К. Зеегер

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Издательство «МИР» Москва 1977

Книга представляет собой оригинальный курс физики полупроводников, написанный на основе лекций, прочитанных автором для студентов, специализирующихся в области физики и электроники. От существующих изданий данная книга отличается тем, что наряду со строгим изложением основных принципов физики полупроводников в ней можно найти достаточно обширный материал, касающийся новейших направлений исследований в этой области. Обилие охваченного в книге материала делает ее энциклопедическим справочником, полезным при работе над текущей научной литературой.

Книга может служить учебным пособием для студентов физических и инженерных специальностей. Она представляет интерес для научных работников, работающих в различных областях физики полупроводников и полупроводниковой электроники, а также инженеров, преподавателей, аспирантов.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие автора	9
Основные обозначения	11
Глава 1. Элементарные свойства полупроводников	19
§ 1. Диэлектрик — полупроводник — полуметалл — металл	19
§ 2. Положительно заряженная дырка	21
§ 3. Процессы проводимости, компенсация, закон действующих масс	23
Литература	28
Глава 2. Энергетическая зонная структура	29
§ 1. Одиночная и периодически повторяющиеся потенциальные ямы	29
§ 2. Энергетические зоны в приближении сильной связи	39
§ 3. Зона Бриллюэна	41
§ 4. Изоэнергетические поверхности	50
Литература	53
Глава 3. Статистика полупроводников	54
§ 1. Статистика Ферми	54
§ 2. Степени заполнения для примесных уровней	63
Литература	69
Глава 4. Перенос заряда и энергии в невырожденном полупроводнике	70
§ 1. Кинетическая теория электронного газа	70
§ 2. Электропроводность и ее зависимость от температуры	70
§ 3. Эффект Холла в поперечном магнитном поле	82
§ 4. Магниторезистивный эффект	96
§ 5. Диск Корбино	100
§ 6. Магниторезистивный эффект в неоднородных образцах	103
§ 7. Планарный эффект Холла	106
§ 8. Теплопроводность, число Лоренца, сравнение с металлами	107

§ 9. Термоэлектрический эффект (явление Зеебека) 113
§ 10. Эффекты Томсона и Пельтье 121
§ 11. Термомагнитные эффекты 127
§ 12. Пьезосопротивление 136
§ 13. Горячие электроны и время релаксации энергии 141
§ 14. Высокочастотная электропроводность 148
§ 15. Шум 150
Литература 152
Глава 5. Диффузия носителей заряда 155
§ 1 Инжекция и рекомбинация 155
§ 2. Диффузия и соотношение Эйнштейна 157
§ 3. *p* — *n*-переход 164
§ 4. Квазиуровни Ферми 174
§ 5. Транзистор 176
§ 6. Контакт металл — полупроводник 182
§ 7. Различные типы транзисторов 184
§ 8. Эффект Дембера и фотоэлектромагнитный эффект 188
§ 9. Вентильный фотоэффект 191
§ 10. Диффузия горячих носителей 194
Литература 197
Глава 6. Механизмы рассеяния в сферической однодолинной модели 198
§ 1. Рассеяние на нейтральных примесях 198
§ 2. Упругое рассеяние 202
§ 3. Рассеяние на ионизованных примесях 205
§ 4. Рассеяние равновесных носителей на акустическом деформационном потенциале 211
§ 5. Рассеяние горячих носителей на акустическом деформационном потенциале 215
§ 6. Совместное действие рассеяния на ионизованных примесях и на акустическом деформационном потенциале 221
§ 7. Пьезоэлектрическое рассеяние 229
§ 8. Спектр фононов в кристалле 231
§ 9. Механизмы неупрутого рассеяния 241
§ 10. Уравнение баланса импульса и смещенное максвелловское распределение 246
§ 11. Рассеяние на оптическом деформационном потенциале 250
§ 12. Полярное оптическое рассеяние 260
§ 13. Межэлектронное рассеяние 270
§ 14. Проводимость по примесной зоне и механизм перескоков 271
§ 15. Рассеяние на дислокациях 273
Литература 277
Глава 7. Перенос заряда и процессы рассеяния в многодолинной модели 280
§ 1. Тензор деформационного потенциала 280
§ 2. Электропроводность 284

§ 3. Эффект Холла в слабом магнитном поле 289
§ 4. Магниторезистивный эффект в слабом магнитном поле 291
§ 5. Рассеяние между эквивалентными долинами и эффект перезаселения долин 298
§ 6. Гальваномагнитные эффекты, обусловленные теплыми и горячими носителями заряда 310
§ 7. Неэквивалентное междолинное рассеяние. Отрицательная дифференциальная проводимость и осцилляции Ганна 317
§ 8. Акустоэлектрический эффект 331
Литература 340
Глава 8. Явления переноса в модели гофрированных сфер 343
§ 1. Энергетические зоны и плотность состояний 343
§ 2. Электропроводность 348
§ 3. Эффект Холла и магниторезистивный эффект 349
§ 4. Теплые и горячие дырки 356
Литература 359
Глава 9. Квантовые эффекты в явлениях переноса 361
§ 1. Туннельный диод 361
§ 2. Магнитные квантовые эффекты 366
§ 3. Магнитное вымораживание носителей 371
§ 4. Магнитофононный эффект 374
Литература 380
Глава 10. Ударная ионизация и лавинный пробой 382
§ 1. Ударная ионизация в однородно легированных полупроводниках при низких температурах 382
§ 2, Лавинный пробой в p — n-переходах 389
Литература 393
Глава 11. Поглощение и отражение света 395
§ 1. Собственное поглощение и зонная структура 395
§ 2. Край собственного поглощения: зависимость от температуры, давления, состава твердого раствора и вырождения 399
§ 3. Экситонное поглощение 410
§ 4. Межзонные переходы в магнитном поле 413
§ 5. Эффект Франца — Келдыша (электропоглощение и электроотражение) 419
§ 6. Примесное поглощение 424
§ 7. Решеточное отражение в полярных полупроводниках 432
§ 8. Многофононное решеточное поглощение 436
§ 9. Квантовомеханическая трактовка края собственного поглощения света 439
§ 10. Поглощение и отражение света свободными носителями заряда 445
§ 11. Циклотронный резонанс 468
§ 12. Магнитооптические эффекты, обусловленные свободными носителями 476
§ 13. Межзонные магнитооптические эффекты 488

§ 14. Магнитоплазменные волны 489
§ 15. Нелинейная оптика 493
§ 16. Светоэлектрический эффект (увлечение фотонами) 500
Литература 501
Глава 12. Фотопроводимость 507
§ 1. Кинетика фотопроводимости 507
§ 2. Глубокие уровни в германии 514
§ 3. Сечение захвата акцепторного уровня прилипания 521
Литература 522
Глава 13. Генерация света в полупроводниках 523
§ 1. Светодиоды 523
§ 2. Полупроводниковый лазер 528
Литература 538
Глава 14. Свойства поверхности 540
§ 1. Поверхностные состояния 540
§ 2. Явления переноса на поверхности 546
Литература 551
Глава 15. Разные полупроводники 553
§ 1. Сверхпроводящие полупроводники 553
§ 2. Жидкие, стеклообразные и аморфные полупроводники 556
§ 3. Органические полупроводники 568
Литература 573
Приложение 1. Тензоры электро- и теплопроводности 575
Приложение 2. Модифицированные функции Бесселя 579
Литература 582
Приложение 3. Методы измерения удельного сопротивления и эффекта Холла 583
Литература 590
Приложение 4. Коэффициенты прозрачности и отражения света; соотношения Крамерса — Кронига 591
Литература 596
Приложение 5. Измерение типичных свойств полупроводников 597
Численные значения важных постоянных 599
Предметный указатель 600
Указатель материалов 607

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акустоэлектрический домен 339
— эффект 331
Аморфные полупроводники 560
Анизотропии фактор 288, 296
Барафа кривая (зависимость) 391, 392
Барьер потенциальный 166
— Шоттки 183, 364
Бесселя функция модифицированная 579
Блоха функция 32, 54
Больцмана множитель 158
— уравнение 73
Бора магнетон 371
Борна приближение 211

Боровский радиус примесного атома 200, 424
— — экситона 412
Бриджмена соотношение 130
Бриллюэна зона 41
— — в пространстве импульсов фононов 233
Бриллюэновское рассеяние 339, 340
Брукса — Херринга формула 208, 353
Бурштейна сдвиг 408
Валентные зоны, влияние давления 348
Ван дер Пау метод 585
Ван Хова сингулярности 355
Ванье экситон 413
Варикап 168
Вб/м^2 (единица магнитной индукции) 83
Верде постоянная 479
Вероятность заполнения в тепловом равновесии 59
— рассеяния 203
— термодинамическая 57
Взаимодействие электронов со звуковой волной 491, 492
Вигнера — Зейтца ячейка 42
Видемана — Франца закон 108
Виртуальные состояния 447
Волна акустическая 211
Волна альфвеновская 493
— геликонная, взаимодействие со звуковой волной 492
— магнитоплазменная 489
— температурная 112
Вольтерсдорфа толщина 593
Время восстановления после пробоя 385
— жизни неосновных носителей 157, 189, 511
— максвелловской релаксации 160
— — — дифференциальное 323
— релаксации импульса 71, 199, 205
— — — анизотропное 296
— — энергии 79
— — — для рассеяния на акустическом деформационном потенциале 220
— — — — — — оптическом деформационном потенциале 253, 254
— — — — — — полярном оптическом потенциале 264
— — — экспериментальное значение 149
— свободного пробега 198
Вымораживание носителей 67, 209
— — магнитное 371
Вырождение 59, 123, 144, 218, 220
Ганна эффект 321
Гармоники, смешивание 495
Гашение фотопроводимости 513
Гейзенберга принцип неопределенности 35
Геликон 490
Генерации скорость 159, 172, 387, 508
Гетеропереход 535
Глубокие уровни 68, 514
Горячие носители 142, 370, 382, 391, 410, 451, 455, 457, 460, 461
Давление, влияние на валентные зоны 348
— — на зону проводимости 283
Дебаевская длина 160
Дебая температура 235, 250
Де Гааза — ван Альфена эффект 371
Дембера эффект 188
Дестрио эффект 523
Деформации тензор 138
Деформационного потенциала постоянные 281, 282, 348
Дингля температура 369
Диод Ганна 322
— Есаки 360
— ЛПД 392
— обращенный 364,
— Овшински 558

— плотность тока насыщения 172, 174
— Рида 392
— туннельный 360
Дислокации, рассеяние 273
Дифракция медленных электронов 544
Дифференциальное сечение рассеяния 198, 205
Диффузии уравнение 190, 374, 507
Диффузионная длина 159
— частота 336
Диффузионное приближение 74
Диффузионный потенциал 166—168
Диффузия амбиполярная 159
— горячих носителей 194
— ионов лития 27
— коэффициент 123, 157, 195
Диэлектрическая проницаемость, вклад свободных носителей 148
Длина дебаевская 160
— диффузионная 159
— свободного пробега при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 214
Долины дополнительные 318
— эквивалентные 298
Домен акустоэлектрический 339
— Ганна 321
Дрейфа скорость 71
— — насыщение при рассеянии на оптическом деформационном потенциале 258, 275
Дрейфовая амбиполярная подвижность 161
Дырка 21
Есаки диод 360
Жидкие полупроводники 556
Закон Видемана — Франца 108
Закон Ома, отклонения 142
Запоминание 559
Заряд эффективный Калена 241
— — Сигети 241, 437
Затвор 187
Зеебека эффект 115
— — в СВЧ диапазоне 501
— — горячих носителей 501
Зеемановское расщепление 415, 429
Зейтца уравнение 294
Зинера эффект 365
Зона Бриллюэна 41
— — в пространстве импульсов фононов 233
Зона валентная, влияние давления 348
— запрещенная 34, 40
— — отрицательная 48
— — температурная зависимость 24
— непараболичность 38, 51, 354
— проводимости, влияние давления 283
— хвосты 364, 426
Зонная структура 29, 37, 47, 50—52, 280, 343, 398
Излучение когерентное 529
Измерение типичных свойств полупроводников 597
Импульса время релаксации 71, 199, 205
Инверсия заселенности 529
Индуцированное испускание 447, 528
Инжекция 155
Интеграл Ферми 60
Интегральные схемы 186
Ионизации скорость 389
Ионизация лавинная 389
Испускание света, индуцированное 447, 528
Калена эффективный заряд 241
Квазиимпульс 36
Квазиуровень Ферми 174
Квантовый выход 508
— предел 368
Кейна формулы 37
Кельвина соотношения 124, 123
Керра эффект в магнитном поле 355, 356

Когерентное излучение 529
Коллектор 162, 176
— сопротивление 179
Комбинационное рассеяние 340, 435
Компенсация 27, 384, 387
Константы деформационного потенциала 281, 282, 348
— — — акустического 212
— — — оптического 250, 454, 455
Контакт металл — полупроводник 182
Конуэлл — Вайскопфа формула 209
Концентрация примесей 66, 227
Корбино диск 100
Коэффициент магниторезистивный, зависящий от механизма рассеяния 96
— распределения 68
— Риги — Ледюка 134
— Холла 82
— — в сильном магнитном поле 96, 353
— — в слабом магнитном поле 90
— усиления по току 178
Край собственного поглощения 395, 439
— — — зависимость от давления 406
— — — — от концентрации носителей 407
— — — — от состава 406
— — — — от температуры 399
Крамерса — Кронига соотношения 396, 593
Кронига — Пенни модель 29
Лавинное размножение 389
Лавинный пробой в p — n-переходах 389
Лазер, коэффициент усиления 531
— на эффекте комбинационного рассеяния с переворотом спина 537
— полупроводниковый 528
Ландау уровни 366
—— — связанные 432
Ланде g-множитель 65, 369, 371, 415, 510, 537
Лидана — Закса— Теллера соотношение 237, 435
Лоренца число 107
— — в почти собственном полупроводнике 111
Лосева эффект 523
ЛПД приборы 392
Луноход 191
Люксембург-горьковский эффект 498
Люминесценция 523
— к. п. д. 524
Магнетон Бора 371
Магнитный момент в квантовом пределе 371
Магнитоплазменные волны 489
Магниторезистивный коэффициент, зависящий от механизма рассеяния 96
— эффект в многодолинной модели 291
— — в модели гофрированных сфер 351, 352
— — в неоднородных образцах 103
— — в полуметаллах 98
— — в полупроводниках с двумя сортами дырок 98
— — в почти собственных полупроводниках 98
— — в сильном магнитном поле 97
— — в слабом магнитном поле 96
— — влияние контактов 103
— — зависящий от полярности 314
— — осцилляции 368
— — отрицательный 311
Магнитофононный эффект 374
— — на теплых носителях 378
Максвелла — Больцмана функция распределения 59
Маска 186
Масса, единица 71
— эффективная 29, 35

— — плотности состояний 287, 347
— — приведенная 442
— — холловская 290
— — электропроводности 286, 347, 349
Междолинное рассеяние 298
— — влияние на поглощение света 464
— — неэквивалентное 317
Междолинные фононы 298, 437
Межзонная плотность состояний 442
Межзонные переходы 395, 413, 440, 488
Межэлектронное рассеяние 270
Метод зонной плавки 186
— фотолитографии 185
Микроплазмы 392
Многозарядные уровни, акцепторные 514
— — донорные 514
Множитель Больцмана 158
— Ланде 65, 369, 371, 415, 510, 537
Модель Кронига — Пенни 29
Найквиста формула 150
Напряжение
Нернста 129
— — учет несоосности боковых отростков 130
— холловское 92
Напряжение холловское, учет несоосности боковых отростков 93
Нейтральные примеси, рассеяние 199
Нейтронная спектроскопия 235, 437
Нелинейная оптика 493
Непараболичность закона дисперсии в подзонах 38, 51, 354
Нернста эффект 127, 132
Неустойчивости двухпучковые 491
Нити тока 387
Носители неосновные 26, 155
— — время жизни 157, 510
— основные 155
Овшински диод 558
Оже рекомбинация (эффект) 384, 524
Ома закон, отклонения 142
Онзагера соотношение 123
ОНОЗ режим 326
Оптические фононы 231
Оптическое выпрямление 495
Органические полупроводники 568
Осциллятора сила 441
Отражение света 396, 592
— — в магнитном поле 416
— — решеточное 432
Отражения коэффициент 395
Памяти эффект 559
Параметрическое усиление 498
Парциальных волн метод 199
Пельтье эффект 124
Переброса процесс 213
Перезаселение в магнитном поле 311
— долин 304
Перескоков механизм (модель) 272, 563, 564, 571
Переход p — n 164
— — емкость 168
— — плавный 164, 168
Переходы прямые оптические 400
Перрена барометрическая формула 158
Пинч-эффект 389
Плазменная частота 433, 467
— — при отражении 467
Планка формула 213
Плотность состояний 60
— — межзонная 442
— — эффективная 60, 76
Поверхностная электропроводность 547
— скорость рекомбинации 189, 513, 550
Поверхностные состояния 542
Поверхность, условие плоских зон 548
Поглощение инфракрасных лучей 374, 446
— света осциллирующее 414

— — показатель 395
— — примесное 424
— — решеточное 436
— — свободными носителями 445
— — — — в магнитном поле 476
— — собственное 395
Подвижность 71
— амбиполярная дрейфовая 161
— высокочастотная 149
— в *Ge*, *Si*, температурная зависимость 164
— магниторезистивная 292, 576
— при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 214
— — — — — — — — зависимость от электрического поля 219
— — — на ионизованных примесях 208
— — — на нейтральных примесях 200
— — — на оптическом деформационном потенциале 251, 257
— — — на полярном оптическом потенциале 262
— — — на пьезоэлектрическом потенциале 230
— — — совместное на ионизованных примесях и акустическом деформационном потенциале 222
— холловская 91
— ширина запрещенной зоны 569
Подзоны 347
Показатель поглощения 395
— преломления 395
Поле термоэлектрическое 108
— электротермическое 85
Полуметалл 19, 48, 98, 370, 492
— измерение электронной температуры 370
— магниторезистивный эффект 98
Полупроводник 20
— га-типа 22
— р-типа 22
— прямой (непрямой) 401
— собственный, концентрация электронов 24, 68
Поля эффект 454
— эффективная напряженность 261, 285, 302
Поляризация 237
Поляритеты 435
Полярная константа 261
Полярное оптическое рассеяние 260
— — — влияние на поглощение света 456
Полярон 269
Порог ганновских осцилляции 325, 326
Правило f-сумм 442
Преломления показатель 395
Прилипания уровни (центры) 511, 516
Примесей концентрация 66, 227
— энергия связи 428
Принцип неопределенности Гейзенберга 35
Прицельное расстояние 205
Пробой, анизотропия 385
— в стеклообразных полупроводниках 558
— диэлектрический 267
— лавинный 389
— при низких температурах 382
Проводимость 26
— определение типа термоэлектрическим способом 117
— поверхностная 547
— собственная 26
Прозрачности коэффициент 592
Произведение nL 324
Пьезосопротивление 136
Пьезоэлектрическое рассеяние 228
— — влияние на поглощение света 453

Работа выхода 540
Радиолокационного обнаружения установки 182
Размножения коэффициент 389
Распределение Планка 213
Рассеяние комбинационное 340, 435
— межэлектронное 270
— на акустическом деформационном потенциале 211
— на дислокациях 273
— на ионизованных примесях 205
— — — — влияние на поглощение света 458
— на нейтральных примесях 199
— на оптическом деформационном потенциале 250
— — — — — — влияние на поглощение света 454
— полярное оптическое 260
— — — влияние на поглощение света 456
— пьезоэлектрическое 228
Рассеяние пьезоэлектрическое, влияние на поглощение света 453
— совместное на акустическом деформационном потенциале и на ионизованных примесях 221
Рассеяния вероятность 203
— — второе золотое правило Ферми 203
Распределение Планка 213
Расщепленный германий *p*-типа 348
Рекомбинация 156, 509, 516
— безызлучательная 512
— излучательная 511
— поверхностная, скорость 189
— центр 516
Риги — Ледюка фактор 134
— — эффект 128
Рида диод 392
Самокомпенсация 28
Сасаки — Шибуи эффект 305, 356, 357
Сверхпроводимость 553, 572
С вето диоды 523
Светоэлектрический эффект 500
Сдвиг Бурштейна 408
Сечение захвата 521
Сигети эффективный заряд 241, 437
Сингулярности ван Хова 423
Скин-слой 592
Скорость дрейфа 71
— генерации 159, 172, 387, 508
— рекомбинации 173, 156
— — поверхностная 189, 513, 550
Смешивание гармоник 495
Солнечная батарея 193
Соотношение Бриджмена 130
— Кельвина первое (второе) 124, 123
— Крамерса — Кронига 396, 593
— Лидана — Закса — Теллера 237, 435
— Онзагера 123
— Эйнштейна 123, 195
Сопротивление диска Корбино 100
— отрицательное дифференциальное 387
Состояния виртуальные 447
— поверхностные 542
— — быстрые 544
— — медленные 544
— — Тамма 540
— — Шокли 542
Спектроскопия нейтронная 235, 437
— туннельная 365
Спиновый резонанс электронов 417, 475
Спин-орбитальное взаимодействие 344
Стеклообразные полупроводники 358
Стимулированное излучение 528
Структура зонная 29, 37, 47, 50—52, 280, 343, 398
— кристаллическая вюрцита 45
— — цинковой обманки 44
Счетчик частиц 168

— — с поверхностным барьером 182
Температура Дебая 235, 250
— Дингля 369
— электронная 142
Температурная волна 112
Тензор деформации 138
— напряжения 138
— обратной эффективной массы 284
— пьезосопротивления 137, 138
— упругости 138
— эластосопротивления 138
Тепла плотность потока 100, 107
Теплопроводность удельная 107
— — методика измерения 109
— тензор 476
Теплые носители 142, 150 224 258, 268, 306, 358, 378
Термо-э.д.с. абсолютная 115
— — в условиях магнитофононного эффекта 379, 380
— диска Корбино 130
— дифференциальная 115
— — влияние магнитного поля 130
— — в почти собственном полупроводнике 118
— — в сильном магнитном поле 136
Термоэлектрический параметр эффективности 126
— эффект (Зеебека) 113
— — на сверхвысоких частотах 501
Томсона эффект 124
Транзистор 176
— база 176
— затвор, исток, сток 187
— коллектор 176
— — импеданс 179
— пленарный 185
— полевой (МОП) 187
— сплавной 185
— точечно-контактный 184
— характеристики 180
Туннельный диод 360
Увлечение фононами 119
— фотонами 500
Угол Фойгта 485
— Холла 92
Ударная ионизация в p — n-переходах 389
— — при низких температурах 382
Удельное сопротивление 71
— — метод измерения четырехзондовый 583
Ультразвуковая волна, поглощение 201
Упругая постоянная продольная 213
Упругости тензор 138
Уравнение Апплетона — Хартри 490
— баланса энергии 80
— Больцмана 73
— — для фононов 119
— — — электронов 119
— диффузии 112
— Зейтца 294
— непрерывности числа носителей 77
— — для плотности потока энергии 112
Уровни глубокие 68, 514
— Ландау 366
— — связанные 432
— прилипания 511, 516
— Тамма 540
— Шокли 542
Фаз, согласование 497
Фактор анизотропии 288, 296
Фарадея эффект 478
Ферми — Дирака функция распределения 59
Ферми интеграл 60
— квазиуровень 174
— энергия 58, 116
— — в собственном полупроводнике 61
— — приведенная 61
Фойгта эффект 483
Фонон 119
— волновой вектор 212
— время релаксации 120

— оптический 231
— спектр 231
— спектроскопия комбинационного рассеяния 235
— — нейронная 235
— уравнение Больцмана 119
— эффект увлечения 119
Формула Брукса — Херринга 208, 353
— Кейна 37
Формула Конуэлл — Вайскопфа 209
— Найквиста 150
— Перрена 158
Фосфоресценция 523
Фотогальваномагнитный эффект 190
Фотодетекторы 521
Фотодиффузия 188
Фотолитографический процесс 185
Фотопроводимость 190, 374, 507
Фотоэлектромагнитный эффект 190
Фотоэлемент 170, 193, 194
Фотоэффект вентильный 191
Франца — Келдыша эффект 351
Френкеля экситон 413
Функция Бесселя 579
— Блоха 32, 54
— распределения в магнитном поле 87
— — Максвелла — Больцмана 59
— — Ферми — Дирака 59
Хейнса — Шокли эксперимент 162, 182
Холла коэффициент 82
— — в сильном магнитном поле 96, 353
— — в слабом магнитном поле 90
— угол 92
— эффект в модели двухзонной проводимости 313
— — зависящий от полярности 313, 314
— — магнитофононные осцилляции 380
— — метод измерения ван дер Пау 585
— — — — — в анизотропных полупроводниках 590
— —пленарный 106
— — поверхностный 547
Холловский массовый множитель 291
Холловское напряжение 92
Холл-фактор 90
— горячих носителей 314
Циклотронный резонанс 468
— — в инфракрасном диапазоне 474, 475, 487
— — — многодолинных полупроводниках 471
— — — модели гофрированных сфер 474
— — ширина линии 200
Число Лоренца 107
— — в почти собственном полупроводнике 111
Шнурование тока 331, 389
Шокли уровни 542
Шоттки барьер 183, 364
Шубникова — де Гааза эффект 368, 369
Шум 150, 392, 514, 550
— генерационно-рекомбинационный 514
— дробовой 151
— тепловой 150
Эйнштейна коэффициенты 528
— соотношение 123, 195
Экситон 410, 416, 473
— Ванье 413
— непрямой 346, 349, 412, 416
— прямой 412, 418
— связанный 412, 417
— Френкеля 413
Экситонов подавление 423
Эксперимент Хейнса — Шокли 162, 182
Эластосопротивления тензор 138
Электромеханической связи

коэффициент 229, 336
Электронная температура 142
— — влияние на подвижность 218, 219
— — при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 218
Электроотражение 423
Электропроводность 70, 76
— в сильном электрическом поле 144
— высокочастотная 148
— отрицательная дифференциальная 319, 387
— смешанная 81
— тензор 575
Электротермическое поле 85
Эллипсоиды постоянной энергии 295
Эмиссия электронная 196, 550
Эмиттер 162, 176
— импеданс 179
Энергии релаксация в вырожденных полупроводниках 218
— — при пьезоэлектрическом рассеянии 230
— уравнение баланса 80
Энтропии перенос 113
Энтропия, плотность 63
Эттингсгаузена эффект 128
Эффект увлечения фононами 119, 120
— — электронами 122
Эффективная масса 29, 35
— напряженность электрического поля 261, 285, 302
Эффективный заряд 241
Ячейка Вигнера — Зейтца 42

УКАЗАТЕЛЬ МАТЕРИАЛОВ

Антимония алюминия
— — магниторезистивный эффект 295
— — решеточное отражение света 432
— — спектр рекомбинационного рассеяния света 435
Антимония галлия
— — ширина запрещенной зоны 37
— — *n*-типа
— — — зонная структура 61, 319
— — — концентрация электронов (Г- и L-зоны) 61
— — — подвижность 482
— — — фаралеевское вращение 483
— — *p*-типа
— — — поглощение света 425—427
Антимония индия
— — край поглощения в магнитном поле 414
— — отношение подвижностей 94
— — ширина запрещенной зоны 36, 37, 474, 475
— — га-типа
— — — геликоны 490
— — — дифференциальная термо-э. д. с. в сильном магнитном поле 379, 380
— — — коэффициент Нернста 130
— — — — Холла 94
— — — коэффициенты теплых носителей 310, 311
— — — магнитоплазменное отражение 477, 478, 484, 485
— — — магнитосопротивление лиска Корбино 102, 103
— — — межэлектронное взаимодействие 270, 271
— — — множитель Ланде (g-фактор) 371
— — — плазменное отражение 467
— — — примесное поглощение 425
— — — удельная теплопроводность 88
— — — холловская подвижность 102
Антимонид индия *n*-типа
циклотронный резонанс 474, 475
— — — электропроводность 110

— — — энергетический зазор $\Delta\varepsilon_{\Gamma L}$ 319
— — — эффект Ганна 319, 320, 327
— — — — Фарадея 481, 482
— — — Фойгта 484, 485
— — — эффективная масса 36, 475
— — *p*-типа
— — — коэффициент Холла 94
— — — удельная теплопроводность 110
— — — электропроводность 110
Антрацен 569
Арсенид галлия
— — коэффициент поглощения 400
— — к. п. д. люминесценции 525
— — край поглощения, влияние давления 406
— — лазер 532
— — — влияние гидростатического давления 534
— — — — магнитного поля 533
— — — генерация второй гармоники 534
— — — гетероструктура 535
— — — пороговая плотность тока 531, 532
— — скорость лавинной ионизации 390
— — спектр излучения 392, 533
— — — колебаний решетки 235, 236, 376
— — туннельная спектроскопия 365
— — ширина запрещенной зоны 37
— — экситоны 411
— — эффект Франца — Келдыша 422
— — *n*-типа
— — — время релаксации
— — — — — междолинное 325
— — — — — энергии 265
— — — зонная структура 318
— — — — — влияние гидростатического давления 325, 326
Арсенид галлия *n*-типа время релаксации, влияние одноосного давления 325, 326
— — — константа полярного взаимодействия 261, 266, 376
— — — магнитофононный эффект 378
— — — множитель Ланде (g-фактор) 371
— — — подвижность 262, 318
— — — в долинах (100) 318
— — — пьезосопротивление 140, 141
— — — энергетический зазор $\Delta\varepsilon_{\Gamma L}$ 318
— — — эффект Ганна 320
— — — — — домены 321
— — — — — произведение *nL* 324
— — — эффективная масса 37, 318. 377
— — — эффективный заряд 241
— — *p*-типа
— — — коэффициент Нерста 109, 132, 133
— — — поглощение света свободными дырками 465, 466
Арсенид индия
— — ширина запрещенной зоны 37
— — *n*-типа
— — — время релаксации энергии 265
— — — нелинейная оптика 498
— — — осцилляция магнитосопротивления 368
— — — поглощение света свободными носителями 446
— — — скорость генерации 386
— — — температура Дингля 370
— — — эффект Ганна 327
— — — эффективная масса 37
Арсенид-фосфид галлия
— — люминесценция 527
— — эффект Ганна 320

— — — — — пороговое поле 326
Бромид серебра
— — константа полярного взаимодействия 269
Висмут
— магниторезистивный эффект 99
Висмут — сурьма
— — термомагнитное охлаждение 129
— — ширина запрещенной зоны 47
Германий
— аморфный, отражение 564
— вольтамперная характеристика *p*—*n*-перехода 171, 172
— диэлектрическая проницаемость 160
— жидкий, электропроводность, термо-э. д. с., магнитная восприимчивость 556
— зонная структура 50, 317, 347
— коэффициент отражения 423
— край собственного поглощения 399
— межзонный эффект Фарадея 488
— поверхностная проводимость 345
— примесные уровни 68, 386, 514
— скорость звука 334
— собственная проводимость 24, 25
— спектр колебаний решетки 235, 236
— температура Дебая 235, 298
— — междолинных фононов 298
— фотодетекторы 521
— фотопроводимость 515
— — спектральная чувствительность 519
— — ширина запрещенной зоны 24
— — — — изменение с температурой 24, 399
— экситоны 415, 416
— *n*-типа
— — акустоэлектрический эффект 332
— — время жизни носителей 171
— — — релаксации импульса 71, 72, 201, 215
— — — — — — анизотропия 296, 297
— — — — междолинное 334
— — — — энергии 254, 255
— — в сильных электрических полях, время рекомбинации 385
— — — — — — — — релаксации энергии 144, 145, 254, 255
— — — — — — — коэффициент неомичности 225, 259, 308
— — — — — — — — Холла 313
— — — — — — — — — температурная зависимость 146, 147
— — — — — — — — — частотная зависимость 147, 148
— — — — — — — магниторезистивный эффект 293
— — — — — — — отрицательная дифференциальная проводимость 387, 388
— — — — — — — перезаселение 305, 313
Германий *n*-типа в сильных электрических полях, ударная ионизация 382, 383, 386, 387
— — — — — — — электропроводность 145—147
— — — — — — — эффект Ганна 327, 329
— — — — — — — — Сасаки — Шибуя 305, 308
— — константы взаимодействия для акустоэлектрических фононов 283, 334
— — — — — для L—X-переходов 328
— — — оптические 254, 255
— — коэффициент диффузии 171
— — лавинное размножение 390, 391
— — междолинные фононы, энергия 298
— — подвижность 72, 163, 227, 275,

276
.— — — в X-долинах (оценки) 327
— — примесная проводимость 271, 272
— — пьезосопротивление 139
— — температура шума 151
— — термо-э. д. с., дифференциальная 116, 117
— — фактор анизотропии эффективной массы 292
— — эффективная масса 376, 377, 429, 473
— *p*-типа
— — время жизни носителей 179
— — — релаксации импульса 353
— — — — энергии 255
— — зонная структура 354, 355
— — константы деформационного потенциала 348
— — коэффициент диффузии 171
— — коэффициенты для теплых электронов 358
— — магниторезистивный эффект 99, 100, 353, 354
— — подвижность 352
— — — температурная зависимость 163
— — соотношение констант взаимодействия 352
— — термо-э. д. с. дифференциальная 116, 117
— — эффект Холла 353
— — эффективная масса 347, 352, 473
— — явления в сильных электрических полях 356, 357
Карбид кремния
— — константа полярного взаимодействия 241
— — спектр излучения 527
— — эффективный заряд 241
Кремний
— время релаксации фононов 121
— зонная структура 50
— коэффициент ионизации 390
— пленарная технология 185
— собственная проводимость 24, 25
— удельная теплопроводность 110
— ширина запрещенной зоны 24
— — — — температурная зависимость 24, 25
— *n*-типа
— — время релаксации энергии 255
— — в сильных электрических полях, коэффициент неомичности 146, 147
— — — — — — — — перезаселения 309
— — — — — — — — — при одноосном давлении 330
— — — — — — — магниторезистивный эффект отрицательный 315
— — — — — — — — — поперечный, 311, 312
— — деформационный потенциал. 284
— — коэффициент диффузии горячих носителей 196
— — лавинное размножение 390
— — магниторезистивный эффект 293
— — подвижность 164
— — пьезосопротивление 136, 137, 160
— — — температурная зависимость 140
— — f- и g-рассеяние 298
— — циклотронный резонанс 472, 473
— — эффективная масса 472, 473
— — — — плотности состояний. 287
— — — — электропроводности 287, 347
— *p*-типа
— — время релаксации энергии 255
— — зонная структура 354
— — константы взаимодействия, для

акустоэлектрического деформационного потенциала 348
Кремний *n*-типа константы взаимодействия отношение 348
— — коэффициент диффузии 162
— — — неомичности 358
— — подвижность 164
— — — вдоль канала 187
— — — неосновных носителей 164
— — пьезосопротивление 139
— — термо-Э- д. с. дифференциальная 95
— — эффективная масса 347, 355, 356
Окись цинка
— — дрейфовый параметр акусто-электрической активности 338
— — коэффициент усиления звука 338
Олово, серое
— — горячие электроны 370
— — ширина запрещенной зоны 48, 49
Органические соли 571, 572
Селен, жидкий 558
Селенид мышьяка
— — ширина запрещенной зоны поподвижности 561
Селенид свинца
— — кристаллическая структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — — изменение с температурой 400
Селенид-теллурид цинка 47
— — лазер 536
Сульфид кадмия
— — действие вакансии кристаллической решетки 27
— — дрейфовый параметр акусто-электрической активности 338
— — коэффициент усиления звука 338
— — кристаллическая структура 45
— — ширина запрещенной зоны 45
Сульфид свинца
— — кристаллическая структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — — изменение с температурой 400
Теллур
— время релаксации энергии 148
— жидкий, плотность 557, 558
Геллур жидкий электропроводность 557, 558
— зона Бриллюэна 46
— кристаллическая структура 45, 46
— отрицательное дифференциальное сопротивление 387
— ширина запрещенной зоны 46, 386
Теллурид висмута
— — зона Бриллюэна 46, 47
— — кристаллическая структура 46
— — термо-э. д. с., дифференциальная 127
— — термоэлектрический параметр эффективности 127
— — удельная теплопроводность 110, 127
— — число Лоренца 111
— — ширина запрещенной зоны 46
— — электропроводность 127
Теллурид германия
— — зонная структура 553
— — концентрация носителей 553
— — проводимость *p*-типа 553
— — сверхпроводимость 554
— — теплоемкость 555, 556
Теллурид кадмия
— — магнитофононный эффект 378, 379
— — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид кадмия — ртути
— — — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид олова
— — зонная структура 553
— — сверхпроводимость 553

Теллурид ртути
— — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид свинца
— — зонная структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — — изменение с температурой 400
Теллурид свинца — олова
— — — ИК лазер 536
— — — ширина запрещенной зоны 47
Тетрацен 569
Титанат стронция
— — магнитная восприимчивость 554
— — сверхпроводимость 554, 555
— — температура перехода 554, 555
Фосфид галлия
— — коэффициент ионизации 390
— — край собственного поглощения 403
— — поглощение света свободными носителями 465, 466
— — спектр излучения 526
— — ширина запрещенной зоны, изменение с температурой 400
— — экситоны 403, 412, 526, 527
— — *n*-типа
— — — зонная структура 318
— — — поглощение света свободными носителями 465, 466
— — — подвижность 318
Фосфид индия *n*-типа
— — — зонная структура 326
— — — пьезосопротивление 140
Фосфид индия *n*-типа ширина запрещенной зоны 37
— — — эффект Ганна 320, 327
— — — эффективная масса 36, 37
Фталоцианин
— коэффициент Зеебека 570
Халькогенидные стекла
— — коэффициент поглощения света 565
— — локализованные состояния 561
— — подвижность, зависящая от частоты 563
— — поле пробоя 560
— — электропроводность 561

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Сейчас, когда производство полупроводников стало целой отраслью промышленности и когда полупроводники все в большей степени определяют прогресс в таких областях, как радиоэлектроника, автоматизация производства, связь и вычислительная техника, знание физики полупроводников является профессиональной потребностью не только физиков, занимающихся их исследованием, но и значительно более широкого круга специалистов. Потребности практики стимулировали развитие физики полупроводников. В настоящее время для понимания даже узкой по профилю научной статьи недостаточно поверхностного знакомства с физикой полупроводников, а требуются глубокие знания из самых различных разделов этой области науки. Такие знания нужны и инженерам, поскольку новые полупроводниковые приборы основаны на относительно недавно открытых «глубинных» явлениях в полупроводниках.

Предлагаемая читателям книга, написанная австрийским ученым проф. К. Зеегером, представляет собой попытку изложить современную физику полупроводников, включая новейшие направления, возникшие в последние годы и практически не отраженные в монографиях.

Книга родилась на базе лекционного опыта автора, читающего соответствующий курс для студентов, специализирующихся в области физики и электроники. Она написана доступным языком, но отдельные разделы требуют хорошей подготовки читателя в области квантовой механики. Благодаря богатству фактического и иллюстративного материала и широте охваченного круга вопросов книга является хорошим учебным пособием.

Своеобразие книги К. Зеегера в том, что автор строит изложение не в виде «незыблемых теоретических истин», как это обычно делают в учебниках, а излагает представления и аппроксимации физики полупроводников путем описания и анализа конкретных экспериментальных и теоретических работ, посвященных конкретным полупроводниковым материалам.

Фактически книга представляет собой обзор большой группы работ по физике полупроводников. Достоинство книги в том, что она не только является энциклопедическим справочником по физическим явлениям в конкретных полупроводниках, но и

в том, что она привлекает читателя к анализу научных работ (не случайно автор рекомендует в качестве дополнительной литературы труды международных конференций по физике полупроводников) и позволяет видеть, на каком (пусть стареющем) материале образовались «незыблемые истины», общие для всех веществ.

Вместе с тем сегодня невозможно охватить в одной монографии все работы по физике полупроводников. Попытка сделать это — довольно рискованный путь, на котором неизбежны упущения. Так, например, в книге почти не цитируются работы советских авторов. Кроме того, различные разделы физики полупроводников изложены не одинаково полно. При редактировании перевода мы добавили небольшой список отечественных монографий по отдельным разделам книги, в которых, в частности, отражена точка зрения советских авторов по вопросам приоритетного характера. Сделано также несколько примечаний со ссылками на статьи в тех случаях, когда излагаемый автором материал либо приоритетные вопросы являются дискуссионными.

Книга состоит из 15 глав. В гл. 1—3 изложены элементарные основы физики полупроводников. В отличие от традиционного способа освещения материала автор уже здесь рассматривает внутреннюю структуру зоны проводимости и валентной зоны в основных полупроводниках и приводит примеры сложных поверхностей постоянной энергии. В качестве дополнительной литературы по материалу этих глав можно рекомендовать книги [1—6]. Гл. 4—6 посвящены явлениям переноса в невырожденных полупроводниках с изотропной эффективной массой. Рассматриваются все основные гальваномагнитные и термоэлектрические эффекты в полупроводниках, а также контактные явления, включая инжекцию и диффузию неосновных носителей заряда и транзисторный эффект. Подробно анализируются механизмы, ответственные за рассеяние электронов в полупроводниках, включая рассеяние в условиях разогрева электронного газа. По материалу этих глав можно рекомендовать книги [2—10].

Первые шесть глав фактически представляют собой современное изложение традиционной физики полупроводников — описание явлений, обусловливающих транзисторное и выпрямительное действие полупроводников.

В гл. 7 и 8 рассматриваются явления переноса в полупроводниках со сложной структурой внутри зон и читатель подводится к современным работам: описываются явления разогрева электронов и дырок, межзонное распределение носителей заряда, отрицательная проводимость и эффект Ганна, акусто-

электрический эффект. Все эти явления лежат в основе многих новых полупроводниковых приборов, в том числе для диапазона СВЧ.

В гл. 9 описаны квантовые эффекты. Рассмотрен туннельный эффект и явления переноса в сильных магнитных полях. В гл. 10 очень кратко говорится о низкотемпературном пробое и лавинном пробое в p—n-переходах.

В гл. 11 подробно обсуждаются оптические явления в полупроводниках. Автор включил в эту главу не только чисто оптические явления, но и вопросы распространения электромагнитных волн диапазона СВЧ и радиодиапазона в полупроводниковой плазме.

В гл. 12—14 изложены основы рекомбинационных процессов фотоносителей, генерации света светодиодами и полупроводниковыми лазерами; дано понятие о поверхностных состояниях и поверхностной проводимости. Эти главы имеют небольшой объем, поэтому автору не удалось полно осветить указанные вопросы. Из рекомбинационных явлений рассмотрены лишь процессы на многократно заряженных уровнях в германии.

Заключительная глава (гл. 15) посвящена «новым полупроводникам», свойства которых качественно отличаются от свойств традиционных полупроводников. Это сверхпроводники, жидкие и аморфные полупроводники. Многие вопросы, связанные с этими типами полупроводников, в настоящее время еще остаются открытыми, поэтому пока трудно сказать, что́ из опубликованного в научной периодике является важнейшим и полностью достоверным. В то же время без такой главы современная монография по физике полупроводников не была бы полной.

Нужно сказать, что проблемы, рассматриваемые в гл. 7—15, относятся к бурно развивающимся разделам современной физики полупроводников, и здесь особенно заметны пропуски крупных работ советских ученых, вклад которых общепризнан. В качестве минимального дополнительного материала по этим вопросам можно указать на монографии и статьи [11—19].

В целом книга представляет собой ценную монографию, полезную для широкого круга научных работников и студентов. Хотя вопросы химии и технологии полупроводников не рассматриваются, однако технологи найдут в книге много полезных сведений о свойствах «своих» полупроводников, что облегчает наличие указателя материалов. Благодаря охвату новейших направлений и энциклопедичности книга К. Зеегера в определенной мере закрывает те пробелы, которые имеются в учебной и справочной литературе по физике полупроводников.

Гл. 1—5 и 9 переведены А. Тетервовым, гл. 6, 8, 10, 12, 13 и 15 — А. Матулёнисом и гл. 7, 11 и 14 — Р. Бразисом.

Академик АН Лит. ССР Ю. К. ПОЖЕЛА

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цидильковский И. М.*, Электроны и дырки в полупроводниках. Энергетический спектр и динамика, «Наука», М., 1972.
2. *Ансельм А. И.*, Введение в теорию полупроводников, Физматгиз, М., 1962.
3. *Киреев П. С.*, Физика полупроводников, «Высшая школа», М., 1969.
4. *Иоффе А. Ф.*, Физика полупроводников, изд-во АН СССР, М. — Л., 1957.
5. *Стильбанс Л. С.*, Физика полупроводников, «Сов. радио», М., 1967.
6. *Баранский П. И., Клочков В. П., Потыкевич И. В.*, Полупроводниковая электроника (справочник), «Наукова думка», Киев, 1975.
7. *Денис В., Пожела Ю.*, Горячие электроны, «Минтис», Вильнюс, 1971.
8. *Пикус Г. Е.*, Основы теории полупроводниковых приборов, «Наука», М., 1965.
9. *Рывкин С. М.*, Фотоэлектрические явления в полупроводниках, ГИ ФМЛ, М., 1963.
10. *Стафеев В. И., Каракушан Э. И.*, Магнитодиоды, «Наука», М., 1965.
11. *Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г.*, Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках, «Наука», М., 1972.
12. *Бир Г. Л., Пикус Г. Е.*, Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках, «Наука», М., 1972.
13. *Левинштейн М. Е., Пожела Ю. К., Шур М. С.*, Эффект Ганна, «Сов. радио», М., 1975.
14. *Фистуль В. И.*, Сильно легированные полупроводники, «Наука», М., 1967.
15. *Иоффе А. Ф., Регель А. Р.*, Progress in Semiconductors (ed. A. F. Gibson), vol. 4, 237 (1960).
16. *Алфёров Ж. И.* в книге «Физика сегодня и завтра», под ред. В. М. Тучкевича, «Наука», Л., 1973.
17. *Коломиец Б. Т.*, Phys. Stat. Solidi, 7, 359; 713 (1964).
18. *Ржанов А. В.*, Электронные процессы на поверхности полупроводников, «Наука», М., 1971.
19. *Ляшенко В. И., Литовченко В. Г., Степко И. И., Стриха В. И., Ляшенко Л. В.*, Электронные явления на поверхности полупроводников, «Наукова думка», Киев, 1968.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга была задумана как курс лекций по физике полупроводников продолжительностью в три семестра, из расчета три часа в неделю, для студентов старших курсов физических и электротехнических факультетов. В дополнение к этому курсу можно рекомендовать курс физики твердого тела. Для усвоения материала необходимо знание курсов электродинамики и (для некоторых глав) основ квантовой механики. Главное внимание уделено физическим, а не технологическим аспектам. Физика полупроводников представляет собой по существу прекрасное поле действий, где будущий физик или инженер может проверить свое понимание многочисленных физических законов, известных ему из более общих курсов физики.

Подробно рассматриваются явления переноса и оптические свойства полупроводников. Было решено не включать традиционное описание свойств отдельных полупроводников, а вместо этого при выводе окончательных формул провести промежуточные математические выкладки, что, на мой взгляд, облегчит усвоение материала для студентов-нетеоретиков.

Ежегодно более чем в 30 журналах публикуется несколько тысяч статей по различным вопросам физики полупроводников. Поэтому одному человеку было бы невозможно написать исчерпывающую книгу по физике полупроводников, если бы не существовало целого ряда прекрасных обзорных статей по отдельным вопросам, опубликованных в сериях Solid State Physics, Festkörper-Probleme/Advances in Solid State Physics, Semiconductors and Semimetals и Progress in Semiconductors. При написании этой книги я в значительной мере руководствовался этими обзорными работами.

Все уравнения записаны в рационализированной системе МКС, хотя для некоторых численных оценок используются единицы см вместо м, г вместо кг, что весьма распространено в физике полупроводников. Студенту очень важно уметь изредка проверять теоретические выкладки, используя соображения размерности, что значительно проще в системе МКС, нежели в системе СГС. Надеюсь, что теоретики из числа читателей простят мне то, что их традиции нарушены.

В начале книги приведен список основных обозначений. Он удобен тогда, когда один символ имеет много значений или,

наоборот, для одной и той же физической величины используется несколько обозначений, например f для частоты в электрических явлениях и ν в оптике.

В книгу не включены задачи для самостоятельного решения, так как существуют прекрасные сборники задач, например: Бонч-Бруевич В. Л. и др., Сборник задач по физике полупроводников, М., 1968, и книга Problems in Solid State Physics (ed. H. J. Goldsmid, New York, Academic Press, 1969), в которой три главы посвящены физике полупроводников. Мы настоятельно рекомендуем студентам проверить приобретенные знания путем решения этих задач. Для углубления знаний можно посоветовать Труды международных конференций по физике полупроводников, проводимых каждые два года.

Книга, безусловно, будет полезна для научных работников и инженеров, работающих в данной области науки; текст содержит более 650 ссылок на литературу.

Выражаю благодарность своему коллеге М. В. Валенте, работавшему с проф. Дж. Бардином и в Научном центре в Лос-Аламосе, за чтение рукописи и советы, касающиеся стилистики английского языка. Особо благодарен М. Кришбауму из Университета в Граце, Австрия, за полезную критику. Ценные замечания и предложения поступили также от проф. К. Баумана и П. Коцевара (оба из Университета в Граце), проф. Г. В. Пётцла из Технического университета в Вене и от моих коллег по институту. Крайне признателен Итке Фуцик за неоценимую помощь при подготовке книги к печати, Виктории Кёвер за выполнение 372 рисунков и Г. Калерту за вычисления и фотографии. И наконец, но не в последнюю очередь, благодарю мою жену Лотту за ее долготерпение во время написания монографии.

Вена, июнь 1973 *К. Зеегер*

С большим удовольствием благодарю проф. Ю. К. Пожелу и его сотрудников за перевод английского издания на русский язык. Пользуюсь случаем поблагодарить проф. Э. Отсуку из Университета в г. Осака за предоставленный список необходимых исправлений в английском издании, которые учтены в данном переводе. Выражаю также благодарность издательству «Мир» за предложение о сотрудничестве и гостеприимство во время моего визита в Москву.

Москва, 6 апреля 1976 *К. Зеегер*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нижние индексы: n — электроны, p — дырки, i — собственная проводимость, L — легкие дырки, H — тяжелые дырки, l — продольный, t — поперечный, $-$ и $+$ — правая и левая круговая поляризация света.

Верхние индексы: $\times$ — нейтральный, $\pm$ — однократно ионизованный, $*$ — в преобразованной системе координат.

$(\mathbf{ab})$ — скалярное и $[\mathbf{ab}]$ — векторное произведения.

a — постоянная решетки (стр. 32).

$\mathbf{a}$ — единичный вектор (орт) элементарной ячейки (стр. 41); единичный вектор поляризации излучения (стр. 405).

a_B — радиус Бора.

A — акцептор.

$\mathbf{A}$ — векторный потенциал; базисный вектор обратной решетки (стр. 42).

A_0 — амплитуда векторного потенциала (стр. 405).

A_s — амплитуда звуковой волны (стр. 211).

Å — ангстрем (1 Å $= 10^{-10}$ м).

b — отношение подвижностей μ_n/μ_p (стр. 81); ширина образца.

$\mathbf{b}$ — единичный вектор (орт) элементарной ячейки (стр. 41).

$\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля; базисный вектор обратной решетки (стр. 41).

B_{12}, B_{21} — коэффициенты Эйнштейна (стр. 528).

c — скорость света в вакууме.

$\mathbf{c}$ — единичный вектор (орт) элементарной ячейки (стр. 41).

c_l — продольная упругая постоянная (стр. 213).

c_v — удельная теплоемкость на единицу массы при постоянном объеме (стр. 112).

C — элементарная ячейка; емкость (стр. 168); константа в случае собственной проводимости (стр. 24).

$\mathbf{C}$ — базисный вектор обратной решетки (стр. 41).

d — толщина $p-n$-перехода (стр. 166); толщина образца.

D — донор (стр. 26); коэффициент диффузии (стр. 157); упругая постоянная пружины (стр. 231); константа оптического деформационного потенциала (стр. 250); индукция электрического поля.

D_ρ — матрица поворота (стр. 286).

e — элементарный заряд (e^- — электрона, e^+ — дырки) (стр. 23).

$\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{E}$ (стр. 302); вектор или тензор деформации (стр. 138).

e_C — эффективный заряд Калена (стр. 240).

e_{pz} — пьезоэлектрическая постоянная (стр. 228).

e_S — эффективный заряд Сигети (стр. 240).

$\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля.

E_0 — эффективная напряженность электрического поля при полярном оптическом рассеянии (стр. 261).

E_s — напряженность электрического поля на поверхности барьера (стр. 184).

f — функция распределения (стр. 59); множитель ван дер Пау (стр. 586); частота (стр. 151).

f_0 — равновесная функция распределения (стр. 73); сферически симметричная часть функции распределения (стр. 244).

f_1 — анизотропная часть функции распределения в диффузионном приближении (стр. 242).

f_t — вероятность заполнения уровней прилипания (стр. 172).

f_{vc} — сила осциллятора для межзонных переходов (стр. 441).

F — свободная энергия (стр. 58).

$\mathbf{F}$ — напряженность электрического поля (стр. 85); сила (стр. 36).

g — множитель, учитывающий спиновое вырождение примесного уровня (стр. 55); плотность состояний (стр. 60).

g_j — кратность вырождения уровня энергии (стр. 55).

G — скорость генерации (стр. 159).

h — постоянная Планка; $\hbar = h/2\pi$.

$\mathbf{h}_\rho$ — единичный вектор в ρ-й долине (стр. 303).

H — гамильтониан.

$\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля.

H_{mn} — матричный элемент перехода между состояниями m и n под действием возмущения H_1 (стр. 203).

I — ток; интенсивность освещения (освещенность) (стр. 508).

Im — мнимая часть.

$\mathbf{j}$ — плотность тока (стр. 70).

$\mathbf{j}_s$ — плотность тока насыщения через p—n-переход (стр. 171).

$\mathbf{j}_t$ — пороговая плотность тока в лазерах (стр. 532).

J — поток энергии звуковой волны (стр. 334).

k — показатель поглощения (стр. 396).

$\mathbf{k}$ — волновой вектор электрона (стр. 32); $\mathbf{k}'$ — то же после рассеяния (стр. 203); k_E — его проекция на направление электрического поля (стр. 246).

k_B — постоянная Больцмана.

K — коэффициент электромеханической связи (стр. 229); коэффициент анизотропии K_m/K_τ (стр. 296).
K_m — отношение компонент тензора эффективной массы m_l/m_t (стр. 296).
K_τ — отношение компонент тензора времени релаксации импульса τ_l/τ_t (стр. 296).
l — длина образца; эффективная длина Франца — Келдыша (стр. 419); длина свободного пробега фононов (стр. 120).
$l_{ак}$ — длина свободного пробега носителей при акустическом рассеянии в модели Друде (стр. 72).
L — диффузионная длина (стр. 160); число Лоренца (стр. 108).
L_D — дебаевская длина (стр. 160).
m — эффективная масса носителей (стр. 29); тензор эластосопротивления (стр. 138).
m_d — эффективная масса плотности состояний (стр. 347).
m_0 — масса свободного электрона.
m_r — приведенная эффективная масса (стр. 410).
m_H — холловская эффективная масса (стр. 290).
m_M — магниторезистивная эффективная масса (стр. 486).
m_σ — эффективная масса электропроводности (стр. 347).
M — масса атома (стр. 231).
n — концентрация электронов (стр. 24); квантовое магнитное число (стр. 366); показатель преломления (стр. 396).
n_i — собственная концентрация носителей (стр. 24).
n_s — концентрация электронов на поверхности барьера (стр. 183).
N — число атомов в кристалле (стр. 54); концентрация центров рассеяния (стр. 198); число эквивалентных долин (стр. 301); комплексный показатель преломления (стр. 591).
N_A — концентрация акцепторов (стр. 26).
N_c — эффективная плотность состояний у дна зоны проводимости (стр. 60).
N_D — концентрация доноров (стр. 26).
N_I — концентрация ионизованных примесей (стр. 207).
N_q — число равновесных фононов с волновым вектором $\mathbf{q}$ (стр. 213).
N_u — число ячеек в единице объема кристалла (стр. 237).
p — концентрация дырок (стр. 24); прицельное расстояние (стр. 205).
$\mathbf{p}$ — оператор импульса (стр. 343).
P — параметр Кейна (стр. 37).
$\mathbf{P}$ — вектор диэлектрической поляризации (стр. 237).
P_E — коэффициент Эттингсгаузена (стр. 128).
P_H — планарный коэффициент Холла (стр. 106).

q — безразмерный коэффициент, обратно пропорциональный концентрации ионизованных примесей (стр. 222).
$\mathbf{q}$ — волновой вектор фонона (стр. 211).
Q — тепло, выделяемое в единице объема за единицу времени (стр. 123).
Q_N — коэффициент Нернста (стр. 128).
Q_{Th} — теплота Томсона (стр. 124).
r — коэффициент отражения (r_∞ — для нормального падения) (стр. 591); показатель экспоненты в $\tau_m \sim \varepsilon^r$ (стр. 72).
$\mathbf{r}$ — вектор положения точки.
r_c — импеданс (дифференциальное сопротивление) коллектора (стр. 179).
r_e — импеданс (дифференциальное сопротивление) эмиттера (стр. 179).
r_H — холл-фактор (стр. 90, 291).
R — сопротивление (стр. 100); коэффициент отражения плоского слоя (стр. 592); скорость перехода электронов из состояния $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$, сопровождающегося поглощением фононов (стр. 404).
Re — действительная часть.
R_B — сопротивление в магнитном поле (стр. 102).
R_H — коэффициент Холла (стр. 90).
Ry — энергия Ридберга.
s — скорость поверхностной рекомбинации (стр. 188).
s_{RL} — множитель Риги — Ледюка (стр. 134).
S — скорость рассеяния (стр. 203) (S_+ — для испускания, S_- — для поглощения фонона); энтропия (стр. 57); параметр энтропии переноса (стр. 113); деформация (стр. 229).
$\mathbf{S}$ — вектор Умова — Пойнтинга (стр. 404).
$S(E)$ — отношение проводимостей $\sigma(E)/\sigma(0)$ в симметричном направлении в многодолинной модели (стр. 302).
S_{RL} — коэффициент Риги — Ледюка (стр. 134).
t — время.
T — температура решетки; натяжение (стр. 229); коэффициент прозрачности плоского слоя (стр. 592).
T_e — температура электронов (дырок) (стр. 142).
T_M — магниторезистивный коэффициент, зависящий от механизма рассеяния (стр. 96).
$\mathbf{u}_s$ — скорость звука (стр. 334).
U — внутренняя энергия (стр. 58).
$\mathbf{v}$ — скорость носителей.
$\mathbf{v}_d$ — скорость дрейфа (стр. 71).
v_{ds} — скорость дрейфа при насыщении (стр. 257).
V — потенциал электрического поля; объем кристалла.
V_D — диффузионный потенциал на p — n-переходе (стр. 165).

w — толщина базы транзистора (стр. 177).
$\mathbf{w}$ — плотность потока тепла (стр. 121);
w_1 — коэффициент скорости акустического рассеяния (стр. 299).
w_2 — коэффициент скорости междолинного рассеяния (стр. 299).
W — термодинамическая вероятность (стр. 57).
x_c — координата перехода коллектор — база (стр. 177).
x_e — координата перехода эмиттер — база (стр. 177).
X — гидростатическое давление (стр. 136).
X_{kl} — тензор напряжения (стр. 138).
Z — кратность заряда иона (стр. 204); термоэлектрический параметр эффективности (стр. 128).
α — тензор обратной эффективной массы в единицах m_σ (стр. 284); коэффициент усиления по току (стр. 178); константа полярного взаимодействия (стр. 261); коэффициент поглощения (стр. 592).
$\beta = (\mu - \mu_0)/\mu_0 E^2$ — коэффициент неомичности (стр. 142); коэффициент усиления лазера (стр. 531).
γ — анизотропная часть отношения $(\mu - \mu_0)/\mu_0 E$ (стр. 307).
Δ — параметр Кейна (стр. 37).
ε — энергия носителей (стр. 29).
$\varepsilon_{\text{ак}}$ — константа акустического потенциала деформации (стр. 212).
ε_A — энергия акцептора $\varepsilon_v + \Delta\varepsilon_A$ (стр. 27).
ε_c — дно зоны проводимости (стр. 24).
ε_D — энергия донора $\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_D$ (стр. 26).
ε_F — эллиптичность Фарадея (стр. 480).
ε_G — ширина запрещенной зоны $\varepsilon_c - \varepsilon_v$ (стр. 23).
ε_{ik} — тензор деформации (стр. 280).
ε_n — энергетический уровень (стр. 366).
ε_t — энергия уровня прилипания (стр. 524).
$\varepsilon_{\text{экс}}$ — энергия связи экситона (стр. 410).
ζ — энергия Ферми (стр. 58) [ζ_n — относительно дна зоны проводимости (стр. 113), ζ_p — относительно потолка валентной зоны (стр. 113)].
ζ_n^*, ζ_p^* — квазиуровни Ферми (стр. 175).
η — к. п. д. люминесценции (стр. 524); квантовый выход.
θ — угол рассеяния $\sphericalangle(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ (стр. 205); $\sphericalangle(\langle 001\rangle\ \mathbf{E}$ или $\mathbf{B})$.
θ' — угол рассеяния $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{q})$ (стр. 449).
Θ — абсолютная термо-э. д. с. (стр. 115); температура оптических фононов (Дебая) (стр. 235).
Θ_i — температура междолинных фононов (стр. 299).
θ_F — угол Фарадея (стр. 478).
θ_γ — угол Фойгта (стр. 485).

$\varkappa$ — статическая диэлектрическая проницаемость (стр. 237); удельная теплопроводность (стр. 108); коэффициент сжимаемости (стр. 141).

$\tilde{\varkappa}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость ($\varkappa_r$ — действительная, $\varkappa_i$ — мнимая части) (стр. 593).

$\varkappa_0$ — электрическая постоянная.

$\varkappa_{опт}$ — оптическая диэлектрическая проницаемость (стр. 237).

$\lambda = T/T_e$ (стр. 222); длина волны $2\pi\lambda$ (стр. 591).

Λ_ρ — матрица преобразования в k-пространстве (стр. 288).

μ — подвижность (стр. 71).

μ_0 — подвижность в слабом поле (стр. 142).

$\mu_{эк}$ — подвижность в слабом поле, обусловленная рассеянием на акустических колебаниях (стр. 222).

μ_H — подвижность холловская (стр. 92).

$\mu_{ион}$ — подвижность в слабом поле, обусловленная рассеянием на ионизованных примесях (стр. 222).

μ_M — подвижность магниторезистивная (стр. 292).

μ_{FE} — подвижность эффекта поля (стр. 548).

μ_B — магнетон Бора (стр. 371).

μ_0 — магнитная постоянная ($= 1/\varkappa_0 c^2$).

μ_T — коэффициент Томсона (стр. 124).

ν — частота.

Ξ_d, Ξ_u — константы деформационного потенциала для эллипсоидальных изоэнергетических поверхностей (стр. 281).

π_{ik} — тензор пьезосопротивления (стр. 137).

Π — коэффициент Пельтье (стр. 124).

ρ — удельное сопротивление (стр. 101); плотность вещества (стр. 112).

ρ_B — удельное сопротивление в магнитном поле (стр. 96).

σ — электропроводность (стр. 70); сечение рассеяния (стр. 198).

σ_W — тензор электропроводности в слабом магнитном поле (стр. 89).

τ — среднее время жизни носителей $^1/_2(\tau_n + \tau_p)$ (стр. 172).

τ_1 — время максвелловской релаксации (стр. 159).

τ_i — время релаксации импульса при междолинном рассеянии (стр. 299).

τ_m — время релаксации импульса (стр. 71).

τ_r — время жизни относительно излучательного перехода для электрона на верхнем уровне лазера (стр. 528).

τ_ε — время релаксации энергии (стр. 141).

φ — работа выхода (стр. 540); азимут.

ϕ — акустический потенциал (стр. 332).

Φ — электростатический потенциал (стр. 165).

ψ — волновая функция электрона (стр. 29); угол между вектором плотности тока $\mathbf{j}$ и направлением $\langle 001 \rangle$ (стр. 304).
ω — угловая частота.
ω_c — циклотронная частота (стр. 350).
ω_e — собственная частота осциллятора (стр. 433).
ω_l — частота продольного фонона (стр. 237).
ω_0 — частота оптического фонона (стр. 249).
ω_p — плазменная частота (стр. 433).
ω_s — частота фонона (стр. 210).
ω_t — частота поперечного фонона (стр. 237).
Ω — телесный угол.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

§ 1. Диэлектрик — полупроводник — полуметалл — металл

При исследовании электрических явлений был установлен тот факт, что металлы хорошо проводят электрический ток, а неметаллы — плохо. Последние получили название диэлектриков. Электропроводность металлов, как правило, лежит в интервале 10^6—10^4 $(\text{Ом}\cdot\text{см})^{-1}$, в то время как для диэлектриков эта величина меньше 10^{-10} $(\text{Ом}\cdot\text{см})^{-1}$. Твердые тела с электропроводностью в диапазоне 10^4—10^{-10} $(\text{Ом}\cdot\text{см})^{-1}$ принято называть полупроводниками. Однако сюда не входят такие вещества, как щелочно-галоидные соединения, проводимость которых обусловлена электролитической диссоциацией. Мы ограничимся рассмотрением химически однородных веществ, в особенности таких, которые могут быть получены в монокристаллическом виде. Даже при сделанных ограничениях необходимо различать между собой полупроводники и полуметаллы. Это различие может быть выявлено лишь на основе детального исследования оптических и электрических свойств веществ, а также влияния на них температуры, магнитного поля и т. п. Не вдаваясь в подробности, примем в качестве исходного следующее определение: полупроводники имеют запрещенную зону («энергетическую щель»), а полуметаллы и металлы — нет. Тем не менее высоколегированные полупроводники в большей или меньшей степени ведут себя как металлы, и из-за несовершенства технологии очистки, например методом зонной плавки [1—4], многие соединения подобного рода нелегко классифицировать. Деление твердых тел на полупроводники и диэлектрики еще более условно; определяющим здесь является отношение ширины запрещенной зоны к температуре. Очень чистые полупроводники при стремлении температуры к нулю ведут себя как диэлектрики.

Типичными полупроводниками являются германий и кремний. Если обратиться к периодической системе элементов, то видно, что эти вещества относятся к IV группе, в то время как типичные металлы (например, щелочные) — к I группе, а типичные диэлектрики, какими являются галогены и кристаллизующиеся при низких температурах благородные газы, — к VII и VIII группам соответственно. Другими полупроводниками IV группы являются алмаз, который представляет собой не что иное, как модификацию углерода, и серое олово α-Sn,

устойчивое только при низких температурах. Кристаллическая структура всех полупроводников IV группы представляет собой хорошо известную алмазоподобную решетку, в которой соседние атомы образуют тетраэдрическую симметрию. Полупроводниками являются самый легкий элемент III группы — бор и самые тяжелые элементы VI группы — селен и теллур. Типичным полуметаллом является самый тяжелый элемент V группы — висмут; сюда же можно отнести и более легкие элементы этой группы — мышьяк и сурьму, хотя их свойства в настоящее время изучены в меньшей степени.

Типичными полупроводниковыми соединениями являются соединения $A^{III}B^{V}$, такие, как арсенид галлия GaAs и антимонид индия InSb, и соединения $A^{II}B^{VI}$, такие, как сульфид цинка ZnS (цинковая обманка). Эти соединения кристаллизуются в структуру цинковой обманки, которую можно получить из алмазоподобной решетки путем поочередной замены атомов углерода атомами цинка и серы. Эти соединения имеют стехиометрический состав, например карбид кремния SiC, а твердые растворы германия и кремния могут быть получены в виде полупроводниковых смешанных кристаллов произвольного состава. Многие окислы и сульфиды металлов являются полупроводниками, часто нестехиометрического состава. Некоторые из них широко применяются в технике, например закись меди Cu_2O (ранее применялась в выпрямителях), сульфид свинца PbS (инфракрасные детекторы) и ферриты (окислы железа), обладающие магнитными свойствами. Сейчас кремний в основном используется в производстве транзисторов, служащих для усиления электрических сигналов. В настоящее время это наиболее важная область технического применения полупроводников.

Полупроводники характеризуются следующими свойствами:

1. В чистом полупроводнике проводимость экспоненциально растет с температурой (принцип действия термистора). Для получения того же эффекта при более низких температурах необходимы меньшие концентрации примесей.

2. В примесном полупроводнике проводимость сильно зависит от концентрации примесей. Так, окись никеля NiO в чистом виде является диэлектриком. Если в это соединение ввести 1% окиси лития Li_2O (такое умышленное введение примесей называется легированием), то проводимость возрастет в 10^{13} раз. Однако в легированных материалах проводимость очень мало меняется с температурой — так же, как в металлах.

