобы показать на этом примере особенности автоколебаний при вибрационном горении и применение основ теории термической генерации звука, кратко изложенных в §§ 2, 3, 4 этой главы.

Дальнейшее изложение этого параграфа следует работам [39] и [7].

В основу теории вибрационного горения в ЖРД положены три основных предположения. Поскольку количественное описание превращения топлива в сгоревшие газы, требующее знания всех промежуточных физико-химических процессов, в настоящее время невозможно, а целесообразность такого описания, вообще говоря, сомнительна, первое основное предположение состоит в замене быстрого (но все же происходящего с некоторой конечной скоростью) химического превращения скачкообразным процессом с определенным запаздыванием воспламенения во времени и в пространстве. Время запаздывания воспламенения — это время между моментом впрыска топлива и его воспламенением. Пространственное запаздывание однозначно связано с временным запаздыванием, если только векторы скоростей частиц топлива в течение времени запаздывания известны.

Возникновение колебаний в значительной степени определяется отношением периода запаздывания к периоду акустических колебаний.

Другое важное предположение: считается, что процесс горения находится в зависимости от давления и что давление есть основной фактор, действующий на величину скорости горения; это предположение оправдывается экспериментально.

Наконец, третье предположение: в случае горения жидкого топлива можно считать, что частицы топлива до сгорания имеют ничтожный объем по сравнению со всем газом, содержащимся в камере сгорания, и не оказывают существенного влияния на свойства газов в камере. Таким образом, камеру сгорания можно рассматривать как объем, наполненный только сгоревшими газами; капли горючего, движущиеся в камере, не изменяют свойств газов в камере.

Эти три предположения дают возможность не только качественно объяснить возникновение и поддержание высокочастотного горения, но и количественно сформулировать условия в зоне горения. Качественное объяснение возникновения и поддержания вибрационного горения состоит в следующем.

Пусть τ — время запаздывания воспламенения при сгорании топлива в каком-либо определенном месте камеры; это время можно считать приблизительно одинаковым для всех частиц топлива; T — период колебаний давления p , вызванных теми или иными причинами. Согласно второму предположению, высказанному выше, колебания p влекут за собой колебания скорости горения с той же частотой. При увеличении τ процесс горения будет растягиваться во времени, при уменьшении τ — сжиматься; таким образом, скорость горения будет максимальна при наибольшей скорости уменьшения τ и минимальной при наибольшей скорости возрастания τ .

Будем считать, что скорость впрыска постоянна и не зависит от давления, т. е. что постоянная часть τ не влияет на скорость горения. На рис. 114 приведен характер изменения во времени в ка-

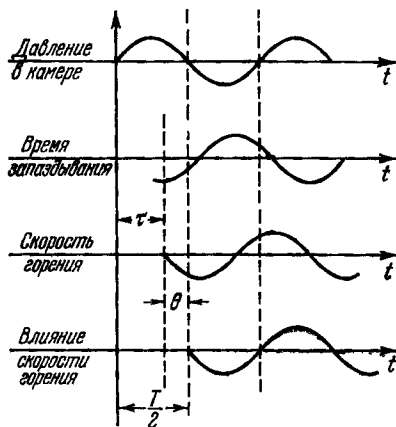


Рис 114. Колебания различных параметров в камере при изменяющемся времени запаздывания; τ — время запаздывания горения, θ — время релаксации камеры.

ком-либо месте камеры давления p , времени запаздывания τ , скорости горения и влияния скорости горения на изменение p . По оси ординат отложены амплитуда изменения p (верхняя и нижняя кривые), амплитуда изменения τ и амплитуда изменения скорости горения (соответственно вторая и третья кривые сверху). Из этого рисунка видно, что если $\tau + \theta = T/2$, где θ — время релаксации камеры, то влияние давления на скорость горения будет наибольшим; создаются условия для возбуждения автоколебаний. Такое построение приводит к заключению, что автоколебания будут возбуждаться, когда время запаздывания τ составляет нечетное число полупериодов одного из собственных колебаний системы.

