
Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

*Серия выпускается под общим руководством
редакционной коллегии журнала
«Успехи физических наук»*

СТАТИСТИЧЕСКАЯ НЕОБРАТИМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

530.1

3.36

УДК 53.01

Статистическая необратимость в нелинейных системах.
Г. М. Заславский. Издательство «Наука», Главная
редакция физико-математической литературы, 1970.

Предлагаемая монография посвящена анализу условий, при которых динамическую систему можно описывать статистическими методами без априорных предположений о наличии в системе случайных параметров. Этот вопрос тесно связан с проблемой обоснования статистической физики. Теоретические и экспериментальные результаты позволяют в настоящее время сделать некоторые общие заключения.

В работе приводится краткий обзор и анализ примеров, в которых стохастичность доказана, и развивается некоторый «физический» подход для выяснения условий перехода системы от регулярного или условно-периодического движения к перемешивающемуся. Примеры, в которых исследуется критерий стохастичности, относятся к различным областям физики: движение заряженных частиц в электромагнитных полях, нелинейные колебания, теория твердого тела, теория плазмы. Все они объединены единым методом рассмотрения.

Я. Г. Синаем написано дополнение, посвященное точным результатам о расцеплении временных корреляций в динамических системах.

Рисунков — 29, библиография — 56, назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Г л а в а I. Простейшие примеры	13
§ 1. Динамические системы с перемешиванием	13
§ 2. Дискретные модели с перемешиванием	18
А. Преобразование растяжения	18
Б. Ускорение Ферми	25
В. Столкновения абсолютно твердых шариков (идеальный газ)	30
§ 3. Нелинейный осциллятор во внешнем поле	33
Г л а в а II. Метод уравнения Лиувилля	40
§ 1. Вводные замечания	40
§ 2. Нелинейный осциллятор во внешнем поле (другой подход)	41
§ 3. Нелинейное волновое поле. Основные уравнения и постановка задачи	54
§ 4. Нелинейное волновое поле. Критерий статистического описания	62
Г л а в а III. Эргодический слой	72
§ 1. Вводные замечания	72
§ 2. Движение частицы в периодическом поле	72

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 3. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Постановка задачи	84
§ 4. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Периодические возмущения	91
§ 5. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Нарушение симметрии	96
§ 6. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета	107
Г л а в а IV. Критерий стохастичности	114
Замечания и проблемы	121
Дополнение. Я. Г. Синай. Несколько точных результатов об убывании корреляций	124
Литература	140

ВВЕДЕНИЕ

Переход от динамического (точного) к статистическому (вероятностному) описанию поведения системы чрезвычайно большого числа частиц составляет предмет так называемого обоснования статистики. Считается, что одна из сторон этой проблемы давно уже имеет чисто академический интерес и речь, как правило, идет о том, какие предположения и гипотезы (эргодическая гипотеза, предположение о хаотических фазах и т. п.) нужно вводить в дополнение к первым принципам механики для получения законов эволюции осредненных величин.

Другая сторона проблемы обоснования связана с анализом фазовых траекторий динамической системы и выяснением условий, при которых движение становится перемешивающимся. После работ Э. Хопфа, Н. С. Крылова и А. Н. Колмогорова это направление получило новое развитие в формально математических исследованиях Д. В. Аносова, В. А. Рохлина, Я. Г. Синая и др., приведших к построению строгих моделей динамических систем с перемешивающимся характером движения. Одновременно в работах Б. В. Чирикова развивались качественные «физические» методы.

Особый интерес представляет перемешивание в системах с небольшим числом степеней свободы, так как это приводит к возможности (если не к необходимости) описания таких систем с помощью вероятностных статистических законов. Обоснование статистического подхода в таких случаях очевидным образом имело бы далеко не академический интерес.

В последние годы возник ряд задач в различных физических приложениях, когда речь идет о перемешивающем-
ся характере движения и необходимости введения стохастического подхода в системах всего лишь с несколькими

§ 3. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Постановка задачи	84
§ 4. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Периодические возмущения	91
§ 5. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Нарушение симметрии	96
§ 6. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета	107
Г л а в а IV. Критерий стохастичности	114
Замечания и проблемы	121
Дополнение. Я. Г. Синай. Несколько точных результатов об убывании корреляций	124
Литература	140

ВВЕДЕНИЕ

Переход от динамического (точного) к статистическому (вероятностному) описанию поведения системы чрезвычайно большого числа частиц составляет предмет так называемого обоснования статистики. Считается, что одна из сторон этой проблемы давно уже имеет чисто академический интерес и речь, как правило, идет о том, какие предположения и гипотезы (эргодическая гипотеза, предположение о хаотических фазах и т. п.) нужно вводить в дополнение к первым принципам механики для получения законов эволюции осредненных величин.

Другая сторона проблемы обоснования связана с анализом фазовых траекторий динамической системы и выяснением условий, при которых движение становится перемешивающимся. После работ Э. Хопфа, Н. С. Крылова и А. Н. Колмогорова это направление получило новое развитие в формально математических исследованиях Д. В. Аносова, В. А. Рохлина, Я. Г. Синая и др., приведших к построению строгих моделей динамических систем с перемешивающимся характером движения. Одновременно в работах Б. В. Чирикова развивались качественные «физические» методы.

Особый интерес представляет перемешивание в системах с небольшим числом степеней свободы, так как это приводит к возможности (если не к необходимости) описания таких систем с помощью вероятностных статистических законов. Обоснование статистического подхода в таких случаях очевидным образом имело бы далеко не академический интерес.

В последние годы возник ряд задач в различных физических приложениях, когда речь идет о перемешивающемся характере движения и необходимости введения стохастического подхода в системах всего лишь с несколькими

степенями свободы (даже с двумя!). К этому кругу относятся, например, ряд важных задач о движении заряженных частиц и о силовых линиях магнитного поля в магнитных ловушках, о возникновении хаотичности в нелинейных волновых средах (т. е. о возникновении в них турбулентного движения) и т. п. Таким образом, выяснение условий, при которых возникает стохастическая необратимость, стало практически необходимым в теории движения частиц в ускорителях, в проблеме неустойчивости частиц плазмы, удерживаемой магнитным полем, и т. п.

Следует оговорить более точно, какое содержание вкладывается в слова о выяснении возможности статистического описания динамических систем. Прежде всего заметим, что при переходе к вероятностному описанию будет принято следующее единственное допущение: мы всегда будем иметь дело пусть со сколь угодно малым, но обязательно конечным, объемом ячейки фазового пространства. Будем называть это неточностью прибора (не имеющей ничего общего с квантовомеханическим принципом неопределенности). Использование такого допущения связано с трудностью введения понятия вероятности при исследовании поведения систем в течение конечного времени. Действительно, предположим, что частица описывает на фазовой плоскости конечного размера необычайно сложную траекторию, которую с хорошей точностью можно было бы описывать статистическими методами. Для конечного времени движения можно ввести понятие характерного размера ячейки фазового пространства, в которой частица побывает с вероятностью, близкой к единице. Ясно, что с очень большой точностью такая ячейка имеет минимальный размер, и для корректного определения понятия плотности вероятности необходимо ввести «размазку» (прибор) по области, большей среднего размера ячейки.

Проиллюстрируем потерю информации, возникающую от малой «размазки» на очень простом примере осциллятора с частотой $\omega(I)$ (I — действие). Зададим на фазовой плоскости (I, φ) начальное состояние в виде

$$\Phi_{t=0} = \Phi_0,$$

а I пусть будет задано с неточностью в интервале $(I_0 - \Delta I, I_0 + \Delta I)$. Тогда при

$$\omega(I) \neq \text{const}$$

фазовые траектории даже сколь угодно близких друг к другу точек I_1, I_2 через достаточное время

$$\tau \gtrsim \frac{1}{\frac{d\omega(I_0)}{dI} |I_1 - I_2|}$$

разойдутся (рис. 1) по фазе на величину порядка единицы. Рассматриваемую модель можно представить как совокупность большого числа (N) осцилляторов с частотами

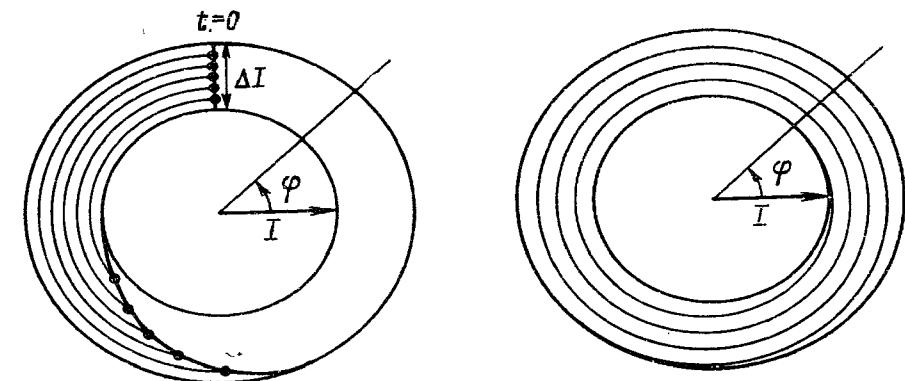


Рис. 1.

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ в интервале $[\omega(I_0 - \Delta I), \omega(I_0 + \Delta I)]$, не взаимодействующих друг с другом. Изложенные соображения показывают, что через некоторое время фазы осцилляторов будут распределены достаточно равномерно, что приводит к простым правилам вычисления усредненных по интервалу ΔI величин. Время возврата (цикла Пуанкаре) для такой системы равно [52]

$$T = \frac{2\pi}{\omega N (\Delta\varphi)^{N-1}},$$

где ω — средняя частота:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_N}{N},$$

а $\Delta\phi$ — точность по фазе, с которой мы хотим определять возврат к начальному состоянию.

Другой пример, аналогичный рассмотренному, связан с газом не взаимодействующих молекул. Пусть распределение молекул по скоростям возмущено в начальный момент времени $t = 0$ добавкой

$$f_1 = f_0(v) e^{ikr},$$

где r, v — соответственно координата и скорость молекул. Тогда для $t > 0$

$$f_1 = f_0(v) e^{i(kr+kvt)}$$

и возмущение плотности

$$n_1(r) = e^{ikr} \int f_0(v) e^{ikv t} dv$$

быстро затухает при $t \rightarrow \infty$. Роль прибора в этом случае играет «размазка» по скоростям, задаваемая функцией $f_0(v)$. В приведенном примере отчетливо видно, что «размазка» должна быть постоянно действующим фактором во времени.

Теперь обратим внимание на то, что минимальное время τ_{\min} установления равномерного распределения фаз в примере с осцилляторами равно

$$\tau_{\min} \sim \frac{1}{\frac{d\omega(I_0)}{dI} \Delta I}$$

и может быть чрезвычайно большим, если неточность ΔI достаточно мала. Это означает, что для процессов с характерными временами, меньшими чем τ_{\min} , влиянием «размазки» на решение точных уравнений движения можно пренебречь.

Нашей основной задачей будет исследование условий возникновения движения с перемешиванием (которое будет называться также условием стохастичности движения), причем в качестве дополнительного предположения для перехода к статистическому описанию (при выполнении критерия перемешивания) мы будем подразумевать (не произнося вслух!) существование символического прибора (со сколь угодно малой, но конечной неточностью). Единственным последствием от «размазки» будет то, что при перемешивающемся характере движения мы будем описывать статистическими методами движение не отдельной точки в фазовом пространстве, а некоторой сколько угодно малой (но конечной) области.

Весь материал разбит на четыре главы.

В первой главе рассматривается несколько конкретных примеров, в которых удается тем или иным способом выяснить условие стохастичности и наглядно проиллюстрировать его. Благодаря этому задачи, решаемые в первой главе, носят эвристический характер и с их помощью можно сформулировать некоторые общие требования, приводящие к возникновению необратимости в динамических системах.

Во второй главе развивается более общий (и более громоздкий) подход, основанный на использовании уравнения Лиувилля. Это позволяет глубже проанализировать процесс стохастизации и установить связь между условиями стохастичности и формализмом получения кинетических уравнений.

Третья глава связана с исследованием более тонких и более универсальных механизмов возникновения стохастичности.

Автор не ставил своей целью давать обзор чисто математических исследований по выяснению условий перемешивания. Однако благодаря любезности Я. Г. Синяя оказалось возможным включить в работу его специальную лекцию, посвященную критерию стохастичности и подвергнутую лишь легкой «физической» обработке. Содержанием этой лекции является глава четвертая.

Кроме этого, в работу включено дополнение Я. Г. Синяя, посвященное исследованию эргодических и перемешивающихся свойств динамических систем с помощью

введения марковских последовательностей. Это дополнение позволяет глубже понять природу перемешивания, связанную с существованием самоусредняющихся величин в системе.

Автор выражает искреннюю благодарность Р. З. Сагдееву и Я. Г. Синаю за многочисленные дискуссии и большую помощь при работе над рукописью и, особенно, над первой главой. Я обязан многим М. А. Леоновичу и Б. В. Чирикову, прочитавшим рукопись и сделавшим ценные замечания, а также Ф. М. Израйлеву, исправившему ряд неточностей.

ГЛАВА I

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

§ 1. Динамические системы с перемешиванием

При исследовании систем с большим числом степеней свободы роль траектории отдельной частицы становится пренебрежимо малой для описания изменения системы в целом. Это находит свое отражение в статистическом подходе к описанию системы. Законы движения записываются для усредненных по траекториям отдельных частиц величин (макропараметров), не зависящих от детальных свойств системы.

Существуют, однако, примеры систем с небольшим числом степеней свободы, в которых статистические свойства проявляются во времени. Статистический ансамбль в этих случаях представляет собой состояние системы в различные моменты времени, а образование макропараметров происходит в результате усреднения по некоторому характерному времени. В дальнейшем мы будем называть такие системы стохастическими. Уже довольно давно выработались математические понятия и методы для исследования стохастических систем.

Напомним основные понятия эргодичности и перемешивания (см., например, [1]).

Движение системы называется эргодическим, если справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(q_{t'}) dt' = \int f(q) dq \equiv \langle f \rangle, \quad (1)$$

где q_t — фазовая переменная системы в момент времени t ; f — произвольная интегрируемая функция. Определение

введения марковских последовательностей. Это дополнение позволяет глубже понять природу перемешивания, связанную с существованием самоусредняющихся величин в системе.

Автор выражает искреннюю благодарность Р. З. Сагдееву и Я. Г. Синаю за многочисленные дискуссии и большую помощь при работе над рукописью и, особенно, над первой главой. Я обязан многим М. А. Леоновичу и Б. В. Чирикову, прочитавшим рукопись и сделавшим ценные замечания, а также Ф. М. Израйлеву, исправившему ряд неточностей.

ГЛАВА I ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

§ 1. Динамические системы с перемешиванием

При исследовании систем с большим числом степеней свободы роль траектории отдельной частицы становится пренебрежимо малой для описания изменения системы в целом. Это находит свое отражение в статистическом подходе к описанию системы. Законы движения записываются для усредненных по траекториям отдельных частиц величин (макропараметров), не зависящих от детальных свойств системы.

Существуют, однако, примеры систем с небольшим числом степеней свободы, в которых статистические свойства проявляются во времени. Статистический ансамбль в этих случаях представляет собой состояние системы в различные моменты времени, а образование макропараметров происходит в результате усреднения по некоторому характерному времени. В дальнейшем мы будем называть такие системы стохастическими. Уже довольно давно выработались математические понятия и методы для исследования стохастических систем.

Напомним основные понятия эргодичности и перемешивания (см., например, [1]).

Движение системы называется эргодическим, если справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(q_{t'}) dt' = \int f(q) dq \equiv \langle f \rangle, \quad (1)$$

где q_t — фазовая переменная системы в момент времени t ; f — произвольная интегрируемая функция. Определение

ние (1) обычно называют равенством временных и фазовых средних. Левую часть (1) можно переписать с помощью оператора временного преобразования $\hat{T}(t - t_0)$:

$$q(t) = \tilde{T}(t - t_0) q(t_0), \quad (2)$$

а именно:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f [\hat{T}(t' - t_0) q(t_0)] dt' = \langle f \rangle. \quad (1')$$

Иногда бывает удобно вместо непрерывного времени t ввести шкалу дискретного времени $\{t_i\}$. Определяя преобразование

$$q(t_n) = \hat{T}_n q_0; \quad q_0 \equiv q(t_0) \quad (2')$$

можно переписать (1) в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\hat{T}_i q_0) = \langle f \rangle. \quad (1'')$$

Перейдем к понятию перемешивания. Обычно подчеркивают, что движение механических систем обратимо во времени. Однако и в механических системах есть известная направленность движения, если следить за поведением не отдельной траектории, а целой ячейки фазового пространства. Именно, оказывается, что если взять вначале ячейку фазового пространства достаточно правильной формы, то с течением времени эта ячейка принимает чрезвычайно неправильную форму типа амебы, заползающей своими щупальцами во все уголки фазового пространства (рис. 2).

Таким образом, направленность движения состоит в том, что области правильной формы с течением времени переходят в области неправильной, очень искривленной формы *). В дальнейшем мы покажем на конкретных при-

*) Заметим, что эта направленность не означает необратимости уравнений движения — обстоятельство, отмеченное еще Н. С. Крыловым. Для получения необратимости необходимо ввести дополнительно малую размазку в таком смысле, как об этом говорилось во введении.

мерах, каким именно образом происходит переход в движении динамической системы к виду, изображенному на рис. 2. Способность фазовой ячейки растекаться в фазовом пространстве столь сложным образом принято называть перемешиванием.

Формально свойство перемешивания движения системы может быть выражено следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(\hat{T}_n q) g(q) \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle, \quad (3)$$

где f и g — произвольные интегрируемые функции. Написанное равенство хорошо известно в физике как условие расцепления временных корреляций.

Условие перемешивающегося движения системы (3) является более сильным, чем условие эргодичности (1''), и из выполнения его автоматически следует равенство фазовых и временных средних.

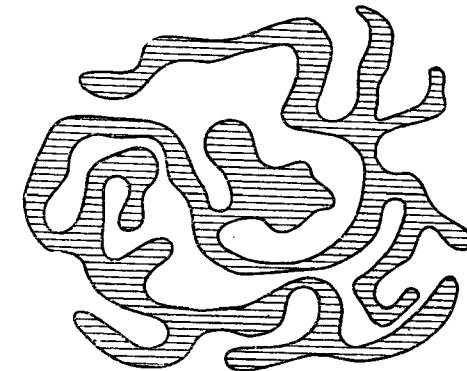


FIG. 2.

Довольно давно на некоторых моделях было подмечено, что свойство перемешивания связано с неустойчивостью движения системы [2—4]. Весьма четко эту идею выразил Н. С. Крылов [4] и применил ее к некоторым конкретным системам (см. ниже). Так как ячейка фазового пространства любых малых размеров должна в случае перемешивания расплываться по всему фазовому пространству, то это означает, что точки, которые в начальный момент были близки между собой, с течением времени удаляются друг от друга и начинают двигаться независимо. Поэтому свойство перемешивания естественно ожидать у неустойчивых систем, т. е. у таких, у которых близкие вначале траектории с течением времени быстро удаляются друг от друга. Иными словами, сколь угодно малые изменения начальных условий приводят к сколь угодно сильному

уходу фазовой траектории системы от своего невозмущенного значения. Если фазовое пространство системы является конечным, то фазовые траектории не могут разойтись из-за неустойчивости более чем на характерный размер пространства и начинают запутываться. В итоге возникает перемешивание такого типа, как на рис. 2.

Н. С. Крылов показал также, что статистическая система с конечным временем релаксации обязательно осуществляет движение с перемешиванием. Если отвлечься

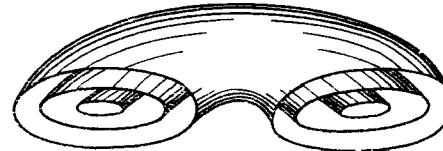


Рис. 3.

от некоторых дополнительных условий весьма формально-характера, то перемешивания, оказывается, достаточно для возможности статистического описания заданной динамической системы*).

Наиболее существенным для дальнейшего является возможность выяснить, является ли движение заданной динамической системы перемешивающимся. В соответствии со сказанным выше ответ на поставленный вопрос определяет возможность перехода от динамического описания системы к статистическому.

Полезно также подойти к вопросу об условиях перемешивания с точки зрения общей теории устойчивости динамических систем.

Предположим для простоты, что мы рассматриваем консервативную систему с числом степеней свободы $n = 2$, т. е. описываемую двумя обобщенными координатами (фазами) и двумя обобщенными импульсами (действиями). Такая система характеризуется двумя частотами и траектории ее в пространстве постоянной энергии наматываются

*.) Мы не будем здесь обсуждать парадоксы, связанные с возникновением необратимости. Подробное рассмотрение их имеется, например, в книге М. Каца [5].

ся на тор (рис. 3), описывая условно-периодическое движение. Пространство интегралов движения имеет размерность 2, что определяет инвариантность торов, каждый из которых соответствует заданным значениям интегралов движения. Существенным является то, что торы, соответствующие различным энергиям, вложены друг в друга и не пересекаются.

Предположим теперь, что на рассматриваемую систему действует возмущение. Вопрос об устойчивости можно сформулировать теперь так: сохраняются ли при наличии возмущения инвариантные торы?

Ответ на этот вопрос был дан совсем недавно работами Колмогорова [15], Арнольда [16], Мозера [17], и суть его заключается кратко в следующем. При достаточно малых возмущениях часть торов разрушается, а часть сохраняется, причем мера инвариантных торов стремится к единице при возмущении, стремящемся к нулю, а мера разрушенных торов стремится к нулю. Инвариантные торы, соответствующие иррациональному отношению частот, достаточно медленно приближающемуся рациональными числами, слегка деформируются под влиянием возмущения и соответствуют устойчивым решениям. Разрушающиеся торы соответствуют рациональному отношению частот.

Теперь становится ясным, что вопрос об условиях перемешивающегося характера движения тесно связан с условиями очень сильной неустойчивости траекторий, приводящей к разрушению почти всех инвариантных торов.

Необходимо заметить, что теорема устойчивости доказана для достаточно малых возмущений и оценка границы устойчивости в настоящее время отсутствует*).

Аналогичным образом можно выразить проблему устойчивости при $n = 1$, когда возмущение является периодической функцией времени (хорошей иллюстрацией в этом случае является проблема устойчивости магнитных поверхностей, рассматриваемая в главе III).

*.) Можно ожидать, что такой границей является условие, при котором число инвариантных и разрушенных торов одного порядка. Оценки границы устойчивости, полученные Арнольдом и Мозером, сильно занижены, что связано с техническими трудностями, и носят скорее символический характер.

§ 2. Дискретные модели с перемешиванием

А. Преобразование растяжения

Пример перемешивания, рассматриваемый ниже, является, по-видимому, наиболее простым и интересным с точки зрения физических приложений. Пусть динамическая система имеет лишь одну степень свободы ψ , изменяющуюся в области от нуля до единицы. Закон движения для ψ задается в виде следующего уравнения в конечных разностях:

$$\Psi_{n+1} = \{K\Psi_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где фигурные скобки $\{\dots\}$ означают дробную часть аргумента. Переменная n играет роль дискретного времени. Этот пример является модельным. Далее мы увидим, как его небольшие модификации появляются в конкретных задачах. В работе Рохлина [6] было показано, что при $K > 1$ движение системы (4) является перемешивающимся и, стало быть, для описания его можно использовать методы статистической физики *). Чтобы понять этот результат, попытаемся исследовать движение (4) менее строгими, чем в [6], однако сохраняющими физический смысл, приемами.

Прежде всего заметим, что уравнение (4) можно интерпретировать как закон изменения фазы ψ нелинейного колебания, периодически сбиваемой внешним возмущением **). Здесь и всюду в дальнейшем мы будем считать для удобства, что фаза колебания изменяется в интервале от нуля до единицы. При $K < 1$ фигурные скобки в (4) можно опустить и

$$\Psi_{n+1} = K\Psi_n = K^2\Psi_{n-1} = \dots = K^{n+1}\Psi_0.$$

*) Близкие к (4) дискретные преобразования рассматривались также в работах [7, 8].

**) Уравнение типа (4) рассматривалось в связи с проблемами устойчивости нелинейных колебаний в работах [9, 10]. Результаты численного исследования, проведенного в этих работах, показали, что при $K > 1$ движение носит неупорядоченный стохастический характер.

Отсюда сразу следует, что $\Psi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, независимо от начального значения фазы Ψ_0 . Приближение к равновесию происходит регулярным образом, как показано на рис. 4, и фаза как функция времени асимптотически приближается к нулю.

При $K = 1$

$$\Psi_n = \Psi_0$$

для любого n , и этот случай можно назвать случаем покоящейся системы, или стационарным состоянием.

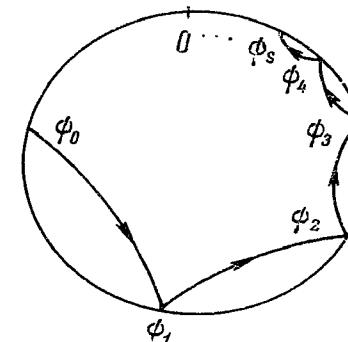


Рис. 4.

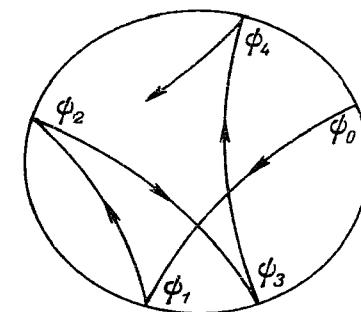


Рис. 5.

Совсем иначе обстоит дело при $K > 1$ (рис. 5). Прежде всего, качественно ясно, что для двух очень близких значений Ψ_n можно получить значения Ψ_{n+1} , в принципе сколь угодно сильно различающиеся. Различие может быть тем больше, чем больше K . Ограничимся рассмотрением случая $K \gg 1$ и попытаемся вычислить корреляционную функцию

$$R_n = \frac{\int_0^1 (\Psi_{m+n} - \langle \Psi_{m+n} \rangle)(\Psi_m - \langle \Psi_m \rangle) d\Psi_m}{\int_0^1 (\Psi_m - \langle \Psi_m \rangle)^2 d\Psi_m}, \quad (5)$$

где

$$\langle \psi_m \rangle = \int_0^1 \psi_m d\psi_m = \frac{1}{2}, \quad \langle \psi_{m+n} \rangle = \int_0^1 \psi_{m+n} d\psi_m.$$

Если раскрыть скобки в числителе (5), то

$$R_n = \frac{\int_0^1 \psi_{m+n} \psi_m d\psi_m - \langle \psi_m \rangle \langle \psi_{m+n} \rangle}{\int_0^1 (\psi_m - \langle \psi_m \rangle)^2 d\psi_m}. \quad (5')$$

Сравнивая (5') с (3), мы видим, что можно отождествить ψ_m с q , ψ_{m+n} с $\hat{T}_n q$, и условие перемешивания принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (6)$$

Результат (6) выражает расцепление временных корреляций с ростом времени, роль которого играет в данном случае номер n . Учитывая, что $K \gg 1$, вычислим сначала R_1 [10]. Согласно выражениям (4), (5') имеем

$$R_1 = 12 \left(\int_0^1 \psi \{ K\psi \} d\psi - \frac{1}{2} \int_0^1 \{ K\psi \} d\psi \right). \quad (7)$$

Простые преобразования интегралов в (7) дают

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi \{ K\psi \} d\psi &= \frac{1}{K^2} \int_0^K x \{ x \} dx = \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{K-\{K\}-1} \int_n^{n+1} x \{ x \} dx + \\ &+ \frac{1}{K^2} \int_{K-\{K\}}^K x \{ x \} dx = \frac{1}{K^2} \sum_{n=0}^{K-\{K\}-1} \int_n^{n+1} x(x-n) dx + \\ &+ \frac{1}{K^2} \int_{K-\{K\}}^K x(x-K+\{K\}) dx = \frac{1}{4} + \\ &+ \frac{1+6\{K\}(\{K\}-1)}{12K} + O\left(\frac{1}{K^2}\right); \\ \int_0^1 \{ K\psi \} d\psi &= \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{K}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_1 \approx \frac{C_1}{K},$$

где C_1 — константа порядка единицы. С помощью аналогичных выкладок можно получить

$$R_2 \approx \frac{C_2}{K^2}.$$

Можно ожидать, что вообще

$$R_n \sim \frac{C(n)}{K^n} = C(n) e^{-n \ln K}, \quad (8)$$

где $C(n)$ — медленно меняющаяся предэкспонента (при $K \gg 1$). Доказать выражение (8) используем методом мы можем, однако, только для целых K . Действительно,

$$R_1 \approx \frac{1}{12K}, \quad R_{n+1} \approx \frac{R_n}{K},$$

откуда

$$R_n \approx \frac{1}{12K^n}. \quad (8')$$

Чтобы провести более полное исследование уравнения (4) для произвольных $K \gg 1$, рассмотрим корреляционную функцию \bar{R}_n несколько иного типа [18], чем (5):

$$\bar{R}_n = 2\pi \int_0^1 \exp 2\pi i (\psi_m - \psi_{m+n}) d\psi_m. \quad (5'')$$

Как станет ясно из главы II, именно такого типа корреляции возникают при выводе кинетических уравнений. Для \bar{R}_1 имеем просто

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= 2\pi \int_0^1 d\psi \exp 2\pi i (\psi - \{ K\psi \}) = \\ &= 2\pi \int_0^1 d\psi \exp 2\pi i (1 - K) \psi = \\ &= \frac{i}{1-K} (1 - \exp(2\pi i (1 - K))) \sim \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Для целых K функция \bar{R}_1 тождественно обращается в

нуль, что связано со специальным выбором вида корреляционной функции. В случае, когда $K < 1$ так же, как и ранее $\bar{R}_1 \sim 1$.

Докажем теперь рекуррентную формулу: $\bar{R}_n \sim \frac{\bar{R}_{n-1}}{K}$ ($K \gg 1$). Имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_n &= 2\pi \int_0^1 d\psi \exp 2\pi i [\psi - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{K\} \psi \}_{n-1}] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \int_0^K dx \exp 2\pi i \left[\frac{x}{K} - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{x\} \dots}_{n-1} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \sum_{m=0}^{K-\{K\}-1} \int_m^K dx \exp 2\pi i \left[\frac{x}{K} - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{K(x-m) \dots\}}_{n-1} \right] + \frac{2\pi}{K} \int_{K-\{K\}}^K dx \exp 2\pi i \left[\frac{x}{K} - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{K(x-K+\{K\}) \dots\}}_{n-1} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \left(\sum_{m=0}^{K-\{K\}-1} \exp \left(2\pi i \frac{m}{K} \right) \right) \times \\ &\quad \times \int_0^1 dy \exp 2\pi i [y - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} K y \}_{n-1}] + \\ &\quad + \frac{2\pi}{K} \exp \left(2\pi i \frac{K-\{K\}}{K} \right) \times \\ &\quad \times \int_0^K dy \exp 2\pi i [y - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{K y\} \}_{n-1}] = \\ &= \frac{2\pi}{K} \frac{1 - \exp 2\pi i \frac{K-\{K\}}{K}}{1 - \exp \frac{2\pi i}{K}} \bar{R}_{n-1} + \\ &\quad + \frac{2\pi}{K} \exp 2\pi i \frac{K-\{K\}}{K} \bar{C}_{n-1} (\{K\}), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\bar{C}_n (q) = \int_0^q dy \exp 2\pi i [y - \underbrace{\{K\} \{K \dots \} \{K y\} \}_{n-1}], \quad (q < 1).$$

Совершенно аналогичными действиями можно показать, что

$$\bar{C}_{n-1} (\{K\}) \sim \frac{\alpha}{K} \bar{C}_{n-2} (\{K\} \{K\}) + \frac{\beta}{K} \bar{R}_{n-2},$$

где α и β — константы порядка единицы. Упрощая выражение для \bar{R}_n , имеем

$$\bar{R}_n \sim \frac{\bar{R}_{n-1}}{K} \{K\} + \frac{2\pi}{K} \bar{C}_{n-1} (\{K\}).$$

Совмещением последних двух формул заканчивается доказательство, поскольку $\bar{C}_1 \sim K^{-1}$. Из полученных выражений можно извлечь дополнительную информацию: коэффициент $\bar{C}(n)$ в выражении для корреляции

$$\bar{R}_n \sim \bar{C}(n) e^{-n \ln K}, \quad (8'')$$

аналогичном (8), растет не быстрее, чем n . Доказательство этого утверждения несложно, и мы его опускаем.