3. Проводимость меняется (как правило, возрастает) при облучении полупроводника светом или электронами высокой энергии, а также при инжекции носителей тока из подходящего металлического контакта (явление инжекции рассматривается в гл. 5, § 1).

4. В зависимости от характера легирования заряд может переноситься либо электронами, либо так называемыми положительно заряженными «дырками». В электрическом поле дырка движется так же, как позитрон, но в других отношениях эта аналогия отсутствует. Можно легировать отдельный кристалл неоднородным образом, так что в одной его части заряд будет переноситься отрицательно заряженными электронами, а в другой его части — положительно заряженными дырками. Полупроводниковые диоды и транзисторы как раз являются монокристаллами такого вида.

Полупроводниковые свойства характерны не только для твердых тел. Существуют и жидкие полупроводники. Однако вследствие процессов атомной диффузии области с различными степенями легирования в таких полупроводниках быстро перемешиваются, поэтому создание устойчивых устройств с неоднородным составом невозможно. В последнее время большое внимание привлекли к себе стеклообразные и аморфные полупроводники, которые могут найти применение в технике в качестве быстродействующих переключателей, если удастся улучшить их воспроизводимость.

Как уже упоминалось, высоколегированные полупроводники обладают металлическими свойствами. Для ряда таких полупроводников наблюдалось явление сверхпроводимости, хорошо известное в некоторых металлах при очень низких температурах. Температуры перехода в сверхпроводящее состояние лежат ниже 0,5 К.

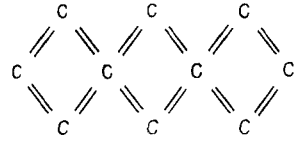
Оказалось, что некоторые ароматические углеводороды также являются полупроводниками. В таких соединениях рост проводимости с температурой ограничен из-за разрушения вещества при высоких температурах.

§ 2. Положительно заряженная дырка

Как упоминалось в предыдущем параграфе, перенос заряда может осуществляться положительно заряженными дырками. В данном параграфе мы разъясним это понятие качественно на примере цепочки атомов углерода, которую для простоты положим двумерной. Показанные на фиг. 1.1 связи между соседними атомами являются ковалентными. Каждый атом углерода отдает соседям 4 валентных электрона и получает по одному электрону от каждого из 4 соседей, так что образуется конфигурация благородного газа с 8 электронами на внешней оболочке. Так же обстоит дело и в трехмерной решетке.

Представим себе теперь, что в такую идеальную алмазоподобную решетку попадает избыточный электрон. (Говоря «идеальная», мы имеем в виду также, что внешняя поверхность

кристалла, имеющая свободные связи, находится достаточно далеко от рассматриваемого электрона; иными словами, кристалл предполагается бесконечно протяженным.) Для этого лишнего электрона не находится свободных связей, чтобы закрепиться. Он будет блуждать по кристаллу со скоростью, зависящей от температуры решетки. Однако если к кристаллу приложить внешнее электрическое поле, то на хаотическое движение электрона наложится дрейф в определенном направлении: в простейшем случае вследствие своего отрицательного заряда электрон будет двигаться против поля. Такой избыточный электрон, который носит наименование электрона проводимости,



Фиг. 1.1. Схематическое изображение идеальной двумерной решетки алмаза. Каждой ковалентной связи (=) соответствуют два валентных электрона с противоположно направленными спинами.

образует кристалл *n*-типа; последнее означает, что заряд переносится отрицательно (negative) заряженной частицей. На практике избыточные электроны поставляются примесными атомами в кристаллах.

Можно также из электрически нейтрального алмаза устранить валентный электрон. Кристалл становится положительно заряженным. Какой именно атом углерода отдает электрон, не имеет значения. Главное то, что этот атом восполнит свою потерю, отбирая электрон у одного из соседей. Соседний же атом в свою очередь отберет электрон у ближайшего атома. Этот повторяющийся процесс приведет к тому, что дырка, образовавшаяся при удалении электрона из кристалла, будет хаотически двигаться по кристаллу совершенно аналогично тому, как ведет себя избыточный электрон, рассмотренный выше. Что произойдет, если вновь наложить внешнее электрическое поле? Где бы дырка ни находилась, валентный электрон заполнит ее, двигаясь против поля, а это означает, что дырка движется в направлении поля. Это именно то, чего следует ожидать от положительного заряда. Поскольку данный кристалл в целом заряжен положительно, можно считать, что этот заряд локализован в области, занятой дыркой. В физике полупроводников положительные дырки трактуются как положительно заряженные электроны. Проводимость, обусловленная дырками, носит название проводимости *p*-типа.

Для сравнения рассмотрим пузырьки углекислого газа в минеральной воде. Роль электрического поля здесь играет поле

силы тяжести, а вместо электрического заряда имеем массу молекул воды. Поскольку пузырьки движутся против силы тяжести, формально их можно трактовать как частицы с отрицательной массой, пока они находятся в объеме жидкости, хотя масса молекулы углекислого газа, конечно, положительна и она лишь вынуждена двигаться вверх. Точно так же предположение о положительно заряженных частицах, именуемых дырками, в физике полупроводников позволяет дать очень простое формальное описание достаточно сложного процесса; необходимо лишь помнить, что дырка есть недостаток валентного электрона, и в сомнительных случаях необходимо каждый раз убеждаться, что оба способа описания непротиворечивы.

Приведенная выше картина процессов переноса является крайне упрощенной. Она не отражает того факта, что электроны и дырки обладают различными «эффективными массами». Более точное описание достигается только методами квантовой механики.

§ 3. Процессы проводимости, компенсация, закон действующих масс

Прежде чем переходить к квантомеханическому описанию, мы рассмотрим классическую модель тепловой генерации и аннигиляции пар. Обозначим через ε_G энергию связи валентного электрона с атомом в кристалле. Если термически сообщить электрону энергию ε_G, то можно породить электрон проводимости и дырку в том месте, где находился этот электрон. Электрон и дырка движутся по кристаллу независимо друг от друга. Коль скоро мы трактуем дырку как частицу, сходную с электроном и отличающуюся от него только знаком заряда, можно сказать, что образовалась электронно-дырочная пара. Может случиться, что электрон рекомбинирует с дыркой; последнее означает, что электрон отыскал свободную связь и «решил» там остаться. Энергия связи ε_G преобразуется либо в электромагнитное излучение (рекомбинационное излучение), либо в колебания атомов (фононы). С корпускулярной точки зрения аннигиляцию электронно-дырочной пары принято называть рекомбинацией. Обозначая электроны e^- и дырки e^+, можно адекватным образом описать этот процесс следующим уравнением:

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons \varepsilon_G. \tag{1.3.1}$$

В отсутствие падающего излучения энергия рождения пары ε_G поступает от колебаний решетки. Поэтому с повышением температуры равновесие смещается влево, т. е. число носителей и, следовательно, проводимость будут увеличиваться, что характерно для полупроводников. Разумеется, излучение падает на

кристалл, даже если он находится в тепловом равновесии с окружающей средой. Это «излучение черного тела». Оно в точности компенсирует рекомбинационное излучение с энергией ε_G [см. правую часть уравнения (1.3.1)].

Из статистической механики известно следующее: вероятность того, что малая система, находящаяся в тепловом равновесии с большой системой, обладает энергией ε_G, пропорциональна $\exp(-\varepsilon_G/k_BT)$, где k_B — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура (при комнатной температуре $k_BT = 25{,}9$ мэВ). В данном случае малой системой является валентный электрон, а роль большой системы играет кристалл. Коэффициент пропорциональности при экспоненте есть некоторая степень T; тем не менее температурная зависимость в основном определяется экспоненциальным множителем, что хорошо известно, например, из закона термоэлектронной эмиссии металлов. Если воспользоваться законом действующих масс, то степенной множитель в уравнении (1.3.1) есть T^3. Тогда имеем

$$np = CT^3 \exp\left(-\frac{\varepsilon_G}{k_BT}\right), \tag{1.3.2}$$

где n и p — концентрации электронов проводимости и дырок соответственно. Значение константы C зависит от конкретного вида полупроводника. Уравнение (1.3.2) по своему виду напоминает уравнение, описывающее изменение концентраций ионов H^+ и OH^- в воде, когда эти концентрации малы по сравнению с концентрацией нейтральных молекул воды. В полупроводнике концентрации электронов и дырок также малы по сравнению с концентрацией атомов, ибо в противном случае материал следовало бы отнести к металлам. Строгий вывод уравнения (1.3.2), включая нахождение постоянного множителя C, приведен в гл. 3 [уравнение (3.1.35)].

В чистых полупроводниках каждому электрону проводимости соответствует дырка, поэтому $n = p$. Такие полупроводники называются собственными; концентрация электронов для них будет обозначаться через n_i. Уравнение (1.3.2) принимает вид

$$n_i = C^{1/2}T^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_G}{2k_BT}\right). \tag{1.3.3}$$

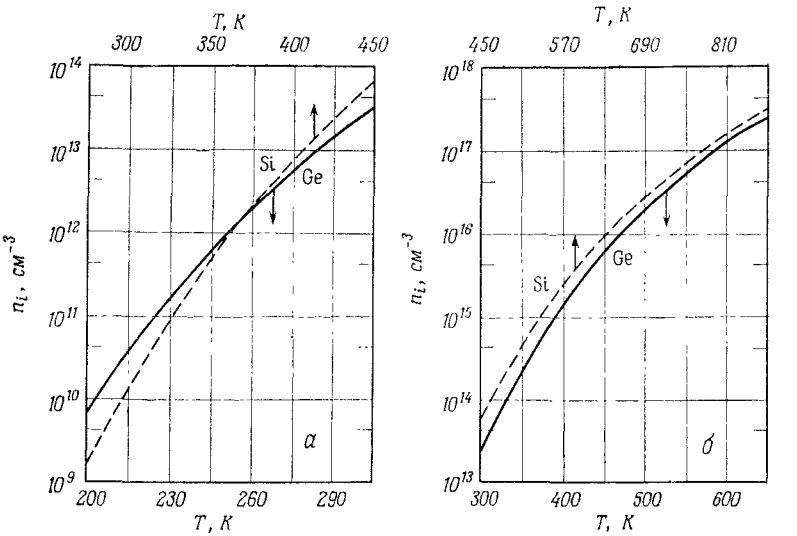
На фиг. 1.2 представлена температурная зависимость концентрации электронов n_i для кремния ($\varepsilon_G = 1{,}12$ эВ при 300 К) и германия ($\varepsilon_G = 0{,}665$ эВ при 300 К). При температурах выше 250 К (для кремния) и 200 К (для германия) величина ε_G линейно зависит от температуры:

$$\varepsilon_G(T) = \varepsilon_G(0) - \alpha T, \tag{1.3.4}$$

где коэффициент α равен $2{,}84 \cdot 10^{-4}$ эВ/К для кремния и $3{,}90 \cdot 10^{-4}$ эВ/К для германия. Однако это обстоятельство не меняет экспоненциального характера уравнения (1.3.3), в котором изменяется лишь множитель C, так как

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon_G - \alpha T}{2k_B T}\right) = \exp\frac{\alpha}{2k_B}\exp\left(-\frac{\varepsilon_G}{2k_B T}\right).$$

Поэтому в (1.3.3) в качестве величины ε_G выбираем ее значение, полученное продолжением линейной зависимости (1.3.4) до



Фиг. 1.2. Температурная зависимость концентрации носителей заряда, соответствующей собственной проводимости [5].

а — для кремния от 275 до 450 К и для германия от 200 до 500 К; *б* — для кремния от 450 до 870 К и германия от 300 до 650 К.

абсолютного нуля ($T = 0$). При низких температурах в выражении для ε_G появляется член, пропорциональный T^2 и имеющий тот же знак, что и αT. Значения этих членов находятся из оптических исследований.

Рассмотрим теперь легированный полупроводник. Предположим, что один атом замещен атомом примеси; например, четырехвалентный атом углерода замещен пятивалентным атомом фосфора. Для связи с четырьмя соседними атомами углерода нужны только четыре из пяти валентных электронов фосфора. Пятый же электрон связан крайне слабо. Энергия связи его $\Delta\varepsilon_D$ значительно меньше энергии связи валентного электрона с атомом углерода. Примесь, которая подобным образом отдает

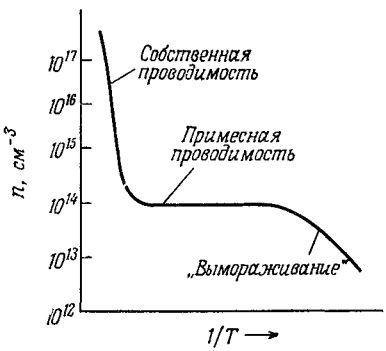
один или несколько электронов, называется донором D. Если нейтральный донор обозначить через D^x, а однократно ионизованный — через D^+, то уравнение реакции записывается следующим образом:

$$e^- + D^+ \rightleftharpoons D^x + \Delta\varepsilon_D. \qquad (1.3.5)$$

При высоких температурах все доноры термически ионизованы и концентрация электронов проводимости равна концентрации доноров N_D. Концентрация дырок определяется выражением

$$np = n_i^2, \qquad (1.3.6)$$

где величина n_i задана формулой (1.3.3). Носители заряда, находящиеся в меньшинстве, называются неосновными. При еще более высоких температурах величина n_i превысит N_D, и полупроводник станет собственным. Область температур, где концентрация электронов равна концентрации доноров ($n = N_D$) и не зависит от температуры, называется областью примесной



Фиг. 1.3. Схематическая зависимость концентрации носителей заряда от обратной температуры.

проводимости[1]). На фиг. 1.3 схематически представлена зависимость концентрации носителей от величины, обратной температуре. Для правой части кривой на фиг. 1.3, соответствующей низким температурам, баланс в уравнении (1.3.5) сдвигается вправо. Последнее соответствует «вымораживанию» носителей на доноры. Использование закона действующих масс опять приводит к существенно экспоненциальной зависимости концентрации носителей от температуры с величиной $\Delta\varepsilon_D$ под знаком экспоненты. Поскольку $\Delta\varepsilon_D$ много меньше, чем ε_G, наклон кривой $n(1/T)$ меньше, чем в интервале, соответствующем собственной проводимости.

Если в алмазе четырехвалентный атом углерода заменить трехвалентным атомом бора, то будет недоставать одного валентного электрона. Отдавая энергию $\Delta\varepsilon_A$, электрон из атома углерода переходит в атом бора и тем самым порождает подвижную дырку. Атом бора становится отрицательно заряжен-

[1]) Для «частично компенсированного» полупроводника (что в реальных условнях часто имеет место, см. ниже) N_D следует заменить на $N_D - N_A$.

ным. Бор в алмазе является акцептором A. Обозначая нейтральный акцептор через $A^{\times}$, а однократно ионизованный — через A^{-}, можно записать уравнение реакции

$$e^{+} + A^{-} \rightleftharpoons A^{\times} + \Delta\varepsilon_A. \qquad (1.3.7)$$

Зависимость концентрации дырок p от температуры аналогична рассмотренной выше для электронов в полупроводнике n-типа.

Если в полупроводнике имеются и доноры и акцепторы, то он называется компенсированным. При равенстве числа доноров числу акцепторов имеет место идеальная компенсация. Часто вещества с высоким удельным сопротивлением, полагаемые очень чистыми, в действительности являются компенсированными. Удобным средством компенсации акцепторов является метод дрейфа ионов лития. Положительный ион Li^{+} имеет электронную оболочку гелия и почти так же легко, как и гелий, диффундирует через некоторые твердые тела. Диффузия происходит посредством внедрения. Отрицательно заряженные акцепторы притягивают положительно заряженные ионы лития, образуя ионные пары, в результате чего происходит полная компенсация. На p—n-переход в процессе диффузии накладывается внешнее электрическое поле, так что движение иона образует p—i—n-переход с большой областью полной компенсации между p- и n-областями. Этот принцип используется, например, при изготовлении счетчиков γ-излучения [1]).

В обычных условиях реализуется случай неполной компенсации примесей. В зависимости от того, имеет ли место неравенство $N_D > N_A$ или обратное ему неравенство, полупроводник называется полупроводником n- или p-типа.

Полупроводниковые соединения с нестехиометрическим составом будут n- или p-типа в зависимости от того, какая компонента присутствует в избытке. Допустим, например, что где-то в кристалле CdS недостает иона S^{--}. Тогда имеется избыточный ион Cd^{++}, который нейтрализуется двумя локализованными электронами. Такая вакансия кристаллической решетки играет роль акцептора и тем самым образует полупроводник p-типа.

В полярных полупроводниках с узкой запрещенной зоной, таких, как PbTe и HgTe, свободные носители в основном порождаются за счет отклонений от стехиометрического состава. (В то же время в ионных кристаллах с широкой запрещенной зоной, например в NaCl, ширина запрещенной зоны больше энергии, необходимой для образования вакансии, которая

[1]) По этому вопросу см., например, [6, 7].

компенсирует ионизованные примеси, благодаря чему кристалл становится диэлектриком; подобное явление называется самокомпенсацией.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schildknecht H.*, Zonenschmelzen, Chemie, Weinheim/Germany, 1964.
2. *Holden A., Singer P.*, Crystals and Crystal Growing, Educational Services, Inc., Watertown, Mass., 1960.
3. Рост кристаллов, ред. А. В. Шубников и Н. Н. Шефталь, изд-во АН СССР, М. — Л., т. 1, 1957; т. 2, 1959; т. 3, 1961; «Наука», М., т. 4, 1964; т. 5, 1965; т. 6, 1965; т. 7, 1967; т. 8, 1968; т. 9, 1972; т. 10, 1974.
4. *Tanenbaum M.* в книге Semiconductors (ed. N. B. Hannay), Reinhold, New York, 1959. (Имеется перевод: Полупроводники, под ред. Хеннея, ИЛ, М., 1962, стр. 94—139.)
5. *Adler R. B., Smith A. C., Longini R. L.*, Introduction to Semiconductor Physics, Wiley, New York, 1964.
6. *Bertolini G., Coche A.*, Semiconductor Detectors, North-Holland, Amsterdam, 1968.
7. *Dearnally G., Northrop D. C.*, Semiconductor Counters for Nuclear Radiations, Spon., London, 1966.

Глава 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗОННАЯ СТРУКТУРА

Под «энергетической зонной структурой» понимается связь между энергией и импульсом носителей в твердом теле. Энергия электрона, находящегося в свободном пространстве, пропорциональна квадрату импульса. Коэффициент пропорциональности равен $1/2m_0$, где m_0 — масса свободного электрона. В «элементарной модели зонной структуры» соотношение между энергией и импульсом предполагается таким же, но с той лишь разницей, что m_0 заменяется на «эффективную массу» m. Последняя может быть как больше, так и меньше, чем m_0. Почему это так, станет ясно из дальнейшего. Зачастую зонная структура является более сложной и даже с помощью вычислительных машин находится лишь полуэмпирически. Краткое описание некоторых типичных зонных структур дается в § 4 данной главы. В гл. 7 и 8 проводится расчет явлений переноса. В гл. 4 и 5 исследуются явления переноса в предположении элементарной модели зонной структуры (что в большинстве случаев оказывается вполне хорошим приближением).

§ 1. Одиночная и периодически повторяющиеся потенциальные ямы

Носитель заряда в кристалле в поле атома испытывает вначале ускорение, а затем, покидая атом, торможение до тех пор, пока не попадет в поле следующего атома, и эти процессы постоянно повторяются. Поле кристалла можно представить в виде набора периодически повторяющихся потенциальных ям. Вычисления значительно упрощаются, если ямы предполагать прямоугольными, как это делается в одномерной модели Кронига — Пенни [1] для кристалла.

Вычислим предварительно уровни энергии частицы в одиночной потенциальной яме[1]) (фиг. 2.1). Глубина и ширина ямы есть V_0 и b соответственно. Введем следующие обозначения:

$$\alpha^2 = 2m\hbar^{-2}\varepsilon, \qquad \beta^2 = 2m\hbar^{-2}(V_0 - \varepsilon). \tag{2.1.1}$$

Внутри ямы, где $V(x) = 0$, уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0, \qquad -\frac{b}{2} \leqslant x \leqslant \frac{b}{2}; \tag{2.1.2}$$

[1]) Расчет заимствован из книги Нуссбаума [2].

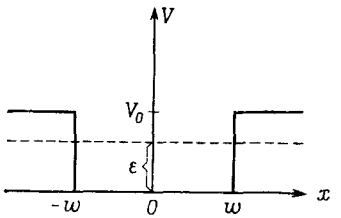
вне ямы, где $V(x) = V_0$, имеем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \beta^2\psi = 0, \quad x < -\frac{b}{2} \quad \text{и} \quad x > \frac{b}{2}. \tag{2.1.3}$$

В качестве граничного условия выберем условие обращения в нуль плотности вероятности $|\psi|^2$ нахождения частицы на бесконечности. Искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= Ce^{i\alpha x} + De^{-i\alpha x} && \text{при} && -\frac{b}{2} \leqslant x \leqslant \frac{b}{2}, \\ \psi &= Ae^{-\beta x} && \text{при} && x > \frac{b}{2}, \\ \psi &= Ae^{\beta x} && \text{при} && x < -\frac{b}{2}. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

где A, C и D — постоянные интегрирования.



Фиг. 2.1. Прямоугольная потенциальная яма ($w = b/2$).

Условие непрерывности ψ и $d\psi/dx$ при $x = b/2$ дает

$$\begin{aligned} Ae^{-\beta b/2} &= Ce^{i\alpha b/2} + De^{-i\alpha b/2}, \\ -\beta Ae^{-\beta b/2} &= i\alpha Ce^{-i\alpha b/2} - i\alpha De^{-i\alpha b/2}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Исключая $e^{-\beta b/2}$, получаем

$$-\beta Ce^{i\alpha b/2} - \beta De^{-i\alpha b/2} = i\alpha Ce^{i\alpha b/2} - i\alpha De^{-i\alpha b/2}. \tag{2.1.6}$$

Отсюда вычислим отношение D/C:

$$\frac{D}{C} = \frac{\beta + i\alpha}{-\beta + i\alpha} e^{i\alpha b}. \tag{2.1.7}$$

Аналогично, используя условие непрерывности при $x = -b/2$, получаем

$$\frac{D}{C} = \frac{-\beta + i\alpha}{\beta + i\alpha} e^{-i\alpha b}. \tag{2.1.8}$$

Исключая величину D/C из последних двух уравнений, находим

$$(\beta + i\alpha)^2 e^{2i\alpha b} = (-\beta + i\alpha)^2, \tag{2.1.9}$$

$$(\beta + i\alpha) e^{i\alpha b} = \pm(-\beta + i\alpha). \tag{2.1.10}$$

Тогда из (2.1.7) следует

$$\frac{D}{C} = \pm 1. \tag{2.1.11}$$

Выбирая знак плюс, получаем из (2.1.10)

$$\operatorname{ctg}\frac{ab}{2} = i\,\frac{e^{iab}+1}{e^{iab}-1} = i\,\frac{-\beta+i\alpha+\beta+i\alpha}{-\beta+i\alpha-\beta-i\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.1.12}$$

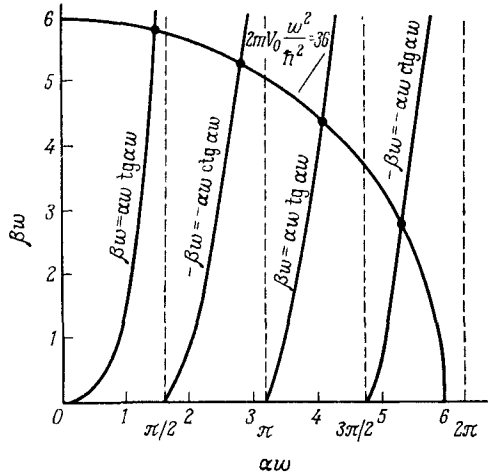
а для знака минус находим

$$-\operatorname{tg}\frac{ab}{2} = i\,\frac{e^{iab}-1}{e^{iab}+1} = i\,\frac{-(-\beta+i\alpha)-(\beta+i\alpha)}{-(-\beta+i\alpha)+(\beta+i\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2.1.13}$$

Решая эти уравнения относительно β и умножая обе части на $b/2$, получаем

$$\beta\frac{b}{2} = \begin{cases} \dfrac{ab}{2}\operatorname{tg}\dfrac{ab}{2} & \text{для знака плюс,} \\ -\dfrac{ab}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{ab}{2} & \text{для знака минус.} \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Графики этих функций приведены на фиг. 2.2, где также



Фиг. 2.2. Нахождение уровней энергии в потенциальной яме, показанной на фиг. 2.1, графическим методом ($w = b/2$) [3]

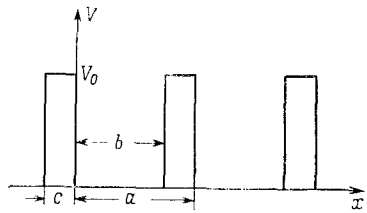
представлена часть окружности, задаваемой следующим из (2.1.1) уравнением

$$\left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta b}{2}\right)^2 = 2m\hbar^{-2}V_0\left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{2.1.15}$$

Точки пересечения этой окружности с кривыми (2.1.4) на фиг. 2.2 дают собственные значения энергии (в единицах V_0) уравнения Шредингера

$$\frac{\varepsilon}{V_0} = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)^2}{2m\hbar^{-2}V_0\left(\frac{b}{2}\right)^2}. \qquad (2.1.16)$$

Если знаменатель больше $(\pi/2)^2$, то, как видно из фиг. 2.2, первый корень находится вблизи $ab/2 = \pi/2$; следующие корни неэквидистантны. Например, полагая знаменатель правой части выражения (2.1.16) равным 36, получаем $\varepsilon/V_0 = 0{,}05$, 0,20, 0,43



Фиг. 2.3. Периодически повторяющиеся потенциальные ямы (модель Кронига — Пенни).

и 0,75. Это дискретные уровни энергии. Переходы электронов между этими энергетическими уровнями при испускании или поглощении света дают линейчатый спектр.

Перейдем к рассмотрению модели Кронига — Пенни [1], показанной на фиг. 2.3. Постоянная решетки $a = b + c$. Потенциал периодичен по a:

$$V(x) = V(x+a) = V(x+2a) = \ldots. \qquad (2.1.17)$$

Решение $\psi(x)$ имеет смысл искать в виде

$$\psi(x) = u(x)e^{ikx}, \quad \text{где} \quad u(x) = u(x+a) = u(x+2a) = \ldots. \qquad (2.1.18)$$

Эта функция называется функцией Блоха. Из уравнения (2.1.2) для области $0 \leqslant x \leqslant b$ (внутри ямы) получаем

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2ik\frac{du}{dx} + (\alpha^2 - k^2)u = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b, \qquad (2.1.19)$$

а из (2.1.3) для области $-c < x < 0$ (вне ямы) находим

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2ik\frac{du}{dx} - (\beta^2 + k^2)u = 0, \qquad -c < x < 0. \qquad (2.1.20)$$

Решение последних двух уравнений имеет вид

$$u = Ae^{i(\alpha-k)x} + Be^{-i(\alpha+k)x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b, \qquad (2.1.21)$$

$$u = Ce^{(\beta-ik)x} + De^{-(\beta+ik)x}, \qquad -c < x < 0. \qquad (2.1.22)$$

Условие непрерывности u и du/dx при $x=0$ дает

$$\begin{aligned} A+B&=C+D,\\ i(\alpha-k)A-i(\alpha+k)B&=(\beta-ik)C-(\beta+ik)D. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Условие периодичности u и du/dx означает, что решение (2.1.21) в точке $x=b$ должно быть равно решению (2.1.22) в точке $x=-c$:

$$\begin{aligned} &Ae^{i(\alpha-k)b}+Be^{-i(\alpha+k)b}=Ce^{-(\beta-ik)c}+De^{(\beta+ik)c},\\ &-i(\alpha-k)Ae^{i(\alpha-k)b}+i(\alpha+k)Be^{-i(\alpha+k)b}=\\ &\qquad=(\beta-ik)Ce^{-(\beta-ik)c}-(\beta+ik)De^{(\beta+ik)c}. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Уравнения (2.1.23) и (2.1.24) представляют собой систему однородных уравнений для A, B, C и D, которая имеет решения, если ее детерминант Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, обращается в нуль. С учетом того, что $b+c=a$, выражение для детерминанта принимает следующий вид:

$$\Delta=i8\alpha\beta e^{ik(c-b)}\left[\cos(ka)-\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\operatorname{sh}(\beta c)\sin(\alpha b)-\operatorname{ch}(\beta c)\cos(\alpha b)\right], \tag{2.1.25}$$

где α и β определены в (2.1.1). Вводя функцию $L=L(\varepsilon/V_0)$:

$$\begin{aligned} L=&\frac{1-2\frac{\varepsilon}{V_0}}{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{V_0}-\left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^2}}\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{V_0}\right)}c\right]\sin\left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{\varepsilon}{V_0}}b\right]+\\ &+\operatorname{ch}\left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{V_0}\right)}c\right]\cos\left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{\varepsilon}{V_0}}b\right], \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

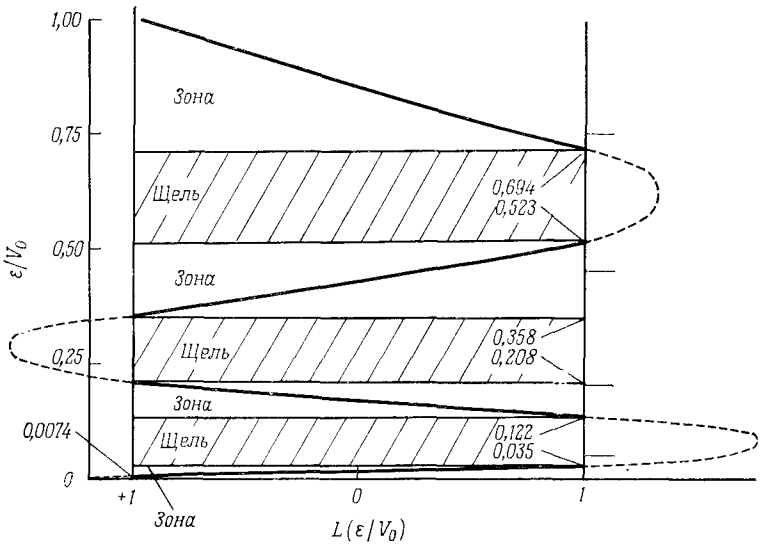
можно записать условие $\Delta=0$ в виде

$$k=k(\varepsilon)=\frac{1}{a}\arccos L\left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right). \tag{2.1.27}$$

Таким образом вычисляется функция $k(\varepsilon)$ вместо $\varepsilon(k)$. Сравним этот результат с тем, который был получен в случае одиночной ямы. Полагая вновь, что $2m\hbar^{-2}V_0(b/2)^2=36$ и, кроме того, что $c/b=0{,}1$, получим представленный на фиг. 2.4 график функции $L(\varepsilon/V_0)$. При некоторых значениях ε/V_0 эта функция имеет значения как больше 1, так и меньше -1. С другой стороны, косинус имеет вещественные значения только в интервале от -1 до $+1$. Следовательно, существуют такие значения ε/V_0, которым не соответствуют вещественные значения k. Области таких значений называются запрещенными энергетическими зонами, или щелями. Между щелями располагаются разрешенные

энергетические зоны. Они возникают из дискретных N-кратно вырожденных уровней энергии удаленных друг от друга N атомов, когда последние сближаются. На фиг. 2.4 справа по оси ординат отложены эти дискретные уровни. В предельном случае $b = 0$ (или $c \gg b$) зоны превращаются в дискретные уровни.

Для заданного отношения $c/b = 0{,}1$ получаются четыре щели (запрещенные зоны). Нижняя начинается со дна ямы ($\varepsilon = 0$) и простирается вплоть до значения $\varepsilon/V_0 = 0{,}0074$. Эта щель



Фиг. 2.4. Зонная структура одномерной решетки.

Отметки на правой оси ординат соответствуют энергиям дискретных уровней одиночной потенциальной ямы.

слишком узкая, чтобы ее можно было показать на фиг. 2.4. Для меньших значений c/b щели становятся уже. Например, для $c/b = {}^1/_{240}$ существуют только две щели при $\varepsilon/V_0 = 0{,}07$ и $0{,}63$. В предельном случае $c = 0$, $a = b$ из уравнения (2.1.27) следует $\varepsilon = \hbar^2 k^2/2m$, как и для свободного пространства.

Чтобы построить зависимость $\varepsilon(k)$, воспользуемся тем обстоятельством, что на фиг. 2.4 функция $L(\varepsilon/V_0)$ почти линейна в пределах одной зоны. Если края зоны обозначить через ε_1 (при $L = +1$) и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ (при $L = -1$), то решение уравнения (2.1.27) принимает вид

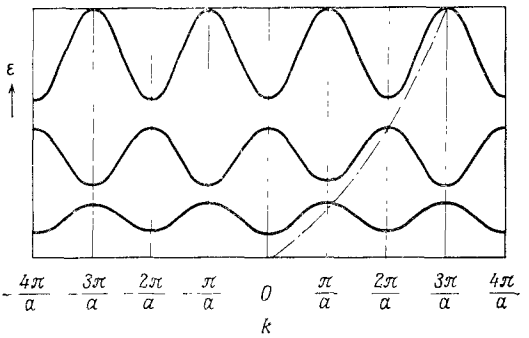
$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \cos(ka), \qquad \varepsilon_2 > \varepsilon_1. \tag{2.1.28}$$

В следующей зоне направление изменения функции $L(\varepsilon/V_0)$ меняется на обратное. Это приводит к замене знака при члене,

содержащем косинус, на обратный:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_4 + \varepsilon_3}{2} + \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}{2} \cos(ka) \qquad \varepsilon_4 > \varepsilon_3 \qquad (2.1.29)$$

и т. д. Полученные функции представлены на фиг. 2.5. Штрихпунктирная парабола соответствует энергии свободного электрона $\varepsilon = \hbar^2 k^2/2m$. Для электрона в кристалле парабола заменяется S-образными кусками синусоиды, отделенными друг от друга разрывами в энергетическом спектре при $k = \pi n/a$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$; эти разрывы и есть те энергетические щели,



Фиг. 2.5. Зависимость $\varepsilon(\mathbf{k})$ для электрона, находящегося в одномерной решетке.

о которых уже говорилось. На нижних краях S-образных кусков $d^2\varepsilon/dk^2 > 0$; ниже будет показано, что именно эта величина определяет положительную «эффективную массу»

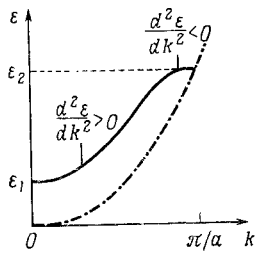
$$m = \frac{\hbar^2}{d^2\varepsilon/dk^2}. \qquad (2.1.30)$$

Из квантовой механики известно, что частица с координатой, находящейся в интервале между x и $x + \Delta x$, не может быть представлена волной с дискретным значением k, а только «волновым пакетом», составленным из волн с волновыми векторами, лежащими в интервале между k и $k + \Delta k$, где Δk определяется из условия $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$. Если ввести импульс $\hbar k$, то последнее соотношение является иллюстрацией принципа неопределенности Гейзенберга, который гласит, что положение и импульс частицы можно определить одновременно лишь с точностью, определяемой указанным соотношением. Скорость частицы можно отождествить с групповой скоростью волнового пакета $V = d\omega/dk = \hbar^{-1} d\varepsilon/dk$.

Допустим, что на частицу в кристалле действует сила F. Прирост энергии $d\varepsilon$ за время dt есть $Fvdt$. С другой стороны,

$d\varepsilon = (d\varepsilon/dk)\,dk = v\,d(\hbar k)$. Следовательно, сила F равна $d(\hbar k)/dt$, что является аналогом закона Ньютона, если величину $\hbar k$ определить как импульс. Величина $\hbar k$ называется квазиимпульсом.

Масса m свободной частицы определяется из закона Ньютона: производная скорости v по времени есть ускорение частицы под действием силы F; в отсутствие других сил, действующих на частицу, ускорение равно F/m. Для носителей в кристалле последнее утверждение сохраняет свою силу, если пренебречь внутренними силами в кристалле и ввести понятие «эффективной массы» m. Следовательно, $Fm^{-1} = dv/dt = \hbar^{-1}(d^2\varepsilon/dk^2)\,(dk/dt)$, но, с другой стороны, $Fm^{-1} = (d/dt) \times (\hbar k) \cdot m^{-1}$, что вместе приводит к выражению (2.1.30).



Фиг. 2.6. Участок зависимости, приведенной на фиг. 2.5, соответствующий значениям волнового вектора **k**, лежащим в интервале между 0 и π/a.

В частном случае свободной частицы с массой m, когда $\varepsilon = \hbar^2k^2/2m$, выражение (2.1.30) легко проверить.

Рассмотрим теперь верхний край зоны, представленной на фиг. 2.6. Здесь эффективная масса электрона должна быть отрицательной. К счастью, в теории явлений переноса отношение заряда к массе играет большую роль, нежели сама масса. Поэтому можно говорить либо об отрицательно заряженных электронах с отрицательной эффективной массой, либо о положительно заряженных частицах, называемых дырками, с положительной эффективной массой. Принято говорить о дырках с положительной эффективной массой.

Для количественного определения эффективной массы выражение (2.1.28) оказывается слишком грубым приближением. Однако даже в рассматриваемом одномерном случае расчет исключительно сложен. В частном случае $|V(x)| \ll \varepsilon$ имеем (см., например, [4])

$$m = m_0 \frac{\varepsilon_G}{4\,(\varepsilon_c - {}^1/_2\varepsilon_G)}, \qquad (2.1.31)$$

где $(\varepsilon_c - {}^1/_2\varepsilon_G)$ — середина, а ε_G — ширина ближайшей щели. Чем уже щель, тем меньше эффективная масса. Для n-InSb, например, при комнатной температуре эффективная масса составляет $0{,}013m_0$, а ширина щели равна 0,18 эВ. Для n-InP

с более широкой щелью, равной 1,26 эВ, эффективная масса больше: $m = 0{,}05m_0$. Данные для других полупроводников приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Ширины запрещенной зоны и эффективные массы электронов для соединений с наинизшим минимумом зоны проводимости при k = 0 [5]

Соединение	Ширина запрещенной зоны, найденная из оптических измерений (300 К), эВ	m/m_0 из оптических измерений	Ширина запрещенной зоны, найденная из электрических измерений (экстраполированная к 0 К), эВ	m/m_0 из электрических измерений
InSb	0,180	0,0116	0,27	0,013
InAs	0,36	0,023—0,027	0,47	0,025
InP	1,26	0,077	1,34	0,05
GaSb	0,67—0,725	0,047	0,77—0,82	0,05
GaAs	1,43	0,043—0,071	1,4	0,072

Эти примеры показывают, что в трехмерном случае также соотношение $m \sim \varepsilon_G$ является хорошим приближением для простых зонных структур.

При более детальном расчете зонной структуры, как сделал это Кейн [6] для InSb, необходимо учитывать как атомные волновые функции, так и спин электрона. С помощью двух параметров P и Δ, вид которых мы не будем рассматривать, Кейн получил для InSb следующую зависимость $\varepsilon(\mathbf{k})$ (энергия отсчитывается от верхнего края валентной зоны; учтено наличие трех сортов дырок, которые рассматриваются в гл. 8, § 1):

$$\text{зона проводимости: } \varepsilon = \varepsilon_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{P^2 k^2}{3}\left(\frac{2}{\varepsilon_G} + \frac{1}{\varepsilon_G + \Delta}\right);$$

$$\text{валентная зона} \begin{cases} \text{тяжелые дырки:} & \varepsilon = -\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}, \\ \text{легкие дырки:} & \varepsilon = -\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - \dfrac{2P^2 k^2}{3\varepsilon_G}, \\ \text{отщепленная подзона:} & \varepsilon = -\Delta - \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - \dfrac{P^2 k^2}{3(\varepsilon_G + \Delta)}. \end{cases} \quad (2.1.32)$$

В этих выражениях пренебрегается анизотропией валентной зоны (см. гл. 2, § 4). Взаимодействия, определяющие эффективную массу тяжелых дырок, не включены в модель Кейна, которая сама по себе является все еще сильно упрощенной. В этой модели массу тяжелых дырок m можно положить бесконечно большой [7]. Валентная зона состоит из трех подзон,

две из которых вырождены при $\mathbf{k} = 0$. Третья подзона расщеплена спин-орбитальным взаимодействием электронов. Энергия расщепления при $\mathbf{k} = 0$ обозначена через Δ. При $\Delta \gg \varepsilon_G$ и $\Delta \gg Pk$ получаем следующее приближение:

$$\text{зона проводимости: } \varepsilon - \varepsilon_G = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_G^2 + \frac{8P^2k^2}{3}} - \varepsilon_G\right);$$

$$\text{валентная зона} \begin{cases} \text{тяжелые дырки:} & \varepsilon = -\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}, \\ \text{легкие дырки:} & \varepsilon = -\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_G^2 + \dfrac{8P^2k^2}{3}} - \varepsilon_G\right), \\ \text{отщепленная подзона:} & \varepsilon = -\Delta - \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - \dfrac{P^2k^2}{3(\varepsilon_G + \Delta)}. \end{cases} \tag{2.1.33}$$

Зона проводимости и валентная зона легких дырок являются «непараболическими»; это означает, что ε не просто пропорционально k^2. Вводя для упрощения величины

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_G^2 + \frac{8P^2k^2}{3}} - \varepsilon_G\right) \tag{2.1.34}$$

и

$$m_n = \frac{3\hbar^2 \varepsilon_G}{4P^2}, \tag{2.1.35}$$

можно решить уравнение (2.1.34) относительно $\hbar^2k^2/2m_n$:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} = \frac{\varepsilon'}{1 + \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon_G}}. \tag{2.1.36}$$

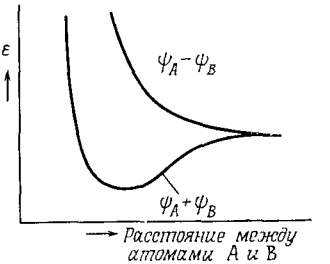
Если в (2.1.33) положить $m = \infty$, то для зоны проводимости получим $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_G$, т. е. уровень отсчета энергии сдвинут к нижнему краю зоны проводимости. Для конечных значений m выражение (2.1.36) сохраняет свой вид с той лишь разницей, что ε_G заменяется на «энергетический параметр», зависящий от массы m. Для n-InSb и n-InAs (ширины запрещенной зоны при 300 К равны 0,18 и 0,36 эВ, а эффективные массы m равны $0{,}013m_0$ и $0{,}025m_0$ соответственно) энергетический параметр имеет значения 0,24 и 0,56 эВ соответственно [8].

Такие величины, как ширина запрещенной зоны и эффективная масса, приходится определять экспериментально. Даже в век ЭВМ при расчете зонных структур необходимо делать грубые приближения. В расчет обычно включают подгоночные параметры, которые определяются из экспериментальных данных, таких, как ширина запрещенной зоны и эффективная масса. В гл. 11, § 1, будет рассмотрено явление оптического отраже-

ния, где зонная структура играет огромную роль. Чтобы яснее представить себе происхождение запрещенных зон, рассмотрим приближение сильной связи.

§ 2. Энергетические зоны в приближении сильной связи

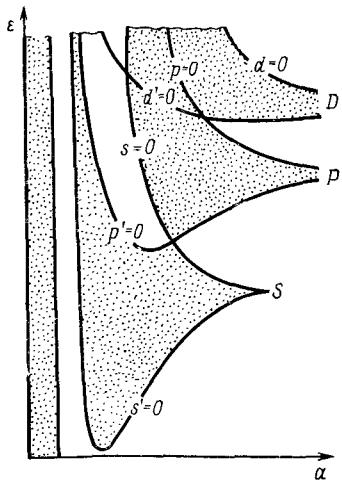
В § 1 влияние кристаллической решетки на электрон аппроксимировалось с помощью периодического потенциала. Можно к этой проблеме подойти иначе: построить кристалл из отдельных, бесконечно удаленных друг от друга атомов и посмотреть, что при этом происходит с дискретными уровнями энергии атомов. Когда атомы находятся далеко один от другого, электроны «жестко привязаны» к своему атому. Возникает вопрос: на каком межатомном расстоянии становится существенным обмен электронами между соседними атомами?



Фиг. 2.7. Зависимость энергии двухатомной молекулы AB от расстояния между атомами.

Если волновые функции ψ атомов A и B перекрываются, то поведение системы AB описывается линейными комбинациями $\psi_A \pm \psi_B$. На фиг. 2.7 представлена зависимость энергии от расстояния между двумя атомами. Сумма волновых функций соответствует связанному состоянию, а разность — ситуации, когда атомы взаимно отталкиваются. Вычисления приведены в учебниках квантовой механики (см., например, [9]) и здесь приводиться не будут. Если сближаются не два, а N атомов, то атомный уровень расщепляется не на два, а на N уровней. В кристалле, где $N \approx 10^{23}$, уровни столь близки друг к другу, что можно говорить о зоне. Рассмотрим опять алмаз. В свободном атоме углерода четыре валентных электрона заполняют оба $2s$-уровня и два из шести $2p$-уровней, энергия которых выше, чем у $2s$-уровней. Если сближается много атомов, образуя кристалл алмаза, то эти четыре заполненных уровня каждого атома образуют валентную зону, а незаполненные уровни формируют пустую зону проводимости. На расстоянии, равном постоянной решетки 3,6 Å (1 Å $= 10^{-8}$ см), между этими зонами имеется энергетическая щель шириной 5,3 эВ. При абсолютном нуле

чистый алмаз является диэлектриком. Как будет показано в гл. 3, это связано с тем, что все электроны полностью заполняют валентную зону; для направленного движения электрон должен был бы увеличить энергию на незначительную величину, меньшую ширины щели, но в валентной зоне нет для этого свободного места. Поэтому дрейф электрона оказывается невозможным, и алмаз является диэлектриком. Однако при высоких температурах небольшое количество электронов благодаря тепловому возбуждению переходит в зону проводимости, тем самым давая возможность перемещаться как электронам, так и дыркам, — алмаз становится полупроводником.



Фиг. 2.8. Энергетические зоны кубической решетки в зависимости от постоянной решетки [10].

В металлах имеются как частично заполненные зоны, так и перекрывающиеся свободные и заполненные зоны. Почему же у алмаза есть запрещенная зона, а, например, у металлического олова ее нет? Ответ на этот вопрос определяется кристаллической структурой и числом валентных электронов. Кристаллы металлического олова тетрагональные, кристаллы свинца (всегда металла) гранецентрированные кубические, в то время как кристаллическая структура полупроводников IV группы представляет собой алмазоподобную решетку. Хунд и Мровка [10] детально исследовали эту проблему на примере различных кристаллических структур. Для вычисления волновых функций кристалла в случаях одномерной цепочки, двумерной гексагональной решетки (координационное число 3), решеток алмаза и вюрцита (фиг. 2.17) необходимы лишь s-функции (четные функции координат) и p-функции [нечетные функции координат, например, $xf(r)$]. В случаях же двумерной прямоугольной решетки и объемноцентрированной кубической решетки необходимы также и d-функции [для прямоугольной решетки они пропорциональны $(x^2 - y^2)g(r)$]. На фиг. 2.8 показано перекрытие зон в случае кубической решетки, проявляющей свойства металла.

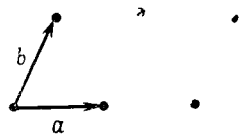
И все же зона, составленная из s- и p-функций, может образовать металл. Типичным примером служит графит. Связи в

гексагональных плоскостях заполнены тремя валентными электронами в каждом атоме. Четвертый валентный электрон каждого атома находится в зоне проводимости, благодаря чему реализуется скорее металлическая проводимость.

Интересно отметить, что если решетка алмаза находится при постоянном атмосферном давлении, то с ростом r верхний край валентной зоны смещается вверх, а нижний край зоны проводимости — вниз. При уменьшении межатомного расстояния под действием внешнего гидростатического давления ширина запрещенной зоны увеличивается, что приводит к уменьшению числа носителей и, следовательно, к увеличению удельного сопротивления; это находится в согласии с экспериментом (см. гл. 4, § 12).

§ 3. Зона Бриллюэна

Как видно из фиг. 2.5, зонная структура, определенная в интервале $-\pi/a \leqslant k \leqslant \pi/a$, повторяется до бесконечности. Поэтому достаточно рассматривать только данный интервал, который носит название первой зоны Бриллюэна. Соседние области от $-2\pi/a$ до $-\pi/a$ и от π/a до $2\pi/a$ образуют вторую зону Бриллюэна и т. д. Поскольку в большинстве случаев достаточно ограничиться первой зоной Бриллюэна, иногда слово «первая» опускают.



Фиг. 2.9. Базисные векторы двумерной решетки.

Что представляет собой зона Бриллюэна трехмерной решетки?

История этих зон берет свое начало с рассеяния рентгеновских лучей многомерными решетками. В процессе рассеяния проявляются волновые свойства электрона. Движущийся в кристалле электрон представляется в виде пакета электронных волн, рассеивающихся на кристаллической решетке. Процесс рассеяния описывается уравнением Лауэ

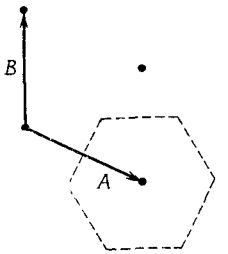
$$\exp[i(\mathbf{pG})] = 1, \qquad (2.3.1)$$

где вектор $\mathbf{p} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$ (l, m, $n = 0, 1, 2, \ldots$) определяет атом кристаллической решетки, элементарная ячейка которой задается ортами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (фиг. 2.9 иллюстрирует двумерный

случай). Вектор $\mathbf{G} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ определяет изменение волнового вектора при рассеянии. Уравнение Лауэ требует выполнения равенства $(\mathbf{pG}) = 2\pi n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Соответственно в $\mathbf{k}$-пространстве определяются векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, такие, что

$$\mathbf{G} = g\mathbf{A} + h\mathbf{B} + k\mathbf{C} \quad (g, h, k = 0, 1, 2, 3, \ldots), \qquad (2.3.2)$$

где $(\mathbf{aA}) = (\mathbf{bB}) = (\mathbf{cC}) = 2\pi$ и $(\mathbf{aB}) = 0$, $(\mathbf{bC}) = 0$ и т. д. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ называются базисными векторами обратной решетки. Они перпендикулярны соответствующим базисным векторам прямой решетки. На фиг. 2.10 показаны базисные векторы обратной решетки, которые можно сравнить с векторами прямой решетки (фиг. 2.9). Если $\mathbf{x}_e$ и $\mathbf{y}_e$ — орты в двумерной декартовой системе координат, то базисные векторы на фиг. 2.9 и 2.10



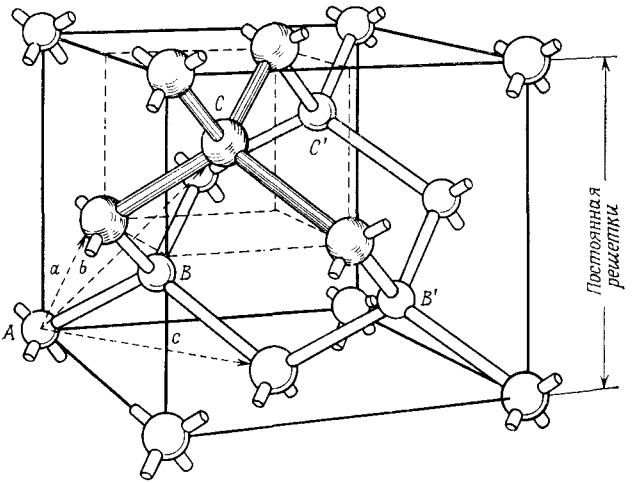
Фиг. 2.10. Базисные векторы обратной решетки. Площадь шестиугольника определяет первую зону Бриллюэна истинной решетки, изображенной на фиг. 2.10.

можно представить следующим образом: $\mathbf{a} = 2\mathbf{x}_e$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}_e + 2\mathbf{y}_e$, $\mathbf{A} = (\pi/2)(2\mathbf{x}_e + 2\mathbf{y}_e)$, $\mathbf{B} = \pi\mathbf{y}_e$. Разумеется, из уравнения Лауэ легко получить хорошо известное соотношение Брэгга.

Элементарная ячейка содержит все те точки, которые не могут быть получены одна из другой путем трансляции [уравнение (2.3.1)]. Ячейка Вигнера — Зейтца содержит все те точки, которые находятся ближе к заданному узлу решетки, нежели к любому другому. Ячейка Вигнера — Зейтца обратной решетки есть первая зона Бриллюэна. Чтобы получить зону Бриллюэна, надо соединить прямыми узел решетки с его ближайшими соседями, а затем полученные отрезки разделить пополам. Плоскости, проведенные через средние точки отрезков, образуют зону Бриллюэна. Шестиугольник на фиг. 2.10 представляет собой зону Бриллюэна решетки, показанной на фиг. 2.9.

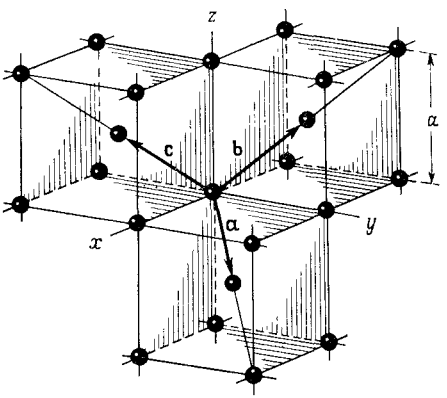
Легко видеть, что обратная решетка гранецентрированной кубической решетки есть объемноцентрированная кубическая решетка и наоборот. Основные полупроводники IV группы периодической системы кристаллизуются в алмазоподобную решетку, изображенную на фиг. 2.11. Каждый атом тетраэдрически связан с четырьмя ближайшими соседями аналогично тому, как в молекуле метана CH_4. Выберем атом A в угловой точке гранецентрированной кубической решетки. На диагонали куба

на полпути от атома A до центра куба располагается атом B, являющийся угловой точкой второй гранецентрированной кубической решетки, для которой на фиг. 2.11 кроме атома B изобра-



Фиг. 2.11. Кристаллическая структура алмаза [12].
Постоянная решетки для C, Si и Ge равна 3,56, 5,34 и 5,66 Å соответственно.

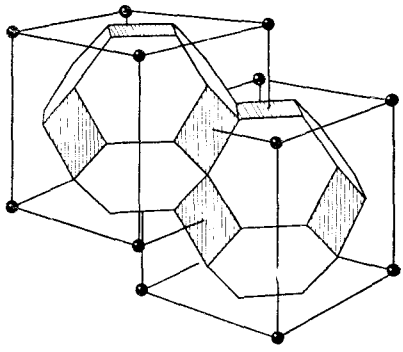
жены только атомы B', C и C'. Векторы **a**, **b**, **c**, проведенные из атома A в центры граней, являются базисными векторами. Перпендикулярны к ним базисные векторы **a′**, **b′**, **c′** обратной решетки, которая в данном случае является объемноцентрированной кубической решеткой, показанной на фиг. 2.12. Вычисляя скалярные произведения, например $\langle 1, 1, 1\rangle$ и $\langle 1, -1, 0\rangle$,



Фиг. 2.12. Элементарные трансляции в объемноцентрированной кубической решетке [13].

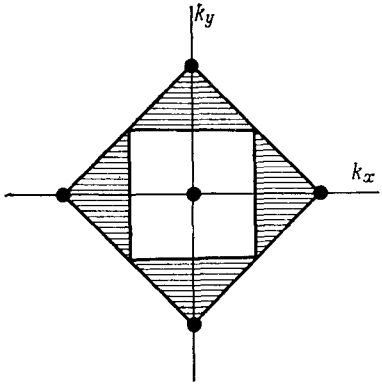
легко видеть, что каждая диагональ куба перпендикулярна диагонали грани. Поэтому построение зоны Бриллюэна не представляет труда (фиг. 2.13). Грани, перпендикулярные диагоналям куба, являются шестиугольниками, а грани, перпендикулярные линиям, соединяющим центры кубов, представляют собой

квадраты, которые на фигуре заштрихованы. На одной из шестиугольных граней построен «усеченный октаэдр», чтобы проиллюстрировать, как заполняется **k**-пространство. Обрезая соответствующим образом второй усеченный октаэдр и присоединяя отрезанные части к первой зоне Бриллюэна, получим вторую зону Бриллюэна (см., например, [14, 15]). На фиг. 2.14 показан двумерный случай. Аналогично строится третья

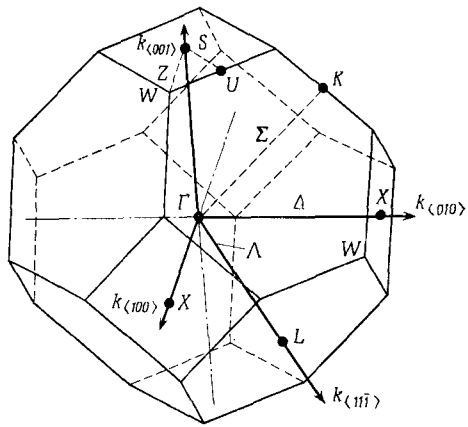


Фиг. 2.13. Первая зона Бриллюэна гранецентрированной кубической решетки [13].

зона Бриллюэна и т. д. Все зоны Бриллюэна имеют одинаковый объем. На фиг. 2.15 указаны наиболее важные точки и линии



Фиг. 2.14. Первые две зоны Бриллюэна простой квадратной решетки [4].



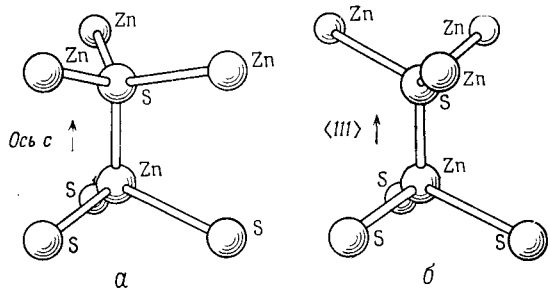
Фиг. 2.15. Первая зона Бриллюэна решетки алмаза и решетки цинковой обманки, а также основные точки и линии симметрии [18].

симметрии первой зоны Бриллюэна гранецентрированной кубической решетки. Это шесть эквивалентных точек X, восемь точек L и т. д. [16].

Решетка цинковой обманки, характерная для соединений $A^{III}B^{V}$, может быть получена из решетки алмаза, если в последней половину атомов заменить атомами III группы, а другую

половину — атомами V группы. Каждая связь соединяет атом III группы с атомами V группы. Например, если пластинку InSb, разрезанную вдоль ⟨111⟩, протравить, то одна сторона пластинки будет содержать только атомы In, а противоположная — только атомы Sb. Поэтому решетка цинковой обманки в отличие от алмазной не обладает свойством симметрии относительно инверсии (более подробно см. [17]).

Структура вюрцита очень сходна со структурой цинковой обманки. На фиг. 2.16 приведены для сравнения ориентации смежных тетраэдров [18]. Гексагональный кристалл вюрцита

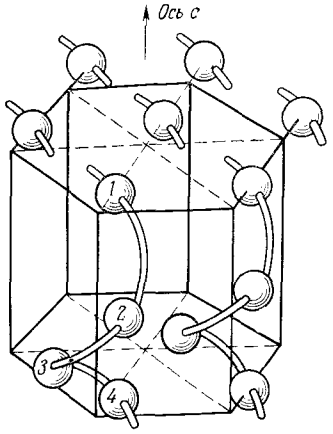


Фиг. 2.16. Расположение атомов в вюрците (*а*) и цинковой обманке (*б*) [18].

обладает единственной кристаллографической осью симметрии, называемой осью *c*, которая соответствует оси ⟨111⟩ в кубической структуре цинковой обманки. В элементарной ячейке вюрцита находятся 4 атома, в то время как у цинковой обманки — только два. Зонные структуры в обоих случаях очень похожи. В кристаллах CdS ширины запрещенной зоны обеих структурных модификаций были определены из данных по оптическому отражению в области собственной полосы. Ширина запрещенной зоны для кристаллов с кубической симметрией лишь на несколько сотых электронвольта меньше, чем для кристаллов со структурой типа вюрцита, где она составляет 2,582 эВ (при 0 К). CdS обычно кристаллизуется в структуру вюрцита, но может кристаллизоваться в структуру цинковой обманки, если его эпитаксиально осаждать из пара на кубический кристалл GaAs. Зона Бриллюэна этого соединения такая же, как и у теллура, о котором речь идет ниже, с той лишь разницей, что она обладает гексагональной симметрией.

Кристаллическая решетка теллура показана на фиг. 2.17. Она состоит из спиралей, образующих тригональную структуру. Спирали могут быть как право-, так и левосторонними; на фиг. 2.17 приведен правосторонний вариант. Спирали связаны посредством вандерваальсовых и слабых электрических сил.

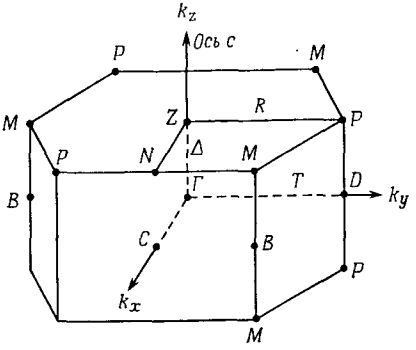
Данная структура несимметрична относительно инверсии. Элементарная ячейка содержит 3 атома. Зона Бриллюэна, представляющая собой шестигранную призму, показана на фиг. 2.18. Там же указаны характерные точки зоны в теоретикогрупповых обозначениях [16]. Симметрия кристалла относительно оси c вырождена не шестикратно, а только трехкратно (тригональная). Оптические эксперименты (экситонное поглощение и межзонное магнитопоглощение при 10 К, поляризация параллельно оси c) показали, что теллур — так называемый прямой полупроводник



Фиг. 2.17. Кристаллическая решетка теллура: атомные спирали образуют тригональную структуру [18].

(см. гл. 11, § 2) с шириной запрещенной зоны 0,3347 (±0,0002) эВ, которая увеличивается с понижением температуры и ростом давления [19].

Полупроводник Bi_2Te_3 интересен с точки зрения термоэлектрических применений. Его ромбоэдрическая кристаллическая структура [20] состоит из слоев теллура и висмута, чередующихся в последовательности Bi—Te—Te—Bi—Te—Bi—Te——Te—Bi. Элементарная ячейка содержит одну молекулу

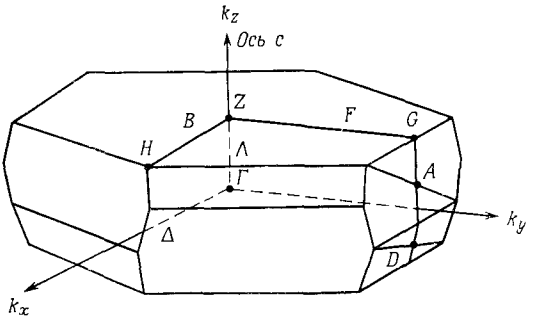


Фиг. 2.18. Первая зона Бриллюэна теллура, а также основные точки и линии симметрии [18].

Различие между точками M и P указывает на тригональную симметрию относительно оси c.

Bi_2Te_3. Зона Бриллюэна показана на фиг. 2.19. Валентная зона и зона проводимости, оказывается, состоят каждая из шести эллипсоидов, ориентированных к оси c под углами 86 и 56° соответственно. Эксперименты по оптическому поглощению дают следующие значения ширины запрещенной зоны [21]: 0,145 эВ при 300 К и 0,175 эВ при 85 К.

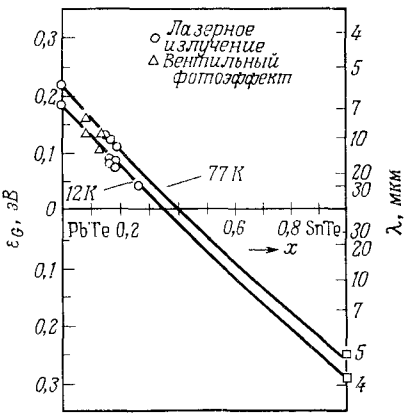
Соли свинца PbS, PbSe и PbTe кристаллизуются в кубическую решетку NaCl и, таким образом, имеют по два атома в элементарной ячейке. Найденные с помощью оптических измерений значения ширины запрещенной зоны при абсолютном



Фиг. 2.19. Первая зона Бриллюэна Bi_2Te_3 а также основные точки и линии симметрии [18].

нуле составляют 0,29, 0,15 и 0,19 эВ. В отличие от большинства других полупроводников ширина запрещенной зоны с повышением температуры увеличивается (например, для PbTe от 0,19 эВ при 0 К до 0,32 эВ при 300 К). С увеличением давления запрещенные зоны сужаются.

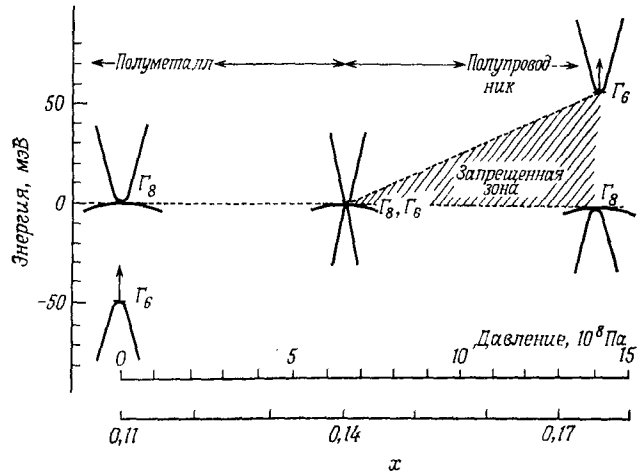
Очень интересно ведут себя смешанные кристаллы PbTe—SnTe, у которых запрещенная зона уже, чем у каждого из компонентов. С точки зрения технологических применений интерес к материалам



Фиг. 2.20. Изменение ширины запрещенной зоны сплава $Pb_{1-x}Sn_xTe$ в зависимости от состава x [22].

с узкой энергетической щелью обусловлен возможностью их применения в качестве детекторов длинноволнового инфракрасного излучения, а также в лазерах. Сходными свойствами обладают соединения PbSe—SnSe, CdTe—HgTe, Bi—Sb, а также (при одноосном сжатии) серое олово α-Sn. На фиг. 2.20 [22] показана зависимость ширины запрещенной зоны сплава $Pb_{1-x}Sn_xTe$ от состава при температурах 12 и 77 К. Например,

при 77 К щель исчезает, когда $x = 0{,}4$. При таком составе край валентной зоны (для PbTe) становится краем зоны проводимости [23] (для SnTe) (эффект «обращения зоны»). В соединении $Cd_xHg_{1-x}Te$ имеет место в некотором смысле сходная ситуация, что показано на фиг. 2.21, где представлена зависимость ширины запрещенной зоны от x. Вторая горизонтальная шкала определяет зависимость от давления при $x = 0{,}11$. Заштрихованный участок иллюстрирует расширение запрещенной зоны с ростом x. Сплавы с $x < 0{,}14$ являются полуметаллами.



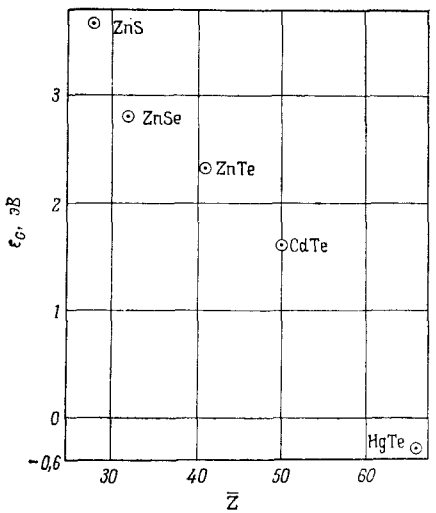
Фиг. 2.21 Зонная структура сплава $Cd_xHg_{1-x}Te$ вблизи точки перехода полуметалл — полупроводник при 77 К [24].

Вертикальные стрелки показывают изменение ширины запрещенной зоны с ростом температуры или давления.

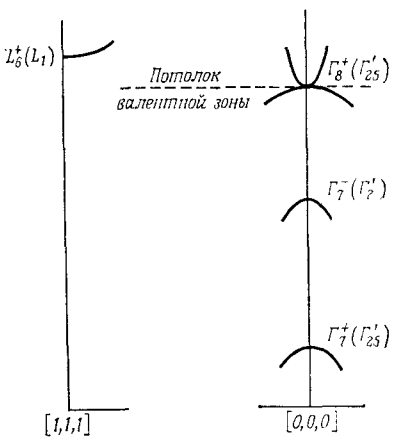
Из приведенного графика следует возможность существования у полуметалла отрицательной энергетической щели. Из фиг. 2.22, где представлена зависимость ширины запрещенной зоны от среднего атомного номера $\bar{Z}$ для пяти соединений $A^{II}B^{VI}$ со структурой цинковой обманки, видно, что при увеличении $\bar{Z}$ можно попасть в область с отрицательной шириной энергетической щели. Полуметалл HgTe фактически находится в этой области. Вычисление зонной структуры HgTe с помощью (**kp**)-метода (гл. 8, § 1) приводит к ширине запрещенной зоны $\pm 0{,}15$ эВ [24]; нижний знак, по-видимому, более соответствует данной ситуации.