В проведенном качественном рассмотрении предполагалось, что горение сосредоточено в плоскости. В действительности, благодаря неодинаковому времени запаздывания для различных частиц топлива, имеет место распределенное горение. Наиболее вероятное возбуждение высокочастотной неустойчивости будет в том случае, когда горение сосредоточено вблизи пучностей давления (критерий Рэлея); при большом разбросе значений места и времени сгорания для отдельных частиц топлива увеличивается устойчивость процесса горения.

Вообще говоря, имеются и другие механизмы возбуждения неустойчивого горения, например вихри в потоке, флуктуация потока в форсунках и при распыле, особенности химической кинетики и т. д. Однако все это — явления, пока еще недостаточно изученные по сравнению с эффектом влияния запаздывания. Следует отметить, что при высоких частотах играет роль также истечения газов из сопла, возникают потери и для возбуждения автоколебаний необходимо поступление большего количества энергии. Кроме продольных колебаний в цилиндрических камерах, вообще говоря, могут возбуждаться радиальные колебания и сложные сочетания продольных и поперечных колебаний.

Перейдем к количественной формулировке условий на теплоподводе, который будем считать сечением в камере сгорания, где капли горючего мгновенно сгорают; таким образом, будем рассматривать сосредоточенное горение.

Задача состоит в определении количественной связи между временем запаздывания воспламенения и физическими характеристиками процесса горения. Можно считать, что полное время запаздывания воспламенения τ относительно времени впрыска горючего состоит из неизменяющейся части τ_0 и изменяющейся части τ_u :

$$\tau = \tau_0 + \tau_u. \quad (12.60)$$

Можно считать далее, что τ_u зависит только от давления p в камере сгорания. Пусть, таким образом,

$$\tau_u p^n = \text{const}; \quad (12.61)$$

поскольку с увеличением давления τ_u уменьшается, то $n > 0$. Если в камере сгорания по каким-либо причинам

возникли колебания p , то можно положить, что

$$\int_{t-\tau_u}^t p^n(t') dt' = \text{const} \quad (12.62)$$

(при $p = \text{const}$ отсюда следует (12.61)). Здесь интеграл берется вдоль траектории данной частицы горючего от момента $t - \tau_u$ начала изменения скорости горения под действием p до момента сгорания при $t' = t$.

Положим, что

$$p = \bar{p} + p', \quad \tau_u = \bar{\tau}_u + \tau', \quad (12.63)$$

где \bar{p} и $\bar{\tau}_u$ соответствуют величинам для установившегося состояния; p' и τ' рассматриваем как малые возмущения и $p' \ll p$, $\tau' \ll \tau_u$. Вообще говоря, процесс сгорания начинается после того, как интеграл (12.62) достигает некоторой определенной величины A . Принимая во внимание (12.63), имеем:

$$\int_{t-\tau_u}^t p^n(t') dt' = \int_{t-\bar{\tau}_u}^t \bar{p}^n(t') dt' = A. \quad (12.64)$$

Здесь второй интеграл соответствует установившемуся состоянию. Левый интеграл можно представить в виде

$$\int_{t-\bar{\tau}_u}^t p^n(t') dt' + \int_{t-\tau_u}^{t-\bar{\tau}_u} p^n(t') dt' \simeq \int_{t-\bar{\tau}_u}^t p^n(t') dt' + \tau' \bar{p}^n(t - \bar{\tau}_u). \quad (12.65)$$

Из (12.64) и (12.65) имеем:

$$\tau' = \frac{1}{\bar{p}^n(t - \bar{\tau}_u)} \int_{t-\bar{\tau}_u}^t [\bar{p}^n(t') - p^n(t')] dt'. \quad (12.66)$$

Поскольку $p' \ll p$, то

$$p^n(t') \simeq \bar{p}^n \left(1 + n \frac{p'}{\bar{p}} \right), \quad (12.67)$$

$$\tau' = - \frac{n}{\bar{p}^n(t - \bar{\tau}_u)} \int_{t-\bar{\tau}_u}^t p'(t') \bar{p}^{n-1} dt'. \quad (12.68)$$