Продолжая рассмотрение примера (4), отметим одно очень важное с практической точки зрения обстоятельство. Для этого перепишем конечный результат (8), (8'), (8'') в несколько ином виде:

$$R_n \sim R_1 R_{n-1} \sim \dots \sim R_1^n. \quad (8''')$$

Хотя (8'') представляет собой другое представление для (8), однако оно имеет глубокий физический смысл: фазы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ статистически независимы. Действительно, именно в этом заключается смысл утверждения (8), которое выражает факт расцепления корреляций. Нетрудно понять, почему это происходит. Для этого вспомним, что интервал времени между последовательными измерениями фаз принят равным единице. При этом расцепление корреляции происходит за время, определяемое согласно (8) формулой

$$\tau = \frac{1}{\ln K}. \quad (9)$$

Поскольку $K \gg 1$, то, следовательно $\tau \ll 1$, т. е. корреляция расцепляется за время, много меньшее интервала

между последовательными значениями фаз $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ Это и означает, что фазы ψ_1, ψ_2, \dots являются статистически независимыми, и выражается формально соотношением (8). Но это означает также и то, что достаточно ограничиться исследованием корреляции R_1 и убедиться в том, что она мала. Именно этот результат и является практически важным, поскольку в дальнейшем мы будем сталкиваться с ситуациями, аналогичными описанной.

Итак, с формальной стороны мы получили результат, достаточный для того, чтобы к системе (4) применить при $K \gg 1$ статистические методы. Интересно, однако, обсудить эту же проблему еще раз с другой точки зрения.

Перепишем (4) в виде

$$\psi_{n+1} = \hat{T}\psi_n = \hat{T}^{n+1}\psi_0; \quad \hat{T}\psi_n = \{K\psi_n\} \quad (4')$$

и рассмотрим действие преобразования \hat{T} на малую дугу $\delta\phi_0$. Из (4') видно, что

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta\phi_0} = K,$$

и, следовательно, при $K > 1$ действие оператора движения сводится к преобразованию растяжения для дуги $\delta\phi_0$. Точки дуги $\delta\phi_0$ начинают разбрасываться по окружности довольно беспорядочным образом, и чем чаще повторено \hat{T} -преобразование, тем более равномерно заполняют точки дуги $\delta\phi_0$ всю окружность.

Итак, если две очень близкие точки на окружности разделены дугой $\delta\phi_0$, то при $K \gg 1$ траектории, проходящие через края дуги $\delta\phi_0$, начинают быстро расходиться. Это явление можно назвать неустойчивостью траекторий относительно сколь угодно малого возмущения начальных условий. Нетрудно связать инкремент такой неустойчивости со временем расцепления корреляции. Пусть начальное состояние системы размазано по дуге $\delta\phi_0 \ll K^{-1}$. Тогда преобразование \hat{T} , последовательно примененное n раз к $\delta\phi_0$, дает

$$\delta\psi_n = K^n \delta\phi_0 = e^{n \ln K} \delta\phi_0.$$

Отсюда видно, что обратное время расцепления корреляции фаз τ^{-1} , определенное формулой (9), есть инкремент

неустойчивости, проявляющейся в разбегании траекторий в фазовом пространстве, а время n_0 , в течение которого точки дуги $\delta\phi_0$ заполняют равномерно все фазовое пространство, определяется из условия $\delta\phi_{n_0} \sim 1$.

Проведенные выше качественные исследования показывают, что существует определенное соответствие между результатами, следующими из анализа корреляционной функции и из анализа свойств растяжения временного оператора. Строгое рассмотрение связи между критерием перемешивания и характером растяжения было проведено Я. Г. Синаем [11] и будет рассмотрено подробно в главе IV.

Б. Ускорение Ферми

Ускорение Ферми связано со стохастическим механизмом, предложенным Ферми [12] для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах. Смысл его заключается в том, что, сталкиваясь со случайными объектами, частица в среднем ускоряется. Разберемся более детально в механизме ускорения. При единичных актах соударения частица приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движется объект навстречу частице или от нее. Если скорости тел, с которыми сталкивается частица, распределены хаотически, то можно сказать, что число тел, движущихся навстречу частице, примерно равно числу тел, удаляющихся от частицы. Это сразу же означает, что столкновений будет больше с телами, скорость которых направлена навстречу частице, что приведет к росту в среднем энергии частицы. Ниже будет рассмотрен простой пример, на котором можно будет проследить, как возникает фермьевский механизм ускорения в одномерном случае*).

Исследуемая модель представляет собой шарик, который бросают вертикально вниз на массивную плиту

*.) Исследование механизма ускорения Ферми проводилось численно Уламом [13], однако положительных результатов им получено не было. Решение задачи в одномерном случае было дано в [10] для модели, аналогичной той, которую исследовал Улам. Пример, рассматриваемый ниже, несколько отличается от модели в [10].

(рис. 6), совершающую периодические колебания Низ — Верх — Низ — Верх... Шарик взаимодействует с плитой по закону абсолютно упругого удара. Массу плиты для упрощения будем считать бесконечно большой, а амплитуду колебания плиты положим равной единице. Скорость плиты V все время постоянна по величине и меняет только направление.

Ясно, что при очень медленном движении плиты сохраняется адиабатический инвариант частицы и эффективного ускорения не происходит. Картина совершенно меняется, если плита очень быстро осциллирует. Интуитивно кажется, что направления движения плиты «вверх» и «вниз» будут одинаково часты и, в силу сделанного выше анализа, частица начнет ускоряться. Нетрудно написать условие, определяющее эти два различных типа движения шарика. Для этого перейдем к количественному исследованию задачи.

Координату столкновения частицы с плитой будем называть фазой. Фаза меняется от 0 до $1/2$ при движении плиты из положения Верх в положение Низ и от $1/2$ до 1 при обратном движении. Обозначим через (ψ_n, v_n) соответственно фазу и скорость частицы после n -го столкновения. Найдем связь между (ψ_{n+1}, v_{n+1}) и (ψ_n, v_n) , приняв следующее упрощающее предположение:

$$V \ll v.$$

В положении A (см. рис. 6)

$$v'_n = v_n - gt', \quad t' = \sqrt{2\psi_{n0}/g},$$

$$v'_n = v_n - \sqrt{2g\psi_{n0}}, \quad \psi_{n0} = \begin{cases} \psi_n, & 0 \leq \psi_n \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \psi_n, & \frac{1}{2} \leq \psi_n \leq 1. \end{cases}$$

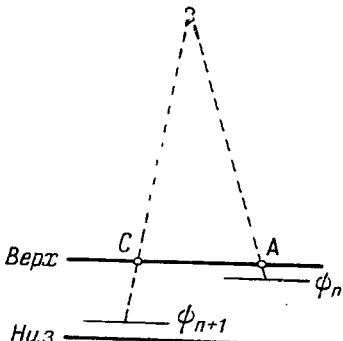


Рис. 6.

определяющее эти два различных типа движения шарика. Для этого перейдем к количественному исследованию задачи.

Координату столкновения частицы с плитой будем называть фазой. Фаза меняется от 0 до $1/2$ при движении плиты из положения Верх в положение Низ и от $1/2$ до 1 при обратном движении. Обозначим через (ψ_n, v_n) соответственно фазу и скорость частицы после n -го столкновения. Найдем связь между (ψ_{n+1}, v_{n+1}) и (ψ_n, v_n) , приняв следующее упрощающее предположение:

Очевидно, что по прошествии времени

$$t_0 = 2 \frac{v'_n}{g} = \frac{2v_n}{g} - 2 \sqrt{\frac{2\psi_{n0}}{g}} = \frac{2v_n}{g} - 2t'$$

шарик возвращается в положение C (совпадающее в действительности с A), имея при этом скорость

$$\tilde{v}_n = v'_n.$$

Положение плиты в момент, когда шарик проходил точку A , определяется фазой

$$\psi'_n = \{\psi_n + Vt'\} = \left\{ \psi_n + V \sqrt{\frac{2\psi_{n0}}{g}} \right\},$$

где фигурные скобки, как всегда, означают дробную часть аргумента. Положение плиты в момент возвращения шарика в точку C соответствует фазе

$$\tilde{\psi}_n = \{\psi'_n + Vt_0\} = \{\{\psi_n + Vt'\} + Vt_0\} = \{\psi_n + V(t' + t_0)\} = \{\psi_n - Vt' + \frac{2v_n}{g}\}.$$

Теперь можно найти ψ_{n+1} :

$$\psi_{n+1} = \tilde{\psi}_n + Vt'',$$

где t'' — время от момента прохождения шариком положения C до момента $(n+1)$ -го столкновения. Его можно определить из уравнения

$$v'_n t'' + \frac{1}{2} g t''^2 = \begin{cases} \psi_{n+1}, & 0 \leq \psi_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \psi_{n+1}, & \frac{1}{2} \leq \psi_{n+1} \leq 1. \end{cases}$$

Опуская дальнейшие простые выкладки, получаем

$$\psi_{n+1} \approx \left\{ \psi_n + V \sqrt{\frac{2\psi_{n0}}{g}} + 2 \frac{V}{g} v_n \right\}, \quad (10)$$

где учтено, что скорость v достаточно велика. Аналогично можно получить

$$v_{n+1} = v_n + \sqrt{2g|\psi_{n+1,0} - \psi_{n,0}|} \operatorname{sign}(\psi_{n+1,0} - \psi_{n,0}) + \\ + 2V \operatorname{sign}\left(\psi_{n+1} - \frac{1}{2}\right), \quad (11)$$

причем

$$\psi_{n+1,0} = \begin{cases} \psi_{n+1}, & 0 \leq \psi_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \psi_{n+1}, & \frac{1}{2} \leq \psi_{n+1} \leq 1. \end{cases}$$

Уравнения движения частицы (10), (11) являются предметом дальнейшего исследования.

Вычислим корреляционную функцию R_1 , определенную из уравнения (5''):

$$R_1 = 12 \left(\int_0^1 \psi \{\psi + \sqrt{K\psi_0}\} d\psi - \frac{1}{2} \int_0^1 d\psi \{\psi + \sqrt{K\psi_0}\} \right);$$

$$\psi_0 = \begin{cases} \psi, & 0 \leq \psi \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \psi, & \frac{1}{2} \leq \psi \leq 1, \end{cases}$$

$$K = 2V^2/g.$$

Имеем при $K \gg 1$

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{12} &= \int_0^{1/2} d\psi \left(\psi - \frac{1}{2}\right) \{\sqrt{K\psi} + \psi\} + \\ &+ \int_{1/2}^1 d\psi \left(\psi - \frac{1}{2}\right) \{\sqrt{K(1-\psi)} + \psi\} = \\ &= \int_0^{1/2} d\psi \left(\psi - \frac{1}{2}\right) [\{\psi + \sqrt{K\psi}\} - \{\psi - \sqrt{K\psi}\}] = \\ &= \int_0^{1/2} d\psi \left(\psi - \frac{1}{2}\right) [\{\sqrt{K\psi}\} - \{\sqrt{K\psi}\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$R_1 \approx \frac{C_1}{\sqrt{K}} \ll 1,$$

где C_1 — константа порядка единицы. Так же как и в предыдущем параграфе, можно получить

$$R_n \sim \frac{C_n}{K^{n/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\sqrt{K} = \sqrt{\frac{2V^2}{g}} \gg 1 \quad (12)$$

фазы ψ_n в момент столкновения ведут себя «почти» хаотически. Корреляции фаз расцеплены, и можно перейти к статистическому описанию движения.

Однако прежде, чем это сделать, заметим, что условие (12) может быть получено также и из критерия «растяжения», введенного в предыдущем параграфе. Действительно,

$$\frac{\delta \psi_{n+1}}{\delta \psi_n} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{\psi_n}}.$$

Поскольку $\psi \leq 1$, то неравенство (12) означает всегда «растяжение» дуги $\delta \psi_n$. Дальнейшее не представляет затруднений. Воспользовавшись тем, что выполняется неравенство (12), т. е. фазы двух соседних столкновений не коррелированы, а также предполагавшимся с самого начала условием

$$\Delta v = v_{n+1} - v_n \approx 2V \cdot \operatorname{sign}\left(\psi_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \ll v_n,$$

можно написать стандартное уравнение Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} D(v) \frac{\partial f}{\partial v}, \quad D(v) = \frac{(\Delta v)^2}{\tau},$$

где $f(v, t)$ — функции распределения по скоростям частицы:

$$\int_0^\infty f(v, t) dv = 1,$$

а черта означает усреднение по фазам. Замечая, что $\tau \approx 2v/g$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = gV^2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Это уравнение легко решается для произвольных начальных условий. Ограничимся качественным результатом. Умножая кинетическое уравнение на v^3 и интегрируя по всему пространству скоростей, имеем

$$\frac{d}{dt} \langle v^3 \rangle = 3gV^2, \quad \langle v^3 \rangle \equiv \int_0^\infty v^3 f(v, t) dv.$$

Отсюда $\langle v^3 \rangle = v_0^3 + 3gV^2t$, т. е. скорость растет со временем пропорционально, грубо говоря, $t^{1/3}$ *).

Заметим, что если $K \ll 1$, то сила, действующая на шарик со стороны плиты, является адиабатической и ускорение Ферми не происходит. Таким образом, двум рассмотренным предельным случаям соответствуют два совершенно различных описания поведения системы в зависимости от значений параметра K : динамическое ($K \ll 1$) и статистическое ($K \gg 1$). Можно сказать, что значение $2V^2/g \sim 1$ является той границей, которая отделяет два качественно разных характера движения шарика. В действительности, однако, может существовать целая переходная область вблизи $K \sim 1$, движение в которой трудно как-либо описать. Наличие такой переходной области было обнаружено в работе [10].

В. Столкновения абсолютно твердых шариков (идеальный газ)

Рассмотрим твердый шарик, периодически сталкивающийся через характерное время t_0 с себе тождественными шариками. Все движение происходит в плоскости, а удар —

*) В работе [10] рассматривался шарик, движущийся между двумя плоскостями, одна из которых совершает периодические колебания. При выполнении определенных условий начинает осуществляться стохастический механизм ускорения шарика. Однако для достаточно больших скоростей ускорение прекращается и появляется критическая скорость, выше которой движение шарика не может носить стохастический характер и, следовательно, механизм Ферми не осуществляется. Рассмотренный пример такой предельной скорости не имеет и шарик может неограниченно ускоряться.

абсолютно упругий. Эта задача рассматривалась Н. С. Крыловым [4], и мы ниже будем следовать его решению. Более тщательное и строгое исследование было проведено Я. Г. Синаем [14, 15].

Будем изучать движение материальной точки (луча), рассеивающейся на кругах радиуса R , равного удвоенному радиусу шариков. Как известно, такая постановка задачи эквивалентна исходной. Систему уравнений, связывающую параметры луча и координаты рассеивающего круга, нетрудно получить, если воспользоваться рис. 7. Пусть центр сферы, на которой происходит рассеяние, расположен в начале системы координат (x, y) , а координата точки рассеяния на сфере характеризуется параметрами (R, ϑ) и пусть угол падения луча на сферу равен α .

Пусть теперь материальная точка имеет произвольные координаты (x, y) . Построим лучи падения и отражения и напишем связь между координатами материальной точки (x, y) и координатами точки падения (R, ϑ) :

$$x + r \cos \varphi_1 = R \cos \vartheta, \quad y + r \sin \varphi_1 = R \sin \vartheta, \quad (13)$$

где угол φ_1 определен на чертеже. Учитывая, что угол падения α равен углу отражения, имеем

$$2\alpha + \varphi_2 + \pi - \varphi_1 = 2\pi, \quad \alpha + \varphi_2 = \vartheta,$$

откуда, исключая α , получаем

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \pi = 2\vartheta.$$

Нашей дальнейшей целью будет найти величину $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$, определяющую характер растяжения. Поскольку φ_1, φ_2 — соответственно углы (фазы) луча до и после рассеяния, то при выполнении условия растяжения

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} > 1 \quad (14)$$

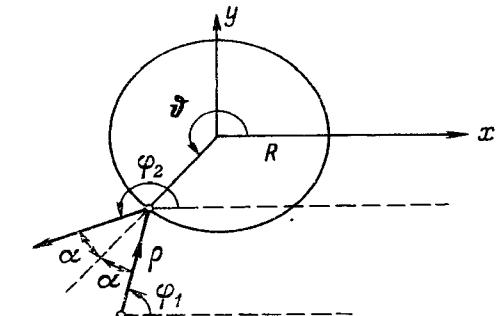


Рис. 7.

развивается неустойчивость относительно малых возмущений начальных условий. Поведение со временем фаз луча близко к случайному, и к исходной системе можно применить статистические методы описания.

Из соотношения, связывающего Φ_1 , Φ_2 и ϑ , следует

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \Phi_1} = 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi_1} - 1.$$

Из уравнений (13) получаем (считая x , y , Φ_1 независимыми переменными)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi_1} = \frac{\rho \sin \Phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial \Phi_1} \cos \Phi_1}{R \sin \vartheta}.$$

Определим $\partial \rho / \partial \Phi_1$. Возведим в квадрат каждое уравнение в (13) и складываем:

$$x^2 + y^2 + 2\rho(x \cos \Phi_1 + y \sin \Phi_1) + \rho^2 = R^2.$$

Дифференцируя полученное выражение по Φ_1 и исключая x и y , с помощью (13) находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \Phi_1} = -\rho \operatorname{tg}(\vartheta - \Phi_1).$$

Используя выражения для $\partial \rho / \partial \Phi_1$, $\partial \vartheta / \partial \Phi_1$, получаем окончательно

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \Phi_1} = \frac{\rho}{R} \frac{2}{\cos(\vartheta - \Phi_1)} - 1. \quad (14')$$

Поскольку $\cos(\vartheta - \Phi_1) \leq 1$, то условие растяжения (14) имеет вид

$$K = \frac{\rho}{R} > 1, \quad (14'')$$

причем очевидно, что в качестве ρ следует взять длину свободного пробега.

Выражение (14'') аналогично формуле (13). Для корреляционной функции фаз можно написать

$$R_n \sim K^{-n} = e^{-n \ln K},$$

или, переходя от дискретного времени к непрерывному:

$$R(t \approx nt_0) \approx \exp\left(-\frac{t}{t_0} \ln K\right).$$

Отсюда следует, что характерное время расцепления корреляций равно

$$\tau = \frac{t_0}{\ln(\rho/R)}.$$

§ 3. Нелинейный осциллятор во внешнем поле

Хотя рассматривавшиеся до сих пор примеры и были несколько искусственными, однако они позволили познакомиться с простейшими преобразованиями, приводящими к появлению статистической необратимости. Модель, которой посвящен этот параграф, является уже совсем реальной, а вид преобразования, с которым мы здесь столкнемся, окажется типичным для самых различных задач, связанных с нелинейными колебаниями.

Рассмотрим нелинейную систему типа осциллятора, находящуюся под воздействием внешней силы:

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \alpha x^2)x = \varepsilon F(x, t). \quad (15)$$

При достаточно малых ε движение системы (15) сохраняет условно периодический характер [15–17] и интересовать нас не будет. Однако при определенном виде $F(x, t)$ и достаточно больших возмущениях (ε) и нелинейности (α) движение системы (15) может приобрести перемешивающийся характер. Изменение фаз осциллятора носит при этом характер, близкий к случайному. Возникает явление, аналогичное ускорению Ферми, и энергия осциллятора в среднем растет со временем. Такого рода стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний рассматривалась впервые, насколько нам известно, Б. В. Чириковым [18, 19] в связи с проблемой движения частиц в ускорителях и магнитных ловушках. Ниже мы рассмотрим специальный пример, исследовавшийся в работе [20]. Как станет ясно из глав II, III, ситуация, возникающая в этом специальном примере, является характерной для большого класса задач.

Будем считать нелинейность в (15) слабой:

$$\alpha x^2 \ll 1,$$

а правую часть выберем в виде толчков, для которых бесконечно малое время и следующих периодически с периодом

T (рис. 8):

$$F(x, t) = \omega x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \equiv F(t)x,$$

$$T \equiv \frac{2\pi}{\Omega}, \quad F(t) = \frac{F(x, t)}{x}.$$

Примем важное для дальнейшего ограничение $\Omega \ll \omega$. Итак, рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + [\omega^2(1 + \alpha x^2)]x - \varepsilon\omega x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = 0, \quad (15')$$

а в интервале между двумя соседними толчками

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \alpha x^2)x = 0. \quad (15'')$$

В интервале между двумя δ -функциями можно записать точное решение уравнения (15''), а при переходе через каждую из δ -функций произвести точную спивку этих решений. Однако, как будет видно ниже, для выяснения

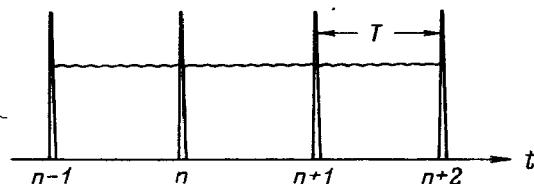


Рис. 8.

критерия перемешивания нам достаточно будет ограничиться даже «грубым» решением уравнения (15''). Решение уравнения (15'') с точностью до членов $\sim \alpha$ имеет вид

$$x = A \cos [(\omega + \Delta\omega)t + \varphi], \quad \Delta\omega = \frac{3}{8}\alpha A^2 \omega. \quad (16)$$

Частота в решении определена при этом с точностью до членов $\sim \alpha^2$.

Слева и справа от одной δ -функции, расположенной, скажем, в точке $t_n = nT$, решение уравнения (15') имеет

вид (16), но с разными амплитудами и фазами. Связь между последними определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} x(t_n + 0) &= x(t_n - 0) = x(t_n), \\ \dot{x}(t_n + 0) &= \dot{x}(t_n - 0) + \varepsilon\omega x(t_n). \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь выражениями (17), можно перейти от дифференциального уравнения (15') к уравнению в конечных разностях для (A, φ) . Осуществим этот план.

Введем комплексный вектор

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} A_n e^{i\varphi_n} \\ A_n e^{-i\varphi_n} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

определяющий амплитуду и фазу решения в точке $(t_{n+1} - 0)$, и оператор \hat{T} сдвига во времени на интервал T :

$$\mathbf{B}_{n+1} = \hat{T}_n \mathbf{B}_n. \quad (19)$$

Используя выражения (16) — (18) и опуская несложные преобразования, получаем:

$$\hat{T}_n = \frac{\omega}{\omega_{n+1}} \begin{pmatrix} \left(\beta_n^+ + \frac{1}{2}i\varepsilon\right) e^{i\omega_{n+1}T} & \left(\beta_n^- + \frac{1}{2}i\varepsilon\right) e^{i\omega_{n+1}T} \\ \left(\beta_n^- - \frac{1}{2}i\varepsilon\right) e^{-i\omega_{n+1}T} & \left(\beta_n^+ - \frac{1}{2}i\varepsilon\right) e^{-i\omega_{n+1}T} \end{pmatrix}; \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_n^+ &= \frac{\omega_{n+1} + \omega_n}{2\omega} = 1 + \frac{\Delta\omega_n + \Delta\omega_{n+1}}{2\omega}, & \omega_n &\approx \omega + \Delta\omega_n, \\ \beta_n^- &= \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\omega} = \frac{\Delta\omega_{n+1} - \Delta\omega_n}{2\omega}, & \Delta\omega_n &= \frac{3}{8}\alpha A_n^2 \omega, \\ \operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \omega_{n+1}T) &= \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg}\varphi_n + \varepsilon \frac{\omega}{\omega_{n+1}}, \\ \frac{A_{n+1}^2}{A_n^2} &= 1 - \left(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_{n+1}^2}\right) \sin^2 \varphi_n + \varepsilon \frac{\omega\omega_n}{\omega_{n+1}^2} \sin 2\varphi_n + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_n. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Уравнение (20) определяет оператор движения, а уравнения (21) — искомую связь между (A_n, φ_n) и (A_{n+1}, φ_{n+1}) .

т. е. уравнения движения осциллятора в конечных разностях.

Из полученных результатов следует, что параметр ε определяет относительную величину изменения амплитуды осциллятора вследствие воздействия толчка. Мы ограничимся в дальнейшем случаем

$$\varepsilon \ll 1.$$

Это приводит к следующим уравнениям вместо (21):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1} &\approx \{\omega_n T + K_n \sin 2\varphi_n + \operatorname{arctg}(\varepsilon + \tan \varphi_n)\} \approx \\ &\approx \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n + \omega_n T + \varepsilon \cos^2 \varphi_n\}, \\ A_{n+1} &\approx A_n \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \sin 2\varphi_n\right), \\ K_n &= \varepsilon \Delta \omega_n T = \frac{3}{8} \alpha A_n^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

где фигурные скобки по-прежнему означают дробную часть аргумента. Мы получили уже знакомое уравнение для фаз, основное отличие которого от рассматривавшихся ранее связано с наличием множителя $\sin 2\varphi_n$ вместо φ_n .

Как будет показано в следующей главе, преобразование фаз типа

$$\varphi_{n+1} = \{\varphi_n + K_n \sin 2\varphi_n\}$$

играет очень важную роль в различных физических приложениях. Строгое исследование этого преобразования в том случае, когда вместо $\sin 2\varphi_n$ стоит пилообразная функция $\Pi(2\varphi_n)$:

$$\frac{d\Pi(\varphi)}{d\varphi} = \begin{cases} -1, & m < \varphi < m + \frac{1}{2}, \\ +1, & m + \frac{1}{2} < \varphi < m + 1, \end{cases}$$

где m — целое, проводится в главе IV.

Рассмотрим теперь случай $K \gg 1$ и вычислим корреляционную функцию (5). Простая оценка дает снова *)

$$R_1 \sim \frac{1}{K}.$$

*) Приводимая оценка является несколько грубой и будет уточнена в § 2 главы II. Заметим сразу, что это уточнение не сказывается на приводимых ниже критериях стохастичности и времени перемешивания.

Таким образом, условие

$$K = \varepsilon \frac{\Delta \omega}{\Omega} \gg 1 \quad (22)$$

можно рассматривать как условие, при котором фазы осциллятора ведут себя близким к хаотическому образу, и для описания поведения системы (15) можно воспользоваться кинетическим уравнением типа Фоккера — Планка.

Мы еще вернемся к обсуждению этого примера в следующей главе, а сейчас необходимо сделать несколько важных замечаний.

1) Условие того, что оператор \hat{T} , определенный в (20), является оператором растяжения, выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta \varphi_{n+1}}{\delta \varphi_n} \sim K_n |\cos 2\varphi_n| > 1.$$

Отсюда следует, что даже при $K \gg 1$ существует малая область фазового пространства размером $\sim K^{-1}$, в которой критерий растяжения неприменим. При попадании системы в эту область эргодичность движения теряется, по крайней мере, на время, необходимое для выхода системы из такой области. Это же обстоятельство можно обнаружить и при вычислении корреляционной функции R_n . Потеря эргодичности скажется в том, что мы вместо обычного выражения $R_n \sim K^{-n}$ получим

$$R_n \sim K^{-m}, \text{ где } m \ll n.$$

Строгое решение этого вопроса рассмотренными выше методами, по-видимому, невозможно. Можно, однако, указать следующее частичное решение задачи. При начальных условиях, достаточно далеких от области захвата, имеется возможность провести грубую оценку времени t_0 , в течение которого система наверняка не попадет в область захвата. Если теперь выбрать такое соотношение между ε и K , чтобы t_0 было велико по сравнению с характерным временем релаксации, следующим из решения уравнения Фоккера — Планка, то это представляется достаточным с физической точки зрения.

По-видимому, в действительности все обстоит проще и возникшие трудности являются скорее техническими, чем принципиальными. Области потери эргодичности (т. е. области устойчивости) и область перемешивания отделены друг от друга некоторой границей. Это утверждение, во всяком случае, не кажется бессмысленным, поскольку для достаточно больших значений K попадание траектории в область устойчивости не только становится маловероятным событием, но и само время пребывания фазовой точки в такой малой области должно уменьшаться. Численный анализ, проведенный в [36], показывает, что действительно, при больших K можно пренебречь влиянием областей устойчивости на перемешивающийся характер движения в фазовом пространстве в целом.

2) Проследив за возникновением условия (22) стохастической неустойчивости, перепишем его в виде

$$K = \frac{d\Delta\omega(I)}{dI} \frac{\Delta I}{\Omega} = \varepsilon I \frac{d\Delta\omega(I)}{dI} \frac{1}{\Omega} \gg 1, \quad (23)$$

где ΔI — изменение адиабатического инварианта системы $I = \omega A^2$ под действием внешней силы $F(t)$ за один акт рассеяния при толчке. Если теперь в уравнении (15) выбрать произвольного вида нелинейность, то критерий перемешивания в виде (23) можно сохранить.

3) Предположим, что $F(t) \equiv F(x, t)/x$ представляет собой n раз проинтегрированную δ -функцию:

$$\frac{d^n F}{dt^n} = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

В этом случае можно уравнение (15) n раз продифференцировать и, оставляя только самые старшие члены, прийти снова к критерию (23) с заменой $\varepsilon = a/\omega^{n+1}$.

Вообще принципиальным является факт многократного несохранения адиабатического инварианта осциллятора $\varepsilon = \Delta I/I$ с любой конечной степенью (по малому параметру) точности. Для того чтобы это утверждение сделать более ощутимым, рассмотрим

$$F(x, t) = ax \cos \Omega t, \quad \Omega \ll \omega.$$

Неравенство $\Omega \ll \omega$ означает, что сила $F(x, t)$ является адиабатической, за исключением малой области значений параметра $a \sim \omega^2(1 + \alpha x^2)$. В этом случае

$$\varepsilon \sim \exp\left(-\frac{\omega}{\Omega}\right)$$

и неравенство (23) никаким образом не может быть выполнено.

4) Из предыдущего замечания становится ясной роль δ -функциональных толчков в силе $F(t)$. Частотный спектр $F(t)$ для таких толчков имеет бесконечную ширину.

В действительности можно было бы рассматривать $F(t)$ и с ограниченным спектром. Если ширина спектра достаточно велика, так что эффективная длительность во времени толчка много меньше периода колебания, то все выкладки, проделанные выше, можно сохранить. Острота толчков как функций времени снова приводит к существенному несохранению адиабатического инварианта, причем роль точек t_n в уравнениях (17) играют точки остройших максимумов толчков.

Таким образом, для возможности выполнения условия (23) необходимы: а) δ -образность какой-либо производной $F(t)$, что означает автоматически присутствие большого числа гармоник в спектральном разложении $F(t)$, б) периодичность (или почти периодичность) $F(t)$ с частотой $\Omega \ll \omega$, в) достаточно большая нелинейность.

5) И, наконец, последнее: $F(x, t)$ может зависеть от x каким-либо другим образом, чем в (15'), и, в частности, вообще не зависеть от x .

ГЛАВА II

МЕТОД УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Вводные замечания

К рассмотренным выше задачам можно подойти и более общим или, если можно так выразиться, более адекватным методом. Пусть, например, q — совокупность всех переменных системы, однозначно определяющих ее состояние. Можно ввести понятие плотности состояний $f(q)$ системы в фазовом пространстве (q) с выполнением условия нормировки:

$$\int f(q) dq = 1.$$

Функция $f(q)$, которую мы будем в дальнейшем называть функцией распределения, удовлетворяет очевидному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} (qf) = 0, \quad (1)$$

выражающему закон сохранения числа траекторий системы в фазовом пространстве. Скорости \dot{q} определены уравнениями движения:

$$\dot{q} = \dot{q}(q, t). \quad (2)$$

Решением уравнения (1) является произвольная функция от интегралов системы (2).