Зонная структура серого олова (α-Sn), показанная на фиг. 2.23 [25], напоминает структуру HgTe. «Отрицательная ширина запрещенной зоны» $(\Gamma_7^- - \Gamma_8^-)$ составляет 0,3 эВ. Пото-

лок валентной зоны совпадает с минимумом зоны проводимости в точке $k = 0$. Однако с помощью электрических измерений обнаружена энергетическая щель шириной 0,09 эВ — это щель между потолком валентной зоны и минимумами L_6 в направлении $\langle 111 \rangle$ в **k**-пространстве. Бóльшая часть электронов проводимости находится в этих минимумах вследствие большей плотности состояний в них (гл. 3, § 1), которая возрастает с увеличением числа долин (4 в направлении $\langle 111 \rangle$) и эффективной



Фиг. 2.22. Зависимость ширины запрещенной зоны различных соединений $A^{II}B^{VI}$, обладающих структурой цинковой обманки, от их среднего атомного номера [24].



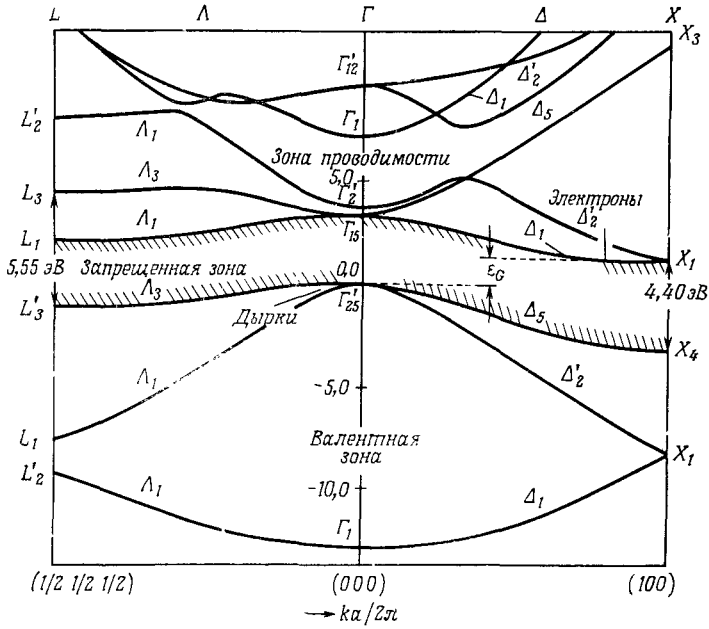
Фиг. 2.23. Зонная структура серого олова [25].

массы (обратно пропорциональной кривизне долины). Поэтому серое олово, хотя и является полуметаллом, при электрических измерениях ведет себя как полупроводник с шириной запрещенной зоны 0,09 эВ.

Тот факт, что смешанные кристаллы PbTe—SnTe обладают полупроводниковыми свойствами по обе стороны от точки пересечения $L_6^+ - L_6^-$, может быть объяснен тем, что эти состояния являются только двукратно вырожденными по спину. В противном случае, как в системе CdTe—HgTe, с одной из сторон это соединение должно быть полуметаллом. Обзор данных по полупроводникам с узкой запрещенной зоной приведен в работе [24].

§ 4. Изоэнергетические поверхности

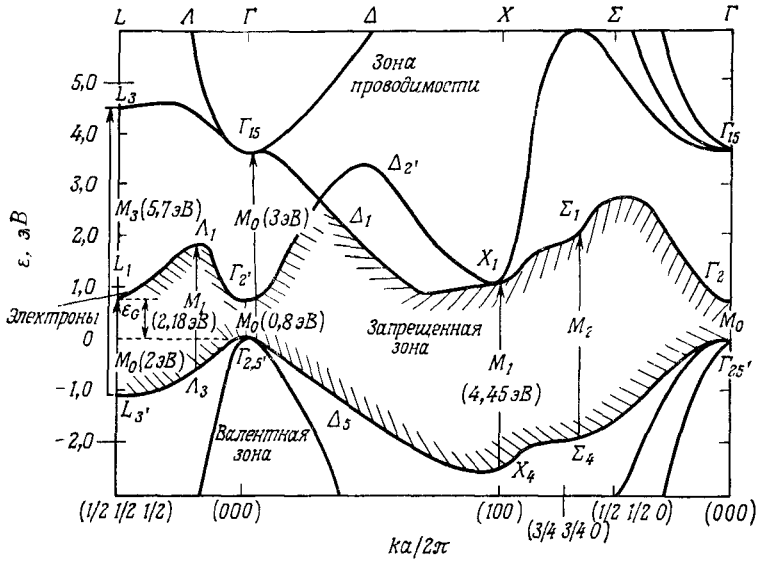
На фиг. 2.24 и 2.25 приведены зависимости $\varepsilon(\mathbf{k})$ для кремния [26] и германия [27]. Если на фиг. 2.24 немного выше края зоны проводимости провести сечение, параллельное оси $\mathbf{k}$, то оно определит две точки, лежащие у кремния на оси $\langle 100\rangle$, а у германия на оси $\langle 111\rangle$. В трехмерном $\mathbf{k}$-пространстве эти точки



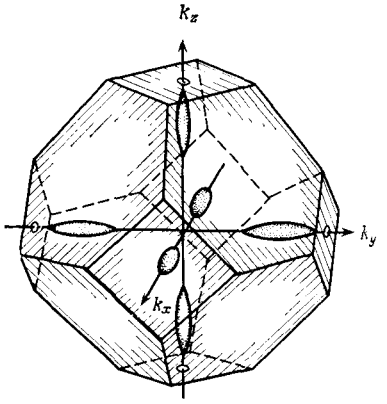
Фиг. 2.24. Зонная структура кремния [26].

превращаются в изоэнергетические поверхности. Эти поверхности оказываются эллипсоидами вращения с большой осью в направлениях $\langle 100\rangle$ для кремния и $\langle 111\rangle$ для германия. Кремний имеет шесть эквивалентных минимумов энергии (долин) и при заданной величине энергии — шесть эллипсоидов в $\mathbf{k}$-пространстве (фиг. 2.26). Для германия долины расположены на пересечениях направлений $\langle 111\rangle$ с поверхностью зоны Бриллюэна. Таким образом, имеется восемь полуэллипсоидов, образующих четыре составные долины (фиг. 2.27).

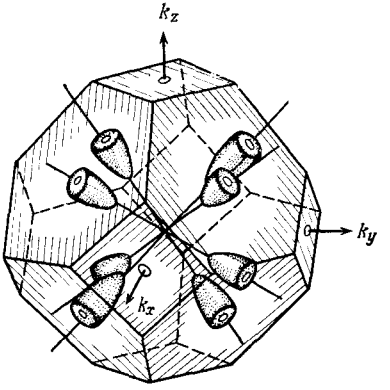
Аналогичные сечения, проведенные вблизи края валентной зоны, дают пары точек равной энергии, которые в трехмерном $\mathbf{k}$-пространстве превращаются в гофрированные сферы с центром в точке $\mathbf{k} = 0$ (фиг. 2.28 и 2.29, где гофр изображен в пре-



Фиг. 2.25. Зонная структура германия. (Указанные здесь переходы рассматриваются в гл. 11, § 9.) [27].

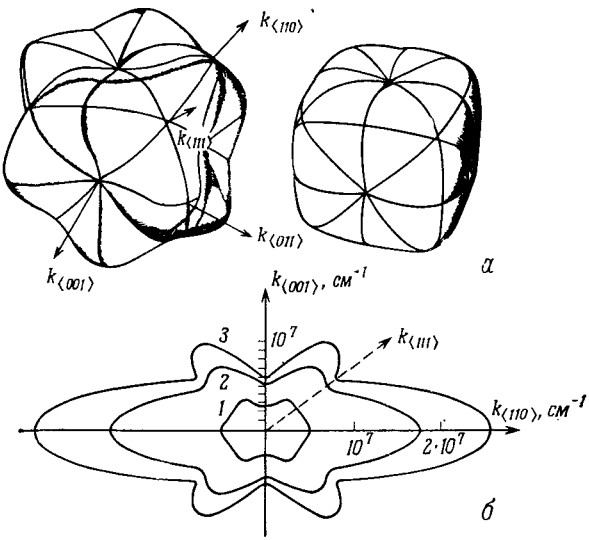


Фиг. 2.26. Изоэнергетические поверхности в **k**-пространстве у дна зоны проводимости в кремнии. Первая зона Бриллюэна совпадает с изображенной на фиг. 2.16 [28].

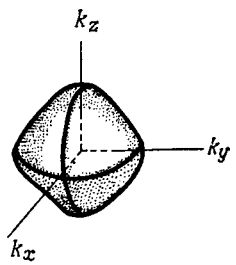


Фиг. 2.27. Изоэнергетические поверхности в **k**-пространстве у дна зоны проводимости в германии: 8 полуэллипсоидов вращения с центрами в L-точках границы зоны [28].

увеличенном масштабе). Эти гофрированные сферы являются концентрическими; одна из них представляет тяжелые дырки,



Фиг. 2.28. *а* — изоэнергетические поверхности в **k**-пространстве у потолка валентной зоны тяжелых дырок в кремнии и германии (справа для низкой энергии слева для высокой энергии); *б* — сечения изоэнергетических поверхностей в плоскости (110).



Фиг. 2.29. Изоэнергетическая поверхность в **k**-пространстве у потолка валентной зоны легких дырок в кремнии и германии.

а другая — легкие [в выражении (2.1.32) анизотропией пренебрегается]. Для сравнения интересно рассмотреть изоэнергетические поверхности в металлах [29] (см. также [30, 31]), которые часто являются многосвязными в точке L. Они называются открытыми поверхностями Ферми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kronig R. de L., Penney W. J.*, Proc. Roy. Soc., **A130**, 499 (1931).
2. *Nussbaum A.*, Semiconductor Device Physics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962, sec. 1.9 and 1.13.
3. *Shiff L. I.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1949. (Имеется перевод: *Л. Шифф*, Квантовая механика, ИЛ, М. 1959.)
4. *Smith R. A.*, Wave Mechanics of Crystalline Solids, 2nd ed., Chapman and Hall Ltd, London, 1969, Ch. 6.2.
5. *Madelung O.*, Physics of III—V Compound., Wiley, New York, 1964. (Имеется перевод: *О. Маделунг*, Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп, «Мир», М., 1967.)
6. *Kane E. O.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **1**, 249 (1957).
7. *Long D.*, Energy Bands in Semiconductors, Wiley, New York, 1968, p. 49.
8. *Matz D.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **28**, 373 (1967).
9. *Flügge S.*, Rechenmethoden der Quantentheorie, 3rd. ed. (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 6), Berlin — Heidelberg — New York, 1966, Problem Nr. 59.
10. *Hund F., Mrowka B.*, Ber. Sächs. Akad. Wiss., **87**, 185 (1935).
11. *Hund F.*, Theorie des Aufbaues der Materie, Teubner, Stuttgart, 1961, Ch. VII.
12. *Shockley W.*, Electrons and Holes in Semiconductors, D. van Nostrand, New York, 1950. (Имеется перевод: *В. Шокли*, Теория электронных полупроводников, ИЛ, М., 1953.)
13. *Kittel C.*, Einführung in die Festkörperphysik, R. Oldenbourg, München, 1968. (Имеется перевод: *Ч. Киттель*, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1962.)
14. *Jones H.*, The Theory of Brillouin Zones and Electronic States in Crystals, North Holland Publ. Co, Amsterdam, 1960. (Имеется перевод: *Г. Джонс*, Теория зон Бриллюэна и электроиные состояния в кристаллах, «Мир», 1968.)
15. *Seitz F.*, Modern Theory of Solids, McGraw-Hill, New York, 1940. (Имеется перевод: *Ф. Зейтц*, Современная теория твердого тела, ГИТТЛ, М. — Л., 1949.)
16. *Bouckaert L. P., Smoluchowski R., Wigner E. P.*, Phys. Rev., **50**, 58 (1936).
17. *Streitwolf H. W.*, Gruppentheorie in der Festkörperphysik, Akad. Verlagsges, Geest und Portig, Leipzig, 1967. (Имеется перевод: *Г. Штрайтвольф*, Теория групп в физике твердого тела, «Мир», М., 1971.)
18. *Long D.*, Energy Bands in Semiconductors, Wiley, New York, 1968.
19. *Rigaux C., Drilhorn G.*, Proc. 8th Intern. Conf. Phys. Semicond., Journal Phys. Soc. Japan, **21**, Suppl., 193 (1966).
20. *Drabble J. R.* в книге Progress in Semiconductors (eds. A. F. Gibson, R. E. Burgess), Vol. 7, Temple Press, London, 1963, p. 45.
21. *Greenaway D. L., Harbeke G.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **26**, 1585 (1965).
22. *Melngailis I.*, Journ. Phys. (Suppl. No. 11—12), **29**, C4-84 (1968).
23. *Dimmock J. O., Melngailis I., Strauss A. J.*, Phys. Rev. Letters, **16**, 1193 (1966).
24. *Vérié C.* в книге Festkörperprobleme/Advances in Solid State Physics (ed. O. Madelung), Vol. X, Pergamon, Oxford, Vieweg, Braunschweig, 1970.
25. *Groves S., Paul W.*, Phys. Rev. Letters, **11**, 194 (1963).
26. *Cardona M., Pollak F. H.*, Phys. Rev., **142**, 530 (1966).
27. *Phillips J. C., Brust D., Bassani F.*, Proc. 6th Intern. Conf. Phys. Semicond. The Institute of Physics and The Physical Society, London, 1962, p. 564.
28. *McKelvey J. P.*, Solid State and Semiconductor Physics, Harper and Row, New York, 1966.
29. *Pippard A. B.*, Phil. Trans., **A250**, 325 (1957).
30. *Brauer W.*, Einführung in die Elektronentheorie der Metalle, Geest und Portig K. G., Leipzig, 1966.
31. *Ziman J. M.*, Contemporary Physics, **3**, 241 (1962).

Глава 3. СТАТИСТИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Периодическое распределение потенциала электрона в кристалле, показанное на фиг. 2.5, состоит из N дискретных уровней, если кристалл содержит N атомов. Обсуждение этих уровней можно проводить в рамках первой зоны Бриллюэна. В предыдущей главе было показано, что вследствие периодичности кристалла электронные волновые функции, которые в одномерном случае имеют вид $\psi(x) = u(x)\exp(ikx)$, также должны быть периодическими (функциями Блоха). Следовательно, из условий

$$u(x + Na) = u(x) \tag{3.1}$$

и

$$\exp(ikx + ikNa)\,u(x + Na) = \exp(ikx)\,u(x) \tag{3.2}$$

следует

$$\exp(ikNa) = 1, \tag{3.3}$$

или

$$k = \frac{2\pi n}{Na}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{N}{2}, \tag{3.4}$$

где a — постоянная решетки. Заметим, что уравнение (3.1) фактически справедливо в случае кольцевой цепочки, что означает пренебрежение поверхностными состояниями (гл. 14, § 1). Поскольку для первой зоны Бриллюэна значение k лежит между $-\pi/a$ и π/a, целое число n пробегает все значения от $-N/2$ до $N/2$. На фиг. 3.1 показаны дискретные уровни «кристалла», состоящего из 8 атомов.

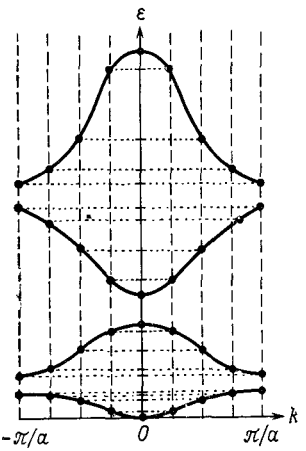
Каким образом N электронов распределены по этим уровням и по примесным уровням, если последние имеются? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью статистических методов, поскольку реальный кристалл содержит не 8 атомов, а $N \approx 10^{23}$ атомов.

§ 1. Статистика Ферми

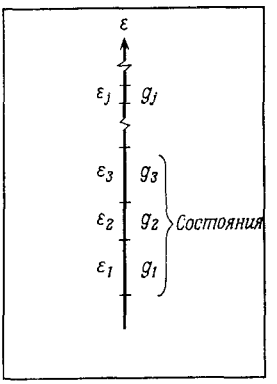
Сделаем следующие допущения: 1) электроны неотличимы друг от друга; 2) каждый уровень зоны может быть занят не более чем двумя электронами с противоположно направленными спинами (это ограничение связано с принципом Паули, первоначально сформулированным для электронов в атоме); 3) ограничиваясь для простоты лишь однократно ионизованными примесями, постулируем также, что каждый примесный уровень

может быть занят только одним электроном. Ниже мы увидим, что все эти допущения легко переносятся на случай дырок.

Зоны, содержащие n электронов, могут состоять из N уровней $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ с $g_1, g_2, \ldots, g_N$ состояниями соответственно, как это схематически изображено на фиг. 3.2. Допустим, что



Фиг. 3.1. Дискретные уровни энергии «кристалла», состоящего из восьми атомов.



Фиг. 3.2. Уровни энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ в энергетических зонах с $g_1, g_2, \ldots$ состояниями соответственно.

$n_j < g_j$ состояний занято одним электроном каждое и соответственно $g_j - n_j$ состояний не заполнено. Вычислим теперь термодинамическую вероятность Больцмана W [1]). Число перестановок между g_j-состояниями равно $g_j!$ и часто обозначается через $\Gamma(g_j + 1)$. Однако вследствие неразличимости электронов надо учитывать только те перестановки, при которых переставляются занятое и свободное состояния. Следовательно, из общего числа перестановок $g_j!$ нужно исключить $n_j!$ перестановок между занятыми состояниями и $(g_j - n_j)!$ перестановок между свободными состояниями; в результате для числа различимых распределений получим

$$W_j = \frac{g_j!}{n_j!\,(g_j - n_j)!}. \tag{3.1.1}$$

Перебирая все N наборов состояний, получаем полное число различимых перестановок

$$W = \prod_j W_j = \prod_j \frac{g_j!}{n_j!\,(g_j - n_j)!}. \tag{3.1.2}$$

[1]) Расчет заимствован из работы [1].

Допустим теперь, что запрещенная зона полупроводника IV группы содержит N_D донорных уровней, из которых $N_{D\times}$ занято одним электроном каждое и, таким образом, являются нейтральными. На первый взгляд число различных перестановок $N_{D\times}$ электронов на N_D уровнях должно быть равно $N_D!/N_{D\times}(N_D - N_{D\times})!$. На самом деле это число больше. Свободное место на незанятом донорном уровне может быть занято электроном с произвольно направленным спином, но если на этом уровне уже находится электрон, то другой электрон попасть на него не может. Две возможности ориентации спина электрона учитываются в выражении для числа перестановок множителем $g_D = 2$. В случае $N_{D\times}$ электронов этот множитель равен $(g_D)^{N_{D\times}}$, так что получаем

$$W = (g_D)^{N_{D\times}} \frac{N_D!}{N_{D\times}!(N_D - N_{D\times})!}. \tag{3.1.3}$$

В случае донора это *конечный* результат заполнения [см. уравнение (1.3.5)], т. е. нейтральный донор с одним неспаренным электроном. В случае акцептора это справедливо *до начала* реакции

$$A^{\times} + e^{-} \rightleftharpoons A^{-}, \tag{3.1.4}$$

когда примесь содержит неспаренный электрон (например, один из трех валентных электронов индия). Поскольку $N_{A\times} = N_A - N_{A^-}$, в данном случае для W получаем выражение

$$W = (g_A)^{N_A - N_{A^-}} \frac{N_A!}{N_{A^-}!(N_A - N_{A^-})!}, \tag{3.1.5}$$

где $g_A = 2$. Если есть и доноры и акцепторы, то полное число различимых перестановок есть

$$W = (g_D)^{N_{D\times}} \frac{N_D!}{N_{D\times}!(N_D - N_{D\times})!} (g_A)^{N_A - N_{A^-}} \frac{N_A!}{N_{A^-}!(N_A - N_{A^-})!} \times \times \prod_j \frac{g_j!}{n_j!(g_j - n_j)!}. \tag{3.1.6}$$

Наиболее вероятное распределение электронов по всем состояниям находится из уравнения (см., например, [2])

$$\frac{dW}{dn_j} = 0 \tag{3.1.7}$$

с учетом дополнительных условий сохранения полного числа электронов n и полной энергии U. Чтобы продифференцировать

$n_j!$, воспользуемся формулой Стирлинга, справедливой при $n_j \gg 1$:

$$\ln (n_j)! = n_j \ln n_j - n_j, \qquad \frac{d(\ln n_j!)}{dn_j} = \ln n_j. \tag{3.1.8}$$

Очевидно, что дифференцировать $\ln W$ удобнее, чем W. Введем сумму

$$\sum = \ln W + \alpha\Big(n - N_{D\times} - N_A - \sum_j n_j\Big) + \\ + \beta\Big(U - N_{D\times}\varepsilon_D - N_{A^-}\varepsilon_A - \sum_j n_j\varepsilon_j\Big), \tag{3.1.9}$$

где α и β — неопределенные множители Лагранжа, ε_D и ε_A — энергии донорного и акцепторного уровней соответственно. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, получаем

$$0 = \frac{d\sum}{dN_{D\times}} = \ln g_D - \ln N_{D\times} + \ln\left(N_D - N_{D\times}\right) - \alpha - \beta\varepsilon_D, \tag{3.1.10}$$

$$0 = \frac{d\sum}{dN_{A^-}} = -\ln g_A - \ln N_{A^-} + \ln\left(N_A - N_{A^-}\right) - \alpha - \beta\varepsilon_A, \tag{3.1.11}$$

$$0 = \frac{d\sum}{dn_j} = -\ln n_j - \ln\left(g_j - n_j\right) - \alpha - \beta\varepsilon_j. \tag{3.1.12}$$

Решая эти уравнения относительно $N_{D\times}$, N_{A^-} и n_j, получаем

$$N_{D\times} = N_D\left[\frac{1}{g_D}\exp(\alpha + \beta\varepsilon_D) + 1\right]^{-1}, \tag{3.1.13}$$

$$N_{A^-} = N_A\left[g_A\exp(\alpha + \beta\varepsilon_A) + 1\right]^{-1}, \tag{3.1.14}$$

$$n_j = g_j\left[\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) + 1\right]^{-1}. \tag{3.1.15}$$

Максимальное значение $W_{\text{макс}}$, называемое термодинамической вероятностью, определяется при подстановке (3.1.13)—(3.1.15) в (3.1.5):

$$\ln W_{\text{макс}} = \alpha\Big(N_{D\times} - N_{A\times} + \sum_j n_j\Big) + \beta\Big(N_{D\times}\varepsilon_D - N_{A\times}\varepsilon_A + \sum_j n_j\varepsilon_j\Big) + \\ + N_D\ln\left[1 + g_D\exp(-\alpha - \beta\varepsilon_D)\right] + N_A\ln\left[1 + g_A\exp(\alpha + \beta\varepsilon_A)\right] + \\ + \sum_j g_j\ln\left[1 + \exp(-\alpha - \beta\varepsilon_j)\right]. \tag{3.1.16}$$

Согласно Больцману, энтропия S определяется следующим образом:

$$S = k_B\ln W_{\text{макс}}, \tag{3.1.17}$$

где k_B — постоянная Больцмана. Свободная энергия F есть

$$F = U - TS, \tag{3.1.18}$$

где температура T определяется уравнением

$$\frac{1}{k_B T} = \frac{\partial (\ln W_{\text{макс}})}{\partial U}\Big|_{n=\text{const}}, \tag{3.1.19}$$

а n и U находятся из условия равенства нулю выражений, стоящих в скобках в (3.1.9).

Энергия Ферми ζ [1] (часто ее называют химическим потенциалом или потенциалом Гиббса) определяется выражением

$$\zeta = \frac{\partial F}{\partial n}\Big|_{T=\text{const}}. \tag{3.1.20}$$

В этих обозначениях, как будет показано ниже, неопределенные множители Лагранжа α и β имеют следующий физический смысл:

$$\frac{1}{k_B T} = \beta, \tag{3.1.21}$$

$$\frac{\zeta}{k_B T} = -\alpha. \tag{3.1.22}$$

Убедимся сначала в справедливости (3.1.21). Из (3.1.16) и (3.1.19) следует

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_B T} = \frac{\partial \alpha}{\partial U}(n - N_A) + \beta + \frac{\partial \beta}{\partial U}(U - N_A \varepsilon_A) - \\ - N_D \frac{g_D \exp(-\alpha - \beta\varepsilon_D)}{1 + g_D \exp(-\alpha - \beta\varepsilon_D)}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} + \frac{\partial \beta}{\partial U}\varepsilon_D\right) + \\ + N_A \frac{g_A \exp(\alpha + \beta\varepsilon_A)}{1 + g_A \exp(\alpha + \beta\varepsilon_A)}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} + \frac{\partial \beta}{\partial U}\varepsilon_A\right) - \\ - \sum_j \frac{g_j \exp(-\alpha - \beta\varepsilon_j)}{1 + \exp(-\alpha - \beta\varepsilon_j)}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial U} + \frac{\partial \beta}{\partial U}\varepsilon_j\right).\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Полученное выражение можно упростить, используя (3.1.13) — (3.1.15):

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_B T} = \frac{\partial \alpha}{\partial U} n + \beta + \frac{\partial \beta}{\partial U} U - \left(N_{D\times} + N_{A^-} + \sum_j n_j\right)\frac{\partial \alpha}{\partial U} - \\ - \left(\varepsilon_D N_{D\times} + \varepsilon_A N_{A^-} + \sum_j \varepsilon_j n_j\right)\frac{\partial \beta}{\partial U}.\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

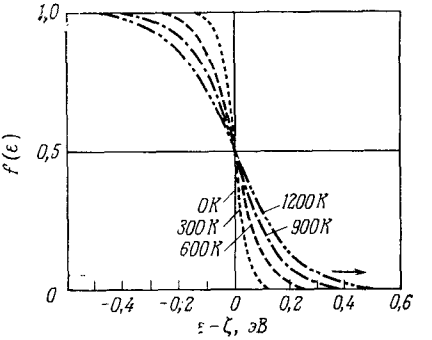
Множители при последних двух членах есть n и U соответственно, что доказывает справедливость (3.1.21). Аналогично

с помощью (3.1.20) и (3.1.16) доказывается справедливость (3.1.22).

Отношение n_j/g_j называется вероятностью заполнения в тепловом равновесии состояния с энергией ε_j. Как следует из выражения (3.1.15), это отношение равно

$$\frac{n_j}{g_j} = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_j - \zeta}{k_B T}\right) + 1\right]^{-1} \tag{3.1.25}$$

и определяет функцию распределения Ферми — Дирака $f(\varepsilon_j)$. График этой функции представлен на фиг. 3.3. При конечной



Фиг. 3.3. Функция распределения Ферми — Дирака при различных значениях температуры.

Относительно температурной зависимости ζ которая здесь не представлена, см (3.1.30) для случая примесной проводимости и (3.1.37) для случая собственной проводимости.

температуре T ступенька при $\varepsilon = \zeta$ имеет размытие порядка $k_B T$, а хвост функции распределения хорошо аппроксимируется экспонентой:

$$\frac{n_j}{g_j} \approx \exp\left(-\frac{\varepsilon_j - \zeta}{k_B T}\right) \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{k_B T}\right). \tag{3.1.26}$$

Это не что иное, как функция распределения Максвелла — Больцмана. Если уровень Ферми находится внутри запрещенной зоны и расстояние между ним и краем любой из зон больше $4k_B T$, то полупроводник называется невырожденным и для описания «газа» носителей можно пользоваться функцией распределения (3.1.26).

Предположим теперь, что состояния с энергией ε_j образуют энергетическую зону. Сумму по всем состояниям необходимо заменить интегралом. Возьмем для простоты параболическую зону

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}, \tag{3.1.27}$$

где эффективная масса электрона m_n — скалярная величина. Изоэнергетические поверхности в k-пространстве являются концентрическими сферами. Поскольку квазиимпульс кристалла

есть $\hbar\mathbf{k}$, элементарный объем в фазовом пространстве равен $dx\,dy\,dz\,d(\hbar k_x)d(\hbar k_y)d(\hbar k_z)$. Согласно принципам квантовой статистики, фазовое пространство можно представить совокупностью ячеек с объемом $h^3 = (2\pi\hbar)^3$, каждая из которых содержит не более двух электронов с противоположно направленными спинами. Интегрируя по координатам, получаем объем кристалла V. Значит, число состояний в интервале энергии $d\varepsilon$ равно

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\frac{V\hbar^3}{(2\pi\hbar)^3}\,d^3k = 2\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}(\varepsilon-\varepsilon_c)^{1/2}\,d\varepsilon. \qquad (3.1.28)$$

Поэтому полная концентрация носителей в зоне равна

$$n = \frac{1}{V}\int\limits_{\varepsilon_c}^{\infty} f(\varepsilon)\,g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \qquad (3.1.29)$$

где $f(\varepsilon)$ — функция распределения Ферми — Дирака, определяемая правой частью выражения (3.1.25). Так как это распределение с ростом энергии экспоненциально убывает, верхний предел интегрирования можно положить бесконечным, что не приводит к существенным ошибкам. Подставляя $g(\varepsilon)$ из (3.1.28), получаем

$$n = 2\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int\limits_{\varepsilon_c}^{\infty}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_c)^{1/2}\,d\varepsilon}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\zeta}{k_BT}\right)+1} = N_cF_{1/2}\left(\frac{\zeta_n}{k_BT}\right). \qquad (3.1.30)$$

Введенные обозначения имеют следующий смысл: $\zeta_n = \zeta - \varepsilon_c$ — уровень Ферми относительно края зоны,

$$N_c = 2\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m_nk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)! = 2\left(\frac{m_nk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/3} \qquad (3.1.31)$$

— эффективная плотность состояний,

$$F_j(\eta) = \frac{1}{j!}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^j\,dx}{\exp(x-\eta)+1} \qquad (3.1.32)$$

— интеграл Ферми для $j = 1/2$. Этот интеграл табулирован [3]. При $\eta > 1{,}25$ он аппроксимируется выражением

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{4\eta^{3/2}}{3\pi^{1/2}} + \frac{\pi^{3/2}}{6\eta^{1/2}} \qquad (3.1.33)$$

с погрешностью меньше 1,5%. При $\eta < -4$, что соответствует невырожденному полупроводнику (статистика Максвелла — Больцмана), приближенное значение $F_j(\eta)$ равно

$$F_j(\eta) = \exp\eta. \qquad (3.1.34)$$

Величина $\eta_n = \zeta_n/k_BT$ называется приведенной энергией Ферми. Соответственный результат получается и для случая дырок в валентной зоне (индекс v). При $T = 300$ К и $m_n = m_p = m_0$ получаем $N_c = N_v = 2{,}54 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Поэтому константа C в уравнении (1.3.1) находится перемножением n и p в невырожденном случае:

$$C = \frac{N_c N_v}{T^3} = 4\left(\frac{\sqrt{m_n m_p}\, k_B}{2\pi\hbar^2}\right)^3 = \left(\frac{m_n}{m_0}\frac{m_p}{m_0}\right)^{3/2} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-6} \cdot \text{К}^{-3}. \quad (3.1.35)$$

В собственном полупроводнике $n = p$, и из выражений

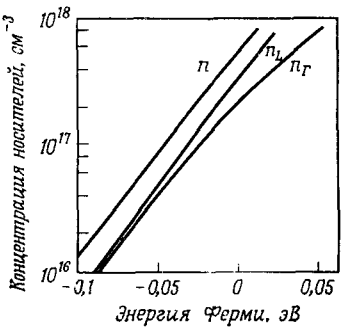
$$n = N_c \exp\left(-\frac{\varepsilon_c - \zeta}{k_BT}\right), \quad p = N_v \exp\left(\frac{\varepsilon_v - \zeta}{k_BT}\right) \quad (3.1.36)$$

находим энергию Ферми

$$\zeta = \frac{1}{2}(\varepsilon_c + \varepsilon_v) + \frac{3}{4} k_BT \ln \frac{m_p}{m_n}. \quad (3.1.37)$$

При равенстве эффективных масс электронов и дырок уровень Ферми не зависит от температуры и расположен посередине запрещенной зоны. Если $m_n \ll m_p$, уровень Ферми с ростом температуры приближается к краю зоны проводимости.

Если имеются две зоны Г и L с энергиями края зоны ε_c и $\varepsilon_c + \Delta_L$



Фиг. 3.4. Концентрации легких (Г) и тяжелых (L) электронов в GaSb при 300 К в зависимости от энергии Ферми [4].

соответственно, то для концентрации носителей имеем

$$n = n_\Gamma + n_L = N_{c\Gamma} F_{1/2}\left(\frac{\zeta_n}{k_BT}\right) + N_{cL} F_{1/2}\left(\frac{\zeta_n - \Delta_L}{k_BT}\right), \quad (3.1.38)$$

где

$$N_{c\Gamma} = 2\left(\frac{m_\Gamma k_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \text{и} \quad N_{cL} = 2\left(\frac{m_L k_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}. \quad (3.1.39)$$

На фиг. 3.4 представлена зависимость n, n_Γ и n_L от ζ_n для n-GaSb при 300 К ($m_\Gamma/m_0 = 0{,}05$, $m_L/m_0 = 0{,}74$, $\Delta_L = 101{,}7$ мэВ).

Вычислим, наконец, плотность энтропии S, определяемую выражениями (3.1.17) и (3.1.16), в которых суммы заменяем соответствующими интегралами:

$$\sum_j n_j = N_c F_{1/2}(\eta_n),$$
$$\sum_j n_j \varepsilon_j = \frac{3}{2} k_B T N_c F_{3/2}(\eta_n), \tag{3.1.40}$$

а также

$$\sum_j g_j \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_j}{k_B T}\right)\right] =$$
$$= \frac{N_c}{(1/2)!} \int_0^\infty dx x^{1/2} \ln\left(1 + e^{\eta_n - x}\right) = N_c F_{3/2}(\eta_n). \tag{3.1.41}$$

Последнее равенство получается с помощью интегрирования по частям. Тогда для полной концентрации получаем выражение

$$n = N_{D\times} + N_{A^-} + N_c F_{1/2}(\eta_n), \tag{3.1.42}$$

а для плотности внутренней энергии U_n (индекс n обозначает электроны)

$$U_n = N_{D\times} \varepsilon_D + N_{A^-} \varepsilon_A + \frac{3}{2} k_B T N_c F_{3/2}(\eta_n). \tag{3.1.43}$$

Для плотности энтропии получается довольно длинное выражение (см., например, [1]), которое упрощается, если пренебречь донорами и акцепторами:

$$S_n = -\frac{\zeta}{T} n + \frac{U_n}{T} + k_B N_c F_{3/2}(\eta_n) = \frac{5/3 U_n - n\zeta}{T}. \tag{3.1.44}$$

Из выражения (3.1.18) определяется свободная энергия

$$F_n = n\zeta - \frac{2}{3} U_n. \tag{3.1.45}$$

Легко убедиться в справедливости уравнения (3.1.19), записанного в виде

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_n}{\partial U_n}\Big|_{n=\text{const}}, \tag{3.1.46}$$

и выражения (3.1.20), если учесть, что $\zeta = \zeta(n)$, $U_n = U_n(n)$ и $\partial U_n / \partial \zeta = 3/2 n$.

Для случая дырок введем концентрацию свободных состояний в зоне

$$p_j = g_j - n_j = g_j \left[1 + \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_j}{k_B T}\right)\right]^{-1}. \tag{3.1.47}$$

Это выражение аналогично (3.1.25) с той лишь разницей, что знаки перед энергией и уровнем Ферми заменены на обратные. Тогда для концентрации свободных дырок получаем

$$p = N_v F_{1/2}(\eta_p) \tag{3.1.48}$$

и для плотности внутренней энергии свободных дырок

$$U_p = -\frac{3}{2} k_B T N_v F_{3/2}(\eta_p). \tag{3.1.49}$$

Выражение для плотности энтропии тоже имеет сходный вид:

$$S_p = -\frac{{}^5/_3 U_p - p\zeta}{T}. \tag{3.1.50}$$

Для смешанной проводимости полная плотность энтропии S выражается в виде

$$S = S_n + S_p. \tag{3.1.51}$$

При выводе всех этих выражений предполагалось, что плотность состояний $g(\varepsilon)$ определяется соотношением (3.1.28). В гл. 9, § 2, будут рассматриваться квантовые эффекты в сильном магнитном поле, когда плотность состояний выражается иначе.

§ 2. Степени заполнения для примесных уровней

Отношение плотности нейтральных доноров к полной плотности доноров определяется из выражений (3.1.13), (3.1.21) и (3.1.22):

$$\frac{N_{D\times}}{N_D} = \left[\frac{1}{g_D}\exp\left(\frac{\varepsilon_D - \zeta}{k_B T}\right) + 1\right]^{-1}. \tag{3.2.1}$$

Поскольку $N_D = N_{D\times} + N_{D+}$, для отношения $N_{D\times}/N_{D+}$ имеем

$$\frac{N_{D\times}}{N_{D+}} = g_D \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_D}{k_B T}\right). \tag{3.2.2}$$

Согласно (3.1.30) и (3.1.34), концентрация свободных электронов в невырожденном случае равна

$$n = N_c \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_c}{k_B T}\right), \tag{3.2.3}$$

где N_c — эффективная плотность состояний в зоне проводимости. Вводя энергию ионизации донора $\Delta\varepsilon_D$:

$$\Delta\varepsilon_D = \varepsilon_c - \varepsilon_D, \tag{3.2.4}$$

из уравнения (3.2.2) получаем закон действующих масс

$$\frac{N_{D^\times}}{N_{D^+} n} = \frac{g_D}{N_c} \exp \frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}. \tag{3.2.5}$$

Энергия $\Delta\varepsilon_D$ равна теплу, которое выделяется при протекании реакции

$$D^+ + e^- \rightleftharpoons D^\times + \Delta\varepsilon_D. \tag{3.2.6}$$

Заменяя в уравнении (3.2.5) $N_{D^\times}$ на $N_D - N_{D^+}$ и решая его относительно N_{D^+}, получаем

$$N_{D^+} = \frac{N_D}{\frac{n}{g_D \frac{n}{N_c} \exp\left(\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}\right)} + 1}. \tag{3.2.7}$$

Из условия электронейтральности следует равенство чисел положительных и отрицательных зарядов:

$$p + N_{D^+} = n + N_{A^-} = n + N_A - N_{A^\times}. \tag{3.2.8}$$

В полупроводнике n-типа дырками и нейтральными акцепторами можно пренебречь. Следовательно,

$$N_{D^+} \approx n + N_A, \tag{3.2.9}$$

что с учетом уравнения (3.2.7) дает

$$\frac{n(n + N_A)}{N_D - N_A - n} = \frac{N_c}{g_D} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}\right). \tag{3.2.10}$$

Зная это соотношение и измерив плотность носителей n как функцию температуры, по известной зависимости N_c и g_D от температуры T можно определить энергию активации донора $\Delta\varepsilon_D$. Согласно уравнению (3.1.39), N_c пропорционально $T^{3/2}$. В гл. 3, § 1, спиновое вырождение примеси g_D полагалось равным 2. Это справедливо только при высоких температурах. При низких температурах (например, меньше 10 К для случая примеси Sb в Ge) необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: то, что мы называем примесным уровнем, на самом деле состоит из триплетного состояния донора (спины параллельны) и синглетного состояния (спины антипараллельны). Энергия последнего меньше энергии триплета на величину $\delta\varepsilon = 0{,}57$ мэВ для Sb в Ge ($\Delta\varepsilon_D = 9{,}6$ мэВ) и $\delta\varepsilon = 4{,}0$ мэВ для As в Ge ($\Delta\varepsilon_D = 12{,}7$ мэВ) [5]. Эта разность энергий существенна, например, при ультразвуковом низкотемпературном поглощении, которое рассматривается в гл. 6, § 1. На данном этапе ограничимся замечанием, что в выражении (3.2.10) нужно заменить

$\exp(\Delta\varepsilon_D/k_BT)$ на $^1/_4 \exp[(\Delta\varepsilon_D + \delta\varepsilon)/k_BT] + {}^3/_4 \exp(\Delta\varepsilon_D/k_BT)$, где $^1/_4$ и $^3/_4$ — статистические веса синглетного и триплетного состояний соответственно. Следовательно, полагая $g_D = 2$, получаем из (3.2.10)

$$\frac{n(n+N_A)}{N_D - N_A - n} = \frac{N_C}{2} \frac{4}{\exp\left(\frac{\delta\varepsilon}{k_BT}\right) + 3} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_BT}\right). \quad (3.2.11)$$

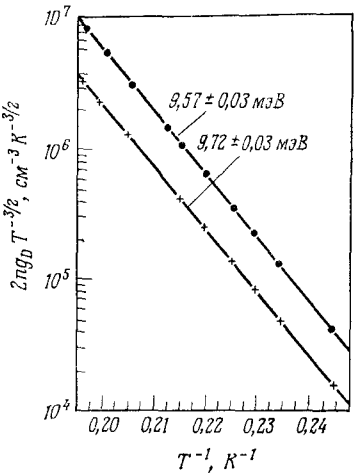
Можно сохранить формально выражение (3.2.10), если определить g_D следующим образом:

$$g_D = \frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{\delta\varepsilon}{k_BT}\right) + 3\right] = g_D(T). \quad (3.2.12)$$

Если температура настолько низка, что становится существенной величина $\delta\varepsilon$, то можно принять $n \ll N_A$ и $n \ll (N_D - N_A)$ и аппроксимировать (3.2.10) выражением

$$\lg\left(2ng_DT^{-3/2}\right) = \lg\left(\frac{N_D - N_A}{N_A} \frac{2N_c}{T^{3/2}}\right) - \frac{\Delta\varepsilon_D}{k_BT} \lg e. \quad (3.2.13)$$

Согласно (3.1.31), отношение $N_c/T^{3/2}$ не зависит от температуры. Поэтому, построив график зависимости левой части последнего уравнения от обратной температуры, можно получить как $\Delta\varepsilon_D$, так и степень компенсации $N_A/(N_D + N_A)$. На фиг. 3.5 представлены полученные Кёнигом и др. [6][1]) экспериментальные зависимости величины $2ng_DT^{-3/2}$ (в логарифмическом масштабе) от $1/T$ для двух образцов



Фиг. 3.5. Экспериментальная зависимость величины $2ng_DT^{-3/2}$ от обратной температуры, необходимая для определения разности энергий между зоной проводимости и триплетным донорным уровнем, полученным из невозмущенного четырехкратно вырожденного основного состояния Sb в Ge [6].

германия, легированного сурьмой, в интервале температур от 4,0 до 5,1 К. Наклон прямых соответствует $\Delta\varepsilon_D = 9{,}57$ и 9,72 мэВ. Из абсолютных значений определяется величина $N_A/(N_D - N_A)$,

[1]) См. литературу, цитированную в работе [6]. См. также [7], и раздел 3.2.4 в работе [3].

равная соответственно 0,036 и 0,067. Зная эти величины и плотность носителей при высоких температурах, когда $n = N_D - N_A$, можно определить полную концентрацию примесей $N_D + N_A$. В некоторых образцах, как оказалось, необходимо рассматривать два типа доноров с различными энергетическими уровнями, например Sb и As.

Для невырожденного полупроводника p-типа выражения (3.2.3), (3.2.4), (3.2.7) и (3.2.10) необходимо заменить следующими:

$$p = N_v \exp\left(\frac{\varepsilon_v - \zeta}{k_B T}\right), \tag{3.2.14}$$

$$\Delta\varepsilon_A = \varepsilon_A - \varepsilon_v, \tag{3.2.15}$$

$$N_{A^-} = \frac{N_A}{g_A \dfrac{p}{N_v} \exp\left(\dfrac{\Delta\varepsilon_A}{k_B T}\right) + 1}, \tag{3.2.16}$$

$$\frac{p\,(p + N_D)}{N_A - N_D - p} = \frac{N_v}{g_A} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_A}{k_B T}\right). \tag{3.2.17}$$

Чувствительными экспериментальными методами [8] удалось показать, что для индия в германии в интервале температур 20—50 К высокотемпературное значение g-фактора равно 4, а не 2; это связано с тем, что у края валентной зоны подзоны тяжелых и легких дырок взаимно вырождают друг друга.

При получении (3.2.9) пренебрегалось существованием «неосновных носителей», которыми в данном случае являются дырки. Их можно учесть, вычислив произведение np с помощью соотношений (3.2.3) и (3.2.14):

$$np = N_c N_v \exp\left(-\frac{\varepsilon_G}{k_B T}\right), \tag{3.2.18}$$

где использовано определение ширины запрещенной зоны

$$\varepsilon_G = \varepsilon_c - \varepsilon_v. \tag{3.2.19}$$

Правая часть (3.2.18) обозначается через n_i^2, где концентрация носителей в собственном полупроводнике

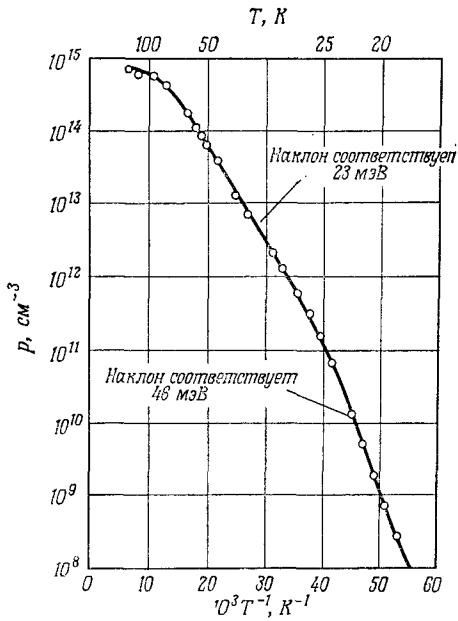
$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{\varepsilon_G}{2k_B T}\right) \tag{3.2.20}$$

[см. также уравнение (1.3.2)]. В случае близких, но не равных концентраций электронов и дырок приходится решать уравнение четвертого порядка относительно n и p, которое получается комбинированием (3.2.7), (3.2.16), (3.2.8) и (3.2.18). В частном случае почти некомпенсированного полупроводника $n \gg n_i \gg p$,

N_A получается уравнение только второго порядка, решение которого имеет вид

$$n = N_{D^+} \approx \frac{N_D}{g_D \frac{n}{N_c} \exp\left(\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}\right)} \approx \sqrt{\frac{N_D N_c}{g_D}} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_D}{2k_B T}\right). \quad (3.2.21)$$

Под знаком экспоненты стоит *половина* энергии активации $\Delta\varepsilon_D/2$. Однако при более низких температурах становится существенным вымораживание носителей, и поэтому $N_D > N_A \gg \gg n \gg p$, а концентрации ионизованных доноров и акцепторов



Фиг. 3.6. Зависимость концентрации дырок от обратной температуры в образце кремния с неглубокими акцепторами энергия и концентрация которых составляют соответственно 46 мэВ и $7{,}4 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ частично компенсированными донорами с концентрацией $1{,}0 \cdot 10^{11}$ см$^{-3}$ [9].

почти равны, так как большинство электронов уже перешло от доноров к акцепторам. Из соотношения

$$\frac{1}{N_A} = \frac{1}{N_{D^+}} = \frac{1}{N_D}\left[g_D \frac{n}{N_c} \exp\left(\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}\right) + 1\right] \quad (3.2.22)$$

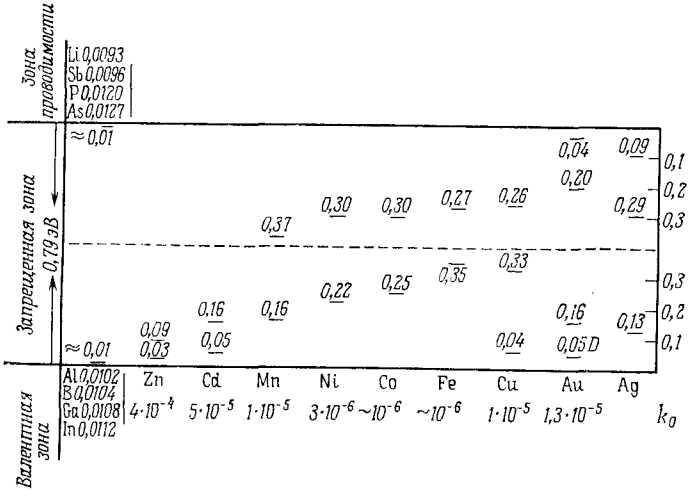
легко определить концентрацию

$$n = \frac{N_c}{g_D} \frac{N_D - N_A}{N_A} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_D}{k_B T}\right), \quad (3.2.23)$$

где под знаком экспоненты стоит *полная* энергия активации $\Delta\varepsilon_D$. Аналогичные результаты получаются в случае дырочной прово-

димости. На фиг. 3.6 представлены экспериментальные результаты [9], полученные для p-Si, легированного акцепторами с концентрацией $7{,}4 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$. При переходе от случая $n \gg N_D$ (высокие температуры) к случаю $n \ll N_D$ (низкие температуры) наблюдается излом вблизи значения 10^{11} см$^{-3}$, которое соответствует концентрации компенсирующих донорных примесей.

В примесном полупроводнике уровень Ферми близок к уровню энергии той примеси, которая определяет тип проводимости.



Фиг. 3.7. Примесные уровни в германии при 0 К [11].

Все указанные глубокие уровни являются акцепторными, за исключением самого низкого уровня Au. Указаны значения энергии в электронвольтах. Внизу приведены коэффициенты распределения k_0.

Это понятно из соотношения (3.2.2): чтобы число ионизованных примесей было заметным (N_{D^+} порядка N_D), разность $\zeta - \varepsilon_D$ должна быть мала по сравнению с k_BT.

Представляет интерес статистика термоионизации доноров и акцепторов, допускающих двукратную ионизацию, например теллур в германии [1]: $Te^+ + e^- \rightleftarrows Te^{++} + 2e^-$. В гл. 12, § 2, где описывается фотопроводимость, примеси, допускающие двукратную ионизацию, рассматриваются более подробно.

На фиг. 3.7 показаны примесные энергетические уровни, наблюдаемые в германии [2]. Числа, стоящие при химических символах, обозначают расстояния от примесных уровней до бли-

[1]) Относительно вероятности заполнения доноров такого типа см., например, [1].

[2]) Обзор по данному вопросу см., например, в книге [10], а также в работе Гебалле в книге [9].

жайшего края зоны, измеренное в электронвольтах. Для примесей, о которых известно, что они ведут себя как однократно ионизованные доноры или акцепторы, это расстояние порядка 0,03 эВ. Они называются неглубокими, или водородоподобными примесями. Последнее определение связано с тем, что, если энергию Ридберга $\mathrm{Ry} = m_0 e^4/[2(4\pi\varkappa_0\hbar)^2] = 13{,}6$ эВ умножить на отношение масс $m/m_0 = 0{,}12$ и разделить на квадрат диэлектрической проницаемости $\varkappa = 16$, то мы получим значение энергии порядка 0,01 эВ. В этой модели радиус первой электронной орбиты равен боровскому радиусу $a_B = 4\pi\varkappa_0\hbar^2/(me^2) = 0{,}53$ Å, умноженному на $\varkappa m_0/m$, что составляет примерно 70 Å и поэтому значительно больше межатомных расстояний. Этот пример демонстрирует, какую роль в атомной модели играет макроскопическая диэлектрическая проницаемость. В более строгих квантовомеханических расчетах необходимо учитывать напряжения, обусловленные тем, что большой атом примеси не помещается в решетке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spenke E.*, Electronic Semiconductors, McGraw-Hill, New York, 1958, Ch. VIII.
2. *Schrödinger E.*, Statistical Thermodynamics, Univ. Press, Cambridge, 1948.
3. *Blakemore J. S.*, Semiconductor Statistics, Pergamon Ofxord, 1962, appendix B. (Имеется перевод: *Дж. Блекмор*, Статистика электронов в полупроводниках, «Мир», 1964.)
4. *Jantsch W.*, Thesis, Univ. Wien, Austria, 1971.
5. *Fritzsche H.*, Phys. Rev., **120**, 1120 (1960).
6. *Koenig S. H., Brown R. D., Schillinger W.*, Phys. Rev., **128**, 1668 (1962).
7. *Long D., Motchenbacher C. D., Myers J.*, Journ. Appl. Phys., **30**, 353 (1959).
8. *Blakemore J. S.*, Phil. Mag., **4**, 560 (1959).
9. *Hannay N. B.* в книге Semiconductors (ed. N. B. Hannay), Reinhold Publ., Co., New York, 1959. (Имеется перевод: Полупроводники, под ред. Хеннея, ИЛ, М., 1962, стр. 23—63.)
10. *Conwell E. M.*, Proc, IRE, **46**, 1281 (1958).
11. *Newman R., Tyler W. W.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz and D. Turnbull), Vol. 8, Acad. Press, New York, 1959, p. 50.

Глава 4. ПЕРЕНОС ЗАРЯДА И ЭНЕРГИИ В НЕВЫРОЖДЕННОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

§ 1. Кинетическая теория электронного газа

В предыдущих главах было показано, что подвижный носитель заряда в полупроводнике обладает эффективной массой m, отличной от массы свободного электрона m_0. Это обстоятельство связано с характером движения электрона в поле кристалла. При обсуждении распределения газа носителей по скоростям было показано, что в общем случае оно имеет вид распределения Ферми — Дирака. В случае невырожденного полупроводника последнее аппроксимируется распределением Максвелла — Больцмана

$$f(v) \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right). \tag{4.1.1}$$

В этом случае плотность числа носителей полагается малой по сравнению с эффективной плотностью состояний N_c в зоне проводимости и N_v в валентной зоне (3.1.31). При получении этих распределений предполагалось, что внешнее электрическое поле отсутствует. Более того, все вычисления проводились в предположении о термодинамическом равновесии.

В настоящей главе мы вычислим потоки заряда и энергии, обусловленные наличием градиентов электрического потенциала, температуры и концентрации носителей. Эти потоки подвергаются воздействию внешнего магнитного поля и механических сил, таких, как гидростатическое давление и одноосное сжатие. Весьма общие соотношения между этими потоками и градиентами были получены Онзагером [1, 2][1]). Вместо того чтобы углубляться в тонкости термодинамики необратимых процессов [4], мы воспользуемся упрощенным уравнением Больцмана в приближении времени релаксации.

§ 2. Электропроводность и ее зависимость от температуры

В области примесной проводимости для плотности тока $\mathbf{j}$, обусловленного наличием внешнего электрического поля $\mathbf{E}$, имеем

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v}_d, \tag{4.2.1}$$

[1]) См. также [3].

где $\mathbf{v}_d$ — скорость дрейфа носителей. Вектор плотности тока $\mathbf{j}$ направлен по полю, в то время как скорость дрейфа электронов направлена противоположно $\mathbf{j}$, поскольку для них $e < 0$. Модуль e равен величине элементарного заряда, с которым по предположению совпадает заряд дырки. В пренебрежении тепловым движением носителей уравнение движения последних имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_d) + \frac{m\mathbf{v}_d}{\bar{\tau}_m} = e\mathbf{E}, \tag{4.2.2}$$

где t — время, $m\mathbf{v}_d$ — импульс носителей, а $\bar{\tau}_m$ определяется как среднее время релаксации импульса. Релаксация означает возвращение в равновесное состояние. Второе слагаемое описывает «трение», испытываемое носителями при направленном движении в кристалле. Это трение зависит от колебаний отдельных атомов кристаллической решетки и, следовательно, от температуры кристалла, что учитывается зависимостью $\bar{\tau}_m$ от температуры.

В стационарном состоянии первое слагаемое обращается в нуль и скорость дрейфа $\mathbf{v}_d$ пропорциональна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$:

$$|\mathbf{v}_d| = \mu |\mathbf{E}|, \tag{4.2.3}$$

где коэффициент пропорциональности

$$\mu = \frac{|e|}{m}\bar{\tau}_m \tag{4.2.4}$$

носит название подвижность. Если эту величину подставить в уравнение (4.2.1), то для плотности тока $\mathbf{j}$ получим выражение

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{4.2.5}$$

где σ — электропроводность, определяемая выражением

$$\sigma = ne\mu = \frac{ne^2}{m}\bar{\tau}_m. \tag{4.2.6}$$

Величина, обратная электропроводности, $1/\sigma = \rho$ называется удельным сопротивлением. Единица удельного сопротивления Ом·см = В·см/А. Из (4.2.6) следует, что подвижность измеряется в единицах см^2/(В·с), а из (4.2.4) — что масса измеряется в единицах В·А·с^3/см^2 = 10^7 г. При численных расчетах предпочтительнее пользоваться этим способом определения единицы массы. Отношение[1]) e/m при $m = m_0$ равно $1{,}76 \times \times 10^{15}$ см^2/(В·с^2). Типичное значение $\bar{\tau}_m$ порядка 10^{-13} с, что в ряде простых случаев совпадает с величиной, обратной частоте колебаний атомов в решетке. Таким образом, подвижность оказывается равной 176 см^2/(В·с). Для электронов в

[1]) См. таблицу численных значений постоянных в конце книги.

германии n-типа m почти в десять раз меньше, чем m_0, а $\bar{\tau}_m$ при комнатной температуре по порядку величины равно 10^{-13} с. Это дает значение подвижности, совпадающее по порядку величины с определенным экспериментально и равным 3900 см^2/(В·с).

Возвращаясь к выражениям (4.2.2)—(4.2.5), легко проследить, каким образом слагаемое, описывающее трение, приводит к закону Ома, который утверждает, что электропроводность σ не зависит от напряженности электрического поля. Смысл термина «время релаксации» проясняется, если допустить, что в момент времени $t = 0$ электрическое поле выключено. В этом случае легко найти решение уравнения (4.2.2):

$$m\mathbf{v}_d = (m\mathbf{v}_d)_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}_m}\right). \tag{4.2.7}$$

Дрейфовый импульс экспоненциально убывает с характерным временем $\bar{\tau}_m$, которое слишком мало, чтобы его можно было наблюдать непосредственно. Ниже будет показано, что в случае переменного поля между ним и током имеется сдвиг фаз, зависящий от произведения частоты на $\bar{\tau}_m$ (см. § 14 данной главы).

В рамках рассматриваемой модели, когда дрейфующие электроны случайным образом сталкиваются с колеблющимися атомами кристаллической решетки, можно пользоваться понятием среднего времени свободного пробега между столкновениями. Это время между столкновениями τ_c порядка τ_m. В гл. 6 данная модель будет уточнена и будут подробно рассмотрены различные процессы столкновений, называемые там механизмами рассеяния. В общем случае τ_m зависит от отношения энергии носителя ε к средней энергии колебаний атома, которая по порядку величины равна k_BT. В частных случаях это отношение принимает вид

$$\tau_m = \tau_0\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^r, \tag{4.2.8}$$

где показатель степени r меняется от $-1/2$ (рассеяние на акустическом деформационном потенциале) до $+3/2$ (рассеяние на ионизованных примесях), а τ_0 — коэффициент пропорциональности. В случае акустического рассеяния длина свободного пробега $l_{ак}$, как будет показано ниже, оказывается пропорциональной величине, обратной температуре решетки:

$$l_{ак} \sim \frac{1}{T}. \tag{4.2.9}$$

Таким образом, величина τ_0, которая определяется выражением

$$\tau_0 = l_{ак}\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}, \tag{4.2.10}$$

где $\sqrt{2k_BT/m}$ — средняя скорость носителей, находящихся в равновесии с решеткой, оказывается пропорциональной $T^{-3/2}$.

Поскольку τ_m в общем случае зависит от энергии, необходимо дать новое определение этой величины [уравнение (4.2.2)]. Выше было показано, что имеется распределение носителей по скоростям $f(v)$. В анизотропной среде скорость дрейфа v_d, например когда электрическое поле приложено вдоль оси z, определяется z-составляющей скорости дрейфа

$$v_{dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_z f \, d^3v}{\int_{-\infty}^{\infty} f \, d^3v}, \tag{4.2.11}$$

где $d^3v = dv_x dv_y dv_z$. Аналогично в уравнении (4.2.2) $\bar{\tau}_m$ — значение τ_m, усредненное по распределению скоростей. Поскольку τ_m есть функция скорости, имеет смысл определять эту величину с помощью уравнения, описывающего релаксацию функции распределения $f(\mathbf{v})$:

$$\frac{d}{dt} f(v) + \frac{f(v) - f_0(v)}{\tau_m(v)} = 0, \tag{4.2.12}$$

где f_0 — функция распределения при тепловом равновесии, т. е. в отсутствие поля. Это и есть уравнение Больцмана в приближении времени релаксации. С учетом того, что $dx/dt = v_x$, $dv_x/dt = (e/m)E_x$ и т. д., полевой член df/dt можно представить в следующем виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + \\ + \frac{e}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial v_x} E_x + \frac{\partial f}{\partial v_y} E_y + \frac{\partial f}{\partial v_z} E_z\right). \tag{4.2.13}$$

В случае постоянного поля и в отсутствие градиентов температуры и концентрации в кристалле первые четыре члена обращаются в нуль. При $E_x = E_y = 0$ уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{e}{m} E_z + \frac{f - f_0}{\tau_m} = 0, \tag{4.2.14}$$

что можно записать в виде

$$f = f_0 - \frac{e}{m} \tau_m \frac{\partial f}{\partial v_z} E_z. \tag{4.2.15}$$

Рассмотрим достаточно слабые поля, когда можно ограничиться линейными по E_z членами. Тогда в $\partial f/\partial v_z$ можно заменить f на

равновесное значение f_0. Если в разложении производной функции распределения по полиномам Лежандра сохранить только первые два члена, то такое приближение называется диффузионным:

$$f = f_0 - \frac{e}{m}\tau_m \frac{\partial f_0}{\partial v_z} E_z. \tag{4.2.16}$$

Методом последовательного приближения, подставляя (4.2.16) в выражение (4.2.15), получим член, пропорциональный E_z^2. Этот член в слабом поле полагается пренебрежимо малым. Случай сильных полей будет рассмотрен в § 13 данной главы.

Теперь ясно, как нужно вычислять скорость дрейфа из (4.2.11). Первое слагаемое в выражении для f обращает в нуль интеграл, стоящий в числителе, так как f_0 — четная функция v_z $[f_0(v_z) = f_0(-v_z)]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_z f_0 \, d^3v = 0. \tag{4.2.17}$$

Поскольку

$$-\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = v_z f_0 \frac{m}{k_B T}, \tag{4.2.18}$$

интеграл от второго слагаемого в знаменателе (4.2.11) обращается в нуль. Таким образом, получаем

$$v_{dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_z \left[-\frac{e}{m}\tau_m \frac{\partial f}{\partial v_z} E_z\right] d^3v}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0 \, d^3v}. \tag{4.2.19}$$

Согласно (4.2.3), подвижность μ определяется как отношение $|v_{dz}/E_z|$, поэтому она может быть записана в виде $(|e|/m)\langle\tau_m\rangle$, где $\langle\tau_m\rangle = \langle\tau_m(v)\rangle$ — среднее время релаксации импульса:

$$\langle\tau_m\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau_m(\mathbf{v})\, v_z \left(-\frac{\partial f}{\partial v_z}\right) d^3v}{\int_{-\infty}^{\infty} f_0 \, d^3v}. \tag{4.2.20}$$

В дальнейшем будет видно, что определенная таким образом величина $\langle\tau_m\rangle$ в сущности несколько отличается от $\bar{\tau}_m$, определяемой выражением (4.2.2).

Аппроксимируя $-\partial f/\partial v_z$ величиной $-\partial f_0/\partial v_z$, которая для распределения Ферми — Дирака определяется выражением

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = f_0 (f_0 - 1) \frac{m v_z}{k_B T}, \tag{4.2.21}$$

получим

$$\langle \tau_m \rangle = \frac{\frac{m}{k_B T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_m v_z f_0 (1 - f_0)\, d^3 v}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0\, d^3 v}. \tag{4.2.22}$$

Предположим, что $\tau_m(\mathbf{v})$ является изотропной функцией $\tau_m(|\mathbf{v}|)$. Поскольку $f_0(v)$ есть изотропная функция, можно заменить v_z^2 на $1/3 v^2$. Кроме того, ограничимся элементарной моделью зонной структуры и отсчет энергии будем вести от дна зоны, т. е. $\varepsilon = m v^2/2$. Более сложные зонные структуры будут рассмотрены в гл. 7 и 8. Элемент объема в v-пространстве есть $d^3 v = 4\pi v^2 dv \sim \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$. В таком случае выражение (4.2.22) принимает вид

$$\langle \tau_m \rangle = \frac{-\frac{2}{3} \int\limits_0^{\infty} \tau_m \frac{\partial f_0}{\partial (\varepsilon / k_B T)} \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^{3/2} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\int\limits_0^{\infty} f_0 \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^{1/2} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}. \tag{4.2.23}$$

Предположим теперь, что зависимость $\tau_m(\varepsilon)$ является степенной и определяется выражением (4.2.8). В общем случае статистики Ферми — Дирака $f_0(\varepsilon)$ определяется соотношением (3.1.25); тогда, интегрируя (4.2.23) по частям, получаем

$$\langle \tau_m \rangle = \tau_0 \frac{2}{3} \left(r + \frac{3}{2}\right) \frac{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{r+1/2}\, dx}{e^{x - \eta_n} + 1}}{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{1/2}\, dx}{e^{x - \eta_n} + 1}} =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(r + \frac{3}{2}\right)! \, \tau_0 \frac{F_{r+1/2}(\eta_n)}{F_{1/2}(\eta_n)}, \tag{4.2.24}$$

куда входят интегралы Ферми, определяемые (3.1.32), а η_n — приведенная энергия Ферми. Множитель $4/3\sqrt{\pi} \approx 0{,}752$. В случае невырожденного электронного газа применима статистика

Максвелла — Больцмана (4.1.1) и из (4.2.24) следует

$$\langle \tau_m \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(r + \frac{3}{2} \right) ! \, \tau_0. \tag{4.2.25}$$

Для неполярного акустического рассеяния $r = -1/2$, и мы имеем

$$\langle \tau_m \rangle = \tau_0 \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \approx 0{,}752 \tau_0. \tag{4.2.26}$$

При более общем описании удобно следующим образом ввести волновой вектор носителя $\mathbf{k}$ [см. текст после формулы (2.1.30)]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hbar \mathbf{k} = e\mathbf{E}, \tag{4.2.27}$$

где $\hbar\mathbf{k}$ — квазиимпульс, а $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π. Скорость носителя определяется выражением

$$\mathbf{v} = \hbar^{-1} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon. \tag{4.2.28}$$

В уравнении Больцмана слагаемое $(\partial f/\partial v_z)(e/m)E_z$ заменяется на $e\hbar^{-1}(\partial f/\partial \varepsilon)(\nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon \mathbf{E})$. Для эффективной плотности состояний в зоне проводимости N_c, когда уровень отсчета энергии совмещен с краем зоны, имеем с учетом (3.1.30)

$$N_c = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T} \right) d^3k, \tag{4.2.29}$$

а для электропроводности σ, если электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено, например, вдоль оси z, имеем

$$\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3 \hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_m \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_z} \right)^2 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) d^3k. \tag{4.2.30}$$

Поскольку в этом расчете не фигурирует эффективная масса, он применим не только для элементарной модели параболической зоны, но также и для непараболической зонной структуры [1]).

Вернемся к величине $\bar{\tau}_m$, определенной с помощью (4.2.2). По предположению $\bar{\tau}_m$ есть также среднее от τ_m по скорости. Покажем, что уравнение движения (4.2.2) может быть получено из уравнения Больцмана. Это позволит нам переопределить величину $\bar{\tau}_m$.

Умножим уравнение Больцмана (4.2.12), в котором df/dt определяется выражением (4.2.13), на произвольную функцию

[1]) При первом чтении полезно перейти сразу к § 3 этой главы.