При установившемся состоянии

$$p = \text{const} = \bar{p}(t - \bar{\tau}_u), \quad (12.69)$$

$$\tau' = \tau_u - \bar{\tau}_u = -\frac{n}{\bar{p}} \int_{t - \bar{\tau}_u}^t p'(t) dt, \quad (12.70)$$

откуда

$$\frac{d\tau_u}{dt} = -n \frac{p'(t) - p'(t - \bar{\tau}_u)}{\bar{p}} = -n [\tilde{p} - \tilde{p}(\tau_u)], \quad (12.71)$$

где

$$\tilde{p} = \frac{p'}{\bar{p}} \quad \text{и} \quad \tilde{p}(\tau_u) = \frac{p'(t - \bar{\tau}_u)}{\bar{p}}.$$

Допустим теперь, что топливо подается в камеру сгорания под большим давлением и секундный массовый расход топлива (скорость впрыска) $m_{\text{вп}}$ постоянен. Масса сгорающего в единицу времени топлива (скорость сгорания) пусть будет $m_{\text{сг}}$. Найдем, как связано возмущение скорости сгорания $\tilde{m} = \frac{m_{\text{сг}} - m_{\text{вп}}}{m_{\text{вп}}}$ с периодом индукции τ_u .

Для этого рассмотрим данную выделенную частицу топлива. За интервал времени между t и $t + dt$ впрыснутое количество топлива будет $m_{\text{вп}} dt$. Это количество топлива сгорает в интервале времени между $t + \tau$ и $t + \tau + dt + d\tau$ (меняются t , и τ), т. е. в интервале $dt + d\tau$.

Средняя (неизвестная) скорость этого сгорания $m_{\text{сг}}(t + \tau)$; ее можно просто найти, если считать, что сгорание происходит полностью. Тогда

$$m_{\text{вп}}(t) dt = m_{\text{сг}}(t + \tau) (dt + d\tau). \quad (12.72)$$

Возьмем теперь начало отсчета времени за момент сгорания. Тогда

$$t_{\text{сг}} = t_{\text{вп}} + \tau, \quad (12.73)$$

$$m_{\text{сг}}(t) = m_{\text{вп}}(t - \tau) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right). \quad (12.74)$$

Если считать, что состояние установившееся, то

$$m_{\text{сг}}(t) = m_{\text{вп}}(t) \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right), \quad (12.75)$$

$$\tilde{m} = \frac{m_{\text{сг}} - m_{\text{вп}}}{m_{\text{вп}}} = -\frac{d\tau_u}{dt}. \quad (12.76)$$

Как видно, хотя скорость подачи топлива постоянна, сгорание (превращение топлива в газ) имеет изменяющуюся скорость. Пользуясь (12.71), имеем:

$$\tilde{m} = -n[\tilde{p} - \tilde{p}(\tau_u)]. \quad (12.77)$$

Таково выражение, которое дает связь между возмущением теплоподвода и параметрами, характеризующими свойства сосредоточенного горения, — \tilde{p} , τ_u и n .

Теперь мы располагаем данными для того, чтобы сформулировать условия на поверхности теплоподвода σ . Уравнение сохранения массы запишется в виде (12.34)

$$\frac{1}{M} \tilde{v}_2 + \tilde{p}_2 = \frac{1}{M} \tilde{v}_1 + \tilde{m},$$

где m мы нашли; эта величина определяется соотношением (12.77). Если сделать упрощающие предположения, состоящие в том, что (см. § 3) продукты сгорания имеют одинаковую температуру по обе стороны фронта горения σ , то уравнения сохранения импульса и энергии переходят в соотношения $\tilde{p}_1 \simeq \tilde{p}_2$, $\tilde{s}_1 \simeq \tilde{s}_2$. В рассматриваемом случае на фронте горения скачком меняется только средняя осевая скорость, тогда как такие параметры, как T , p и ρ , меняются незначительно. В случае же обычного фронта пламени в движущемся газе тепло передается потоку холодного газа, пересекающего фронт пламени, и скачком меняются средняя осевая скорость потока v , ρ и T .