В случае, когда можно ввести канонические переменные, т. е. $q = (\bar{q}, \bar{p})$, уравнение (1) переходит в уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\bar{q}} \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \dot{\bar{p}} \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = 0. \quad (1')$$

Мы в дальнейшем не будем делать принципиального различия между случаями (1) и (1') и термин «уравнение Лиувилля» будем применять также к уравнению непрерывности (1).

Если сделать теперь какие-либо допущения о наличии статистического ансамбля, скажем, начальных условий системы, то $f(q)$ приобретает смысл обычной статистической функции распределения.

Уравнение (1) может служить исходным пунктом вывода кинетического уравнения для f (например, уравнения типа Фоккера — Планка). При малых возмущениях системы процедура вывода уравнения Фоккера — Планка достаточно стандартизована и, поскольку в дальнейшем она будет подробно излагаться в связи с конкретными задачами, мы здесь на ней не останавливаемся.

Можно представить себе следующую программу действий. Используя уравнение (1) и не делая никаких предположений о наличии статистических свойств в системе, провести все формальные действия, необходимые для вывода кинетического уравнения; выделить все члены, мешающие получению кинетического уравнения, и определить условия, при которых вкладом последних можно пренебречь. Очевидно, что необходимым условием применимости кинетического уравнения будет перемещивающийся характер движения.

Ниже мы переходим к осуществлению намеченной программы для некоторых задач, следя за работами [22—24].

§ 2. Нелинейный осциллятор во внешнем поле (другой подход)

Вернемся снова к задаче о движении нелинейного осциллятора под действием периодических δ -образных толчков, рассмотренной в главе I. Уравнение движения осциллятора на этот раз запишем в виде

$$\dot{I} = \varepsilon I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \sin 2\Phi, \quad \dot{\Phi} = \omega(I); \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3)$$

Система (3) является упрощенным аналогом уравнений (15), (15') главы I в переменных действие — фаза (I, Φ).

Запишем теперь для плотности $f(t, I, \vartheta)$ уравнение Лиувилля типа (1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\dot{\vartheta} f) + \frac{\partial}{\partial I} (\dot{I} f) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \omega(I) \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} (Vf), \\ V &= I \sum \delta(t - kT) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что $f(t, I, \vartheta)$ должна быть периодической функцией ϑ , проведем разложение:

$$\begin{aligned} f(t, I, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(I, t) e^{in\vartheta} + f_{-n}(I, \vartheta) e^{-in\vartheta}), \\ V(t, I, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (V_n(I, t) e^{in\vartheta} + V_{-n}(I, \vartheta) e^{-in\vartheta}), \\ f_{-n} &= f_n^*, \quad V_{-n} = V_n^* \end{aligned}$$

(в данном случае V имеет только две гармоники по ϑ $n = \pm 2$). Уравнение (4) переходит в следующее:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + i n \omega(I) f_n = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n'} (V_{n'} f_{n-n'} + V_{-n'} f_{n+n'}). \quad (4')$$

Далее удобно перейти к представлению Лапласа для $f_n(t, I)$ и вспомнить, что $V_n(I, t)$ является периодической функцией времени:

$$\begin{aligned} g_n(I, p) &= \int_0^\infty e^{-pt} f_n(I, t) dt, \\ V(I, \vartheta, t) &= \sum_{n \neq 0, k \neq 0} [V_{n, k}(I) e^{i(n\vartheta + k\Omega t)} + \\ &\quad + V_{-n, -k}(I) e^{-i(n\vartheta + k\Omega t)}], \\ V_{-n, -k} &= V_{n, k}^*, \quad \Omega = 2\pi/T, \end{aligned}$$

где опущены члены с $n, k = 0$, которые всегда могут быть исключены за счет соответствующей перенормировки f .

Удобно перейти в уравнениях (4), (4') к представлению взаимодействия, что эквивалентно замене:

$$f(\vartheta) \rightarrow f(\vartheta - i\omega t); \quad f_n \rightarrow f_n e^{-in\omega t}. \quad (5)$$

Преобразования (5) верны, если ω не зависит от времени. В данном случае это не так, поскольку $\omega = \omega(I)$, а действие зависит от t вследствие возмущения. Можно, однако, показать, что преобразование (5) имеет при малых ε достаточную для нас степень точности. Условие справедливости такого приближения будет обсуждаться ниже.

Используя выписанные выше разложения, получаем из (4') следующее уравнение для $g_n(I, p)$:

$$\begin{aligned} g_n(p) &= \frac{f_n(0)}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n_1, k} [V_{n_1, k} g_{n-n_1}(p + i(n-n_1)\omega - ik\Omega) + \\ &\quad + V_{-n_1, k} g_{n+n_1}(p + i(n+n_1)\omega - ik\Omega)], \end{aligned} \quad (6)$$

где для сокращения принято $f_n(0) \equiv f_n(I, t=0)$; $g_n(p) \equiv \equiv g_n(I, p)$. Уравнение (6) можно решать итерациями.

В дальнейшем, однако, нас будет интересовать уравнение для $g_0(p)$, которое несколько проще, чем (6):

$$\begin{aligned} g_0(p) &= \frac{f_0(0)}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n_1, k} [V_{n_1, k} g_{-n_1}(p - in_1\omega - ik\Omega) + \\ &\quad + V_{-n_1, k} g_{n_1}(p + in_1\omega - ik\Omega)]. \end{aligned} \quad (6')$$

Итерация (6') с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$ включительно дает

$$\begin{aligned} g_0(p) &= \frac{f_0(p)}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial}{\partial I} \times \\ &\quad \times \sum_{n, k} \left[V_{n, k} \frac{f_{-n}(0)}{p - i(n\omega + k\Omega)} + V_{n, k} \frac{f_n(0)}{p + i(n\omega - k\Omega)} \right] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{p} \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n_1, k_1} \sum_{n_2, k_2} \left(\frac{V_{n_1, k_1}}{p - i(n_1\omega + k_1\Omega)} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{V_{n_2, k_2} f_{-n_2}(0)}{p - i[(n_1 + n_2)\omega + (k_1 + k_2)\Omega]} + \dots \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где многоточие означает все остальные члены порядка ε^2 , и мы их не выписываем во избежание громоздких выражений.

Приведенная формула для $g_0(p)$ (даже с точностью только до членов $\sim \varepsilon^2$) показывает, что определение $f(t)$ является далеко не простой задачей. Поэтому имеет смысл сразу ограничить круг исследований и выяснить, какая именно информация должна быть извлечена из уравнения (7).

Прежде всего, заметим, что нас будет интересовать асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$. Это эквивалентно нахождению $g(p)$ при $p \rightarrow 0$. В пределе $p \rightarrow 0$ основной вклад в (7) дают лишь те члены (будем называть их главными), у которых выражение в квадратных скобках в знаменателе обращается в нуль. Подобные знаменатели обычно называются резонансными. При переходе к t -представлению они являются источниками возникновения так называемых секулярных членов, растущих с ростом t как некоторая степень t . Ограничивааясь в (7) членами до ε^2 включительно и удерживая среди них только главные (т. е. те, которые дают максимальный вклад при $t \rightarrow \infty$), получаем

$$\begin{aligned} pg_0(p) - f_0(0) = & -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} \left[\frac{V_{n,k} f_n(0)}{p + i(n\omega - k\Omega)} + \text{к. с.} \right] + \\ & + 8\varepsilon^2 p \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} \frac{|V_{n,k}|}{p^2 + (n\omega - k\Omega)^2} \frac{\partial}{\partial I} |V_{n,k}| \frac{f_0(0)}{p}. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу сделанного выше замечания о поведении секулярных членов необходимо указать условия, позволяющие обрывать ряд по ε . Эти условия будут приведены несколько позже. Переход в (8) к t -представлению дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} [V_{n,k} f_n(0) e^{i(n\omega - k\Omega)t} + \text{к. с.}] + \\ & + 8\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} (|V_{n,k}| f), \end{aligned} \quad (9)$$

где мы воспользовались предельным переходом:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p^2 + \Delta^2} = \pi \delta(\Delta).$$

Обратим внимание на то, что члены первого порядка по ε (и вообще все нечетные по ε члены) содержат осциллирующие во времени множители и одновременно амплитуды разложения $f(I, \vartheta; t)$ при $t = 0$, т. е. начальные условия.

Рассмотрим теперь частный случай начальных условий:

$$f_n(0) = f_0(0) \delta_{n,0}, \quad (10)$$

где $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера. Из (9) сразу следует

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 8\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} (|V_{n,k}| f). \quad (11)$$

Уравнение (11) является хорошо известным уравнением типа Фоккера — Планка, описывающим статистически необразимое поведение системы (его также иногда называют управляющим уравнением). Причиной его «возникновения», является специальный вид начальных условий (10), эквивалентных, как известно (см., например, [25]), приближению хаотических фаз (ПХФ) в начальный момент времени.

В случае, описываемом уравнением (4), благодаря простому виду возмущения выражение (11) принимает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 8\pi\varepsilon^2 \Omega \frac{\partial}{\partial I} \left[I \frac{\partial}{\partial I} (If_0) \right]. \quad (11')$$

Обратим также внимание на то, что уравнение типа Фоккера — Планка получено для функции $f_0(I, t)$. Это можно понять, если воспользоваться ПХФ. Действительно, в результате усреднения $f(I, \vartheta_0, 0)$ по начальной фазе ϑ_0 получается

$$\langle\langle f(I, \vartheta_0, 0) \rangle\rangle \equiv \int_0^1 f(I, \vartheta_0, 0) d\vartheta_0 = f_0(0),$$

что формально эквивалентно условиям (10) (двойные угловые скобки здесь обозначают интегрирование по ϑ_0).

Если учесть члены более высокого порядка по ε , то степень расходимости резонансных знаменателей будет повышаться. Однако приближение хаотических фаз создает выгодные условия для суммирования этих членов. В каждом порядке по ε можно отобрать главные члены.

Среди них члены, содержащие нечетную степень ε , отсутствуют, а члены, содержащие четную степень ε , образуют геометрическую прогрессию. Эта процедура изложена подробно в книге И. Пригожина [25]. Интересно, однако, что получаемое таким образом уравнение совпадает с уравнением, в котором ограничились только членами $\sim \varepsilon^2$. Таким образом, если окажется, что все члены с нечетными степенями ε можно исключить, выбранное приближение будет оправдано.

Это замечание мы используем позднее, а теперь попытаемся сформулировать решаемую задачу более отчетливо: можно ли, сделав самые общие предположения относительно начальных условий (например, все $f_n(0)$ — одного порядка), получить уравнение типа (11)? Ответив на этот вопрос, мы тем самым найдем условие, при котором поведение динамической системы (3) можно приближенно описывать кинетическим уравнением (11) фоккер-планковского типа. Второй вопрос, уже значительно менее важный, — как строить функцию, удовлетворяющую уравнению типа (11).

Итак, пусть, вообще говоря, все $f_n(0) \neq 0$ и в уравнении (9) существуют осциллирующие по t члены первого порядка по ε . Изучим более детально переход (5). Строго говоря, он применим лишь в том случае, когда ω не зависит от времени. В действительности, согласно уравнению (3), ω зависит от действия I , а последнее не является интегралом движения. Между двумя δ -образными толчками $I = \text{const}$. На каждом отдельном толчке в момент времени t_m действие меняется на величину

$$\Delta I_m = \varepsilon I_m \sin 2\vartheta_m. \quad (12a)$$

Это приводит к изменению частоты на

$$\Delta\omega_m \approx \frac{d\omega(I_m)}{dI_m} \Delta I_m = \varepsilon I_m \frac{d\omega(I_m)}{dI_m} \sin 2\vartheta_m$$

и, следовательно, к изменению фазы между m -м и $(m+1)$ -м толчками:

$$\vartheta_{m+1} = \{\vartheta_m + \omega T + K_m \sin 2\vartheta_m\}, \quad K_m = \varepsilon \frac{I_m}{\Omega} \frac{d\omega(I_m)}{dI_m}. \quad (12)$$

Мы пришли к уже знакомому выражению (21) главы I. Уравнение (12) может быть проинтерировано. Это дает возможность выразить ϑ_m как функцию начального значения фазы ϑ_0 :

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= \{\vartheta_{m-1} + \omega T + K_{m-1} \sin 2\vartheta_{m-1}\} = \\ &= \{\vartheta_{m-2} + 2\omega T + K_{m-2} \sin 2\vartheta_{m-2} + \\ &+ K_{m-1} \sin (2\vartheta_{m-2} + 2\omega T + K_{m-2} \sin 2\vartheta_{m-2})\} = \dots \quad (12') \end{aligned}$$

С помощью (12') можно теперь записать ω как функцию номера m , соответствующего моменту времени $t_m = mT$, и начальной фазы ϑ_0 , используя рекуррентное соотношение:

$$\omega_m = \omega_{m-1} + \Delta\omega_{m-1}.$$

Прежде чем использовать полученные соотношения, установим область применимости преобразования (5). Очевидно, что оно справедливо при достаточно медленной зависимости частоты от времени, когда

$$\Delta\omega_m \ll \omega_m. \quad (13)$$

Если, например, частота $\omega(I)$ зависит от I степенным образом, то неравенство (13) будет выполняться уже при $\varepsilon \ll 1$. В этом случае уравнение (9) сохраняется, если произвести замену:

$$e^{i\omega t} \leftrightarrow \exp \left(i \int_0^t \omega(t') dt' \right),$$

причем ввиду скачкообразного изменения частоты со временем можно писать

$$\exp \left(i \int_0^t \omega(t') dt' \right) \approx e^{i\omega(t)t}$$

для времен $t \gg T$. Введем теперь функцию распределения

$$F(I, t) = \langle f_0(I, t) \rangle, \quad (14)$$

где двойные угловые скобки $\langle \dots \rangle$ по-прежнему обозначают интегрирование по ϑ_0 . Уравнение для F может быть

получено из (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} [V_{n,k} f_n(0) \langle\langle e^{in\omega(t)t} \rangle\rangle e^{-ik\Omega t} + \text{к. с.}] + \\ & + 8\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} (|V_{n,k}| F). \end{aligned} \quad (15)$$

(При выводе уравнения (15) мы считали, что операция $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ не действует на δ -функцию; правомерность этого будет доказана ниже.)

Перейдем к вычислению нужной нам величины

$$R(t) = \langle\langle e^{in\omega(t)t} \rangle\rangle. \quad (16)$$

Вычислим сначала (16) при условии

$$K = \varepsilon \frac{I}{\Omega} \frac{d\omega(I)}{dI} \gg 1. \quad (17)$$

Для этого заметим, что $R(t)$ можно также записать в виде

$$R(t) = \langle\langle e^{in[\vartheta(t) - \vartheta_0]} \rangle\rangle. \quad (16')$$

Из (16') видно, что $R(t)$ есть функция корреляции фаз. Вычислим сначала корреляции

$$R_m = \langle\langle e^{in(\vartheta_m - \vartheta_0)} \rangle\rangle,$$

которые аналогичны уже рассмотренным в § 2 главы I. Воспользовавшись уравнением (12'), позволяющим выразить ϑ_m через ϑ_0 , сразу получаем

$$R_1 \sim \frac{1}{\sqrt{K_1}} e^{in\omega_0 T} \quad (\omega_0 \equiv \omega(t=0)).$$

Аналогично

$$R_2 \sim \frac{1}{\sqrt{K_1 K_2}} e^{2in\omega_0 T}.$$

Вообще, пользуясь методом стационарной фазы, не-трудно получить, как и § 2 главы I, что

$$R_m \sim \exp \left(imn\omega_0 T - \frac{mn}{2} \ln K \right), \quad (16'')$$

где K , определенное формулой (17), обозначает в данном случае некоторое среднее значение величин K_1, K_2, \dots, K_m (это возможно ввиду малости изменения K от толчка к толчку).

Переходя теперь от дискретного времени к непрерывному для $m \gg 1$, получаем ответ:

$$R(t) \sim \exp \left(-n \frac{t}{\tau} \right) e^{in\omega_0 t}, \quad \tau = \frac{1}{2\Omega} / \ln K = \frac{1}{2} T / \ln K. \quad (18)$$

Это означает, что члены $\sim \varepsilon$ в (15), содержащие фазовую память системы о начальных условиях, исчезают за время порядка τ , и условие (17) является критерием перехода от динамического описания системы (3) к статистическому с помощью уравнения Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 8\pi\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{n,k} |V_{n,k}| \delta(n\omega - k\Omega) \frac{\partial}{\partial I} (|V_{n,k}| F). \quad (15')$$

Время τ можно рассматривать как время потери фазовой корреляции в системе. Полученные результаты полностью аналогичны соответствующим результатам главы I.

Учет зависимости частоты ω от времени приводит к «уширению» δ -функции в (15'). Для того чтобы сохранить запись в виде (15'), очевидно, необходимо, чтобы было

$$\Delta\omega \cdot \tau_r \gg 1,$$

где τ_r — характерное время диффузии в уравнении (15'). Используя для оценки τ_r уравнение (11'), получаем

$$\frac{1}{\tau_r} = \varepsilon^2 \Omega; \quad \Delta\omega \cdot \tau_r = \frac{d\omega(I)}{dI} \cdot \frac{\varepsilon I}{\Omega} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1.$$

Полученное неравенство выполняется автоматически при условии (17).

Прежде чем продолжить обсуждение вывода уравнения (15'), рассмотрим другой предельный случай: $K \ll 1$. Здесь удается получить оценку на конечное время в виде

$$R(t) \sim e^{in\omega_0 t} [1 + O(K\Omega t)]; \quad K\Omega t \ll 1.$$

Иными словами, вплоть до очень больших времен $t \sim \sim (K\Omega)^{-1}$ уравнение для F сохраняет свой вид (15) и переход к стохастическому характеру движения не происходит.

Отметим еще одно неравенство. Нетрудно убедиться в том, что усреднение по \varTheta_δ при образовании функции F

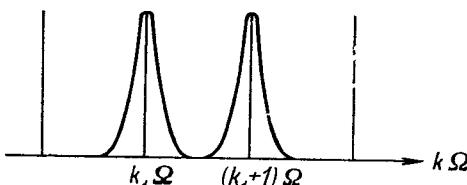


Рис. 9.

формально эквивалентно усреднению по периоду $T = \Omega^{-1}$. Отсюда возникает ограничение $\Omega\tau_r \gg 1$. Подставляя для τ_r уже известное выражение $\tau_r^{-1} = e^2\Omega$, получаем $e^2 \ll 1$, что предполагалось с самого начала.

Рассмотрим теперь критерий (17) с качественной стороны. Для этого обратимся к спектральному составу возмущения в уравнениях (3). Внешнюю силу, действующую на осциллятор, можно представить как суперпозицию гармоник с частотами $k\Omega$ и с равными амплитудами, схематически изображенными на рис. 9 вертикальными линиями. Пусть в некоторый момент времени выполнялось условие резонанса

$$\omega_{k_1} = \omega(I_{k_1}) = k_1\Omega \quad (19)$$

между частотой осциллятора и k_1 -й гармоникой внешней силы. Если рассматривать действие I_{k_1} такой гармоники, пренебрегая влиянием всех остальных (нерезонансных), то из обычных соображений следует, что I начинает расти и вследствие нелинейности приводит к изменению частоты. Последнее означает нарушение резонансных условий (19), и здесь возможны два предельных случая. Первый заключается в том, что уход частоты от значения ω_{k_1} происходит недостаточно интенсивно для того, чтобы могло быть выполнено другое резонансное условие:

$$\omega_{k_2} = \omega(I_{k_2}) = k_2\Omega = (k_1 + 1)\Omega.$$

Система захватывается (по крайней мере, на достаточно длинное время) в область близи k_1 -го резонанса, и этому

соответствует неравенство

$$\frac{d\omega}{dI} \delta I \ll \Omega, \quad (20)$$

где δI есть максимально возможное изменение действия I под влиянием резонансной гармоники $V_{k_1} e^{ik_1 \Omega t}$. Величина δI легко оценивается из выражения для амплитуды вынужденного колебания вблизи резонанса:

$$\delta I \sim \varepsilon \frac{V_{k_1}}{|\omega(I_{k_1}) - \omega(I_{k_1} + \delta I)|} \sim \varepsilon \frac{V_{k_1}}{\left| \frac{d\omega}{dI} \right| \delta I}. \quad (21)$$

Отсюда

$$\delta I \sim \sqrt{\varepsilon \frac{V_{k_1}}{\left| \frac{d\omega}{dI} \right|}} \sim \sqrt{\varepsilon \frac{I\Omega}{\left| \frac{d\omega}{dI} \right|}} \quad (21')$$

и подстановка в (20) дает

$$\varepsilon \left| \frac{d\omega}{dI} \right| \frac{I}{\Omega} = K \ll 1.$$

Можно ожидать, что в другом предельном случае, т. е. при

$$\left| \frac{d\omega}{dI} \right| \delta I \gg \Omega \quad (20')$$

или $K \gg 1$, влияние каждой отдельной резонансной гармоники столь велико, что система не в состоянии удержаться вблизи какого-либо одного резонанса. Происходит своеобразное блуждание системы по резонансам, при котором интегралы движения, за исключением тривиальных, отсутствуют. Такое движение системы можно рассматривать как стохастическое и условие этого (20') совпадает с полученным выше, хотя оценку величины δI при выводе (20') нельзя считать достаточно корректной, так как в этом случае понятие отдельного резонанса теряет смысла. Приведенные выше качественные рассуждения и вывод условия стохастической неустойчивости системы с помощью (20') принадлежит Б. В. Чирикову [18, 19].

Можно взглянуть несколько глубже на связь между неравенствами (17) и (20'). Для этого рассмотрим два

выражения:

$$K = \frac{d\omega}{dI} \frac{\Delta I}{\Omega} \quad \text{и} \quad \bar{K} = \frac{d\omega}{dI} \frac{\delta I}{\Omega}. \quad (22)$$

Здесь ΔI есть максимум скачка действия на δ -функции, равный $\Delta I = \varepsilon I$, а величину δI , определенную формулой (21), назовем шириной резонанса. Из (17) и (20') получаем

$$K = \bar{K}^2, \quad \frac{\Delta I}{\delta I} = \bar{K} = \sqrt{\bar{K}}.$$

Теперь следует вспомнить, что \bar{K} согласно смыслу, вкладываемому в формулу (20'), показывает, сколько гармоник в спектре движения частицы перекрыто за счет уширения частоты осциллятора. Это сразу приводит к тому, что изменение действия ΔI при «рассеянии» на δ -образном толчке в $\bar{K} = \sqrt{\bar{K}}$ раз больше ширины δI отдельного резонанса, или, иначе, эффект от того, что осциллятор находится в резонансе не с одной гармоникой, а с $\bar{K} \gg 1$ гармоник, оказывается в \bar{K} раз больше.

Приведенные соображения мы проиллюстрируем в дальнейшем и на других примерах. Интересно, однако, что, кроме более глубокого взгляда на критерий перемешивания, мы получили и более простой способ вычисления его. Действительно, достаточно лишь написать условие, обратное неравенству (20). Критерий стохастичности в форме (20') мы будем называть в дальнейшем условием перекрытия резонансов.

Сделаем в заключение этого параграфа необходимые замечания.

1) Изложенный метод может быть применен к системам достаточно произвольного типа и со многими степенями свободы. Что является существенным для возможности возникновения перемешивания? Рассмотренные примеры уже позволяют дать достаточно уверенные ответы на поставленный вопрос. Прежде всего, система должна быть нелинейной. И, кроме того, возмущение должно обеспечивать существенное несохранение адиабатического (или какого-либо другого) инварианта невозмущенной системы. Понятие «существенное» четко не определено, однако ясно, что экспоненциально малое изменение инварианта

может оказаться недостаточным. Необходимое для перемешивания изменение адиабатического инварианта может быть достигнуто даже при достаточно малом ($\varepsilon \ll 1$) и «медленном» ($\Omega \ll \omega$) возмущении, если только последнее почти периодично во времени (как и было до сих пор). В этом случае источником серьезных изменений инварианта является неустойчивость типа параметрического резонанса..

2) Формальная сторона исчезновений фазовой корреляции в системе заключается в следующем.

Как видно из общего выражения (6'), для главной гармоники функции распределения $f_0(I, t)$ члены первого порядка по возмущению всегда содержат множитель $\exp i n \omega(t) t$, причем всегда $n \neq 0$, так как нулевая компонента возмущения $V_{0,k}$ отсутствует. Аналогичного рода множители содержатся и в членах более высокого порядка. Все они в результате усреднения по начальной фазе ведут себя как функция $R(t)$ в уравнении (18) при выполнении условия (17). С подобной ситуацией мы будем сталкиваться в дальнейшем во всех исследуемых задачах.

Как уже отмечалось в приближении хаотических фаз начальные условия имеют вид (10).

Рассмотрим теперь условия типа

$$f_m(0) = f_0(0) \delta_{m,0} + f_n(0) \delta_{m,n}.$$

Наличие n -й гармоники $f_n(0)$ нарушает приближение хаотических фаз (ПХФ), и можно поставить в связи с этим следующий вопрос: каким номерам n соответствует более сильное нарушение ПХФ, т. е. какие начальные гармоники функции распределения дольше всего живут? Ответ на этот вопрос содержится в формуле (18): время жизни n -й гармоники равно $\tau_n = \tau_1/n$, где τ_1 — время жизни первой гармоники. Отсюда, в частности, следует, что если только амплитуды первых нескольких гармоник начальной функции распределения отличны от нуля, то единственно они и заслуживают исследования, поскольку остальные очень быстро исчезают.

3) Можно без особых трудностей убедиться в том, что учет членов более высокого порядка по ε в уравнении для F приводит к появлению при нечетных степенях ε множителей типа $\langle \exp i n \omega(t) t \rangle$, которые быстро релаксируют

к нулю вследствие сделанного выше замечания. Этим, а также приведенными выше соображениями относительно суммирования главных членов с четными степенями ϵ оправдывается вывод фоккер-планковского уравнения для F при условии выполнения критерия стохастичности (17).

4) Подчеркнем в заключение те характерные особенности, которые отличают приведенный вывод кинетического уравнения от обычных методов. Прежде всего, относительно начальных условий не делается никаких специальных предположений. Во-вторых, принципиальным является учет нелинейной зависимости частоты от действия, приводящий к возникновению перемешивающегося движения системы.

§ 3. Нелинейное волновое поле. Основные уравнения и постановка задачи

Рассмотренная выше задача с одной степенью свободы позволяет перейти к намного более сложному примеру. Предметом исследования этого и следующего параграфа будет одномерное нелинейное волновое поле с дискретным спектром. Такая система может рассматриваться как многочастичная, причем роль частиц играют отдельные гармоники колебания — фононы. Учет нелинейного взаимодействия фононов является, безусловно, очень сложной задачей и естественно, что серьезные упрощения можно получить, используя статистические методы описания такой системы. Плодотворность такого подхода в задачах слабой турбулентности сплошной среды [46, 47] сейчас не вызывает никаких сомнений. Однако именно благодаря большой эффективности использования статистических методов в этом направлении возникает необходимость выяснить пределы их применимости.

Мы остановимся очень подробно на тех условиях, при которых возникает возможность статистического описания многофононных систем. Как станет ясно в дальнейшем, эти условия нетривиальны и приводят к ряду существенных ограничений.

Потенциальную энергию системы запишем в виде разложения в ряд по степеням малого параметра β :

$$V = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 u_k^2 + \beta \sum_{k_1+k_2+k_3=0} V_{k_1 k_2 k_3} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} + \beta^2 \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=0} V_{k_1 k_2 k_3 k_4} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} u_{k_4} + \dots \quad (23)$$

Уравнение (23) можно рассматривать как энергию взаимодействия связанных осцилляторов, или, что более употребительно, фононов. Такая система осцилляторов имеет прямую связь с некоторыми задачами твердого тела и с теорией слабо турбулентной плазмы. Ядра $V_{k_1 k_2 k_3}$, $V_{k_1 k_2 k_3 k_4}, \dots$ удовлетворяют свойствами симметрии:

$$V_{k_1 k_2 k_3} = V_{k_2 k_1 k_3} = \dots; V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = V_{k_2 k_1 k_3 k_4} = \dots$$

Спектр системы $\omega_k = \omega(k)$ предполагается дискретным с характерным расстоянием между гармониками $\sim \Delta k$ и с расстоянием между частотами

$$\Omega_k = \frac{d\omega_k}{dk} \Delta k. \quad (24)$$

Вывод кинетического уравнения для фононов основан на предположении об отсутствии фазовой корреляции между фурье-амплитудами гармоник [25, 26], которое обычно называется приближением хаотических фаз (ПХФ) (см. § 2 этой главы). Основой представления о физической картине процесса является следующее: в результате развития неустойчивости или какого-либо другого процесса возбуждается очень большое число волн, нелинейно взаимодействующих друг с другом. Это взаимодействие носит резонансный характер, т. е. условие

$$\sum_j n_j \omega_j = 0$$

(ω_j — частоты волн, n_j — какие-либо целые числа) может быть выполнено бесконечным числом способов. Сложность взаимодействия и большое число степеней свободы позволяют рассчитывать на возникновение достаточно

сильного беспорядка в поведении фаз волн и, как следствие этого, на возникновение статистического ансамбля волн и потерю фазовой корреляции. Подобные представления о взаимодействии волн должны были бы привести к возникновению некоторого термодинамического равновесия «фононного газа» или, иначе, к равномерному распределению энергии по всем степеням свободы (гармоникам). Однако попытка обнаружить равномерное распределение путем машинного эксперимента для нелинейной струны, предпринятая Ферми и его сотрудниками, привела к отрицательным результатам. Таким образом возникла проблема Ферми — Паста — Улама [27, 28], исследованию которой уделяется большое внимание в физике и до сих пор.

Сохранение в течение очень продолжительного времени условно-периодических движений, обнаруженное в [27, 28], показало, что вопрос о применимости ПХФ не является столь очевидным и простым, как это могло показаться из рассуждений, приведенных выше. Израильев и Чириков [29] показали, что для установления термодинамического равновесия между гармониками нелинейной струны необходимо выполнение некоторых специальных условий (критерий стохастичности). Проверка путем численного анализа подтвердила справедливость этих условий. Ниже мы переходим к исследованию произвольного нелинейного волнового поля (23) и выяснению критерия перемешивающегося характера движения фононов [24]. Мы покажем, что эта задача оказывается очень близкой к рассмотренной в § 2 этой главы.

Прежде чем следовать дальше, остановимся на понятии распадной неустойчивости волн [30] (терминология заимствована из теории взаимодействия волн в плазме). Рассмотрим процесс взаимодействия трех волн:

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \text{ где } k = k_1 + k_2, \quad (25)$$

когда все величины положительны, а законы сохранения для частот и волновых чисел выполняются одновременно. Нетрудно видеть, что возможность выполнения равенств (25) приводит к появлению неустойчивости волн с (k, ω_k) . Действительно, с точностью до членов

следующего порядка по β имеем из (23)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k &= F(t), \\ F(t) &= -3\beta \sum_{k_1, k_2 \neq k} V_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} \delta_{k_1+k_2, k}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Если использовать нулевые приближения

$$u_k = u_k^{(0)} \cos(\omega_k t + \Phi_{k,(0)}),$$

то сила $F(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} F(t) &= -3\beta \sum_{k_1, k_2 \neq k} V_{kk_1k_2} u_{k_1}^{(0)} u_{k_2}^{(0)} \times \\ &\quad \times \cos(\omega_{k_1} t + \Phi_{k_1,(0)}) \cos(\omega_{k_2} t + \Phi_{k_2,(0)}) \delta_{k_1+k_2, k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь видно, что те волны с частотами ω_{k_1} , ω_{k_2} , для которых возможно выполнение равенства (25), приводят к появлению резонансных членов в силе $F(t)$ уравнения (26). Заметим, однако, что возникшая неустойчивость фиктивна в том смысле, что процесс взаимодействия трех волн (25) можно рассматривать как неустойчивость лишь на начальной стадии. В дальнейшем нелинейные члены в (26) подрастают, тогда выражение (27) становится несправедливым и рост u_k со временем прекращается.