скорости $Q(\mathbf{v})$ [1]) и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) (\mathbf{v}\nabla_r f) d^3v + \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) (\mathbf{E}\nabla_v f) d^3v + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) \frac{f - f_0}{\tau_m} d^3v = 0. \quad (4.2.31)$$

Нормируем функцию распределения f на концентрацию носителей n:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f \, d^3v. \quad (4.2.32)$$

Среднее значение Q определяется следующим образом:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) f \, d^3v. \quad (4.2.33)$$

В этих обозначениях первое слагаемое в (4.2.31) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) f \, d^3v = \frac{\partial}{\partial t} n \langle Q \rangle = \\ = n \frac{\partial \langle Q \rangle}{\partial t} + \langle Q \rangle \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (4.2.34)$$

Аналогично для второго слагаемого имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) (\mathbf{v}\nabla_r f) d^3v = \operatorname{div} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) f \mathbf{v} \, d^3v = \operatorname{div} (n \langle Q\mathbf{v} \rangle). \quad (4.2.35)$$

Третье слагаемое интегрируем по частям; тогда с учетом того, что f на границах обращается в нуль, имеем

$$\frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) (\mathbf{E}\nabla_v f) d^3v = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f \nabla_v Q \, d^3v = -\frac{ne}{m} \bar{E} \langle \nabla_v Q \rangle. \quad (4.2.36)$$

Полагая $Q = 1$ (выбирая нулевой момент уравнения Больцмана), из (4.2.31)—(4.2.36) получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n \mathbf{v}_d) = 0, \quad (4.2.37)$$

[1]) Подобный формализм соответствует приведенному в работе [5].

где $\mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v} \rangle$. Последний интеграл в (4.2.31) обращается в нуль, так как при столкновениях полное число носителей не меняется. Из уравнений (4.2.34) и (4.2.37), исключая $\partial n/\partial t$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = n \frac{\partial \langle Q \rangle}{\partial t} - \langle Q \rangle \operatorname{div}(n\mathbf{v}_d). \tag{4.2.38}$$

Пусть Q есть mv_z, тогда $\langle Q \rangle = mv_{dz}$. Если зависимость от координат отсутствует (однородный кристалл, нет градиента температуры и электромагнитных волн), то $\operatorname{div}(n\mathbf{v}_d) = 0$; тогда мы получим

$$n \frac{d}{dt} mv_{dz} - neE_z + m \int_{-\infty}^{\infty} v_z \frac{f}{\tau_m} d^3v = 0. \tag{4.2.39}$$

Это и есть уравнение движения (4.2.2), в котором

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau_m} v_z f \, d^3v}{nv_{dz}}. \tag{4.2.40}$$

Для вычисления этого интеграла в качестве функции распределения выберем распределение Ферми — Дирака, сдвинутое на величину скорости дрейфа $\mathbf{v}_d$. Для последнего при $|\mathbf{v}_d| \ll |\mathbf{v}|$ имеем следующее разложение:

$$f(\mathbf{v}) \approx f_0(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d) \approx f_0 - mv_z v_{dz} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \tag{4.2.41}$$

Поскольку f_0 и τ_m являются четными функциями $\mathbf{v}$, интеграл от первого слагаемого обращается в нуль, а для второго слагаемого после интегрирования по частям получаем

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{3/2}}{\tau_m(x)} \right] f_0 \, dx}{\int_0^{\infty} f_0 x^{1/2} \, dx}. \tag{4.2.42}$$

Если τ_m определяется выражением (4.2.8), то окончательно находим

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - r \right)! \frac{1}{\tau_0} \frac{F_{1/2-r}(\eta_n)}{F_{1/2}(\eta_n)}. \tag{4.2.43}$$

Сопоставляя (4.2.42) и (4.2.23), видим, что

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \langle \tau_m^{-1} \rangle. \tag{4.2.44}$$

Следовательно, в простом случае неполярного акустического рассеяния в невырожденном электронном газе при замене $\mu = (e/m)\langle\tau_m\rangle$ на

$$\mu \approx \frac{e}{m}\bar{\tau}_m = \frac{e}{m\langle\tau_m^{-1}\rangle} \tag{4.2.45}$$

появляется множитель $2(4/3\sqrt{\pi})^2 = 32/9\pi \approx 1{,}13$, с которым в ряде случаев можно не считаться. В гл. 6, § 1, с помощью квантовомеханического расчета будет показано, что выражение (4.2.44), в котором $\bar{\tau}_m$ определяется вероятностью рассеяния, является плохим приближением.

Если кроме силы $e\mathbf{E}$ на носители действует сила Лоренца, к правой части уравнения (4.2.36) нужно добавить слагаемое

$$-n\left\langle \nabla_{\mathbf{v}}\left\{\frac{e}{m}[\mathbf{vB}]Q(\mathbf{v})\right\}\right\rangle = -\frac{ne}{m}\langle\{[\mathbf{vB}]\nabla_{\mathbf{v}}Q(\mathbf{v})\}\rangle. \tag{4.2.46}$$

В (4.2.46) мы учли то обстоятельство, что, например, член $[\mathbf{vB}]_x = v_yB_z - v_zB_y$ не содержит v_x, поэтому оператор $\partial/\partial v_x$ на него не действует. Если положить $Q = mv_i$, то

$$-ne\langle[\mathbf{vB}]_i\rangle = -ne[\mathbf{v}_d\mathbf{B}]_i. \tag{4.2.47}$$

В гл. 4, § 13, мы рассмотрим горячие носители и определим весьма полезную величину — время релаксации энергии τ_ε. Если Q есть энергия носителя ε:

$$Q(\mathbf{v}) = \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \varepsilon, \tag{4.2.48}$$

то можно ввести τ_ε и на данном этапе. Тогда для силы Лоренца вместо (4.2.47) получим

$$-\frac{ne}{2}\langle[\mathbf{vB}]_i v_i\rangle. \tag{4.2.49}$$

После суммирования по всем трем пространственным направлениям это выражение обращается в нуль:

$$\sum_i [\mathbf{vB}]_i v_i = ([\mathbf{vB}]\mathbf{v}) = 0. \tag{4.2.50}$$

Вводя величины ε_L и τ_ε следующим образом:

$$\varepsilon_L = \frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{v})f_0\,d^3v, \tag{4.2.51}$$

$$\frac{\langle\varepsilon\rangle - \varepsilon_L}{\tau_\varepsilon} = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\tau_m}(f - f_0)\,d^3v \tag{4.2.52}$$

и вновь полагая, что зависимость от координат в кристалле отсутствует, из (4.2.31)—(4.2.38) получим уравнение баланса энергии

$$\frac{d}{dt}\langle\varepsilon\rangle - e(\mathbf{E}\mathbf{v}_d) + \frac{\langle\varepsilon\rangle - \varepsilon_L}{\tau_\varepsilon} = 0. \tag{4.2.53}$$

Это уравнение не содержит магнитного поля в явном виде; неявная же зависимость содержится в определении τ_ε посредством (4.2.52), так как f зависит от напряженности магнитного поля. Кроме того, в случае горячих носителей как f, так и τ_ε зависят от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Следовательно, убывание величины $\langle\varepsilon\rangle$ до ее равновесного значения ε_L после выключения электрического поля носит неэкспоненциальный характер, и τ_ε можно называть временем релаксации лишь весьма условно. В тех редких случаях, когда τ_m не зависит от скорости, из уравнения (4.2.52) следует, что $\tau_\varepsilon = \tau_m$.

Для нахождения τ_ε из (4.2.52) выберем в качестве функции распределения f функцию распределения в слабом поле f_0 с температурой T_e, немного большей температуры решетки T. Разлагая эту функцию в ряд по $(T_e - T)$, имеем

$$f \approx f_0\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) \approx f_0\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - \frac{T_e - T}{T}\,\frac{\varepsilon}{k_B T}\,\frac{df_0\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}. \tag{4.2.54}$$

Таким образом, разность $f - f_0$ в уравнении (4.2.52) определяется вторым слагаемым в правой части (4.2.54). В невырожденном электронном газе $\langle\varepsilon\rangle - \varepsilon_L = {}^3/_2 k_B(T_e - T)$. Интегрируя по частям, находим

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{5/2}}{\tau_m(x)}\right] f_0\,dx}{\int_0^\infty f_0 x^{1/2}\,dx}. \tag{4.2.55}$$

Если τ_m определяется выражением (4.2.8), то в случае невырожденного электронного газа

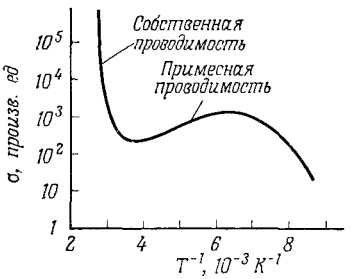
$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2} - r\right)!\,\frac{1}{\tau_0}. \tag{4.2.56}$$

С учетом (4.2.43) и (4.2.44) последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{1}{\tau_\varepsilon} = \left(\frac{5}{2} - r\right)\langle\tau_m^{-1}\rangle. \tag{4.2.57}$$

В гл. 6 будет показано, что даже в простом случае неполярного акустического рассеяния этот результат неверен. Правильный результат будет получен с помощью квантовомеханического расчета. Тем не менее, если заметить, что величина r характеризует тип рассеяния, а произведение $\tau_\varepsilon \langle \tau_m^{-1} \rangle$ интерпретировать как приблизительное число соударений, необходимое для передачи решетке энергии, полученной от поля E, то из (4.2.57) следует вполне правдоподобный вывод, что это число зависит от типа механизма рассеяния.

Вернемся к выражению (4.2.6) для электропроводности, в котором $\bar{\tau}_m$ заменим величиной $\langle \tau_m \rangle$. В полупроводнике всегда присутствуют как электроны, так и дырки. Поскольку оба типа



Фиг. 4.1. Схематическая зависимость электропроводности от обратной температуры.

носителей никак не влияют друг на друга (за исключением электронно-дырочного рассеяния, которое несущественно при малых концентрациях носителей), полный ток определяется разностью токов, текущих в противоположных направлениях. Так как электроны и дырки обладают зарядами противоположного знака, полная электропроводность является суммой парциальных электропроводностей, которые всегда положительны:

$$\sigma = |e|(p\mu_p + n\mu_n) = |e|\mu_p(p + nb), \qquad (4.2.58)$$

где μ_p и μ_n — подвижности дырок и электронов, а $b = \mu_n/\mu_p$. Для собственных полупроводников $n = p = n_i$, поэтому

$$\sigma = |e| n_i \mu_p (1 + b). \qquad (4.2.59)$$

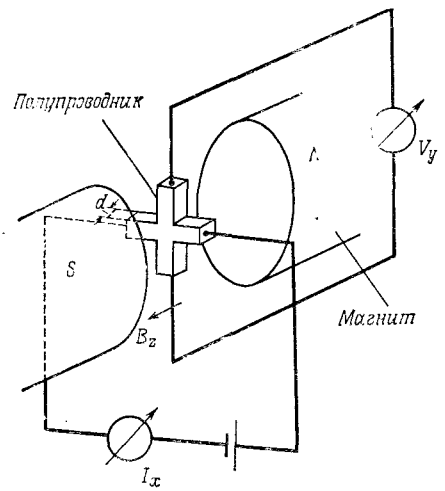
Поскольку n_i экспоненциально растет с температурой, как это следует из (3.2.20), получаем температурную зависимость σ, представленную на фиг. 4.1, где электропроводность отложена в логарифмическом масштабе как функция обратной температуры. В области собственной проводимости эта зависимость почти линейна. С понижением температуры σ переходит в область примесных значений, где концентрация носителей постоянна и электропроводность в простейшем случае растет как $\tau_0 \sim T^{-3/2}$. При еще более низких температурах происходит

вымораживание носителей, которое описывается выражениями (3.2.21) и (3.2.22).

Методы измерения удельного сопротивления рассмотрены в приложении 3.

§ 3. Эффект Холла в поперечном магнитном поле

Носители, движущиеся перпендикулярно или под углом к магнитному полю, под действием силы Лоренца будут отклоняться от первоначального направления своего движения. Это отклонение вызывает появление холловского напряжения V_y в экспериментальном устройстве, показанном на фиг. 4.2. Это напряжение снимается с боковых отростков нитевидного образца. Полярность его меняется при изменении направления тока I_x или магнитной индукции B_z.



Фиг. 4.2. Устройство Холла (V_y — холловское напряжение).

Величина холловского напряжения определяется выражением

$$V_y = R_H \frac{I_x B_z}{d}, \qquad (4.3.1)$$

где d — толщина образца в направлении магнитного поля, а R_H — коэффициент Холла.

Холловское напряжение пропорционально B_z, если считать, что R_H в выражении (4.3.1) постоянно. Как будет показано ниже, это справедливо только для значений B_z, малых по сравнению с величиной, обратной подвижности. Поле Холла E_y определяется выражением

$$E_y = R_H j_x B_z, \qquad (4.3.2)$$

где j_x — плотность тока. Обычно магнитная индукция B_z электромагнита измеряется в килогауссах или тесла (1 кГс = $= 10^{-1}$ Т). В физике полупроводников предпочтительнее измерять индукцию в единицах В·с/см^2 (1 В·с/см^2 $= 10^5$ кГс =

$= 10^4$ Т), поскольку в рачетах часто фигурирует безразмерное произведение подвижности, измеряемой в единицах см^2/(В·с), на B_z. Единица В·с называется вебер (Вб); 1 Вб/м^2 = $= 10^{-4}$ В·с/см^2.

Для вычисления R_H [1]) необходимо найти функцию распределения $f(\varepsilon)$ носителей, на которых действуют электрическое и магнитное поля. В отсутствие магнитного поля функция распределения определяется выражением (4.2.16) и может быть представлена в следующем виде [см. (4.2.28) и последующий текст]:

$$f = f_0 - f_0'\hbar^{-1}(\nabla_k \varepsilon \cdot \mathbf{E}) e\tau_m, \tag{4.3.3}$$

где $f_0' = \partial f_0/\partial\varepsilon$. При наличии магнитного поля можно сохранить подобную запись, если ввести некоторый вектор $\mathbf{G}$, определяемый соотношением

$$f = f_0 - f_0'\hbar^{-1}(\nabla_k \varepsilon \cdot \mathbf{G}). \tag{4.3.4}$$

В дальнейшем в этой главе мы будем предполагать, что в полупроводнике кроме электрического и магнитного полей имеется градиент температуры. Поэтому имеет смысл решить уравнение Больцмана для этого более общего случая и найденное решение применить к частному случаю эффекта Холла.

В общем случае уравнение Больцмана в приближении времени релаксации, т. е. уравнение (4.2.12) с $\partial f/\partial t = 0$, имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla_r f) + e\hbar^{-1}\{\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]\}\nabla_k f + \frac{f - f_0}{\tau_m} = 0. \tag{4.3.5}$$

Вместо f подставим ее значение (4.3.4). Рассмотрим сначала член $\nabla_k f$ во втором слагаемом уравнения Больцмана

$$\nabla_k f = \nabla_k f_0 - \nabla_k\{f_0'(\mathbf{vG})\} = f_0'\hbar\mathbf{v} - \nabla_k\{f_0'(\mathbf{vG})\}. \tag{4.3.6}$$

В слабом электрическом поле $\mathbf{E}$ отклонение f от равновесного значения f_0, определяемое величиной $\mathbf{G}$, мало. Поэтому произведением $\mathbf{E}$ на эту малую величину, которое появляется во втором слагаемом (4.3.5) после подстановки туда $\nabla_k f$ из (4.3.6), можно пренебречь как произведением двух малых величин (член второго порядка малости). Произведение первого слагаемого в (4.3.6) на $[\mathbf{vB}]$ тождественно равно нулю, так как оно является смешанным векторным произведением, содержащим один и тот же вектор $\mathbf{v}$ дважды. Это справедливо и для второго слагаемого правой части следующего уравнения:

$$-e\hbar^{-1}[\mathbf{vB}]\nabla_k\{f_0'(\mathbf{vG})\} = -e\hbar^{-1}[\mathbf{vB}]f_0'\nabla_k(\mathbf{vG}) - \\ - e\hbar^{-1}[\mathbf{vB}]f_0''\hbar\mathbf{v}(\mathbf{vG}), \tag{4.3.7}$$

[1]) Читателям, не интересующимся деталями расчета, следует перейти прямо к тексту после формулы (4.3.57).

где $f_0'' = \partial^2 f_0 / \partial \varepsilon^2$. Таким образом, второе слагаемое уравнения (4.3.5) имеет вид

$$ef_0'(\mathbf{Ev}) - e\hbar^{-1}f_0'[\mathbf{vB}]\nabla_{\mathbf{k}}(\mathbf{vG}). \tag{4.3.8}$$

Для вычисления последнего слагаемого в этом выражении подставим вместо скорости $\mathbf{v}$ ее значение $\hbar^{-1}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon$ и докажем следующее полезное математическое тождество:

$$\nabla_{\mathbf{k}}(\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\mathbf{G}) = (\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon + (\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\nabla_{\mathbf{k}})\mathbf{G} + [\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon[\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{G}]]. \tag{4.3.9}$$

Доказательство тривиально, если (4.3.9) расписать по компонентам Так, для x-компоненты имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x}G_x + \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y}G_y + \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z}G_z\right) &= G_x\frac{\partial}{\partial k_x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x} + G_y\frac{\partial}{\partial k_y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x} + \\ &+ G_z\frac{\partial}{\partial k_z}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x}\frac{\partial G_x}{\partial k_x} + \underline{\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y}\frac{\partial G_x}{\partial k_y}} + \underline{\underline{\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z}\frac{\partial G_x}{\partial k_z}}} + \\ &+ \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y}\left(\frac{\partial G_y}{\partial k_x} - \underline{\frac{\partial G_x}{\partial k_y}}\right) - \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z}\left(\underline{\underline{\frac{\partial G_x}{\partial k_z}}} - \frac{\partial G_z}{\partial k_x}\right).\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Одинаково подчеркнутые члены взаимно сокращаются, что и доказывает справедливость данного тождества для x-компоненты. Для остальных компонент доказательство аналогично.

Допустим теперь, что вектор $\mathbf{G}$ зависит от $\mathbf{k}$ через ε и поэтому не зависит от направления $\mathbf{k}$. Тогда для x-компоненты вектора $[\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{G}]$ имеем

$$\frac{\partial G_z}{\partial k_y} - \frac{\partial G_y}{\partial k_z} = \frac{\partial G_z}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y} - \frac{\partial G_y}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z} = [\nabla_{\mathbf{k}}(\varepsilon\mathbf{G}')]_x, \tag{4.3.11}$$

где $\mathbf{G}' = \partial\mathbf{G}/\partial\varepsilon$. Поэтому для третьего слагаемого в (4.3.9) имеем

$$[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon[\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{G}]] = \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\mathbf{G}') - (\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon)\ \mathbf{G}'. \tag{4.3.12}$$

Второе слагаемое в последнем выражении $-(\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon)^2\mathbf{G}'$ может быть записано в виде

$$-\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial k_x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial k_y} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial k_z}\right\} = -(\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\nabla_{\mathbf{k}})\mathbf{G}, \tag{4.3.13}$$

что с точностью до знака совпадает со вторым слагаемым в (4.3.9). Поэтому выражение (4.3.9) принимает вид

$$\hbar\nabla_{\mathbf{k}}(\mathbf{vG}) = (\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon + \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}\varepsilon\mathbf{G}'). \tag{4.3.14}$$

Если (4.3.14) умножить на векторное произведение $[\mathbf{vB}]$, как это сделано в (4.3.8), то второе слагаемое обратится в нуль, так как $\mathbf{v} \sim \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon$, а для первого слагаемого имеем

$$\hbar[\mathbf{vB}]\nabla_{\mathbf{k}}(\mathbf{vG}) = [\mathbf{vB}](\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon = \mathbf{v}[\mathbf{B}(\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon]. \tag{4.3.15}$$

Теперь второе слагаемое в уравнении Больцмана (4.3.6) можно записать в виде

$$ef_0'(\mathbf{vE}) - e\hbar^{-2}f_0'\{\mathbf{v}[\mathbf{B}(\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon]\}. \qquad (4.3.16)$$

Для первого слагаемого в уравнении Больцмана $\mathbf{v}\nabla_r f$ с помощью (4.3.3) получаем

$$\mathbf{v}\nabla_r f = \mathbf{v}\nabla_r f_0 - \mathbf{v}\nabla_r\{f_0'(\mathbf{vG})\} = \mathbf{v}\nabla_r f_0; \qquad (4.3.17)$$

здесь вторым слагаемым в правой части мы пренебрегаем, поскольку любая координатная зависимость, например зависимость температуры T, предполагается слабой.

В гл. 3 было показано, что равновесная функция распределения f_0 зависит от отношения разности энергии носителей ε и энергии Ферми ζ к энергии k_BT. Следовательно, $\nabla_r f_0$ можно выразить через f_0':

$$\nabla_r f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial\left(\dfrac{\varepsilon-\zeta}{k_BT}\right)}\nabla_r\frac{\varepsilon-\zeta}{k_BT} = f_0'T\nabla_r\frac{\varepsilon-\zeta}{T}. \qquad (4.3.18)$$

Поведение горячих носителей (см. § 13 данной главы) в некотором приближении можно описывать функцией распределения f_0, зависящей от электронной температуры T_e, а не от температуры кристаллической решетки T. В таком случае в последнем выражении T нужно заменить на T_e.

В последующем обсуждении уравнения Больцмана удобно ввести понятие электротермического поля $\mathbf{F}$:

$$e\mathbf{F} = e\mathbf{E} + T\nabla_r\frac{\varepsilon-\zeta}{T}. \qquad (4.3.19)$$

Тем самым мы можем объединить слагаемое в (4.3.16), зависящее от электрического поля $\mathbf{E}$, со слагаемым, пропорциональным $\nabla_r f_0$, в результате чего уравнение Больцмана примет вид

$$ef_0'(\mathbf{vF}) - e\hbar^{-2}f_0'\{\mathbf{v}[\mathbf{B}(\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon]\} - f_0'\frac{(\mathbf{vG})}{\tau_m} = 0. \qquad (4.3.20)$$

Поскольку в каждом слагаемом содержится произвольный вектор $f_0'\mathbf{v}$, справедливо соотношение

$$e\mathbf{F} - e\hbar^{-2}[\mathbf{B}(\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon] - \tau_m^{-1}\mathbf{G} = 0. \qquad (4.3.21)$$

Если сюда подставить вместо $\varepsilon(\mathbf{k})$ выражение, соответствующее элементарной модели зонной структуры

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \frac{1}{2}\hbar\,\mathbf{k}m^{-1}\mathbf{k}, \qquad (4.3.22)$$

где ε_c — дно зоны проводимости, то (4.3.21) легко решается относительно $\mathbf{G}$. Учитывая (4.3.22), можно записать

$$\hbar^{-2}(\mathbf{G}\nabla_{\mathbf{k}})\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon = m^{-1}\mathbf{G}. \tag{4.3.23}$$

Выражения (4.3.22) и (4.3.23) справедливы также и в том случае, когда масса m не скалярная величина, а представляется тензором с главными осями, параллельными осям координат:

$$\mathbf{m}^{-1} = \begin{pmatrix} m_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m_z^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.3.24}$$

где в общем случае $m_x^{-1} \neq m_y^{-1} \neq m_z^{-1}$. Выражение (4.2.22) может быть записано в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \frac{1}{2}\hbar^2\left(\frac{k_x^2}{m_x} + \frac{k_y^2}{m_y} + \frac{k_z^2}{m_z}\right). \tag{4.3.25}$$

Часто τ_m может быть также тензором того же вида:

$$\tau_m = \begin{pmatrix} \tau_x & 0 & 0 \\ 0 & \tau_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_z \end{pmatrix}. \tag{4.3.26}$$

С введением этих тензоров уравнение (4.3.21) можно переписать в следующем виде:

$$e\mathbf{F} - e[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}] - \tau_m^{-1}\mathbf{G} = 0, \tag{4.3.27}$$

где произведение тензора обратной массы на вектор $\mathbf{G}$ определяется формулой (4.3.23).

Для решения уравнения (4.3.21) необходимо определить другой тензор:

$$\alpha = e^2 \begin{Vmatrix} \frac{\tau_y\tau_z}{m_y m_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_x\tau_z}{m_x m_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau_x\tau_y}{m_x m_y} \end{Vmatrix}. \tag{4.3.28}$$

Для сферически симметричной модели $\alpha = (e\tau_m/m)^2$ и при τ_m, не зависящем от энергии, равно просто квадрату подвижности.

Докажем, что $\mathbf{G}$ определяется выражением

$$\mathbf{G} = e\tau_m \frac{\mathbf{F} - e[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\tau_m\mathbf{F}] + \alpha\mathbf{B}\cdot(\mathbf{F}\mathbf{B})}{1 + (\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})}. \tag{4.3.29}$$

Числитель содержит три слагаемых: первое не зависит от магнитной индукции, второе линейно по **B** и отвечает за эффект Холла, а третье, так же как знаменатель, квадратично по **B** и поэтому приводит к магниторезистивному эффекту.

Для доказательства (4.3.29) воспользуемся математическим тождеством

$$\left[\frac{\alpha}{e^2}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}\right]=\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}], \tag{4.3.30}$$

которое легко проверить, если расписать его по компонентам; так, для x-компоненты имеем

$$\frac{\tau_x\tau_z}{m_xm_z}B_y\tau_z^{-1}G_z-\frac{\tau_x\tau_y}{m_xm_y}B_z\tau_y^{-1}G_y=\frac{\tau_x}{m_x}\left(B_y\frac{G_z}{m_z}-B_z\frac{G_y}{m_y}\right). \tag{4.3.31}$$

Тогда, умножая векторно (4.3.30) на $e^2\mathbf{B}$, получаем

$$[\mathbf{B}[\alpha\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}]]=e^2[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}]]; \tag{4.3.32}$$

с другой стороны,

$$[\mathbf{B}[\alpha\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}]]=\alpha\mathbf{B}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G})-\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B}). \tag{4.3.33}$$

В первом слагаемом член $(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G})$ может быть вычислен путем скалярного умножения (4.3.21) на **B**; в результате он оказывается равным $e(\mathbf{FB})$. Сумму членов $\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})$ [определяемого выражением (4.3.33)] и $\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}\{1+(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})\}=\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}+\alpha\mathbf{B}e(\mathbf{FB})-$$
$$-e^2[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}]]. \tag{4.3.34}$$

В последнем слагаемом заменим $e[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}]$ его выражением из (4.3.27); в результате получим

$$e[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{G}]-e^2[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m\mathbf{F}]=e\mathbf{F}-\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}-e^2[\mathbf{B}\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m\mathbf{F}]. \tag{4.3.35}$$

При этом выражение (4.3.34) принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}_m^{-1}\mathbf{G}\{1+(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})\}=e\mathbf{F}-e^2[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m\mathbf{F}]+\alpha\mathbf{B}e(\mathbf{FB}). \tag{4.3.36}$$

Умножая на $\tau_m/[1+(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})]$, получаем (4.3.39).

Теперь мы можем записать функцию распределения (4.3.4) в общем виде

$$f=f_0-f_0'e\hbar^{-1}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\tau_m\frac{\mathbf{F}-e[\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m\mathbf{F}]+\alpha\mathbf{B}(\mathbf{FB})}{1+(\mathbf{B}\alpha\mathbf{B})}. \tag{4.3.37}$$

Для вычисления электропроводности в отсутствие магнитного поля $\mathbf{B}=0$ и $\mathbf{F}=\mathbf{E}$, имеем

$$f=f_0-f_0'e\tau_m(\mathbf{vE}), \tag{4.3.38}$$

откуда следует выражение для тензора электропроводности

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{4.3.39}$$

где σ равно σ_0, определяемому выражением

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\langle\tau_m\rangle, \tag{4.3.40}$$

а время релаксации импульса τ_m усреднено с функцией распределения Максвелла — Больцмана:

$$\langle\tau_m\rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tau_m\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)d\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right). \tag{4.3.41}$$

Если отвлечься от тензорных обозначений, выражение (4.3.41) тождественно полученному выше выражению (4.2.23).

В линейной по **B** части функции распределения (4.3.37) пренебрегаем вторым слагаемым в знаменателе, а также первым и третьим слагаемыми в числителе; тогда для электропроводности получим выражение

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma B_z & -\gamma B_y \\ -\gamma B_z & 0 & \gamma B_x \\ \gamma B_y & -\gamma B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.42}$$

где γ равно γ_0, определяемому выражением

$$\gamma_0 = \frac{ne^3}{m^2}\langle\tau_m^2\rangle. \tag{4.3.43}$$

Чтобы описать эффект Холла при произвольной магнитной индукции, введем величины

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}\left\langle\frac{\tau_m}{1+\omega_c^2\tau_m^2}\right\rangle \tag{4.3.44}$$

и

$$\gamma = \frac{ne^3}{m^2}\left\langle\frac{\tau_m^2}{1+\omega_c^2\tau_m^2}\right\rangle, \tag{4.3.45}$$

где ω_c — циклотронная частота:

$$\omega_c = \frac{|e|B}{m}. \tag{4.3.46}$$

Величины σ и γ получаются так же, как σ_0 и γ_0, с тем лишь отличием, что для первых в функции распределения удерживается

второе слагаемое в знаменателе. Действуя тензором (4.3.42) на **E**, получаем, например, для x-компоненты **j**

$$j_x = \gamma (B_z E_y - B_y E_z) = \gamma (\mathbf{EB})_x = \\ = \frac{ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau_m \left[\mathbf{E} \frac{e}{m} \mathbf{B} \tau_m \right]_x}{1 + \omega_c^2 \tau_m^2} \right\rangle, \qquad (4.3.47)$$

что также следует из слагаемого в (4.3.37), содержащего векторное произведение.

Из последнего слагаемого в (4.3.37) получаем выражение для электропроводности

$$\begin{pmatrix} -\beta B_x^2 & -\beta B_x B_y & -\beta B_x B_z \\ -\beta B_x B_y & -\beta B_y^2 & -\beta B_y B_z \\ -\beta B_x B_z & -\beta B_y B_z & -\beta B_y^2 \end{pmatrix}, \qquad (4.3.48)$$

где β определяется выражением

$$\beta = -\frac{ne^4}{m^3} \left\langle \frac{\tau_m^3}{1 + \omega_c^2 \tau_m^2} \right\rangle. \qquad (4.3.49)$$

При малых напряженностях магнитного поля величина $(1 + \omega_c^2 \tau_m^2)^{-1}$ заменяется на $(1 - \omega_c^2 \tau_m^2)$, где $\omega_c^2 \sim B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$. Вследствие этого тензор (4.3.48) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \beta_0 (B_y^2 + B_z^2) & -\beta_0 B_x B_y & -\beta_0 B_x B_z \\ -\beta_0 B_x B_y & \beta_0 (B_x^2 + B_z^2) & -\beta_0 B_y B_z \\ -\beta_0 B_x B_z & -\beta_0 B_y B_z & \beta_0 (B_x^2 + B_y^2) \end{pmatrix}, \qquad (4.3.50)$$

где

$$\beta_0 = -\frac{ne^4}{m^3} \langle \tau_m^3 \rangle. \qquad (4.3.51)$$

Действуя тензором (4.3.48) на вектор **F**, получаем, например, выражение для x-компоненты **j**

$$j_x = -\beta B_x (B_x F_x + B_y F_y + B_z F_z) = -\beta B_x (\mathbf{FB}), \qquad (4.3.52)$$

которое также следует из последнего слагаемого в (4.3.37).

В слабом магнитном поле тензор электропроводности обозначается через σ_w и является комбинацией тензоров (4.3.39), (4.3.42) и (4.3.50):

$$\sigma_w = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \beta_0 (B_y^2 + B_z^2) & \gamma_0 B_z - \beta_0 B_x B_y & -\gamma_0 B_y - \beta_0 B_x B_z \\ -\gamma_0 B_z - \beta_0 B_x B_y & \sigma_0 + \beta_0 (B_x^2 + B_z^2) & \gamma_0 B_x - \beta_0 B_y B_z \\ \gamma_0 B_y - \beta_0 B_x B_z & -\gamma_0 B_x - \beta_0 B_y B_z & \sigma_0 + \beta_0 (B_x^2 + B_y^2) \end{pmatrix}. \qquad (4.3.53)$$

Перейдем к обсуждению эффекта Холла в слабом магнитном поле. Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль **B**, т. е. $B_x = B_y = 0$. Из соотношения $\mathbf{j} = \sigma_w \mathbf{E}$ получаем выражение для компоненты E_z, которое не зависит от B_z. Поэтому можно положить $E_z = 0$. Для компонент тока j_x и j_y получаем

$$j_x = (\sigma_0 + \beta_0 B_z^2) E_x + \gamma_0 B_z E_y, \tag{4.3.54}$$

$$j_y = -\gamma_0 B_z E_x + (\sigma_0 + \beta_0 B_z^2) E_y. \tag{4.3.55}$$

В стационарном состоянии током j_y можно пренебречь, если ток, протекающий через вольтметр на фиг. 4.2, который измеряет холловское напряжение V_y, много меньше продольного тока I_x (на практике используется вольтметр с большим входным сопротивлением, такой, как ламповый вольтметр или его твердотельный аналог). На двух гранях образца, перпендикулярных оси y, сосредоточены носители заряда противоположных знаков в таком количестве, что электрическое поле между ними (поле Холла) уравновешивает поле силы Лоренца. Из условия $j_y = 0$ и из (4.3.55) определяем E_x:

$$E_x = \frac{\sigma_0 + \beta_0 B_z^2}{\gamma_0 B_z} E_y. \tag{4.3.56}$$

Исключая E_x из (4.3.54), находим поле Холла

$$E_y = \frac{\gamma_0}{(\sigma_0 + \beta_0 B_z^2)^2 + \gamma_0^2 B_z^2} j_x B_z. \tag{4.3.57}$$

Сравнивая полученное выражение с (4.3.2), находим коэффициент Холла

$$R_H = \frac{\gamma_0}{(\sigma_0 + \beta_0 B_z^2)^2 + \gamma_0^2 B_z^2} \approx \frac{\gamma_0}{\sigma_0^2}. \tag{4.3.58}$$

Последнее приближение справедливо, поскольку мы ограничились случаем слабого поля.

Используя определения величин γ_0 и σ_0 (4.3.43) и (4.3.40), получаем для коэффицента Холла выражение

$$R_H = \frac{r_H}{ne}, \tag{4.3.59}$$

где холл-фактор

$$r_H = \frac{\langle \tau_m^2 \rangle}{\langle \tau_m \rangle^2}. \tag{4.3.60}$$

Чтобы получить представление о величине холл-фактора, мы, как и выше [см. (4.2.8)], положим $\tau_m = \tau_0 (\varepsilon / k_B T)^r$ и из (4.2.25)

найдем

$$\langle \tau_m \rangle^2 = \left\{ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \tau_0 \left(\frac{3}{2} + r\right)! \right\}^2. \tag{4.3.61}$$

Аналогично, заменяя в (4.3.41) τ_m на τ_m^2, получаем для среднего от τ_m^2

$$\langle \tau_m^2 \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \tau_0^2 \left(\frac{3}{2} + 2r\right)! \tag{4.3.62}$$

Следовательно, для холл-фактора получаем выражение

$$r_H = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{(2r + 3/2)!}{\{(r + 3/2)!\}^2}. \tag{4.3.63}$$

Для рассеяния на акустическом деформационном потенциале, когда $r = -1/2$, из (4.3.63) находим

$$r_H = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi}{8} = 1{,}18, \tag{4.3.64}$$

а для рассеяния на ионизованных примесях, когда $r = 3/2$, имеем

$$r_H = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{2^{-5} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{\pi}}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{315\pi}{512} = 1{,}93. \tag{4.3.65}$$

Очевидно, по порядку величины $r_H \approx 1$.

Поскольку заряд электрона отрицателен, $e < 0$, коэффициент Холла отрицателен в случае электронной проводимости и положителен в случае дырочной проводимости. Поэтому исследование эффекта Холла является важным методом определения типа проводимости. Случай собственной или почти собственной проводимости будет рассмотрен ниже.

Зная R_H, можно определить концентрацию носителей:

$$n \text{ (или } p) = \frac{r_H}{R_H e}. \tag{4.3.66}$$

С другой стороны, если известно R_H, с помощью эффекта Холла удобно измерять магнитную индукцию **B**. В отличие от измерителей с вращающейся катушкой в устройствах, действующих на основе эффекта Холла, нет движущихся частей. Существует большое число приборов, принцип действия которых основан на эффекте Холла. В частности, умножение электрических сигналов, которые создают j_x и B_z: холловское напряжение определяется их произведением. Подобным образом можно создать измеритель мощности.

Холловская подвижность определяется произведением электропроводности σ_0 на коэффициент Холла R_H:

$$\mu_H = R_H \sigma_0 = \frac{r_H}{ne} ne\mu = r_H \mu. \tag{4.3.67}$$

Холловская подвижность отличается от дрейфовой на величину холл-фактора. Обычно измеряется именно холловская подвижность. Из полученной температурной зависимости холловской подвижности можно получить представление о наиболее вероятной зависимости $\tau_m(\varepsilon)$, зная которую можно вычислить холл-фактор. Зная эту величину, можно определить дрейфовую подвижность μ_H/r_H [1]). Поскольку r_H не слишком отличается от единицы, ошибка при неверном выборе зависимости $\tau_m(\varepsilon)$ не будет слишком большой.

Представляет интерес и другая величина — угол Холла θ_H, который определяется выражением

$$\operatorname{tg}\theta_H = \frac{E_y}{E_x} = \mu_H B_z = r_H \omega_c \langle \tau_m \rangle. \tag{4.3.68}$$

Только при малых значениях угла Холла оправдано пренебрежение зависимостью r_H от **B**, как это предполагалось при получении (4.3.59). В любом случае при измерении концентрации и подвижности с помощью эффекта Холла напряженность магнитного поля должна быть достаточно малой, чтобы изменение **B** не сказывалось существенным образом на измеряемых величинах.

Вследствие практической важности эффекта Холла приведем численный пример. Согласно (4.3.1) и (4.3.59), холловское напряжение есть

$$V_y = r_H \frac{I_x B_z}{ned}. \tag{4.3.69}$$

Рассмотрим полупроводник, для которого $r_H = 1{,}6$ и $n = 10^{14}$ см$^{-3}$. Пусть по образцу толщиной $d = 1$ мм $= 10^{-1}$ см течет ток в 1 мА $= 10^{-3}$ А, а магнитная индукция равна 1 кГс $= 0{,}1$ Т $= 10^{-5}$ В·с/см^2. Тогда холловское напряжение

$$V_y = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} / (10^{14} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-1})\,\text{В} = 10^{-2}\,\text{В}, \tag{4.3.70}$$

или 10 мВ. Пусть полупроводник является германием n-типа при комнатной температуре с холловской подвижностью $\mu_H = 4 \cdot 10^3$ см^2/(В·с) (фактически в этом случае r_H несколько меньше 1,6). Произведение $\mu_H B_z$ составляет $4 \cdot 10^{-2}$, что много меньше единицы. Поэтому холловское напряжение линейно зависит от B_z. Однако мы увидим, что условие $\mu_H B_z \ll 1$ может оказаться недостаточным в случае носителей двух типов, таких, как легкие и тяжелые дырки, что имеет место для большинства полупроводников p-типа [гл. 8, § 3; в случае магниторезистивного эффекта см. (4.4.15) и фиг. 4.5].

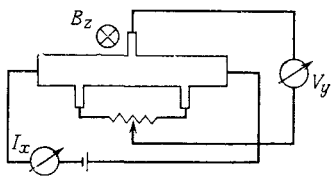
[1]) Прямым, хотя и редко используемым методом является эксперимент Хейнса — Шокли (гл. 5, § 2).

Может возникнуть некоторое осложнение экспериментального характера из-за трудности размещения холловских отростков образца строго соосно друг другу. Допустим, что рассогласование составляет 0,1 мм, и вычислим падение напряжения I_xR_x на нитевидном образце шириной и толщиной 1 мм:

$$I_xR_x = \frac{10^{-3}\text{А} \cdot 10^{-2}\text{ см}}{10^{14}\text{ см}^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{А} \cdot \text{с} \cdot 4 \cdot 10^3\text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с}) \cdot 10^{-2}\text{ см}^2} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-2}\text{ В}, \qquad (4.3.71)$$

что одного порядка величины с холловским напряжением. Это напряжение, связанное с рассогласованием, можно устранить либо усреднением $|V_y|$ по обоим направлениям магнитного поля [1]), либо помещением на одной грани образца двух боковых отростков, как это показано на фиг. 4.3. Эти отростки соединены с зажимами высокоомного потенциометра. Потенциометр



Фиг. 4.3. Конфигурация холловского образца, позволяющая компенсировать падение продольного напряжения, когда магнит выключен.

регулируется так, чтобы в отсутствие магнитного поля напряжение V_y было равно нулю. При наличии магнитного поля V_y есть истинное холловское напряжение. Усовершенствованное устройство, которое впервые предложил Ван дер Пау, рассматривается в приложении 3.

Если электроны и дырки имеются в сравнимых количествах, плотности тока носителей обоих типов складываются:

$$0 = j_y = \sigma_0 E_y - |e| r_H \left(p\mu_p^2 - n\mu_n^2\right) E_x B_z; \qquad (4.3.72)$$

поскольку в приближении слабого поля

$$E_y = R_H j_x B_z \approx R_H \sigma_0 E_x B_z, \qquad (4.3.73)$$

подставляя это значение в (4.3.72), находим

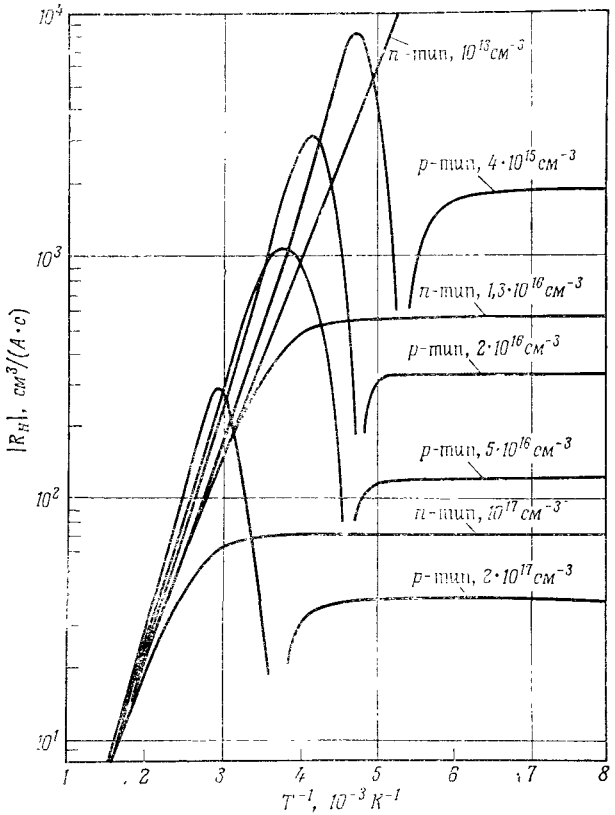
$$R_H = \frac{|e| r_H}{\sigma_0^2}\left(p\mu_p^2 - n\mu_n^2\right) = \frac{r_H}{|e|}\,\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{r_H}{|e|}\,\frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}, \qquad (4.3.74)$$

[1]) Это возможно только при малых напряженностях электрического поля, когда R_H не зависит от $\mathbf{E}$ (гл. 7, § 6).

где введено отношение подвижностей

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_p}. \qquad (4.3.75)$$

Величина R_H меняет свой знак при $p = nb^2$, а не в случае собственной проводимости, когда $p = n$. Например, для InSb при



Фиг. 4.4. Зависимость коэффициента Холла для антимонида индия от обратной температуры [6, 7].

комнатной температуре $b = 80$, и в собственном полупроводнике коэффициент Холла оказывается отрицательным, как и в полупроводнике n-типа. Это обстоятельство в полупроводниках p-типа приводит к холловскому выбросу выше прямой, соответствующей собственной проводимости, как это показано на фиг. 4.4 [6, 7]. Аналогичное поведение обнаруживается для температурной зависимости удельного сопротивления в образцах

p-типа: максимум удельного сопротивления наблюдается не при $p = n_i$, а при $p = n_i\sqrt{b}$. Если $b = 80$, то это почти на порядок больше n_i, и максимальное значение удельного сопротивления в $(1 + b)/2\sqrt{b} = 4{,}5$ раз больше, чем для собственного полупроводника.

В заключение рассмотрим зависимость коэффициента Холла от магнитного поля. Из (4.3.58) видно, что при не слишком малых напряженностях магнитного поля R_H зависит от B_z^2. Выражение для тензора электропроводности, справедливое при произвольной напряженности магнитного поля, приведено в приложении 1.

При очень сильных магнитных полях величины σ, γ и β, определенные выражениями (4.3.44), (4.3.45) и (4.3.49), можно приближенно записать в следующем виде:

$$\sigma \approx \frac{ne^2}{m\omega_c^2}\left\langle \tau_m^{-1}\right\rangle, \tag{4.3.76}$$

$$\gamma \approx \frac{ne^3}{m^2\omega_c^2}, \tag{4.3.77}$$

$$\beta \approx -\frac{ne^4}{m^3\omega_c^2}\langle \tau_m\rangle. \tag{4.3.78}$$

Тензор электропроводности σ_s определяется с помощью (4.3.39), (4.3.42) и (4.3.48):

$$\sigma_s = \begin{Vmatrix} \sigma - \beta B_x^2 & -\beta B_x B_y + \gamma B_z & -\beta B_x B_z - \gamma B_y \\ -\beta B_x B_y - \gamma B_z & \sigma - \beta B_y^2 & -\beta B_y B_z + \gamma B_x \\ -\beta B_x B_z + \gamma B_y & -\beta B_y B_z - \gamma B_x & \sigma - \beta B_z^2 \end{Vmatrix}. \tag{4.3.79}$$

При $B_x = B_y = E_z = 0$ имеем для компонент тока j_x и j_y

$$j_x = \sigma E_x + \gamma B_z E_y, \tag{4.3.80}$$

$$j_y = -\gamma B_z E_x + \sigma E_y. \tag{4.3.81}$$

Из условия $j_y = 0$ следует

$$E_x = \frac{\sigma}{\gamma B_z} E_y. \tag{4.3.82}$$

Исключая E_x из (4.3.80), находим поле Холла

$$E_y = \frac{\gamma}{\sigma^2 + (\gamma B_z)^2} j_x B_z = R_H j_x B_z. \tag{4.3.83}$$

Для вычисления коэффициента Холла используем (4.3.76)—(4.3.78):

$$R_H = \frac{\dfrac{ne^3}{m^2\omega_c^2}}{\left(\dfrac{ne^2}{m\omega_c^2}\right)^2\langle\tau_m^{-1}\rangle^2 + \left(\dfrac{ne^3B_z}{m^2\omega_c^2}\right)^2} \approx \frac{1}{ne}. \qquad (4.3.84)$$

Последнее приближение справедливо при больших напряженностях магнитного поля $(\mu_H B_z)^2 \gg 1$. Если $(\mu_H B_z)^2 = 10$, то при холловской подвижности порядка 10^3 см^2/(В·с) необходимое значение магнитной индукции составляет 31,6 Т, что достижимо лишь в импульсном режиме, да и то с большими трудностями. Для ряда полупроводников значения подвижности выше 10^4 см^2 /(В·с), что позволяет заметно понизить требования к B_z. Отметим, что в рассматриваемом случае для определения концентрации носителей не требуется знать величину холл-фактора, хотя при очень больших напряженностях магнитного поля концентрация носителей n может отличаться от значения в слабом поле. В таком случае магнитное поле вызывает изменение энергии ε_G, $\Delta\varepsilon_A$ или $\Delta\varepsilon_D$ (гл. 9, § 3), что может быть установлено оптическими методами.

§ 4. Магниторезистивный эффект

Зависимость плотности тока j_x, параллельного внешнему электрическому полю с напряженностью E_x, от поперечного слабого магнитного поля B_z определяется из (4.3.54) и (4.3.55) при условии $j_y = 0$:

$$j_x = \left[\sigma_0 + \beta_0 B_z^2 + \frac{(\gamma_0 B_z)^2}{\sigma_0 + \beta_0 B_z^2}\right] E_x. \qquad (4.4.1)$$

Обычно вместо электропроводности σ вводят удельное сопротивление ρ:

$$j_x = \frac{E_x}{\rho_B}. \qquad (4.4.2)$$

Индекс B обозначает зависимость от B_z. Относительное изменение удельного сопротивления $\Delta\rho/\rho_B = (\rho_B - \rho_0)/\rho_B$, где $\rho_0 = 1/\sigma_0$, находится из (4.4.1):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B} = -B_z^2\left[\frac{\beta_0}{\sigma_0} + \left(\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\right)^2\right] = T_M\left(\frac{e\langle\tau_m\rangle B_z}{m}\right)^2. \qquad (4.4.3)$$

Магниторезистивный коэффициент T_M, зависящий от механизма рассеяния, определяется выражением

$$T_M = \frac{\langle\tau_m^3\rangle\langle\tau_m\rangle - \langle\tau_m^2\rangle^2}{\langle\tau_m\rangle^4}. \qquad (4.4.4)$$

Если зависимость $\tau_m(\varepsilon)$ является степенной (4.2.8), то для T_M имеем

$$T_M = \frac{9\pi}{16} \frac{(3r + {}^3/_2)!\,(r + {}^3/_2)! - [(2r + {}^3/_2)!]^2}{[(r + {}^3/_2)!]^4}. \qquad (4.4.5)$$

Численное значение T_M лежит в интервале от 0,38 (при рассеянии на акустическом деформационном потенциале, когда $r = -{}^1/_2$) до 2,15 (при рассеянии на ионизованных примесях, когда $r = {}^3/_2$; очевидно, что T_M зависит от механизма рассеяния сильнее, чем холл-фактор r_H [см. (4.3.64) и (4.3.65)]. Если ввести дрейфовую подвижность $\mu = (e/m)\langle\tau_m\rangle$, правая часть выражения (4.4.3) примет вид $T_M(\mu B_z)^2$. Полученные результаты справедливы только при $(\mu B_z)^2 \ll 1$ [1]). Поэтому изменение сопротивления в магнитном поле пропорционально B_z^2 только до тех пор, пока $\Delta\rho \ll \rho_B$.

Зависимость j_x от E_x в сильном магнитном поле определяется из выражений (4.3.80) и (4.3.81):

$$j_x = \left(\sigma + \frac{\gamma^2 B_z^2}{\sigma}\right) E_x. \qquad (4.4.6)$$

Следовательно, для относительного изменения удельного сопротивления имеем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B} = 1 - \frac{1}{\sigma_0}\left(\sigma + \frac{\gamma^2 B_z^2}{\sigma}\right). \qquad (4.4.7)$$

В приближении сильного поля величина σ становится меньше, чем $\gamma^2 B_z^2/\sigma$, поэтому ею можно пренебречь. Подставим вместо σ и γ их значения из формул (4.3.76) и (4.3.77), полученных для случая сильного поля:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B} = 1 - \left[\langle\tau_m\rangle\langle\tau_m^{-1}\rangle\right]^{-1}. \qquad (4.4.8)$$

В случае уже упоминавшейся степенной зависимости $\tau_m(\varepsilon)$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B} = 1 - \frac{9\pi}{16\,(r + {}^3/_2)!\,({}^3/_2 - r)!}. \qquad (4.4.9)$$

Численные значения этой величины составляют 0,116 при $r = -1{,}2$ и 0,706 при $r = {}^3/_2$. При $r = 0$, когда τ_m не зависит от энергии и скобки усреднения можно опустить, магниторезистивный эффект отсутствует при любых значениях магнитного поля. Теперь понятно, почему магниторезистивный эффект в металлах ничтожно мал: вклад в проводимость дают только электроны,

[1]) Величина μB_z равна среднему от $\omega_c\tau_m$ по энергии, и в функции распределения $f(\varepsilon)$ последняя величина полагалась малой (см. текст после формулы (4.3.49)].

находящиеся вблизи поверхности Ферми. Они обладают почти одинаковой энергией и одинаковым значением τ_m, хотя для носителей в металле τ_m зависит от энергии. Тем не менее среднее от τ_m равно значению этой величины на поверхности Ферми, которое фактически является константой.

При низких температурах в сильных магнитных полях проявляются квантовые эффекты, приводящие к образованию уровней Ландау. В вырожденных полупроводниках наблюдаются осцилляции магнитосопротивления — эффект Шубникова — де Гааза, который рассматривается в гл. 9, § 2.

В собственных или почти собственных полупроводниках, а также в полуметаллах вклад в изменение сопротивления в магнитном поле дают оба типа носителей — электроны и дырки. Легко убедиться, что величины σ, γ и β должны заменяться суммами вкладов от носителей обоих типов, например $\sigma_n + \sigma_p$ и т. д. Опуская для краткости индекс 0, обозначающий случай слабого поля, для величины $\Delta\rho/(\rho_B B_z^2)$ получаем вместо (4.4.3)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = -\frac{\beta_p + \beta_n}{\sigma_p + \sigma_n} - \left(\frac{\gamma_p + \gamma_n}{\sigma_p + \sigma_n}\right)^2. \tag{4.4.10}$$

Поскольку σ_0 (4.3.40) и β_0 (4.3.51) содержат только четные степени заряда e, знаки σ_p и σ_n, а также β_p и β_n совпадают, в то время как знаки γ_p и γ_n противоположны [см. (4.3.45)]. Предполагая для простоты, что механизм рассеяния электронов и дырок один и тот же, из (4.4.10) получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = \frac{9\pi}{16}\left\{\frac{(3r+{}^3/_2)!}{[(r+{}^3/_2)!]^3}\,\frac{p\mu_p^3 + n\mu_n^3}{p\mu_p + n\mu_n} - \left[\frac{(2r+{}^3/_2)!}{[(r+{}^3/_2)!]^2}\,\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{p\mu_p + n\mu_n}\right]^2\right\}. \tag{4.4.11}$$

Введем, как обычно, отношение $b = \mu_n/\mu_p$. В случае собственного полупроводника ($n = p$) и рассеяния на акустическом деформационном потенциале ($r = -{}^1/_2$) получим из (4.4.11)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = \frac{9\pi}{16}\mu_p^2\left[\frac{1+b^3}{1+b} - \frac{\pi}{4}(1-b)^2\right] =$$

$$= \frac{9\pi}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\mu_p^2\left(1 + \frac{\pi/2-1}{1-\pi/4}\,b + b^2\right). \tag{4.4.12}$$

При больших значениях b последнее выражение удобно переписать в виде

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = \frac{9\pi}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\mu_n^2\left[1 + \frac{\pi/2-1}{1-\pi/4}\,b^{-1} + b^{-2}\right]. \tag{4.4.13}$$

Сопоставление двух последних выражений приводит к следующему результату: гальваномагнитные эффекты, такие, как маг-

ниторезистивный эффект, определяются носителями с большей подвижностью.

В случае полуметаллов, когда процедурой усреднения можно пренебречь, $9\pi/16$ и $\pi/4$ можно заменить на единицу. Тогда из (4.4.12) следует

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = \mu_n \mu_p. \tag{4.4.14}$$

Такое поведение сопротивления в магнитном поле было обнаружено в полуметаллах, например в висмуте, и в вырожденных собственных полупроводниках. Наблюдаемый эффект по величине на несколько порядков больше, чем в металлах с только *одним* типом носителей. До появления приборов, в которых применяется антимонид индия, для измерений магнитного поля использовались спирали из висмута.

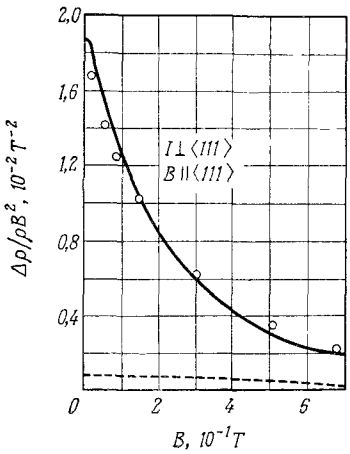
Многие полупроводники p-типа содержат тяжелые и легкие дырки (обозначаемые индексами h и l). Оба сорта дырок дают вклад в электропроводность. В отличие от случая почти собственного полупроводника все носители обладают зарядом одного знака. Отношение подвижностей μ_l/μ_h обозначим через b, а отношение концентраций p_l/p_h — через η. Предполагая вновь степенную зависимость $\tau_m(\varepsilon)$ с показателем $r = -1/2$, получаем для относительного изменения сопротивления в магнитном поле

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_B B_z^2} = \frac{9\pi}{16}\mu_p^2\left[\frac{1+\eta b^3}{1+\eta b} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{1+\eta b^2}{1+\eta b}\right)^2\right], \tag{4.4.15}$$

где $\mu_p \equiv \mu_h$ — подвижность большинства дырок. Например, в германии p-типа $b = 8$ и $\eta = 4\%$, что для выражения в фигурных скобках дает значение 10,6 вместо $1 - \pi/4 \approx 0{,}215$ при $\eta = 0$. Следовательно, если среди 25 дырок хотя бы только одна является легкой, значение $\Delta\rho$ возрастает почти в 50 раз. При $\eta = 0$ подобный эффект достигается только увеличением напряженности поля B_z почти в 7 раз. Электропроводность σ и коэффициент Холла R_H содержат более низкие степени b и поэтому менее чувствительны к вкладу легких дырок (σ увеличивается в 1,3 раза, а R_H — в 2 раза). На фиг. 4.5 представлены экспериментальные кривые $\Delta\rho/\rho_B B_z^2$, полученные для германия p-типа при 205 К и ориентации магнитного поля **B** вдоль направления $\langle 111\rangle$. При количественном анализе необходимо учитывать анизотропию эффективной массы [8]. Штриховая линия на фиг. 4.5 изображает вклад тяжелых дырок. Из наблюдаемого значения холловской подвижности $\sim 10^3$ см^2/(В·с) следует, что в рамках модели с одним сортом носителей сопротивление в магнитном поле должно быть постоянным вплоть до полей порядка 1 Т. Именно вклад легких дырок, существенный в

магниторезистивном эффекте и относительно малый в эффекте Холла, приводит к тому, что сопротивление сильно зависит от магнитного поля, хотя все еще $(\mu_H B_z)^2 \ll 1$. Более подробно об этом см. в гл. 8, § 3.

Величина $\Delta\rho/\rho_B B_z^2$ положительна в пределах применимости функции распределения (4.3.37), так как сила Лоренца отклоняет носители от направления тянущего поля, а скорость дрейфа определяется только компонентой скорости в направлении этого поля. Отрицательный магниторезистивный эффект большей частью наблюдается в случае горячих носителей тока (см. гл. 7, § 6).



Фиг. 4.5. Поперечный магниторезистивный эффект в p-Ge при 205 K ($B\parallel\langle 111\rangle$) [8].
Экспериментальные значения. Штриховая кривая вычислена без учета легких дырок, обладающих высокой подвижностью.

Продольный магниторезистивный эффект, когда векторы **B** и **F** параллельны в (4.3.37), исчезает ($\Delta\rho = 0$), если m^{-1}, τ_m и α — скалярные величины. Случай неисчезающего продольного магниторезистивного эффекта будет рассмотрен в гл. 7, § 4 и гл. 8, § 3.

§ 5. Диск Корбино

Измерения поперечного магниторезистивного эффекта следует проводить на длинных нитевидных образцах, так как в противном случае появляется «геометрический» вклад в изменение сопротивления в магнитном поле. Последний максимален для образца в форме диска с отверстием в центре, когда контакты расположены в отверстии и на периферии диска. Магнитное поле направлено перпендикулярно этому образцу, называемому диском Корбино [9, 10]. Такое устройство схематически изображено на фиг. 4.6.

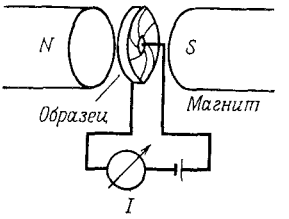
Относительное изменение сопротивления диска под влиянием магнитного поля определяется выражением

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{\mu_H^2 B_z^2}{1 + (\Delta\rho/\rho_0)}, \qquad (4.5.1)$$

где $\Delta\rho/\rho_0$ — относительное изменение удельного сопротивления нитевидного образца, выполненного из того же материала, а

μ_H — холловская подвижность. Например, в n-InSb при комнатной температуре в поле 1 Т $\Delta R/R_0 = 17{,}7$, в то время как величина $\Delta\rho/\rho_0$ составляет только 0,48. При увеличении напряженности поля величина $\Delta R/R_0$ не достигает насыщения, благодаря чему данное устройство применимо для измерения напряженности сильных магнитных полей. (В условиях эксперимента наблюдается почти линейная зависимость ΔR от B_z.)

На фиг. 4.6 показаны также линии тока в образце. Вследствие радиальной симметрии электрическое поле **E** имеет только радиальную составляющую. Следовательно, E_y обращается



Фиг. 4.6. Устройство Корбино.
Кривые между центральным отверстием и периферией образца указывают направление тока.

в нуль в направлении x. Однако в противоположность магниторезистивному эффекту в нитевидном образце компонента плотности тока j_y не равна нулю. Поэтому удельное сопротивление определяется не отношением E_x/j_x, а выражением

$$\rho_0 + \Delta\rho = \rho_B = \frac{(\mathbf{Ej})}{j^2} = \frac{E_x j_x}{j_x^2 + j_y^2}. \tag{4.5.2}$$

Полагая $E_y = E_z = B_x = B_y = 0$, из (4.3.44) и (4.3.45) получаем выражения для компонент плотности тока

$$j_x = \frac{ne^2}{m}\langle Z\tau_m\rangle E_x, \quad j_y = -\frac{ne^3}{m^2}\langle Z\tau_m^2\rangle B_z E_x, \tag{4.5.3}$$

где

$$Z = \frac{1}{1 + \omega_c^2\tau_m^2}. \tag{4.5.4}$$

Из (4.5.2) находим удельное сопротивление в магнитном поле

$$\rho_B = \frac{m\langle Z\tau_m\rangle}{ne^2\left(\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2\right)}. \tag{4.5.5}$$

Отношение ρ_B к удельному сопротивлению в отсутствие магнитного поля

$$\rho_0 = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{m}{ne^2\langle\tau_m\rangle} \tag{4.5.6}$$

определяется выражением

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\langle\tau_m\rangle\langle Z\tau_m\rangle}{\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2}. \qquad (4.5.7)$$

С другой стороны, определяя с помощью (4.3.83) коэффициент Холла R_H, получаем выражение для произведения $\mu_H B_z$:

$$\mu_H B_z = \frac{R_H B_z}{\rho_0} = \frac{m\langle Z\tau_m^2\rangle\omega_c}{ne^2\left(\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2\right)} \frac{ne^2\langle\tau_m\rangle}{m}. \qquad (4.5.8)$$

Тогда

$$1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{(\mu_H B_z)^2}{1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}} = \frac{\langle\tau_m\rangle\langle Z\tau_m\rangle}{\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2} +$$

$$+ \frac{\langle Z\tau_m^2\rangle^2\omega_c^2\langle\tau_m\rangle^2}{\langle\tau_m\rangle\langle Z\tau_m\rangle\left[\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2\right]} = \frac{\langle\tau_m\rangle}{\langle Z\tau_m\rangle^2 + \omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2} \times$$

$$\times\left\{\langle Z\tau_m\rangle + \frac{\omega_c^2\langle Z\tau_m^2\rangle^2}{\langle Z\tau_m\rangle}\right\} = \frac{\langle\tau_m\rangle}{\langle Z\tau_m\rangle}. \qquad (4.5.9)$$

Полученное выражение определяет отношение сопротивлений R_B/R_0, где $R_B = (E_x/j_x)_B$. Используя формулу (4.5.3), находим

$$\frac{R_B}{R_0} = \frac{\langle Z\tau_m\rangle^{-1}}{\langle\tau_m\rangle^{-1}} = \frac{\langle\tau_m\rangle}{\langle Z\tau_m\rangle}. \qquad (4.5.10)$$

Обозначая через ΔR разность $R_B - R_0$ из (4.5.9) и (4.5.10) получаем (4.5.1).

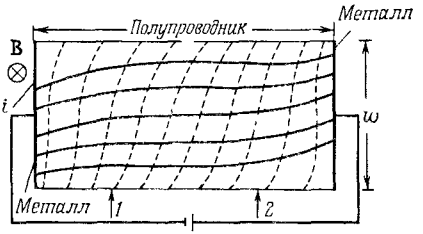
Если разрешить (4.5.1) относительно μ_H и в полученное выражение подставить приведенные выше экспериментальные значения для InSb при $B_z = 1$ Т, то мы получим

$$\mu_H = \frac{1}{B_z}\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)\left(\frac{\Delta R}{R_0} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)} =$$

$$= 10^4\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})\sqrt{1{,}48\cdot 17{,}2} = 50\,500\ \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с}). \qquad (4.5.11)$$

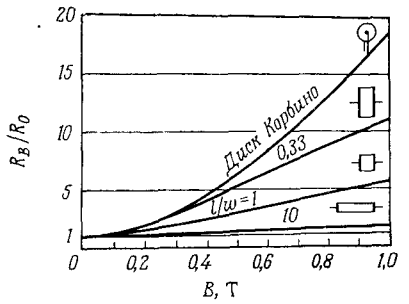
При $B_z = 0{,}1$ Т экспериментальные значения таковы: $\Delta\rho/\rho_0 = 0{,}014$ и $\Delta R/R_0 = 0{,}25$. При столь малой напряженности поля произведение $\mu_H B_z$ становится равным просто $\sqrt{\Delta R/R_0}$, в то время как для нитевидного образца это произведение было бы равно величине $r_H\sqrt{\Delta\rho/\rho_B T_M}$, содержащей среднее от $\tau_m(\varepsilon)$. Поэтому, если известно сопротивление диска Корбино в слабом поле, то можно определить холловскую подвижность в слабом поле (в отличие от случая магниторезистивного эффекта).

Второе слагаемое в правой части выражения (4.5.1) иногда называют геометрическим вкладом в изменение сопротивления в магнитном поле. Существует другой, хотя и меньший по величине вклад, который можно найти, если обычным образом измерить изменение сопротивления в магнитном поле не длинного и узкого, а короткого и толстого образца. На фиг. 4.7 показаны линии тока и эквипотенциальные линии для такого случая. В непосредственной близости от контактов образца линии



Фиг. 4.7. Линии тока (сплошные) и эквипотенциальные линии (штриховые) в прямоугольном образце, помещенном в магнитное поле, направление которого перпендикулярно плоскости фигуры (*1* и *2* — электрические зонды) [11].

тока не параллельны оси последнего, поскольку поверхность контакта закорачивает поле Холла. На фиг. 4.8 [10] представлена зависимость отношения сопротивлений от B_z при различных значениях отношения длины образца l к его ширине ω.



Фиг. 4.8. Относительное сопротивление четырех образцов из *n*-InSb одинаковой чистоты, но различной геометрии в зависимости от напряженности магнитного поля [10].

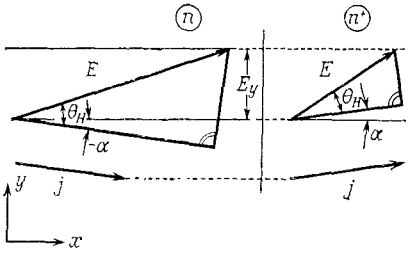
Для сравнения приведены также данные для диска Корбино. Геометрический вклад в изменение сопротивления в магнитном поле существен только в полупроводниках с большой подвижностью.

§ 6. Магниторезистивный эффект в неоднородных образцах

Часто полупроводники являются неоднородно легированными. Эти неоднородности оказывают сильное влияние на изменения сопротивления в магнитном поле. Как они образуются? Процессы, приводящие к неоднородному легированию, все еще изучаются. Когда монокристалл вытягивается из расплава

в устройстве Чохральского, в зависимости от скорости вытягивания образуются области с большей или меньшей степенью легирования. Эти области называются «страты»; они похожи на годичные кольца в дереве [12, 13]. В направлении, перпендикулярном направлению вытягивания, относительное изменение сопротивления в магнитном поле $\Delta R/R_0$ может составлять лишь одну десятую значения $\Delta R/R_0$ в направлении вытягивания [14].

Это явление можно объяснить тем, что линии тока, попадая в область с другим значением концентрации носителей, обусловленным другой степенью легирования, отклоняются от своего первоначального направления [15, 16]. На фиг. 4.9 показан



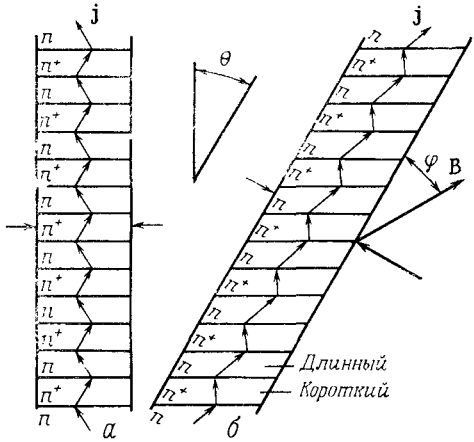
Фиг. 4.9. Поворот линий тока в поперечном магнитном поле на угол α, обусловленный разрывом в степени легирования [11].