Мы нашли условия на теплоподводе; для того чтобы идти дальше и определить область возбуждения автоколебаний (вибрационного горения) в ЖРД и найти частоту этих колебаний, следует, как об этом говорилось в §§ 2 и 4, воспользоваться уравнениями, описывающими акустические колебания в трубе (в нашем случае — трубе, закрытой с обоих концов; см. ниже), и обеспечить выполнение граничных условий на поверхности теплоподвода.

Как следует из решения исходных уравнений (§ 2), все параметры потока газа в трубе изменяются экспоненциально. Принимая во внимание (12.12), можно записать, что в (12.77)

$$\tilde{p} - \tilde{p}(\tau_u) = \tilde{p}(1 - e^{-\beta\tau_u}), \quad (12.78)$$

где, при наличии установившихся колебаний, $\beta \simeq i\omega$ (граница устойчивости). Отсюда на основании (12.77)

$$\tilde{m} = n(1 - e^{-\beta\tau_u})\tilde{p}. \quad (12.79)$$

Воспользуемся теперь граничными условиями. Рассмотрим наиболее простой случай, когда горение происходит в непосредственной близости от головки камеры A (см. рис. 113) и поэтому, если взять начало отсчета на поверхности фронта горения σ , у головки, то при $x = x_1 = 0$ $\tilde{v}_1 = 0$. Пусть на другом конце камеры расположено сопло Лавала. В критическом сечении этого сопла C скорость течения всегда равна скорости звука. Если пренебречь возможными изменениями скорости звука, то в этом сечении скорость потока газа постоянна и возмущения этой скорости отсутствуют. При малом расстоянии BC можно считать, что и в сечении B эти возмущения равны нулю. Таким образом, граничные условия на правом конце камеры при $x = x_2 = 1$ состоят в том, что $\tilde{v}_2 = 0$, и рассматриваемый случай соответствует колебаниям в трубе, закрытой с обоих концов. Согласно (12.34) и (12.77)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_{20} &= \tilde{v}_{10} + M[n(1 - e^{-\beta\tau_u}) - 1]\tilde{p}_{10}, \\ \tilde{p}_{20} &= \tilde{p}_{10}, \end{aligned} \right\} \quad (12.80)$$

где индекс «0» соответствует $x = 0$. Используя первое граничное условие, имеем:

$$\tilde{v}_{20} = M[n(1 - e^{-\beta\tau_u}) - 1]\tilde{p}_{10}. \quad (12.81)$$

Теперь следует воспользоваться вторым граничным условием, $\tilde{v}_2 = 0$ при $x = x_2 = 1$. При выполнении этого условия имеем из (12.12):

$$\tilde{v}_{20}\Phi_1(1) + \tilde{p}_{20}\Phi_2(1) = 0. \quad (12.82)$$

Подставляя сюда значения \tilde{v}_{20} и \tilde{p}_{20} из (12.80), получаем характеристическое уравнение

$$ne^{-3\tilde{\tau}u} = n + \frac{1}{M} \frac{(1 - e^{-\alpha})}{(1 + e^{\alpha})} - 1 = n + a + ib, \quad (12.83)$$

где

$$\alpha = \frac{2\omega}{1 - M^2}.$$

При $\beta = i\omega$ величины a и b имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} a &= -1, \\ b &= -\frac{\sin \alpha}{M(1 + \cos \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (12.84)$$

Сравнивая действительные и мнимые части уравнения (12.83), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega \tilde{\tau}_u &= -\frac{b}{n}, \\ \cos \omega \tilde{\tau}_u &= 1 + \frac{a}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (12.85)$$

Из условия возбуждения автоколебаний (см. § 5), когда изменение потока акустической энергии, возникшей за счет увеличения тепла в зоне теплоподвода, больше потерь энергии при колебаниях, можно показать, что наименьшее значение n , при котором еще возможно возбуждение автоколебаний, есть величина, приблизительно равная 0,5.