Те виды спектров, для которых возможно выполнение условий (25), будем называть распадными в первом порядке. В противном случае спектр будет нераспадным в первом порядке. На рис. 10, 11 приведены примеры соответственно нераспадных и распадных в первом порядке спектров. Ясно, что равенства (25) являются простейшим случаем выполнения резонансных условий. Если спектр таков, что они не удовлетворяются, то можно говорить о распадах более высокого порядка. Например,

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4} \quad (k_1 + k_2 = k_3 + k_4) \quad (28)$$

и т. д.

Теперь можно обратиться к нашей основной задаче — выводу кинетического уравнения для волн без априорного предположения о хаотичности начальных фаз. При этом мы будем придерживаться той схемы, которая намечена в § 2 этой главы.

Ограничимся в (23) выписанными членами и учтем, что член порядка β^2 дает нелинейную поправку к частоте

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_k &\sim \beta^2 \frac{1}{\omega_k} \sum_{k_1+k_2=0} V_{kk_1} \overline{u_{k_1}^2}, \\ V_{kk_1} &= V_{kk_1 k_2 k_3} \delta_{kk_2} \delta_{k_1 k_3}; \quad \overline{u_k^2} = \int_0^{2\pi/\omega_k} dt u_k^2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Выражение для $\Delta\omega_k$ определено равенством (29) с точностью до численного коэффициента, точное значение которого в дальнейшем несущественно.

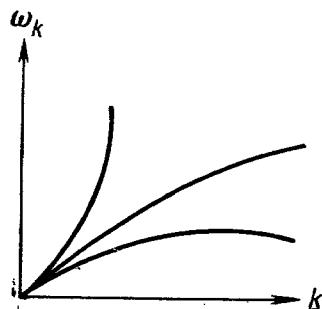


Рис. 10.

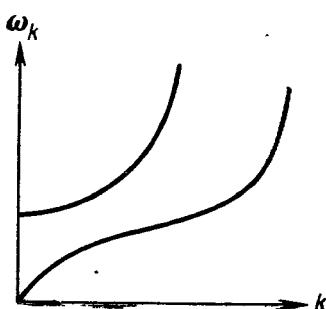


Рис. 11.

Перейдем к переменным действие — фаза (I_k , φ_k) и перепишем полный гамильтониан системы взаимодействующих волн в виде

$$\begin{aligned} H &= \sum_k (\omega_k + \Delta\omega_k(I)) I_k + \\ &+ \beta \sum_{k_1+k_2+k_3=0} \left(\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \right)^{1/2} \{ V_{k_1 k_2 k_3} \exp(i(\varphi_{k_1} + \varphi_{k_2} + \varphi_{k_3})) + \\ &+ 3V_{k_1 k_2 - k_3} \exp(i(\varphi_{k_1} + \varphi_{k_2} - \varphi_{k_3})) + \text{к. с.} \} \equiv \\ &\equiv H_0 + V_{\text{int}}, \text{ где } H_0 = \sum_k \omega_k I_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $\Delta\omega_k(I) = \Delta\omega_k(I_1, I_2, \dots)$ и не зависит от фаз; действие (имеющее смысл числа «квазичастот» — фононов)

и фаза определены соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sqrt{\frac{I_k}{\omega_k}} e^{i\varphi_k} + \sqrt{\frac{I_{-k}}{\omega_{-k}}} e^{-i\varphi_{-k}}, \\ \dot{u}_k &= i(\sqrt{I_k \omega_k} e^{i\varphi_k} - \sqrt{I_{-k} \omega_{-k}} e^{-i\varphi_{-k}}), \\ \omega_{-k} &= \omega_k; V_{k_1 k_2 k_3} = V_{-k_1, -k_2, -k_3}^*. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Как и ранее, введем функцию плотности $f(I, \varphi, t)$ в фазовом пространстве, удовлетворяющую уравнению Лиувилля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} &= \sum_k \left(\frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial \varphi_k} \frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial V_{\text{int}}}{\partial I_k} \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \right), \\ f(I, \varphi, t) &\equiv f(I_1, I_2, \dots; \varphi_1, \varphi_2, \dots; t) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и не содержащую никакой дополнительной информации, отличной от решений уравнений движения

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k + O(\beta^2), \quad \dot{I}_k = O(\beta).$$

Если перейти к представлению взаимодействия, то второй член в (32) исчезает, а в правой части следует всюду в аргументе f заменить φ_k на $(\varphi_k - \omega_k t)$. Поскольку f есть периодическая функция фаз φ_k , то можно записать

$$\left. \begin{aligned} f(I, \varphi, t) &= \sum_n [f^{(n)}(I, t) e^{i(n, \varphi)} + \text{к. с.}] \\ (n, \varphi) &\equiv \sum_k n_k \varphi_k; \quad f^{(n)} = (f^{(-n)})^*, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

или в представлении взаимодействия

$$f(I, \varphi, t) = \sum_n (f^{(n)}(I, t) e^{i(n, \varphi - \omega t)} + \text{к. с.}). \quad (34)$$

Пренебрежем временно нелинейной поправкой к частоте, тогда подстановка (30), (33) в (32) и переход к представлению взаимодействия дают

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} = -i\beta [Q_{n, n+1} f^{(n+1)} e^{-i[\omega]t} + Q_{n, n-1} f^{(n-1)} e^{i[\omega]t}], \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_{n,n\pm 1} = 3 \sum_{k_1 k_2 k_3} \left[V_{k_1, k_2, -k_3} \left(\frac{n_{k_1}}{2I_{k_1}} + \frac{n_{k_2}}{2I_{k_2}} - \frac{n_{k_3}}{2I_{k_3}} \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} \pm \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} \mp \frac{\partial}{\partial I_{k_3}} \right) \sqrt{\frac{I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3}}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}}} \delta_{[k],0} + \text{к.с.} \right], \\ [\omega] \equiv \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}; [k] \equiv k_1 + k_2 - k_3. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Кроме того, в выражении для Q отобраны только резонансные члены, для которых выполняются распадные (резонансные) условия (25) и которые дают основной вклад в $\partial f / \partial t$.

Проведенный до сих пор вывод уравнения (35) таков же, как и при получении управляющего кинетического уравнения для волн [26]. Наше дальнейшее исследование характеризуется двумя существенными отличиями от метода, развитого в [25, 26]:

1) отказ от гипотезы хаотических фаз при выборе начальных условий;

2) учет нелинейной поправки к частоте $\Delta\omega_k$.

Положим при $t = 0$

$$f(I, \varphi, 0) = \sum_n [f^{(n)}(I, 0) e^{i(n, \varphi)} + \text{к. с.}] \quad (37)$$

Как отмечалось в § 2 этой главы, ПХФ эквивалентно начальному условию $f(I, \varphi, 0) = f(I)$, т. е. все $f^{(n)} = 0$, за исключением $n = 0$.

Совершая в (35) преобразование Лапласа, получаем

$$pf_p^{(n)} - f^{(n)}(I, 0) = -i\beta [Q_{n,n-1} f_{p-i[\omega]}^{(n-1)} + Q_{n,n+1} f_{p+i[\omega]}^{(n+1)}]. \quad (38)$$

Из (38) следует уравнение для $f_p^{(0)}$:

$$pf_p^{(0)} - f^{(0)}(I, 0) = -i\beta [Q_{0,-1} f_{p-i[\omega]}^{(-1)} + Q_{0,1} f_{p+i[\omega]}^{(1)}]. \quad (39)$$

Проведем итерацию (39) до членов $\sim \beta^2$ включительно:

$$\begin{aligned} pf_p^{(0)} - f^{(0)}(I, 0) = -i\beta \left[Q_{0,-1} \frac{f^{(-1)}(I, 0)}{p - i[\omega]} + Q_{0,1} \frac{f^{(1)}(I, 0)}{p + i[\omega]} \right] \\ - \beta^2 Q_{0,-1} Q_{0,1} \frac{f^{(0)}(I, 0)}{p^2 + [\omega]^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Переходя к асимптотике при $t \rightarrow \infty$, т. е. $p \rightarrow 0$, и возвращаясь к t -представлению, находим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = -i\beta [Q_{0,-1} e^{-i[\omega]t} f^{(-1)}(I, 0) + Q_{0,1} e^{i[\omega]t} f^{(1)}(I, 0)] + \\ + 6\pi\beta^2 \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta([\omega]) \delta_{[k],0} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] f^{(0)}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{где } \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial I_{k_1}} + \frac{\partial}{\partial I_{k_2}} - \frac{\partial}{\partial I_{k_3}}.$$

Отличие уравнения (41) от управляющего кинетического уравнения Пригожина — Браута, имеющего фоккер-планковский вид, заключается в наличии членов $\sim \beta$, сохраняющих фазовую память системы о начальных условиях. Заметим, что если даже $f^{(\pm 1)}(I, 0) = 0$, то члены, содержащие фазовую память, появятся в более высоком порядке по β . Именно, они будут иметь порядок β^{n_0} , где n_0 соответствует наименьшему номеру отличной от нуля гармоники в разложении (37).

Итак, вся описанная выше ситуация принципиально та же, что и при выводе уравнения (14).

Для дальнейшего введем функцию распределения $F(I, t)$, получающуюся из $f^{(0)}(I, t)$ усреднением по начальным фазам $\Phi_{k,(0)}$:

$$F(I, t) = \langle\langle f^{(0)}(I, t) \rangle\rangle, \quad (42)$$

где $\langle\langle \dots \rangle\rangle \equiv \int_0^1 d\Phi_{k_1,(0)} d\Phi_{k_2,(0)} \dots d\Phi_{k_N,(0)}$, N — число степеней

свободы, т. е. число возбужденных в системе колебаний. При $t = 0$

$$F(I, 0) = f^{(0)}(I, 0).$$

Уравнение для F может быть получено из (41) путем интегрирования последнего по начальным фазам. Крайне важным является то, что в предположениях, сделанных при выводе (41), уравнение для $F(I, t)$ сохраняет исходный вид. Иными словами, усреднение по начальным фазам уравнения (41) не меняет его и фазовая память системы

сохраняется. Это связано с тем, что (41) не содержит пока членов, зависящих от $\varphi_{k,(0)}$. Положение дела меняется, если учесть нелинейную поправку к частоте. Ниже будет показано, что это приводит к зависимости члена первого порядка по β от $\varphi_{k,(0)}$, и будет получено условие, при котором усреднение по $\varphi_{k,(0)}$ приводит к кинетическому уравнению вида Фоккера — Планка.

§ 4. Нелинейное волновое поле. Критерий статистического описания

Опишем сначала качественно механизм хаотизации фаз волн. Пусть выполнены резонансные условия (25) для некоторых трех волн. Тогда развивается распадная неустойчивость, приводящая к росту амплитуды колебания, находящегося в резонансе. Наличие нелинейной поправки к частоте у этого колебания может привести к нарушению условий резонанса и прекращению неустойчивости. Возможна, однако, следующая ситуация: нарушение условия резонанса некоторого фиксированного колебания ω_1 с парой волн ω_2, ω_3 вследствие нелинейности частот приводит к возможности резонанса между ω_1 и другой парой волн ω_2', ω_3' . В случае, когда

$$\frac{\partial \Delta \omega_k}{\partial I_{k'}} \delta I_{k'} \gg \Omega_k, \quad (43)$$

гармоника с частотой ω_k быстро выходит из резонанса с любой парой волн из-за сильной нелинейности, но зато всегда попадает в резонанс с какой-либо другой парой волн. Левая часть (43) представляет собой изменение частоты $(\omega_k + \Delta \omega_k)$ вследствие резонансного возмущения, а правая часть — характерное расстояние между гармониками; δI_k — максимальное изменение числа фононов (действия), вызванное резонансом. Условие типа (43) рассматривалось в § 2 этой главы как условие хаотизации фазы нелинейного колебания во внешнем периодическом поле и перехода от динамического описания системы к статистическому (условие перекрытия резонансов). Заметим также, что условие (43) эквивалентно (20').

Для более детального исследования обратимся временно к исходному уравнению (23), из которого следуют (с учетом (29)) уравнения движения:

$$\ddot{u}_k + (\omega_k + \Delta \omega_k)^2 u_k \approx F(t), \quad (44)$$

где $F(t)$ имеет тот же смысл, что и в (27). Если считать теперь, что характерное расстояние между гармониками спектра Ω_k мало меняется на интервале возбужденного пакета волн, то нетрудно видеть, что (27) представляет собой разложение в ряд Фурье некоторой периодической функции с периодом Ω_k^{-1} .

Сделаем теперь очень важное предположение о достаточно большой ширине частотного интервала возбужденных колебаний:

$$N\Omega_k \gg \omega_k, \quad (45)$$

где N — число возбужденных колебаний; Ω_k и ω_k относятся к рассматриваемому интервалу частот, достаточно удаленных от правого края пакета. Тогда для таких частот ω_k сила $F(t)$ представляет последовательность очень узких временных импульсов (с шириной $\sim 1/(N\Omega_k)$), следующих периодически с частотой $\sim \Omega_k$. На каждом импульсе происходит изменение адиабатического инварианта колебания («рассеяние») на величину ΔI_k . Для оценки ΔI_k заметим, что вследствие очень малой (по сравнению с периодом колебания ω_k^{-1}) ширины импульса $F(t)$ его можно заменить приближенно на δ -функцию. Тогда вместо (27) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_k + (\omega_k + \Delta \omega_k)^2 u_k &\approx F_0 \sum_n \delta \left(t - \frac{n}{\Omega_k} \right), \\ F_0 &\sim \frac{V_k I_k}{\omega_k \Omega_k}; \quad V_k = V_{k,k,2k}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Если забыть временно о том, что представляет собой величина $\Delta \omega_k$, то задача становится буквально той же, что и в § 3 главы I. Теперь нам должно стать ясным, что нет необходимости знать точно ни нелинейность $\Delta \omega_k$, ни параметр внешней силы F_0 . Уравнение (46) допускает

движение с перемешиванием и условие стохастичности всегда может быть выполнено за счет свободного параметра Ω .

Анализ уравнения (46), проводимый ниже, будет немного отличаться от анализа аналогичного уравнения (15') главы I. Это связано с тем, что нелинейность k -й гармоники $\Delta\omega_k$, определенная в (29), обусловлена всеми другими степенями свободы и изменение амплитуды k -й волны вследствие резонанса приводит к изменению $\Delta\omega_k$ для любых k' .

Из (46) легко находим

$$\frac{\Delta I_{k,(n)}}{I_{k,(n)}} \approx \frac{F_0}{\omega_k u_{k,(n)}^{(0)}} \sin 2\varphi_{k,(n)} = \beta \frac{V_k I_{k,(n)}}{\omega_k^2 \Omega_k u_{k,(n)}^{(0)}} \sin 2\varphi_{k,(n)}, \quad (47)$$

где индекс (n) внизу относится к рассеянию на n -м импульсе. Теперь уравнение (46) может быть заменено системой в конечных разностях, аналогичной уравнениям (12а), (12), исследование которых нам известно:

$$\left. \begin{aligned} I_{k,(n+1)} &= I_{k,(n)} + \Delta I_{k,(n)}, \\ \varphi_{k,(n+1)} &= \left\{ \varphi_{k,(n)} + \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \frac{1}{\Omega_k} \sum_k \frac{\partial \Delta\omega_k}{\partial I_{k',(n)}} \Delta I_{k',(n)} \right\} = \\ &= \left\{ \varphi_{k,(n)} + \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk',(n)} \sin 2\varphi_{k',(n)} \right\}, \\ K_{kk',(n)} &= \frac{1}{\Omega_k} \frac{\partial \Delta\omega_k}{\partial I_{k',(n)}} \frac{\Delta I_{k',(n)}}{\sin 2\varphi_{k',(n)}}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

При $K_{kk'} \gg 1$ фаза колебания сильно меняется в результате рассеяния и можно ожидать (это и будет показано ниже), что в этом случае происходит переход от динамического описания системы к статистическому.

Перепишем формулы (47), (48) в более компактном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta I_{k,(n)}}{I_{k,(n)}} &= \frac{v_k}{\omega_k} \sin 2\varphi_{k,(n)} \ll 1, \quad \Delta\omega_k \approx \sum_{k'} \frac{v_{k'}^2}{\omega_{k'}}, \\ K_{kk',(n)} &\approx \frac{1}{\Omega_k} \frac{v_k v_{k'}^2}{\omega_k \omega_{k'}}, \quad v_k = \beta \frac{V_k I_{k,(n)}}{\omega_k \Omega_k u_{k,(n)}^{(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Если рассмотреть столь узкий пакет, что $N\Omega_k \ll \omega_k$, то характерная ширина импульса $F(t)$ становится много больше периода колебания волны. Такая сила является адиабатической. Изменение ΔI в результате рассеяния экспоненциально мало:

$$\frac{\Delta I_k}{I_k} \sim \exp \left(-\frac{\omega_k}{N\Omega_k} \right)$$

и, следовательно, экспоненциально малым оказывается и K .

Покажем, что неравенство $K_{kk'} \gg 1$ эквивалентно неравенству (43). Для этого проведем оценку величины $\delta I_{k'}$, входящей в (43). При резонансе к основному колебанию добавляется вынужденное с амплитудой

$$\Delta u_{k'} \sim \frac{\beta V_k u_{k'}^2}{\Delta},$$

где Δ — отклонение частоты от резонансного значения. В данном случае расстройка частоты связана с ее нелинейной зависимостью от u_k , т. е.

$$\Delta \sim \frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \delta I_{k'}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta I_{k'}}{I_{k'}} = \frac{\Delta u_{k'}}{u_{k'}} \sim \frac{\beta V_k u_{k'}}{\frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \delta I_{k'}},$$

или

$$\delta I_{k'} = \left(\frac{\beta V_k u_{k'} I_{k'}}{\frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подстановка полученного выражения в (43) дает

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial I_{k'}} \frac{\beta V_k u_{k'} I_{k'}}{\Omega_k^2} = \frac{v_{k'}^2 v_k}{\omega_k^2 \omega_{k'} \Omega_k} = K_{kk'} \gg 1. \quad (50)$$

Таким образом, условие (43) означает согласно (48) очень быстрое изменение фазы колебания вследствие рассеяния.

Полученные выше результаты позволяют решить основной вопрос — вывод условия, при котором можно перейти от динамического описания к статистическому для системы (30).

Обратимся к уравнению (41) и учтем в нем нелинейную поправку к частоте $\Delta\omega$. Как было показано, взаимодействие данного колебания со всеми остальными сводится к эффективному рассеянию фонона почти периодически во времени и изменению действия на величину ΔI за один акт рассеяния. Это означает, что величина $\Delta\omega(I)$ является функцией времени. Учтем это обстоятельство в множителях $\exp(\pm i[\omega]t)$, входящих в (41) в члены порядка β . Для этого заметим, что согласно (31)

$$(\omega + \Delta\omega)t = \varphi(t) - \varphi_{(0)} = \varphi_{(m)} - \varphi_{(0)},$$

где m — число актов рассеяния к моменту времени t :

$$m \approx t\Omega_k \gg 1.$$

С помощью (48) получим

$$\begin{aligned} (\omega_k + \Delta\omega_k)t &= \varphi_{k,(m-1)} + \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk'} \sin 2\varphi_{k',(m-1)} - \varphi_{k,(0)} = \\ &= \varphi_{k,(m-2)} + 2 \frac{\omega_k}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk'} \sin 2\varphi_{k',(m-2)} + \\ &+ \sum_{k''} K_{kk'} \sin 2 \left(\varphi_{k',(m-2)} + \sum_{k''} K_{k'k''} \sin 2\varphi_{k'',(m-2)} \right) - \\ &- \varphi_{k,(0)} = \dots \quad (51) \end{aligned}$$

(Знак дробной части мы здесь не пишем, как обычно, так как фаза всегда входит под знак тригонометрической функции, и в этом необходимости нет.) После окончания процесса итерации в (51) величина $(\omega_k + \Delta\omega_k)t$ будет выражена как функция t (номера m) и $\varphi_{k,(0)}$.

Для функции F , определенной выражением (42), уравнение (41) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -i\beta (Q_{0,-1} \langle\!\langle e^{-i[\Phi(t)-\Phi(0)]} \rangle\!\rangle f^{(-1)}(I, 0) + \\ &+ Q_{0,1} \langle\!\langle e^{i[\Phi(t)-\Phi(0)]} \rangle\!\rangle f^{(1)}(I, 0)) + \\ &+ 6\pi\beta^2 \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta([\omega]) \delta_{[k], 0} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] F, \\ [\Phi(t) - \Phi(0)] &\equiv \varphi_{k_1}(t) - \varphi_{k_1(0)} + \varphi_{k_2}(t) - \varphi_{k_2(0)} - \varphi_{k_3}(t) + \\ &+ \varphi_{k_3(0)}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где под знаком δ -функции можно сохранить только линейные частоты, что будет оправдано впоследствии.

Для того чтобы продвинуться дальше, нам необходимо вычислить выражение

$$\langle\!\langle e^{\pm i[\Phi(t)-\Phi(0)]} \rangle\!\rangle.$$

Рассмотрим два предельных случая.

Пусть $K_{kk'} \ll 1$ почти на всем интервале рассматриваемых частот. Тогда

$$\begin{aligned} (\omega + \Delta\omega)t &\approx \omega t + \Omega t O(K), \\ \langle\!\langle e^{\pm i[\omega + \Delta\omega]t} \rangle\!\rangle &\approx e^{\pm i[\omega]t} (1 + O(K\Omega t)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение для F имеет точно такой же вид, что и уравнение (41) для $f^{(0)}$, и фазовая память в системе сохраняется, по крайней мере, в течение времени

$$t \sim \frac{1}{K\Omega}.$$

Пусть теперь $K_{kk'} \gg 1$ почти для всех k, k' . В этом случае, оставляя в (51) наиболее быстро меняющиеся члены, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) - \varphi_{k,(0)} &= (\omega_k + \Delta\omega_k)t \approx \omega_k t - \varphi_{k,(0)} + \\ &+ \sum_{k_1} K_{kk'} \sin \left\{ 2 \sum_{k_2} K_{k_1 k_2} \sin \left[2 \sum_{k_3} K_{k_2 k_3} \dots \right. \right. \\ &\left. \left. \dots \sin \left(2 \sum_{k_m} K_{k_{m-1}, k_m} \sin 2\varphi_{k_m, (0)} \right) \right] \right\}. \quad (51') \end{aligned}$$

Учитывая, что $K_{kk'} \gg 1$, оценку нужного нам интеграла можно провести методом стационарной фазы. Это дает

$$\langle e^{\pm i[\omega + \Delta\omega]t} \rangle \sim e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \Omega N_0 \ln K,$$

где Ω и K — некоторые средние по пакету величины Ω_k и $K_{kk'}$.

Множитель N_0 характеризует число групп резонансно взаимодействующих волн, причем в каждой такой группе одна гармоника фиксирована, а две другие произвольны. Обычно, за исключением специальных условий, число $N_0 \sim N$, где N — полное число гармоник в пакете. Появление множителя N_0 указывает на роль числа степеней свободы в процессе хаотизации фаз волн.

Полученный результат решает задачу. За время порядка τ члены первого порядка по β в (52) исчезают, и уравнение для F принимает вид уравнения Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi\beta^2 \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta([\omega]) \delta_{[k], 0} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] I_{k_1} I_{k_2} I_{k_3} \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] F. \quad (53)$$

Время τ , таким образом, можно рассматривать как время исчезновения фазовой корреляции в системе (41). Равновесным решением уравнения (53) является [25]

$$F = F \left(\sum_k \frac{I_k}{\omega_k} \right).$$

Характерное время установления стационарного состояния τ_0 определяется из (53):

$$\tau_0^{-1} \sim \frac{v^2}{\omega}.$$

Это время должно быть много меньше времени, связанного с размытием $\delta([\omega])$ в (53) вследствие нелинейной поправки к частоте. Отсюда, используя (50), получаем

$$\tau_0^{-1} \frac{\omega^2}{v^3} \sim \frac{\omega}{v} \gg 1.$$

Последним неравенством оправдано пренебрежение нели-

нейными поправками к частоте в аргументе δ -функции, входящей в (52).

Из (53) можно получить бесконечную цепочку уравнений для моментов $\langle I_k \rangle$. Действительно, умножая (53) на $I_{k'}$ и интегрируя по всему фазовому пространству функции F , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle I_k \rangle}{\partial t} &= 18\pi\beta^2 \sum_{k_1 k_2 k_3} \frac{|V_{k_1, k_2, -k_3}|^2}{\omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \times \\ &\times (\delta_{k_1 k} + \delta_{k_2 k} - \delta_{k_3 k}) \delta_{k_1+k_2, k} (\langle I_{k_2} I_{k_3} \rangle + \langle I_{k_1} I_{k_3} \rangle - \langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle). \end{aligned} \quad (54)$$

Аналогичным способом можно получить уравнения для более высоких моментов $\langle I_{k_1} I_{k_2} \dots \rangle$.

В теории твердого тела [31] и теории плазмы [32] очень часто пользуются кинетическим уравнением для фононов, получающимся из (54) в предположении расцепления моментов:

$$\langle I_{k_1} I_{k_2} \rangle = \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle. \quad (55)$$

Подстановка (55) в (54) приводит к кинетическому уравнению для среднего числа фононов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle I_k \rangle}{\partial t} &= 18\pi\beta^2 \sum_{k_1 k_2} \frac{|V_{k, k_1, -k_2}|^2}{\omega_k \omega_{k_1} \omega_{k_2}} \{ 2 [\langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle + \\ &+ \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle] \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \delta_{k+k_1, k_2} - \\ &- [\langle I_k \rangle \langle I_{k_1} \rangle + \langle I_k \rangle \langle I_{k_2} \rangle - \langle I_{k_1} \rangle \langle I_{k_2} \rangle] \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \times \\ &\times \delta_{k, k_1+k_2} \}. \end{aligned} \quad (56)$$

В заключение сделаем следующие замечания.

1. Выполнение условия (50) почти для всех k, k' приводит к хаотизации фаз волн за время порядка τ . Полученный результат имеет ту же интерпретацию, что и в главе I.

Рассмотрим для простоты изменение фазы отдельного колебания. Пусть $\delta\phi_{k,(n)}$ есть расстояние между двумя значениями фазы на единичной окружности в момент времени, характеризуемый номером n . Тогда согласно (48)

$$\frac{\delta\phi_{k,(n+1)}}{\delta\phi_{k',(n)}} \approx 2K_{kk'} \cos 2\phi_{k',(n)} \equiv \hat{T}'_n(k, k'). \quad (57)$$

При $K_{kk'} \gg 1$ преобразование (57) является преобразованием растяжения, исключая малую область $\phi_{k'}$ размером $\sim K^{-1} \ll 1$. Ввиду большого числа степеней свободы статистический вес подобного рода областей в течение времени, соответствующего $m \gg 1$ шагов, очень мал. Поэтому преобразование \hat{T}_n , будучи примененным достаточно большое число раз при $K \gg 1$, и означает наличие неустойчивости относительно малых возмущений начальных условий. Условие $K \sim 1$ можно рассматривать как границу стохастичности.

2. Остановимся на следствиях из условия хаотизации фаз (50). Перепишем его в виде

$$K_{kk'} = \frac{\partial \Delta\omega_k}{\partial I_{k'}} I_{k'} \frac{v_k}{\omega_k} \frac{1}{\Omega_k} \gg 1. \quad (58)$$

Обычно для большинства реальных систем $\Delta\omega$ зависит степенным образом от I , так что

$$K_{kk'} = \frac{\Delta\omega_{kk'}}{\Omega_k} \frac{v_k}{\omega_k} \gg 1, \quad \Delta\omega_k = \sum_{k'} \Delta\omega_{kk'}. \quad (58')$$

Кроме того, обычно $K_{kk'}$ пропорциональна положительным степеням k, k' . Отсюда следует, что колебания с достаточно длинными волнами не хаотизируются.

Для уравнения (53) существует граница k_0 , ниже которой оно теряет смысл. Величина k_0 может быть получена из оценки:

$$K_{k_0 k_0} \sim 1.$$

Действие границы k_0 аналогично наличию отражающей стенки для квазичастиц [10]. Из (58) следует также, что в областях аномальной дисперсии, где

$$\Omega_k = \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \Delta k \rightarrow \infty,$$

могут произойти срыв стохастичности и возникновение областей устойчивого движения.

Кроме того, для выполнения условия (58) нелинейность $\Delta\omega$ должна быть достаточно большой. При сколь угодно

малой нелинейности можно применять теорему об устойчивости Колмогорова — Арнольда — Мозера.

3. В рассматривавшейся до сих пор модели условие резонансов

$$\sum n_j \omega_j = 0$$

имело вид (см. (25))

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \quad k_1 = k_2 + k_3.$$

Выполнение (25) обеспечивается соответствующим видом закона дисперсии $\omega = \omega(k)$. Может оказаться, что для рассматриваемого спектра $\omega(k)$ процессы типа (25) запрещены и резонансные условия могут удовлетворяться только для числа волн, большего чем три. Так, например, кинетическое уравнение в предположении хаотических фаз для четырехфононных взаимодействий типа

$$\begin{aligned} 2\omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, & 2k_1 &= k_2 + k_3, \\ \omega_{k_1} + \omega_{k_2} &= \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, & k_1 + k_2 &= k_3 + k_4 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (59)$$

можно найти в работе В. Е. Захарова [33]. В случае выполнения резонансных условий произвольного вида критерий стохастичности (58) может быть сохранен с соответствующей заменой величин $\Delta\omega_k$ и v_k .

4. Проблема Ферми — Паста — Улама оказывается связанный с условиями резонанса типа (59). Вывод соответствующего критерия стохастичности и численное исследование задачи проведены в работе [29] и более подробно в [55]. Численному анализу двумерного случая посвящена работа [56].

ГЛАВА III

ЭРГОДИЧСКИЙ СЛОЙ

§ 1. Вводные замечания

Эта глава существенно расширит круг рассматриваемых задач и возможности анализа динамических систем. До сих пор мы рассматривали такие примеры, в которых характер движения, динамический или стохастический, определялся внутренними параметрами системы и параметрами возмущения. Обычно довольно часто приходится иметь дело с задачами, в которых движение системы может быть финитным и нефинитным в зависимости от начальных условий. Траектории системы на фазовой плоскости, соответствующие этим двум типам движений, разделены некоторой кривой — сепаратрисой. Важной задачей является исследование влияния возмущений на движение системы вблизи сепаратрисы. Обычно с положением сепаратрисы связана особенность решения уравнений движения системы, и это создает определенные трудности в проблеме.

Ниже мы покажем, что вблизи сепаратрисы под влиянием малых возмущений создается область перемещивающегося движения системы. Эту область мы будем называть в дальнейшем *эргодическим слоем*, и условия его возникновения начнем исследовать с задачи, интересной для различных физических приложений.

§ 2. Движение частицы в периодическом поле

Невозмущенные уравнения описывают одномерное движение заряженной частицы в поле, создаваемом бегущей волной, т. е.

$$m\ddot{x} = -eE_0 \sin(k_0x - \omega_0 t). \quad (1)$$

Возмущение движения (1) выберем также в виде некоторой бегущей волны [34] с амплитудой E_1 :

$$m\ddot{x} = -eE_0 \sin(k_0x - \omega_0 t) - eE_1 \sin(k_1x - \omega_1 t). \quad (2)$$

Введем параметр ε , характеризующий малость возмущения:

$$\varepsilon = E_1/E_0 \ll 1.$$

Невозмущенное движение (1) можно представить как движение в периодически зависящем от координаты поле с потенциалом $\varphi(x)$ (рис. 12). Для этого достаточно перейти в

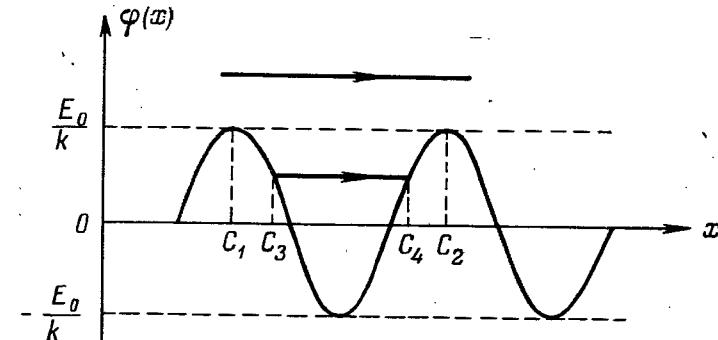


Рис. 12.