переход из области кристалла с проводимостью почти n-типа (обозначенной n) в область с большей степенью легирования (обозначенной n^+). Для простоты холловская подвижность предполагается не зависящей от n и $\mathbf{B}$. Система координат выбрана таким образом, чтобы ось x была перпендикулярна плоскости $n - n^+$-барьера. Составляющая поля $E_x = j_x/(ne\mu)$ пропорциональна $1/n$, так как ток j_x протекает через кристалл под действием приложенного извне напряжения и поэтому имеет одно и то же значение в обеих частях кристалла. Поле E_x не меняется по сечению кристалла, что можно записать в виде $\partial E_x/\partial y = 0$. Поскольку магнитное поле не зависит от времени, из уравнения Максвелла $\mathrm{rot}_z \mathbf{E} = 0$ следует $\partial E_y/\partial x = 0$. Это означает, что поле Холла имеет одно и то же значение в обеих частях кристалла. Поэтому направление $\mathbf{E}$ в разных областях на фиг. 4.9 различно. Однако угол Холла θ_H, который определяется соотношением $\mathrm{tg}\,\theta_H = \mu_H B_z$, остается неизменным, поскольку подвижность μ_H полагается постоянной. С другой стороны, выполняющееся в однородном кристалле равенство $\mathrm{tg}\,\theta_H = E_y/E_x$ здесь не имеет места. Однако если определить θ_H как угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$:

$$\mathrm{tg}\,\theta_H = \frac{|[\mathbf{jE}]|}{(\mathbf{jE})}, \qquad (4.6.1)$$

то такое определение справедливо как в случае, показанном на фиг. 4.9, так и в однородном кристалле, где $|\mathbf{j}| = j_x$ и поэтому

$\operatorname{tg}\theta_H = E_y/E_x$. Вследствие наличия магнитного поля линии тока j на фиг. 4.9 отклоняются по обе стороны барьера на один и тот же угол α, но в разные стороны. На фиг. 4.10 показан случай чередующихся n- и n^+-областей. В левой части фигуры барьеры перпендикулярны направлению вектора средней плотности тока, в то время как в правой части они расположены под углом к последнему.



Фиг. 4.10. Линии тока в поперечном магнитном поле, когда направление средней плотности тока перпендикулярно плоскости $n - n^+$-перехода (*а*) или составляет с ней острый угол (*б*) [11].

Херринг [15] не учитывал в своих вычислениях зависимость времени релаксации импульса от энергии ($\tau_m = \text{const}$) и тем не менее получил относительное изменение сопротивления в магнитном поле в следующем виде:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{1}{\langle n\rangle\langle n^{-1}\rangle}\right) - \frac{\mu_H^2 B^2 \sin^2\varphi}{1 + \mu_H^2 B^2 \cos^2\varphi}, \qquad (4.6.2)$$

где $\langle n\rangle$ и $\langle n^{-1}\rangle$ — усредненные по всему объему кристалла значения n и $1/n$, а φ — угол между средней плотностью тока и магнитным полем. Предположим для простоты, что $\langle n\rangle = (n + n^+)/2$ и $\langle n^{-1}\rangle = (1/n + 1/n^+)/2$. В этом случае имеем

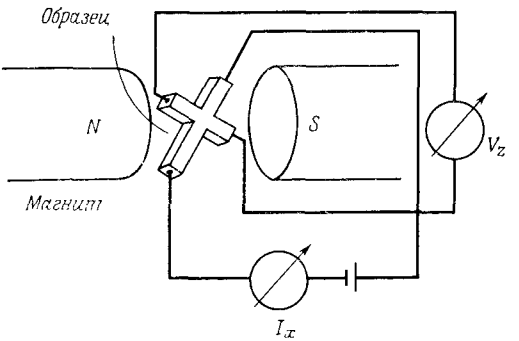
$$1 - \frac{1}{\langle n\rangle\langle n^{-1}\rangle} = 1 - \frac{4nn^+}{(n^+ + n)^2} = \left(\frac{n^+ - n}{n^+ + n}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{(\Delta n)^2}{\langle n\rangle^2}, \qquad (4.6.3)$$

где $\Delta n = n^+ - n$ и $\langle n\rangle = (n^+ + n)/2$. Изменяя значение n на 10%, получаем изменение вычисленного значения на 0,25%. Разница в легировании будет большей, так как Δn сглаживается тепловой диффузией носителей.

Если страты не параллельны друг другу, то в объеме кристалла направление средней плотности тока и, следовательно, угол φ могут меняться. Чтобы сделать эти страты видимыми на поверхности кристалла, обычно используется метод окрашивания их медью из раствора соли меди. При гальваническом процессе области с большей плотностью числа носителей покрываются медью в большей степени [12, 13].

§ 7. Планарный эффект Холла

При исследовании эффекта Холла боковые отростки обычно ориентированы перпендикулярно магнитному полю. В устройстве, показанном на фиг. 4.11, дело обстоит иначе. Если ось x



Фиг. 4.11. Устройство для исследования планарного эффекта Холла.

по-прежнему направлена вдоль тока, а ось z параллельна боковым отросткам, то вектор магнитной индукции **B** имеет две составляющие B_x и B_z в обоих направлениях. Планарный эффект Холла заключается в появлении компоненты поля

$$E_z = P_H j_x B_x B_z, \tag{4.7.1}$$

где P_H — планарный коэффициент Холла, измеряемый в $см^5/(Вт \cdot с^2)$. Наблюдаемое напряжение

$$V_z = \frac{P_H I_x B_x B_z}{d}, \tag{4.7.2}$$

где d — толщина образца в направлении, перпендикулярном **B**; это напряжение максимально при $B_x = B_z = B/\sqrt{2}$, когда угол между **B** и **j** равен 45°:

$$V_z = \frac{P_H I_x B^2}{2d}. \tag{4.7.3}$$

Тот факт, что V_z пропорционально B^2, сразу наводит на мысль о возможной связи с магниторезистивным эффектом.

Для вычисления P_H в слабом поле воспользуемся выражениями для компонент плотности тока через тензор электропроводности (4.3.53), в котором положим $B_y = 0$:

$$\begin{aligned} j_x &= (\sigma_0 + \beta_0 B_z^2) E_x + \gamma_0 B_z E_y - \beta_0 B_x B_z E_z, \\ j_y &= -\gamma_0 B_z E_x + (\sigma_0 + \beta_0 B_x^2 + \beta_0 B_z^2) E_y + \gamma_0 B_x E_z, \\ j_z &= -\beta_0 B_x B_z E_x - \gamma_0 B_x E_y + (\sigma_0 + \beta_0 B_x^2) E_z. \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

Поля E_x и E_y найдем из условий $j_y = 0$ и $j_z = 0$; полученные значения подставим в уравнение для j_x, пренебрегая в последнем членами, содержащими B в степени выше второй. Полученное уравнение решим относительно E_z:

$$E_z = \frac{\sigma_0 \beta_0 + \gamma_0^2}{\sigma_0^3} j_x B_x B_z. \tag{4.7.5}$$

Сравнивая полученное выражение с (4.7.1), определим P_H:

$$P_H = \frac{1}{\sigma_0}\left[\frac{\beta_0}{\sigma_0} + \left(\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\right)^2\right]. \tag{4.7.6}$$

Подставляя сюда удельное сопротивление $\rho_0 = 1/\sigma_0$ и поперечное относительное изменение сопротивления в поперечном магнитном поле из (4.4.3), убеждаемся в том, что между планарным эффектом Холла и магниторезистивным эффектом существует следующая связь:

$$P_H = -\frac{\rho_0 \Delta\rho}{\rho_B B^2}. \tag{4.7.7}$$

Оценим порядок величины планарного поля Холла E_z по отношению к полю Холла, определяемому выражениями (4.3.2) и (4.3.59); при этом мы пренебрежем множителями r_H и T_M. В результате $\Delta\rho/\rho_B B^2$ оказывается равным квадрату подвижности. Таким образом, E_z меньше поля Холла E_y в $\mu_H B_x$ раз, что в приближении слабого магнитного поля много меньше единицы. Планарный эффект Холла представляет больший интерес в случае многодолинной модели полупроводника; для этого случая он будет исследован более подробно (гл. 7, § 4).

§ 8. Теплопроводность, число Лоренца, сравнение с металлами

Кроме электрического заряда носители переносят также энергию. Если в образце создать градиент температуры $\nabla_r T$, то в нем возникает поток тепла, плотность которого $\mathbf{w}$ в отсутствие

электрического тока определяется величиной удельной теплопроводности $\varkappa$:

$$\mathbf{w} = -\varkappa \nabla_r T. \tag{4.8.1}$$

В металлах, где практически вся тепловая энергия переносится электронами проводимости, возникает электрическое поле, которое противодействует движению носителей со средней скоростью в направлении градиента температуры. Это поле называется термоэлектрическим полем. Поскольку, согласно распределению Ферми — Дирака, всегда имеются носители, скорость которых выше средней скорости в этом направлении, они переносят часть энергии, пропорциональную плотности носителей и их подвижности и, следовательно, пропорциональную электропроводности σ. Отношение

$$L = \frac{\varkappa}{\sigma T} \tag{4.8.2}$$

называется числом Лоренца. Его значение, вычисленное для сильно вырожденного электронного газа [1],

$$L = \frac{(\pi k_B)^2}{3e^2} = 2{,}45 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт} \cdot \text{Ом/К}^2, \tag{4.8.3}$$

для большинства металлов при комнатной температуре с точностью до 10% совпадает с экспериментально найденным. Независимость L от температуры составляет содержание закона Видемана — Франца. Поскольку для металлов в хорошем приближении $\sigma \sim 1/T$, величина $\varkappa$ почти не меняется с температурой.

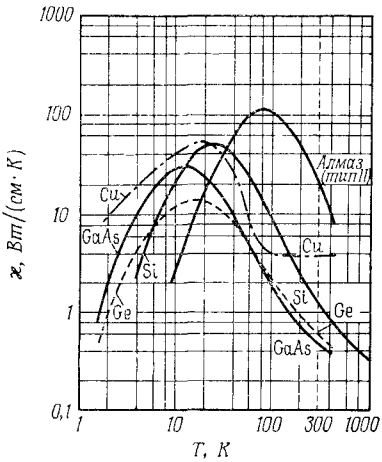
Наибольшее значение σ имеет серебро; для него при 273 К $\varkappa = 4{,}33$ Вт/(см·К), что приблизительно равно 1 кал/(см·с·К). Хотя обычно теплота измеряется в калориях (1 кал = =4,19 Вт·с), мы предпочитаем пользоваться электрическими единицами. Для кремния экспериментальное значение $\varkappa$ составляет 1,4 Вт/(см·К) (фиг. 4.12), что почти в три раза меньше, чем для серебра, хотя в первом концентрация носителей на много порядков меньше. Теплопроводность существует даже в диэлектриках. Она полностью обусловлена переносом энергии тепловыми колебаниями решетки. Теорию этого процесса [2] мы не будем рассматривать. Следует лишь отметить, что в системе связанных гармонических осцилляторов взаимодействие между колебаниями решетки отсутствует и, следовательно, переноса энергии нет. Именно ангармонизм решетки вызывает теплопро-

[1] Значения интервалов, появляющихся в теории сильно вырожденного электронного газа, приведены, например, в работе [17].

[2] Обзор литературы по этому вопросу см. в работе [19].

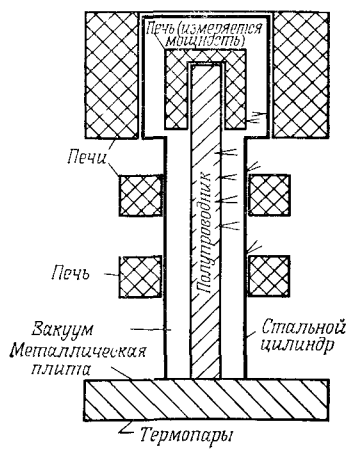
водность в диэлектриках при высоких температурах. Например, то обстоятельство, что германий имеет несколько изотопов, играет важную роль в его решеточной теплопроводности [20].

В невырожденных полупроводниках вклад решетки в теплопроводность почти всегда на несколько порядков больше вклада электронов. Поэтому мы не будем вычислять вклад электронов и ограничимся лишь обсуждением результатов. Предварительно мы рассмотрим типичное экспериментальное устройство и ряд опытных данных.



Фиг. 4.12. Экспериментальная температурная зависимость теплопроводности различных полупроводников высокой чистоты (по данным Карузерса и др., Холланда, Уайта, Бермана и др.); для сравнения приведена температурная зависимость удельной теплопроводности меди [18].

Методика измерения величины $\varkappa$ была предложена, в частности, Вейссом [21] и Шрёдером [22] (в интервале температур 297—452 К). На фиг. 4.13 показана система Вейсса. Верхний конец нитевидного образца круглого сечения помещен в небольшую электрическую печь. Измеряется мощность, потребляемая этой печью. Нижний конец образца охлаждается металлической плитой. Чтобы избежать конвекции, все устройство помещается в вакуумную камеру (10^{-4} мм рт. ст.). Во избежание потерь на излучение на камере

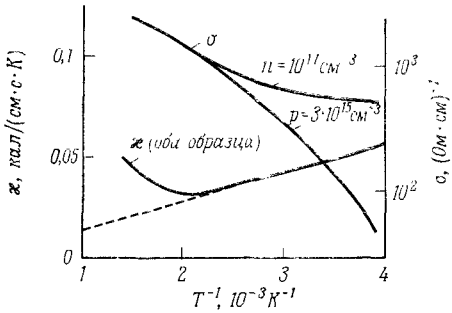


Фиг. 4.13. Устройство, используемое для измерения удельной теплопроводности [21].

установлены три добавочные печи, в которых поддерживается та же температура, что и на прилегающем участке поверхности образца. Температура измеряется с помощью термопар (на фиг. 4.13 они обозначены $<$). Точность определения $\varkappa$

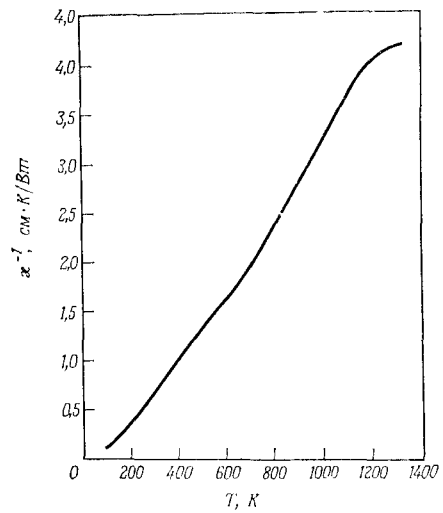
составляет 10% при обычных и 20% при высоких температурах.

На фиг. 4.14 представлены результаты [21], полученные для InSb n- и p-типа. Удельная теплопроводность $\varkappa$ не зависит от



Фиг. 4.14. Зависимости удельной электропроводности и удельной теплопроводности n- и p-InSb от обратной температуры [27].

типа легирования. Решеточный вклад в $\varkappa$ (штриховая кривая) приближенно пропорционален $1/T$. Электронный вклад становится заметным лишь при температурах выше 500 К и с точностью до численного множителя, равного 2, согласуется со значением, вычисленным для собственного полупроводника (см. ниже).



Фиг. 4.15. Температурная зависимость удельного теплового сопротивления кремния [23].

На фиг. 4.15 приведена экспериментальная зависимость удельного теплового сопротивления $1/\varkappa$ от температуры для чистого кремния [23]. В первом приближении $1/\varkappa$ пропорционально T, т. е. $\varkappa \sim 1/T$, что характерно для решеточной теплопроводности.

Удельная теплопроводность теллурида висмута Bi_2Te_3 при комнатной температуре составляет 0,024 Вт/(см·К), а электропроводность при соответствующем легировании равна 10^3 (Ом·см)$^{-1}$. Низкое значение $\varkappa$ и высокое значение σ на-

ряду с возможностью получения этого материала с *n*- и *p*-типом проводимости представляют большой интерес с точки зрения создания термоэлектрических охлаждающих систем и преобразователей энергии. Число Лоренца для этого соединения $L = 8 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом/К^2 того же порядка, что и для металлов (4.8.3). Поскольку при указанном значении σ это соединение является вырожденным, сравнение его с металлом в указанном смысле является оправданным и позволяет заключить, что электронный вклад в теплопроводность Bi_2Te_3 составляет около 30%.

В заключение рассмотрим результаты вычисления L для невырожденных полупроводников. Если ограничиться только электронным вкладом в $\varkappa$ и для $\tau_m(\varepsilon)$ предположить степенную зависимость $\tau_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^r$, то мы получим

$$L = \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \left(r + \frac{5}{2}\right), \qquad (4.8.4)$$

что отличается от (4.8.3) только множителем $(r + 5/2)$ вместо $\pi^2/3$. При рассеянии на акустическом деформационном потенциале ($r = -1/2$) последний множитель в (4.8.4) равен 2, в то время как $\pi^2/3 \approx 3{,}29$. Очевидно, что вырождение не меняет порядок величины L.

Для собственного или почти собственного невырожденного полупроводника L принимает значение [1])

$$L = \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \left\{\left(r + \frac{5}{2}\right) + \left[2\left(r + \frac{5}{2}\right) + \frac{\varepsilon_G}{k_B T}\right]^2 \frac{\sigma_n \sigma_p}{\sigma^2}\right\}, \qquad (4.8.5)$$

где для электронов и дырок предполагается один и тот же механизм рассеяния, а σ_n и σ_p — электронный и дырочный вклады в электропроводность $\sigma = \sigma_n + \sigma_p$. В случае собственной проводимости $\sigma_n \sigma_p / \sigma^2 = b/(1 + b)^2$, где $b = \mu_n/\mu_p$. Слагаемое, содержащее ширину запрещенной зоны ε_G, обусловлено генерацией электронно-дырочных пар у горячего края образца и рекомбинацией у холодного края. Кроме кинетической энергии каждая пара переносит еще энергию ε_G. В бесщелевом собственном полупроводнике с равными подвижностями электронов и дырок [2]) ($b = 1$) только кинетическая энергия преобразуется в тепло. Этот факт учитывается слагаемым $(r + 5/2)^2$ в дополнение к однозонному члену $(r + 5/2)$. Для собственных полупроводников с большой шириной запрещенной зоны (что имеет место только при высоких температурах) амбиполярная часть L и, следовательно, $\varkappa$ будет относительно большой, хотя

[1]) Вычисления см. в работе [24].

[2]) В этом случае термоэлектрическое поле отсутствует, так как электроны и дырки, двигаясь с одинаковой скоростью, нейтрализуют друг друга.

и много меньшей решеточного значения. Это имеет место, например, в кремнии при 800 К, для которого значение $\varkappa$, вычисленное с помощью (4.8.5) и (4.8.2), составляет 10^{-3} Вт/(см·К), тогда как экспериментальное значение $\varkappa$ оказывается более чем на два порядка выше [$4 \cdot 10^{-1}$ Вт/(см·К)].

Последнее замечание относительно скорости потока тепла. Одномерное уравнение непрерывности для плотности потока энергии w имеет вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_v T), \tag{4.8.6}$$

где c_v — удельная теплоемкость на единицу массы, ρ — плотность и ρc_v — удельная теплоемкость на единицу объема. С учетом (4.8.1) получим уравнение диффузии

$$\frac{\varkappa}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4.8.7}$$

в котором можно ввести коэффициент диффузии температуры

$$D_T = \frac{\varkappa}{\rho c_v}. \tag{4.8.8}$$

Например, для кремния при комнатной температуре последний имеет значение

$$D_T = \frac{1{,}4 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}}{2{,}33 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \cdot 0{,}76 \text{ Вт} \cdot \text{с/(г} \cdot \text{К)}} = 0{,}79 \text{ см}^2/\text{с}. \tag{4.8.9}$$

[Произведение ρc_v имеет также смысл отношения удельной теплоемкости на 1 моль к молярному объему; в твердых телах, согласно закону Дюлонга — Пти, последняя величина равна 25 Вт·с/(моль·К), что может быть полезным при оценках D_T.]

Периодическое решение уравнения (4.8.7) имеет вид

$$T \sim \exp\left(-\frac{x}{l}\right)\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \tag{4.8.10}$$

где ω — угловая частота, $v = \sqrt{2D_T\omega}$ и $l = \sqrt{2D_T/\omega}$ — скорость и длина температурной волны. С ростом частоты скорость волны возрастает, но не беспредельно. При заданном минимальном значении l максимальная частота $\nu = D_T/\pi l^2$. Так, в кремниевом образце с $l = 1$ мм $\nu = 25$ Гц, а период волны $1/\omega \approx 6 \cdot 10^{-3}$ с. В противоположность этим медленным температурным волнам акустические колебания решетки распространяются в твердых телах со скоростью порядка 10^5 см/с, которая почти не зависит от частоты. Именно медленностью температурных волн объясняется столь малый интерес к ним в современной электронике, в то время как акустоэлектрические эффекты в последние годы привлекают к себе все большее внимание.

§ 9. Термоэлектрический эффект (явление Зеебека)

Вычислим термоэлектрическое поле, о котором шла речь в предыдущем параграфе. При решении уравнения Больцмана, чтобы учесть градиент температуры, мы ввели электротермическое поле **F** (4.3.19). Поскольку **F** зависит от энергии носителей ε при вычислении плотности тока **j**, мы не вправе выносить эту величину из-под знака интеграла; тогда

$$\mathbf{j} \sim \langle \tau_m e\mathbf{F} \rangle = e\mathbf{E}\langle \tau_m \rangle + T\left\langle \tau_m \nabla_r \left(\frac{\varepsilon - \zeta}{T} \right) \right\rangle. \tag{4.9.1}$$

Поскольку имеется произвол в выборе начала отсчета энергии, введем кинетическую энергию электрона

$$\varepsilon_n = \varepsilon - \varepsilon_c, \tag{4.9.2}$$

которая обращается в нуль на дне зоны проводимости, а также кинетическую энергию дырок

$$\varepsilon_p = -(\varepsilon - \varepsilon_v), \tag{4.9.3}$$

которая обращается в нуль у потолка валентной зоны. Удобно также перенормировать энергии Ферми, положив

$$\zeta_n = \zeta - \varepsilon_c, \tag{4.9.4}$$

$$\zeta_p = -(\zeta - \varepsilon_v). \tag{4.9.5}$$

В невырожденных полупроводниках уровень Ферми расположен внутри запрещенной зоны, поэтому как ζ_n, так и ζ_p отрицательны ($\zeta_n + \zeta_p = -\varepsilon_G$). Вычитая (4.9.4) из (4.9.2), получаем

$$\varepsilon_n - \zeta_n = \varepsilon - \zeta. \tag{4.9.6}$$

Аналогично из (4.9.3) и (4.9.5) следует

$$-(\varepsilon_p - \zeta_p) = \varepsilon - \zeta. \tag{4.9.7}$$

В дальнейшем для простоты индексы n и p, а также знак минус перед выражением $(\varepsilon_p - \zeta_p)$ будут опускаться, за исключением тех случаев, когда речь будет идти о совместной проводимости электронов и дырок.

Для вычисления термоэлектрического поля **E** рассмотрим случай разомкнутой цепи, когда через проводник не течет электрический ток. Из (4.9.1) при $\mathbf{j} = 0$ следует

$$e\mathbf{E} = -\frac{T}{\langle \tau_m \rangle}\left\langle \tau_m \nabla_r \frac{\varepsilon - \zeta}{T} \right\rangle = \frac{1}{T}\left(\frac{\langle \tau_m \varepsilon \rangle}{\langle \tau_m \rangle} - \zeta \right) \nabla_r T + \nabla_r \zeta. \tag{4.9.8}$$

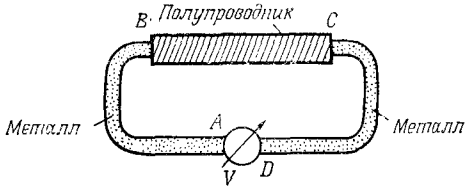
Введем понятие энтропии переноса S/e [25]:

$$\frac{S}{e} = \frac{1}{eT}\left(\frac{\langle \tau_m \varepsilon \rangle}{\langle \tau_m \rangle} - \zeta \right), \tag{4.9.9}$$

которую не следует смешивать с энтропией, фигурировавшей в гл. 3. Тогда уравнение (4.9.8) принимает вид

$$e\mathbf{E} = S\nabla_{\mathbf{r}}T + \nabla_{\mathbf{r}}\zeta. \qquad (4.9.10)$$

На фиг. 4.16 приведена принципиальная схема измерения термоэлектрического поля $\mathbf{E}$. На обоих концах нитевидного образца B и C расположены одинаковые металлические контакты, на которых поддерживаются различные температуры T_B и T_C.



Фиг. 4.16. Устройство для измерения эффекта Зеебека.

В цепь включен вольтметр. Напряжение V, которое регистрирует вольтметр, определяется выражением

$$V = \int_A^D (\mathbf{E}\, d\mathbf{r}) = \frac{1}{e}\int_A^D S(\nabla_{\mathbf{r}}T\, d\mathbf{r}) + \frac{1}{e}\int_A^D (\nabla_{\mathbf{r}}\zeta\, d\mathbf{r}). \qquad (4.9.11)$$

Предполагается, что зажимы вольтметра A и D поддерживаются при одинаковой температуре и выполнены из одного и того же металла. Поэтому второй интеграл, значение которого есть $[\zeta(D) - \zeta(A)]/e$, обращается в нуль, и выражение (4.9.11) принимает вид

$$V = \frac{1}{e}\int_A^D S(\nabla_{\mathbf{r}}T\, d\mathbf{r}). \qquad (4.9.12)$$

Контур интегрирования от A до D разобьем на следующие участки: от B до C, относящийся к исследуемому полупроводнику; от A до B и от C до D, относящиеся к металлу. Поскольку участок интегрирования, проходящий через вольтметр, не дает вклада в результат интегрирования, последние два участка можно объединить в один участок от C до B и изменить в нем направление интегрирования на обратное. В результате получим

$$V = \frac{1}{e}\int_{T_B}^{T_C} (S\, dT)_{\text{полупроводник}} - \frac{1}{e}\int_{T_B}^{T_C} (S\, dT)_{\text{металл}}. \qquad (4.9.13)$$

Это выражение определяет термо-э. д. с. термопары, состоящей из полупроводника и металла. Данный эффект носит название

явления Зеебека. Введем понятие дифференциальной термо-э. д. с вещества $d\Theta/dT$:

$$\frac{d\Theta}{dT} = \frac{S}{e} = \frac{k_B}{e}\left(\frac{\left\langle \tau_m \frac{\varepsilon}{k_B T}\right\rangle}{\langle \tau_m \rangle} - \frac{\zeta}{k_B T}\right), \tag{4.9.14}$$

где $k_B/|e| \approx 86$ мкВ/К [1]).

Абсолютная термо-э. д. с. Θ как функция температуры T определяется выражением

$$\Theta = \frac{1}{e}\int_0^T S\, dT. \tag{4.9.15}$$

Из (4.9.13) получаем V, выраженное через $\Theta(T)$:

$$V = [\Theta(T_C) - \Theta(T_B)]_{\text{полупроводник}} - [\Theta(T_C) - \Theta(T_B)]_{\text{металл}}. \tag{4.9.16}$$

Эффект Томсона, который описывается в следующем параграфе, позволяет экспериментально определить зависимость $\Theta(T)$.

Если зависимость времени релаксации импульса τ_m от энергии ε степенная, т. е. $\tau_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^r$, то для дифференциальной термо-э. д. с. невырожденного полупроводника n-типа мы получаем

$$\frac{d\Theta}{dT} = -\frac{k_B}{|e|}\left(r + \frac{5}{2} - \frac{\zeta_n}{k_B T}\right), \tag{4.9.17}$$

в то время как для вырожденного электронного газа в металле эта величина составляет

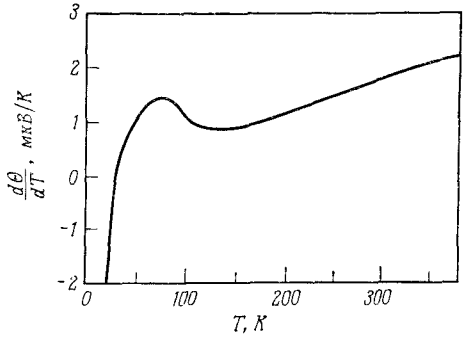
$$\frac{d\Theta}{dT} = -\frac{k_B}{|e|}\left(r + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi^2}{3}\frac{k_B T}{\zeta_n}. \tag{4.9.18}$$

При комнатной температуре и ниже $T \ll \zeta_n/k_B$ дифференциальная термо-э. д. с. металла значительно меньше, чем для невырожденного полупроводника, поэтому в большинстве практических случаев вкладом металла в выражении (4.9.16) можно пренебречь. На фиг. 4.17 приведена характерная для металлов температурная зависимость дифференциальной термо-э. д. с. меди в интервале 40—400 К [26]. По порядку величины она составляет несколько мкВ/К. Дифференциальная термо-э. д с. кремния p-типа, представленная на фиг. 4.18, составляет в зависимости от степени легирования и температуры от 100 мкВ/К до 100 мВ/К [27].

Поскольку, согласно (4.9.14), $d\Theta/dT$ зависит от заряда e в первой степени, для электронов и дырок она имеет разные

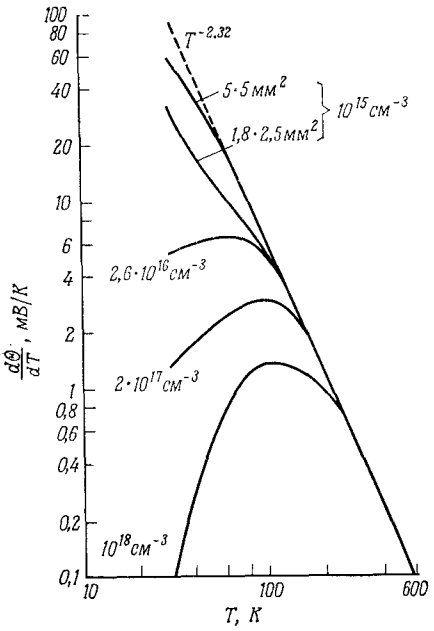
[1]) Более точное значение этой величины см. в таблице постоянных в конце книги.

знаки. На фиг. 4.19 представлена температурная зависимость произведения T на $d\Theta/dT$ для двух образцов германия n-типа



Фиг. 4.17. Дифференциальная термо-э. д. с. меди высокой чистоты [26].

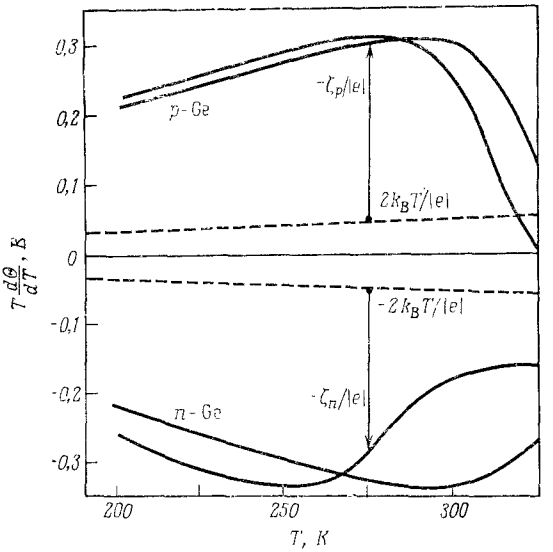
и двух образцов германия p-типа с различной степенью легирования [28]. Штриховые линии соответствуют случаю $Td\Theta/dT = 2k_BT/e$ для обоих знаков e, который следует из (4.9.17) при $r = -1/2$ (рассеяние на акустическом деформационном потенциале) и $\zeta = 0$. Таким образом, разность между экспериментальной кривой и штриховой линией для одного знака e дает отрицательную энергию Ферми в единицах e. Вертикальные стрелки на фиг. 4.19 определяют значения этой величины при произвольно вы-



Фиг. 4.18. Дифференциальная термо-э. д. с. p-Si для различных концентраций акцепторов (бор) и компенсирующих доноров (образцы с концентрацией 10^{15} см$^{-3}$ отличаются только поперечным сечением) [29].

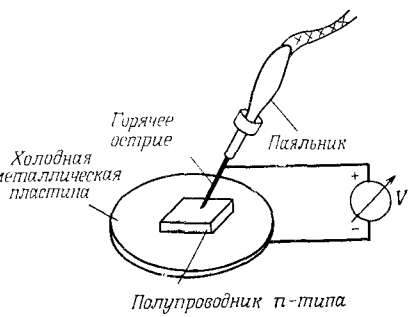
бранной температуре 275 К; эти стрелки имеют почти одинаковую длину и приближенно равны 0,3 В. Хотя образцы p- и n-типа легированы разными примесями и поэтому их энергии

Ферми ζ_n и ζ_p нельзя сравнивать, сумма ζ_n и ζ_p оказывается приблизительно равной *ширине* запрещенной зоны ε_G, которая у германия составляет 0,7 эВ. Последнее свидетельствует о том,



Фиг. 4.19. Дифференциальная термо-э.д.с. n- и p-Ge (экспериментальные данные и теоретические кривые).
Вертикальные стрелки определяют энергии Ферми в единицах элементарного заряда.

что в первом приближении слагаемым $\langle\tau_m e/k_BT\rangle/\langle\tau_m\rangle$ в (4.9.14) можно пренебречь и дифференциальная термо-э. д. с. определяется энергией Ферми.



Фиг. 4.20. Устройство для термоэлектрического определения типа проводимости полупроводника с помощью горячего зонда (показана полярность напряжения для полупроводника n-типа; для полупроводника p-типа полярность меняется на обратную).

Типичное устройство для определения типа проводимости полупроводника термоэлектрическим способом показано на фиг. 4.20. Образец помещен на холодную металлическую

пластину, а к верхней грани образца прижат нагретый паяльник. К пластине и паяльнику подключается вольтметр. Для образца с электронной проводимостью полярность вольтметра соответствует изображенной на фигуре. В случае дырочной проводимости для того, чтобы стрелка милливольтметра отклонялась нормально, полярность необходимо поменять. Для веществ с высоким удельным сопротивлением, таких, как карбид кремния, используется устройство с горячей пластиной и холодным точечным контактом [29].

В случае собственного или почти собственного полупроводника необходимо учитывать как электроны, так и дырки. Поскольку $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p = 0$, в данном случае вместо (4.9.8) имеем

$$|e|\mathbf{E}(\sigma_p + \sigma_n) = -\frac{T}{\langle\tau_p\rangle}\left\langle\tau_p\nabla_r\frac{\varepsilon_p - \zeta_p}{T}\right\rangle\sigma_p - \frac{T}{\langle\tau_n\rangle}\left\langle\tau_n\nabla_r\frac{\varepsilon_n - \zeta_n}{T}\right\rangle\sigma_n, \tag{4.9.19}$$

откуда следует

$$\frac{d\Theta}{dT} = \frac{d\Theta_n}{dT}\frac{\sigma_n}{\sigma} + \frac{d\Theta_p}{dT}\frac{\sigma_p}{\sigma}, \tag{4.9.20}$$

где $\sigma = \sigma_n + \sigma_p$. При $\sigma_n = \sigma_p$ и $d\Theta_n/dT = -d\Theta_p/dT$ дифференциальная термо-э. д. с. обращается в нуль. Хотя это и нереальный случай, тем не менее видно, что в интервале температур, соответствующем *собственной* проводимости, дифференциальная термо-э. д. с. меньше, чем в области *примесной* проводимости. На фиг. 4.19 в области высоких температур германий становится собственным полупроводником и дифференциальная термо-э. д. с. по абсолютной величине уменьшается. Более того, в случае p-Ge видна тенденция к изменению знака на обратный при более высоких температурах. Такое поведение можно объяснить тем, что подвижность электронов выше подвижности дырок и поэтому $\sigma_n > \sigma_p$ в (4.9.20).

На фиг. 4.18 кривая, соответствующая самым чистым образцам кремния, легированного бором, в области низких температур расщепляется; здесь дифференциальная термо-э. д. с. зависит от геометрических размеров образца. Более того, ее значение превышает предсказываемое уравнением (4.9.14). Объяснение этому было дано Херрингом [30] и Фридериксом [31, 32], которые рассмотрели случай неравновесного распределения фононов [1]).

До сих пор мы предполагали, что электронный газ находится в равновесии с колебаниями решетки. Взаимодействие между ними описывалось с помощью времени релаксации им-

[1]) Обзор работ по термоэлектрическому и термомагнитному эффектам приведен в работе [33].

пульса τ_m. Механизмы рассеяния, определяющие величину τ_m, подробно рассматриваются в гл. 6, где предполагается, что колебания решетки находятся в равновесии. В квантовой теории эти колебания квантуются, и квант их энергии называется фононом. Кроме электронного газа имеется также газ фононов, и для правильного описания процесса проводимости необходимо совместно решить связанную систему интегродифференциальных уравнений Больцмана для электронов и фононов [1]). Вследствие крайней математической сложности мы и не будем пытаться решать эту задачу и предположим просто, что равновесное распределение фононов описывается функцией Планка. Именно этот случай соответствует предыдущему рассмотрению. Однако если в полупроводнике имеется градиент температуры, приводящий к термоэлектрическому эффекту, фононы движутся преимущественно от горячего к холодному концу образца. Благодаря электрон-фононному взаимодействию, о котором идет речь в гл. 7, § 8, где рассматривается акустоэлектрический эффект, электроны увлекаются фононами (в акустоэлектрическом эффекте электроны перемещаются под действием *когерентных* звуковых волн, а эффект увлечения фононами обусловлен *некогерентными* волнами теплопроводности [30—32]). Таким образом, на холодном конце образца скапливается большее количество носителей, чем при обычном процессе, описываемом уравнением (4.9.14).

В простейшем приближении рассмотрим нитевидный образец, длина которого равна удвоенной длине свободного пробега фононов $2l$ при температуре T и плотности энергии $U(T)$ в середине образца и температуре $T - l\,dT/dx$ и плотности энергии

$$U\left(T - l\frac{dT}{dx}\right) \approx U(T) - l\frac{dT}{dx}\frac{dU}{dT} \qquad (4.9.21)$$

на горячем конце образца ($dT/dx < 0$); на холодном конце образца знак минус надо заменить на плюс. Величина $dU/dT = c_v\rho$ есть удельная теплоемкость на единицу объема, где ρ — плотность вещества. Для мощности, поглощаемой в единице объема, имеем

$$\Delta U = U\left(T - l\frac{dT}{dx}\right) - U\left(T + l\frac{dT}{dx}\right) \approx -\frac{dT}{dx}2lc_v\rho. \qquad (4.9.22)$$

Для простоты предположим, что электрон-фононное взаимодействие достаточно сильное, так что вся энергия полностью передается электронам. В отсутствие электрического тока в образце существует электрическое поле E_x, и произведение силы eE_x на

[1]) В отличие от случая электронов для фононов закон сохранения числа частиц не выполняется.

число электронов $n2l$ компенсирует вклад фононов:

$$n2leE_x = \frac{dT}{dx}\, 2lc_v\rho. \tag{4.9.23}$$

Тогда для дифференциальной термо-э. д. с. получаем

$$\frac{d\Theta}{dT} = \frac{E_x}{dT/dx} = \frac{c_v\rho}{ne}. \tag{4.9.24}$$

Согласно закону Дюлонга — Пти, удельная молярная теплоемкость твердых тел при высоких температурах составляет 25 Вт·с/(моль·К) и равна произведению $c_v\rho$ на молярный объем. Для кремния значение последнего равно 12 см^3/моль, откуда следует $c_v\rho = 2$ Вт·с/(см^3·К). Например, если $n = 10^{18}$ см$^{-3}$, то $ne = 0{,}16$ Вт·с/(В·см^3) и отношение $c_v\rho/ne$ по порядку величины равно 10 В/К. Поскольку удельная теплоемкость при температурах значительно меньше дебаевской пропорциональна T^3, то и $d\Theta/dT$ должно быть пропорционально T^3.

Действительно, на фиг. 4.18 для сильно легированных образцов наблюдается увеличение $d\Theta/dT$ с ростом T. Однако порядок величины составляет лишь 10^{-3} В/К. Такое отличие можно объяснить, если предположить, что носителям заряда передается лишь малая часть энергии направленного движения фононов. Как и следовало ожидать из (4.9.24), с уменьшением концентрации носителей эффект увеличивается.

Херринг [30] рассмотрел случай слабого электрон-фононного взаимодействия. В то время как скорость фононов u_s есть просто скорость звука, электроны из-за увлечения фононами приобретают скорость дрейфа $v_d < u_s$ (при $v_d > u_s$ волна будет усиливаться и носители, наоборот, будут отдавать свою энергию волне). Относительная величина передаваемой энергии — $\Delta U/U$ зависит от отношения v_d/u_s. В простейшем приближении положим $\Delta U/U$ равным v_d/u_s. Вводя подвижность μ с помощью соотношения $v_d = \mu E_x$, выражая ΔU из (4.9.22) и полагая U равным $\rho c_v T$, получаем

$$\frac{dT}{dx}\,\frac{2l}{T} = \frac{\mu E_x}{u_s}. \tag{4.9.25}$$

Отсюда находим дифференциальную термо-э. д. с.:

$$\frac{d\Theta}{dT} = \frac{E_x}{dT/dx} = 2\,\frac{u_s l}{\mu T} = 2\,\frac{u_s^2\tau_{ph}}{\mu T}, \tag{4.9.26}$$

где время релаксации фонона τ_{ph} есть отношение длины свободного пробега фонона l к его скорости u_s. Так как u_s почти не зависит от T, а величина μT в кремнии, грубо говоря, пропорциональна $1/T$, поведение кривых на фиг. 4.18 для наиболее чистых образцов можно было бы объяснить, полагая, что τ_{ph}

сильно убывает с повышением температуры. Полученные таким образом значения τ_{ph}, равные $4{,}1 \cdot 10^{-9}$ с при 20 К и $7{,}7 \cdot 10^{-11}$ с при 80 К, кажутся правдоподобными [30]: с повышением температуры амплитуда колебаний атомов в решетке увеличивается и возрастает роль ангармонизма, что приводит к уменьшению длины свободного пробега между фонон-фононными взаимодействиями.

§ 10. Эффекты Томсона и Пельтье

В отличие от предыдущего параграфа допустим теперь, что через полупроводниковый образец, в котором имеется градиент температуры, проходит электрический ток с плотностью $\mathbf{j}$. В этом случае уравнение (4.9.10) следует заменить уравнением

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{1}{e}(S\nabla_r T + \nabla_r \zeta), \tag{4.10.1}$$

из которого при $\nabla_r T = \nabla_r \zeta = 0$ следует закон Ома, а при $\mathbf{j} = 0$ — уравнение (4.9.10). Нас интересует выделяемое в образце количество тепла, которое при тепловом равновесии есть не что иное, как джоулево тепло. Вычислим сначала плотность потока тепла $\mathbf{w}$. Носители переносят не только заряд e, но в то же время и энергию ε. Для нахождения $\mathbf{w}$ можно на первый взгляд заменить e в выражении для плотности тока на ε. Из (4.10.1) и (4.9.9) следует

$$\mathbf{j} = \frac{n}{m}\left\{\langle \tau_m e\rangle (e\mathbf{E} - \nabla_r \zeta) - \langle \tau_m (\varepsilon - \zeta) e\rangle \frac{1}{T}\nabla_r T\right\}. \tag{4.10.2}$$

Для плотности потока тепла $\mathbf{w}$ имеем

$$\mathbf{w} = \frac{n}{m}\left\{\langle \tau_m (\varepsilon - \zeta)\rangle (e\mathbf{E} - \nabla_r \zeta) - \langle \tau_m (\varepsilon - \zeta)^2\rangle \frac{1}{T}\nabla_r T\right\}. \tag{4.10.3}$$

Сравнивая эти два выражения, можно заключить, что (4.10.3) получается из (4.10.2) заменой e на $\varepsilon - \zeta$ всюду, кроме члена $e\mathbf{E}$, который описывает силу, действующую на заряженную частицу в электрическом поле $\mathbf{E}$. Почему e нужно заменять на $\varepsilon - \zeta$, а не просто на ε? Из термодинамики известно, что выделяемое количество тепла δQ равно изменению внутренней энергии dU минус изменение свободной энергии (функции Гельмгольца) dF. Энергия Ферми ζ определяется выражением (3.2.20) как производная свободной энергии по концентрации при постоянной температуре, а энергия ε есть $\partial U/\partial n$. Поэтому в выражение для плотности потока тепла входит разность $\varepsilon - \zeta$.

Знаки в (4.10.2) и (4.10.3) соответствуют случаю электронов ($e < 0$). При этом энергия Ферми ζ определяется выражением (4.9.4), а разность $\varepsilon - \zeta$ — выражением (4.9.6). Для дырок

($e > 0$) только второе слагаемое в (4.10.2) и первое слагаемое в (4.10.3) меняют знаки на обратные, так как, согласно (4.9.7), величина $\varepsilon - \zeta$ становится отрицательной. Полагая для простоты, что механизм рассеяния электронов и дырок один и тот же:

$$\frac{\langle \tau_m \varepsilon \rangle_n}{\langle \tau_m \rangle_n} = \frac{\langle \tau_m \varepsilon \rangle_p}{\langle \tau_m \rangle_p} = k_B T \left(r + \frac{5}{2} \right),$$
$$\frac{\langle \tau_m \varepsilon^2 \rangle_n}{\langle \tau_m \rangle_n} = \frac{\langle \tau_m \varepsilon^2 \rangle_p}{\langle \tau_m \rangle_p} = (k_B T)^2 \left(r + \frac{7}{2} \right) \left(r + \frac{5}{2} \right) \tag{4.10.4}$$

и вводя

$$\sigma_n = \frac{ne^2}{m_n} \langle \tau_m \rangle_n, \quad \sigma_p = \frac{pe^2}{m_p} \langle \tau_m \rangle_p, \tag{4.10.5}$$

получаем плотность тока и плотность потока тепла в случае смешанной проводимости:

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_n + \sigma_p}{|e|} (|e| \mathbf{E} - \nabla_r \zeta) + \\ + \left\{ \frac{\sigma_n - \sigma_p}{|e|} k_B T \left(r + \frac{5}{2} \right) - \frac{\sigma_n \zeta_n - \sigma_p \zeta_p}{|e|} \right\} \frac{\nabla_r T}{T}, \tag{4.10.6}$$

$$\mathbf{w} = - \left\{ \frac{\sigma_n - \sigma_p}{e^2} k_B T \left(r + \frac{5}{2} \right) - \frac{\sigma_n \zeta_n - \sigma_p \zeta_p}{e^2} \right\} (|e| \mathbf{E} - \nabla_r \zeta) - \\ - \left\{ \frac{\sigma_n + \sigma_p}{e^2} (k_B T)^2 \left(r + \frac{7}{2} \right) \left(r + \frac{5}{2} \right) - 2 \frac{\sigma_n \zeta_n + \sigma_p \zeta_p}{e^2} k_B T \left(r + \frac{5}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_n \zeta_n^2 + \sigma_p \zeta_p^2}{e^2} \right\} \frac{\nabla_r T}{T}. \tag{4.10.7}$$

Из этих выражений легко получить (4.8.5), полагая $\mathbf{j} = 0$ и исключая $\mathbf{E}$. До сих пор в выражениях для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{w}$ учитывался только вклад от носителей заряда. Добавочное слагаемое $+ \varkappa' \nabla_r T$ в (4.10.6) описывает вклад, связанный с увлечением фононами, в то время как дополнительные слагаемые в (4.10.7) $- \varkappa_L \nabla_r T$ и $- T \varkappa' \mathbf{E}$ описывают фононную теплопроводность и эффект увлечения электронами соответственно.

Представляет интерес процесс диффузии носителей заряда при наличии градиента температуры. Из (4.10.2) мы видим, что это явление описывается членами, зависящими от энергии Ферми ζ. Согласно (4.9.4), заменим в $\nabla_r \zeta$ ζ на $\zeta_n + \varepsilon_c$, а в $\langle \tau_m (\varepsilon - \zeta) \rangle$ заменим $\varepsilon - \zeta$ на $\varepsilon_n - \zeta_n$ [см. (4.10.6)]. Из (3.1.42) при $n \gg N_{D\times}$, $n \gg N_{A-}$ следует

$$n = N_c F_{1/2} (\eta_n), \tag{4.10.8}$$

где $N_c \sim T^{3/2}$ и $\eta_n = \zeta_n / k_B T$. Поскольку $\nabla_r \zeta_n = (\partial \zeta_n / \partial T) \nabla_r T$, найдем $\partial n / \partial T$ из (4.10.8), а из полученного выражения опреде-

лим интересующую нас величину $\partial\zeta_n/\partial T$:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{3}{2}\frac{N_c}{T}F_{1/2}(\eta_n) + N_c\left(\frac{1}{k_BT}\frac{\partial\zeta_n}{\partial T} - \frac{\zeta_n}{k_BT^2}\right)F_{-1/2}(\eta_n), \quad (4.10.9)$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T} = \frac{\zeta_n}{T} + \frac{k_BT}{N_cF_{-1/2}}\frac{\partial n}{\partial T} - \frac{3}{2}k_B\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}. \quad (4.10.10)$$

Здесь использовано соотношение $\partial F_{1/2}(\eta_n)/\partial\eta_n = F_{-1/2}(\eta_n)$. Так как $(\partial n/\partial T)\ \nabla_r T = \nabla_r n$, из (4.10.2) получаем для плотности тока

$$\mathbf{j} = n|e|\mu_n\mathbf{E} - \frac{\langle\tau_m e\rangle}{m}k_BT\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}\nabla_r n + \\ + \frac{n}{m}\left(\langle\tau_m e\rangle\frac{3}{2}k_B\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}} - \frac{\langle\tau_m e\varepsilon_n\rangle}{T}\right)\nabla_r T. \quad (4.10.11)$$

Второе слагаемое правой части (4.10.11) описывает плотность диффузионного тока и обычно записывается в виде $-eD_n\nabla_r n$. Здесь D_n — коэффициент диффузии электронов

$$D_n = \mu_n\frac{k_BT}{|e|}\frac{F_{1/2}(\eta_n)}{F_{-1/2}(\eta_n)} \approx \mu_n\frac{k_BT}{|e|}, \quad (4.10.12)$$

где $\mu_n = (|e|/m)\langle\tau_m\rangle$ — подвижность. Приближенное равенство соответствует случаю невырожденного электронного газа.

Мы получили известное соотношение Эйнштейна. Величина отношения $F_{1/2}(\eta_n)/F_{-1/2}(\eta_n)$ порядка 3 при $\eta_n = 4$ и приближенно равна 6,9 при $\eta_n = 10$.

Для расчета переноса тепла подставим в (4.10.3) $e\mathbf{E} - \nabla_r\zeta$ из (4.10.2) и учтем, что при $\mathbf{j} = 0$ плотность потока тепла $\mathbf{w}$ равна $-\varkappa\nabla_r T$. Используя выражение (4.9.9) для S/e, получаем

$$\mathbf{w} = \mathbf{j}T\frac{S}{e} - \varkappa\nabla_r T = \Pi\mathbf{j} - \varkappa\nabla_r T, \quad (4.10.13)$$

где введен коэффициент Пельтье

$$\Pi = T\frac{S}{e} = T\frac{d\Theta}{dT}. \quad (4.10.14)$$

Связь между коэффициентом Пельтье и дифференциальной термо-э. д. с. представляет собой одно из соотношений Онзагера и называется вторым соотношением Кельвина. Тепло Q, выделяемое в единице объема за единицу времени, определяется выражением

$$Q = (\mathbf{jE}) - \operatorname{div}\left(\mathbf{w} - \frac{\zeta\mathbf{j}}{e}\right), \quad (4.10.15)$$

в котором второе слагаемое связано с переносом энергии [см. текст после формулы (4.10.3)]. Исключая $\mathbf{E}$ и $\mathbf{w}$ с помощью

(4.10.1) и (4.10.13), получаем

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} - \mu_T (\mathbf{j}\nabla_r T) + \operatorname{div}(\varkappa \nabla_r T), \tag{4.10.16}$$

где введен коэффициент Томсона

$$\mu_T = T \frac{d(S/e)}{dT} = T \frac{d^2\Theta}{dT^2}. \tag{4.10.17}$$

Второе слагаемое в (4.10.16) есть теплота Томсона Q_T, а первое и третье — джоулево тепло и перенос тепла за счет теплопроводности соответственно. При обращении направления $\mathbf{j}$ или $\nabla_r T$ знак Q_T меняется на обратный.

Измеряя теплоту Томсона при различных температурах, можно определить значение абсолютной дифференциальной термо-э.д.с., что очень важно в случае металлических проводников. Из (4.10.17) следует первое соотношение Кельвина

$$\frac{d\Theta}{dT} = \int_0^T \frac{\mu_T}{T} dT. \tag{4.10.18}$$

Если зависимость μ_T от T известна из эксперимента, то интеграл берется. Это соотношение может быть получено также из общих термодинамических соображений [34, 35].

Если температура во всем объеме полупроводника постоянна, то теплота Томсона на первый взгляд должна обращаться в нуль, так как $\nabla_r T = 0$. Тем не менее тепло будет выделяться в тех областях, где сам уровень Ферми зависит от координаты, как это имеет место в nn^+-переходах или на контакте двух различных веществ (гетеропереходе), если через переход протекает ток I. Если Q_T записать в виде

$$Q_T = -T \frac{d(S/e)}{dT} (j\nabla_r T) = -T\mathbf{j}\nabla \left(\frac{S}{e}\right), \tag{4.10.19}$$

а через A обозначить площадь поперечного сечения перехода, то количество тепла, выделяемое в единицу времени, определяется выражением

$$-A \int_1^2 T\mathbf{j}\nabla_r \left(\frac{S}{e}\right) dr = IT \frac{S_1 - S_2}{e} = \Pi_{(1\to 2)} I \tag{4.10.20}$$

и называется теплотой Пельтье. Здесь

$$\Pi_{(1\to 2)} = \Pi_1 - \Pi_2 \tag{4.10.21}$$

называется относительным коэффициентом Пельтье, а абсолютные коэффициенты Пельтье Π определяются выражением

(4.10.14). Очень большая теплота Пельтье выделяется на $p-n$-переходе, вырожденном с обеих сторон. В этом случае разность уровней Ферми по обе стороны перехода приближенно равна ε_G, и если последняя равна, например 1 эВ, то при протекании тока 1 А выделяется теплота Пельтье 1 Вт.

В связи с эффектом Пельтье Херринг [30] предложил так называемый вакуумный полупроводник, состоящий из двух одинаковых плоскопараллельных металлических электродов с температурами T и $T+dT$. Температура T достаточно низкая, так что термоэлектронная эмиссия не приводит к появлению значительного пространственного заряда. Работа выхода φ полагается не зависящей от температуры. Используя уравнение Ричардсона, в равновесном состоянии получаем

$$AT^2 \exp\left(-\frac{|e|\varphi}{k_B T}\right) = A(T+dT)^2 \exp\left[-\frac{|e|(\varphi+d\Theta)}{k_B(T+dT)}\right]. \quad (4.10.22)$$

Потенциал горячего электрода выше, чем холодного, на величину $d\Theta$ вследствие эмиссии (отрицательно заряженных) электронов. Решая это уравнение относительно $d\Theta/dT$, находим дифференциальную термо-э. д. с.

$$\frac{d\Theta}{dT} = 2\frac{k_B}{|e|} + \frac{\varphi}{T}. \quad (4.10.23)$$

Полученное выражение находится в согласии с (4.9.17), если в последнем положить $\zeta_n = -|e|\varphi$ и $r = -1/2$ (что соответствует не зависящей от энергии длине свободного пробега). Если оба электрода имеют одну и ту же температуру T и через диод течет ток, то на электроде, эмиттирующем электроны, будет выделяться тепло. Распределение как входящих, так и выходящих электронов является максвелловским, поэтому каждый электрон в среднем переносит энергию $2k_BT$. Тепловая потеря электрона в среднем равна $|e|\varphi + 2k_BT$. Тогда, согласно (4.10.14), для коэффициента Пельтье имеем

$$\Pi = \frac{|e|\varphi + 2k_BT}{|e|} = T\frac{d\Theta}{dT}. \quad (4.10.24)$$

При низких температурах эффект Пельтье может зависеть от увлечения электронами [см. текст после (4.10.7)]: дрейфующие носители заряда увлекают за собой фононы, что приводит к увеличению потока тепла.

В лабораторной практике иногда используются термоэлектрические холодильные устройства. Вследствие низкого к. п. д. эти устройства не могут конкурировать с обычными типами холодильников, хотя они не содержат движущихся частей и поэтому время их действия практически не ограничено. Целый ряд

исследований был посвящен поискам подходящих полупроводниковых материалов для термоэлектрического охлаждения. Полупроводник характеризуется значением термоэлектрического параметра эффективности Z, который определяется выражением

$$Z = \frac{\sigma}{\varkappa}\left(\frac{d\Theta}{dT}\right)^2. \tag{4.10.25}$$

Поясним, откуда возникает подобная комбинация констант вещества. Допустим, что к прямоугольному образцу длины l и поперечного сечения A приложено напряжение V_0. Текущий вдоль образца ток

$$I = \frac{V_0 \sigma A}{l} \tag{4.10.26}$$

приводит к выделению на металлических контактах теплоты Пельтье

$$\Pi I = T\frac{d\Theta}{dT} I = T\frac{d\Theta}{dT}\frac{V_0 \sigma A}{l}, \tag{4.10.27}$$

если пренебречь малым вкладом металла. Теплота Пельтье вызывает появление разности температур ΔT, что можно использовать в холодильниках. Существуют потери тепла на теплопроводность:

$$Q = \frac{\varkappa \Delta T A}{l}, \tag{4.10.28}$$

которые путем подбора материала с низким значением $\varkappa$ можно сделать малыми. Отношение теплоты Пельтье к Q должно быть большим:

$$\frac{\Pi I}{Q} = T\frac{d\Theta}{dT} V_0 \frac{\sigma}{\varkappa \Delta T} \gg 1. \tag{4.10.29}$$

Кроме того, вследствие наличия перепада температур ΔT возникает термоэлектрическая разность потенциалов, которая в отсутствие электрического тока $I = 0$ есть просто

$$V = \frac{d\Theta}{dT}\Delta T. \tag{4.10.30}$$

Исключая ΔT из (4.10.29) и (4.10.30) и используя определение (4.10.25), получаем

$$V_0 Z \gg \frac{V}{T}. \tag{4.10.31}$$

В этом выражении все константы вещества объединены в один параметр эффективности Z, который должен быть как можно бо́льшим. При более строгом расчете необходимо учитывать джоулево тепло и теплоту Томсона. Не вдаваясь в дальнейшие

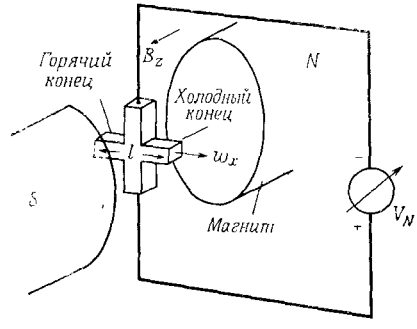
детали, приведем просто некоторые данные для хорошо известного термоэлектрического полупроводника — теллурида висмута Bi_2Te_3.

Путем соответствующего легирования теллурид висмута может быть получен как n-, так и p-типа с одним и тем же значением абсолютной величины дифференциальной термо-э. д. с. (но, разумеется, разных знаков): $|d\Theta/dT| = 2 \cdot 10^{-4}$ В/К. Электропроводность σ и удельная теплопроводность $\varkappa$ Bi_2Te_3 составляют соответственно 10^3 $(Ом \cdot см)^{-1}$ и $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Вт/(см·К). Отсюда следует, что $Z = 3 \cdot 10^{-3}$ $К^{-1}$, причем при комнатной температуре $Z \sim 1/T$ [36, 37][1]).

Таким образом, из (4.10.31) следует условие $V_0 \gg V$. Часто термопары, состоящие из Bi_2Te_3 n- и p-типа, объединяются в батарею.

§ 11. Термомагнитные эффекты

Наиболее легко измеряемым термомагнитным эффектом является эффект Нернста. Все остальные эффекты труднее измерять, поскольку перенос энергии носителями заряда на много порядков меньше теплопроводности решетки. Соответственно и возникающие разности потенциалов различаются на много порядков.



Фиг. 4.21. Устройство Нернста (ω_x — плотность потока тепла).

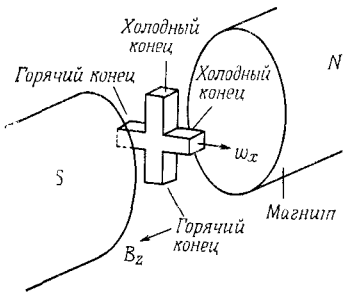
Для показанной здесь полярности напряжения Нернста коэффициент Нернста положителен.

Для измерения эффекта Нернста можно использовать образец той же формы, что и для холловских измерений (фиг. 4.21). Если на концах образца поддерживать разные температуры и тем самым создавать градиент температуры $\partial T/\partial x$, то вдоль образца будет течь поток тепла ω_x (вместо плотности электрического тока j_x). Между боковыми отростками точно так же, как и в эффекте Холла, возникает разность потенциалов V_y. Напряженность поля Нернста определяется выражением

$$E_y = Q_N \frac{\partial T}{\partial x} B_z. \qquad (4.11.1)$$

[1]) Список дополнительной литературы приведен в работе [38].

Коэффициент Нернста Q_N измеряется в единицах см^2/(с·К). Он считается положительным, если направления **E**, **B** и градиента температуры такие, как показано на фиг. 4.21. *Изотермический* эффект Нернста определяется условием $\partial T/\partial y = 0$. Однако обычно наблюдается *адиабатический* эффект Нернста. Разница между этими двумя эффектами очень мала, и поэтому изотермический эффект вычисляется по адиабатическому эффекту путем добавления к Q_N малого поправочного члена $S_{RL}d\Theta/dT$ [39], где S_{RL} определяется выражением (4.11.21).



Фиг. 4.22. Устройство Риги — Ледюка (w_x — плотность потока тепла).

Для показанного знака градиента температуры коэффициент Риги — Ледюка положителен

Возникновение поперечного градиента температур обусловлено эффектом Риги — Ледюка:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = S_{RL}\frac{\partial T}{\partial x}B_z, \tag{4.11.2}$$

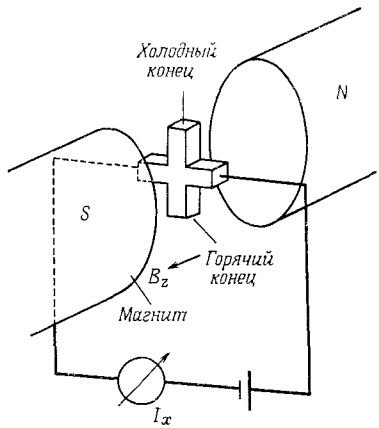
где S_{RL} измеряется в единицах см^2/(В·с). Если направления магнитного поля **B** и градиентов температуры такие, как на фиг. 4.22, то $S_{RL} > 0$.

Иногда в результаты холловских измерений вкрадывается ошибка, связанная с эффектом Эттингсгаузена — перенос тепла носителями заряда, которые под действием магнитного поля отклоняются от направления электрического поля **E**, вызывает появление поперечного градиента температуры

$$\frac{\partial T}{\partial y} = P_E j_x B_z. \tag{4.11.3}$$

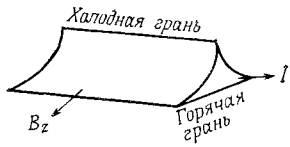
Входящий в последнее выражение коэффициент Эттингсгаузена P_E измеряется в единицах см^3·К/(Вт·с). Он считается положительным, если **j**, **B** и градиент температуры направлены так, как на фиг. 4.23. Если $\partial T/\partial x = 0$, эффект Эттингсгаузена называется *изотермическим*. Разность температур на боковых отростках образца приводит к возникновению термоэлектрического напряжения на контактах металл — полупроводник, которое складывается с напряжением Холла. Поскольку перенос тепла в полупроводниках является медленным процессом (см. § 8 этой гла-

вы), эффект Эттингсгаузена может быть исключен из холловских измерений, если вместо постоянного тока подавать переменный низкочастотный ток и измерять переменное напряжение Холла. Эффект Эттингсгаузена может быть заметным (до 10% величины напряжения Холла) в низкоомных полупроводниках (например, 10^{-3} Ом·см) с малой удельной теплопроводностью [например, $5 \cdot 10^{-2}$ Вт/(см·К)]. В ряде лабораторных применений может представлять интерес явление термомагнитного охлаждения [40, 41], схематически изображенное на фиг. 4.24. Для



Фиг. 4.23. Устройство Эттингсгаузена (для показанного знака градиента температуры коэффициент Эттингсгаузена положителен).

сплава Bi — Sb в магнитном поле 1,5 Т при температуре 156 К на основании образца температура на верхней грани составляет 102 К, что на 54 К ниже.



Фиг. 4.24. Форма образца для термомагнитного охлаждения.

Разности температур в эффектах Риги — Ледюка и Эттингсгаузена определяются выражениями

$$\Delta T_y = S_{RL} \Delta T_x B_z \frac{b}{l}, \tag{4.11.4}$$

$$\Delta T_y = P_E I \frac{B_z}{d}, \tag{4.11.5}$$

а напряжение Нернста — выражением

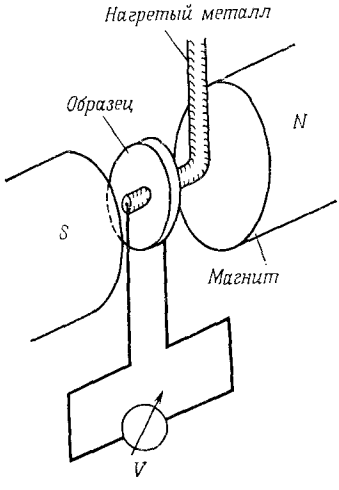
$$V_N = Q_N \Delta T_x B_z \frac{b}{l}, \tag{4.11.6}$$

где l — длина нитевидного образца, d — его толщина (в направлении магнитного поля), b — ширина (в поперечном направлении).

Связь между эффектами Нернста и Эттингсгаузена определяется соотношением Бриджмена

$$P_E = \frac{Q_N T}{\varkappa}, \qquad (4.11.7)$$

полученным из термодинамических соображений (удельная теплопроводность $\varkappa$ содержит вклад решетки). Более удобным оказывается измерять эффект Нернста и вычислять P_E с помощью (4.11.7). Так, например, для In Sb с концентрацией $8 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ при 600 К $Q_N = 0{,}3$ см^2/(с·К) и $\varkappa = 0{,}08$ Вт/(см·К) [42]. Из соотношения Бриджмена следует в данном случае, что $P_E = 2{,}25 \cdot 10^3$ см^3/(Вт·с). Полагая $j_x = 1$ мА/мм$^2 = 10^{-1}$ А/см^2 и $B_z = 0{,}1$ Т $= 10^{-5}$ В·с/см^2, получаем значение поперечного градиента температуры $\partial T/\partial y = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ К/см. Если выбрать образец шириной 1 мм и положить дифференциальную термо-э. д. с. равной 0,5 мВ/К, то напряжение оказывается равным 10^{-7} В. Это на много порядков меньше напряжения Холла, поэтому в реальном эксперименте из последнего трудно выделить термоэлектрическое напряжение.



Фиг. 4.25. Устройство для измерения термо-э. д. с. диска Корбино.

Напряжение измеряется между нагретым металлическим стержнем и окружностью диска, изготовленного из полупроводникового материала. N и S — полюса магнита.

Кроме упомянутых термомагнитных эффектов, разумеется, существуют и такие, которые связаны с влиянием магнитного поля на термоэлектрические эффекты. Эти эффекты должны учитываться, например, при измерении эффекта Нернста: из-за трудности расположения боковых отростков образца строго соосно друг другу на них при наличии градиента температуры вдоль образца устанавливаются различные температуры. Кроме напряжения Нернста появляется и термоэлектрическое напряжение. Однако в отличие от первого оно сохраняет свою полярность при изменении направления магнитного поля и поэтому может быть исключено.

Из всех магнитотермоэлектрических эффектов легче всего определить термо-э. д. с. диска Корбино [43]. Экспериментальное устройство, служащее для этой цели, показано на фиг. 4.25.

Диск Корбино, выполненный из полупроводникового материала, укреплен на нагретом металлическом стержне. Термоэлектрическое напряжение измеряется между стержнем и металлическим контактом на окружности диска. При малых напряженностях магнитного поля изменение дифференциальной термо-э. д. с. $\Delta(d\Theta/dT)$ пропорционально B^2.

Значение дифференциальной термо-э. д. с. насыщения при увеличении напряженности магнитного поля может служить для определения непараболичности энергетических зон [44].