В § 2 отмечалось, что при отсутствии теплоподвода как для трубы, открытой с обоих концов, так и для трубы, с обоих концов закрытой, частоты возбуждения колебаний определяются формулой (12.15):

$$\omega = (1 - M^2)n_1\pi, \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots$$

В нашем случае, при условии $n = 0,5$ и $\beta = i\omega$, граничное условие (12.80) приводит к тому, что должно выполняться еще одно условие, а именно должно быть также

$$\omega \tilde{\tau}_u = s\pi, \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (12.86)$$

Это условие следует также из (12.85).

Таким образом, при наличии фронта пламени у головки камеры сгорания собственные частоты колебаний возбуждаются не при любых, а лишь при некоторых определенных n и $\tilde{\tau}_u$; с увеличением n все больший диапазон изменения $\tilde{\tau}$ попадает в область возбуждения автоколебаний.

Здесь нами кратко был рассмотрен самый простой случай — высокочастотная неустойчивость при сосредоточенном горении, происходящем в непосредственной близости от головки камеры. Но и этот случай рассматривался в линейной трактовке, поскольку исходные уравнения линейари-

зировались. Важность дальнейшей разработки теории с учетом нелинейностей, присущих явлению вибрационного горения, достаточно осознана, и на этом пути можно ожидать существенных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trilling L. J., On thermally induced sound fields. *J. Acoust. Soc. Am.* 27, 425 (1955).
2. Bragg S. L., Combustion noise. *J. Inst. Fuel* 36, 12 (1963).
3. White R. M., Elastic wave generation by electron bombardment or electromagnetic wave absorption. *J. Appl. Phys.* 34, 2123 (1963).
4. White R. M., Generation of elastic waves by transient surface heating. *J. Appl. Phys.* 34, 3559 (1963).
5. Carrier G. F., The mechanics of the Rijke tube. *Quart. Appl. Mathematics* 12, 383 (1955).
6. Merk H. J., Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. On mechanism of Rijke tube phenomenon. *Appl. Scient. Res. A* 6, № 5/6, 402 (1957).
7. Раушенбах Б. В., Вибрационное горение. Гостехиздат, 1961.
8. Ржевкин С. Н., Курс лекций по теории звука. Изд. МГУ, 1960.
9. Levine N., Schwinger J., On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Phys. Rev.* 73, 383 (1948).
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
11. Боа Те-чу, Об образовании волн давления на поверхности плоского фронта пламени. «Вопросы горения и детонационных волн. Четвертый симпозиум (международный) по вопросам горения и детонационных волн», стр. 411. Оборонгиз, 1958.
12. Раушенбах Б. В., Вибрационные режимы горения. Сб. «Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушных реактивных двигателей», стр. 348. Изд. «Машиностроение», 1964.
13. Бам-Зеликович Г. М., О колебаниях при горении газа в трубах. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика» 9, вып. 2, стр. 184. Оборонгиз, 1952.
14. Rijke P. L., Notiz über eine neue Art die in einer an beiden enden offenen röhre enthaltende Luft in schwingungen zu versetzen. *Ann. Phys.* 107, 339 (1859).
15. Riess P., Anblasen offener Röhren durch eine Flamme. *Pogg. Ann.* 108, 653 (1859).
16. Riess P., Anhaltendes tönen einer Röhre durch eine Flamme. *Pogg. Ann.* 109, 145 (1860).
17. Рэлей, Теория звука, т. II, стр. 222. Гостехиздат, 1955.
18. Lehmann K. O., Über die theorie der netztöne (thermisch erregte schallschwingungen). *Ann. Phys.* 29, 527 (1937).
19. Neuringer J. L., Hudson G. E., Investigation of sound vibrations in a tube containing a heat source. *J. Acoust. Soc. Am.* 24, 667 (1952).