систему координат, движущуюся вдоль оси x со скоростью, равной фазовой скорости невозмущенной волны ω_0/k_0 . Уравнение (2) в этом случае приобретает вид

$$t_0 \dot{V} = -\sin y - \varepsilon \sin(\kappa y + \alpha t), \quad (3)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} y &= k_0x - \omega_0 t; & V &= t_0(k_0\dot{x} - \omega_0) = t_0\dot{y}, \\ t_0 &= \sqrt{\frac{m}{ek_0E_0}}; & \kappa &= \frac{k_1}{k_0}; & \alpha &= k_1\left(\frac{\omega_0}{k_0} - \frac{\omega_1}{k_1}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поясним смысл введенных обозначений: y — безразмерная координата в системе координат, движущейся с фазовой скоростью основной волны; V — безразмерная скорость в той же системе; t_0 — средний период колебаний частицы в потенциальной яме; α — параметр, имеющий

размерность частоты и характеризующий разность фазовых скоростей основной волны и волны возмущения.

На рис. 13 изображены невозмущенные траектории частицы на фазовой плоскости. Стрелками указаны сепаратрисы, отделяющая «захваченные» частицы (финитные) от «пролетных» (нефинитных).

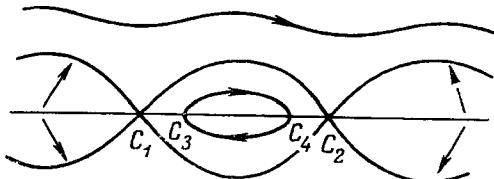


Рис. 13.

далеешем будет показано, что исследование движения пролетных частиц проводится аналогичным образом.

Воспользуемся безразмерным гамильтонианом невозмущенного движения

$$H = \frac{1}{2} V^2 - \cos y \quad (5)$$

и введем переменные: действие (I) — фаза (ϑ):

$$\left. \begin{aligned} I = I(H) &= \frac{1}{2\pi} \oint V dy = \\ &= \frac{8}{\pi} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, q\right) - (1 - q^2) F\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \right], \\ q^2 &= \frac{1 + H}{2}, \quad \vartheta(y, I) = \frac{\partial S(y, I)}{\partial I}, \quad S(y, I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^y dy V, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где F и E — соответственно эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Уравнение движения (3) при $\varepsilon = 0$ в новых переменных принимает вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\vartheta} = \omega(I),$$

где частота ω определена выражением

$$\tau_0 \omega(I) = \frac{dH(I)}{dI} = \frac{\pi}{2F\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}. \quad (7)$$

При наличии возмущения

$$\dot{I} = \frac{dI}{dH} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \dot{V} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right) = -\frac{\varepsilon}{\omega \tau_0^2} V \sin(\kappa y + \alpha t), \quad (8)$$

причем величина y в аргументе синуса предполагается выраженной как функция от (I, ϑ) . Изменение фазы ϑ под влиянием возмущения будет исследовано ниже.

Прежде всего, попытаемся выяснить спектр невозмущенной скорости частицы. Это оказывается совсем не сложно благодаря тому, что известно точное решение невозмущенной задачи. При $\varepsilon = 0$ из (3) имеем

$$F(q, z) = F(q_0, z_0) + \frac{t}{\tau_0},$$

где переменная z вводится уравнением

$$\sin \frac{y}{2} = q \sin z,$$

а q_0, z_0 — начальные условия. Отсюда

$$V = 2q \cos y = 2q \operatorname{cn} \left[F(q_0, z_0) + \frac{t}{\tau_0} \right],$$

где cn — эллиптический косинус. Опуская для простоты начальные условия $F(q_0, z_0)$, что эквивалентно изменению начала отсчета времени, имеем следующее разложение $V(t)$ в ряд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} V &= 2q \operatorname{cn} \frac{t}{\tau_0} = \frac{4\pi}{F} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1 + a^{2n-1}} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi t}{2\tau_0 F} \right] = \\ &= 8\omega \tau_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1/2}}{1 + a^{2n-1}} \cos [(2n-1)\omega t]; \\ a &= \exp \left(-\pi \frac{F'}{F} \right), \quad F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, q\right), \quad F' \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-q^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как станет ясно в дальнейшем, эргодический слой возникает вблизи сепаратрисы, и поэтому рассмотрим сразу

движение частицы в этой области. Близко от сепаратрисы имеем

$$H \rightarrow 1, \quad q \rightarrow 1, \quad \omega\tau_0 \rightarrow 0$$

и, как следствие этого,

$$\left. \begin{aligned} F &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{32}{1-H}, \quad \omega\tau_0 \approx \frac{\pi}{\ln \frac{32}{1-H}}, \\ F' &\approx \frac{\pi}{2}, \quad a \approx \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ln \frac{32}{1-H}}\right) = \exp(-\pi\omega\tau_0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что характерная ширина спектра $V(t)$ определяется числом фурье-гармоник n_0 :

$$n_0 \sim \frac{\pi}{|\ln a|} = \frac{1}{\omega\tau_0} \gg 1. \quad (11)$$

Это означает, что скорость V как функция времени для частиц, движущихся вблизи сепаратрисы, имеет почти постоянное значение $V_0 \sim 2$, локализованное в очень узкой области времен порядка τ_0 и периодически повторяющееся с периодом $\omega^{-1} \gg \tau_0$. Это обстоятельство является очень важным, так как острота импульсов в правой части уравнения (8), связанная с описанным поведением скорости, может привести к существенному изменению действия I частицы. Заметим, что, вообще, ситуация становится очень близкой к описанной в § 2 главы II, так как правая часть (8) содержит периодически следующие δ -образные импульсы. Попутно заметим, что для частиц, движущихся достаточно далеко от сепаратрисы, величина $\omega\tau_0 \sim 1$ и, следовательно, $n_0 \sim 1$, т. е. в этом случае возмущение близко к адиабатическому.

Для определения критерия стохастичности выделим сначала в правой части уравнения (8) резонансные члены. Учитывая разложение (9), имеем следующее условие резонанса:

$$\tau_0\omega(I_s) = \frac{\alpha\tau_0}{s}, \quad (12)$$

где s — произвольное целое нечетное число, которое будем называть номером резонанса, I_s — значение действия, соответствующее резонансной частоте.

Ограничимся для начала исследованием случая

$$\alpha\tau_0 \sim 1. \quad (13)$$

Тогда

$$\tau_0\omega(I_s) \sim \frac{1}{s} \quad (13')$$

и, поскольку вблизи сепаратрисы $\tau_0\omega \ll 1$, то условие (13') может выполняться лишь для $s \gg 1$. Теперь легко определить расстояние Ω_s между частотами, соответствующими двум соседним резонансам с номерами s и $s+2$:

$$\Omega_s = \omega(I_s) - \omega(I_{s+2}) \approx \frac{2}{\tau_0 s^2} \sim \tau_0 \omega^2(I_s). \quad (14)$$

В отличие от всех рассматриваемых до сих пор моделей в данном случае расстояние между резонансами оказывается переменной величиной, зависящей от действия частицы.

Теперь мы можем записать условие стохастического движения частицы в виде, аналогичном условию (20') в главе II:

$$\left| \frac{d\omega(I_s)}{dI} \right| \delta I_s \gg \Omega_s = \tau_0 \omega^2(I_s), \quad (15)$$

где δI_s по-прежнему имеет смысл максимального изменения действия частицы в s -м резонансе.

Для определения δI_s проинтегрируем (8) по интервалу времени $\geq \tau_0$ в окрестности s -го резонанса, считая сдвиг частоты достаточно малым:

$$\left| \frac{d\omega(I_s)}{dI} \right| \delta I_s \ll \omega(I_s). \quad (16)$$

Заметим, что неравенство (16) совместно с неравенством (15), так как $\tau_0\omega \ll 1$. В области, где (16) несправедливо, оценку δI_s следует делать несколько другим способом, чем описываемый ниже.

Итак, учитывая (16), получаем из (8), (9) путем интегрирования

$$\delta I_s \sim \frac{a^{\frac{s-1}{2}}}{1+a^{2s-1}} \frac{4s}{\tau_0 s \left| \frac{d\omega(I_s)}{dI} \right| \delta I_s}.$$

Из (10), (11) и (13') следует $a \sim 1$, и это дает

$$\delta I_s \sim \left[\frac{2\varepsilon\omega(I_s)}{\left| \frac{d\omega(I_s)}{dI} \right|} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, условие стохастичности (15) принимает вид

$$\bar{K} \equiv \frac{\left| \frac{d\omega}{dI} \right| \delta I}{\Omega} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\tau_0^2 \omega^3} \left| \frac{d\omega}{dI} \right|} \gg 1. \quad (15')$$

Вычисляя с помощью (10) производную от частоты вблизи сепаратрисы

$$\left| \frac{d\omega}{dI} \right| = \left| \frac{d\omega}{dH} \right| \left| \frac{dH}{dI} \right| = \frac{\tau_0^2 \omega^3}{32\pi} \exp\left(\frac{\pi}{\tau_0 \omega}\right),$$

получаем окончательно

$$\bar{K}^2 = \frac{\varepsilon}{16\pi} \exp\left(\frac{\pi}{\tau_0 \omega}\right) \gg 1. \quad (15'')$$

Так же как это было до сих пор, границу стохастичности можно определить приближенно из условия $\bar{K} \gtrsim 1$. Отсюда сразу следует граничное значение частоты $\bar{\omega}$, отделяющей область динамического описания частицы ($\omega > \bar{\omega}$) от области стохастического описания ($\omega < \bar{\omega}$) (с точностью до ширины переходной области):

$$\bar{\omega} \tau_0 = \frac{\pi}{\ln \frac{16\pi}{\varepsilon}}. \quad (17)$$

Из второй формулы в (10) и (17) находим также границу стохастичности \bar{H} по энергии:

$$1 - \bar{H} = \frac{2}{\pi} \varepsilon \sim \varepsilon. \quad (18)$$

Мы показали, что в области частот

$$0 \ll \omega \ll \bar{\omega} \quad (19)$$

происходит эффективное перемешивание траекторий частицы.

Прежде чем остановиться на вопросах, вытекающих из этого результата, и на уточнениях, необходимых для приведенного вывода области (19), обратимся к качественной стороне явления.

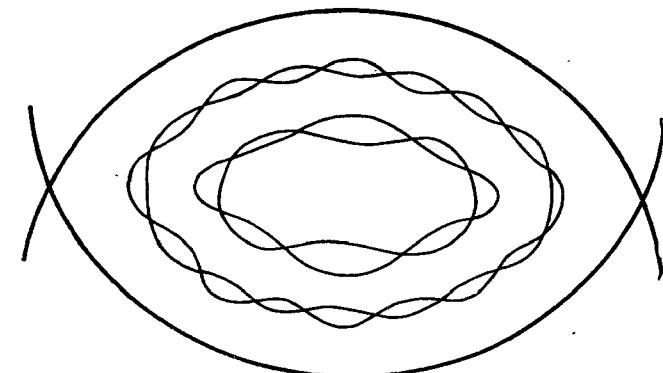


Рис. 14.

Рассмотрим сначала область частот, в которой $\bar{K} \ll 1$. Каждой резонансной гармонике s в правой части уравнения (8) соответствует интеграл движения

$$\psi_s(I - I_s, \Theta, t) = 0, \quad (20)$$

соответствующий хорошо известному из теории нелинейных колебаний захвату вблизи резонанса. Каждый интеграл типа (20) порождает свою локальную сепаратрису типа «ожерелья» (рис. 14), отделяющую траектории частиц, захваченных вблизи s -го резонанса от незахваченных. Число ячеек в ожерелье соответствует номеру резонанса и каждая ячейка аналогична той, с которой мы начали рассмотрение задачи (рис. 13). Ширина ячейки s -го резонанса по частоте определяется с помощью уже введенной нами величины δI_s :

$$\delta\omega(I_s) = \left| \frac{d\omega(I_s)}{dI} \right| \delta I_s.$$

По мере приближения к сепаратрисе расстояние между резонансами (14) стремится к нулю, а ширина ячеек

в ожерельях растет. В итоге, начиная с некоторых значений частоты $\omega \ll \bar{\omega}$, понятие отдельного ожерелья теряет смысл. Частица «обобществляется» между большим числом резонансов и спектр движения становится близким к сплошному. Это и есть уже полученная выше область стохастического движения частицы, т. е. движения, обладающего свойствами перемешивания.

Для определения границы стохастичности (15') мы могли бы поступить так, как это делалось до сих пор, введя преобразование \hat{T}_n на интервале времени между двумя последовательными рассеяниями частицы (т. е. существенными изменениями действия). Для этого вспомним, что скорость как функция времени $V(t)$ локализована в очень узком, по сравнению с другими масштабами, интервале времени $\sim \tau_0$ и что воздействие правой части (8) на движение происходит поэтому толчками от резонанса к резонансу с интервалами между толчками $\sim \Omega^{-1}$. Благодаря этому между толчками мы можем записать невозмущенные уравнения движения частицы. На каждом толчке происходит скачкообразное изменение величин I , ϑ (рассеяние), и мы легко можем записать уравнения в конечных разностях, аналогичные системе (12a), (12) из главы II:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \Delta I_n, \\ \vartheta_{n+1} &= \left\{ \vartheta_n + \omega(I_n) T + \frac{d\omega(I_n)}{dT} \Delta I_n T \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $T = 2\pi/\Omega$, фаза ϑ измеряется в единицах 2π , фигурные скобки {} означают по-прежнему дробную часть аргумента, ΔI — скачок действия на толчке:

$$\Delta I_n = \frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I_n)} \int dt V(t) \sin(ky + \alpha t) \approx \frac{\varepsilon}{\tau_0 \omega(I_n)} \Psi_n. \quad (22)$$

Здесь интеграл берется в окрестности момента времени t_n непосредственно перед n -м толчком; I_n , ϑ_n — значения переменных в момент t_n ; $t_{n+1} - t_n = T = \frac{1}{\tau_0 \omega^2(I_n)}$, $\Psi_n = \Psi_n(I_n, \vartheta_n, t_n)$ — некоторая периодически зависящая от ϑ_n , t_n функция, для которой $|\Psi_n| \leq 1$ и конкретный вид Ψ_n в дальнейшем не понадобится.

Учитывая (22), перепишем уравнение для фаз из системы (21) в привычном виде:

$$\dot{\vartheta}_{n+1} = \{\vartheta_n + \omega(I_n) T + K_n \psi_n\}, \quad K_n = \left| \frac{d\omega(I_n)}{dT} \right| \frac{\varepsilon}{\tau_0^2 \omega^3}. \quad (23)$$

Преобразование (23) приводит к расщеплению корреляции фаз при условии $K_n \gg 1$. С другой стороны, $\bar{K}^2 = K$ согласно (15'), и, таким образом, мы приходим к неравенству (15'').

Пользуясь свойствами преобразования типа (21), исследованным в главах I и II, мы можем записать время расщепления корреляции фаз:

$$\tau = \frac{1}{\Omega \ln K} = \frac{1}{\tau_0 \omega^2 \ln K}. \quad (24)$$

Для того чтобы закончить рассмотрение области, в которой движение частицы является стохастическим, обратимся к пролетным частицам. Фазовым траекториям, лежащим внутри сепаратрисы на рис. 13, соответствуют значения интеграла энергии $H < 1$, а пролетным частицам — значения $H > 1$. Определим в этом случае переменные (I , ϑ) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I &= I(H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(H, y) dy = \frac{8}{\pi} q E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{q} \right), \\ q^2 &= \frac{1+H}{2}, \\ \vartheta(y, I) &= \frac{\partial S(y, I)}{\partial I}, \\ S(y, I) &= \frac{4}{2\pi} \int_0^y V dy = \frac{2q}{\pi} E \left(\frac{y}{2}, \frac{1}{q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Это дает, как и ранее,

$$\dot{\vartheta} = \omega(I) = \frac{dH(I)}{dI}, \quad V(t) = 2q dn \left(\frac{t}{t_0} \right). \quad (26)$$

Формулы (25), (26) полностью аналогичны соответствующим формулам для захваченных частиц. Уравнение (8)

для I сохраняет форму и вблизи сепаратрисы ($H \rightarrow 1$)

$$\omega \tau_0 \approx \frac{\pi \sqrt{\frac{H+1}{2}}}{\ln \frac{16(1+H)}{H-1}} \approx \frac{\pi}{\ln \frac{32}{H-1}},$$

а скорость $V(t)$ представляет последовательность локализованных на интервале $\sim \tau_0$ импульсов. Таким образом,

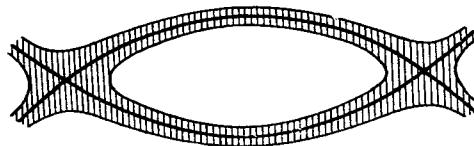


Рис. 15.

пролетные частицы вблизи сепаратрисы ведут себя аналогично захваченным частицам, а сепаратриса окружена с двух сторон (симметрично) областью движения с перемешиванием. Эта область будет называться в дальнейшем эргодическим слоем (заштрихованная часть на рис. 15).

Интересно, что рассмотренный пример допускает, несмотря на свою сложность, очень наглядную интерпретацию. Для этого необходимо вспомнить задачу о фермиевском ускорении частицы, изучавшуюся в § 2Б первой главы. Действительно, правая часть уравнения (8) играет в данном случае роль периодически движущейся плиты. По мере приближения к сепаратрисе частота частицы стремится к нулю и, начиная с некоторого значения действия, колебания возмущения имеют большую частоту по сравнению с колебаниями частицы. Именно в этом случае возникла стохастичность в задаче об ускорении Ферми.

Сделаем теперь некоторые важные замечания, связанные с полученными результатами.

1. Мы не можем доказать существование четкой границы, отделяющей эргодический слой от области динамического описания частицы. Скорее всего, как это и отмечалось до сих пор, существует вблизи $\omega = \bar{\omega}$ некоторая переходная область, ширина которой неизвестна.

2. Эргодический слой не является однородным. В нем существуют области размером $\sim K^{-1}$, внутри которых перемешивания не происходит. Действительно, критерий растяжения Я. Г. Синая, примененный к уравнению (23), дает

$$\frac{\delta \vartheta_{n+1}}{\delta \vartheta_n} \sim K_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \vartheta_n} > 1. \quad (27)$$

Отсюда следует, что в областях, где $(\partial \psi_n / \partial \vartheta_n)$ близка к нулю, критерий стохастичности (27) не выполняется. Существует более сильное утверждение [35]: вблизи сепаратрисы есть траектории, устойчивые сколь угодно долго.

3. В работе [34] проведено исследование ширины эргодического слоя в зависимости от параметра $\alpha \tau_0$. В рассмотренном нами случае ($\alpha \tau_0 \sim 1$) эта ширина максимальна.

4. В области, где $K \ll 1$ и ожерелья, порождаемые резонансами (рис. 14), имеют смысл, можно в каждой ячейке ожерелья применить метод, изложенный в этом параграфе. Это дает возможность исследовать траектории, устойчивые в первом приближении, а в качестве возмущения рассмотреть отброшенные члены более высокого порядка. Поскольку согласно (17), (18) эргодический слой существует вблизи сепаратрисы при любых сколь угодно малых ϵ , то априори можно утверждать, что в каждой ячейке ожерелья также возникает эргодический слой. Кроме того, внутри каждой ячейки ожерелья первого порядка возникнут ожерелья второго порядка, которые также будут обрасти эргодическими слоями, и т. д. Исследование «тонкой структуры» ожерелей проводилось Б. В. Чириковым [36], который показал, что такого рода явление разрушения интегралов движения действительно имеет место.

5. Движение частицы внутри эргодического слоя можно описать с помощью кинетического уравнения (см. работу [34]). Мы не будем останавливаться на этом, однако одно обстоятельство заслуживает внимания. Область стохастического движения частицы ограничена по энергии сверху и снизу. Поскольку движение частицы внутри эргодического слоя и движение вне его качественно совершенно различны, то следует ожидать, что частица, движущаяся в области стохастичности, не может попасть в область

динамического описания [10]. Это приводит к граничным условиям на краях эргодического слоя, выражающим отсутствие потока частиц из него. Отсюда сразу следует существование некоторого равновесного распределения частиц по энергиям внутри эргодического слоя.

6. Вместо рассмотренного движения частицы в периодическом потенциале можно было бы рассмотреть произвольный нелинейный осциллятор, траектории которого на фазовой плоскости имеют сепаратрису. Относительно такой динамической системы можно утверждать, что любое возмущение, периодическое по времени, приводит к образованию вблизи сепаратрисы эргодического слоя.

§ 3. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Постановка задачи

К рассмотренной только что задаче оказывается очень близкой так называемая проблема существования и устойчивости магнитных поверхностей. Она возникла в связи с исследованием возможности создания замкнутых магнитных ловушек для удержания плазмы и уже давно переросла то узко практическое содержание, которое вкладывалось в эту задачу первоначально. Оказалось, что задача об устойчивости магнитных поверхностей тесно связана с общими проблемами существования и устойчивости интегралов динамических систем (см., например, [16, 37]). Физическая сторона проблемы заключается кратко в следующем.

В определенном приближении движение заряженных частиц плазмы, помещенной в магнитное поле, происходит по спиралевидным траекториям, ось которых совпадает с некоторой силовой линией магнитного поля. При всяком искажении магнитного поля траектория частицы изменяется так, как будто последняя прикреплена к силовой линии. Поэтому принято считать, что в рассматриваемом приближении для удержания плазмы в ограниченном объеме необходимо создать систему с такой конфигурацией магнитного поля, чтобы, по крайней мере, силовые линии последнего занимали ограниченный объем. В связи с подобной задачей примерно в конце 50-х годов началось исследование геометрии силовых линий различных

магнитных конфигураций. При этом оказалось, что в некоторых случаях, представляющих определенного рода практический интерес, отдельная силовая линия как бы наматывается на цилиндрическую поверхность, не сходя с нее. Такого рода поверхности стали называть магнитными [38]. Наличие магнитных поверхностей, естественно, приводит к финитному движению отдельной частицы в плоскости, и такую конфигурацию магнитного поля принято считать желаемой. К сожалению, реальные конфигурации всегда отличаются от подобного рода «идеальных» построений и здесь возникает упомянутая проблема: как влияют возмущения на уже существующие (в нулевом приближении) магнитные поверхности?

Перейдем теперь к формальной стороне проблемы. Подробное изложение необходимых сведений по этому вопросу можно найти в обзоре Морозова и Соловьева [39], и мы ограничимся лишь самым нужным для дальнейшего минимумом.

Пусть задано магнитное поле

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z).$$

Уравнение силовых линий поля определяется из системы

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z},$$

которую мы перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{B_x(x, y, z)}{B_z(x, y, z)}, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{B_y(x, y, z)}{B_z(x, y, z)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Систему (28) можно рассматривать как уравнения движения силовой линии, в которых координата z играет роль времени. Предположим теперь, что существует для (28) точный интеграл движения

$$H = H(x, y, z). \quad (29)$$

Уравнение (29) определяет семейство поверхностей

$$z = z(x, y, H). \quad (29')$$

Сечение поверхности (29') плоскостью $z = \text{const}$ определяет кривую

$$y = y(x, H, z = \text{const}). \quad (29'')$$

В случае, когда кривая (29'') является замкнутой для всех z (рис. 16), мы будем говорить о существовании магнитной поверхности (29') или (29'').

В качестве «идеальной» конфигурации в дальнейшем будет выбрана гармоника прямого винтового магнитного поля, представляющего собой одну из практически наиболее интересных моделей. Такое поле задается с помощью скалярного потенциала Φ в виде

$$\Phi = B_0 z + L b I_n \left(n \frac{r}{L} \right) \sin n \left(\varphi - \frac{z}{L} \right); \quad \mathbf{B} = \nabla \Phi, \quad (30)$$

где L — шаг винта, I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента, n — целое положительное число. Цилиндри-

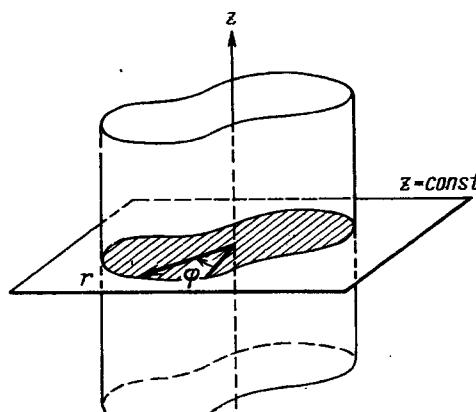


Рис. 16.

ческие координаты r, φ, z обозначены на рис. 16. В этих координатах система (28) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{B_r}{B_z}; \\ r \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{B_\varphi}{B_z}, \\ B_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ B_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ B_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

Удобно в дальнейшем перейти к безразмерным переменным, положив

$$B_0 = L = 1.$$

Кроме того, для простоты все иллюстрации будут относиться к случаю $n = 3$.

Введем новую переменную

$$\Theta = \varphi - z$$

и перепишем (28'') с помощью (30) в виде

$$\left. \begin{aligned} B_r &= bnI_n'(nr) \sin n\Theta, & B_\varphi &= \frac{bn}{r} I_n(nr) \cos n\Theta, \\ B_z &= 1 - bnI_n(nr) \cos n\Theta; & & \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} B_z \frac{dr}{dz} &= bnI_n'(nr) \sin n\Theta, \\ B_z \frac{d\Theta}{dz} &= -1 + bn \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) I_n(nr) \cos n\Theta, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу, а B_z в уравнениях (32) предполагается выраженным как функция (r, Θ) с помощью (31). Очевидным интегралом уравнений движения силовых линий (32) является

$$H = \frac{1}{2} r^2 - brI_n'(nr) \cos n\Theta, \quad (33)$$

и теперь становится ясно, что мы имеем дело с усложненным вариантом задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе. Выражение (33) определяет уравнение магнитных поверхностей:

$$r = r(\Theta, H).$$

Семейство полученных кривых изображено (напоминаем: для $n = 3$) на рис. 17. Жирной линией обозначена сепаратриса, отделяющая финитные движения от нефинитных.

Покажем теперь, что уравнения движения (32) могут быть записаны с помощью (33) в гамильтоновом виде. Для этого введем вместо z новую переменную t («время») с помощью уравнения

$$\frac{dz}{dt} = B_z = 1 - bnI_n(nr) \cos n\Theta, \quad (32')$$

где r и Θ предполагаются выраженным как функции z

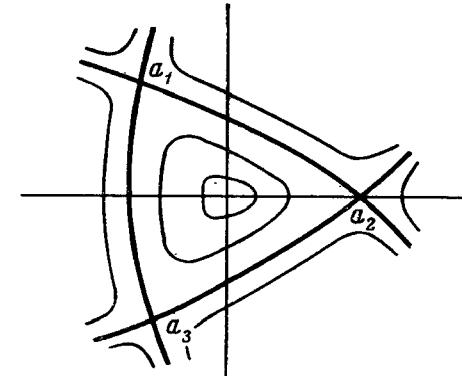


Рис. 17.

с помощью уравнений (32). Тогда система (32) переписывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= nbI'_n(nr) \sin n\Theta, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -1 + nb\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) I_n(nr) \cos n\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Если ввести новую переменную $\rho = r^2/2$, то нетрудно убедиться в том, что система (34) эквивалентна следующей:

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\dot{\Theta}, \quad \frac{\partial H}{\partial \Theta} = \dot{\rho}, \quad (35)$$

где точка означает дифференцирование по t . Таким образом, интеграл движения (33) можно рассматривать как «гамильтониан» для силовых линий, а переменные (ρ, Θ) являются каноническими. Уравнения (35) удобно интерпретировать как уравнения движения нелинейного осциллятора, особые точки которого определяются из условий:

$$\dot{\Theta} = 0, \quad \dot{\rho} = 0.$$

(точки a_1, a_2, a_3 на рис. 17). Фазовые траектории на плоскости (ρ, Θ) определяются как $\rho = \rho(\Theta)$ из уравнения

$$\frac{d\rho}{d\Theta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\Theta}} = -\frac{\partial H / \partial \Theta}{\partial H / \partial \rho}$$

и являются сечениями магнитных поверхностей плоскостью $t = \text{const}$.

Перейдем теперь от переменных (ρ, Θ) к переменным действие — угол (I, ϑ) . По стандартным правилам имеем

$$I = I(H) = \frac{1}{2} \oint r^2 d\Theta, \quad \omega = \omega(I) = \frac{dH(I)}{dI}. \quad (36)$$

Уравнения движения (34) в этих переменных имеют вид

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\vartheta} = \omega(I), \quad (37)$$

а связь между старой и новой фазами определяется из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(\Theta, I) &= \frac{\partial S(\Theta, I)}{\partial I}, \\ S(\Theta, I) &= \frac{1}{2} \int_0^\Theta r^2 d\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Итак, мы пришли к стандартным уравнениям нелинейных колебаний (37) с частотой $\omega(I)$. Фазовой плоскостью является сечение магнитных поверхностей (см. рис. 17) плоскостью $t = \text{const}$. Изображающей точкой на фазовой плоскости является точка пересечения последней с магнитной силовой линией. Из соотношений (36), (37) следует, что частота ω на сепаратрисе равна нулю, а на оси $r = 0$ принимает значение $+1$ (в чем мы убедимся несколько позднее).

Уравнения движения (37) описывают поведение во времени действия и фазы консервативной системы с гамильтонианом H . Найдем теперь, как изменятся эти уравнения при наличии, вообще говоря, нестационарного возмущения. Последнее будет предполагаться малым. Запишем

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1,$$

где невозмущенный потенциал Φ_0 определен по-прежнему равенством (30), $\Phi_1 = \Phi_1(r, \Theta, z)$, ε — малый параметр. Перепишем систему (35) в переменных (r, Θ, t) , снабдив их нулевым индексом:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial H}{\partial \Theta_0}; \quad r_0 \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_0}. \quad (39)$$

В соответствии с формулами (28'), (31), имеем

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = B_r^{(0)} + \varepsilon B_r^{(1)}, \\ rB_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = rB_\varphi^{(0)} + \varepsilon rB_\varphi^{(1)}, \\ B_z &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = B_z^{(0)} + B_z^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Вводя вместо z переменную t аналогично (32')

$$\frac{dz}{dt} = B_z = B_z^{(0)} + \varepsilon B_z^{(1)}, \quad (40')$$

получаем из (31), (40), (40') следующие уравнения движения силовых линий магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \dot{r}_0 + \varepsilon \dot{r}_1, \\ \dot{\Theta} &= -B_z^{(0)} - \varepsilon B_z^{(1)} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) = \dot{\Theta}_0 + \varepsilon \dot{\Theta}_1. \end{aligned} \right\} \quad (39')$$

Определим теперь переменные действие — фаза (I, ϑ) с помощью выражений (36), (38), (39) по невозмущенной части уравнений движения (39'). Тогда уравнения (37) для изменения (I, ϑ) со временем превращаются в следующие:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\partial I}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial I}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = \frac{dI}{dH} \left(\frac{\partial H}{\partial r_0} \dot{r} + \frac{\partial H}{\partial \Theta_0} \dot{\Theta} \right), \\ \dot{\vartheta} &= \frac{d\vartheta_0}{d\Theta_0} \dot{\Theta} = \frac{\dot{\vartheta}_0}{\dot{\Theta}_0} \dot{\Theta}, \end{aligned}$$

или, учитывая (39), (36) и (37):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon \frac{r_0}{\omega} \left(-\dot{\Theta}_0 \dot{r}_1 + \dot{r}_0 \dot{\Theta}_1 \right), \\ \dot{\vartheta} &= \omega \left(1 + \varepsilon \frac{\dot{\Theta}_1}{\dot{\Theta}_0} \right). \end{aligned}$$

Подстановка \dot{r}_1 и $\dot{\Theta}_1$ из (39') дает окончательно

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon \frac{r}{\omega} \left[-\dot{\Theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \dot{r} \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \dot{\vartheta} &= \omega + \varepsilon \frac{\omega}{\dot{\Theta}} \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где индекс нуль для простоты опущен и подразумевается, что все функции в правой части должны быть выражены в переменных (I, ϑ, t) с помощью уравнений (36), (38), взятых для невозмущенного движения (34), и уравнения (40').