Для вычисления термомагнитных эффектов в невырожденном полупроводнике, помещенном в поперечное магнитное поле ($\mathbf{B} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{w}$), воспользуемся уравнениями, приведенными в приложении 1, в которых положим $B_x = B_y = E_z = 0$. В случае изотермического ($\partial T/\partial y = \partial T/\partial z = \partial\zeta/\partial y = \partial\zeta/\partial z = 0$) эффекта Нернста в слабом магнитном поле получаем для плотности электрического тока

$$j_x = \sigma\left(E_x + \frac{1}{|e|}\frac{d\zeta}{dx}\right) + \gamma B_z E_y + \sigma'\frac{1}{T}\frac{dT}{dx}, \tag{4.11.8}$$

$$j_y = -\gamma B_z\left(E_x + \frac{1}{|e|}\frac{d\zeta}{dx}\right) + \sigma E_y - \gamma' B_z\frac{1}{T}\frac{dT}{dx}. \tag{4.11.9}$$

Из условия $j_x = j_y = 0$, пренебрегая в (4.11.8) произведением B_z и E_y в силу их малости, определяем E_y:

$$\sigma\left(E_x - \frac{1}{|e|}\frac{d\zeta}{dx}\right) = -\sigma'\frac{1}{T}\frac{dT}{dx}, \tag{4.11.10}$$

$$\sigma^2 E_y = -\sigma'\gamma B_z\frac{1}{T}\frac{dT}{dx} + \sigma\gamma' B_z\frac{1}{T}\frac{dT}{dx} = (\sigma\gamma' - \sigma'\gamma)\frac{B_z}{T}\frac{dT}{dx}. \tag{4.11.11}$$

Коэффициент Нернста определяется выражением (4.11.1). Исключая E_y, получаем

$$\sigma^2 T Q_N = \sigma\gamma' - \sigma'\gamma, \tag{4.11.12}$$

где σ, σ', γ и γ' определяются выражениями (1.17), (1.18), (1.20) и (1.21) приложения 1 при $B = 0$:

$$|e|\,\sigma^2 T Q_N = (\sigma_n + \sigma_p)\left[(\sigma_n\mu_{Hn} + \sigma_p\mu_{Hp})\,k_B T\left(2r + \frac{5}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - (\sigma_n\mu_{Hn}\zeta_n + \sigma_p\mu_{Hp}\zeta_p)\right] - (\sigma_n\mu_{Hn} - \sigma_p\mu_{Hp}) \times$$

$$\times\left[(\sigma_n - \sigma_p)\,k_B T\left(r + \frac{5}{2}\right) - (\sigma_n\zeta_n - \sigma_p\zeta_p)\right]. \tag{4.11.13}$$

Это соотношение можно упростить:

$$|e|\,\sigma^2 Q_N = k_B\left\{(\sigma_n^2\mu_{Hn} + \sigma_p^2\mu_{Hp})\,r + \right.$$

$$\left. + \sigma_n\sigma_p(\mu_{Hn} + \mu_{Hp})\left[3r + 5 - \frac{\zeta_n + \zeta_p}{k_B T}\right]\right\}. \tag{4.11.14}$$

Заменяя σ_n^2 на $\sigma_n(\sigma-\sigma_p)$, σ_p^2 на $\sigma_p(\sigma-\sigma_n)$ и $-(\zeta_n+\zeta_p)$ на ε_G, находим

$$Q_N=\frac{k_B}{|e|}\left\{\left(\frac{\sigma_n}{\sigma}\mu_{Hn}+\frac{\sigma_p}{\sigma}\mu_{Hp}\right)r+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_n\sigma_p}{\sigma^2}(\mu_{Hn}+\mu_{Hp})\left(2r+5+\frac{\varepsilon_G}{k_BT}\right)\right\}. \qquad (4.11.15)$$

В примесном полупроводнике, когда σ_n или σ_p обращается в нуль, обращается в нуль также и амбиполярный член, содержащий произведение $\sigma_n\sigma_p$. В отличие от эффекта Холла знак Q_N не зависит от типа носителей заряда, а зависит только от знака r:

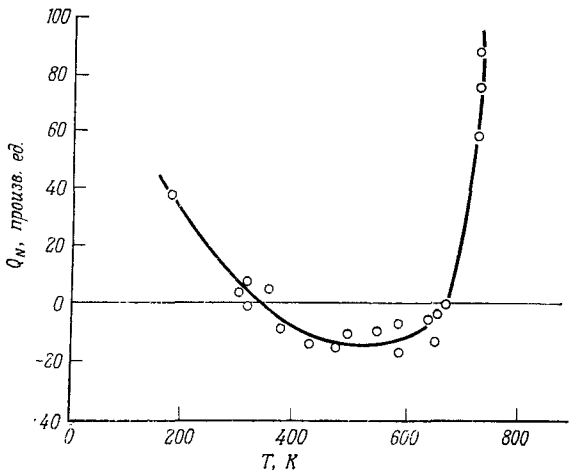
$$Q_N=\frac{k_B}{|e|}\mu_H r=\mu_H r\cdot 86 \text{ мкВ/К}. \qquad (4.11.16)$$

В области температур, соответствующей собственной проводимости, амбиполярный член определяет величину Q_N, если подвижности дырок и электронов примерно равны. Обычно при меньших температурах преобладает рассеяние на колебаниях решетки, которому в области примесной проводимости соответствует $r<0$. Поэтому при переходе из области примесной проводимости в область собственной проводимости можно ожидать изменения знака Q_N. При очень низких температурах в полупроводниках с не слишком большим значением диэлектрической проницаемости доминирует рассеяние на ионизованных примесях. Таким образом, имеется еще одна точка, в которой изменяется знак Q_N, соответствующая переходу от рассеяния на ионизованных примесях ($r=+{}^3/_2$) к рассеянию на колебаниях решетки ($r<0$). Этот переход иллюстрирует фиг. 4.26, на которой представлена экспериментальная зависимость Q_N от температуры для высоколегированного p-GaAs. В интервале температур от 300 до 700 К преобладает рассеяние на колебаниях решетки, в то время как ниже 300 К рассеяние происходит на ионизованных примесях, а выше 700 К полупроводник становится собственным.

Напряжение Нернста обычно составляет несколько микровольт, так как в (4.11.16) $r\sim 1$ и $\mu_H B_z\ll 1$. При $dT/dx=$ $=10$ К/см и ширине образца 1 мм напряжение V_y по порядку величины совпадает с указанным.

Различие между эффектами Холла и Нернста, о котором шла речь выше, может быть объяснено качественно, если рассмотреть дрейфовое движение носителей заряда. В электрическом поле электроны и дырки движутся в противоположных направлениях, в то время как под действием градиента температуры они движутся в одну сторону. Оба типа носителей в эффекте Холла отклоняются магнитным полем к одной и той же грани

образца, а в эффекте Нернста они отклоняются к противоположным граням. В примесном полупроводнике, поскольку в нем имеются носители заряда разных знаков, направление поля Холла зависит от знака носителей заряда, а направление поля Нернста — нет. Так же легко понять, почему эффект Нернста столь чувствителен к типу механизма рассеяния. Носители заряда, движущиеся от горячего конца образца к холодному, после охлаждения должны вернуться обратно, чтобы выполнялось условие электронейтральности. Таким образом, существуют два



Фиг. 4.26. Температурная зависимость коэффициента Нернста в p-GaAs с концентрацией дырок $1{,}0 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ [45].

противоположно направленных потока носителей одного знака: поток горячих носителей и поток холодных носителей. Магнитное поле отклоняет горячие носители от направления их дрейфа к одной грани образца, а холодные — к другой. Рассеяние уменьшает влияние магнитного поля. При $\tau_m \sim \varepsilon^r$ и $r > 0$ горячие носители рассеиваются реже, чем холодные, и направление поля Нернста определяется действующей на них силой Лоренца. При $r < 0$ то же справедливо для холодных носителей. Таким образом, направление поля Нернста зависит от знака r.

В собственном полупроводнике с равными подвижностями электронов и дырок обратный поток отсутствует, так как на холодном конце образца электроны и дырки рекомбинируют, в результате чего выделяется энергия ε_G. В собственном полупроводнике эта энергия (а не механизм рассеяния) определяет эффект Нернста.

Эффект Риги — Ледюка определяется из условий $j_x = j_y = w_y = 0$, где

$$j_x = \sigma\left(E_x + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\sigma'}{T}\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4.11.17}$$

$$j_y = \sigma\left(E_y + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\sigma'}{T}\frac{\partial T}{\partial y} - \gamma B_z\left(E_x + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - \gamma'\frac{B_z}{T}\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4.11.18}$$

$$-w_y = \sigma'\left(E_y + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\sigma''}{T}\frac{\partial T}{\partial y} - \gamma' B_z\left(E_x + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - \gamma''\frac{B_z}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \varkappa_l\frac{\partial T}{\partial y}. \tag{4.11.19}$$

В (4.11.17) мы пренебрегли произведениями малых величин B_z, E_y, $\partial\zeta/\partial y$ и $\partial T/\partial y$. В (4.11.19) входит вклад решетки в удельную теплопроводность

$$\varkappa_l = \varkappa + \frac{\sigma'^2 - \sigma\sigma''}{\sigma T}. \tag{4.11.20}$$

С помощью уравнений, приведенных в приложении 1, и (4.11.2) находим коэффициент Риги — Ледюка для полупроводника n-типа:

$$S_{RL} = -s_{RL}\mu_H\left(\frac{k_B}{e}\right)^2\frac{T\sigma}{\varkappa}, \tag{4.11.21}$$

где $\varkappa$ — полная удельная теплопроводность, а s_{RL} — фактор Риги — Ледюка, для которого при $\tau_m \sim \varepsilon^r$ имеем

$$s_{RL} = r(r+2) + \frac{5}{2}. \tag{4.11.22}$$

При $r = -1/2,\ 0,\ +3/2$ s_{RL} имеет значения 1,75, 2,5, 7,75 соответственно. Если вкладом решетки в $\varkappa$ можно пренебречь, то множитель $(k_B/e)^2 T\sigma/\varkappa$ есть не что иное, как обратное число Лоренца, равное $(r+5/2)^{-1}$. Тогда S_{RL} имеет величину того же порядка, что и холловская подвижность. Однако для большинства полупроводников вклад носителей заряда в значение удельной теплопроводности $\varkappa$ во много раз меньше самой величины $\varkappa$ и S_{RL} во столько же раз меньше μ_H. Пусть, например, отношение удельной теплопроводности носителей заряда к полной удельной теплопроводности составляет 10^{-5}, $\mu_H B_z = 2\cdot10^{-2}$ и $\partial T/\partial x = 10$ К/см; тогда получаем $\partial T/\partial y = 2\cdot10^{-6}$ К/см. Если выбрать ширину образца 1 мм, то чтобы наблюдать эффект Риги — Ледюка, необходимо измерять напряжение порядка 10^{-10} В. Поскольку это напряжение складывается с напряжением Нернста, которое на много порядков больше, вряд ли его удастся выделить. Только в полупроводниках с большим зна-

чением параметра эффективности Z [см. (4.10.25)] эффект Риги—Ледюка играет существенную роль.

Знак минус в выражении (4.11.21) соответствует случаю полупроводника n-типа; для полупроводника p-типа появляется знак плюс, так как μ_H содержит первую степень заряда электрона e, а остальные множители в (4.11.21) либо пропорциональны e^2, либо вообще не зависят от e.

Рассмотрим теперь дифференциальную термо-э. д. с. диска Корбино, которая упоминалась выше. В § 5 этой главы мы отмечали, что в силу радиальной симметрии системы Корбино $E_y = 0$ вдоль оси x. По той же причине $\partial T/\partial y = \partial\zeta/\partial y = 0$. Из условия $j_x = 0$, где

$$j_x = \sigma\left(E_x + \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \sigma'\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4.11.23}$$

находим

$$E_x = -\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{e}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{4.11.24}$$

и дифференциальную термо-э. д. с.

$$\frac{d\Theta}{dT} = -\frac{\sigma'}{\sigma T} - \frac{\zeta}{e}, \tag{4.11.25}$$

где σ и σ' определяются выражениями (1.3) и (1.4) (приложение 1). В случае полупроводника n-типа изменение $d\Theta/dT$, вызванное действием слабого магнитного поля, определяется выражением

$$\Delta\frac{d\Theta}{dT} = \frac{\sigma_n k_B T(r+5/2) - \sigma_n\zeta_n - \sigma_n\mu_{Mn}^2 B^2 k_B T(3r+5/2) + \sigma_n\zeta_n\mu_{Mn}^2 B^2}{|e|\,T\left(\sigma_n - \sigma_n\mu_{Mn}^2 B^2\right)} - \\ - \frac{k_B T(r+5/2) - \zeta_n}{|e|\,T}, \tag{4.11.26}$$

где $\mu_{Mn}^2 B^2 \ll 1$. Поэтому знаменатель первой дроби можно записать в виде $|e|T\sigma_n$, если первые два слагаемых числителя умножить на $\left(1 + \mu_{Mn}^2 B^2\right)$, и мы получаем следующий простой результат:

$$\Delta\frac{d\Theta}{dT} = -2r\frac{k_B}{|e|}\mu_{Mn}^2 B^2 = -(86\ \text{мкВ/К})\frac{2r(3r+3/2)!}{[(r+3/2)!]^3}\frac{9\pi}{16}(\mu B)^2, \tag{4.11.27}$$

где

$$\mu_{Mn}^2 = \mu^2\left(r_H^2 + T_M\right) = \mu_H^2 + T_M\mu^2, \tag{4.11.28}$$

а T_M определяется формулой (4.4.4). Для полупроводника p-типа в (4.11.27) будет стоять знак плюс. Дробь в (4.11.27), содержащая r, имеет значения от $+1$ при $r = -1/2$ до -30 при

$r = {}^3/_2$, т. е. величина ее и знак сильно зависят от механизма рассеяния.

Если воспользоваться численным примером, приведенным выше при обсуждении эффекта Нернста ($\mu = 10^4$ см^2/(В·с), $B = 0{,}1$ Т, $r = -{}^1/_2$), то значение $\Delta d\Theta/dT$ составит 1,5 мкВ/К, что по порядку величины совпадает с найденным в случае эффекта Нернста (разумеется, геометрия образца иная). Как уже упоминалось, знак $\Delta d\Theta/dT$ не меняется при изменении направления магнитного поля **B** на обратное.

Интересный результат получается для дифференциальной термо-э. д. с. диска Корбино в пределе сильного магнитного поля. Из (4.11.25) и из (1.27), (1.28) (приложение 1) получаем в случае полупроводника n-типа

$$\Delta \frac{d\Theta}{dT} = -2r \frac{k_B}{|e|} = -2r \cdot 86 \text{ мкВ/К}. \qquad (4.11.29)$$

В случае полупроводника p-типа знак минус в (4.11.29) меняется на плюс. Значение дифференциальной термо-э. д. с. диска Корбино при насыщении позволяет непосредственно определить величину r, которая по предположению определяет зависимость времени релаксации импульса от энергии $\tau_m \sim \varepsilon^r$. Если это предположение не оправданно, то вместо (4.11.29) мы имеем

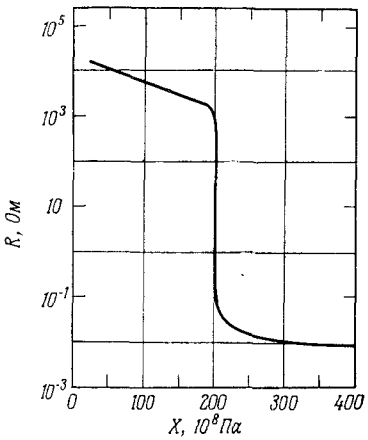
$$\Delta \frac{d\Theta}{dT} = -\frac{k_B}{|e|}\left(\frac{\left\langle \tau_m \frac{\varepsilon}{k_B T} \right\rangle}{\langle \tau_m \rangle} - \frac{\left\langle \tau_m^{-1} \frac{\varepsilon}{k_B T} \right\rangle}{\langle \tau_m^{-1} \rangle} \right). \qquad (4.11.30)$$

Интегралы, возникающие при усреднении с заданной функцией распределения, приходится находить численным методом. Выражения (4.11.29) и (4.11.30) справедливы только при выполнении условия $\mu_{Mn}^2 B^2 \gg 1$, что для большинства полупроводников соответствует настолько сильным магнитным полям, что они могут быть получены только в импульсном режиме, если их вообще можно получить. Это накладывает некоторые ограничения на применимость последних выражений.

§ 12. Пьезосопротивление

Изменение удельного электрического сопротивления полупроводника в результате действия внешнего одноосного механического напряжения или гидростатического давления называется эффектом пьезосопротивления. На фиг. 4.27 показана в полулогарифмическом масштабе экспериментальная зависимость сопротивления образца кремния n-типа от гидростатического дав-

ления X, сообщаемого образцу непроводящей жидкостью [46]. Вплоть до $X = 2 \cdot 10^{10}$ Па ($= 200$ кбар) наблюдается почти линейное уменьшение логарифма сопротивления с ростом X. Вслед за этим происходит резкое падение сопротивления почти на 6 порядков величины. Такое падение сопротивления может быть связано с фазовым переходом решетки кремния, которое мы не будем здесь обсуждать. Мы обратим внимание на начальный участок, где $\Delta \lg R \sim \Delta\rho/\rho \sim X$. Ниже мы введем тензор π_{ik}, две компоненты которого π_{11} и π_{12}



Фиг. 4.27. Сопротивление образца n-Si в зависимости от гидростатического давления [46].

описывают связь между $\Delta\rho/\rho$ и X в условиях гидростатического давления:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = (\pi_{11} + 2\pi_{12})\, X. \qquad (4.12.1)$$

Эти компоненты, а также π_{44} необходимы при описании одноосного механического напряжения в полупроводнике с кубической решеткой, когда направления **X** и плотности тока **j** составляют произвольный угол. В табл. 4.1 представлены различные комбинации этих компонент для направлений **X** и **j**, совпадающих

Таблица 4.1

Компоненты тензора пьезосопротивления

	X	j	$\frac{\Delta\rho}{\rho X}$
Продольные компоненты	⟨100⟩	⟨100⟩	π_{11}
	⟨110⟩	⟨110⟩	$\frac{\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{44}}{2}$
	⟨111⟩	⟨111⟩	$\frac{\pi_{11} + 2\pi_{12} + 2\pi_{44}}{3}$
Поперечные компоненты	⟨100⟩	⟨010⟩	π_{12}
	⟨110⟩	⟨1$\bar{1}$0⟩	$\frac{\pi_{11} + \pi_{12} - \pi_{44}}{2}$

с кристаллографическими осями. Вектор **X** считается положительным в случае растяжения и отрицательным в случае сжатия. Все три компоненты тензора могут быть определены путем трех измерений в различных направлениях. Полный тензор пьезосопротивления π_{ijkl} определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta\rho_{ij}}{\rho_0} = -\frac{\Delta\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \sum_{k,\, l=1}^{3} \pi_{ijkl} X_{kl}, \qquad (4.12.2)$$

где X_{kl} — тензор напряжения и σ_{ij} — тензор электропроводности. Из теории упругости хорошо известно, что X_{kl} является симметричным тензором и, следовательно, имеет 6 независимых компонент, которые формально можно считать компонентами шестимерного вектора (см., например, [47]):

$$X_1 = X_{11}, \quad X_2 = X_{22}, \quad X_3 = X_{33}, \quad X_4 = X_{23}, \quad X_5 = X_{31}, \quad X_6 = X_{12}.$$

То же самое справедливо и для тензора ρ_{ij} (в отсутствие магнитного поля). Тогда в *шестимерном пространстве* имеем тензор пьезосопротивления

$$\frac{\Delta\rho_i}{\rho_0} = \sum_{j=1}^{6} \pi_{ij} X_j, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6. \qquad (4.12.3)$$

Тензор упругости c_{ij} в шестимерном пространстве определяется выражением

$$X_i = \sum_{j=1}^{6} c_{ij} e_j, \qquad (4.12.4)$$

где вектор e_j содержит шесть компонент симметричного тензора деформации, определение которого дано в гл. 7, § 1. Подставляя в (4.12.3) выражение для X_j (4.12.4), находим

$$\frac{\Delta\rho_i}{\rho_0} = \sum_{j,\, k=1}^{6} \pi_{ij} c_{jk} e_k = \sum_{k=1}^{6} m_{ik} e_k. \qquad (4.12.5)$$

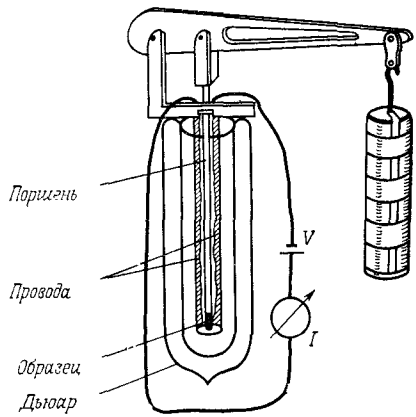
Здесь m_{ik} — тензор эластосопротивления. Более подробно эти тензоры рассмотрены в работах [48—50].

На фиг. 4.28 показано экспериментальное устройство для измерения пьезосопротивления. Пусть, например, груз 3 кг через рычаг, плечи которого относятся друг к другу как 5 : 1, действует на образец из кремния n-типа с поперечным сечением 2 мм^2. Тогда растяжение составляет $7{,}5 \cdot 10^7$ Па, а относительное изменение сопротивления $\Delta\rho/\rho_0$ равно 7,5% при комнатной температуре (так как $\pi_{11} = -102{,}2 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$, если предположить, что линейная связь $\Delta\rho/\rho_0 \sim X$ сохраняется вплоть до таких высо-

ких значений $\Delta\rho/\rho_0$. В германии эта линейная связь имеет место вплоть до напряжений порядка 10^7 Па.

Для измерения сопротивления используются электрические зонды. Если вектор плотности тока направлен перпендикулярно приложенному механическому напряжению, то используются образцы с боковыми отростками, аналогичные используемым в холловских измерениях. Для определения всех трех компонент тензора π_{ik} необходимо по меньшей мере одно поперечное измерение. В полученные экспериментальные данные необходимо внести поправки, учитывающие изменение длины и поперечного сечения образца под действием напряжения.

Внося подобные поправки, нужно учитывать также анизотропию удельного сопротивления [51].



Фиг. 4.28. Устройство для низкотемпературных измерений пьезосопротивления.

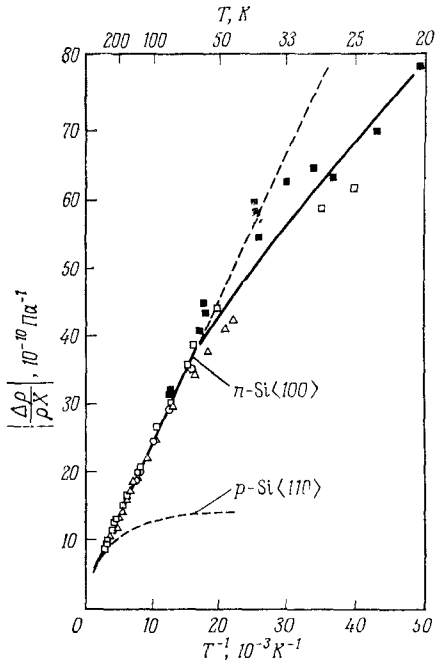
В табл. 4.2 приведены некоторые данные для германия и кремния. В предпоследнем столбце этой таблицы содержатся результаты измерения коэффициента продольного пьезосопротивления в направлении ⟨111⟩. Для кремния n-типа эта величина в пределах экспериментальной погрешности равна нулю. Продольный эффект в направлении ⟨100⟩ определяется величиной π_{11}, которая для германия n-типа сравнительно мала. Для объяснения этих результатов необходимо воспользоваться многодолинной моделью зонной структуры, которая рассматривается в гл. 7.

Таблица 4.2

Пьезосопротивление $\Delta\rho/\rho X$ (в единицах 10^{-11} Па$^{-1}$) при комнатной температуре

	ρ_0, Ом·см	π_{11}	π_{12}	π_{44}	$\frac{\pi_{11}+2\pi_{12}+2\pi_{44}}{3}$	$\frac{\pi_{11}+\pi_{12}+\pi_{44}}{2}$
n-Ge	16,6	−5,2	−5,5	−138,7	−96,6	−74,7
p-Ge	15,0	−10,6	+5,0	+98,6	+65,5	+41,5
n-Si	11,7	−102,2	+53,7	−13,6	−0,7	−31,1
p-Si	7,8	+6,6	−1,1	+138,1	+93,5	+71,8

Температурная зависимость пьезосопротивления кремния n- и p-типа представлена на фиг. 4.29 [52]. Для кремния n-типа изменение сопротивления в большом интервале температур пропорционально $1/T$. На языке многодолинной модели такое поведение можно объяснить перезаселением долин (гл. 7, § 5), в результате которого изменяется эффективная масса электропроводности. Кроме того, междолинное рассеяние, которое в некоторых полупроводниках определяет τ_m, также зависит от приложенного к образцу механического напряжения (см. также гл. 7, § 5).



Фиг. 4.29. Продольное пьезосопротивление n- и p-Si в зависимости от обратной температуры [52].

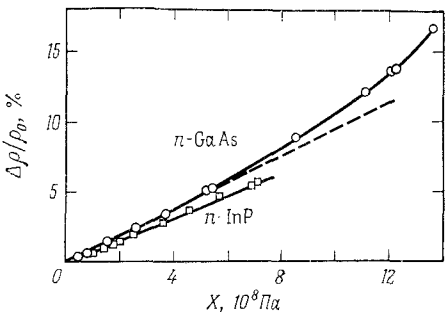
Согласно уравнению (1.3.3), концентрация носителей в собственном полупроводнике пропорциональна $\exp(-\varepsilon_G/2k_BT)$, где ширина запрещенной зоны ε_G зависит от межатомного расстояния и изменяется под действием механического напряжения. Таким образом,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{X}{2k_BT}\frac{d\varepsilon_G}{dX}. \qquad (4.12.6)$$

Экспериментально найденное значение $d\varepsilon_G/dX$ для германия с собственной проводимостью при комнатной температуре составляет $5\cdot10^{-8}$ мэВ/Па [53]. Из (2.1.31) следует, что эффективная масса зависит от ширины запрещенной зоны. Следовательно, механическое напряжение, меняя эффективную массу, изменяет также подвижность. Это наблюдалось в «прямых» соединениях $A^{III}B^{V}$, таких, как InSb, InAs, GaAs и InP, у которых дно зоны проводимости и максимум валентной зоны соответствуют одному и тому же значению $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k} = 0$). На фиг. 4.30 показано пьезосопротивление n-GaAs и n-InP. В n-GaAs, например, начальный наклон кривой составляет $9{,}6\cdot10^{-9}$%/Па. Так как ширина запрещенной зоны составляет 1,53 эВ, а коэффициент

сжимаемости $\varkappa = \Delta V/(VX) = 1{,}38 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$, то $\varepsilon_G \Delta\rho/(\rho X\varkappa) =$ $= 11$ эВ. Для n-InSb имеем соответственно $6 \cdot 10^{-8}$%/Па, $\varepsilon_G =$ $=0{,}27$ эВ, $\varkappa = 2{,}3 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$, $\varepsilon_G \Delta\rho/(\rho X\varkappa) = 7$ эВ. Последняя величина составляет для InAs 9 эВ и для InP 8 эВ. Изменение величины $\varepsilon_G \Delta\rho/(\rho X\varkappa)$ в интервале между 11 и 7 эВ мало по сравнению с изменением ширины запрещенной зоны [53].

Рассмотренные механизмы, описывающие действие механического напряжения на электросопротивление, в



Фиг. 4.30. Пьезосопротивление n-GaAs и n-InP в зависимости от гидростатического давления (из работы Сагара, см. [53]).

значительной мере компенсируют друг друга, и интерпретация полученных результатов часто оказывается весьма нелегкой задачей. Поэтому мы не будем здесь касаться пьезогальваномагнитных эффектов. В гл. 11, § 2, будет дана относительно простая интерпретация смещения края оптического поглощения под действием механического напряжения.

§ 13. Горячие электроны и время релаксации энергии

В приближенном решении уравнения Больцмана (4.2.16) мы ограничились случаем слабого электрического поля **E**. При качественном рассмотрении полученное решение можно использовать для вычисления члена $\partial f/\partial v_z$ в правой части (4.2.15). Если итерацию продолжить, то мы получим для f

$$f = f_0 - \tau_m \frac{eE_z}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \left(\tau_m \frac{eE_z}{m}\right)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2} + \ldots . \qquad (4.13.1)$$

При не слишком больших напряженностях поля E_z, когда скорость дрейфа электронов много меньше тепловой скорости $\left(\approx \sqrt{k_B T/m}\right)$, ряд (4.13.1) сходится. Выражение для скорости дрейфа

$$v_{dz} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_z \left(-\frac{e}{m}\tau_m \frac{\partial f}{\partial v_z} E_z\right) d^3v}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0 \, d^3v} \qquad (4.13.2)$$

содержит только нечетные степени E_z, если τ_m не зависит от направления $\mathbf{v}$. Интегралы от произведения четных степеней v_z на $\partial f_0/\partial v_z$, $\partial^3 f_0/\partial v_z^3$ и т. д. обращаются в нуль; точно так же обращаются в нуль интегралы от произведения нечетных степеней v_z на $\partial^2 f_0/\partial v_z^2$ и т. д. В результате для скорости дрейфа $v_{dz} = \mu E_z$ получаем

$$\mu E_z = \mu_0 (E_z + \beta E_z^3 + \ldots), \tag{4.13.3}$$

а для подвижности

$$\mu = \mu_0 (1 + \beta E_z^2 + \ldots), \tag{4.13.4}$$

где β — некоторый коэффициент, μ_0 — подвижность в слабом поле. Члены $(\beta E_z^3 + \ldots)$ описывают отклонение от закона Ома. Если разложение оборвать на члене βE_z^3, то носители называются теплыми; если же удержать и последующие члены разложения, то носители будут называться горячими.

Для количественного определения коэффициента β необходимо использовать теорию рассеяния, которая рассматривается в гл. 6. Для упрощения расчетов в случае горячих, а иногда и теплых носителей часто используется распределение Максвелла — Больцмана с электронной температурой T_e, которая больше температуры решетки:

$$f \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \tag{4.13.5}$$

Выбор функции распределения такого вида может быть оправдан, если рассмотреть приращение энергии электронов в единицу времени за счет электрического поля. Оно равняется скалярному произведению силы $e\mathbf{E}$ на скорость дрейфа $\mu\mathbf{E}$, т. е. $\mu e E^2$. При равновесии эта величина равна энергии, теряемой при столкновениях:

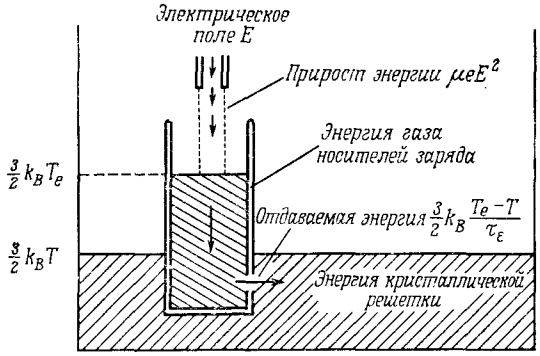
$$\mu e E^2 = -\left\langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right\rangle_{\text{столкн}}. \tag{4.13.6}$$

Если энергия, получаемая каким-то электроном от поля, быстро перераспределяется между другими носителями, то функция распределения (4.13.5) является хорошим приближением. Основное ее достоинство состоит в том, что интегралы, содержащие такую функцию распределения, могут быть вычислены аналитически. Поскольку при выборе иной, более реалистической функции распределения большинство экспериментально определенных величин изменяется лишь количественно, при исследовании теплых и горячих носителей мы ограничимся распределением Максвелла — Больцмана (4.13.5).

Посредством (4.2.52) мы вводим время релаксации энергии τ_ε. Используя (4.13.5) и (4.2.53), получаем в равновесном случае

$$\mu e E^2 = \frac{3}{2} k_B \frac{T_e - T}{\tau_\varepsilon}. \qquad (4.13.7)$$

На фиг. 4.31 это уравнение представлено в схематическом виде: потоки энергии изображены стрелками, а заштрихованные области соответствуют энергиям электронного газа и кристаллической решетки.



Фиг. 4.31. Схематическое изображение баланса энергии носителей заряда; показаны прирост энергии за счет внешнего электрического поля E и энергия, отдаваемая кристаллической решетке.

При равновесии при $E \neq 0$ средняя энергия носителей (равная $^3/_2\, k_B T_e$ в случае невырожденного электронного газа) всегда выше средней тепловой энергии ($^3/_2\, k_B T$). Носители обладают малой удельной теплоемкостью, а кристаллическая решетка, наоборот, большой.

В общем случае время релаксации импульса τ_m зависит от энергии носителей ε, поэтому подвижность $\mu = (e/m)\langle \tau_m \rangle$ является функцией электронной температуры T_e; эту функцию мы обозначим $g(T_e)$. Тогда омическая подвижность μ_0 есть $g(T)$. Разложим величину μ/μ_0 в ряд:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + (T_e - T)\frac{g'}{g}, \qquad (4.13.8)$$

где $g' = \partial g / \partial T_e |_{T_e = T}$, а g обозначает $g(T)$. В случае теплых электронов оборвем ряд на линейном члене и в (4.13.7) заменим $T_e - T$ на $(g/g')\,(\mu - \mu_0)/\mu_0$:

$$\mu e E^2 = \frac{3}{2} k_B \frac{g}{g'} \frac{\beta E^2}{\tau_\varepsilon}. \qquad (4.13.9)$$

Для случая теплых электронов вместо $(\mu - \mu_0)/\mu_0$ мы подставили βE^2, как это следует из (4.13.4). В этом приближении в левой части (4.13.9) мы можем заменить μ на μ_0; тогда для

времени релаксации получим выражение

$$\tau_\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{k_B T}{e}\frac{\beta}{\mu_0}\frac{d(\ln g)}{d(\ln T_e)}\Big|_{T_e=T} = \frac{T}{7740\text{K/B}}\frac{\beta}{\mu_0}\frac{d(\ln g)}{d(\ln T_e)}\Big|_{T_e=T}. \quad (4.13.10)$$

Если $\tau_m \sim \varepsilon^r$, то $d(\ln g)/d(\ln T_e) = 1/r$, что по порядку величины равно единице. Если при $T = 77$ К (температура жидкого азота) положить $\mu_0 = 10^4$ см^2/(В·с) и $|\beta| = 10^{-4}$ см^2/В^2, то получим $\tau_\varepsilon \sim 10^{-10}$ с. Это время релаксации отклонений от закона Ома, которое может быть измерено на частоте порядка $1/2\pi\tau_\varepsilon \approx \approx 1$ Ггц, т. е. в диапазоне СВЧ. Метод измерений τ_ε обсуждается в гл. 11, § 15.

Если τ_m убывает с ростом ε, т. е. $r < 0$, то множитель $d(\ln g)/d(\ln T_e)$ становится отрицательным. Поскольку τ_ε является положительной величиной, коэффициент β должен быть отрицательным. Поэтому в таком случае подвижность μ убывает с ростом напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Аналогичным образом можно показать, что при увеличении τ_m с ростом ε, т. е. $r > 0$, коэффициент β положителен. Значит в предельном случае, когда τ_m не зависит от энергии ε, следует ожидать обращения β в нуль, несмотря на то, что разложение (4.13.8) неприменимо. Однако до сих пор наше рассмотрение было лишь качественным; для вычисления β необходимо использовать результаты теории рассеяния (гл. 6).

В случае вырожденного полупроводника уравнение (4.13.7) следует заменить уравнением

$$\mu e E^2 = \frac{\langle \varepsilon(T_e)\rangle - \langle \varepsilon(T)\rangle}{\tau_\varepsilon}, \quad (4.13.11)$$

где $\langle \varepsilon(T_e)\rangle$ определяется выражением

$$\langle \varepsilon(T_e)\rangle = \frac{3}{2} k_B T_e F_{3/2}\left(\frac{\zeta_n}{k_B T_e}\right)\frac{N_c(T_e)}{n}. \quad (4.13.12)$$

Здесь $F_{3/2}(x)$ — интеграл Ферми для $j = {}^3/_2$ [см. (3.1.32)], а $N_c(T)$ дается выражением (3.1.31). В случае двух типов электронов с разными эффективными массами, но одинаковой температурой T_e [при $T_c = T$ такая ситуация описывается выражением (3.1.38)] имеем

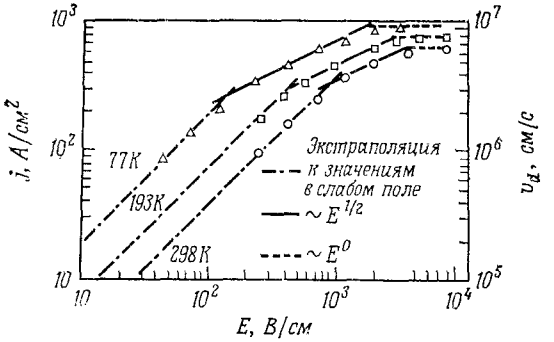
$$\langle \varepsilon(T_e)\rangle = \frac{3}{2n} k_B T_e\left[F_{3/2}\left(\frac{\zeta_n}{k_B T_e}\right) N_{c\Gamma}(T_e) + F_{3/2}\left(\frac{\zeta_n - \Delta_L}{k_B T_e}\right) N_{cL}(T_e)\right], \quad (4.13.13)$$

$$\mu(T_e) = \frac{n_\Gamma(T_e)}{n}\mu_\Gamma(T_e) + \frac{n_L(T_e)}{n}\mu_L(T_e), \quad (4.13.14)$$

где $N_{c\Gamma}(T)$, $N_{cL}(T)$, $n_\Gamma(T)$, $n_L(T)$ определяются формулами (3.1.39) и (3.1.38). Полученные выражения (4.13.13) и (4.13.14) понадобятся нам в гл. 11, § 2.

Для вычисления времени релаксации τ_ε нужно воспользоваться результатами теории рассеяния, которая развита в гл. 6.

Многие экспериментальные данные по отклонениям от закона Ома и временам релаксации энергии получены для примесных полупроводников в интервале напряженностей электрического поля, в котором концентрация носителей не зависит от поля. Вольтамперные характеристики тогда отражают изменение скорости дрейфа с напряженностью поля. Первые измерения в германии n-типа при 77, 193 и 298 К были проведены Райдером и Шокли [54]. Результаты этих измерений представлены на фиг. 4.32 в логарифмическом масштабе; при этом закон Ома

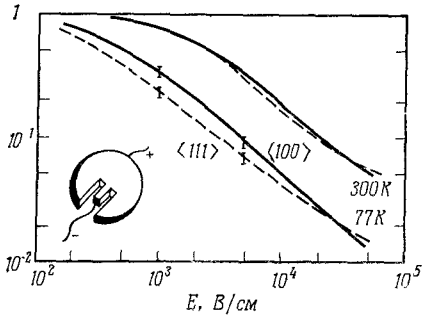


Фиг. 4.32. Плотность тока в n-Ge в зависимости от напряженности приложенного электрического поля [58].

изображается прямыми линиями с наклоном 45°. В зависимости от температуры решетки отклонения от прямых становятся заметными при напряженностях электрического поля в интервале от 10^2 до 10^3 В/см. Насыщение тока наступает при значениях поля несколько больше 2 кВ/см, когда скорости дрейфа $\sim 10^7$ см/с и почти не зависят от температуры решетки.

Отклонения от закона Ома принято показывать на графике зависимости отношения электропроводностей σ/σ_0 от напряженности поля (σ_0 — электропроводность в слабом поле). На фиг. 4.33 сплошные кривые соответствуют полю, приложенному вдоль направления ⟨100⟩, а штриховые — вдоль направления ⟨111⟩. На вставке показана форма образца из n-Ge [55, 56]. Положительный контакт делается большим, чтобы предотвратить инжекцию неосновных носителей (гл. 5, § 1). В данные внесена поправка на малое падение напряжения на массивной части образца. Однородность поля в нитевидной части образца ставилась под сомнение [57], хотя полупроводник легирован однородно.

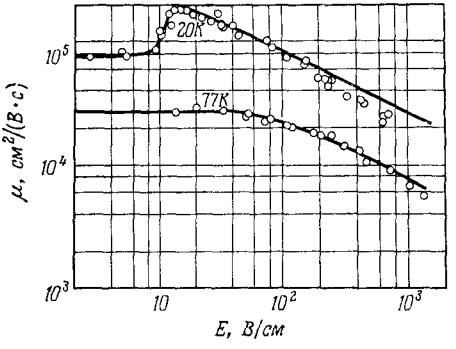
При низких температурах (20 К) для n-Ge могут наблюдаться положительные отклонения подвижности от ее значения в слабом поле, как это показано на фиг. 4.34 [58]. Считается, что они связаны с рассеянием на ионизованных примесях (гл. 6, § 6). Результаты, полученные для n-Si и n-GaAs представлены на



Фиг. 4.33. Электропроводность n-Ge в зависимости от напряженности приложенного электрического поля для двух кристаллографических направлений поля и двух значений температуры (показана форма образца) [55].

фиг. 7.14 и 7.21 (схематически), а для дырок в Ge и дырок в Si — на фиг. 8.6 и 8.9.

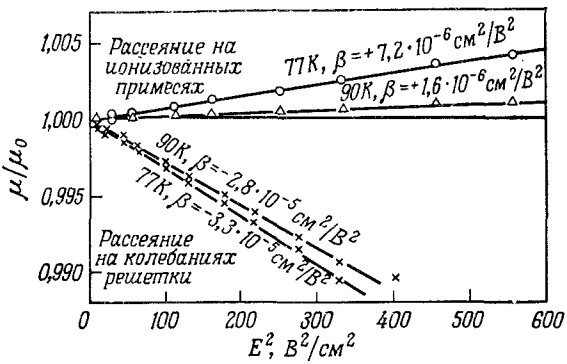
Поведение теплых электронов, которые характеризуются квадратичными отклонениями от закона Ома, показано на фиг. 4.35, где представлена зависимость отношения μ/μ_0 от E^2



Фиг. 4.34. Зависимость подвижности носителей в n-Ge от напряженности электрического поля при 20 и 77 К [58].

при 77 К и $N_D - N_A = 1{,}7 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ (положительные отклонения) и $N_D - N_A = 4 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ (отрицательные отклонения) [59]. Полученные прямые служат доказательством того, что малые отклонения μ/μ_0 от единицы квадратично зависят от поля. Анизотропия этих отклонений, видимая на фиг. 4.36, объясняется в гл. 7, § 5 (фиг. 7.8, a) [60]. Температурная зависимость коэффициента β является довольно сильной: $T^{-4{,}27}$ в чистом

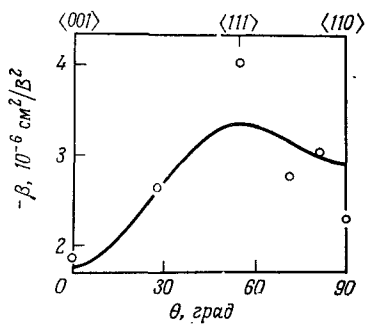
n-Ge и $\sim T^{-5,89}$ в n-Si [61]. Зависимость β от температуры в n-InSb представлена на фиг. 7.11; зависимость β от концентрации примесей в n-Ge — на фиг. 6.8, а связь между T_e и E в n-GaSb — на фиг. 11.17.



Фиг. 4.35. Подвижность носителей в двух образцах n-Ge с различными концентрациями примесей как функция квадрата напряженности внешнего электрического поля при 77 и 90 К [59].

При более высоких, чем показанные здесь, напряженностях поля экспериментальные значения отклоняются от прямых линий. Измерения выполнялись с помощью импульсной мостовой схемы.

Измерения частотной зависимости β были проведены в n-Ge при 100 К [60] с помощью устройства, аналогичного используемому в измерениях фотопроводимости (фиг. 12.1). Результаты

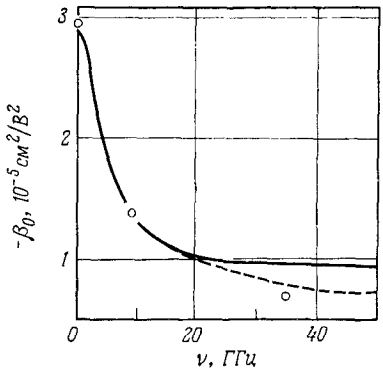


Фиг. 4.36. Экспериментальные значения величины $-\beta = -(\sigma - \sigma_0)/(\sigma_0 E^2)$ в n-Ge при 194 К в зависимости от угла θ между направлением приложенного электрического поля **E** и направлением [001] в плоскости $(1\bar{1}0)$ [60].

Кривая соответствует уравнению (7.5.49) и подогнана к экспериментальным точкам путем подбора подходящих значений параметров β_0 и γ в этом уравнении.

измерений, представленные на фиг. 4.37, можно объяснить комбинацией процессов релаксации энергии и импульса (штриховая линия) [62], так как учета релаксации только энергии [63] на более высоких частотах недостаточно. Времена релаксации

энергии τ_ε, полученные из этих и других данных, обсуждаются в гл. 6, § 8 (фиг. 6.20). На фиг. 6.28 представлены результаты



Фиг. 4.37. Частотная зависимость $-\beta_0$ (см. подпись к фиг. 4.36), полученная для n-Ge при 100 К в диапазоне СВЧ [62].

Значение при $\nu=0$ получено в постоянном поле. Сплошная линия получена путем подгонки, используя теорию, содержащую два параметра ($-\beta_0$ при $\nu=0$ и $\nu=\tau_\varepsilon$). Штриховая кривая построена с учетом известного значения времени релаксации импульса.

измерений τ_ε в n-GaAs и n-InAs. Значение τ_ε для p-Te в интервале температур от 150 до 190 К составляет $(6—7)\cdot 10^{-12}$ с и почти не зависит от температуры [64].

§ 14. Высокочастотная электропроводность

Уравнение Больцмана, в котором df/dt определяется выражением (4.2.13), содержит член $\partial f/\partial t$, который в случае синусоидальной зависимости напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ от времени также меняется со временем синусоидальным образом с той же частотой. Поскольку величина $\partial f/\partial t$ линейна по $\mathbf{E}$, а $\partial f_0/\partial t = 0$, при $\mathbf{E} \sim \exp(i\omega t)$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\omega (f - f_0). \tag{4.14.1}$$

Поэтому уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{e}{m}E_x + \ldots = -\frac{f - f_0}{\tau_m} \tag{4.14.2}$$

можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{e}{m}E_x + \ldots\right)(1 + i\omega\tau_m)^{-1}\frac{f - f_0}{\tau_m}. \tag{4.14.3}$$

Таким образом, все формулы, полученные выше для постоянного поля, могут быть перенесены на случай переменного поля, если в них заменить $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}(1+i\omega\tau_m)^{-1} = \mathbf{E}(1+\omega^2\tau_m^2)^{-1}(1-i\omega\tau_m)$. Обращаясь к уравнениям Максвелла, можно показать, что мнимая часть этого выражения дает вклад в диэлектрическую проницаемость, который играет большую роль в оптических свой-

ствах полупроводников. Подвижность в переменном поле μ_{ac} определяется выражением

$$\mu_{ac} = \frac{e}{m}\left\langle \frac{\tau_m}{1+\omega^2\tau_m^2} \right\rangle. \qquad (4.14.4)$$

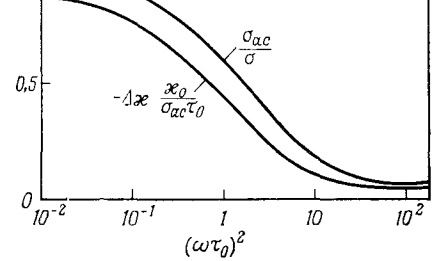
В частном случае рассеяния на деформационном акустическом потенциале, когда $\tau_m = \tau_0(\varepsilon/k_BT)^{-1/2}$, процедура усреднения может быть выполнена в аналитическом виде. Вводя обозначения $\omega\tau_0 = q$, $q^2 + \varepsilon/k_BT = y$, получаем

$$\frac{\mu_{ac}}{\mu} = \int_{q^2}^{\infty} \frac{(y-q^2)^2 \exp(-y+q^2)}{y}\, dy = \exp(q^2)\int_{q^2}^{\infty} y\exp(-y)\, dy -$$

$$- 2q^2\int_{q_2}^{\infty} \exp(-y)\, dy + q^4\int_{q^2}^{\infty} \frac{\exp(-y)}{y}\, dy =$$

$$= 1 - (\omega\tau_0)^2 - (\omega\tau_0)^4 \exp(\omega^2\tau_0^2)\,\mathrm{Ei}(-\omega^2\tau_0^2). \qquad (4.14.5)$$

При $\omega\tau_0 = 1$ имеем $\mu_{ac}/\mu_0 = 0{,}596$, в то время как без усреднения $(1+\omega^2\tau_0^2)^{-1} = 0{,}500$. При $\omega\tau_0 = 4$ величина μ_{ac}/μ_0 почти



Фиг. 4.38. Частотная зависимость электропроводности в переменном электрическом поле и ее вклада в диэлектрическую проницаемость.

в 2 раза больше, чем $(1+\omega^2\tau_0^2)^{-1}$. На фиг. 4.38 показана зависимость величины $\sigma_{ac}/\sigma \sim \mu_{ac}/\mu_0$ от $\omega\tau_0$. Там же отложена численно найденная зависимость вклада в диэлектрическую проницаемость $-\Delta\varkappa\varkappa_0$ (в единицах $\sigma_{ac}\tau_0$) от $\omega\tau_0$. Следует упомянуть, что интегралы, возникающие при усреднении в (4.14.4) и в аналогичном ему выражении для $\Delta\varkappa$, совпадают с приведенными в приложении 1 [(1.3)—(1.11)] с той лишь разницей, что циклотронная частота $\omega_c = eB/m$ заменяется на ω.

Время релаксации импульса по порядку величины обычно составляет 10^{-12}—10^{-13} с. В диапазоне СВЧ $\omega\tau_m \sim 1$. Максимальный размер образца обычно порядка одной длины волны

или меньше, поэтому в измерениях необходимо использовать волноводную технику. Чемплин и Гловер [65] показали, что во всем интервале температур необходимо принимать ряд предосторожностей экспериментального характера, таких, как плотная пригонка образца в волноводе.

При больших амплитудах переменного электрического поля электроны становятся теплыми или даже горячими и сказывается влияние нелинейных членов, зависящих от времени релаксации энергии τ_ε. В упрощенном случае моноэнергетических теплых носителей из уравнений баланса энергии и импульса [66] вместо (4.14.4) получаем

$$\mu_{ac} = \frac{e}{m}\frac{\tau_m}{1+\omega^2\tau_m^2}\left\{1+\frac{\beta E^2}{4\left(1+\omega^2\tau_m^2\right)}\left[\frac{2}{1+\omega^2\tau_m^2}+\frac{1}{1+4\omega^2\tau_m^2}\right]\right\}, \tag{4.14.6}$$

где коэффициент β определяется выражением (4.13.4).

§ 15. Шум

Шумом называется выходной сигнал прибора, такого, как резистор или $p-n$-структура, когда входной сигнал отсутствует [67]. Даже в отсутствие электрического тока хаотическое тепловое движение носителей заряда в резисторе приводит к появлению шума на его выходе. Такой шум называется тепловым; мощность его дается формулой Найквиста [68] (см. также [69])

$$P = \langle(\Delta V)^2\rangle \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = 4k_BT\,\Delta f, \tag{4.15.1}$$

где ΔV — напряжение шума, Z — импеданс и Δf — ширина полосы частот прибора, который используется для измерения шума. При ширине полосы 100 кГц резистор с сопротивлением 10^4 Ом при комнатной температуре создает шум со среднеквадратичным значением напряжения 4 мкВ.

Кроме флуктуаций скорости носителей v_i существуют флуктуации числа носителей n, обусловленные принципом детального равновесия между генерацией и рекомбинацией электронно-дырочных пар. Если для простоты ограничиться одномерным случаем, то для тока I мы получим

$$I = e\sum_{i=1}^{n} v_i \approx \bar{n}e\bar{v} + e\sum_{i=1}^{\bar{n}}(v_i-\bar{v}) + e\bar{v}(n-\bar{n}), \tag{4.15.2}$$

где $\bar{n}$ и $\bar{v}$ — средние значения соответствующих величин. Обозначая $v_i-\bar{v}$ через Δv_i и $n-\bar{n}$ через Δn, получаем следующее

выражение для среднего квадрата флуктуаций тока $\Delta I = I - \bar{n}e\bar{v}$:

$$\overline{(\Delta I)^2} = \overline{\left(e\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i\right)^2} + e^2\bar{v}^2\overline{(\Delta n)^2}. \qquad (4.15.3)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения описывает тепловой шум, а второе — дробовой шум; последний зависит от среднего значения тока $e\bar{n}\bar{v}$. Существует множество других источников шума, например поверхность кристалла [70, 71] (поверхностная рекомбинация, поверхностные состояния, см. гл. 5, § 8, и гл. 14), а также металлические контакты.

Для p — n-перехода или транзистора вводится шум-фактор F, который определяется как отношение полной мощности шума к мощности теплового шума P (4.15.1). Принято пользоваться не самой величиной F, а величиной $10\lg F$, что обозначается прибавлением к числу символа дБ (децибел). В малошумящих транзисторах шум-фактор обычно имеет значение 2—3 дБ.

Если мощность шума не зависит от частоты (в определенном частотном интервале), то шум называется белым. Мощность шума протравленного нитевидного образца германия падает с ростом частоты f приближенно как $1/f$ (шум $1/f$) [72, 73] в интервале от 10 до 10^4 Гц. Это явление можно объяснить процессами генерации и рекомбинации на локализованных уровнях энергии внутри запрещенной зоны, которые распределены в значительном интервале энергии [74] (см. также гл. 6, § 14).

Экспериментальные исследования шума на горячих носителях в области низкотемпературной ударной ионизации (гл. 10, § 1) были выполнены Лауцем и Пилкуном [75—77], а также Эрлбахом и Ганном [78] и Брайантом [79] при температуре жидкого азота. В то время как ток пробоя возрастает на два порядка величины, $\overline{(\Delta I)^2}/\Delta f$ возрастает в 10^8 раз с образованием резкого максимума [75—77]. Идея, лежащая в основе эксперимента Эрлбаха — Ганна, заключается в том, что, полагая мощность шума P равной $4k_BT_e\Delta f$, можно непосредственно измерять электронную температуру. Однако из теоретического исследования Прайса [80] следует, что такое предположение можно делать лишь с некоторой осторожностью. Расчеты для простого случая рассеяния на акустических фононах привели к следующему результату: отношение температуры шума к электронной температуре возрастает с напряженностью поля от единицы до 1,14 в области больших полей. Эрлбах и Ганн измерили температуру шума в n-Ge при 77 К на частоте 420 МГц вплоть до 3600 К при 1,4 кВ/см; оказалось, что она сильно зависит от ориентации. Однако расчеты Прайса могут быть неприменимыми

вследствие сильного влияния рассеяния на оптических фононах. Кроме того, Прайс указал на наличие вклада в шум от междолинного рассеяния в многодолинном полупроводнике [80].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Onsager L.*, Phys. Rev., **37**, 405 (1931).
2. *Onsager L.*, Phys. Rev., **38**, 2265 (1931).
3. *Smith A. C., Janak J. F., Adler R. B.*, Electronic Conduction in Solids, McGraw-Hill, New York, 1967, Ch. 3.5.
4. *De Groot S. R.*, Thermodynamics of Irreversible Processes, North-Holland, Amsterdam, 1953. (Имеется перевод: *С. Р. де Гроот*, Термодинамика необратимых процессов, ИЛ, М., 1956.)
5. *Spitzer L.*, Physics of Fully Ionized Gases, Wiley, New York, 1962. (Имеется перевод: *Л. Спитцер*, Физика полностью ионизованного газа, «Мир», М., 1965.)
6. *Madelung O., Weiss H.*, Zs. Naturforsch., **9a**, 527 (1954).
7. *Волокобинская Н. И., Галаванов В. В., Наследов Д. Н.*, ФТТ, **1**, 756 (1959).
8. *Willardson R. K., Harman T., Beer A. C.*, Phys. Rev., **96**, 1512 (1954).
9. *Corbino O. M.*, Phys. Zs., **12**, 561 (1911).
10. *Welker H., Weiss H.*, Zs. f. Phys., **138**, 322 (1954).
11. *Weiss H.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 1, Academic Press, New York, 1966.
12. *Dikhoff J. A. M.*, Solid-State Electronics, **1**, 202 (1960).
13. *Camp P. R.*, Journ. Appl. Phys., **25**, 459 (1954).
14. *Rupprecht H., Weber R., Weiss H.*, Zs. Naturforsch., **15a**, 783 (1960).
15. *Herring C.*, Journ. Appl. Phys., **31**, 1939 (1960).
16. *Weiss H.*, Journ. Appl. Phys. Suppl., **32**, 2064 (1961).
17. *Smith A. C., Janak J. F., Adler R. B.*, Electronic Conduction in Solids, McGraw-Hill, New York, 1967, Appendix I.
18. *Sze S. M.*, Physics of Semiconductor Devices, Wiley, New York, 1969. (Имеется перевод: *С. М. Зи*, Физика полупроводниковых приборов, «Энергия», М., 1973.)
19. *Appel J.* в книге Progress in Semiconductors (eds. A. F. Gibson, R. E. Burgess), Vol. 5, Temple Press, London, 1960, p. 142.
20. *Geballe T. H., Hull G. W.*, Phys. Rev., **110**, 773 (1958).
21. *Weiss H.* в книге Halbleiter und Phosphore (eds. M. Schön, H. Welker), Vieweg, Braunschweig, 1957, p. 497.
22. *Schröder J.*, Rev. Sci. Instr., **34**, 615 (1963).
23. *Fulkerson W., Moore J. P., Williams R. K., Graves R. S., McElroy D. L.*, Phys. Rev., **167**, 765 (1968).
24. *Madelung O.*, Grundlagen der Halbleiterphysik, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 71, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1970, p. 117.
25. *Zemansky M. W.*, Heat and Thermodynamics, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1957, p. 192.
26. *Gold A. V., McDonald D. K. C., Pearson W. B., Templeton I. M.*, Phil. Mag., **5**, 765 (1960).
27. *Geballe T. H., Hull G. W.*, Phys. Rev., **98**, 940 (1955).
28. *Geballe T. H., Hull G. W.*, Phys. Rev., **94**, 1134 (1954).
29. *Kroko L. J., Milnes A. G.*, Solid State Electronics, **8**, 829 (1965).
30. *Herring C.* в книге Halbleiter und Phosphore (eds. M. Schön, H. Welker), Vieweg, Braunschweig, 1958, p. 184.
31. *Frederikse H. P. R.*, Phys. Rev., **91**, 491 (1953).
32. *Frederikse H. P. R.*, Phys. Rev., **92**, 248 (1953).

33. *Sosnowski L.*, Semiconductors, Proc. Intern. School of Physics XXII, Acad. Press, London, 1963, p. 436.
34. *Zemansky M. W.*, Heat and Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 1951, p. 301.
35. *Becker R.*, Theory of Heat, 2nd edition revised by G. Leibfried, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1967. (Имеется перевод: *Р. Беккер*, Теория теплоты, «Энергия», М., 1974.)
36. *Bowers R., Ure Jr. R. W., Bauerle J. E., Cornish A. J.*, Journ. Appl. Phys., **30**, 930 (1959).
37. *Иоффе А. Ф.*, Полупроводниковые термоэлементы, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1960.
38. *Frederikse H. P. R., Johnson V. A., Scanlon W. W.* в книге Solid State Physics (eds. K. Lark-Horowitz, V. A. Johnson), Vol. 6B, Acad. Press, New York, 1959, p. 114.
39. *Putley E. H.*, The Hall Effect and Related Phenomena, Butterworth, London, 1960, p. 84.
40. *Wolfe R.*, Semiconductor Products, **6**, 23 (1963).
41. *Wolfe R.*, Sci. American, **210**, 70 (1964).
42. *Wagini H.*, Zs. Naturforsch., **19a**, 1541 (1964).
43. *Beer A. C., Armstrong J. A., Greenberg J. N.*, Phys. Rev., **107**, 1506 (1957).
44. *Sosnowski L.*, Proc. 7th Intern. Conf. Phys. Semicond. 1964, Dunod, Paris, 1964, p. 341.
45. *Nasledov D. N.*, Journ. Appl. Phys., **32**, Suppl., 2140 (1961).
46. *Minomura S., Drickamer H. G.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **23**, 451 (1962).
47. *Kittel C.*, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., Wiley; New York, 1965, Ch. 4. (Имеется перевод: *Ч. Киттель*, Введение в физику твердого тела, ИЛ, М., 1963.)
48. *Paige E. G. S.* в книге Progress in Semiconductors (eds. A. F. Gibson, R. E. Burgess), Vol. 8, Temple Press, London, 1964, p. 159.
49. *Smith C. S.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 6, Acad. Press, New York, 1958, p. 175.
50. *Voigt W.*, Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, Leipzig, 1928.
51. *Smith C. S.*, Phys. Rev., **94**, 42 (1954).
52. *Morin F. J., Geballe T. H., Herring C.*, Phys. Rev., **105**, 525 (1957).
53. *Keyes R. W.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 11, Acad. Press, New York, 1960, p. 172, Table V, and p. 176, Table VI.
54. *Ryder E. J., Schokley W.*, Phys. Rev., **81**, 139 (1951).
55. *Heinrich H., Seeger K.*, Verhandl. DPG(VI), **2**, 26 (1967).
56. *Seeger K.*, Acta Phys. Austriaca, **27**, 1 (1968).
57. *Heinrich H., Bauer G., Kasperkovitz D.*, Phys. Stat. Sol., **28**, K51 (1968).
58. *Ryder E. J.*, Phys. Rev., **90**, 766 (1953).
59. *Gunn J. B.* в книге Progress in Semiconductors (eds. A. F. Gibson R. E. Burgess), Vol. 2, Temple Press, London, 1957, p. 213.
60. *Seeger K.*, Zs. Phys., **172**, 68 (1963).
61. *Kästner R., Röth E. P., Seeger K.*, Zs. Phys. **187**, 359 (1965).
62. *Seeger K., Hess K. F.*, Zs. Phys., **237**, 252 (1970).
63. *Morgan T. N., Kelly C. E.*, Phys. Rev., **137**, A1573 (1965).
64. *Kahlert H., Hess K., Seeger K.*, Solid State Commun., **7**, 1149 (1969)
65. *Champlin K. S., Glover G. H.*, Journ. Appl. Phys., **37**, 2355 (1966).
66. *Seeger K., Hess K.*, Zs. Phys., **237**, 252 (1970).
67. *Van der Ziel A.*, Noise, Prentice-Hall, New York, 1954.
68. *Nyquist H.*, Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
69. *Becker R.*, Theory of Heat, 2nd edition revised by G. Leibfried, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1967, Ch. 85. (Имеется перевод: *Р. Беккер*, Теория теплоты, изд-во «Энергия», М., 1974.)
70. *McWhorter A. L.* в книге Semiconductor Surface Physics (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 207.

71. *Kingston R. H., McWhorter A. L.*, Phys. Rev., **103,** 534 (1956).
72. *Maple T. G., Bess L., Gebbie H. A.*, Journ. Appl. Phys, **26,** 490 (1955).
73. *Sautter D., Seiler K.*, Zs. Naturforsch., **12a,** 490 (1957).
74. *Shockley W.*, Electrons and Holes in Semiconductors, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1950, p. 345. (Имеется перевод: *В. Шокли*, Теория электронных полупроводников, ИЛ, М., 1953.)
75. *Lautz G., Pilkuhn M.*, Naturwiss., **47,** 198 (1960).
76. *Lautz G., Pilkuhn M.*, Naturwiss., **47,** 394 (1960).
77. *Pilkuhn M.*, Thesis, T. H. Braunschweig, 1960.
78. *Erlbach E., Gunn J. B.*, Proc. 6th Intern. Conf. Phys. Semicond., 1962, The Institute of Physics and the Phys. Soc., London, p. 128.
79. *Bryant C. A.*, Bull. Am. Phys. Soc. (Ser. II), **9,** 62 (1964).
80. *Price P. I.* в книге Fluctuation Phenomena in Solids (ed. R. E. Burgess), Acad. Press, New York, 1964, Ch. 8.

Глава 5. ДИФФУЗИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

При обсуждении уравнений (4.10.8)—(4.10.11) было показано, что при наличии в веществе градиента температуры в нем возникает градиент концентрации $\nabla_T n$, который приводит к появлению диффузионного тока $\mathbf{j} = -eD_n \nabla_T n$. Согласно соотношению Эйнштейна (4.10.12), коэффициент диффузии D_n пропорционален подвижности электронов. В этой главе мы рассмотрим диффузию инжектированных носителей в полупроводниках с неоднородным легированием, что присуще $p-n$-переходам и транзисторам.

§ 1. Инжекция и рекомбинация

В гл. 1, § 2, мы рассматривали перенос электрона извне в полупроводник. Однако обычно в полупроводник инжектируются электронно-дырочные пары, а не носители одного типа. Наиболее простой для понимания способ инжекции заключается в генерации электронно-дырочной пары вследствие внутреннего фотоэффекта при поглощении светового кванта $\hbar\omega \geqslant \varepsilon_G$, где ε_G — ширина запрещенной зоны. Пусть n_0 и p_0 — концентрации электронов и дырок в отсутствие падающего света. При освещении эти концентрации увеличиваются на $\Delta n = n - n_0$ и $\Delta p = p - p_0$ соответственно. В полупроводнике n-типа $n_0 \gg p_0$. При не слишком большой интенсивности света $n_0 \gg \Delta n = \Delta p \gg p_0$. Знак равенства соответствует отсутствию рекомбинации на примесях или захваченных носителях. Изменение относительного числа дырок, которые в этом случае называются неосновными носителями, оказывается весьма большим, в то время как число электронов, называемых основными носителями, увеличивается незначительно:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \gg \frac{\Delta n}{n_0}. \tag{5.1.1}$$

В случае полупроводника p-типа ситуация прямо противоположна. Вследствие сильного относительного увеличения концентрации неосновных носителей рассмотренный процесс носит название инжекции неосновных носителей.

Аналогичным образом действуют на полупроводник другие источники ионизирующего излучения, такие, как пучок электронов высокой (несколько кэВ) энергии. На практике инжекцию

носителей принято создавать с помощью укрепленного на полупроводнике металлического зонда. Прикладывая между зондом и полупроводниковым образцом напряжение соответствующей величины и полярности, получают инжекцию. К такому же результату приводит образование на поверхности полупроводника p — n-перехода с помощью диффузии примесей при повышенной температуре: если на переходе поместить металлический контакт и приложить к нему напряжение соответствующей полярности, это приведет к весьма устойчивой инжекции.

Генерируемые таким образом электронно-дырочные пары постепенно исчезают за счет рекомбинации, в результате которой электрон проводимости превращается в связанный валентный электрон. Энергия связи ε_G выделяется либо в виде фотонов, либо в виде фононов — квантов колебаний решетки. В специальном типе p — n-перехода, называемом полупроводниковым лазером, можно получать даже когерентное излучение (гл. 13, § 2). Однако в большинстве полупроводниковых соединений преобладает генерация фононов, особенно в тех полупроводниках, у которых вблизи середины запрещенной зоны имеются уровни энергии примеси или дефекта решетки. В этом случае носитель может быть захвачен на этот уровень, а затем рекомбинировать. Поверхность кристалла содержит большое число (до 10^{15} на 1 см^2) подобных состояний, которое по порядку величины совпадает с концентрацией атомов на поверхности (гл. 14, § 1).

Если концентрации носителей n и p не слишком велики, то скорость рекомбинации R' определяется их произведением:

$$R' = Cnp = C(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p), \qquad (5.1.2)$$

где C — коэффициент пропорциональности. В равновесном состоянии в отсутствие инжекции ($\Delta n = \Delta p = 0$) скорость рекомбинации равна скорости тепловой генерации Cn_0p_0. Эта величина нас не интересует, и, исключая ее из R', получаем для R:

$$R = C[(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) - n_0p_0] \approx C(n_0\Delta p + p_0\Delta n). \qquad (5.1.3)$$

В этом выражении мы пренебрегли произведением двух малых величин $\Delta n\Delta p$. Это оправданно, если Δn и Δp много меньше концентрации основных носителей. В случае $\Delta n \approx \Delta p$ в полупроводнике n-типа $p_0\Delta n \ll n_0\Delta p$, и (5.1.3) принимает вид

$$R \approx Cn_0\Delta p, \qquad (5.1.4)$$

в то время как в полупроводнике p-типа $n_0\Delta p \ll p_0\Delta n$ и

$$R \approx Cp_0\Delta n. \qquad (5.1.5)$$

Таким образом, скорость рекомбинации пропорциональна избыточной концентрации неосновных носителей. Введем, напри-

мер, в полупроводнике n-типа понятие времени жизни избыточных дырок τ_p, которое определяется следующим образом:

$$R = -\frac{d}{dt}\Delta p = \frac{\Delta p}{\tau_p}, \tag{5.1.6}$$

где t — время. Решение (5.1.6) имеет вид

$$\Delta p(t) = \Delta p(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right); \tag{5.1.7}$$

оно справедливо при выключении инжекции в момент времени $t = 0$. Сравнивая (5.1.4) и (5.1.6), для константы C получаем

$$C = \frac{1}{n_0\tau_p}. \tag{5.1.8}$$

Аналогично в случае полупроводника p-типа получаем

$$C = \frac{1}{p_0\tau_n}. \tag{5.1.9}$$

После этого краткого введения в сущность явлений инжекции [1]) и рекомбинации обратимся к диффузии избыточных носителей, которые в большинстве случаев генерируются на некоторых участках поверхности кристалла.