20. Mawardi O. K., Aero-thermoacoustics (the generation of sound by turbulence and by heat processes). Reports on Progress in Physics, XIX, 156 (1956).
21. Lighthill M. J., The response of laminaar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. A 224, 1 (1954).
22. Попов С. Г., Измерение воздушных потоков. Гостехиздат, 1947.
23. Maling G. C., Simplified analysis of the Rijke phenomenon. J. Acoust. Soc. Am. 35, 1058 (1963).
24. Ingard U., Acoustics. Handbuch of Physics. McGraw-Hill Co., New York, 1958.
25. Friedlander M. M., Smith T. J. B., Powell A., Experiments on the Rijke-tube phenomenon. J. Acoust. Soc. Am. 36, 1737 (1964).
26. Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.
27. Рогинский О. Г., О вибрационном горении. (Обзор.) Акуст. ж. 7, вып. 2, 131—155 (1961).
28. Putnem A. A., Dennis W. R., Survey of orau-pipe oscillations in combustion systems. J. Acoust. Soc. Am. 28, 246 (1956).
29. Richardson E. G., The theory of the singing flame. Proc. Phys. Soc. 35, 47 (1922).
30. Неймарк Ю. И., Аронович Г. В., Об условиях самовозбуждения поющего пламени. ЖЭТФ 28, 567—578 (1955).
31. Раушенбах Б. В., О вибрациях при медленном распространении пламени в трубах. Ж. техн. физ. 23, 358—373 (1953).
32. Блэкшир П., Возбуждение стоячих волн при подводе тепла. «Вопросы горения и детонационных волн. Четвертый симпозиум (международный) по вопросам горения и детонационных волн», стр. 381. Оборонгиз, 1958.
33. Путнем А., Деннис В., Автоколебания при горении в трубе. Там же, стр. 392.
34. Coward H. W., Hartwell F. J., Georgenson E. H., The mechanism of flame movement. J. Chem. Soc., 1482 (1937).
35. Маркштейн Г., Явление неустойчивости фронта пламени. «Вопросы горения и детонационных волн. Четвертый симпозиум (международный) по вопросам горения и детонационных волн», стр. 41. Оборонгиз, 1958.
36. Маркштейн Г., Сомерс Л., Ячеистая структура и движение вибрирующих пламен в *n*-бутано-метановых смесях. Там же, стр. 369.
37. Markstein G. H., Squire W., On the stability of a plane flame front in oscillating flow. J. Acoust. Soc. Am. 27, 416 (1955).
38. Зельдович Я. Б., Теория горения и детонации. Изд. АН СССР, 1944.
39. Крокко Л., Чжен Сянь-и, Теория неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях. ИЛ, 1958.
40. Kotake S., Hatta K., On the noise of diffusion flames. Bull. ISME 8, № 30, 211 (1965).

Лев Константинович Зарембо
Владимир Александрович Красильников

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ АКУСТИКУ

Москва, 1966 г., 520 стр. с илл.
Редактор В. А. Григорова
Техн. редактор Л. Ю. Плакше
Корректор Т. С. Плетнева

Сдано в набор 3/II 1966 г.
Подписано к печати 14/VII 1966 г.
Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 16,25.
Услови. печ. л. 27,30. Уч.-изд. л. 27,10.
Тираж 5000 экз. Т-11009
Цена 1 р. 91 к. Зак. 656

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, Б 71, Ленинский проспект, 15
2 я типография издательства «Наука»,
Москва, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
18	1 стр.	имеет	имеем
99	11 стр.	v	v'
124	13 стр.	$e^{\pm 2}$	$e^{\mp 2}$
218	2 стр.	B	R
227	6 стр.	$\nabla \nabla A''$	$\nabla \nabla \overline{A''}$
227	14 стр.	$\nabla v_L''$	∇v_L
303	18 стр.	поперечных c_l	поперечных c_τ
324	11 стр.	r	r'
384	11 стр.	$q(t)$	$\dot{q}(t)$
448	11 стр.	$\sqrt{\overline{p^2}}$	$\sqrt{p^2}$
485	14 стр.	G	Q
515	12 стр.	m	\tilde{m}
515	17 стр.	$\tilde{p}_1 \simeq p_2, s_1 \simeq \tilde{s}_2$	$\tilde{p}_1 \simeq \tilde{p}_2, s_1 \simeq s_2$

Зарембо, Красильников