Продолжим теперь аналогию между нелинейным осциллятором и уравнениями магнитных силовых линий. В предыдущих параграфах для систем типа (41) с определенного рода возмущением Φ_1 изучался вопрос: при каких условиях возникает стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний под влиянием возмущения. С другой стороны, этот же вопрос означал «разрушение» интеграла движения H , отсутствие на фазовой плоскости замкнутых траекторий (типа изображенных на рис. 17) и движение фазовой точки на фазовой плоскости, близкое к случайному. В частности, в предыдущем параграфе было показано существование вблизи сепаратрисы эргодического слоя. Аналогичную задачу можно решать теперь для системы (41), понимая под этим определение условия разрушения магнитных поверхностей и стохастическое удаление от центра точки на фазовой плоскости, изображающей силовую линию. При этом с практической точки зрения важно знать, уйдет ли изображающая точка (и, следовательно, силовая линия) за сепаратрису из внутренней области.

§ 4. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Периодические возмущения

Одной из популярных установок для исследования удержания плазмы является система «стелларатор», представляющая собой тор, в котором создается поле, очень близкое к (30). Можно сказать также, что прямое поле (30) плавно изгибают по оси z в тор радиуса R , который много больше радиуса трубы. При этом на длине тора, естественно, укладывается целое число шагов винта. Возникают две интересные задачи об устойчивости магнитных поверхностей. Первая связана с тем, что любое локализованное по z возмущение является периодическим с периодом R и, как нам уже известно, может привести к броуновскому движению фазовой точки, т. е. уходу силовой линии из объема. Вторая задача — более сложная — связана с учетом искривления метрики и нарушением винтовой симметрии.

В этом параграфе будет рассмотрена первая задача в пренебрежении нарушением винтовой симметрии, как это сделано в работах [22, 23, 40]. Возмущение в уравнениях

(41) обладает свойством:

$$\Phi_1(t+T) = \Phi_1(t), \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = R.$$

Кроме того, мы будем предполагать, что $\Phi_1(t)$ на периоде имеет форму очень узкого по t (а следовательно, и по z) импульса шириной

$$\delta t \ll 1,$$

что обычно соответствует реальным условиям.

Далее будем следовать в точности схеме, приведенной в § 2 главы II. Введем функцию плотности числа силовых линий $f(I, \vartheta, t)$, удовлетворяющую уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\dot{\vartheta} f) + \frac{\partial}{\partial I} (\dot{I} f) = 0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega(I) \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (Vf) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \vartheta} (Wf),$$

где $\varepsilon V = \dot{I}$, $\varepsilon W = \dot{\vartheta}_1$, а $\dot{\vartheta}_1$ определено в уравнениях (39'). В дальнейшем мы сможем без особого ущерба пренебречь членом, содержащим W . Действительно, с одной стороны, этот член дает поправку к частоте, которая для достаточно малых ε по сравнению с нелинейностью в $\omega(I)$ несущественна. С другой стороны, пренебрежение членом с W приведет в уравнении типа Фоккера — Планка, которое будет получено ниже, к изменению потока f . Нас, однако, будет интересовать не столько решение диффузионного уравнения, сколько оценка самого коэффициента диффузии. С этой точки зрения в качестве исходного можно рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega(I) \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial I} (Vf),$$

совпадающее с уравнением (4) главы II. Теперь нам остается только воспользоваться критерием в форме первого неравенства (см. (22) в главе II):

$$K = \frac{\Delta I}{\Omega} \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \gg 1, \quad (42)$$

показывающим, начиная с каких I происходит разрушение магнитных поверхностей.

Прежде чем выписать явно критерий (42), преобразуем его к виду, более удобному для оценок. Для этого обратимся к первому из уравнений системы (3) в главе II и перепишем его в более общем виде:

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\tilde{V}(I, \vartheta, t)}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (43)$$

Отсюда получаем путем интегрирования изменение действия в результате однократного рассеяния на неоднородности:

$$\Delta I = \varepsilon U, \quad (44)$$

где через U обозначено среднее значение возмущения, взятое по периоду T :

$$U = \Omega \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{V} \frac{dt}{\Omega} = \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{V} dt.$$

Подставляя (44) в (42), получаем

$$K = \varepsilon \frac{\tilde{V}}{\Omega^2} \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \sim \varepsilon \frac{U}{\Omega} \left| \frac{d\omega(I)}{dI} \right| \gg 1. \quad (45)$$

В рассматриваемом примере

$$U = \int_{-T/2}^{+T/2} \Phi_1 dt. \quad (46)$$

Полученный результат (45) решает первую задачу. Он полностью аналогичен (как и сама задача) результатам § 2 из главы II и поэтому не требует дополнительных пояснений.

Применим полученный критерий (45) к прямому n -заходному полю (30). Вблизи магнитной оси функцию Бесселя в (33), (32'), (34) можно разложить в ряд и ограничиться старшим членом. Это дает

$$H = \frac{1}{2} r^2 - ar^n \cos n\Theta; \quad a = \frac{b}{2(n-1)!} \left(\frac{n}{2} \right)^{n-1}. \quad (47)$$

Будем полагать для простоты $n = 3$. Из (47) следует

$$r = \sqrt{2H}(1 + a_1 \cos n\Theta + a_2 \cos^2 n\Theta + \dots),$$

$$a_1 = a \sqrt{2H}, \quad a_2 = 5a_1^2 = 10a^2H.$$

С помощью формул (36) — (39) легко находим

$$\left. \begin{aligned} I &= H(1 + cH), \quad c = 11a^2, \\ H &= I(1 - cI), \\ \omega &= 1 - 2cI, \\ S(\vartheta, I) &= I\left(\Theta + \frac{1}{6}cI \sin 6\Theta\right), \\ \Theta &= \vartheta - \frac{1}{3}cI \sin 6\vartheta, \\ \vartheta &= \Theta + \frac{1}{3}cI \sin 6\Theta, \\ z &= t - 2aI \sin 3\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Подстановка (46) и (48) в (45) дает

$$K \sim 11 \left[\frac{b}{2(n-1)!} \left(\frac{n}{2} \right)^{n-1} \right]^2 r_0^2 \frac{U}{\Omega}, \quad (n=3),$$

где $r_0 = r(n\Theta = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2H}$. Условием разрушения магнитных поверхностей считается $K \gg 1$. Критический радиус, начиная с которого происходит разрушение, можно определить из условия $K \sim 1$.

Проведем оценку характерного числа оборотов по тору N_0 , через которое силовая линия уходит на величину $r \sim 1$, т. е. приближается к старой сепаратрисе. Для этого выполним в выражении (11) главы II интегрирование по k :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{8\pi e^2}{\Omega} \frac{\partial}{\partial I} \sum_m |V_{mq}| \frac{\partial}{\partial I} (|V_{mq}| F), \quad q = \frac{\omega}{\Omega}. \quad (49)$$

Используя (46), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} \sim \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 F}{\partial I^2}, \quad D \equiv e^2 \Omega U^2.$$

Таким образом, интересующее нас время ухода силовой линии равно

$$\tau_0 \sim \frac{I_0^2}{D} = \frac{I_0^2}{16e^2 U^2 \Omega},$$

а соответствующее число оборотов

$$N_0 \sim \tau_0 \Omega = \frac{I_0^2}{16e^2 U^2},$$

где I_0 — действие, соответствующее $r \sim 1$.

Подведем краткий итог полученным результатам. Мы показали, что, начиная с r , больших некоторого критического значения, точка на фазовой плоскости, изображающая силовую линию, начинает вести себя настолько нерегулярно, что ее движение можно описывать кинетическим уравнением. В этом случае, конечно, бессмысленно уже говорить о существовании магнитных поверхностей. Если говорить более строго, то мы отмечаем на фазовой плоскости положение изображающей точки не непрерывно во «времени», а дискретно через интервалы R . Качественная картина положения изображающей точки после введения дискретного преобразования показана на рис. 18. При малых r все изображающие точки ложатся на одну замкнутую кривую, заполняя ее все плотнее и плотнее со временем. Вид этой кривой очень мало отличается от невозмущенной. Далее следует переходная область (заштрихованная), где движение носит очень сложный частично упорядоченный характер. И, наконец, возникает

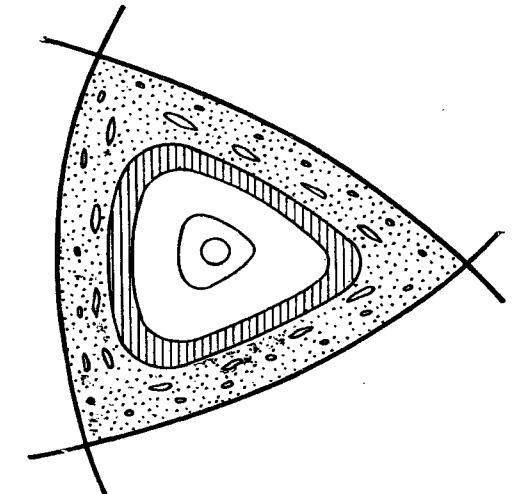


Рис. 18.

область стохастического разрушения магнитных поверхностей. Кроме того, в соответствии со вторым замечанием § 2 этой главы в области разрушения остаются островки устойчивости, размер которых $\lesssim K^{-1}$ и тем меньше, чем больше K , т. е. чем ближе мы находимся к сепаратрисе. Переходная область играет роль отражающей стенки для изображающей точки.

§ 5. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей. Нарушение симметрии

В этом параграфе будет рассмотрен вопрос о структуре магнитных поверхностей в тороидальных системах при условиях, когда основным возмущением является поправка, связанная с изгибанием прямого винтового поля в тор. Как будет видно ниже, уравнения силовых линий содержат нестационарное возмущение из-за тороидальности системы, и к ним можно применить некоторые результаты этой главы. Мы покажем, что вблизи сепаратрисы всегда происходит разрушение магнитных поверхностей стохастического типа и что вообще эта задача полностью аналогична задаче § 2 об образовании эргодического слоя.

Примем следующие упрощающие предположения:

$$b \ll 1, \quad \frac{r_0}{R} \ll 1. \quad (50)$$

Скалярный потенциал прямого винтового поля (30), изогнутого в тор, может быть записан с точностью до членов порядка $(r_0/R)^2$ в виде [39]

$$\Phi \approx \Phi_0 - \frac{r}{R} \Phi_0 \cos(\Theta + z),$$

где Φ_0 определено формулой (30), и предполагается, что на длине тора укладывается целое число шагов винта. Таким образом, возмущение потенциала равно

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_1 &= -\frac{r}{R} \Phi_0 \cos(\Theta + z) = \\ &= -\frac{r}{R} b I_n(nr) \sin n\Theta \cdot \cos(\Theta + z). \end{aligned} \quad (51)$$

Рассмотрим влияние возмущения (51) на силовые линии вблизи центральной магнитной оси, т. е. при малых r . Подставляя (51) в (41) и удерживая старшие по r члены, имеем (при $n > 2$):

$$\dot{I} \approx \varepsilon r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad \dot{\vartheta} \approx \omega - \frac{\varepsilon}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta},$$

или, переходя к переменным (I, ϑ) в правой части, с помощью соотношений (47), (48):

$$\dot{I} = \frac{1}{2} \varepsilon I \frac{\partial \Phi_1}{\partial I}, \quad \dot{\vartheta} = \omega - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{I} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta}. \quad (52)$$

Разложим $\Phi_1(I, \vartheta, t)$ в ряд Фурье:

$$\Phi_1 = \sum_{m, l} [\Phi_{1ml} e^{i[(mn+1)\vartheta + lt]} + \Phi_{1ml}^* e^{-i[(mn+1)\vartheta + lt]}],$$

и исследуем поведение силовых линий в окрестности одного резонанса. В этом случае в (51) можно оставить одну резонансную гармонику $m = m_0$, $l = l_0$:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon I \frac{\partial}{\partial I} (|\Phi_{1m_0l_0}|) \cos((m_0n+1)\vartheta + l_0t + \vartheta_0), \\ \dot{\vartheta} &= \omega + (nm_0+1) \varepsilon I^{-1} |\Phi_{1m_0l_0}| \sin((m_0n+1)\vartheta + l_0t + \vartheta_0), \end{aligned}$$

где ϑ_0 — фаза $\Phi_{1m_0l_0}$. С точностью до членов $\sim \varepsilon^2$ полученная система имеет очевидный интеграл движения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \Phi_{10} \sin((nm_0+1)\vartheta + l_0t + \vartheta_0) - \\ - \int \frac{\Phi_{10}}{I \partial \Phi_{10} / \partial I} ((nm_0+1)\omega + l_0) dI = \text{const}; \\ \Phi_{10} \equiv |\Phi_{1m_0l_0}|. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

В плоскости $t = \text{const}$ траектории силовых линий вблизи отдельного резонанса с $I = I_{(0)}$, следующие из (53), подобны изображенными на рис. 15. Таким образом, имеется дискретный ряд значений действия $I_{(s)}$, для которых выполняется условие резонанса

$$\omega(I_{(s)}) = \frac{l}{1 + ns}, \quad (54)$$

где l и s — произвольные целые положительные числа. Формула (54) аналогична (12), и хотя она получена только при малых r , в дальнейшем станет ясной справедливость ее и вблизи сепаратрисы.

Теперь мы можем следовать в своих рассуждениях буквально задаче об образовании эргодического слоя вблизи сепаратрисы (§ 2). Именно, так же легко установить из (54), что вблизи центральной оси резонансы не перекрываются и условие перекрытия их может быть выполнено только при больших s , т. е. вблизи сепаратрисы. После этого достаточно было бы записать критерий (15') и на этом закончить решение задачи.

Полезно, однако, в критерии (15')

$$\bar{K} = \frac{\left| \frac{d\omega}{dI} \right| \delta I}{\Omega} \gg 1 \quad (55)$$

провести оценку δI несколько иным, чем в § 2, способом, не используя в явном виде связь между старыми переменными (r, Θ) и новыми (I, ϑ) .

Как уже отмечалось в § 3, в особых точках фазовой кривой магнитной силовой линии выполняется равенство

$$\dot{\Theta} = -1 + nb \left(1 + \frac{1}{r}\right) I_n(nr) \cos n\Theta = 0. \quad (56)$$

Принимая во внимание ограничение $b \ll 1$ из (50), получаем, что (56) может выполняться лишь при $nr_c > 1$, где r_c — расстояние от центральной магнитной оси до особой точки. Мы будем считать выполненным неравенство

$$r_c^2 \gg 1. \quad (57)$$

Это соответствует случаю, когда шаг винта спирали меньше радиуса спирали. Предположение (57) сделано для упрощения выкладок и, как будет видно ниже, не играет никакой роли в заключении о стохастическом разрушении магнитных поверхностей вблизи сепаратрисы.

Выпишем сначала уравнения невозмущенных магнитных поверхностей (33), (32'), (34) вблизи сепаратрисы (т. е.

при $r^2 \gg 1$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &\approx \frac{nb}{\sqrt{2\pi nr}} e^{nr} \sin n\Theta, \\ \dot{\Theta} &\approx -1 + \frac{nb}{\sqrt{2\pi nr}} e^{nr} \cos n\Theta, \\ \dot{z} &\approx 1 - \frac{nb}{\sqrt{2\pi nr}} e^{nr} \cos n\Theta, \\ H &\approx \frac{1}{2} r^2 - \frac{br}{\sqrt{2\pi nr}} e^{nr} \cos n\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Подставляя в (41) возмущение за счет торoidalности (51) и удерживая старшие члены, находим

$$\dot{I} = -V(I, \vartheta, t) \approx -\frac{r^2}{\omega R} \dot{\Theta} r \cos(\Theta + z), \quad (59)$$

где правая часть предполагается выраженной как функция (I, ϑ, t) с помощью формул (36), (38). Разложим $V(I, \vartheta, t)$ в ряд Фурье по $(n\vartheta)$:

$$V(I, \vartheta, t) = \sum_s [V_s(I, t) e^{ins\vartheta} + V_s^*(I, t) e^{-ins\vartheta}],$$

и произведем оценку V_s :

$$V_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/n} e^{-isn\vartheta} \sin(n\vartheta) \varphi(I, \vartheta, t) d(n\vartheta), \quad (60)$$

где

$$\varphi(I, \vartheta, t) = \frac{r^2}{\omega R} \dot{\Theta} \frac{nb}{\sqrt{2\pi nr}} e^{nr} \cos(\Theta + z). \quad (61)$$

Как уже отмечалось, нас будет интересовать случай $s \gg 1$. Поэтому необходимо найти асимптотику V_s при $s \rightarrow \infty$. Рассмотрим выражение

$$\psi(s, \vartheta) = s\vartheta + \Theta(\vartheta), \quad (62)$$

появляющееся в экспоненте под интегралом (60). Это выражение имеет точку стационарной фазы ϑ_0 , в которой

$$\frac{d\psi(s, \vartheta_0)}{d\vartheta} = s + \frac{d\Theta(\vartheta_0)}{d\vartheta} = 0,$$

Мы получили результат, полностью идентичный (15'), и поэтому все замечания и следствия, изложенные в § 2, относятся также к данному случаю. Подчеркнем, в частности, что разрушение магнитных поверхностей вблизи сепаратрисы происходит не только при изгибе цилиндра в тор, но и вообще при любом периодическом возмущении [35]. Возможность стохастического разрушения

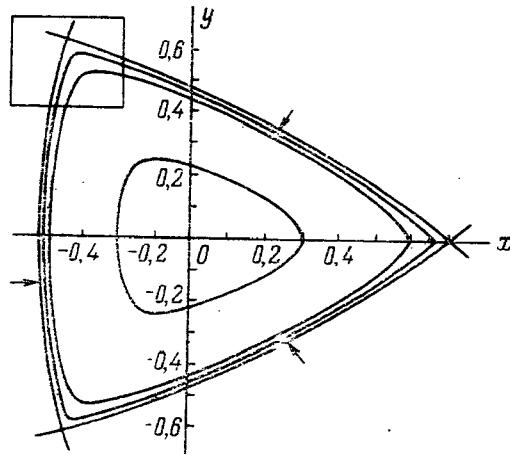


Рис. 19.

обсуждалась также Грэдом [41], а формула (73) была найдена в работе [23].

Для иллюстрации теоретических результатов мы приведем данные численного анализа, проведенные в работе [23] для модели, очень близкой к рассмотренной и иллюстрирующей стохастическое разрушение магнитных поверхностей *).

Невозмущенный потенциал магнитного поля был выбран в виде

$$\Phi_0 = z + \frac{1}{3} r^3 \sin 3(\varphi - z). \quad (74)$$

* Численное исследование разрушения магнитных поверхностей впервые проводилось в работе [48].

Соответствующие невозмущенные магнитные поверхности изображены на рис. 19. Стрелки на рисунке указывают сепаратрисы, $r_c \approx 0,698$. Возмущение в виде

$$\Phi_1 = \varepsilon r^q \sin m\varphi = \varepsilon r^q \sin m(\Theta + z) \quad (75)$$

моделирует в зависимости от параметров (ε, q, m) произвольный член поправок, связанных с изгиблением цилиндра в тор.

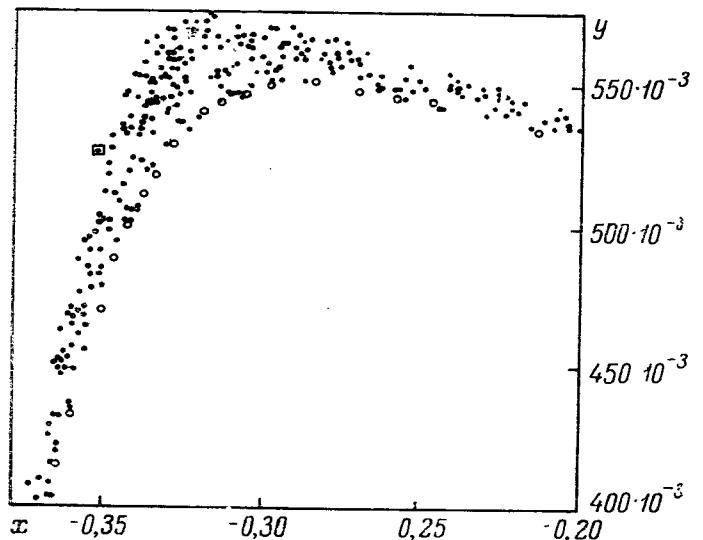


Рис. 20.

Для удобства расчетов в (75) было положено: $q = 3$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $m = 90$. В этом случае резонансы следуют очень «густо», однако мощность их мала из-за малости ε .

Вычислительная программа предусматривала введение начальной точки (r_0, φ_0) , через которую должна проходить исследуемая магнитная поверхность, и последовательную выдачу координат этой поверхности через каждый период поля. На рис. 20 в области фазового пространства, помеченной квадратом на рис. 19, точками обозначены координаты силовой линии с начальными данными:

$$r_0 = 0,664; \quad \varphi_0 = 0. \quad (76)$$

Вместо плавной кривой, как в случае устойчивости, силовая линия начинает равномерно заполнять фазовый объем и апериодически уходит за сепаратрису через 1712 периодов поля. Квадратом на рис. 20 отмечена последняя координата линии внутри сепаратрисы. Картина броуновского движения изображающей точки для той же поверхности (76) видна особенно отчетливо на рис. 21, где построена зависимость величины ($1 - \omega$) от времени (N — число

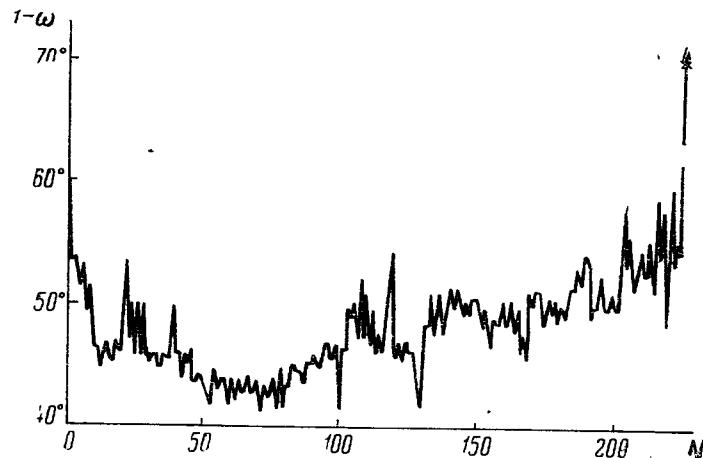


Рис. 21.

пересечений изображающей точкой положительной полуоси x). Крестом обозначена последняя точка, с которой происходит апериодический уход за сепаратрису.

Другой пример иллюстрирует экспоненциальное развитие неустойчивости из-за малых возмущений начальных условий. На рис. 22 построена зависимость расстояния между координатами Δr , $\Delta\varphi$ от числа N периодов поля двух силовых линий, начальные условия которых отличаются в пятом знаке:

$$\begin{aligned}r_0 &= 0,665; \varphi_0 = 1 \cdot 10^{-5}; \\r_0 &= 0,665; \varphi_0 = 2 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

Очень похожие численные результаты по разрушению интегралов движения были получены Хеноном и Хейле-

сом [42]. Детальное численное исследование преобразований типа (12) из главы II с анализом тонкой структуры ячеек ожерелий было проведено Ф. М. Израйлевым и Б. В. Чириковым [36].

Интересно провести в заключение одно расширение полученных результатов, связанное с траекториями движения заряженных частиц в магнитном поле с конфигурацией рассмотренного типа. Такая задача оказывается намного

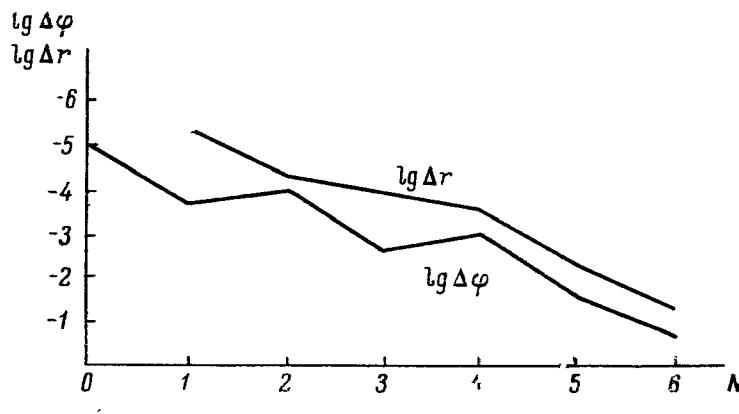


Рис. 22.

сложнее исследования геометрии магнитного поля, так как число степеней свободы увеличивается. Не вдаваясь в решение этой проблемы, обратим внимание на одну интересную особенность траекторий частицы.

В известном приближении можно считать, что частица движется по спирали, наматывающейся на силовую линию магнитного поля, с радиусом r_H (r_H — ларморовский радиус). Будем считать, далее, что $r_H \ll r_c$ — случай, интересный с практической точки зрения. Рассмотрим теперь ту область магнитных поверхностей, в которой перекрытие резонансов при $r_H = 0$ не происходит. Очевидно теперь, что при $r_H \neq 0$ фазовые траектории частицы близки к магнитным поверхностям, но слегка размазаны по области шириной $\sim r_H$.

Предположим теперь, что хотя резонансы и не перекрыты, но они расположены столь близко друг к другу, что

расстояние между ними по координате меньше r_H . В этом случае перекрытие резонансов происходит за счет ларморского вращения частицы (рис. 23). Условие того, чтобы расстояние между резонансами было очень малым и в то же время они не перекрывались при $r_H = 0$, может быть выполнено для резонансов очень высокого порядка N ,

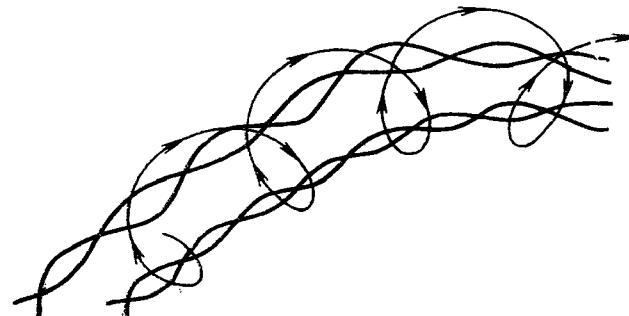


Рис. 23.

связанных с учетом членов порядка ε^N в возмущении цилиндрического винтового поля при изгибании его в тор. В этом случае резонансные частоты удовлетворяют равенству

$$\omega = \frac{N}{N + nm}$$

и для малых n и больших N расстояние между резонансами равно

$$\Omega \sim 1/N.$$

Ширина линии в характеристическом спектре движения частицы вследствие описанного выше дрейфового характера траектории равна

$$\delta\omega \sim \frac{d\omega}{dr} r_H \sim \frac{d\omega}{dI} rr_H \sim \frac{r_c^2}{2rr_H} \quad (r \ll r_c).$$

Отсюда сразу следует условие перекрытия резонансов $\delta\omega \gtrsim \Omega$ в виде

$$N \gtrsim \frac{r_c^2}{2rr_H} \gg 1. \quad (77)$$

Поскольку перекрытие происходит только за счет членов в возмущении очень высокого порядка, то коэффициент диффузии

$$D \sim \varepsilon^{2N} \sim \exp\left(-\frac{r_c^2}{rr_H} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

оказывается экспоненциально малым [52].

Рассмотренный пример является хорошей иллюстрацией того, к каким следствиям может привести очень малая размазка любой природы (сравните с ролью прибора).

§ 6. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета

Задача, которая будет рассмотрена ниже, является в определенном смысле другим предельным случаем нелинейного описания сплошной среды по сравнению со случаем взаимодействующих волн (§§ 3, 4 главы II).

При определенных условиях, когда роль столкновений ничтожно мала, определяющими процессами взаимодействия в системе заряженных частиц (плазме) являются колективные процессы. В зависимости от ситуации возможно такое развитие во времени возмущений среды, которое приводит к медленному изменению усредненного «фона», а нелинейное взаимодействие гармоник возмущения оказывается несущественным. Кинетическое уравнение, описывающее такие медленные изменения функции распределения частиц среды в поле волнового пакета, известно как «квазилинейное уравнение» [43]. Тем, кто занимается теорией плазмы, хорошо известно, насколько эффективно используется квазилинейное уравнение при решении различных конкретных задач.

Ниже будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с исчезновением памяти о начальных условиях и выводом квазилинейного уравнения.

Пример, который будет рассмотрен ниже, интересен с формальной точки зрения еще и тем, что будет установлена связь между механизмом перемешивания, описанным в главе II, и механизмом образования эргодического слоя, который рассматривался в этой главе.

Исходные уравнения движения частицы в поле волнового пакета $E(x, t)$ имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E(x, t) = \frac{e}{m} \sum_k [E_k e^{i(kx - \omega_k t)} + E_{-k} e^{-i(kx - \omega_k t)}],$$

$$E_k^* = E_{-k}, \quad \omega_k \equiv \omega(k), \quad (78)$$

где возмущение $E(x, t)$ предполагается достаточно малым и представляет собой суперпозицию большого числа (N) гармоник. Так же как и в § 3 главы II, мы считаем спектр поля дискретным, с характерным расстоянием между волновыми числами Δk . Перепишем уравнение (78) в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sum_k (V_k e^{i\Theta_k} + V_{-k} e^{-i\Theta_k}), \\ \dot{\Theta}_k &= kv - \omega_k \equiv \omega_k(v), \\ \Theta_k &= kx - \omega_k t; \quad V_k = \frac{eE_k}{m}; \quad v = \dot{x}, \quad V_k^* = V_{-k}. \end{aligned} \quad \left. \right\} (79)$$

Так же как и в § 3 главы II, мы будем считать расстояние между частотами

$$\Omega_k = \omega_{k+\Delta k}(v) - \omega_k(v) = \Delta k \left(v - \frac{d\omega_k}{dk} \right) \quad (80)$$

медленно меняющейся функцией k .

Если скорость частицы v оказывается близкой к значению v_r , определяемому из условия резонанса

$$\omega_k(v_r) = kv_r - \omega_k = 0, \quad (81)$$

то частица захватывается полем k -й гармоники и возникает следующая проблема: необходимо выяснить, как долго частица будет захвачена полем k -й гармоники, каково влияние остальных гармоник и существуют ли условия, при которых частица не может быть захвачена ни одной из гармоник на время, большее некоторого фиксированного интервала. Если использовать результаты § 2 этой главы, то грубый ответ можно дать сразу. Для этого будем сначала считать, что расстояние Ω_k между частотами очень велико, так что траектории частицы на фазовой плоскости имеют вид, близкий к изображенному на рис. 24.