§ 2. Диффузия и соотношение Эйнштейна

Если с помощью инжекции увеличить концентрацию носителей в какой-то области кристалла, то это приведет к диффузии избыточных носителей во всем кристалле, который предполагается однородным. Плотность диффузионного тока $\mathbf{j}$ пропорциональна градиенту концентрации:

$$\mathbf{j} = -eD_n\nabla_r n. \tag{5.2.1}$$

Здесь D_n — коэффициент диффузии, а знак минус означает, что носители уходят из области с повышенной концентрацией. Коэффициент диффузии измеряется в единицах см^2/с. В выражении (5.2.1) $e < 0$ для электронов; для дырок $e > 0$ и D_n, n заменяются на D_p, p соответственно. При наличии электрического поля выражение (5.2.1) принимает вид [см. (4.10.11)]

$$\mathbf{j} = n|e|\mu_n\mathbf{E} - eD_n\nabla_r n. \tag{5.2.2}$$

Введем электростатический потенциал Φ: $\mathbf{E} = -\nabla_r\Phi$. В тепловом равновесии, когда ток в кристалле равен нулю, получаем

$$0 = n|e|\mu_n\nabla_r\Phi + eD_n\nabla_r n, \tag{5.2.3}$$

[1]) Относительно экстракции носителей, см., например, [1].

откуда после деления на neD_n находим

$$0 = \frac{e\mu_n \nabla_r \Phi}{|e| D_n} + \frac{\nabla_r n}{n}. \tag{5.2.4}$$

После интегрирования получаем

$$\text{const} = \frac{e\mu_n}{|e| D_n} \Phi + \ln n. \tag{5.2.5}$$

Точка начала отсчета потенциала Φ произвольна, поэтому можно положить const $= \ln n_i$, где n_i — концентрация носителей в собственном полупроводнике. Решая уравнение (5.2.5) относительно n, находим

$$n = n_i \exp\left(-\frac{e\mu_n}{|e| D_n} \Phi\right). \tag{5.2.6}$$

Используя соотношение Эйнштейна для невырожденного электронного газа (4.10.12)

$$D_n = \mu_n \frac{k_B T}{|e|}, \tag{5.2.7}$$

получаем

$$n = n_i \exp\left(-\frac{e\Phi}{k_B T}\right), \tag{5.2.8}$$

где $e < 0$ для электронов и $e > 0$ для дырок. Неоднородное распределение носителей, обусловленное потенциальным барьером $e\Phi$ (например, на p — n-переходе), приводит к появлению диффузии.

Тот же результат может быть получен с помощью термодинамических соображений. В самом деле, если электростатическую потенциальную энергию $e\Phi$ заменить гравитационной потенциальной энергией mgh, где m — масса молекулы воздуха, g — ускорение силы тяжести и h — высота над земной поверхностью, а n_i в (5.2.8) трактовать как плотность числа молекул воздуха на поверхности Земли, то n — плотность числа молекул воздуха на высоте h (барометрическая формула Перрена). Экспоненциальный множитель в (5.2.8) часто называют множителем Больцмана. Подобное рассмотрение справедливо только в случае независимых друг от друга частиц, что не имеет места ни в жидкости, ни в вырожденном электронном газе (гл. 4, § 10).

При температуре 300 К $k_B T/|e| = 25{,}9$ мВ; если выбрать подвижность равной 1000 см^2/(В·с), то $D_n = 25{,}9$ см^2/с. Соотношение Эйнштейна позволяет определить коэффициент диффузии по известной подвижности. Если $\mu \sim T^{-1}$, то диффузия не зависит от температуры.

Допустим теперь, что в полупроводниковый образец инжектируются электроны и дырки в равном количестве: $\Delta n = \Delta p$. Изменение концентрации носителей во времени и в пространстве описывается уравнением непрерывности (4.2.37), в котором, однако, правая часть равна не нулю, а разности между скоростями генерации и рекомбинации. Обозначим скорость генерации через G. Скорость рекомбинации определяется выражением (5.1.6). Тогда уравнение непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta n + \frac{1}{e}\operatorname{div}\mathbf{j}_n = G - \frac{\Delta n}{\tau_n}, \tag{5.2.9}$$

где

$$\mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E} - eD_n \nabla_r n. \tag{5.2.10}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ может быть внутренним полем, обусловленным различием коэффициентов диффузии электронов и дырок. Исключая $\mathbf{E}$ из (5.2.10) и соответствующего выражения для плотности дырочного тока, получаем

$$\frac{\mathbf{j}_n - |e| D_n \nabla_r n}{\sigma_n} = \frac{j_p + |e| D_p \nabla_r p}{\sigma_p}. \tag{5.2.11}$$

Поскольку $\sigma_n \sim n\mu_n \sim nD_n$ и $\sigma_p \sim pD_p$, из (5.2.11) получаем

$$\frac{\mathbf{j}_n}{nD_n} - \frac{\mathbf{j}_p}{pD_p} = |e|\left(\frac{\nabla_r n}{n} + \frac{\nabla_r p}{p}\right). \tag{5.2.12}$$

Рассмотрим амбиполярную диффузию, предполагая, что суммарная плотность тока равна нулю:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p = 0, \tag{5.2.13}$$

а также что

$$\nabla_r p = \nabla_r n. \tag{5.2.14}$$

Коэффициент амбиполярной диффузии D введем соотношением

$$\mathbf{j}_n = |e| D \nabla_r n \tag{5.2.15}$$

и, используя (5.2.12)—(5.2.14), получим для него выражение

$$D = \frac{(n+p) D_n D_p}{nD_n + pD_p}. \tag{5.2.16}$$

В полупроводнике n-типа $n \gg p$, поэтому $D \approx D_p$. Таким образом, амбиполярная диффузия определяется *неосновными* носителями. Введем понятие диффузионной длины L_n с помощью соотношения

$$\Delta n(x) = n(x) - n_0 = \Delta n(0) \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right); \tag{5.2.17}$$

тогда из выражений (5.2.9) и (5.2.10) следует

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}, \tag{5.2.18}$$

если предположить, что $(\partial/\partial t)\Delta n = \operatorname{div} \mathbf{E} = G = 0$, т. е.

$$\frac{\Delta n}{\tau_n} = D_n \operatorname{grad} \operatorname{div} n = D_n \frac{\Delta n}{L_n^2}. \tag{5.2.19}$$

Полагая вновь, что $D_n = 25{,}9$ см^2/с, и выбирая типичное значение времени жизни $\tau_n = 10$ мкс, получаем диффузионную длину 0,5 мм. Когда минимальное расстояние от поверхности меньше диффузионной длины, определенной с помощью объемного времени жизни τ_n, может оказаться существенной поверхностная рекомбинация (5.8.1).

Для полноты картины в наше обсуждение времени жизни и диффузионной длины включим также понятия времени максвелловской релаксации τ_d и дебаевской длины L_D. Рассмотрим отклонение распределения *основных* носителей от равновесного, как, например, в плазменной волне. Уравнение непрерывности в отсутствие генерации и рекомбинации и при плотности тока $\mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta n + \frac{1}{e} \operatorname{div} (\sigma_n \mathbf{E}) = 0. \tag{5.2.20}$$

Предполагается, что электропроводность не зависит от координат. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{e\,\Delta n}{\varkappa \varkappa_0}, \tag{5.2.21}$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость, а $\varkappa_0$ — электрическая постоянная. Уравнение (5.2.20) решается путем интегрирования по времени:

$$\Delta n \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right), \tag{5.2.22}$$

где время максвелловской релаксации τ_d определяется выражением

$$\tau_d = \frac{\varkappa \varkappa_0}{\sigma} = 8.8 \cdot 10^{-14}\ [\text{с}/(\text{Ом} \cdot \text{см})]\, \varkappa \rho \tag{5.2.23}$$

(ρ — удельное сопротивление полупроводника). Для n-Ge ($\varkappa = 16$) с концентрацией электронов 10^{14} см$^{-3}$, что соответствует удельному сопротивлению 15 Ом·см, при комнатной температуре $\tau_d = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ с.

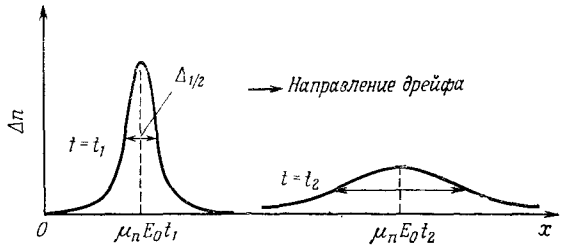
Если в выражении (5.2.18) вместо τ_n подставить время максвелловской релаксации τ_d, а вместо L_n — «дебаевскую длину» L_D, то

$$L_D = \sqrt{D_n \tau_d} = \sqrt{\frac{k_B T}{e^2}} \sqrt{\frac{\varkappa \varkappa_0}{n}}, \tag{5.2.24}$$

откуда получаем при комнатной температуре

$$L_D(300\text{K}) = \sqrt{\frac{\varkappa}{n} \cdot 1{,}42 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}}. \qquad (5.2.25)$$

В упомянутом примере с германием дебаевская длина L_D составляет $4{,}8 \cdot 10^{-5}$ см; на этой длине укладывается 1730 атомов германия и только два электрона проводимости. В полупроводниках, легированных сильнее, неоднородности легирования существенно не меняют однородный характер распределения основных носителей на расстоянии, равном дебаевской длине.



Фиг. 5.1. Профили решения уравнения диффузии носителей заряда, инжектированных в точке $x = 0$ в длинный нитевидный образец, к которому приложено электрическое поле E_0, в моменты времени t_1 и $t_2 > t_1$ [2].

Вернемся к *неосновным* носителям и рассмотрим одновременно диффузию и дрейф их во внешнем электрическом поле с напряженностью E_0. Введем новую пространственную координату

$$x' = x - \mu E_0 t, \qquad (5.2.26)$$

где μ — амбиполярная дрейфовая подвижность:

$$\mu = |e|(n-p)\frac{\mu_n\mu_p}{\sigma} = \frac{(n-p)\,\mu_n\mu_p}{n\mu_n + p\mu_p} \qquad (5.2.27)$$

[в числителе стоит знак минус в отличие от сходного в других отношениях выражения для коэффициента амбиполярной диффузии (5.2.16)]. Например, при $p \ll n$ амбиполярная дрейфовая подвижность в основном равна подвижности неосновных носителей μ_p.

Решение уравнения (5.2.9) с учетом (5.2.26) имеет вид

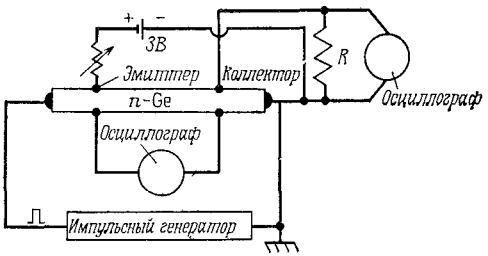
$$\Delta n = \frac{\Delta n_0 \exp(-t/\tau_n)}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4Dt}\right), \qquad (5.2.28)$$

где Δn_0 — концентрация инжектированных пар. На фиг. 5.1 показаны профили решения (5.2.28) в моменты времени t_1 и t_2.

Во время дрейфа пространственное распределение избыточных носителей уширяется за счет диффузии. Полуширина импульса в момент времени t определяется выражением

$$\Delta_{1/2} = 4\sqrt{Dt \ln 2} = 3{,}33\sqrt{Dt}. \qquad (5.2.29)$$

Так, при $D = 31$ см^2/с, что соответствует случаю электрона в p-Si, и $t = 60$ мкс полуширина импульса равна 1,7 мм. При этом чтобы электрон прошел расстояние 1 см, необходимо приложить поле $E_0 = 14$ В/см. Допустим, что на расстоянии d от



Фиг. 5.2. Устройство Хейнса — Шокли.

точки инжекции расположен коллектор, что позволяет определить время дрейфа t, а также (по известной площади профиля) время жизни τ. Амбиполярная подвижность μ может быть определена по формуле

$$\mu = (\sqrt{1 + a^2} - a)\frac{d}{E_0 t}, \qquad (5.2.30)$$

в которой

$$a = \left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right)\frac{n + p}{n - p}\frac{k_B T}{eE_0 d}. \qquad (5.2.31)$$

Множитель, содержащий a, в (5.2.30) обусловлен влиянием диффузии носителей на время дрейфа.

Подобный эксперимент впервые был проведен Хейнсом и Шокли [3]. Схема использованного в эксперименте устройства показана на фиг. 5.2. Концы нитевидного образца подсоединены к импульсному генератору. Дырки инжектируются в образец n-Ge из эмиттирующего контакта, расположенного на одной из боковых граней образца. Под действием приложенного импульсного поля носители заряда дрейфуют в направлении коллектора. Последовательно с коллектором включено сопротивление R порядка 10^4 Ом; ток коллектора измеряется с помощью осциллографа, регистрирующего падение напряжения на сопротивлении R. Контакт коллектора является выпрямляющим и смещен

в обратном направлении (см. § 3 этой главы). Малый обратный ток сильно зависит от концентрации дырок вблизи поверхности контакта и увеличивается, когда к контакту подходят дрейфующие дырки.

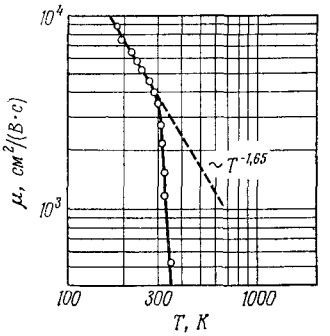
Точность измерений ограничена величиной отношения полуширины импульса $\Delta_{1/2}$ к длине дрейфа $d = \mu E_0 t$. Поскольку напряженность поля E_0 по существу равна приложенному напряжению V_0, деленному на d, для d имеем

$$d = \sqrt{\mu V_0 t}; \tag{5.2.32}$$

поэтому для отношения $\Delta_{1/2}/d$ получаем

$$\frac{\Delta_{1/2}}{d} = 3{,}33\sqrt{\frac{D}{\mu V_0}}, \tag{5.2.33}$$

т. е. это отношение пропорционально $V_0^{-1/2}$. Для получения большей точности нужно по возможности увеличивать приложенное напряжение. Вследствие выделения джоулева тепла необходимо работать в импульсном режиме, как показано на фиг. 5.2. При очень больших напряженностях электрического поля E_0 подвижность начинает зависеть от E_0 (горячие электроны; гл. 4, § 13).

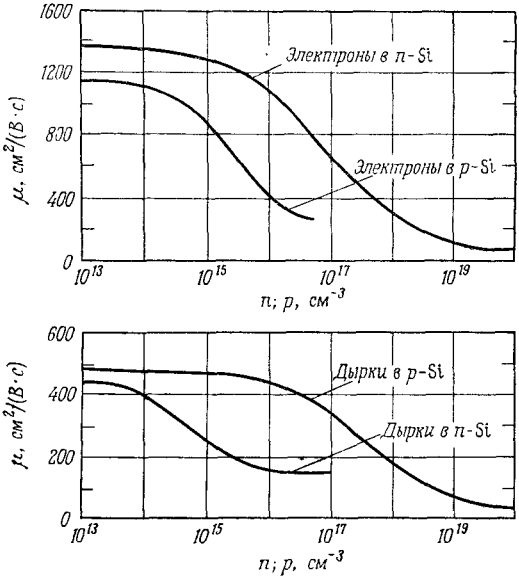


Фиг. 5.3. Экспериментальная зависимость дрейфовой подвижности от температуры [4].

Сравнивая суммарные импульсы, снятые с различных коллекторов, установленных на разных расстояниях от эмиттера, можно, используя (5.2.28), определить время жизни τ. Отношение *площадей* профилей, определяющее временно́е поведение импульсов, полученных в моменты времени t_1 и t_2, равно $\exp[(t_2 - t_1)/\tau]$. Отношение *амплитуд* импульсов, равное $\sqrt{t_2/t_1}\exp[(t_2 - t_1)/\tau]$, менее пригодно для определения времени жизни, поскольку отношение t_2/t_1 в условиях эксперимента является не столь хорошо известным, как разность $t_2 - t_1$.

На фиг. 5.3 показана экспериментальная температурная зависимость подвижности электронов, полученная с помощью описанного выше устройства. Ниже комнатной температуры подвижность пропорциональна $T^{-1{,}65}$. Выше комнатной температуры полупроводник становится собственным и амбиполярная подвижность, пропорциональная $n - p$, сильно уменьшается.

Для электронов в кремнии $\mu \sim T^{-2,5}$, для дырок в германии и кремнии n-типа $\mu \sim T^{-2,33}$ и $\mu \sim T^{-2,7}$ соответственно. На фиг. 5.4 показана зависимость дрейфовых подвижностей как неосновных, так и основных носителей (для них дрейфовая подвижность вычислялась по известной холловской подвижности) от концентрации носителей в кремнии n- и p-типа при комнатной температуре. Концентрации носителей приблизительно



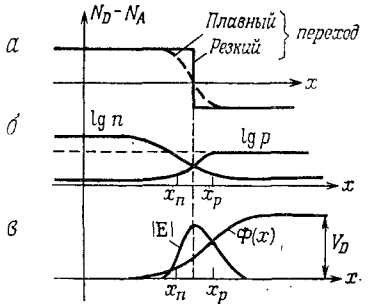
Фиг. 5.4. Подвижность основных и неосновных носителей в кремнии n- и p-типа при комнатной температуре как функция концентрации основных носителей [2].

равны концентрациям ионизованных примесей. Уменьшение подвижности с ростом концентрации примесей обусловлено рассеянием на ионизованных примесях [см. (6.3.22)]. Различие в подвижностях носителей заряда данного сорта в полупроводниках n- и p-типа частично может быть связано со взаимодействием между носителями.

§ 3. p — n-переход

Рассмотрим полупроводниковый монокристалл, легированный в одной части донорами, а в другой — акцепторами. В действительности переход между обеими частями кристалла является плавным, как это показано на фиг. 5.5, *а* штриховой линией (плавный переход). Для упрощения расчетов мы рассмотрим

показанный на фиг. 5.5, *а* сплошной линией резкий переход, в котором область n-типа с постоянной полной концентрацией доноров граничит с областью p-типа, где постоянна полная концентрация акцепторов. Эта идеализированная картина резкого перехода позволит понять физическую сущность явлений на переходе.



Фиг. 5.5. Резкий p — n-переход при термодинамическом равновесии.

а — пространственное распределение доноров и акцепторов; *б* — пространственное распределение электронов и дырок; *в* — распределение потенциала и напряженности электрического поля (о краях энергетических зон см. фиг. 5.9).

Рассматривая эту проблему, Шотки [5] решал одномерное уравнение Пуассона

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = \begin{cases} |e|N_A/\varkappa\varkappa_0 & \text{в области } p\text{-типа}, \\ -|e|N_D/\varkappa\varkappa_0 & \text{в области } n\text{-типа}, \end{cases} \qquad (5.3.1)$$

пренебрегая пространственным зарядом, обусловленным носителями, который, очевидно, много меньше пространственного заряда, обусловленного ионизованными примесями. Последнее справедливо по следующей причине. Поскольку всюду в области перехода в отсутствие электрического тока величина $np = n_i^2$ постоянна, минимальное значение суммы $n + p = n + n_i^2/n$, равное $2n_i$ при $n = n_i$, должно быть много меньше N_D и N_A; в противном случае переход невозможен по определению. При столь малом минимальном значении на всем переходе носителей недостаточно, чтобы они могли дать заметный вклад в величину пространственного заряда на переходе.

Потенциал Φ как функция координаты x определяется интегрированием уравнения (5.3.1):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{|e|}{2\varkappa\varkappa_0} N_A (x - x_p)^2 + \Phi_p & \text{в области } p\text{-типа}, \\ -\frac{|e|}{2\varkappa\varkappa_0} N_D (x - x_n)^2 + \Phi_n & \text{в области } n\text{-типа}. \end{cases} \qquad (5.3.2)$$

Постоянные интегрирования Φ_p и Φ_n связаны друг с другом условием непрерывности при $x = 0$:

$$\frac{|e|}{2\varkappa\varkappa_0} N_A x_p^2 + \Phi_p = -\frac{|e|}{2\varkappa\varkappa_0} N_D x_n^2 + \Phi_n. \qquad (5.3.3)$$

Внутреннюю разность потенциалов $\Phi_n - \Phi_p = V_D$ называют диффузионным потенциалом или иногда потенциальным барьером:

$$V_D = \frac{|e|}{2\varkappa\varkappa_0}(N_A x_p^2 + N_D x_n^2). \tag{5.3.4}$$

Второе граничное условие заключается в непрерывности в точке $x = 0$ электрического поля, которое равно производной $\Phi(x)$ по x. Это условие приводит к следующей связи между другой парой постоянных интегрирования:

$$-N_A x_p = N_D x_n. \tag{5.3.5}$$

Из вида выражений (5.3.2) ясно, что область перехода простирается до точки x_p в области p-типа и до точки x_n в области n-типа. Поскольку значение $x = 0$ лежит между областями n- и p-типа, одна из постоянных x_n или x_p является отрицательной. Таким образом, полная ширина перехода равна

$$d = |x_n - x_p|. \tag{5.3.6}$$

Значение d легко найти из (5.3.4) и (5.3.5). Прибавим к обеим частям (5.3.5) $N_A x_n$ и умножим их на $N_D(x_n - x_p)/(N_D + N_A)$; использовав, кроме того, уравнение (5.3.5), получим

$$\frac{N_D N_A}{N_D + N_A}(x_n - x_p)^2 = N_D x_n (x_n - x_p) = N_D x_n^2 + N_A x_p^2. \tag{5.3.7}$$

Если забыть о множителе $|e|/2\varkappa\varkappa_0$, то правая часть полученного выражения в точности равна V_D, как следует из определения (5.3.4). Следовательно, для $d = |x_n - x_p|$ имеем

$$d = \sqrt{\frac{2\varkappa\varkappa_0}{|e|}(N_D^{-1} + N_A^{-1})V_D}. \tag{5.3.8}$$

[Если кроме V_D на переход действует напряжение смещения V_B, то для d мы получим

$$d = \sqrt{\frac{2\varkappa\varkappa_0}{|e|}(N_D^{-1} + N_A^{-1})(V_D + V_B)}, \tag{5.3.9}$$

т. е. d пропорционально $\sqrt{V_D + V_B}$.]

Какова величина диффузионного потенциала V_D? Как видно из (5.3.2), потенциальная энергия электрона $-|e|\Phi(x)$ велика в области p-типа и мала в области n-типа, и разность между ними равна $-|e|V_D$. В невырожденном электронном газе область n-типа можно описывать выражением (5.2.8), где $\Phi = \Phi_n$ и $n = n_n$, а область p-типа — тем же выражением с $\Phi = \Phi_p$ и $n = n_p$. Тогда в отсутствие внешнего напряжения отношение n_p

к n_n определяется выражением

$$\frac{n_p}{n_n} = \exp\left[-\frac{|e|(\Phi_n - \Phi_p)}{k_B T}\right] = \exp\left(-\frac{|e| V_D}{k_B T}\right). \quad (5.3.10)$$

Для дырок с $e = |e|$ имеем аналогичное выражение

$$\frac{p_p}{p_n} = \exp\left[-\frac{|e|(\Phi_p - \Phi_n)}{k_B T}\right] = \exp\frac{|e| V_D}{k_B T}. \quad (5.3.11)$$

В равновесном состоянии (в отсутствие электрического тока) из (1.3.6) следует

$$n_p p_p = n_n p_n = n_i^2. \quad (5.3.12)$$

При данной температуре собственная концентрация n_i есть константа вещества; поэтому отношение n_p/n_n можно записать в виде $n_i^2/p_p n_n$. В случае полной ионизации примесей и в отсутствие компенсации концентрация электронов n_n в области n-типа равна полной концентрации доноров N_D и аналогично $p_p = N_A$. Решая уравнение (5.3.10) относительно V_D, получаем

$$V_D = \frac{k_B T}{|e|} \ln \frac{n_n}{n_p} = \frac{k_B T}{|e|} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2} = \frac{k_B T}{|e|}\left(\ln \frac{N_D}{n_i} + \ln \frac{N_A}{n_i}\right). \quad (5.3.13)$$

Удобно ввести десятичные логарифмы. При комнатной температуре ($T = 300$ К) получаем

$$V_D = 59{,}6 \text{ мВ}\left[\lg\left(\frac{N_D}{n_i}\right) + \lg\left(\frac{N_A}{n_i}\right)\right]. \quad (5.3.14)$$

Так, в образце германия с $n_i = 2{,}4 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $N_D = 2{,}4 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ и $N_A = 2{,}4 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ (p — n-переход, как правило, несимметричен) значение V_D, вычисленное из (5.3.14), составляет 0,24 В.

Измерение температурной зависимости V_D позволяет определить $n_i(T)$, зная которую легко получить из (1.3.3) ширину запрещенной зоны ε_G. Для этого перепишем выражение (5.3.13) в следующем виде:

$$|e| V_D = k_B T \ln(N_D N_A) - k_B T \ln n_i^2 =$$

$$= k_B T \ln\left(\frac{N_D N_A}{C}\right) - 3 k_B T \ln T + \varepsilon_G. \quad (5.3.15)$$

В узком интервале температур величины, стоящие под знаком логарифма, можно считать постоянными. Тогда V_D является линейной функцией температуры T. Экстраполируя полученную прямую до $T = 0$, находим значение ε_G.

Как можно измерить V_D? p — n-переход можно рассматривать как конденсатор, поскольку, как это было показано выше,

в области перехода носителей заряда обоих знаков меньше, нежели вне этой области. В первом приближении будем рассматривать $p-n$-переход как плоскопараллельный конденсатор. Если через A обозначить площадь поперечного сечения перехода, то емкость C будет определяться выражением $C = \varkappa\varkappa_0 A/d$. Вклад свободных носителей заряда в диэлектрическую проницаемость $\varkappa$ на переходе можно не учитывать. Согласно (5.3.9), график зависимости $1/C^2$ от V_B представляет собой прямую, которая пересекает ось абсцисс в точке $-V_D$.

В качестве численного примера рассмотрим при комнатной температуре кремний с $N_D \gg N_A$ и удельным сопротивлением ρ_p на стороне перехода p-типа. Если емкость измеряется в нанофарадах (нФ), мы получим

$$\left(\frac{A \cdot 33 \text{ нФ} \cdot \text{см}^{-2}}{C}\right)^2 = \rho_p (V_D + V_B) \text{ (Ом} \cdot \text{см} \cdot \text{В)}^{-1}. \quad (5.3.16)$$

Последнее соотношение между C и V_B часто не удается проверить экспериментально. Дело в том, что $p-n$-переход является плавным, а не резким. Более реалистический подход основан на предположении, что переход линеен с постоянным градиентом концентрации легирующих примесей:

$$\frac{d}{dx}(N_D - N_A) = \text{const}. \quad (5.3.17)$$

В этом случае уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} \sim -\frac{|e|}{\varkappa\varkappa_0} x. \quad (5.3.18)$$

Интегрируя, находим емкость перехода (барьерную емкость)

$$C \sim (V_D + V_B)^{-1/3}, \quad (5.3.19)$$

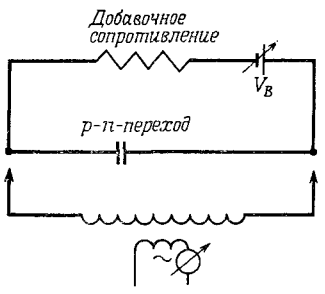
откуда следует линейная связь между C^{-3} и V_B. Для типичного диода показатель степени C имеет значения между —2 и —3. Поэтому для определения этого показателя полезно построить в двойном логарифмическом масштабе экспериментальную зависимость C от V_B. Для измерения емкости в мост переменного тока включается резонансный контур, переменное напряжение на котором много меньше, чем постоянное напряжение, подключаемое через большое добавочное сопротивление [6] (фиг. 5.6). $p-n$-переход, используемый как конденсатор переменной емкости, называется варикапом; это устройство служит для автоматической подстройки резонансного контура.

На фиг. 5.7 показано другое практическое применение $p-n$-перехода — счетчик заряженных частиц высокой энергии. Например, α-частицы с энергией 8,78 МэВ, испускаемые источни-

ком с торием C′ (изотопом полония Po^{212}), имеют в кремнии длину свободного пробега 60 мкм. Согласно (5.3.16), ширина перехода d в кремнии с $N_D \gg N_A$ при комнатной температуре составляет

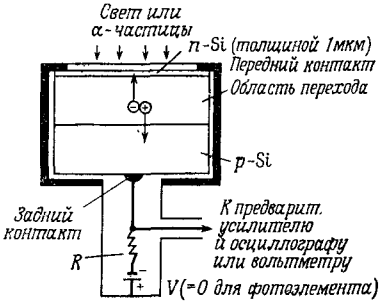
$$d = 0{,}33 \text{ мкм} \sqrt{\frac{\rho_p}{\text{Ом} \cdot \text{см}}} \sqrt{\frac{V_D + V_B}{\text{В}}}. \qquad (5.3.20)$$

Подставляя типичные значения $\rho_p = 1000$ Ом·см и $V_B = 40$ В, получим $d = 65$ мкм, т. е. ширина перехода выбрана больше, чем длина пробега α-частиц. Каждая α-частица путем ударной



Фиг. 5.6. Устройство для измерения емкости p — n-перехода в зависимости от напряжения смещения V_B.

Смещенный в обратном направлении p—n-переход показан в виде конденсатора. Измерительный прибор в первичной обмотке регистрирует резонанс при изменении частоты



Фиг. 5.7. Смещенный в обратном направлении p — n-переход, используемый для детектирования частиц высокой энергии или света.

С помощью компенсации методом дрейфа ионов лития (гл. 1, § 3) область перехода может быть сделана собственной

ионизации порождает электронно-дырочную пару с энергией 3,5 эВ, более чем в три раза превышающей ширину запрещенной зоны в кремнии $\varepsilon_G = 1{,}1$ эВ. (Ударная ионизация в полупроводниках рассматривается в гл. 10.) Если все электронно-дырочные пары растянуты полем, то действующий как конденсатор p — n-переход получает заряд $(8{,}78 \cdot 10^6/3{,}5) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ А·с = $= 4 \cdot 10^{-13}$ А·с. Выбирая площадь поверхности перехода $A = 1$ см^2 и напряжение смещения $V_B = 40$ В $\gg V_D$, получаем из (5.3.16) значение емкости 165 пФ. Таким образом, амплитуда импульса на переходе составляет $4 \cdot 10^{-13}$ А·с/165 пФ = $= 2{,}4$ мВ на каждую α-частицу. При бóльших значениях напряжения смещения емкость уменьшается и амплитуда импульса увеличивается. Верхний предел напряжения смещения ограничен электрическим пробоем, приводящим к повреждению p — n-перехода. Однако уже при значительно меньшем напряжении смещения через переход начинает течь темновой ток,

приводящий к шуму. Темновой ток и уровень шума увеличиваются с ростом напряжения смещения. Поэтому существует оптимальное значение напряжения смещения, зависящее от типа детектора и от ширины полосы усилителя, который используется в соединении с детектором. Средняя продолжительность жизни детектора заряженных частиц ограничена радиационными повреждениями. Вместо заряженных частиц можно детектировать также кванты света, причем это возможно без использования напряжения смещения (фотоэлемент, см. гл. 5, § 9).

До сих пор не учитывался ток, протекающий через переход (кроме небольшого числа носителей, генерируемых излучением). Теперь мы исследуем выпрямляющие свойства p — n-перехода, рассматривая *диффузию* и *рекомбинацию* носителей заряда на переходе. Вначале рассмотрим ситуацию, когда скоростью генерации G можно пренебречь и рекомбинация мала (диффузионная длина много больше дебаевской длины). Другая ситуация, которую мы рассмотрим затем, заключается в том, что сильная генерация носителей преобладает над обратным током в плоскостном кристаллическом диоде.

В стационарном состоянии ($\partial \Delta n/\partial t = 0$) в отсутствие генерации носителей ($G = 0$) уравнение непрерывности (5.2.9) для дырок ($e > 0$) имеет вид

$$\frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_p = -\frac{p - p_n}{\tau_p}. \tag{5.3.21}$$

В первом приближении, если внешнее напряжение много меньше диффузионного, в выражении (5.2.10) можно пренебречь слагаемым $\sigma\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j}_p = -eD_p \nabla_r p. \tag{5.3.22}$$

В этом случае решение уравнения (5.3.21) имеет вид

$$p(x) - p_n = [p(x_n) - p_n] \exp\left(-\frac{x - x_n}{L_p}\right), \tag{5.3.23}$$

где введена диффузионная длина $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$ и использовано граничное условие $p(\infty) = p_n$.

Приложим к переходу напряжение V, полярность которого противоположна полярности обратного напряжения смещения V_B в (5.3.9): $V = -V_B$ (прямое напряжение смещения). При $V = 0$ концентрация дырок в точке $x = x_n$ $p(x_n)$ равна p_n; в данном случае она увеличивается на множитель Больцмана:

$$\frac{p(x_n)}{p_n} = \exp\left(\frac{|e|V}{k_B T}\right). \tag{5.3.24}$$

Последнее верно при не слишком большом напряжении V, пока $p(x_n) \ll p_p$. Подставим в (5.3.23) значение $p(x_n)$ из (5.3.24):

$$p(x) - p_n = p_n\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right]\exp\left(-\frac{x-x_n}{L_p}\right). \quad (5.3.25)$$

Из (5.3.22) следует выражение для x-компоненты $\mathbf{j}_p$ (индекс x мы опускаем):

$$j_p = \left(|e|p_n\frac{D_p}{L_p}\right)\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right]\exp\left(-\frac{x-x_n}{L_p}\right). \quad (5.3.26)$$

Предполагается, что дырочная диффузионная длина L_p много больше переходной области $x_p - x_n$; поэтому последнюю экспоненту можно положить равной единице, и мы получаем

$$j_p = \left(|e|p_n\frac{D_p}{L_p}\right)\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right]. \quad (5.3.27)$$

Аналогичное выражение получается для электронной плотности тока j_n. Суммарная плотность тока $j = j_p + j_n$ определяется формулой [1]) [7, 8]

$$j = j_s\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right], \quad (5.3.28)$$

где

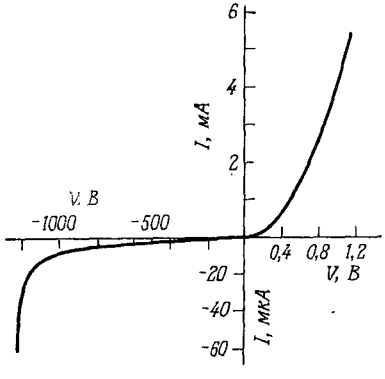
$$j_s = |e|\left(p_n\frac{D_p}{L_p} + n_p\frac{D_n}{L_n}\right) = \\ = |e|n_i^2\left(N_A^{-1}\sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}} + N_D^{-1}\sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}}\right). \quad (5.3.29)$$

Размерность величины $\sqrt{D\tau^{-1}}$ совпадает с размерностью скорости. Например, для германия, где $D_n = 100$ см^2/с, $D_p = 49$ см^2/с, $\tau_n = \tau_p = 100$ мкс, получаем $\sqrt{D_n\tau_n^{-1}} = 10^3$ см/с и $\sqrt{D_p\tau_p^{-1}} = 700$ см/с; $n_i = 2{,}4\cdot10^{13}$ см$^{-3}$; полагая, как и прежде, $N_D = 2{,}4\cdot10^{16}$ см$^{-3}$ и $N_A = 2{,}4\cdot10^{14}$ см$^{-3}$, получаем значение $j_s = 3{,}8\cdot10^{-4}$ А/см^2.

На фиг. 5.8 показана вольтамперная характеристика $p-n$-перехода в германии. В прямом направлении ($V > 0$) ток экспоненциально возрастает в соответствии с выражением (5.3.28). При бо́льшей плотности тока наличие последовательного сопротивления, обусловленного частью образца вне $p-n$-перехода, вызывает отклонение характеристики от экспоненциального

[1]) Применение этой формулы к реальным вольтамперным характеристикам приводит к появлению в показателе экспоненты множителя, значение которого лежит между $^1/_2$ и 1, см. [7, 8].

поведения в сторону значений V, больших, чем в случае меньшей плотности тока. В обратном направлении из (5.3.28) следует насыщение плотности тока до значения j_s. Из фиг. 5.8 видно, что характеристика в обратном направлении является очень пологой при напряжениях ниже 10^3 В (отметим различие масштабов в случаях прямого и обратного направлений) и очень резко спадает при более высоком напряжении, что характерно, как упоминалось выше, для электрического пробоя.



Фиг. 5.8. Вольтамперная характеристика германиевого p — n-перехода [9].

Вычисленное с помощью (5.3.29) значение j_s согласуется с экспериментальными значениями, найденными для случая германиевых диодов, но не совпадает со значениями, полученными для кремниевых диодов. Для кремния величина n_i^2 почти на шесть порядков меньше, чем для германия, поэтому значения j_s в обоих полупроводниках различаются во столько же раз. Однако это несущественно, и, кроме того, обратный ток не насыщается. Последнее связано с тепловой генерацией в области перехода электронно-дырочных пар на центрах, уровни энергии которых находятся вблизи середины запрещенной зоны. Обозначим через f_t вероятность заполнения такого центра электроном: тогда $s - f_t$ есть вероятность заполнения центра дыркой. Допустим, что скорость генерации электронов G пропорциональна f_t:

$$G = af_t, \tag{5.3.30}$$

где a — коэффициент пропорциональности. В стационарном состоянии скорость генерации должна быть равна скорости рекомбинации электронов $n(1 - f_t)\tau_n^{-1}$, которая пропорциональна концентрации электронов, вероятности заполнения центра дыркой и обратно пропорциональна времени жизни избыточных электронов:

$$\frac{n(1 - f_t)}{\tau_n} = af_t. \tag{5.3.31}$$

В собственном полупроводнике $n = n_i$ и уровень Ферми расположен вблизи середины запрещенной зоны. В хорошем прибли-

жении мы можем положить, что уровень Ферми совпадает с уровнем энергии центра рекомбинации; тогда $f_t = 1/2$ и из (5.3.31) находим $a = n_i \tau_n^{-1}$. Следовательно, скорость генерации определяется выражением

$$G = \frac{f_t n_i}{\tau_n}. \tag{5.3.32}$$

В неравновесных условиях увеличение концентрации электронов в единицу времени описывается следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_i}{\tau_n} f_t - \frac{n(1-f_t)}{\tau_n}. \tag{5.3.33}$$

Для дырок легко получить аналогичное уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{n_i(1-f_t)}{\tau_p} - \frac{p}{\tau_p} f_t. \tag{5.3.34}$$

Условие генерации пар

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{5.3.35}$$

позволяет определить величину f_t:

$$f_t = \frac{n\tau_p + n_i\tau_n}{(n+n_i)\tau_p + (p+n_i)\tau_n} \tag{5.3.36}$$

и найти скорость генерации пар

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{n_i^2 - np}{(n+n_i)\tau_p + (p+n_i)\tau_n}. \tag{5.3.37}$$

В стационарном состоянии, когда $\partial n/\partial t = 0$, получаем $np = n_i^2$, т. е. результат, который в (1.3.2) был получен с помощью закона действующих масс.

Поскольку электроны и дырки обычно растягиваются электрическим полем прежде, чем они успеют рекомбинировать, в области перехода $n, p \ll n_i^2$; поэтому в уравнении (5.3.37) ими можно пренебречь. Тогда имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{n_i}{\tau}, \tag{5.3.38}$$

где среднее время жизни

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_n + \tau_p). \tag{5.3.39}$$

Отсюда для плотности тока j_s получаем

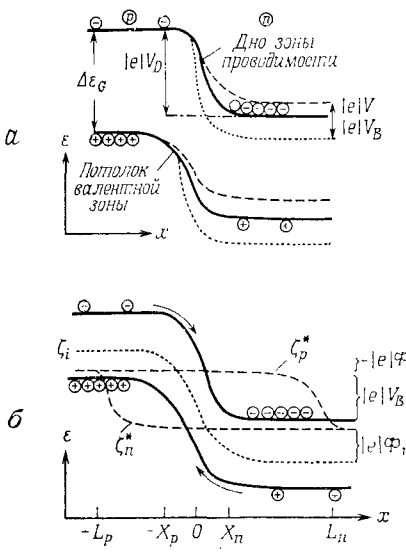
$$j_s = |e| \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\right) d = |e| n_i \frac{d}{\tau}, \tag{5.3.40}$$

поскольку полный обратный ток пропорционален объему области перехода и, следовательно, плотность тока пропорциональна толщине перехода. Например, в кремнии при комнатной температуре $n_i = 1{,}3 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$. Полагая, как и прежде, $d = 60$ мкм и $\tau = 100$ мкс, из (5.3.40) получаем $j_s = 1{,}3 \cdot 10^{-7}$ А/см^2, что на три порядка величины превышает значение, полученное из (5.3.29), и находится в согласии с экспериментальными данными [7, 8]. Для германия эта величина несколько меньше.

Поскольку толщина перехода d в (5.3.40) увеличивается с ростом приложенного напряжения смещения V_B, j_s также будет увеличиваться, и поэтому насыщения тока не произойдет, как это и наблюдалось в кремнии.

§ 4. Квазиуровни Ферми

Вольтамперные характеристики p—n-перехода были построены в предыдущем параграфе без учета распределения носителей заряда по энергии [1]). Плотность тока вычислялась с учетом тепловой диффузии, и коэффициент диффузии был связан с подвижностью носителей посредством соотношения Эйнштейна. Приложенное к переходу напряжение изменяет контактную разность потенциалов. В зависимости от полярности приложенного напряжения это изменение приводит к диффузии большего или меньшего по сравнению с равновесным случаем числа носителей заряда из одной области перехода в другую.



Фиг. 5.9. *а* — края энергетических зон в p — n-переходе при термодинамическом равновесии (сплошные кривые) с напряжением смещения в прямом направлении (штриховые кривые) и с напряжением смещения в обратном направлении (пунктирные кривые); *б* — квазиуровни Ферми в p — n-переходе, смещенном в обратном направлении.

Распределение потенциала показано на фиг. 5.9, *а*. В направлении от области p-типа к области n-типа как дно зоны прово-

[1]) Читателю, не знакомому с содержанием гл. 3, следует перейти сразу к § 5, оставив данный параграф для последующего прочтения.

димости, так и потолок валентной зоны понижаются на $|e|V_D$ в отсутствие внешнего напряжения, на $|e|(V_D - V)$ в случае прямого напряжения смещения и на $|e|(V_D + V_B)$ в случае обратного напряжения смещения. На фиг. 5.9, *б* подробно рассмотрен последний случай. В интервалах $x > L_n$ и $x < -L_p$ наличие p–n-перехода почти не сказывается на равновесных концентрациях носителей. Концентрации носителей заряда обоих сортов можно определять с помощью одного и того же уровня Ферми, который в области p-типа обозначим через ζ_p^*, а в области n-типа — через ζ_n^* [не смешивать с уровнями Ферми ζ_p и ζ_n, которые определены уравнениями (4.9.5) и (4.9.4)]. Это обусловлено тем, что любая приложенная к переходу разность потенциалов приводит к дополнительному падению напряжения на переходе $-x_p \leqslant x \leqslant x_n$, в то время как вне перехода внешним полем в первом приближении можно пренебречь. При приближении к области перехода концентрация *основных* носителей лишь незначительно отклоняется от своего равновесного значения под действием электрического тока, в то время как изменение концентрации *неосновных* носителей является весьма существенным. Поэтому единого уровня Ферми для носителей заряда обоих сортов уже не существует. В этом случае ζ_p^* и ζ_n^* называют квазиуровнями Ферми. На фиг. 5.9, *б* показаны квазиуровни Ферми ζ_p^*, ζ_n^*, а также уровень Ферми в области собственной проводимости ζ_i, который определяется выражением (3.1.37). Уровень Ферми ζ_i расположен вблизи середины запрещенной зоны и зависит от отношения эффективных масс, но не от характера легирования; он служит в качестве эталонного уровня на всем протяжении перехода. На фиг. 5.9, *б* указаны также постоянные Φ_n и Φ_p, определяемые выражением (5.3.2). Вдали от перехода эти постоянные связаны с квазиуровнями Ферми следующим образом:

$$|e|\Phi_n = \zeta_n^* - (\zeta_i)_{\text{область } n\text{-типа}}, \tag{5.4.1}$$

$$|e|\Phi_p = \zeta_p^* - (\zeta_i)_{\text{область } p\text{-типа}}. \tag{5.4.2}$$

Вследствие наличия на переходе потенциального барьера электроны из области p-типа скатываются в область n-типа, т. е. из неосновных носителей становятся основными. То же самое справедливо и в отношении дырок, переходящих из области n-типа в область p-типа (показано стрелками на фиг. 5.9, *б*). В германии именно этот перенос заряда обусловливает ток в обратном направлении (в кремнии преобладает тепловая генерация электронно-дырочных пар на переходе). На среднем расстоянии от перехода, равном диффузионной длине, избыточные основные носители рекомбинируют с неосновными носителями;

следовательно, на расстояниях, больших диффузионной длины, существует состояние теплового равновесия.

В области, прилегающей к переходу, уменьшение числа неосновных носителей определяется уменьшением в области p-типа квазиуровня Ферми ζ_n^* на величину $|e|V_B$ и увеличением ζ_p^* в области n-типа на ту же величину, как это показано на фиг. 5.9, *б*. В отсутствие напряжения смещения V_B для всего кристалла имеем $\zeta = \zeta_n^* = \zeta_p^*$.

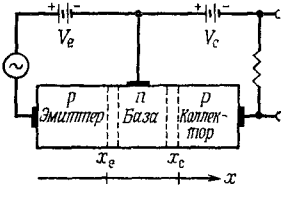
Из фиг. 5.9, *б* видно, что уровень Ферми ζ_i на переходе смещается вниз на величину

$$|e|\Phi_n + |e|V_B - |e|\Phi_p = |e|(V_D + V_B), \qquad (5.4.3)$$

где диффузионный потенциал $V_D = \Phi_n - \Phi_p$. Смещение ζ_i вниз эквивалентно смещению дна зоны проводимости. Таким образом, отношение концентрации электронов в области p-типа n_p к концентрации электронов в области n-типа n_n равно $\exp[-|e|(V_D + V_B)/k_BT]$. Сопоставляя этот результат с выражением (5.3.10), полученным для случая $V_B = 0$, можно заключить, что именно сумма $V_D + V_B$ определяет отношение концентраций и толщину перехода [см. (5.3.9)]. Переходы n^+—n и p^+—p рассматриваются в работе Ганна [10] и здесь обсуждаться не будут.

§ 5. Транзистор

Транзистором называется полупроводниковый прибор со структурой типа p—n, служащий для усиления электрических сигналов. На фиг. 5.10 показан типичный p—n—p-транзистор. Средняя часть монокристалла обладает электронной проводимостью



Фиг. 5.10. Схема $p - n - p$-транзистора.

и называется базой. По обе стороны от нее расположены области с дырочной проводимостью, которые, как в эксперименте Хейнса — Шокли (§ 2 этой главы), называются эмиттером и коллектором.

На переходе эмиттер — база, согласно (5.3.21) и (5.3.22), имеем

$$D_p \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{p - p_b}{\tau_b}, \qquad (5.5.1)$$

где p_b и τ_b обозначают p_n и τ_n на базе. Диффузионную длину в базе обозначим

$$L_b = \sqrt{D_p \tau_b}. \tag{5.5.2}$$

Решение уравнения (5.5.1) в области базы $x_e \leqslant x \leqslant x_c$ имеет вид

$$p(x) = p_b + \frac{p_e - p_b}{\operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{x_c - x}{L_b}\right) + \frac{p_c - p_b}{\operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{x - x_e}{L_b}\right), \tag{5.5.3}$$

где $w = x_c - x_e$ — толщина базы, $p_e = p(x_e)$ — концентрация дырок в эмиттере, $p_c = p(x_c)$ — концентрация дырок в коллекторе. Полученное решение удовлетворяет граничным условиям $p(x_i) = p_c$ и $p(x_e) = p_e$. Поскольку к эмиттеру и базе приложено напряжение V_e, а к коллектору и базе — напряжение V_c, то между p_b, p_e и p_c существует следующая связь:

$$p_e = p_b \exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right), \tag{5.5.4}$$

$$p_c = p_b \exp\left(\frac{|e| V_c}{k_B T}\right). \tag{5.5.5}$$

Подставляя эти выражения в (5.5.3), находим плотность тока дырок в точке $x = x_e$:

$$j_p(x_e) = -|e| D_p \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=x_e} =$$

$$= \frac{|e| D_p p_b}{L_b} \left\{ \operatorname{cth}\left(\frac{w}{L_b}\right)\left[\exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right) - 1\right] - \frac{\exp\left(\frac{|e| V_c}{k_B T}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \right\}. \tag{5.5.6}$$

Полученное выражение определяет вклад дырок в плотность тока эмиттера. Для нахождения вклада электронов определим отношение концентраций электронов в эмиттере n_e и в базе n_b как функцию напряжения на эмиттере V_e:

$$\frac{n_e}{n_b} = \exp\left(-\frac{|e| V_e}{k_B T}\right). \tag{5.5.7}$$

Вклад электронов в плотность тока эмиттера описывается выражением, сходным с выражением (5.3.27) для диода:

$$j_n(x_e) = \frac{|e| n_e D_n}{L_e}\left[\exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right) - 1\right]. \tag{5.5.8}$$

где $L_e = \sqrt{D_n \tau_e}$ — диффузионная длина электронов в эмиттере. Для полной плотности тока эмиттера имеем

$$j_e(x_e) = j_p(x_e) + j_n(x_e) =$$
$$= \frac{|e| D_p p_b}{L_b \operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{w}{L_b}\right) \left[\exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right) - 1 \right] - \left[\exp\left(\frac{|e| V_c}{k_B T}\right) - 1 \right] \right\} +$$
$$+ \frac{|e| D_n n_e}{L_e} \left[\exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right) - 1 \right]. \qquad (5.5.9)$$

Аналогично вычисляется плотность тока коллектора j_c:

$$j_c = \frac{|e| D_p p_b}{L_b \operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{w}{L_b}\right) \left[\exp\left(\frac{|e| V_c}{k_B T}\right) - 1 \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right) - 1 \right] \right\} - \frac{|e| D_n n_e}{L_e} \left[\exp\left(\frac{|e| V_c}{k_B T}\right) - 1 \right]. \qquad (5.5.10)$$

Коэффициент усиления по току α определяется выражением

$$\alpha = \left(\frac{\partial j_c}{\partial j_e}\right)_{V_c = \text{const}} = \left(\frac{\partial j_c / \partial V_e}{\partial j_e / \partial V_e}\right)_{V_c = \text{const}}. \qquad (5.5.11)$$

Здесь предполагается, что на вход эмиттера подается слабый сигнал, а выходной сигнал снимается с коллектора. Определим $\partial j_c / \partial V_e$ из (5.5.10);

$$\left(\frac{\partial j_c}{\partial V_e}\right)_{V_c = \text{const}} = \frac{|e| D_p p_b}{L_b \operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \frac{|e|}{k_B T} \exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right), \qquad (5.5.12)$$

а $\partial j_e / \partial V_e$ из (5.5.9):

$$\left(\frac{\partial j_e}{\partial V_e}\right)_{V_c = \text{const}} = \left[\frac{|e| D_p p_b}{L_b} \operatorname{cth}\left(\frac{w}{L_b}\right) + \frac{|e| D_n n_e}{L_e} \right] \frac{|e|}{k_B T} \exp\left(\frac{|e| V_e}{k_B T}\right). \qquad (5.5.13)$$

Тогда из (5.5.11) получим

$$\alpha = \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{w}{L_b}\right) + \frac{D_n L_b n_e}{D_p L_e p_b} \operatorname{sh}\left(\frac{w}{L_b}\right) \right\}^{-1}. \qquad (5.5.14)$$

Поскольку все входящие в это выражение величины положительны, $\alpha < 1$, что означает отсутствие усиления тока в цепи, показанной на фиг. 5.10. Однако мы покажем, что в данном случае есть усиление по мощности.

Чтобы значение α было как можно более близким к единице, во-первых, толщина базы должна быть много меньше диффузионной длины и, во-вторых, база должна быть сильно легиро-

вана: $w \ll L_b$, $n_b \gg n_e$. Принимая $L_b \approx L_e$ и $D_n \approx D_p$, получаем для α

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{w}{L_b}\right)} \approx 1 - \frac{w^2}{2L_b^2}. \qquad (5.5.15)$$

В германии, где время жизни носителей τ_b порядка 50 мкс и диффузионная длина порядка 0,5 мм, при толщине базы 0,1 мм можно получить $\alpha = 0{,}98$. На практике используется еще меньшая толщина базы.

При дифференцировании (5.5.9) и (5.5.10) толщина базы w полагалась постоянной. Однако из теории p—n-перехода следует, что толщина перехода d зависит от приложенного напряжения. Поскольку напряжение на эмиттере V_e очень мало, пренебрегая этой зависимостью, мы делаем не слишком существенную ошибку. Однако напряжение на коллекторе V_c относительно велико, поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial V_c} = \frac{\partial d}{\partial V_c} = \frac{\partial}{\partial V_c}\left(\sqrt{V_D + V_c}\,\frac{d_0}{\sqrt{V_D}}\right) \approx \frac{d_0}{2\sqrt{V_D V_c}}, \qquad (5.5.16)$$

где d_0 — толщина перехода база — коллектор при $V_c = 0$. Учитывая полученное выражение, определим величину, обратную дифференциальному сопротивлению коллектора $1/r_c$:

$$\frac{1}{r_c} = \left(\frac{\partial I_c}{\partial V_c}\right)_{V_e = \text{const}} \approx \frac{I_c}{w}\frac{\partial w}{\partial V_c} = \frac{I_c d_0}{2w\sqrt{V_D V_c}}. \qquad (5.5.17)$$

Типичные значения входящих сюда величин составляют: $d_0/w = 10^{-2}$, $V_D = 0{,}25$ В, $V_c = 4$ В, $I_c = 2$ мА. Тогда из (5.5.17) находим значение импеданса коллектора $r_c = 10^5$ Ом.

Величина, обратная дифференциальному сопротивлению эмиттера:

$$\frac{1}{r_e} = \left(\frac{\partial I_e}{\partial V_e}\right)_{V_c = \text{const}}, \qquad (5.5.18)$$

находится из выражений (5.5.13) и (5.5.9), если пренебречь в последнем членами -1 и $\exp(|e|V_c/k_BT)$:

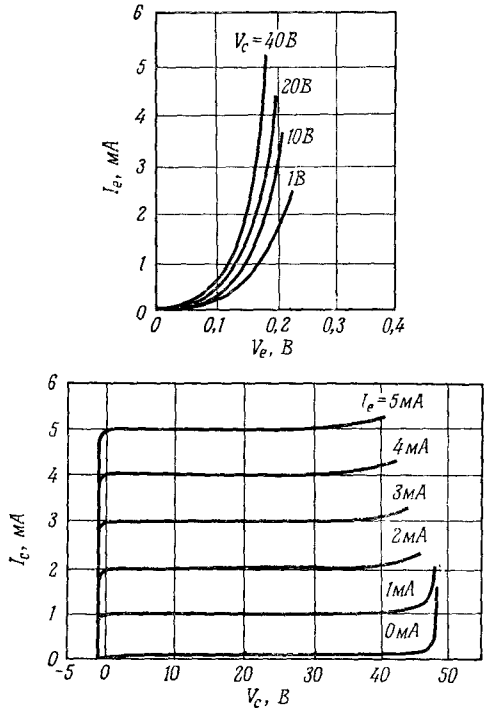
$$\frac{1}{r_e} \approx I_e \frac{|e|}{k_B T} = \frac{I_e}{25{,}9\ \text{мВ}}. \qquad (5.5.19)$$

Знак равенства соответствует случаю комнатной температуры. Полагая, что ток эмиттера равен току коллектора 2 мА, из последнего выражения получаем $r_e \sim 10$ Ом, что на 4 порядка величины меньше импеданса коллектора. Таким образом, коэффициент усиления по мощности в данном случае составляет

$$\frac{I_c^2 r_c}{I_e^2 r_e} = \frac{r_c}{r_e} \approx 10^4. \qquad (5.5.20)$$

Он равен коэффициенту усиления по напряжению, так как $\alpha \approx 1$.

Мощность, рассеиваемая транзистором, которая, по существу, определяется произведением $I_c V_c$, в рассмотренном случае составляет несколько милливатт. В электронных лампах, которые использовались до того, как в 1948 г. Бардин, Брэттейн



Фиг. 5.11. Вольтамперные характеристики эмиттера и коллектора $p-n-p$-транзистора [14].

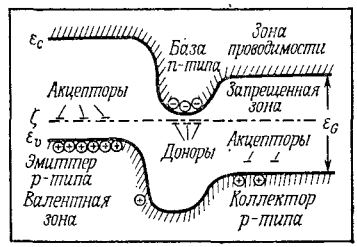
и Шокли [11—13] изобрели транзистор, мощность, расходуемая на подогрев катода, в сотни раз больше.

Современные ЭВМ, схемы которых содержат порядка десяти тысяч транзисторов, на электронных лампах практически не осуществимы, так как для быстродействия необходимы малые расстояния между элементами схемы, а тепловыделение электронных ламп в таком случае огромно.

На фиг. 5.11 приведены характеристики типичного транзистора [14]. Эмиттерные характеристики $I_e(V_e)$, разумеется, являются прямыми, а коллекторные $I_c(V_c)$ — обратными характеристиками p—n-диода. Для последних ток эмиттера I_e является

параметром. Вплоть до очень больших значений V_c ток коллектора I_c остается постоянным и равен I_e в согласии с условием $\alpha \approx 1$. Если база очень тонкая и слабо легирована, то при достаточно высоком напряжении на коллекторе транзистор пробивается. В этом случае, конечно, никакого усиления сигнала не происходит.

До сих пор мы рассматривали электрические свойства p—n—p-транзистора с помощью формальных математических методов. Чтобы получить более наглядное представление о действии транзистора, рассмотрим теперь качественно поведение отдельных электронов и дырок.



Фиг. 5.12. Края энергетических зон в p — n — p-транзисторе при термодинамическом равновесии.

На фиг. 5.12 показано распределение потенциала в p—n—p-транзисторе в отсутствие приложенного напряжения. В сильно легированном эмиттере p-типа уровень Ферми совмещен с акцепторными уровнями, а в сильно легированной базе n-типа — с донорными уровнями. Коллектор p-типа легирован весьма слабо. Поэтому проводимость коллектора близка к собственной, и уровень Ферми расположен почти посередине запрещенной зоны [см. (3.1.37)]. Потенциальная яма в области базы представляет собой барьер для диффузии дырок из эмиттера в коллектор. Поток дырок через барьер управляется напряжением V_e между эмиттером и базой, как это показано на фиг. 5.11 (верхний график), в то время как коллекторный ток I_c слабо зависит от напряжения между коллектором и базой. Небольшое отличие коэффициента усиления по току α от единицы связано с тем, что при своем движении от эмиттера через базу к коллектору дырки рекомбинируют с электронами. В этом качественном рассмотрении мы пренебрегаем электронной составляющей тока, что в общем случае не очевидно. Обратный ток на переходе база — коллектор обусловлен электронами, которые в этом случае являются неосновными носителями. Поскольку эта обедненная носителями область является высокоомной, что приводит к показанному на фиг. 5.11 виду коллекторных характеристик, небольшое увеличение тока коллектора вызывает значительное изменение напряжения на коллекторе, если внешнее напряжение

приложено к транзистору через большое сопротивление нагрузки.

n—p—n-транзистор подобен *p—n—p*-транзистору с той лишь разницей, что электроны и дырки меняются местами; этот тип транзисторов мы не будем здесь рассматривать.

Обратимся вновь к обсуждавшемуся в § 2 этой главы эксперименту Хейнса — Шокли. Часть германиевого образца между эмиттерным и коллекторным контактами можно считать базой. В противоположность случаю рассмотренного выше транзистора здесь толщина базы значительно превышает диффузионную длину неосновных носителей. Поэтому неосновные носители должны в большей степени дрейфовать, чем диффундировать через базу; это достигается приложением дрейфового электрического поля. Действие эмиттера и коллектора такое же, как в транзисторе. Сходным с устройством Хейнса — Шокли является нитевидный транзистор, в котором роль коллектора играет контакт металл — полупроводник.

Особенность эксперимента Хейнса — Шокли состоит в том, что эмиттерный и коллекторный контакты выполнены в виде металлических штырьков. В следующем параграфе мы покажем, что при соответствующих условиях контакт металл — полупроводник ведет себя как *p—n*-переход. В первых типах транзисторов использовались именно такие контакты.

§ 6. Контакт металл — полупроводник

Контакт металл — полупроводник, так же как и *p—n*-переход, может выпрямлять переменный ток. На заре радиотехники в качестве выпрямителя использовался металлический штырек, прижатый к природному кристаллу сульфида свинца. Во время второй мировой войны сульфид свинца уступил место кремнию, который служил в качестве выпрямителя в установках радиолокационного обнаружения. Выпрямление улучшается формовкой, которая заключается в нагреве контакта с очень малой площадью большим импульсом тока длительностью порядка 1 с. Под действием этого импульса атомы металла диффундируют из металлического штыря в полупроводник, в результате чего образуется *p—n*-переход. Этот метод неприменим в случае контактов большой площади, которые используются в счетчиках с поверхностным барьером для детектирования частиц высокой энергии в ядерной физике и физике элементарных частиц[1]). С этой целью золото из парообразного состояния осаждается на кремний, образуя тонкий слой на одной поверхности кристалла. Затем кристалл несколько дней выдерживается на воздухе, в

[1]) См. работы [6, 7] в списке литературы к гл. 1.

результате чего при поглощении молекул кислорода образуется электрический дипольный слой, который отбрасывает основные носители от поверхности внутрь полупроводника. Тем самым на поверхности формируется область, обедненная носителями, которая называется барьером Шоттки.

Рассмотрим два случая, представляющие практический интерес: в первом мы полностью пренебрегаем вкладом диффузии в значение плотности тока, а во втором пренебрегаем вкладом электрического поля.

Рассмотрим первый случай в применении к кремнию и германию. Обозначим через n_b концентрацию носителей в объеме полупроводника. Если к контакту приложено напряжение V, то для плотности тока дырок из полупроводника в металл (или электронов в обратном направлении) имеем

$$j_1 = en_b\sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}\exp\left[-\frac{|e|(V_D - V)}{k_BT}\right], \tag{5.6.1}$$

где V_D — диффузионный потенциал, характеризующий загиб зоны у поверхности, связанный с отражением от нее носителей. Экспоненциальный множитель представляет собой уже знакомый нам множитель Больцмана. Введем концентрацию носителей на поверхности n_s, которая при $V = 0$ определяется выражением

$$n_s = n_b\exp\left(-\frac{|e|V_D}{k_BT}\right); \tag{5.6.2}$$

тогда

$$j_1 = en_s\sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right). \tag{5.6.3}$$

Полная плотность тока равна сумме j_1 и плотности тока носителей, движущихся в противоположном направлении j_2:

$$j = j_1 + j_2. \tag{5.6.4}$$

Плотность тока j_2 легко найти из условия $j = 0$ в отсутствие приложенного извне напряжения ($V = 0$). Тогда для полной плотности тока получаем

$$j = en_s\sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right]. \tag{5.6.5}$$

При большом значении обратного напряжения смещения происходит насыщение тока.

Во втором случае (пренебрегая вкладом электрического поля), который применим к селеновому выпрямителю, как и

в случае p—n-перехода, имеем

$$j = j_s\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_BT}\right) - 1\right]. \tag{5.6.6}$$

При большом обратном напряжении смещения плотность тока

$$j_s = |e|\mu_n n_s E_s, \tag{5.6.7}$$

где E_s — напряженность электрического поля на поверхности:

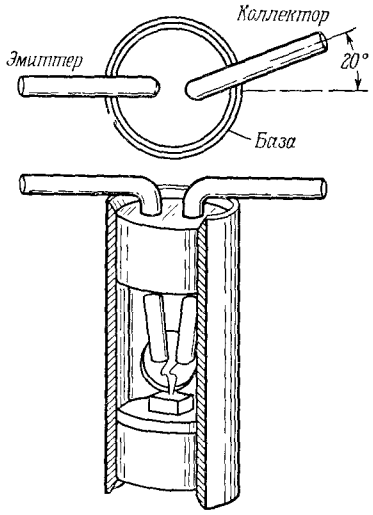
$$E_s = \sqrt{\frac{2k_BT}{eL_D^2}(V_D - V)}. \tag{5.6.8}$$

Поскольку E_s зависит от V, насыщения тока не происходит.

Поверхностные свойства полупроводников рассматриваются в гл. 14.

§ 7. Различные типы транзисторов

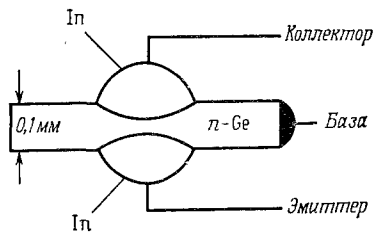
Первым транзистором был точечно-контактный транзистор [15, 16], показанный на фиг. 5.13. На латунной пробке напаяна германиевая пластинка толщиной 0,5 мм. К ней прижаты две пружинки из фосфористой бронзы (диаметром 0,01 мм) с заостренными концами. Расстояние между пружинками составляет 0,02 мм, что значительно меньше диффузионной длины. Эти пружинки приварены к токопроводящим никелевым выводам. После электрической формовки одна пружинка действует как эмиттер, другая — как коллектор, а пробка служит базой. Типичные значения рабочих токов и напряжений составляют для эмиттера 0,7 В и 0,6 мА, для коллектора 40 В и 2 мА. При выборе полупроводника для производства транзисторов определяющую роль играют большая диффузионная длина и хорошие выпрямляющие свойства. До появления германиевого транзистора для выпрямления использовались окись меди и селен. Однако для этих полупроводников



Фиг. 5.13. Точечно-контактный транзистор (разрез) [16].

время жизни и подвижность носителей слишком малы, чтобы их можно было использовать в производстве транзисторов. В транзисторе на основе сульфида свинца усиление тока не наблюдается [17], коэффициент усиления по мощности равен 4, что значительно меньше значений, полученных для германиевых или кремниевых транзисторов. Даже в этих материалах для увеличения диффузионной длины, что необходимо для работы транзистора, весьма существенна хорошая очистка, которая проводится методом зонной плавки [1]).

На фиг. 5.14 показан сплавной транзистор [18], который обычно изготовляется из германия в виде p—n—p-структуры. На обе поверхности полупроводниковой пластинки толщиной



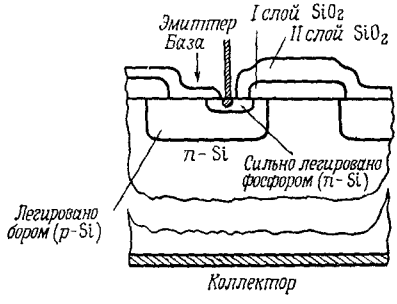
Фиг. 5.14. Схема устройства сплавного транзистора

порядка 0,1 мм помещаются маленькие таблетки металлического индия. При нагреве (до 820 К в случае германия) происходит сплавление, в результате чего образуются эмиттерный и коллекторный контакты. Базой служит точечный контакт на одном из концов пластинки; коллектор, как правило, делается несколько больше эмиттера, чем достигается более полный отвод носителей на коллектор с минимумом поверхностной рекомбинации вблизи эмиттера. Процесс сплавления является недостаточно контролируемым, чтобы можно было получать чрезвычайно малую толщину базы (порядка 10^{-3} мм), которая необходима в высокочастотных транзисторах.