Вспомним теперь результат § 2 этой главы о том, что для частиц, захваченных отдельной гармоникой, под влиянием возмущения образуется эргодический слой (заштрихованная область на рис. 24). Для не слишком малых

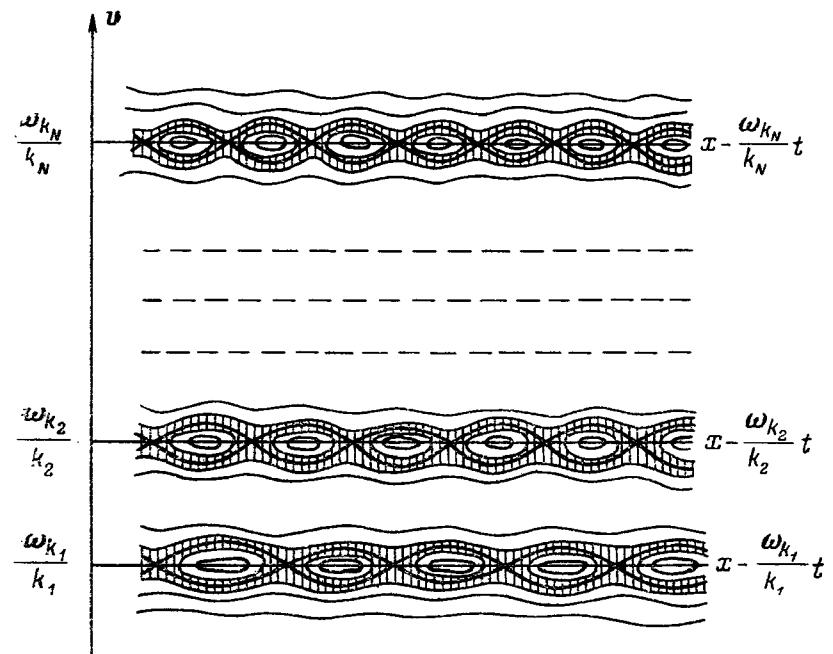


Рис. 24.

возмущений согласно формуле (17) размер эргодического слоя по частоте порядка

$$\frac{1}{\tau_k} = \sqrt{\frac{ekE_k}{m}}. \quad (82)$$

Можно ожидать, что если все эргодические слои на рис. 24, порождаемые гармониками волнового пакета, сольются, то вся полоса фазового пространства, ограниченная минимальной ω_{k_1}/k_1 и максимальной ω_{k_N}/k_N фазовыми скоростями волн, будет являться областью перемешивающихся траекторий частицы. Иными словами, движение частиц

в этой области будет стохастическим. Условием такого слияния эргодических слоев является, очевидно,

$$\tau_k \Omega_k = \Omega_k \sqrt{\frac{m}{kE_{ke}}} \ll 1 \quad (83)$$

почти для всех k .

С формальной точки зрения результат (83) не является удовлетворительным, так как результаты § 2 этой главы справедливы лишь для малых ε , в то время как в данном случае амплитуды V_k , вообще говоря, одного порядка для всех k .

Проведем более точный анализ задачи (79), используя метод §§ 3, 4 главы II.

Введем функцию распределения

$$f(v, \Theta_{k_1}, \Theta_{k_2}, \dots, t) \equiv f(v, \Theta, t),$$

удовлетворяющую уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \omega_k(v) \frac{\partial f}{\partial \Theta_k} + \frac{\partial}{\partial v} \sum_k [V_k e^{i\Theta_k} + V_{-k} e^{-i\Theta_k}] f = 0.$$

Используем разложение

$$f(v, \Theta, t) = \sum_{(n)} [f^{(n)}(v, t) e^{i(n, \Theta)} + f^{(-n)}(v, t) e^{-i(n, \Theta)}],$$

где

$$f^{(-n)} = f^{(n)*}; \quad (n, \Theta) = n_1 \Theta_{k_1} + n_2 \Theta_{k_2} + \dots$$

Приближением хаотических фаз в данном случае является

$$f^{(n)}(v, \Theta, t=0) = 0, \quad n \neq 0,$$

что эквивалентно отсутствию зависимости от x при $t=0$.

Наша цель заключается в том, чтобы при произвольных начальных условиях получить критерий стохастичности движения частиц. Поступая точно также, как и в § 3, 4 главы II, и опуская идентичные выкладки, имеем (сохра-

ня старые обозначения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial v} \sum_k V_k f^{(1)}(0) \langle\langle e^{i\omega_k(v)t} \rangle\rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \int_0^t dt' \langle\langle \cos \omega_k(v) t' \rangle\rangle \frac{\partial F}{\partial v}. \end{aligned} \quad (84)$$

Вычислим теперь корреляционную функцию

$$R_k = \langle\langle e^{i\omega_k(v)t} \rangle\rangle. \quad (85)$$

Согласно (15') критерий стохастичности запишем в виде

$$\bar{K}_{kk'} = \left| \frac{d\omega_k(v)}{dv} \right| \frac{\delta v_{k'}}{\Omega_k} \gg 1, \quad (86)$$

где $\delta v_{k'}$ есть изменение скорости вследствие резонанса между частицей и k' -й гармоникой. Оценивая $\delta v_{k'}$ так же, как это делалось до сих пор, получаем

$$\delta v_k \sim \frac{V_k}{\left| \frac{d\omega_k(v)}{dv} \right| \delta v_k}$$

или, с учетом (79), (82):

$$\delta v_k \sim \sqrt{V_k / k} = \frac{1}{k \tau_k}. \quad (87)$$

Подстановка (87) в (86) дает

$$\bar{K}_{kk'} \sim \bar{K}_{kk} = \frac{1}{\tau_k \Omega_k} \gg 1, \quad (88)$$

что совпадает с неравенством (83).

Теперь мы заметим, что для фаз $\Theta_k(t)$ можно записать уравнения в конечных разностях, аналогичных уравнению (48) главы II:

$$\Theta_{k, (n+1)} = \left\{ \Theta_{k, (n)} + \frac{\omega_k(v)}{\Omega_k} + \sum_{k'} K_{kk', (n)} \sin 2\Theta_{k', (n)} \right\}, \quad (89)$$

где

$$K_{kk', (n)} = \bar{K}_{kk'}^2, \quad (n),$$

а интервал между моментами времени t_n и t_{n+1} равен Ω_k^{-1} . Это сразу дает (при выполнении условия (88)) выражение для корреляционной функции (85), аналогичное полученному в § 4 главы II:

$$R_k \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_r} + i\omega_k(v)t\right), \quad \frac{1}{\tau_r} \sim \frac{1}{2} N_0 \Omega \ln K, \quad (90)$$

где Ω , K — некоторые средние по пакету значения Ω_k и $K_{kk'}$, N_0 — число гармоник, входящих в сумму по k_1 в (89), а τ_r имеет смысл времени расцепления корреляции фаз. Поскольку N_0 есть просто число гармоник, с которыми частица находится одновременно в резонансе, то

$$N_0 = \bar{K}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\tau_r} \sim \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{\tau \Omega}, \quad (91)$$

где τ есть среднее по пакету значение величины τ_k .

Применяя результаты (90) к уравнению (84), получаем окончательно для времен $t \gg \tau_r$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \frac{\tau_r}{1 + \omega_k^2(v) \tau_r^2} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (92)$$

Полученное уравнение описывает броуновское движение частиц в поле волнового пакета и учитывает одновременно конечность времени расцепления корреляции. В приближении хаотических фаз такое уравнение было получено в работах [44, 45].

Очевидно, что для применимости (92) необходимо, чтобы время хаотизации фаз τ_r было меньше среднего периода колебаний частицы τ в потенциальной яме отдельной гармоники, т. е.

$$\frac{\tau}{\tau_r} = \ln \frac{1}{\tau \Omega} \gg 1. \quad (93)$$

Неравенство (93) всегда выполняется согласно (88). При

этом, конечно, необходимо, чтобы число гармоник в пакете было не меньше, чем N_0 , что приводит к известному условию для ширины пакета [43]:

$$N \Omega \geq N_0 \Omega = \bar{K} \Omega = \frac{1}{\tau}.$$

В заключение отметим, что уравнение (92) описывает броуновское движение частиц в поле волнового пакета, который сам по себе не содержит никаких случайных параметров. Поскольку средняя энергия частиц согласно (92) растет со временем, то полученный результат может оказаться интересным в связи с так называемой проблемой стохастического нагрева.

ГЛАВА IV

КРИТЕРИЙ СТОХАСТИЧНОСТИ

Эта глава является результатом обработки автором специальной лекции, предоставленной нам Я. Г. Синаем. Лекция посвящена одному методу доказательства стохастичности, развитому в работах [11, 21, 49, 50] и примененному к решению ряда задач.

Выше мы уже говорили, что стохастичность тесно связана с неустойчивостью движения, однако последовательное изложение того, как из неустойчивости вытекает стохастичность, довольно сложно и длинно. В конце главы мы обрисуем в общих чертах соответствующую теорию. Здесь же мы сформулируем один критерий неустойчивости, из которого вытекает стохастичность.

Для простоты рассмотрим случай одного преобразования \hat{T} для системы, совершающей финитное движение. Фазовые переменные обозначим через $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Преобразование \hat{T} имеет вид

$$\hat{T}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

т. е.

$$\hat{T}(x_1, x_2, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, \dots, x_N)).$$

Для каждой точки x рассмотрим матрицу

$$A(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right].$$

Взяв произвольный вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_N)$, рассмотрим

отношение

$$\sigma(\alpha) = \frac{|A(x)\alpha|^2}{|\alpha|^2}.$$

Если это отношение больше единицы, то такой вектор мы назовем растягивающимся. Если $\sigma(\alpha) < 1$, то вектор α назовем сжимающимся. Далее, k -мерное подпространство $R^{(k)}$ назовем расширяющимся, если оно состоит из расширяющихся векторов. Аналогично определяется l -мерное сжимающееся подпространство. Конусом $L_p^{(k)}(x)$ растягивающихся k -мерных подпространств мы назовем открытое выпуклое связное множество k -мерных растягивающихся подпространств. Аналогично определяется сжимающийся конус $L_c^{(l)}(x)$ в точке x .

Критерий стохастичности: в каждой точке x можно определить k -мерный растягивающийся конус $L_p^{(k)}(x)$ и l -мерный сжимающийся конус $L_c^{(l)}(x)$ так, что для них будут выполняться включения:

$$\left. \begin{aligned} A(x)L_p^{(k)}(x) &\subset L_p^{(k)}(\hat{T}x), \\ A^{-1}(x)L_c^{(l)}(x) &\subset L_c^{(l)}(\hat{T}^{-1}x), \end{aligned} \right\} \quad (K)$$

и при этом $A(x)$ как преобразование конуса $L_p^{(k)}$ есть сжатие и аналогично $A^{-1}(x)$ — для $L_c^{(l)}$.

Раньше мы намеренно не уточняли, что понимается под длиной вектора. Вообще говоря, длина α может вычисляться в пространстве с любой метрикой. Вид конусов $L_{p,c}$ существенно зависит от вида метрики. Наш критерий может быть сформулирован более точно следующим образом: существует такая метрика, в которой выполнены условия (K).

Приведем три примера применения этого критерия.

1. Пусть x_1, x_2 — циклические переменные, а \hat{T} имеет вид $\hat{T}(x_1, x_2) = (\{mx_1 + nx_2\}, \{px_1 + qx_2\})$, где m, n, p, q — целые числа и $mq - np = 1$. В этом случае A не зависит от x и

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}.$$

Предположим, что матрица A имеет действительные и различные собственные значения λ_1, λ_2 ($\lambda = \lambda_1 > 1; \lambda_2 = -\lambda^{-1} < 1$). В дальнейшем удобно перейти к представлению, в котором матрица A диагональна:

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{vmatrix}.$$

Положим в этом представлении

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2).$$

Тогда

$$A\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda^{-1} a_2)$$

и уравнение для границы между конусами L_p и L_c имеет вид

$$(\lambda a_1)^2 + (\lambda^{-1} a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

или

$$(\lambda^2 - 1) a_1^2 + (\lambda^{-2} - 1) a_2^2 = 0.$$

Введя отношение $u = a_2/a_1$, имеем $u = \pm \lambda$. Иными словами, растягивающийся конус точек x состоит из векторов, для которых $|a_2/a_1| < \lambda$ (рис. 25). Образ $AL_p(x)$ состоит из векторов, для которых $|a_2/a_1| < \lambda^{-1}$, т. е. $AL_p(x)$ содержитя в $L_p(x)$ (рис. 26) и первое условие (К) выполнено. Аналогично проверяется условие со сжимающимися конусами.

2. Пусть снова (x_1, x_2) — циклические переменные, а преобразование \hat{T} имеет вид

$$\hat{T}(x_1, x_2) = (\{x_1 + \varepsilon N f(x_1) + Nx_2\}, \{x_2 + \varepsilon f(x_1)\}),$$

где

$$f'(x_1) = \begin{cases} +1, & 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x_1 < 1, \end{cases}$$

и в дальнейшем

$$\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \varepsilon N = \text{const} = k.$$

В этом случае

$$A = \begin{vmatrix} 1 + kf'(x_1) & N \\ \varepsilon f'(x_1) & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим сначала область, где $f'(x_1) = +1$. Границы $L_p(x)$ и $L_c(x)$ определяются векторами $\mathbf{u}_1 = (1, u_1)$,

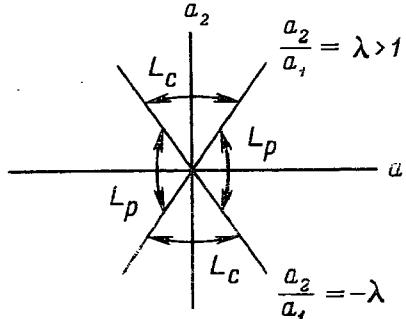


Рис. 25.

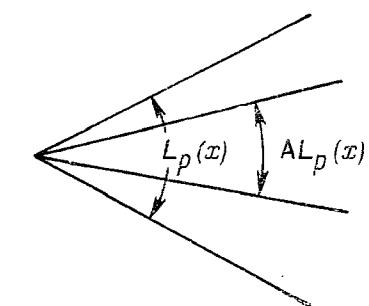


Рис. 26.

$\mathbf{u}_2 = (1, u_2)$ (рис. 27), в которых u_1, u_2 определяются как корни уравнения:

$$|A(x)\mathbf{u}|^2 = |(1, u)|^2,$$

или

$$u^2 + 2\frac{1+k+\varepsilon}{N}u + \frac{k^2+2k+\varepsilon^2}{N^2} = 0,$$

$$u_1 = -\frac{(k+2)(1+\varepsilon)}{N}, \quad u_2 = -\frac{k(1-\varepsilon)}{N}.$$

Имеем

$$A\mathbf{u}_1 = \left(-1, -\frac{2}{N}\right), \quad A\mathbf{u}_2 = \left(1 + \frac{k^2}{N}, 0\right)$$

и, как видно из рисунка, критерий выполнен при $k > 0$, либо $k < -4$. Аналогично исследуется область $f'(x_1) = -1^*$.

3. Теперь мы наметим путь доказательства того, как из сформулированного выше критерия вытекает стохастичность. Возьмем точку x из фазового пространства размер-

*) Приведенный пример рассматривал В. И. Оседедец.

ности N . Основным моментом доказательства является построение двух многообразий $M^{(k)}(x)$ и $M^{(l)}(x)$, представляющих собой подмногообразия размерности k и l ($k, l < N; k + l = N$) и однозначно выделяемых требованием: $M^{(k)}(x)$ состоит из таких точек y , что расстояние между

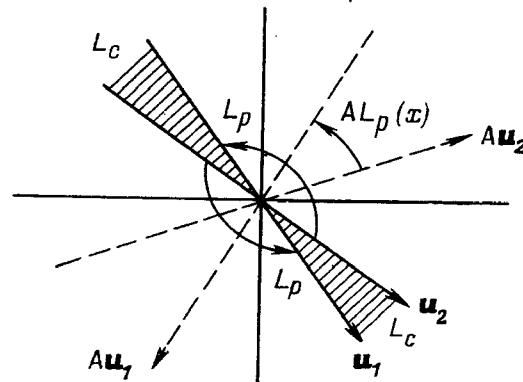


Рис. 27.

точками $\hat{T}^s(x)$ и $\hat{T}^s(y)$, т. е. $d_s(x, y)$; монотонно стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ и, более того,

$$d_s(x, y) \leq C(x, y) \lambda^s,$$

где λ не зависит от x и $\lambda < 1$. Многообразие $M^{(l)}(x)$ обладает аналогичным свойством при $s \rightarrow -\infty$. Возможность построения таких многообразий вытекает непосредственно из критерия. Покажем теперь, как из существования таких поверхностей следует эргодичность. Идея приводимого далее рассуждения принадлежит Хопфу [2, 3]. Возьмем какую-либо функцию $f(x)$ на фазовом пространстве. Нам нужно доказать, что ее временные средние для любой точки x не зависят от x . Воспользуемся тем, что с вероятностью единица выполняется следующее равенство для временных средних:

$$\bar{f}^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f(\hat{T}^k x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f(\hat{T}^{-k} x) = \bar{f}^-(x).$$

Возьмем две близкие друг к другу точки x, y (рис. 28) и проведем через эти точки многообразия $M^{(k)}(x)$ и $M^{(k)}(y)$. Далее проведем $M^{(l)}(y)$ и точку пересечения $M^{(l)}(y)$ с $M^{(k)}(x)$ обозначим через z . Заметим теперь, что $\bar{f}^+(x) = \bar{f}^+(z)$. Действительно,

$$|\bar{f}^+(x) - \bar{f}^+(z)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n |f(\hat{T}^k x) - f(\hat{T}^k z)| = 0,$$

поскольку точки $\hat{T}^s x$ и $\hat{T}^s z$ лежат на многообразии $M^{(k)}(x)$ и экспоненциально сближаются между собой. Точно так же

$$\bar{f}^-(z) = \bar{f}^-(y).$$

Окончательно имеем с вероятностью единица *)

$$\bar{f}^+(x) = \bar{f}^+(z) = \bar{f}^-(z) = \bar{f}^-(y) = \bar{f}^+(y).$$

Теперь перейдем к вопросу о перемешивании. При доказательстве перемешивания приходится гораздо глубже вникать в структуру многообразий $M^{(k)}(x), M^{(l)}(x)$. Оказывается, что выполняется также следующее условие: на каждом многообразии $M^{(k)}(x)$ возникает единственная (с точностью до множителя) естественная мера (объем), индуцированная мерой во всем фазовом пространстве. Обозначим плотность этой меры в точке u через $m(u)$. Тогда с вероятностью единица многообразие $M^{(k)}(x)$ с мерой $m(u)$ является эргодическим в следующем смысле. Пусть $D_r(x)$ есть круг радиуса r на $M^{(k)}(x)$ с центром в точке x .

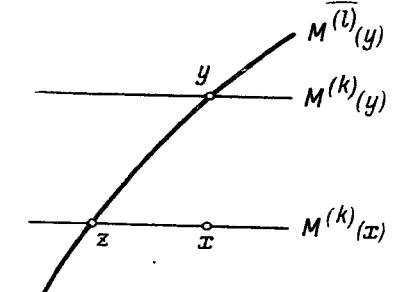


Рис. 28.

*) На самом деле в приведенном рассуждении имеется логический пробел, связанный со слишком вольным обращением со словами «с вероятностью 1». Этот пробел можно устранить, хотя это не совсем просто (см. [50]).

Тогда для любой ограниченной $f(x)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{D_r(x)}^{} f(u) dm(u)}{\int_{D_r(x)}^{} dm(u)} = \int f(x) dx \equiv \langle f \rangle,$$

где интеграл в правой части берется по всему фазовому пространству.

Взяв функцию $g(x)$ с $\langle g \rangle = 0$, аппроксимируем ее функцией $h(x)$, кусочно постоянной на каждом многообразии $M^{(k)}(x)$ и такой, что $\langle h(x) \rangle = 0$. Мы покажем, что

$$\langle \hat{T}^s h \cdot h \rangle \xrightarrow[s \rightarrow -\infty]{} 0, \quad (\Pi)$$

что и означает перемешивание. Заметим, что функция $\hat{T}^s h(x)$ будет также кусочно постоянна на каждом $M^{(k)}(x)$ и, более того, размеры каждого участка постоянства будут стремиться к ∞ при $s \rightarrow -\infty$.

Вычислим интеграл

$$\int dx h(\hat{T}^s x) h(x) = \int dx \hat{T}^s h(x) \cdot h(x)$$

следующим образом: сначала проинтегрируем по каждому участку, где $h(\hat{T}^s x)$ постоянна, а затем по всем таким участкам. Но заметим, что в силу указанной выше эргодичности многообразий $M^{(k)}(x)$ интеграл от функции h по каждому такому участку будет стремиться к нулю. Следовательно, и среднее от таких интегралов по разным участкам также будет стремиться к нулю, что и приводит к (П).

ЗАМЕЧАНИЯ И ПРОБЛЕМЫ

1. При выводе кинетических уравнений мы показали, что если выполняется некоторое условие, то нет необходимости в использовании приближения хаотических фаз. Возможность такого расширения методов статистического описания эволюции системы связана с более тщательным, чем это делалось обычно, изучением свойств динамических систем и выяснением критериев перемешивания. Это значительно расширяет возможности вероятностного анализа физических моделей, поскольку отпадает необходимость привлечения дополнительных гипотез (типа ПХФ).

2. Рассмотренные нами модели показывают, что ситуация, когда фазовое пространство делится на конечные области устойчивости и неустойчивости динамической системы относительно малых возмущений начальных условий, наиболее типична для приложений. Поэтому строгое исследование таких моделей крайне важно.

3. Вряд ли для многих физических приложений необходимо существование перемешивания в течение неограниченного времени. Возможна такая ситуация, когда движение является почти периодическим с очень большим периодом, а в течение каждого отдельного периода движение очень близко к перемешивающемуся. Тогда на интервале периода можно записать кинетическое уравнение с характерным временем «квазирелаксации». Если окажется, что последнее меньше периода, то с физической точки зрения это может быть вполне приемлемым. Отсюда вытекает проблема

исследования динамических систем, для которых можно доказать «квазиперемешивание» только на конечное время.

4. Динамические системы с перемешиванием должны непременно обладать свойством неустойчивости траекто-

рий относительно сколь угодно малых возмущений начальных условий. На рассмотренных моделях мы убедились в том, что подобная неустойчивость возникает при наличии некоторой «затравочной» неустойчивости движения (например, параметрический резонанс, распадная неустойчивость и т. д.). Можно поставить вообще вопрос о связи «обычных» механических неустойчивостей со стохастической неустойчивостью.

5. Из поставленного вопроса вытекает другой: связь между гидродинамической турбулентностью, возникающей вследствие специфических гидродинамических неустойчивостей, и условиями перемещения.

Заметим, что некоторые детали этой связи для так называемой слабой турбулентности, описывающей нелинейное взаимодействие волн, рассматривались в § 3, 4 главы II.

6. В § 3, 4 главы II и в § 6 главы III мы рассматривали задачи с большим, но конечным числом степеней свободы волнового пакета. Интересен

переход к волновому пакету со сплошным спектром, т. е. с бесконечным числом степеней свободы.

Этот предельный переход не является однозначным и при формальных действиях возникают определенные трудности. С другой стороны, поставленная задача представляет интерес при исследовании движений сплошной среды.

7. Из проведенного исследования ясно, что стохастическая неустойчивость приводит к разрушению нетривиальных интегралов движения динамических систем. Можно поставить вопрос:

всегда ли разрушение нетривиальных интегралов нелинейных динамических систем будет происходить квазистохастическим путем?

8. Если попытаться более тщательно проанализировать путь исследований, намеченный в этой работе, то можно поставить несколько технических проблем. Первая из них заключается в

более строгом исследовании преобразования типа

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \varepsilon \Phi(I_n) \sin 2\vartheta_n, \\ \vartheta_{n+1} &= \{\vartheta_n + K(I_n) \sin 2\vartheta_n\}, \end{aligned}$$

где $\Phi(I_n)$ — вообще говоря, произвольная функция I_n .

9. В рассмотренных примерах нам всегда удавалось ввести дискретное преобразование \hat{T} , связывающее состояния системы через интервал времени между двумя существенными изменениями действия (рассеяния). Знание такого преобразования намного упрощает исследование критерия стохастичности. Поэтому можно поставить вопрос о

разработке правил построения наиболее удобного приближенного преобразования \hat{T} .

10. Возможно, при решении последнего вопроса окажется полезным использование асимптотического метода ВКБ (Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна).

11. Хотя из качественных соображений и из количественного анализа обычно следует, что границей стохастичности является $K \sim 1$, однако этот вопрос нуждается в строгом теоретическом исследовании. Неясным остается также вопрос о ширине и структуре переходной области, отделяющей область динамического описания от стохастической области.

ДОПОЛНЕНИЕ

Несколько точных результатов
об убывании корреляций

Я. Г. Синай

В этом дополнении мы приводим (с доказательством) несколько математических результатов о преобразованиях, рассмотренных в данной работе *).

Пусть циклическая переменная ψ подвергается в результате какого-либо воздействия на систему преобразованию T : $\psi \rightarrow t(\psi)$. Предположим, что это преобразование задается дважды непрерывно дифференцируемой функцией t , причем $t'(\psi) \geq d > 1$. Из элементарных геометрических соображений следует, что у преобразования T всегда имеется неподвижная точка $\psi = t(\psi) \bmod 2\pi$. Выбирая ее в качестве начала отсчета, можем считать, что t удовлетворяет условиям $t(0) = 0$, $t(2\pi) = 2k\pi$, k — целое. Ясно, что $k \geq d$.

Утверждение. Преобразование T имеет интегральный инвариант $\rho(x)$, при котором для всякой функции f

$$\int f(x) \rho(x) dx = \int f(Tx) \rho(x) dx.$$

При усреднении с плотностью ρ корреляции быстро убывают. Более точно, пусть f, g — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\left| \int f(T^n x) g(x) \rho(x) dx - \int f(x) \rho(x) dx \int g(x) \rho(x) dx \right| \leq \text{const} \exp(-\text{const} n^{2/3}).$$

*) Обозначения, применяемые в дополнении, могут отличаться от обозначений основного текста лишь постольку, поскольку это не препятствует пониманию основного содержания.

В доказательстве основную роль играет самоусреднение, которое происходит в системе вследствие растяжения. Пусть dx — обычная длина на окружности. Преобразование T и его степени порождают последовательность непрерывных плотностей $\rho_n(x)$ при помощи соотношений

$$\int f(T^n x) dx = \int f(y) \rho_n(y) dy.$$

Мы покажем, что плотности $\rho_n(x)$ интегрально сходятся к предельной функции $\rho(x)$ и притом весьма быстро. Рассмотрим график функции $t(x)$ (рис. 29 для $k=2$). Окружность можно разбить на k отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ таких, что $T\Delta_i$ есть вся окружность при $i = -1, \dots, k$. Далее, каждый отрезок Δ_i , мы можем снова разбить на k отрезков Δ_{i,i_2} таких, что $T\Delta_{i,i_2} = \Delta_{i_2}$ и т. д. Для любого n мы получаем отрезки n -го ранга $\Delta_{i_1 \dots i_n}$, причем $T\Delta_{i_1 \dots i_n} = \Delta_{i_2 \dots i_n}$. Если бы $t(\psi) = k\psi$, то эти отрезки имели бы длину k^{-n} и при построении « k »-ичной системы счисления состояли бы из чисел, у которых фиксировано n первых знаков. В общем случае можно утверждать, что длины этих отрезков убывают экспоненциально:

$$l(\Delta_{i_1 \dots i_n}) < 2\pi d^{-n}.$$

Заметим теперь, что $T_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}^n$ есть вся окружность и T^n взаимно однозначно отображает $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ на всю окружность. Функцию, задающую это отображение, обозначим $t_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(x)$. Легко видеть, что $t_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(x) \geq d^n$. Обратная функция задает отображение окружности на $\Delta_{i_1 \dots i_n}$. Обозначим ее $s_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y)$. Для нее $s_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} \leq d^{-n}$.

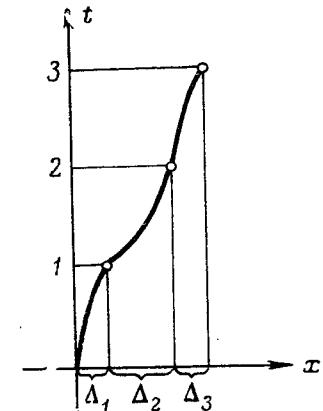


Рис. 29.

Теперь мы можем написать

$$\int f(T^n x) dx = \sum_{i_1 \dots i_n} \int_{\Delta_{i_1 \dots i_n}} f(T^n x) dx = \sum \int f(y) dy s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y).$$

$$\text{Таким образом, } \rho_n(y) = \sum_{i_1 \dots i_n} s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y).$$

Выясним теперь структуру этих функций. Установим прежде всего, что при некоторых постоянных C_1 и C_2 будет

$$C_1 \leq \frac{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y)}{l(\Delta_{i_1 \dots i_n})} \leq C_2. \quad (1)$$

Для этого мы заметим, что $t_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(x) = t(\underbrace{t(t \dots t(x))}_{n \text{ раз}})$.

Если $y = T^n x$, то

$$s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y) = \frac{1}{t'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(x)} = \frac{1}{t'(T^{n-1}x) t'(T^{n-2}x) \dots t'(Tx)},$$

Для двух точек x_1, x_2 из отрезка $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ имеем

$$|T^k x_1 - T^k x_2| \leq l(\Delta_{i_{k+1} \dots i_n}) \leq 2\pi d^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поэтому если $y_1 = T^n x_1, y_2 = T^n x_2$, то

$$\frac{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y_1)}{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y_2)} = \frac{t'(T^{n-1}x_2) t'(T^{n-2}x_2) \dots t'(Tx_2)}{t'(T^{n-1}x_1) t'(T^{n-2}x_1) \dots t'(Tx_1)}.$$

По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{t'(T^k x_2)}{t'(T^k x_1)} &= 1 + \frac{t'(T^k x_2) - t'(T^k x_1)}{t'(T^k x_1)} = \\ &= 1 + \frac{t''(T^k x_1 + \Theta(T^k x_2 - T^k x_1)) (T^k x_2 - T^k x_1)}{t'(T^k x_1)} \leq \\ &\leq 1 + 2\pi C d^{n-k-1}; \quad C = \max |t''(x)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y_1)}{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y_2)} \leq \prod_{k=0}^{n-1} (1 + 2\pi C d^{n-k}) \leq \prod_{i=0}^{\infty} (1 + 2\pi C d^{i}) = C_2.$$

Аналогично получается оценка с другой стороны.

Так как по теореме о среднем

$$l(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = \int s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y) dy = 2\pi s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y_0),$$

то правое неравенство (1) доказано. Левое неравенство доказывается аналогично. Из этих неравенств имеем

$$\rho_n(y) \leq \sum_{i_1 \dots i_n} s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y') \leq C_2 \sum l(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = 2\pi C_2$$

и аналогично $\rho_n(y) \geq 2\pi C_1$.

Таким образом, функции $\rho_n(x)$ равномерно ограничены сверху и снизу.

Перейдем к нормированным плотностям

$$\tilde{s}'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y) = \frac{s'_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y)}{l(\Delta_{i_1 \dots i_n})}.$$

Они хороши тем, что зависят в основном только от последних индексов $i_n, i_{n-1} \dots$. Точный смысл этому утверждению придают следующие неравенства: пусть фиксирован набор индексов j_1, \dots, j_r . Тогда при любых i'_1, \dots, i'_k и i''_1, \dots, i''_r для отрезков $\Delta' = \Delta_{i'_1 \dots i'_k j_r \dots j_1}$ и $\Delta'' = \Delta_{i''_1 \dots i''_r j_r \dots j_1}$

$$\left| \frac{\tilde{s}'_{\Delta'}(y)}{\tilde{s}'_{\Delta''}(y)} - 1 \right| \leq \text{const } d^{-r}. \quad (2)$$

Для доказательства заметим, что $T^k \Delta' = T^l \Delta'' = \Delta_{j_r \dots j_1}$. Поскольку Δ' — отрезок весьма малой длины, то с точностью до величин более высокого порядка, чем длина, преобразования T^i ($i = 1, \dots, k$) можно считать на нем

линейными. Из точных оценок легко следует, что под действием T^k плотность $\frac{1}{l(\Delta')}$ на отрезке Δ' переходит в плотность, отличающуюся от единицы не более чем на $\text{const } l(\Delta_{j_r \dots j_1})$. То же самое относится к Δ'' и T^l . После перехода в $\Delta_{j_r \dots j_1}$ плотности под действием T^k умножаются на одно и то же число, и их отношение не изменится. Тем самым неравенства (2) доказаны.

Теперь мы переходим к основной части и явно выпишем цепь Маркова, существующую в нашем случае и которая ответственна за все усреднения, происходящие здесь. Чтобы подойти к этому, заметим, что для любого отрезка $\Delta' = \Delta_{i'_1 \dots i'_r}$

$$\begin{aligned} q_n(\Delta') &= \int_{\Delta'} \rho_n(x) dx = \sum_{i_1 \dots i_n} l(\Delta_{i_1 \dots i_n}) \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_n}}(y) dy = \\ &= \sum_{\Delta'' = \Delta'_{j_1 \dots j_r}} \sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1} j_1 \dots j_r}) \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta}(y) dy = \\ &= \sum_{\Delta''} \sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}) \int_{\Delta''} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}}(y) dy \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta}(y) dy = \\ &= \sum_{\Delta''} \left(\sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}) \int_{\Delta''} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}}(y) dy \right) \times \\ &\quad \sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}) \int_{\Delta''} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}}(y) dy \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta}(y) dy \\ &\times \frac{\sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}) \int_{\Delta''} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}}(y) dy}{\sum_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}} l(\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}) \int_{\Delta''} \tilde{s}_{\Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1}}}(y) dy}. \quad (3) \end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках есть не что иное, как $\int_{\Delta''} \rho_{n-r}(x) dx = q_{n-r}(\Delta'')$. Дробь мы можем рассматривать как элемент $\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)}$ некоторой стохастической матрицы $\Pi^{(n)}$ и будем интерпретировать как вероятность перехода в соответствующей цепи Маркова.

Формула для $\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)}$ выглядит довольно сложно, но мы покажем, что эта сложность обманчива. Исследуем внача-

ле зависимость $\Pi^{(n)}$ от n . При $n = r$ для $\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(r)}$ имеем совсем простое выражение:

$$\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(r)} = \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta''}(y) dy.$$

В формуле (3) $\Delta = \Delta_{i_1 \dots i_{n-r-1} j_1 \dots j_r}$. Из неравенств (2) следует

$$1 - \text{const} \cdot d^{-r} \leq \left(\int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta}(y) dy \right) / \left(\int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta''}(y) dy \right) \leq 1 + \text{const} \cdot d^{-r}.$$

Поэтому при $n \geq r$

$$\left| \frac{\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)}}{\pi_{\Delta'', \Delta'}^{(r)}} - 1 \right| \leq \text{const} \cdot d^{-r}. \quad (4)$$

Далее, покажем, что стохастические матрицы $\Pi^{(n)}$ обладают очень хорошими свойствами перемешивания независимо от r , несмотря на то, что порядок матрицы $\Pi^{(n)}$ равен k^r и быстро растет с ростом r .

Заметим вначале, что $\pi^{(n)}(\Delta'', \Delta') \geq c l(\Delta')$ при некоторой постоянной c . Действительно,

$$\begin{aligned} \pi^{(n)}(\Delta'', \Delta') &\geq (1 - \text{const} \cdot d^{-r}) \pi^{(r)}(\Delta'', \Delta') = \\ &= (1 - \text{const} \cdot d^{-r}) \cdot l(\Delta') \int_{\Delta'} \tilde{s}_{\Delta''}(y) dy = \\ &= (1 - \text{const} \cdot d^{-r}) \int_{\Delta'} s_{\Delta''}(y) dy \geq c_1 (1 - \text{const} \cdot d^{-r}) l(\Delta'). \end{aligned}$$

Пусть даны два распределения вероятностей $q' = \{q'_\Delta\}$, $q'' = \{q''_\Delta\}$ на элементах $\Delta = \Delta_{i_1 \dots i_r}$ ранга r . Положим $d(q', q'') = \|q' - q''\| = \sum_\Delta |q'_\Delta - q''_\Delta|$. Из условия нормировки легко следует, что $d(q', q'') = 2 \sum^+ (q'(\Delta) - q''(\Delta))$, где \sum^+ распространена на неотрицательные слагаемые. Покажем теперь, что

$$d(\Pi^{(n)} q', \Pi^{(n)} q'') \leq \left(1 - \frac{c}{2}\right) d(q', q''). \quad (5)$$

По свойству стохастических матриц векторы $\tilde{q}' = \Pi^{(n)} q'$, $\tilde{q}'' = \Pi^{(n)} q''$ также будут распределениями вероятностей. Имеем

$$\begin{aligned} d(\Pi^{(n)} q', \Pi^{(n)} q'') &= 2 \sum^+ (\tilde{q}'(\Delta') - \tilde{q}''(\Delta')) = \\ &= 2 \sum_{\Delta'}^+ \sum_{\Delta''} (q'(\Delta'') - q''(\Delta'')) \pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)} \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_{\Delta'}^+ \sum_{\Delta''}^+ (q'(\Delta'') - q''(\Delta'')) \pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)} = \\ &= 2 \sum^+ (q'(\Delta'') - q''(\Delta'')) \sum_{\Delta'}^+ \pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)} = \\ &= 2 \sum^+ (q'(\Delta'') - q''(\Delta'')) \left(1 - \sum_{\Delta'}^- \pi_{\Delta'', \Delta'}^{(n)}\right) \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum^+ (q'(\Delta'') - q''(\Delta'')) \left(1 - c \sum_{\Delta'}^- l(\Delta')\right). \end{aligned}$$

Мы можем считать, что $\sum_{\Delta'}^- l(\Delta') \geq \frac{1}{r}$. В противном случае во всех выкладках поменяем местами q' и q'' . Поэтому последнее выражение не превосходит $d(q', q'') \left(1 - \frac{c}{2}\right)$, а это и есть требуемое неравенство.

Пользуясь доказанным неравенством, мы получим ряд следствий о матрицах $\Pi^{(n)}$.

Пусть q_0 — собственный вектор матрицы $\Pi^{(r)}$, т. е. стационарное распределение, отвечающее цепи Маркова с матрицей перехода $\Pi^{(r)}$. Рассмотрим совокупность O распределений вероятностей q , для которых $d(q, q_0) \leq d^{-r/2}$, и покажем, что O инвариантно относительно всех матриц $\Pi^{(n)}$, если r достаточно велико. Пользуясь неравенствами (4) и (5), можем написать

$$\begin{aligned} d(\Pi^{(n)} q, q_0) &\leq d((\Pi^{(n)} - \Pi^{(r)}) q, \Pi^{(n)} q_0) + d(\Pi^{(r)} q, \Pi^{(r)} q_0) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot d^{-r} + \left(1 - \frac{c}{2}\right) d(q, q_0) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot d^{-r} + \left(1 - \frac{c}{2}\right) d^{-r/2} \leq d^{-r/2}, \end{aligned}$$

если r достаточно велико, т. е. $\Pi^{(n)} q \in O$.

Теперь мы можем непосредственно доказать сформулированные в самом начале утверждения. Возьмем непрерывную функцию f и покажем, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \rho_n(x) dx.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Мы установим, что

$$\left| \int f(x) \rho_{n_1}(x) dx - \int f(x) \rho_{n_2}(x) dx \right| < \varepsilon,$$

если n_1, n_2 достаточно большие. Возьмем для любого r функцию f_r , постоянную на отрезках ранга r и равную на каждом таком отрезке среднему значению функции f . Если r достаточно велико, то

$$\left| \int f(x) \rho_n(x) dx - \int f_r(x) \rho_n(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

при любых n . Далее, из формулы (3) для распределения вероятностей $q^{(n)} = \{q^{(n)}(\Delta)\}$ на отрезках ранга r имеем

$$\begin{aligned} q^{(n)} &= \Pi^{(n)} q^{(n-r)} = \Pi^{(n)} \Pi^{(n-r)} q^{(n-2r)} = \dots = \\ &= \Pi^{(n)} \dots \Pi^{(n-kr)} q^{(n-(k+1)r)}. \end{aligned}$$

Теперь мы воспользуемся тем, что свойства перемешивания матриц $\Pi^{(n)}$ слабо зависят от r , и покажем, что $q^{(n)} \in O$, если n достаточно большое. Для этого достаточно в силу предыдущего показать, что $q^{(n)} \in O$ хотя бы при одном n . Возьмем $n = [d_1^r] r$, где [...] — знак целой части, причем $1 < d_1 < \sqrt{d}$. Тогда из предыдущего соотношения и из (4) получим

$$\begin{aligned} d(q^{(n)}, q_0) &= d(\Pi^{(n)} q^{(n-r)}, q_0) \leq d(\Pi^{(r)} q^{(n-r)}, q_0) + \\ &+ \text{const} \cdot d^{-r} = d(\Pi^{(r)} q^{(n-r)}, \Pi^{(r)} q_0) + \text{const} \cdot d^{-r} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{c}{2}\right) d(q^{(n-r)}, q_0) + \text{const} \cdot d^{-r} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 d(q^{(n-2r)}, q_0) + 2 \text{const} \cdot d^{-r} \leq \dots \leq \\ &\leq 2 \left(1 - \frac{c}{2}\right)^{d_1^r} + d_1^r \cdot \text{const} \cdot d^{-r} \leq d^{-r/2}, \end{aligned}$$

если r достаточно велико.

Окончательно мы можем написать, обозначив $M = \max |f(x)|$,

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x) \rho_{n_1}(x) dx - \int f(x) \rho_{n_2}(x) dx \right| \leqslant \\ & \leqslant \left| \int f_r(x) \rho_{n_1}(x) dx - \int f_r(x) \rho_{n_2}(x) dx \right| + \frac{2}{3} \varepsilon = \\ & = \left| \sum_{\Delta} f_r(\Delta) (q_{n_1}(\Delta) - q_{n_2}(\Delta)) \right| + \frac{2}{3} \varepsilon \leqslant \\ & \leqslant M \sum_{\Delta} |q_{n_1}(\Delta) - q_{n_2}(\Delta)| + \frac{2}{3} \varepsilon = \\ & = M \cdot d(q_{n_1}, q_{n_2}) + \frac{2}{3} \varepsilon \leqslant M(d(q_{n_1}, q_0) + d(q_{n_2}, q_0)) + \frac{2}{3} \varepsilon \leqslant \\ & \leqslant 2M d^{-r/2} + \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

Если r таково, что $2M d^{-r/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, то последнее выражение не превосходит ε . Итак, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(T^n x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \rho_n(x) dx.$$

Поскольку $C_1 \leqslant \rho_n(x) \leqslant C_2$ при всех n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \rho_n(x) dx = \int f(x) \rho(x) dx,$$

где $C_1 \leqslant \rho(x) \leqslant C_2$. Из этого сразу следует, что

$$\begin{aligned} \int f(Tx) \rho(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(Tx) \rho_n(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(T^{n+1}x) dx = \int f(x) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Можно было бы, потрудившись еще немножко, изучить свойства гладкости плотности ρ и связать это с гладкостью функции t , задающей преобразование T . Мы на этом здесь не останавливаемся. Заметим только, что, как нетрудно вывести непосредственно из формулы, при некоторой постоянной L выполняется условие Липшица

$$|\rho(x_1) - \rho(x_2)| \leqslant L |x_1 - x_2|.$$

Обратимся теперь к доказательству экспоненциального убывания корреляций.

Нам придется сейчас иметь дело с интервалами разных рангов. Чтобы не было путаницы, мы будем указывать ранг при помощи индекса вверху. Имеем при всяком n_1

$$I = \int f(T^n x) g(x) \rho(x) dx = \sum_{\Delta(n_1)} \int_{\Delta(n_1)} f(T^n x) g(x) \rho(x) dx.$$

Смысл дальнейшего состоит в следующем: так как интервалы $\Delta(n_1)$ весьма малы, то на них функция $g(x) \rho(x)$ почти постоянна и ее можно вынести за знак интеграла. С другой стороны, благодаря растяжению

$$\frac{1}{l(\Delta(n_1))} \int_{\Delta(n_1)} f(T^n x) dx \text{ успеет усредниться и дать} \\ \int f(x) \rho(x) dx.$$

Проделаем теперь соответствующие оценки:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\Delta(n_1)} (g\rho)_{\Delta(n_1)} \int_{\Delta(n_1)} f(T^n x) dx = \sum_{\Delta(n_1)} (g\rho)_{\Delta(n_1)} \int_{\Delta(n_1)} f(T^n x) dx = \\ &= \sum_{\Delta(n_1)} (g\rho)_{\Delta(n_1)} \sum_{\Delta(n) \subset \Delta(n_1)} \int f(x) s_{\Delta(n)}(x) dx = \\ &= \sum_{\Delta(n_1)} (g\rho)_{\Delta(n_1)} l(\Delta(n_1)) \sum_{\Delta(n) \subset \Delta(n_1)} \frac{l(\Delta(n))}{l(\Delta(n_1))} \int f(x) \tilde{s}_{\Delta(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему зафиксируем r и напишем

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta(n) \subset \Delta(n_1)} \frac{l(\Delta(n))}{l(\Delta(n_1))} \int f(x) \tilde{s}_{\Delta(n)}(x) dx &= \\ &= \sum_{\Delta(n) \subset \Delta(n_1)} \frac{l(\Delta(n))}{l(\Delta(n_1))} \sum_{\Delta(r)} (f)_{\Delta(r)} \cdot q_n(\Delta(r) | \Delta(n_1)) + R, \end{aligned}$$

где

$$q_n(\Delta(r) | \Delta(n_1)) = \sum_{\Delta(n) \subset \Delta(n_1)} \frac{l(\Delta(n))}{l(\Delta(n_1))} \int_{\Delta(r)} \tilde{s}_{\Delta(n)}(x) dx,$$

R — остаток, возникающий от замены f на ее среднее значение $(f)_{\Delta(r)}$. Ввиду гладкости f имеем $|R| \leq \text{const} \cdot d^{-r}$.

Введем, как и раньше, стохастические матрицы

$$\Pi^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) = \| \pi_{\Delta_1^{(r)}, \Delta_2^{(r)}}^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) \|,$$

где

$$\begin{aligned} \pi_{\Delta_1^{(r)}, \Delta_2^{(r)}}^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) &= \\ &= \frac{\sum_{\Delta^{(n-r)} \subset \Delta^{(n_1)}} l(\Delta^{(n-r)}) \int_{\Delta_1^{(r)}} \tilde{s}_{\Delta^{(n-r)}}(y) dy \int_{\Delta_2^{(r)}} s_{\Delta^{(n)}}(x) dx}{\sum_{\Delta^{(n-r)} \subset \Delta^{(n)}} l(\Delta^{(n-r)}) \int_{\Delta_1^{(r)}} \tilde{s}_{\Delta^{(n-r)}}(y) dy}. \end{aligned}$$

Для этих матриц без всяких изменений доказываются все утверждения, которые были у нас про матрицы $\Pi^{(n)}$. Кроме того, для вектора распределения вероятностей $\{q_n(\Delta^{(n_1)})\}$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} q_n(\Delta^{(n_1)}) &= \Pi^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) q_{n-r}(\Delta^{(n_1)}) = \\ &= \Pi^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) \Pi^{(n-r)} q_{n-2r}(\Delta^{(n_1)}) = \\ &= \dots = \Pi^{(n)}(\Delta^{(n_1)}) \Pi^{(n-r)}(\Delta^{(n_1)}) \dots \Pi^{(n-kr)}(\Delta^{(n_1)}) q_{n-(k+1)r}(\Delta^{(n_1)}). \end{aligned}$$

Здесь $n - (k+1)r \geq n_1$. Так же как и раньше, показывается, что $q_n(\Delta^{(n_1)}) \subset O$, если положить $r = n_1 = [n^{2/3}]$. Если подставить все соответствующие оценки, то мы получим

$$\left| \sum_{\Delta^{(r)}} (f)_{\Delta(r)} q(\Delta^{(r)} | \Delta^{(n_1)}) - \sum_{\Delta^{(r)}} (f)_{\Delta(r)} q_0(\Delta^{(r)}) \right| \leq \text{const} \cdot d^{-r/2}.$$

Так как из предыдущего

$$\left| \sum_{\Delta^{(r)}} (f)_{\Delta(r)} q_0(\Delta^{(r)}) - \int f(x) \rho(x) dx \right| \leq \text{const} \cdot d^{-r/2},$$

то получаем

$$\begin{aligned} \left| \int f(T^n x) g(x) \rho(x) dx - \int f(x) \rho(x) dx \int g(x) \rho(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \text{const} \cdot d^{-r/2} = \text{const} \cdot \exp(-\text{const} \cdot n^{2/3}). \end{aligned}$$

Исторические замечания. По-видимому, первым существование инвариантной меры у рассматриваемых здесь преобразований обнаружил А. Ренни [53]. После этого появились и другие работы на эту тему (см., например, Холледей [8]). В работе В. А. Рохлина [6] имеются общие теоремы о свойствах перемешивания. Метод, принятый здесь, является в известной степени новым. Насколько нам известно, соответствующие стохастические матрицы раньше не появлялись. В то же время оценки скорости убывания корреляций, вероятно, могут быть улучшены, но мы не вникаем здесь в это достаточно глубоко.

Рассмотрим теперь некоторые преобразования, встречающиеся в главах I, II.

1. В § 3 главы I встречается преобразование $T\psi = \psi + \alpha + \lambda \sin \psi \pmod{2\pi}$. При $\lambda \gg 1$ это преобразование не подходит под рассмотренный в пункте 1 случай, и такие преобразования нужно исследовать иначе. Можно рассмотреть простой случай, когда $T\psi = T_\lambda \psi = \psi + \lambda \sin \psi \pmod{2\pi}$, и изучать свойства этого преобразования в зависимости от λ . Оказывается, что существует неограниченная область, состоящая из бесконечного числа открытых интервалов, такая, что для λ , попавших в эту область, существуют устойчивые периодические точки ψ_1, \dots, ψ_s , к траекториям которых притягивается открытое всюду плотное множество точек ψ . Таким образом, в этом случае о перемешивании говорить не приходится.

С другой стороны, недавно Л. А. Бунимович [54] показал, что для последовательности $\lambda_k = 2\pi k$ преобразования T_λ имеют интегральный инвариант. Однако в этом случае плотность $\rho(\psi)$ имеет особенность:

$$\rho(\psi) \sim \text{const} \cdot \psi^{-1/2}$$

при $\psi \sim 0$. Тем не менее свойство перемешивания сохраняется.

Открытое множество значений λ , указанное выше, имеет нулевую плотность на оси λ . Мы не знаем, каков характер преобразований T_λ при большинстве значений λ . Более естественной представляется ситуация, когда T_λ будет обладать перемешиванием. Недавние численные эксперименты как будто подтверждают эту гипотезу, однако точные результаты нам неизвестны.

2. В главах I, II несколько раз встречалось преобразование типа

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \lambda f(x) + Ny \pmod{1}, \\ y &\rightarrow y + \varepsilon f(x) \pmod{1}. \end{aligned}$$

Здесь f — непрерывно дифференцируемая периодическая функция, N — целое число. Положим $\lambda = \varepsilon N$. Тогда T сохраняет меру Лебега. Так же как и в пункте 2, задача состоит в выяснении свойств перемешивания преобразования T в зависимости от значений параметра λ .

Цель этого пункта — показать, что существует неограниченное множество значений параметра λ , при которых преобразование не эргодично. Заметим, что критерий стохастичности главы IV выполняется здесь на множестве очень большой меры при $\lambda \geq 1$. Однако существование точек, где $f'(x) = 0$ и где этот критерий не выполняется, может весьма сильно испортить свойства T , хотя, вероятно, на множестве малой меры.

Последующее изложение этого пункта есть несколько отредактированная дипломная работа студентки V курса механико-математического факультета МГУ М. Дунской.

Без ограничения общности можно считать, что $\max |f(x)| = 1$. Если это не так, мы заменим $f(x)$ на $f(x)/\max |f(x)|$, ε на $\varepsilon/\max |f(x)|$ и λ на $\lambda \max |f(x)|$. Тогда вид преобразования сохранится.

Пусть $|f(x)|$ достигает максимального значения в точке x_0 , т. е. $|f(x_0)| = 1$. Заметим, что при целых значениях параметра λ точка, имеющая координаты $(x_0, 0)$, будет периодической точкой параболического типа с периодом $p = \frac{N}{\text{НОД}(\lambda, N)}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} (x_0, 0) &\rightarrow (x_0 + \lambda f(x_0), \varepsilon f(x_0)) = \\ &= \left(x_0, \frac{\lambda}{N} \right) \rightarrow \left(x_0, \frac{2\lambda}{N} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(x_0, \frac{N}{N} \right) = (x_0, 0). \end{aligned}$$

Производная непрерывной функции в точке экстремума равна нулю, $f'(x)|_{x=x_0}=0$, и поэтому матрица Якоби частных производных преобразования T в точке (x_0, y) запишет-

ся так:

$$A(x_0, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda f'(x)|_{x=x_0} & N \\ \varepsilon f'(x)|_{x=x_0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а матрица Якоби преобразования T^p в точке $(x_0, 0)$ равна

$$\begin{vmatrix} 1 & N_p \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Покажем теперь, что при небольшом увеличении λ вблизи точки $(x_0, 0)$ найдется периодическая точка эллиптического типа с тем же периодом p .

Характеристический многочлен матрицы $A(x, \lambda)$ равен

$$t^2 - (2 + \lambda f'(x))t + 1.$$

Его дискриминант

$$D(x, \lambda) = \lambda f'(x) (1 + \lambda f'(x)/4)$$

отрицателен при

$$-4 < \lambda f'(x) < 0, \quad (\text{а})$$

равен нулю для

$$f'(x) = 0 \text{ или } f'(x) = -4/\lambda \quad (\text{б})$$

и положителен, когда

$$f'(x) > 0 \text{ или } \lambda f'(x) < -4. \quad (\text{в})$$

Очевидно, найдется интервал справа от x_0 , в котором выполняется (а).

Пусть λ_0 — целое. Рассмотрим равенство $\lambda_1 = -\lambda_0/|f(x_1)|$, определяющее x_1 как функцию λ_0 ; $\lambda_1 > \lambda_0$. Покажем, что точка $(x_1, 0)$ — периодическая точка преобразования $T(\lambda_1, N)$. Действительно,

$$\begin{aligned} (x_1, 0) &\rightarrow (x_1 + f(x_1) \frac{\lambda_0}{|f(x_1)|}, \varepsilon_1 f(x_1)) = (x_1, \varepsilon_0) \rightarrow \\ &\rightarrow (x_1, 2\varepsilon_0) \rightarrow \dots \rightarrow (x_1, 1) = (x_1, 0). \end{aligned}$$

Для значений $\lambda > \lambda_0$ и достаточно близких к λ_0 это уравнение имеет два решения: $x_1 > x_0$ и $x_2 < x_0$.

Рассмотрим точку $(x_1(\lambda), 0)$. Ее координаты непрерывно зависят от λ , $x_1(\lambda_0) = \lambda_0$, и поэтому найдется некоторый интервал (λ_0, λ_1) значений λ такой, что при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ выполняется неравенство (а).

Рассмотрим теперь матрицу Якоби преобразования T^p в точке $(x_1, 0)$. Так как $A(x, \lambda)$ не зависит от y , а точки $(x_1, 0), T(x_1, 0), \dots, T^{p-1}(x_1, 0)$ лежат на одной вертикали, то

$$A(T^p) = A^p(T).$$

Неравенство (а) означает, что матрица A имеет комплексно-сопряженные собственные значения. То же самое можно сказать и о матрице A^p (за исключением конечного числа точек, в которых собственные значения матрицы A являются корнями степени $2k$ из единицы), и, следовательно, точка $(x_1, 0)$ является эллиптической.

Докажем теперь, что если функция $f(x)$ имеет 333 непрерывные производные и для ее второй и третьей производной не выполняется некоторое алгебраическое соотношение, т. е. функция $f(x) \in C^{333}$ — общего вида, то найдется сколь угодно малая окрестность u точки $(x_1, 0)$, такая, что $T^p u = u$. Из-за малости этой окрестности ее траектория не может заполнять весь тор и образует, следовательно, нетривиальное инвариантное множество.

Пусть $f(x)$ имеет 333 непрерывные произвольные. Тогда $T(\lambda, N)$ является преобразованием класса C^{333} .

Рассмотрим преобразование T_1 такое, что

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \lambda f(x) + Ny, \\ y &\rightarrow y + \varepsilon f(x) - \frac{\lambda_0}{N}. \end{aligned}$$

Точка $(x_1, 0)$ будет неподвижной точкой эллиптического типа для T_1 , и если мы найдем для нее инвариантную окрестность u , то, очевидно, $T^p u = u$.

Гладкой заменой переменных можно добиться, чтобы преобразование T_1 записывалось так:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow e^{i\psi} u + \alpha_2 u^2 v + \text{члены более высокого порядка}, \\ v &\rightarrow e^{-i\psi} v + \beta_2 u v^2 + \text{члены более высокого порядка}. \end{aligned}$$

Начало координат перенесено в точку $(x_1, 0)$.

Тогда, по теореме Мозера, неподвижная эллиптическая точка имеет инвариантную окрестность, если $\alpha_2 \neq 0$.

Линейной заменой приведем преобразование T_1 к виду

$$\begin{aligned} x &\rightarrow e^{i\psi} x + h(Nx + Ny), \\ y &\rightarrow e^{-i\psi} y + h(Nx + Ny), \end{aligned}$$

где $h(t)$ — функция, отличающаяся от нелинейной части $f(t)$ постоянным коэффициентом.

Пусть

$$h''(t)|_{t=0} = C_2, \quad h'''(t)|_{t=0} = C_3.$$

Будем искать нужную замену переменных в виде

$$\begin{aligned} x &= u + a_{11}u^2 + a_{12}uv + a_{13}v^2 + a_{21}u^3 + a_{22}u^2v + \\ &\quad + a_{23}uv^2 + a_{24}v^3, \\ y &= v + b_{11}u^2 + b_{12}uv + b_{13}v^2 + b_{21}u^3 + b_{22}u^2v + \\ &\quad + b_{23}uv^2 + b_{24}v^3. \end{aligned}$$

Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} определяются путем сравнения производных и выражаются через N , C_2 и $e^{i\psi}$, а для α_2 получается уравнение: $\alpha_2 = C_2 N^2 (a_{11} + a_{12} + b_{11} + b_{12}) + \frac{C_3 N^3}{2}$. Очевидно, для почти всех C_3 , т. е. и для почти всех $f(x)$, будет $\alpha_2 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Халмощ, Лекции по эргодической теории, ИЛ, стр. 39—60, 1959.
2. Э. Хопф, Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны, УМН 4, 129 (1949).
3. E. Hopf, Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus. II, Math. Ann. 117, 590 (1940).
4. Н. С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, Изд. АН СССР, 1950.
5. М. Капц, Вероятность и смежные вопросы в физике, гл. 3, «Мир», 1965.
6. В. А. Рохлин, Точные эндоморфизмы пространства Лебега, Изв. АН СССР, сер. мат. 25, 499 (1961).
7. М. Капц, Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, гл. 5, ИЛ, 1963.
8. J. C. Holladay, On the existing of a mixing measure, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 887 (1957).
9. Б. В. Чириков, Пример стохастической неустойчивости нелинейных колебаний. Доклад на Международной конференции по ускорению заряженных частиц, Дубна, 1963.
10. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, О механизме одномерного ускорения Ферми, ДАН СССР 159, 306 (1964).
11. Я. Г. Синай, Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, Изв. АН СССР, сер. мат. 30, 15 (1966).
12. E. Fermi, On the origin of the cosmic radiation, Phys. Rev. 75, 1169 (1949).
13. S. Ulam, On some statistical properties of dynamical systems, Proc. 4-th Berkeley Sympos. on Math. and Probabil., Berkeley — Los Angeles. 3, 315 (1961) (перевод: Математика 7, 137 (1963)).
14. Я. Г. Синай, К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики, ДАН СССР 153, 1261 (1963).
- Я. Г. Синай, Об одной «физической» системе, имеющей положительную энтропию, Вестник МГУ, сер. мат. и мех. 5, 6 (1963).

15. А. Н. Колмогоров, О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, ДАН СССР 98, 527 (1954).
16. В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН 18, 91 (1963).
17. J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physik, Kl. II, 1, 1 (1962).
18. Б. В. Чириков, Диссертация, Новосибирск, 1959.
19. Б. В. Чириков, Резонансные процессы в магнитных ловушках, Атомная энергия 6, 630 (1959).
20. Г. М. Заславский, Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, Журн. прикл. мех. и тех. физ., 2, 16 (1967).
21. Д. В. Анисов, Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, ДАН СССР 151, 1250 (1963).
22. M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, J. B. Taylor, G. M. Zaslavski, On the destruction of magnetic surfaces due to the irregularities of magnetic field, Nuclear Fusion 6, 297 (1966).
23. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Н. Н. Филоненко, Разрушение магнитных поверхностей вследствие возмущения магнитного поля, Nuclear Fusion 7, № 4 (1967).
24. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, О пределах статистического описания нелинейного волнового поля, ЖЭТФ 52, 1083 (1967).
25. И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, гл. 2, «Мир», 1964.
26. R. Brouet, I. Prigogine, Statistical mechanics of irreversible processes, Physica 22, 621 (1956).
27. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of nonlinear problems, Los Alamos Scientific Report, LA-1940 (1955).
28. С. Улам, Нерешенные математические задачи, § 8, гл. 7, Наука», М., 1964.
29. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, Статистические свойства нелинейной струны, ДАН СССР 166, 57 (1966).
30. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы, ЖТФ 32, 1291 (1962).
31. Л. Э. Гуревич, Основы физической кинетики, Гостехиздат, М., 1940.
32. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Турбулентная теория слабонеравновесной разреженной плазмы, ЖЭТФ 44, 592 (1963).
33. В. Е. Захаров, О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля, ЖЭТФ 51, 688 (1966).

34. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения, ЖЭТФ 54, 1590 (1968).
35. В. К. Мельников, О силовых линиях магнитного поля, ДАН СССР 144, 747 (1962).
36. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством, Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.
37. J. Moser, On the theory of quasi-periodic motions, N. Y. University, Courant Inst. of Math. Sciences (1966).
38. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.
39. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, Геометрия магнитного поля. Вопросы теории плазмы, вып. 2, под ред. М. А. Леонтьевича, Госатомиздат, 1963.
40. Б. В. Чириков, Стохастическое разрушение магнитных поверхностей стелларатора, ДАН СССР 174, 1313 (1967).
41. H. Grad, Toroidal Containment of a Plasma, Phys. Fluids 10, 137 (1967).
42. M. Hénon, C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, Astronom. Journ. 69, 73 (1964).
43. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Нелинейные колебания разреженной плазмы, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
44. Ф. Г. Басс, Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы с учетом корреляции электрических полей, ЖЭТФ 49, 329 (1965).
45. R. A. Sturrock, Stochastic acceleration, Phys. Rev. 141, 182 (1966).
46. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Многочастичные аспекты теории турбулентной плазмы, Ядерный синтез 5, 20 (1965).
47. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в «Вопросы теории плазмы», вып. 4, стр. 188, Атомиздат, 1964.
48. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. М. Зуева, М. С. Михайлова, А. И. Морозов, О структуре магнитного торoidalного поля, не обладающего магнитными поверхностями, ДАН СССР 148, 1286 (1963).
49. Д. В. Анисов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды МИАН им. В. А. Стеклова 90 (1967).
50. Д. В. Анисов, Я. Г. Синай, Некоторые гладкие эргодические системы, УМН 22, 107 (1967).
51. N. N. Filonenko, A. V. Komissar, R. Z. Sagdeev, G. M. Zaslavski, Destruction of magnetic surfaces

- in toroidal systems. II European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Stockholm (1967).
52. P. C. Hohenberg, L. S. Maximov, H. Wergeland, Recurrence time of dynamical system, Phys. Rev. 111, 689 (1958).
53. A. Rényi, Acta math. Acad. Sci. Hungar 8, 477 (1953).
54. Л. А. Бунимович, Один пример с перемешиванием, Математические заметки (в печати) (1970).
55. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, А. И. Хигсамутдинов, Численные эксперименты с нелинейной цепочкой, Препринт ИЯФ № 252, Новосибирск, 1968.
56. H. Higooka, N. Saito, Computer studies on the approach to thermal equilibrium in coupled anharmonic oscillators, Journ. of the Phys. Soc. of Japan 26, 624 (1969).