После 1960 г. очень большое распространение получил планарный транзистор [19]. Путем термического окисления (до 1 ч при 1500 К или 10 ч при 1200 К в атмосфере водяного пара) на кремний наращивается тонкий (до 1 мкм) сплошной бездефектный слой двуокиси кремния, который является высокоизолирующим (кварц) [20] [2]). С помощью фотолитографического процесса в этом слое можно проделать небольшие окна. В этом процессе поверхность кремниевой пластинки должна быть плоской (планарной), в противном случае возможно образование дефектов. Кварцевый слой покрывается тонкой фоторезистивной

[1]) См. работу [1] в списке литературы к гл. 1.
[2]) Подробнее о технологии см. в книге [21].

пленкой, которая освещается светом через диафрагму. Освещенные участки под действием света затвердевают благодаря полимеризации, а неосвещенные участки впоследствии вымываются органическим растворителем. Незащищенные полимеризовавшейся пленкой участки поверхности кварцевого слоя затем удаляются плавиковой кислотой. После этого оставшаяся защитная пленка удаляется. Протравленный таким образом слой двуокиси кремния служит маской в процессе диффузии примесей, например бора, в подложку из n-Si. На полученную структуру наращивается новый слой кварца, который перфорируется окнами, меньшими, чем в первом слое, но находящимися в тех же местах. Через этот второй набор окон в кремниевую подложку диффундируют атомы фосфора. Глубина их диффузии меньше, чем у атомов



Фиг. 5.15. Кремниевый планарный транзистор (разрез).

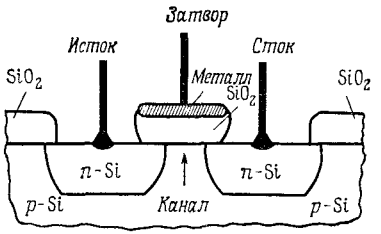
бора. Фосфор перекомпенсирует присадки бора и образует тем самым высоколегированный слой с электронной проводимостью.

На фиг. 5.15 показана в разрезе полученная подобным образом n—p—n-структура. В точке, показанной стрелкой, во втором слое кварца протравляется новое окно. В отверстия вводятся тонкие металлические провода и сплавляются с кремнием. Они служат соединениями между эмиттером (n-Si, легированный фосфором) и источником питания эмиттера, а также между базой (p-Si, легированный бором) и источником ее питания. Третий сплавной контакт на нижней поверхности кремниевой пластинки с электронной проводимостью служит коллектором. Поскольку толщина базы составляет всего несколько микрометров, время диффузии носителей очень мало; поэтому верхний предел усиливаемых частот весьма высок. Другое достоинство рассмотренного процесса заключается в том, что p—n-переходы на поверхности защищены от атмосферных влияний окисными слоями, что обеспечивает малые токи утечки и хорошую стабильность.

С помощью масок и диффузионных процессов в одном кристалле кремния изготовляются целые схемы, содержащие сопротивления, емкости, транзисторы и диодные структуры. Занимаемый ими объем очень мал. Эти интегральные схемы исключительно важны при производстве быстродействующих

ЭВМ. На поверхности пластинки размещается до 1000 транзисторов на 1 мм^2. Для разметки границ микроскопических участков, получаемых путем травления, необходимы прецизионные фотомаски. В описанной выше биполярной технологии используется от пяти до семи последовательных операций маскирования и травления.

В технологии МОП (металл — окисел — полупроводник) требуются только четыре такие операции. В результате получается полевой транзистор на МОП-структуре, или просто МОП-транзистор. На фиг. 5.16 показано поперечное сечение такого транзистора. Напряжение подается на электроды «исток» и «сток».



Фиг. 5.16. Полевой транзистор на МОП-структуре (разрез).

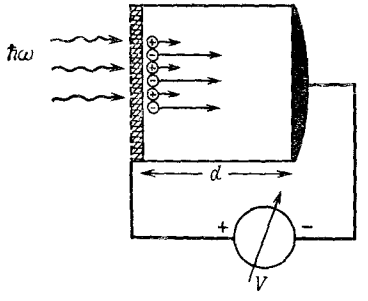
Таким образом, цепь содержит два p—n-перехода, один из которых смещен в обратном направлении, а другой — в прямом. Первый переход является высокоомным. На электрод «затвор», отделенный от полупроводника кварцевым слоем, подается положительный потенциал. Этот потенциал наводит отрицательный заряд на границе между затвором и изолирующим слоем. Поэтому полупроводник, хотя он и имеет дырочную проводимость вследствие легирования, на границе раздела обладает электронной проводимостью, в результате чего между двумя участками с электронной проводимостью — истоком и стоком — образуется канал с электронной проводимостью. Через этот канал течет сильный электрический ток, управляемый потенциалом затвора. Малые токи утечки на затвор почти не зависят от температуры. Поскольку напряженность электрического поля пробоя для кварца порядка 10^7 В/см, на затвор можно подавать напряжение до 10^3 В. Подвижность носителей в канале зависит от толщины канала, которая меньше длины их свободного пробега. В этом случае подвижность пропорциональна $T^{-1,5}$, в то время как обычная зависимость подвижности носителей в кремнии от температуры является более сильной [22].

Применение полупроводниковых приборов, таких, как выпрямители и транзисторы, более подробно рассматривается, например, в книге [8].

§ 8. Эффект Дембера и фотоэлектромагнитный эффект

В этом и следующем параграфах мы продолжим изучение диффузии электронно-дырочных пар, которые рождаются за счет поглощения света. Детали процесса поглощения в данном случае не важны; они рассматриваются в гл. 11.

На фиг. 5.17 показан полупроводниковый образец с металлическими контактами на противоположных сторонах, к которым подключен вольтметр. Один из контактов является полупрозрачным для света, частота которого достаточно высока, чтобы вблизи поверхности могли генерироваться электронно-дырочные пары. Допустим, что глубина проникновения света в полупроводник, скорость генерации в котором при данной интенсивности света равна G, есть α^{-1} (α — коэффициент поглощения). Произведение $\alpha^{-1}G$ обозначается через G_0 и измеряется в единицах $см^{-2}/с$. Электронно-дырочные пары, возникшие на одном конце образца, диффундируют к противоположному концу. Поскольку в общем случае коэффициенты диффузии обоих типов носителей различны, появляется разность потенциалов V, которую регистрирует вольтметр. Этот эффект носит название фотодиффузии или эффекта Дембера [23—26]. Если один из контактов является слегка неомическим или даже выпрямляющим, вместо эффекта Дембера наблюдается вентильный фотоэффект; он рассматривается в следующем параграфе.



Фиг 5.17. Устройство Дембера.

Необходимо учитывать рекомбинацию носителей на поверхности. Скорость поверхностной рекомбинации s определяется через нормальную к поверхности плотность тока

$$j_n = |e| s \Delta n \tag{5.8.1}$$

и плотность дырочного тока $j_p = -j_n$, где $\Delta n = \Delta p$ — концентрация избыточных носителей заряда; s есть скорость исчезновения пар в «резервуаре» на поверхности.

Решение уравнения диффузии (5.5.1), которое мы запишем в виде

$$D \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{\Delta p}{\tau}, \tag{5.8.2}$$

имеет вид

$$\Delta p(x) = \frac{G_0 L}{D} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x-d}{L}\right) - \frac{L}{L_{sd}} \operatorname{sh}\left(\frac{x-d}{L}\right)}{\left(1 + \frac{L^2}{L_{sd} L_{s0}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{d}{L}\right) + \left(\frac{L}{L_{s0}} + \frac{L}{L_{sd}}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{d}{L}\right)}. \quad (5.8.3)$$

Здесь $L = \sqrt{D\tau}$; D — коэффициент амбиполярной диффузии (5.2.16); τ — время жизни электронов и дырок, которое полагается равным для обоих типов носителей заряда; $L_{s0} = D/s$ на освещенной поверхности ($x = 0$); L_{sd} — та же величина на противоположной поверхности ($x = d$); d — размер образца в направлении распространения света (предполагается, что $d \gg \alpha^{-1}$). Из условия обращения в нуль полной плотности тока

$$j_{nx} + j_{px} = \sigma E - |e|(D_p - D_n)\frac{dp}{dx} \quad (5.8.4)$$

находим э. д. с. Дембера

$$V = \frac{|e|(D_n - D_p)}{\sigma} [\Delta p(0) - \Delta p(d)]. \quad (5.8.5)$$

Выражение в квадратных скобках определяется из (5.8.3); тогда

$$V = \frac{k_B T}{|e|} \frac{G_0 L (\mu_n - \mu_p) \left[\operatorname{ch}\left(\frac{d}{L}\right) + \frac{L}{L_{sd}} \operatorname{sh}\left(\frac{d}{L}\right) - 1\right]}{D(\mu_n n + \mu_p p)\left[\left(\frac{L}{L_{s0}} + \frac{L}{L_{sd}}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{d}{L}\right) + \left(1 + \frac{L^2}{L_{s0} L_{sd}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{d}{L}\right)\right]}. \quad (5.8.6)$$

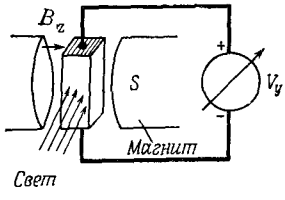
В частном случае, когда $d \gg L$ и $L_{s0} = L_{sd}$, имеем

$$V = G_0 \frac{k_B T}{|e|} \frac{\mu_n - \mu_p}{n\mu_n + p\mu_p} \frac{1}{\sqrt{D/\tau} + s}. \quad (5.8.7)$$

Очевидно, что описанный метод применим для определения скорости поверхностной рекомбинации s, если известны подвижности и времена жизни неосновных носителей. При плотности потока фотонов $G_0 = 10^{18}$ см$^{-2}$/с, концентрации электронов $2{,}6 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$ (дырки практически отсутствуют), подвижности дырок $\mu_p = \mu_n/2$, полагая $D/\tau = 10^{16}$ см^2/с^2 при комнатной температуре и пренебрегая поверхностной рекомбинацией, получаем э. д. с. Дембера 0,5 В. Учет поверхностной рекомбинации со скоростью порядка 10^6 см/с, типичной для поверхности, обработанной пескоструйным методом, понижает э. д. с. до 500 мкВ. В случае протравленной поверхности, когда $s \sim$ $\sim 10^2$ см/с, поверхностная рекомбинация существенным образом не влияет на э. д. с.

Наложение магнитного поля, перпендикулярного направлению распространения света, приводит к холловскому аналогу

фотодиффузии, называемому фотоэлектромагнитным эффектом [1]). Экспериментальное устройство показано на фиг. 5.18. Полярность напряжения V_y изменяется на обратную при обращении магнитного поля B_z. Теория этого эффекта была подробно развита Росбреком [27]. Здесь мы изложим упрощенную теорию без учета поверхностной рекомбинации и в предположении, что размеры образца значительно превышают диффузионную



Фиг. 5.18. Схема устройства для наблюдения фотоэлектромагнитного эффекта.

длину. Будет рассмотрен лишь случай слабого магнитного поля в направлении z. Компонента плотности тока в направлении y (холловском) определяется выражением

$$j_y = \sigma E_y + (j_{nx}\mu_{Hn} - j_{px}\mu_{Hp})B_z, \tag{5.8.8}$$

где индекс H обозначает холловскую подвижность. Поскольку по предположению ток в направлении x отсутствует ($j_{px} = -j_{nx} = -|e|Ddp/dx$), для плотности фототока короткого замыкания ($E_y = 0$) имеем

$$j_y = |e|D(\mu_{Hn} + \mu_{Hp})B_z\frac{\Delta p}{L}, \tag{5.8.9}$$

где в соответствии с указанным выше приближением мы заменили dp/dx на $\Delta p/L$. Иногда фотоэлектромагнитный эффект вместе с измерением фотопроводимости используют для определения времени жизни неосновных носителей τ. (Метод инжекции, использовавшийся в эксперименте Хейнса — Шокли, позволяет более точно определить значение τ, и фотоэлектромагнитный эффект чаще используется для определения скорости поверхностной рекомбинации.) Приложим только электрическое поле E_y, не прикладывая магнитного поля. Под действием освещения плотность тока изменяется на величину

$$\Delta j_y = |e|(\mu_n + \mu_p)E_y\Delta p. \tag{5.8.10}$$

---

[1]) Более подходящим было бы название «фотогальваномагнитный эффект», см., например, [28]. (В советской литературе принят термин «эффект Кикоина — Носкова». — *Прим. перев.*)

Тогда отношение плотностей фототока и тока, связанного с фотоэлектромагнитным эффектом, определяется выражением

$$\frac{(\Delta j_y)_{\text{фото}}}{(\Delta j_y)_{\text{ф. э. м.}}} = \frac{E_y}{B_z r_H}\frac{L}{D} = \frac{E_y}{B_z r_H}\sqrt{\frac{|e|\tau}{k_B T \mu}}. \qquad (5.8.11)$$

Здесь предполагается, что холл-фактор для обоих типов носителей одинаков и в измерениях обоих эффектов интенсивность света остается неизменной.

Напряженность обусловленного фотоэлектромагнитным эффектом поля в разомкнутой цепи получается при замене j_y в (5.8.9) на $-\sigma E_y$ и интегрировании по сечению образца:

$$E_y = -\frac{|e| D(\mu_{Hp} + \mu_{Hn}) B_z}{\sigma L}\frac{1}{d}\int_0^d \Delta p\, dx. \qquad (5.8.12)$$

В указанном выше приближении интеграл равен $\Delta p \cdot L$. Напряжение V_y равно произведению El, где l — длина кристалла. Следовательно,

$$V_y = -\frac{|e| D(\mu_{Hp} + \mu_{Hn}) B_z}{\sigma}\frac{l}{d}\Delta p = \\ = -\frac{k_B T}{|e|}\mu_{Hp} B_z\left[\frac{b(b+1)(\eta+1)}{(\eta b+1)^2}\frac{\Delta p}{p}\right], \qquad (5.8.13)$$

где $\eta = n/p$ и $b = \mu_n/\mu_p = \mu_{Hn}/\mu_{Hp}$. При η, $b \gg 1$ множитель, стоящий в скобках, равен $\Delta p/n = \Delta n/n$. Если принять, что эта величина равна 0,1, и положить $\mu_{Hp} B_z = 0{,}1$, то при комнатной температуре напряжение V_y, обусловленное фотоэлектромагнитным эффектом, оказывается очень малым (260 мкВ). Это напряжение очень чувствительно к неоднородностям легирования, поскольку внутренние p—n-, p^+—p- или n^+—n-переходы приводят к появлению вентильного фотоэффекта, более сильного по сравнению с фотоэлектромагнитным эффектом.

§ 9. Вентильный фотоэффект

Когда световое, рентгеновское, бета- или другое излучение, энергия кванта которого превышает пороговое значение порядка ширины запрещенной зоны ε_G, ионизует область потенциального барьера, возникает фото-э. д. с. Вентильный фотоэффект нашел широкое применение в создании фотоэлементов, служащих для преобразования солнечной энергии в электрическую. В верхних слоях атмосферы Земли и на поверхности Луны плотность потока солнечной энергии составляет 0,135 Вт/см^2. Для работы двигателя лунохода мощностью 5 кВт при к. п. д.

преобразования 10% солнечная батарея должна иметь эффективную площадь 30 м^2.

В стационарном состоянии ($\partial \Delta n/\partial t = 0$) уравнение непрерывности (5.2.9) для дырок имеет вид

$$\frac{1}{e}\operatorname{div}\mathbf{j}_p = G - \frac{p - p_n}{\tau_p}; \tag{5.9.1}$$

за исключением слагаемого G, оно совпадает с уравнением (5.3.21). Подставляя сюда выражение (5.3.22) для плотности дырочного тока, получаем для дырок в n-области перехода

$$-D_p \operatorname{div}\operatorname{grad} p = G - \frac{p - p_n}{\tau_p}. \tag{5.9.2}$$

Граничные условия таковы: при $x \gg x_n$ $p = p_n$ и $G = 0$; при $x = x_n$ концентрация дырок описывается выражением (5.3.24). p-область перехода находится по предположению в тесном контакте с освещаемой поверхностью, как показано на фиг. 5.7. Электроны в p-области описываются уравнением, сходным с (5.9.2). В качестве граничного условия в p-области положим для простоты, что поверхностная рекомбинация очень велика, так что там $G = 0$. В остальном условия схожи с приведенными в § 3 этой главы. Предположим для простоты, что падающее излучение превращается в электронно-дырочные пары только в области перехода и диффузионные длины $L_p = \sqrt{D_p\tau_p}$ и $L_n = \sqrt{D_n\tau_n}$ много больше толщины перехода $d = |x_p - x_n|$. Тогда решение уравнения (5.9.2) имеет вид

$$p(x) - p_n - G\tau_p = [p(x_n) - p_n - G\tau_p]\exp\left(-\frac{x - x_n}{L_p}\right), \tag{5.9.3}$$

откуда, используя соотношение $D_p\tau_p = L_p^2$, для дырочной составляющей плотности тока получаем

$$j_p = \frac{|e|D_p p_n}{L_p}\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_B T}\right) - 1\right] - G|e|L_p. \tag{5.9.4}$$

Выражение для электронной составляющей имеет аналогичный вид, за исключением члена $G|e|L_p$. Следовательно, полная плотность тока определяется выражением

$$j = j_s\left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_B T}\right) - 1\right] - j_L, \tag{5.9.5}$$

где

$$j_L = G|e|L_p = \frac{\Delta p}{\tau_p}|e|\sqrt{D_p\tau_p} = |e|\Delta p\sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}} \tag{5.9.6}$$

есть составляющая плотности тока, обусловленная освещением перехода. Более полное выражение для j_L, включающее конеч-

ную скорость поверхностной рекомбинации, приведено в работе [29].

В короткозамкнутой цепи плотность тока $j = -j_L$. Напряжение в разомкнутой цепи V_{oc} определяется выражением

$$V_{oc} = \frac{k_B T}{|e|} \ln\left(1 + \frac{j_L}{j_s}\right). \tag{5.9.7}$$

Выходная мощность на единицу площади составляет jV. Она максимальна при $\partial(jV)/\partial V = 0$; из этого условия определяется оптимальное значение плотности тока

$$j = -\frac{j_L}{1 + \left[1 - \exp\left(-\frac{|e|V}{k_B T}\right)\right]\frac{k_B T}{|e|V}}, \tag{5.9.8}$$

где V — решение уравнения

$$V = V_{oc} - \frac{k_B T}{|e|} \ln\left(1 + \frac{|e|V}{k_B T}\right),$$

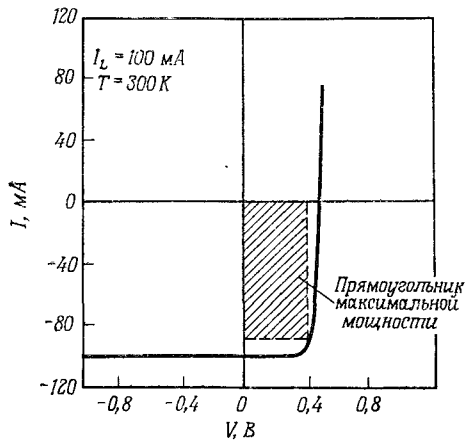
и максимальная выходная мощность на единицу поверхности

$$|jV|_{\text{макс}} = \frac{j_L V^2}{V + \frac{k_B T}{|e|}}\left(1 + \frac{j_s}{j_L}\right) \approx j_L V_{oc}\left(1 + \frac{k_B T}{|e| V_{oc}}\right)^{-1}. \tag{5.9.9}$$

На фиг. 5.19 показана вольтамперная характеристика освещаемого кремниевого p—n-перехода. Заштрихованный участок соответствует максимуму выходной мощности порядка 35 Мвт. Для определения плотности тока насыщения j_s в кремнии используем выражение (5.3.40), в котором положим $\tau_n = \tau_p = \tau$, мы получим для входящего в (5.9.7) отношения j_L/j_s значение, равное $L_p \Delta p/(dn_i)$. При $\Delta p \gg n_i$ и $L_p \gg d$, как предполагалось выше, получаем $j_L/j_s \gg 1$. Поскольку зависимость V_{oc} от j_L/j_s является логарифмической, даже в этом случае фото-э. д. с. не может превышать величину $k_B T/|e|$ больше, чем на порядок. Она оказывается того же порядка величины, что и диффузионный потенциал V_D, который при комнатной температуре составляет несколько десятых вольта. Очевидно, что вентильный фотоэффект значительно сильнее, чем фотоэлектромагнитный эффект, рассмотренный в предыдущем параграфе. (Влияние магнитного поля, необходимого для получения фотоэлектромагнитного эффекта, на величину э. д. с. вентильного фотоэффекта ничтожно мало.)

В работе [31] сообщалось о том, что в гетеропереходных солнечных батареях, состоящих из p-$Ga_{1-x}Al_xAs$ на p—n-переходе в GaAs, достигнуты значения к. п. д. преобразования,

превышающие 16%. Наибольшая часть солнечного спектра используется при $x = 0{,}7$. Этот тип гетероперехода рассматривается более подробно в гл. 13, § 2, где описываются полупроводниковые лазеры. Увеличение к. п. д. по сравнению со случаем обычного гомоперехода может быть связано с уменьшением последовательного сопротивления образца и потерь на поверхностную рекомбинацию при наличии слоя высоколегированного $Ga_{1-x}Al_xAs$ (толщина слоя при $x = 0{,}7$ составляет 6 мкм; толщина перехода равна 0,8 мкм). Было найдено, что при интенсивности солнечного излучения 98,3 мВт/см^2 на уровне моря значения V_{oc} и $-j_L$ составляют 1 В и 21 мА/см^2.



Фиг. 5.19. Вольтамперная характеристика освещаемого фотоэлемента [30].

Самый большой фотоэлемент с указанным высоким значением к. п. д. преобразования имел размеры порядка 0,15 см^2. Вследствие большой ширины запрещенной зоны в GaAs эти элементы чувствительны к энергии фотонов не ниже 1,4 эВ и вплоть до 2,5 эВ.

§ 10. Диффузия горячих носителей

В § 14 предыдущей главы мы видели, что в сильном электрическом поле распределение носителей заряда по скоростям отличается от равновесного. Средняя энергия носителей выше тепловой энергии. Возникает вопрос: какова средняя энергия носителей в сильном электрическом поле узкого p—n-перехода, обусловленном наличием внутреннего диффузионного потенциала? Из термодинамических соображений ясно, что в отсутствие электрического тока средняя энергия носителей имеет одно и то же значение во всем объеме кристалла, включая область перехода. В этом случае подвижность и коэффициент диффузии носителей не зависят от напряженности поля на переходе. Во всяком случае, обе эти величины не определяются напряженностью поля в данной точке, а зависят от локального распределения носителей. Впервые эта задача была решена Авакянцем [32] для случая однородного поля на барьере; общее решение

было получено Стрэттоном [33, 34] (см. также [35—37]), а решение в случае тока, ограниченного пространственным зарядом, — Стрэттоном и Джонсом [38].

Решение одномерного уравнения Больцмана в диффузионном приближении имеет вид

$$f = f_0 - \frac{eE_z}{m}\tau_m \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \tau_m v_z \frac{\partial f_0}{\partial z}. \qquad (5.10.1)$$

Для плотности тока j_z имеем

$$j_z = e\int v_z f d^3v = -\frac{e^2E_z}{m}\int \tau_m v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} d^3v - e\frac{\partial}{\partial z}\int \tau_m v_z^2 f_0 d^3v. \qquad (5.10.2)$$

Здесь предполагается, что τ_m не зависит от z, а v_z и z — независимые переменные. Первый интеграл, рассмотренный в гл. 4, § 2, равен $n|e|\mu E_z$. Концентрация носителей n определяется из условия

$$n = \int f_0 d^3v = n(z) \qquad (5.10.3)$$

и зависит от z, поскольку f_0 есть функция от z в области перехода. Вводя коэффициент диффузии

$$D_n = \frac{\int \tau_m v_z^2 f_0 d^3v}{\int f_0 d^2v}, \qquad (5.10.4)$$

из (5.10.2) получаем

$$j_z = n|e|\mu_n E_z - e\frac{\partial}{\partial z}(nD_n). \qquad (5.10.5)$$

Соотношение Эйнштейна в этих обозначениях имеет вид

$$\frac{|e|D_n}{\mu_n} = -\frac{m\int \tau_m v_z^2 f_0 d^3v}{\int \tau_m v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} d^3v}. \qquad (5.10.6)$$

Только в случае максвелловского распределения с электронной температурой T_e, когда $\partial f_0/\partial v_z = -f_0 m v_z/(k_B T_e)$, правая часть равна $k_B T_e$ [см. (4.10.12)]. Последний член в выражении (5.10.5) можно разбить на два: $eD_n \partial n/\partial z + en(dD_n/dT_e)(\partial T_e/\partial z)$, где второе слагаемое описывает обычную тепловую диффузию.

Используя (4.2.31) и (4.2.43), можно показать, что уравнение баланса энергии (4.13.6) в рассматриваемом случае имеет вид [33]

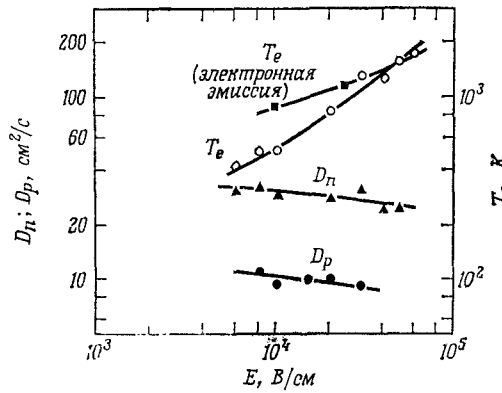
$$j_z E_z = -n\left\langle\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right\rangle_{\text{столкн}} + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\varkappa\frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{j_z}{e}\frac{\langle\tau_m\varepsilon\rangle}{\langle\tau_m\rangle}\right]. \qquad (5.10.7)$$

Выражение в квадратных скобках описывает поток энергии в положительном направлении оси z, $\varkappa = \varkappa(T_e)$ — удельная теплопроводность носителей, $(j/e)\,\langle\tau_m\varepsilon\rangle/\langle\tau_m\rangle$ — плотность потока энергии дрейфа носителей.

Уравнения (5.10.5), (5.10.7) и уравнение Пуассона решались численными методами с обычными граничными условиями на p—n-переходе: $n = n_b \exp(-eV_D/k_BT_e)$ при $z = d$, $n = n_b$ при $z = 0$ и дополнительное требование $T_e = T$ при $z = 0$ и $z = d$. В случае малых отклонений от равновесия, когда $j_z = 0$, аналитическое решение можно найти, разлагая зависящие от координаты величины в степенной ряд по j_z. В этом случае для приложенного напряжения V имеем

$$V = \int_0^d \left[\frac{j_z}{n\,|e|\,\mu_n} - E_z\frac{T_e - T}{T}\right] dz. \qquad (5.10.8)$$

В это выражение входят равновесные значения величин n, μ_n, E_z и T (при $j_z = 0$). С помощью последнего выражения можно построить вольт-амперную характеристику для конкретной модели барьера.



Фиг. 5.20. Коэффициенты диффузии и температуры носителей в зависимости от напряженности электрического поля в кремниевых образцах, вырезанных в направлении [111], при комнатной температуре [39].

Экспериментальные значения коэффициентов диффузии D_n и D_p в образцах кремния, вырезанных в направлении ⟨111⟩, были получены при комнатной температуре в полях от 6 до 50 кВ/см (фиг. 5.20) [39]. Предполагая, что распределение носителей является максвелловским, можно применять соотношение Эйнштейна в его простой форме; полученные значения электронной температуры приведены на фиг. 5.20. Для сравнения там же приведены значения электронной температуры, полученные из данных по термоэлектронной эмиссии из кремниевого p—n-диода [40]. Последние значения несколько выше, но, так как точность определения T_e в экспериментах по термоэлектронной эмиссии порядка 30%, совпадение является вполне хорошим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stöckmann F.* в книге Halbleiterprobleme (Hrg. F. Sauter), Bd. VI, Vieweg, Braunschweig, 1961, S. 279.
2. *Adler R. B., Smith A. C., Longini R. L.*, Introduction to Semiconductor Physics, Wiley, New York, 1964.
3. *Haynes J. R., Shockley W.*, Phys. Rev., **81**, 835 (1951).
4. *McKelvey J. P.* в книге Problems in Solid State Physics (ed. H. J. Goldsmid), Acad. Press, New York, 1968, p. 82.
5. *Schottky W.*, Zs. Phys. **118**, 539 (1942).
6. *Shockley W.*, Bell Syst. Techn. Journ., **28**, 435 (1949).
7. *Sah C. T., Noyce R. N., Shockley W., Proc.* IRE, **45**, 1228 (1957).
8. *Sze S. M.*, Physics of Semiconductor Devices, Wiley, New York, 1969, p. 104. (Имеется перевод: *С. М. Зи*, Физика полупроводниковых приборов, «Энергия», М., 1973.)
9. *Pietenpol W.*, Phys. Rev., **82**, 120 (1951).
10. *Gunn J. B.*, Journ. Electron. Control, **4**, 17 (1958).
11. *Bardeen J.*, Semiconductor Research Leading to the Point Contact Transistor в книге Nobel Lectures «Physics», Elsevier, Amsterdam, 1964, p. 318.
12. *Brattain W. H.*, Surface Properties of Semiconductors в книге Nobel Lectures «Physics», Elsevier, Amsterdam, 1964, p. 377.
13. *Shockley W.*, Transistor Technology Evokes New Physics, в книге Nobel Lectures «Physics», Elsevier, Amsterdam, 1964, p. 344.
14. *Morant M. J.*, Introduction to Semiconductor Devices, Addison-Wesley, Reading/Mass., 1964.
15. *Bardeen J., Brattain W. H.*, Phys. Rev,. **74**, 230 (1948).
16. *Shockley W.*, Electrons and Holes in Semiconductors, Van Nostrand, New York, 1950. (Имеется перевод: *В. Шокли*, Теория электронных полупроводников, ИЛ, М., 1953.)
17. *Gebbie H. A., Banbury P. C., Hogarth C. A.*, Proc. Phys. Soc. (London), **63B**, 371 (1950).
18. *Tanenbaum M., Thomas D. G.*, Bell Syst. Techn. Journ., **35**, 1 (1956).
19. *Hoerni J. A.*, IRE Electron Devices Meeting, Washington D. C., 1960.
20. *Frosch C. J., Derrick L.*, Journ. Electrochem. Soc., **104**, 547 (1957).
21. *Grove A. S.*, Physics and Technology of Semiconductor Devices, Wiley, New York, 1967.
22. *Leistiko O., Grove A. S., Sah C. T.*, IEEE-Trans., **ED-12**, 248 (1965).
23. *Dember H.*, Phys. Zs., **32**, 554; 856 (1931).
24. *Dember H.*, Phys. Zs., 33, 207 (1932).
25. *Frenkel J.*, Nature, **132**, 312 (1933).
26. *Van Roosbroeck W.*, Journ. Appl. Phys., **26**, 380 (1955).
27. *Van Roosbroeck W.*, Phys. Rev., **101**, 1713 (1956).
28. *Madelung O.* в книге Handbuch der Physik (Hrg. S. Flügge), Bd. XX, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957, S. 142.
29. *Madelung O.* в книге Handbuch der Physik (Hrg. S. Flügge), Bd. XX, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957, S. 163.
30. *Prince M. B.*, Journ. Appl. Phys., **26**, 534 (1955).
31. *Woodall J. M., Hovel H. J.*, Appl. Phys. Letters, **21**, 379 (1972).
32. *Аванянц Г.*, ЖЭТФ, **27**, 333 (1954).
33. *Stratton R.*, Phys. Rev., **126**, 2002 (1962).
34. *Stratton R.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 4582 (1969).
35. *Gunn J. B.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 4602 (1968).
36. *Persky G., Bartelink D. J.*, Phys. Rev., **B1**, 1614 (1970).
37. *Bonch-Bruevich V. L.*, Phys. Stat. Solidi, **33**, 911 (1969).
38. *Stratton R., Jones E. L.*, Journ. Appl. Phys., **38**, 4596 (1967).
39. *Sigmon T. W., Gibbons J. F.*, Appl. Phys. Letters, **15**, 320 (1969).
40. *Davies E. A.*, Journ. Chem. Solids, **25**, 201 (1964).

Глава 6. МЕХАНИЗМЫ РАССЕЯНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОДНОДОЛИННОЙ МОДЕЛИ

В гл. 4 при расчете гальваномагнитных, термоэлектрических, термомагнитных и других эффектов мы часто предполагали, что зависимость времени релаксации импульса от энергии имеет вид степенного закона $\tau_m \sim \varepsilon^r$, где r — некоторая постоянная. Теперь мы рассмотрим основные механизмы рассеяния и найдем зависимость τ_m от энергии. В тех случаях, когда справедлив степенной закон, мы получим значение показателя степени r.

§ 1. Рассеяние на нейтральных примесях

Уравнение движения носителя в электрическом поле (4.2.2) содержит член трения, существенный для установления постоянной скорости дрейфа в поле заданной напряженности. С точки зрения микроскопической теории трение обусловлено взаимодействием носителей с несовершенствами кристаллической решетки, такими, как примеси, дефекты и колебания решетки. Это взаимодействие называется рассеянием. Понятие «сечение рассеяния» используется в теории прохождения частиц большой энергии через вещество [1]. Вероятность того, что в единицу времени произойдет соударение, $1/\tau_c$ определяется концентрацией центров рассеяния N, их сечением σ_c и скоростью частицы v:

$$\frac{1}{\tau_c} = N\sigma_c v. \tag{6.1.1}$$

Величина τ_c называется временем свободного пробега; это среднее время свободного движения частицы между двумя соударениями. Чтобы понять соотношение (6.1.1), можно рассмотреть N параллельных дисков площадью σ_c, расположенных в единице объема. Частица движется перпендикулярно дискам и, проходя расстояние vdt за время dt, с вероятностью $(N\sigma_c)vdt = dt/\tau_c$ попадает в один из дисков.

Сечение σ_c определяется из дифференциального сечения рассеяния $\sigma(\theta)$ путем интегрирования по телесному углу $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$, причем центр рассеяния предполагается сферически симметричным:

$$\sigma_c = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta, \tag{6.1.2}$$

где θ — угол отклонения частицы от направления первоначального движения. Следовательно, компонента скорости частицы в первоначальном направлении равна $v\cos\theta$. Относительное изменение этой компоненты скорости равно

$$\frac{v - v\cos\theta}{v} = 1 - \cos\theta. \tag{6.1.3}$$

Эта величина определяет также относительное изменение соответствующей компоненты импульса. (Предполагается, что эффективная масса во время соударения не меняется.) Таким образом, сечение передачи импульса σ_m определяется преобразованным выражением (6.1.2):

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta)(1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{6.1.4}$$

а время релаксации импульса τ_m определяется выражением

$$\frac{1}{\tau_m} = N\sigma_m v = Nv2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta)(1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{6.1.5}$$

Одним из важных механизмов рассеяния является рассеяние электрона проводимости на нейтральном атоме примеси в кристаллической решетке. Подобный механизм рассеяния встречается в газах для электронов небольших энергий. Было дано подробное квантовомеханическое описание этого процесса [2]; еще до развития квантовой механики это рассеяние наблюдал экспериментально Рамзауер [3, 4]. Результаты теоретического исследования Эргинсой [5] распространил на случай рассеяния на нейтральных примесях в кристаллах.

Здесь применим метод парциальных волн: волна электрона дифрагирует в поле атома примеси таким образом, что превращается в невозмущенную волновую функцию вне атома, которая рассматривается как суперпозиция парциальных волновых функций, составляющих плоскую волну в отсутствие центра рассеяния (разложение по полиномам Лежандра от угла рассеяния), и радиально расходящейся рассеянной волны. Поскольку эта задача рассматривается в учебниках по квантовой механике [1], детальное рассмотрение мы опустим. Численные расчеты учитывают как обменный эффект, так и поляризацию атома движущимся электроном. Для электронов, энергия которых не превышает 25% энергии ионизации примесного атома, полное сечение приближенно равно

$$\sigma = \frac{20a}{k}; \tag{6.1.6}$$

здесь a — величина, эквивалентная радиусу Бора атома водорода:

$$a = \frac{\varkappa \varkappa_0 \hbar^2}{me^2} = \varkappa a_B \frac{m_0}{m}, \tag{6.1.7}$$

где $a_B = 0{,}53$ Å — радиус Бора, $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость и m — эффективная масса плотности состояния (гл. 7, § 2, и гл. 8, § 1) [6]; $k = 2\pi/\lambda = mv/\hbar$ — абсолютное значение волнового вектора электрона. Интересно отметить, что почти такое же сечение получается умножением геометрического сечения πa^2 на отношение λ/a; однако простого объяснения этого результата нет. Согласно (6.1.6), сечение обратно пропорционально скорости v, тогда как идеальная сфера или прямоугольная потенциальная яма имеет сечение, не зависящее от скорости [1]. Подвижность

$$\mu = \frac{e}{20 a_B \hbar} \frac{m}{m_0} \frac{1}{\varkappa N^{\times}} \tag{6.1.8}$$

и не зависит от температуры. В единицах см^2/(В·с) имеем

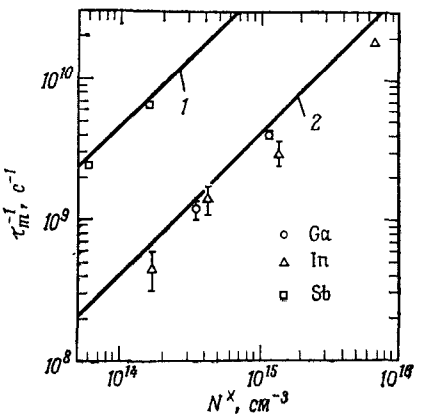
$$\mu = \frac{1{,}44 \cdot 10^{22}\ \text{см}^{-3}}{N^{\times}} \frac{m}{m_0} \frac{1}{\varkappa}. \tag{6.1.9}$$

Например, для электронов в германии, где $m/m_0 = 0{,}12$ и $\varkappa = 16$, из вычислений следует, что подвижность $\mu = 1{,}1 \cdot 10^3$ см^2/(В·с), если предположить, что концентрация нейтральных примесей N^* равна 10^{17} см$^{-3}$. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем интенсивнее рассеяние на нейтральных примесях и тем слабее, как мы увидим ниже, рассеяние на ионизованных примесях.

Наряду с рассеянием на нейтральных примесях всегда существуют другие механизмы рассеяния, такие, как рассеяние на ионизованных примесях и на колебаниях решетки. При очень низких температурах, когда примеси нейтральны вследствие вымораживания носителей и фононы почти отсутствуют, рассеяние на колебаниях решетки и на ионизованных примесях не играет существенной роли и преобладает проводимость по примесной зоне (гл. 6, § 14), поэтому экспериментальные данные по подвижности для сопоставления с (6.1.9) не получены.

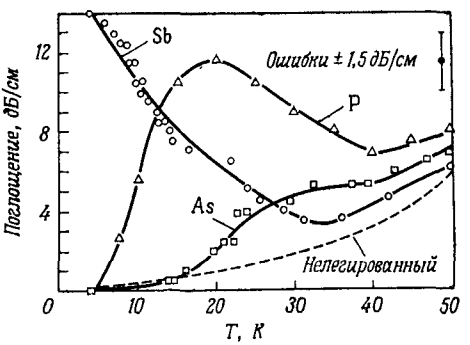
Известно, однако, что ширина линии циклотронного резонанса и поглощение ультразвуковых волн при низких температурах определяются рассеянием на нейтральных примесях. Хотя эти явления рассматриваются ниже (в гл. 11, § 11, и в гл. 7, § 8), мы приведем здесь результаты, которые объясняются рассеянием на нейтральных примесях.

На фиг. 6.1 показана зависимость величины, обратной времени релаксации, определенному по ширине линии циклотронного резонанса, от концентрации примесей [7]. Результаты, соответствующие мелким донорам (Sb в Ge), хорошо согласуются с формулой Эргинсоя (6.1.8), где $\mu = (e/m)\tau_m$. Для мелких акцепторов (Ga и In в Ge) величина τ_m^{-1} на порядок меньше и находится в соответствии с теорией Шварца [8, 9], которая учитывает особенности рассеяния положительно заряженной частицы (дырки) на водородоподобной примеси.



Фиг. 6.1. Зависимость обратного времени релаксации от концентрации нейтральных примесей в германии [7].
Точки — экспериментальные данные (циклотронный резонанс); прямые рассчитаны по формулам: *1* — Эргинсоя [5], *2* — Шварца [8].

Может вызвать удивление, что водородоподобные нейтральные примеси разного происхождения ведут себя так похоже. В других явлениях поведение этих примесей может существенно различаться.



Фиг. 6.2. Температурная зависимость поглощения поперечных акустических волн, распространяющихся вдоль оси [100] в легированном и нелегированном германии [10].
Погрешность ±1,5 дБ/см; концентрация примесей около $3 \cdot 10^{15}$ $см^{-3}$; частота акустических волн 9 ГГц

Например, на фиг. 6.2 показано поглощение ультразвуковой волны частоты 9 ГГц в германии с примесью фосфора, мышьяка и сурьмы в зависимости от температуры [10]. При температурах ниже 30 К поглощение обусловлено неподвижными электронами, связанными с примесями. Штриховая кривая соответствует нелегированному германию. Разное поведение примесей объясняется различным влиянием относительного сдвига, наве-

денного акустической волной, на синглетные и триплетные состояния электронов в примесном атоме (гл. 3, § 2). Теоретически установлено, что наибольшее поглощение имеет место при температуре, равной отношению энергетического расстояния двух уровней к 1,5 k_B. Разделив известные энергетические расстояния на k_B, получаем для Sb 3,7 К, для P 33 К и для As 49 К. В случае As увеличение поглощения, обусловленного решеткой, накладывается на уменьшающееся поглощение вследствие примеси, и максимум не возникает.

§ 2. Упругое рассеяние

Если в расчетах сечения рассеяния упомянутым выше методом парциальных волн при $ka \ll 1$ ряд быстро сходится, то при $ka \gg 1$ следует применять приближение Борна. Этим методом мы воспользуемся в задаче рассеяния электрона на ионизованных примесях.

Рассеяние рассматривается как малое возмущение волны электрона потенциалом $V(r)$ примесного иона. Обозначив через V объем кристалла, волновую функцию невозмущенного электрона с волновым вектором $\mathbf{k}$

$$\psi_n = V^{-1/2} \exp[i(\mathbf{k}_n \mathbf{r})] \tag{6.2.1}$$

получаем из стационарного уравнения Шредингера

$$H\psi_n = \hbar\omega_n \psi_n, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6.2.2}$$

где H — гамильтониан и $\hbar\omega_n$ — собственные значения в невозмущенной задаче (т. е. в отсутствие иона), а ψ_n нормирована следующим образом:

$$\int |\psi_n|^2 d^3r = \frac{1}{V} \int d^3r = 1. \tag{6.2.3}$$

Для процесса рассеяния следует решить нестационарное уравнение Шредингера

$$\{H + |e| V(r)\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{6.2.4}$$

где ψ представляется набором функций ψ_n:

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n \exp(-i\omega_n t) \tag{6.2.5}$$

с неизвестными коэффициентами $a_n = a_n(t)$. Из уравнения (6.2.4) следует

$$\sum_n a_n |e| V(r) \psi_n \exp(-i\omega_n t) = i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \psi_n \exp(-i\omega_n t). \tag{6.2.6}$$

Умножив (6.2.6) на $\psi_m^* \exp(i\omega_m t)$, где m — целое число, и проинтегрировав по объему кристалла, получим

$$\sum_n a_n H_{mn} \exp(i\omega_{mn} t) = i\hbar \frac{da_m}{dt}, \tag{6.2.7}$$

поскольку интегралы

$$\int \psi_m^* \psi_n d^3r = \frac{1}{V} \int \exp\{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m)\mathbf{r}\} d^3r \tag{6.2.8}$$

при $m \neq n$ обращаются в нуль, а при $m = n$ равны единице вследствие периодических граничных условий уравнения Шредингера. Величины H_{mn} и ω_{mn} определяются выражениями

$$H_{mn} = \int \psi_m | e | V(r) \psi_n d^3r, \tag{6.2.9}$$

$$\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n. \tag{6.2.10}$$

Интегрирование (6.2.7) дает коэффициент

$$a_m(t) = -\frac{1}{\hbar} \sum_n H_{mn} \int_0^t a_n \exp(i\omega_{mn} t)\, dt, \tag{6.2.11}$$

где $V(r)$ и, следовательно, H_{mn} предполагаются не зависящими от времени, т. е. тепловое движение примесного иона не учитывается.

Невозмущенный электрон находится в состоянии k, поэтому $a_k = 1$, а все другие коэффициенты равны нулю. Для конечного состояния k' из (6.2.11) получаем

$$|a_{k'}(t)|^2 = \hbar^2 |H_{k'k}|^2 t^2 \sin^2\left(\frac{\omega_{k'k} t}{2}\right)\left(\frac{2}{\omega_{k'k} t}\right)^2. \tag{6.2.12}$$

Для $t \to \infty$ (т. е. для промежутков времени, достаточно длинных, чтобы процесс рассеяния полностью завершился) функция $\sin^2(\omega_{k'k}t/2)/(\omega_{k'k}t/2)^2$ переходит в δ-функцию: $2\pi\delta(\omega_{k'k}t) = (2\pi\hbar/t)\,\delta(\hbar\omega_{k'k})$. Тогда вероятность перехода в единицу времени S определяется из «второго золотого правила Ферми» [11]:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{|a_{k'}(t)|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{k'k}|^2 \delta[\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k})]. \tag{6.2.13}$$

Для переходов в зону состояний или внутри зоны следует учитывать не одно, а множество возможных конечных состояний k'. Поэтому S следует умножить: 1) на плотность состояний $g(\varepsilon)d\varepsilon$ из (3.1.28) (где, однако, надо опустить множитель 2, так как рассеяние не переворачивает спина), 2) на вероятность $1 - f(\mathbf{k}')$ того, что конечное состояние пока не занято, и 3) на вероятность $f(\mathbf{k})$ того, что исходное состояние занято, и проинтегрировать по всему фазовому пространству. Это определяет измене-

ние $f(\mathbf{k})$ со временем t вследствие рассеяния (столкновений):

$$\left(-\frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\text{столкн, } k\to k'} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k' S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f(k)[1 - f(\mathbf{k}')]. \quad (6.2.14)$$

Мы должны также учесть рассеяние в обратном направлении:

$$\left(-\frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\text{столкн, } k'\to k} = -\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k' S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) f(\mathbf{k}')[1 - f(\mathbf{k})]. \quad (6.2.15)$$

Полная скорость рассеяния состоит из суммы обоих вкладов:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = \left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн, } k\to k'} + \left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн, } k'\to k}. \quad (6.2.16)$$

Для невырожденного полупроводника, в котором конечные состояния в хорошем приближении можно считать незанятыми, мы можем опустить почти равные единице множители $1 - f(\mathbf{k}')$ и $1 - f(\mathbf{k})$. В термодинамически равновесном состоянии функция распределения равна $f_0(\mathbf{k})$, а ее частная производная по времени $\partial f_0/\partial t = 0$. Согласно принципу детального равновесия [12],

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') f_0(\mathbf{k}) = S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) f_0(\mathbf{k}'). \quad (6.2.17)$$

Таким образом, мы можем исключить $S(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ из (6.2.15) и для (6.2.16) получить

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k' S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\left[f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k}')\frac{f_0(\boldsymbol{k})}{f_0(\boldsymbol{k}')}\right]. \quad (6.2.18)$$

Для элементарной модели зоны ($\varepsilon = \hbar^2k^2/2m$, $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon = \hbar^2\mathbf{k}/m$) из (4.3.4) получаем

$$f(\mathbf{k}) = f_0(\mathbf{k}) - \frac{\hbar}{m}\frac{\partial f_0}{\partial k}(\mathbf{kG}). \quad (6.2.19)$$

В полярных координатах относительно направления $\mathbf{k}$ имеем

$$\begin{aligned} d^3k' &= k'^2\, dk \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \\ (\mathbf{kG}) &= kG\cos\vartheta, \\ (\mathbf{k}'\mathbf{G}) &= k'G(\cos\theta\cos\vartheta + \sin\theta\sin\vartheta\cos\varphi). \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Поскольку рассеяние на ионизованных примесях почти полностью упруго, $k = k'$ и термодинамически равновесное распределение $f_0(\mathbf{k})$ обладает сферической симметрией, отношение $f_0(\mathbf{k})/f(\mathbf{k}') = 1$. Тогда множитель в квадратных скобках в (6.2.18) равен

$$f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k}') = -\frac{\hbar}{m}\frac{\partial f_0}{\partial k} kG[\cos\vartheta(1 - \cos\theta) - \sin\vartheta\sin\theta\cos\varphi]. \quad (6.2.21)$$

Вероятность $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ не зависит от φ ввиду сферической симметрии. Поэтому после интегрирования (6.2.18) последний член в (6.2.21) обращается в нуль. Из (6.2.18), (6.2.19) и (6.2.21) мы получаем

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{f(\boldsymbol{k}) - f_0(\boldsymbol{k})}{\tau_m}, \tag{6.2.22}$$

где обратное время релаксации импульса

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int k'^2\, dk' \int_0^{\pi} S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')(1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{6.2.23}$$

Интегрирование по k' проводится в пределах первой зоны Бриллюэна. Сопоставление с (6.1.5) показывает, что дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ определяется выражением

$$\sigma(\theta) = \frac{V^2 m^2}{(2\pi\hbar)^3 k} \int S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, k'\, d\varepsilon', \tag{6.2.24}$$

где скорость электрона v заменена на $\hbar k/m$, энергия $\varepsilon' = \hbar^2 k'^2/2m$, и предполагается наличие только одного центра рассеяния во всем объеме кристалла. Благодаря наличию δ-функции в (6.2.13) интеграл берется без особого труда:

$$\sigma(\theta) = \left[\frac{Vm}{2\pi\hbar^2} |\, H_{k'k}\,|\right]^2. \tag{6.2.25}$$

§ 3. Рассеяние на ионизованных примесях

Пусть центр рассеяния представляет собой ион примеси с зарядом Ze, закрепленный где-то в кристалле. Классическая траектория электрона (или дырки) представляет собой гиперболу, в одном из фокусов которой (в зависимости от знака заряда) располагается ион, как это показано на фиг. 6.3. Расстояние p иона от асимптоты называется прицельным расстоянием. Введем для удобства расстояние

$$K = \frac{Ze^2}{4\pi\varkappa\varkappa_0 m v^2}, \tag{6.3.1}$$

на котором потенциальная энергия вдвое больше кинетической ($\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость, $\varkappa_0$ — электрическая постоянная). Согласно известному соотношению Резерфорда,

$$p = K \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{6.3.2}$$

Носители, отклоненные на угол от θ до $\theta + d\theta$ в телесный угол $d\Omega$, проходят с прицельным расстоянием от p до $p + dp$ и, сле-

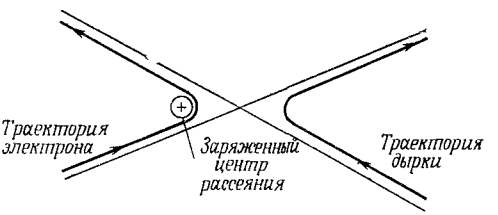
довательно, пронизывают кольцо площадью $2\pi p|dp|$, в центре которого расположен ион. Тогда дифференциальное сечение рассеяния определяется из соотношения

$$\sigma(\theta)\,d\Omega = 2\pi p\,|\,dp\,| = 2\pi p\,\frac{Kd\,(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = 2\pi K^2\,\frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\,(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}; \qquad (6.3.3)$$

поскольку $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta = 8\pi \sin^2(\theta/2)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\,(\theta/2)$, получаем

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{K/2}{\sin^2(\theta/2)}\right)^2. \qquad (6.3.4)$$

Это сечение получено из классической механики. Оно основано на представлении о дальнодействующем кулоновском потенциале. Расчет τ_m из (6.3.4) заходит в тупик: интеграл расходится, если интегрирование производить от нулевого угла рассеяния, так как $\sigma(0) = \infty$.



Фиг. 6.3. Рассеяние электрона и дырки на кулоновском потенциале положительного иона.

На практике кулоновский потенциал заменяют потенциалом Юкавы

$$V(r) = -\frac{Z\,|e|}{4\pi\varkappa\varkappa_0 r}\exp\left(-\frac{r}{L_D}\right), \qquad (6.3.5)$$

который более соответствует действительности, так как потенциал рассматриваемого иона резко уменьшается ввиду экранирования окружающими свободными носителями на расстояниях, больших чем L_D. При больших концентрациях примесей их заряд тоже вносит вклад в экранирование; этот вклад будет рассмотрен ниже.

В окрестности иона концентрация носителей $n(r)$ не равна средней концентрации носителей n:

$$n(r) = n\exp\left[-\frac{|e|\,V(r)}{k_BT}\right] \approx n\left[1 - \frac{|e|\,V(r)}{k_BT}\right]. \qquad (6.3.6)$$

Приближенное равенство выполняется лучше, когда экранирование незначительно. Если потенциал $V(r)$ предполагается кулоновским при $r \ll L_D$, где L_D — длина экранирования Дебая (5.2.24), для сферически симметричного распределения $n(r)$

в виде (6.3.6) из уравнения Пуассона

$$\frac{d^2[rV(r)]}{dr^2} = -\frac{r|e|[n(r)-n]}{\varkappa\varkappa_0} \tag{6.3.7}$$

следует решение в виде (6.3.5).

Квантовомеханический расчет сечения рассеяния центра с потенциалом Юкавы в противоположность классическому методу расчета дает аналитический результат. Из (6.2.25) следует, что в первую очередь нужно из (6.2.9) определить матричный элемент гамильтониана

$$H_{k'k} = \frac{|e|}{V}\int V(r)\exp\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}\}\,d^3r. \tag{6.3.8}$$

Для оценки интеграла введем

$$c = |\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,r, \tag{6.3.9}$$

$$\cos\varphi = \frac{(k-k')\,\boldsymbol{r}}{c} \tag{6.3.10}$$

и

$$z = c\cos\varphi, \quad -c \leqslant z \leqslant c. \tag{6.3.11}$$

Тогда интеграл принимает вид

$$\int_0^\infty \frac{V(r)\,2\pi r^2\,dr}{c}\int_{-c}^{c}\exp(iz)\,dz = 4\pi\int_0^\infty V(r)\,r^2\left[\frac{\sin c}{c}\right]dr. \tag{6.3.12}$$

С учетом (6.3.5) для матричного элемента получаем

$$H_{k'k} = -\frac{Ze^2}{V\varkappa\varkappa_0|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{L_D}\right)\sin(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,r)\,dr =$$

$$= -\frac{Ze^2}{V\varkappa\varkappa_0}\frac{1}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2+L_D^{-2}} \approx -\frac{Ze^2}{V\varkappa\varkappa_0 4k^2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+(2kL_D)^{-2}}, \tag{6.3.13}$$

где V — объем кристалла. Приближение справедливо в случае упругого рассеяния, которое здесь и рассматривается, т. е. когда $|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k}'|$ и

$$|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| \approx 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{6.3.14}$$

Окончательно дифференциальное сечение (6.2.25) принимает вид

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{K/2}{\sin^2(\theta/2)+\beta^{-2}}\right)^2, \tag{6.3.15}$$

где

$$\beta = 2kL_D \tag{6.3.16}$$

и расстояние K определяется из (6.3.1). Из сопоставления (6.3.15) и (6.3.4) ясно, что в противоположность классическому случаю $\sigma(\theta)$ ограничено при θ, равном нулю.

Вычисляя τ_m из (6.1.5), получаем

$$\tau_m = \frac{\frac{\varepsilon^{3/2}}{N_I} 16\pi\sqrt{2m}\left(\frac{\varkappa\varkappa_0}{Ze^2}\right)^2}{\ln(1+\beta^2) - \frac{\beta^2}{1+\beta^2}}, \qquad (6.3.17)$$

где N_I — полная концентрация ионизованных примесей в кристалле. За исключением случаев очень малых скоростей электрона $v \sim k \sim \beta$, знаменатель почти постоянен, и можно считать, что τ_m подчиняется степенному закону

$$\tau_m \sim \varepsilon^{3/2} \qquad (6.3.18)$$

с показателями степени $+3/2$.

При усреднении в случае невырожденного электронного газа

$$\langle\tau_m\rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau_m \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \frac{d\varepsilon}{k_B T} \qquad (6.3.19)$$

мы заменяем ε, входящее в β, значением энергии, при которой подынтегральное выражение $[\varepsilon/(k_B T)]^{3/2} \exp[-\varepsilon/(k_B T)]$ максимально; это имеет место при $\varepsilon = 3k_B T$. Тогда, обозначив β через $\beta_{БХ}$ (Б и Х — начальные буквы фамилий Брукса и Херринга [13, 14], которые провели эти вычисления), получим

$$\beta_{БХ} = 2\frac{m}{\hbar}\left(\frac{2}{m} 3k_B T\right)^{1/2} L_D, \qquad (6.3.20)$$

или

$$\beta_{БХ} = \sqrt{\frac{\varkappa}{16}} \frac{T}{100\,\text{K}} \sqrt{\frac{m}{m_0}} \sqrt{\frac{2{,}08\cdot 10^{18}\ \text{см}^{-3}}{n}}. \qquad (6.3.21)$$

Например, в германии n-типа ($\varkappa = 16$, $m/m_0 = 0{,}12$) с $n = 2{,}5\cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ при 100 К коэффициент $\beta_{БХ}$ равен единице. В этом случае длина Дебая равна 55 Å, а среднее расстояние между ближайшими ионизованными примесями в отсутствие компенсации равно 159 Å.

Подвижность $\mu = (e/m)\langle\tau_m\rangle$ определяется выражением

$$\mu = \frac{2^{7/2}(4\pi\varkappa\varkappa_0)^2 (k_B T)^{3/2}}{\pi^{3/2} Z^2 e^3 \sqrt{m}\, N_I \left[\ln\left(1+\beta_{БХ}^2\right) - \frac{\beta_{БХ}^2}{1+\beta_{БХ}^2}\right]}, \qquad (6.3.22)$$

или в единицах $см^2/(В \cdot с)$

$$\mu = \frac{3{,}68 \cdot 10^{20}\ см^{-3}}{N_I} \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\varkappa}{16}\right)^2 \left(\frac{T}{100K}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{m_0}} \left[\lg\left(1+\beta_{БХ}^2\right) - \frac{0{,}434\beta_{БХ}^2}{1+\beta_{БХ}^2}\right]}. \quad (6.3.23)$$

До расчетов Брукса и Херринга Конуэлл и Вайскопф [15] провели расчет, учитывая в (6.3.4) минимальный угол рассеяния $\theta_{мин}$. Этот угол был определен из (6.2.3), когда за максимальное прицельное расстояние $p_{макс}$ принималась половина среднего расстояния $N_I^{-1/3}$ между соседними ионами. В результате расчета была получена формула, подобная (6.3.22), с той лишь разницей, что вместо выражения в квадратных скобках в нее входил $\lg\left(1+\beta_{КВ}^2\right)$, где

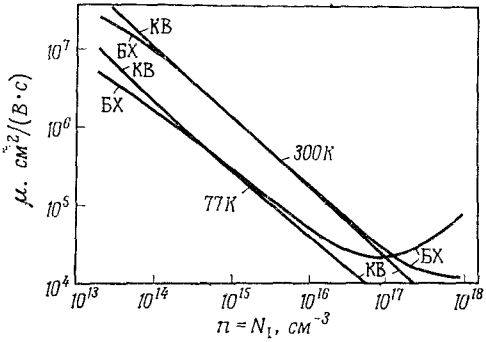
$$\beta_{КВ} = \frac{1}{Z} \frac{\varkappa}{16} \frac{T}{100K} \left(\frac{2{,}35 \cdot 10^{19}\ см^{-3}}{N_I}\right)^{1/3}. \quad (6.3.24)$$

Коэффициент $\beta_{КВ}$ зависит не от концентрации носителей, а от концентрации ионизованных примесей. Поскольку формулы Брукса — Херринга и Конуэлл — Вайскопфа различаются лишь логарифмическими членами, они дают почти одинаковые значения подвижности вплоть до концентраций порядка 10^{18} $см^{-3}$, т. е. в области, за пределами которой полупроводники нельзя считать невырожденными и приведенные расчеты теряют силу. Зависимость подвижности от концентрации при постоянной температуре показана на фиг. 6.4, где принято $n = N_I$, $Z = 1$, $\varkappa = 16$ и $m = m_0$.

На первый взгляд может показаться странным, что закон $\mu \sim T^{3/2}$ трудно проверить экспериментально в широком диапазоне температур. При высоких температурах преобладает рассеяние на колебаниях решетки, а при низких температурах носители вымораживаются на уровни примесей и концентрация ионов N_I становится зависящей от температуры T. Обсуждение экспериментальных результатов $\mu(T)$ приводится после рассмотрения совместного действия рассеяния на колебаниях решетки и на примесях (гл. 6, § 5).

Рассмотрим задачу экранирования ионизованных примесей электронами при наличии вымораживания. Вымораживание уменьшает концентрацию носителей, причем вблизи иона с противоположным знаком заряда это уменьшение не столь значительно. Для простоты будем рассматривать только электроны возле доноров. Концентрацию электронов, входящую в формулу

Брукса — Херринга, обозначим через n'. Она превышает среднюю концентрацию электронов n. Избыток $n' - n$ пропорционален степени заполнения уровней доноров $N_{D\times}/N_D$, где $N_D = N_{D+} + N_{D\times}$ — полная концентрация доноров, $N_{D\times}$ — концентрация нейтральных доноров, а N_{D+} — концентрация ионизованных доноров. В частично компенсированном полупроводнике n-типа находятся также ионы акцепторов, концентрация



Фиг. 6.4. Зависимость подвижности от концентрации примесей N_I при 77 и 300 К, вычисленная по формулам Конуэлл и Вайскопфа (КВ), и Брукса и Херринга (БХ) для гипотетического некомпенсированного полупроводника, в котором эффективная масса равна массе свободного электрона, диэлектрическая проницаемость равна 16, а заряд на примеси $Ze = e$.

которых N_{A^-}. Уравнение электронейтральности электронного полупроводника имеет вид

$$N_{A^-} + n = N_{D+} + p \approx N_{D+}, \tag{6.3.25}$$

где p пренебрежимо мало. Следовательно,

$$n' - n \sim \frac{N_D - N_{A^-} - n}{N_D}. \tag{6.3.26}$$

В случае почти полной нейтрализации доноров избыток $n' - n$ становится малым, поскольку случайное распределение электронов в кристалле возмущается лишь небольшим количеством ионов. Таким образом, разность $n' - n$ должна быть пропорциональна вероятности ионизации доноров $N_{D+}/N_D \approx (N_{A^-} + n)/N_D$. Если разделить $n' - n$ на N_D, можно с достаточной степенью точности положить

$$\frac{n - n'}{N_D} = \frac{N_D - N_{A^-} - n}{N_D} \frac{N_{A^-} + n}{N_D}, \tag{6.3.27}$$

откуда следует формула Брукса [13, 14]

$$n' = n + \frac{(N_D - N_{A^-} - n)(N_{A^-} + n)}{N_D}. \qquad (6.3.28)$$

Полная концентрация ионов

$$N_I = N_{D^+} + N_{A^-}. \qquad (6.3.29)$$

Для расчета n' следует учесть зависимость энергии активации доноров $\Delta\varepsilon_D$ от их концентрации N_I. Более строгое рассмотрение рассеяния показывает, что отталкивающие центры рассеивают носители одноименного знака иначе, чем притягивающие центры носители противоположного знака. Обсуждение применимости приближения Борна можно найти, например, в работах [1, 16—18].

§ 4. Рассеяние равновесных носителей на акустическом деформационном потенциале

Когда в кристалле распространяется звуковая волна, атомы колеблются около положений равновесия. При небольших амплитудах A_s эти колебания можно считать гармоническими, и для волн с частотой ω_s и волновым вектором $\mathbf{q}_s$ они могут быть представлены в виде

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{A}_s \exp\{\pm i[(\mathbf{q}_s\mathbf{r}) - \omega_s t]\}. \qquad (6.4.1)$$

Мы не будем здесь обсуждать спектр колебаний в кристалле, а рассмотрим длинноволновые акустические колебания, для которых скорость звука $u_s = \omega_s/q_s$ постоянна. Длина волны существенно больше межатомного расстояния, поэтому кристалл подобен сплошной среде. Разность смещений двух соседних атомов (равновесное расстояние между которыми равно a) можно записать в виде

$$|\delta\mathbf{r}(a) - \delta\mathbf{r}(0)| = (\nabla_r \delta\mathbf{r})\, a, \qquad (6.4.2)$$

где, согласно (6.4.1), периодическое расширение

$$(\nabla_r \delta\mathbf{r}) = \pm i(\mathbf{q}_s \delta\mathbf{r}). \qquad (6.4.3)$$

Поскольку вектор $\mathbf{q}_s$ направлен вдоль распространения волны, а произведение $(\mathbf{q}_s\delta\mathbf{r})$ равно нулю для $\delta\mathbf{r}$, перпендикулярных этому направлению, мы будем рассматривать только продольные волны и вместо индекса s введем индекс l:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{A}_l \exp\{\pm i[(\mathbf{q}_l\mathbf{r}) - \omega_l t]\}. \qquad (6.4.4)$$

Рассеяние электронов проводимости акустической волной часто рассматривается на основе теории деформационного потенциала, предложенной Бардином и Шокли в 1950 г. [19]. Чтобы

понять суть дела, рассмотрим изменение потолка валентной зоны в зависимости от постоянной решетки, например, вычисленной для алмаза (фиг. 2.9, *в*). Для небольших изменений постоянной решетки, которые имеют место в случае акустической волны, выполняется линейный закон. Изменение энергии дырки от одного атома к соседнему $\delta\varepsilon_h$ пропорционально $|\delta\mathbf{r}(a)-\delta\mathbf{r}(0)|$, или, согласно (6.4.2), пропорционально $(\nabla_r\delta\mathbf{r})$ для акустической волны:

$$\delta\varepsilon_h = \varepsilon_{\text{ак},\,v}(\nabla_r\,\delta\mathbf{r}), \tag{6.4.5}$$

где $\varepsilon_{\text{ак},\,v}$ — коэффициент пропорциональности, называемый константой потенциала деформации валентной зоны. Аналогично соотношение имеет место и для электронов дна зоны проводимости:

$$\delta\varepsilon_e = \varepsilon_{\text{ак},\,c}(\nabla_r\,\delta\mathbf{r}), \tag{6.4.6}$$

где $\varepsilon_{\text{ак},\,c}$ — соответствующая константа зоны проводимости. Поскольку энергии электронов и дырок отсчитываются в противоположных направлениях, фиг. 2.9, *в* показывает, что в общем случае обе константы различаются по величине, но имеют одинаковый знак.

Бардин и Шокли показали, что если рассматривать взаимодействие электрона и акустической волны как возмущение, то в качестве энергии потенциала возмущения следует брать $\delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{ак}}(\nabla_r\delta\mathbf{r})$[1]). Так как $\delta\varepsilon \sim \exp[i(\mathbf{q}_l\mathbf{r})]$, матричный элемент, согласно (6.3.8), имеет вид

$$|H_{k'k}| = \frac{\varepsilon_{\text{ак}}q_lA_l}{V}\left|\int \exp[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\pm\mathbf{q}_l)\,\mathbf{r}]\,d^3r\right|. \tag{6.4.7}$$

При квантовомеханическом описании следует рассматривать не акустическую волну, а фононы с энергией $\hbar\omega_l$ и импульсом $\hbar q_l$. Если выполняется условие сохранения импульса

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}\pm\mathbf{q}_l, \tag{6.4.8}$$

где знаки + и — соответствуют поглощению и испусканию фонона, то подынтегральное выражение в (6.4.7) не зависит от r, а объем кристалла сокращается:

$$|H_{k'k}| = \varepsilon_{\text{ак}}q_lA_l. \tag{6.4.9}$$

Уравнение (6.4.8) представляет собой частный случай более общего условия, когда правая сторона содержит также вектор обратной решетки (2.4.2). В силу периодичности кристаллической решетки и в соответствии с уравнением Лауэ [см. текст, пред-

[1]) См. приложение В в [19].

шествующий (2.4.1)] этот дополнительный вектор не должен влиять на результат (6.4.9). Такое рассеяние включает процесс переброса [20—21]. Так как мы рассматриваем рассеяние, при котором $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ относительно малы, вектором обратной решетки можно пренебречь.

Амплитуду колебаний A_l в (6.4.9) следует заменить ее квантовомеханическим эквивалентом. Поскольку мы рассматриваем гармонические колебания, амплитуда является матричным элементом координаты пространства для перехода из N-го колебательного состояния в $N-1$-е или в $N+1$-е состояние в зависимости от того, происходит ли поглощение или испускание фонона:

$$A_l \to \left| \int \psi^*_{N\pm 1} x \psi_N d^3r \right| = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N\hbar}{2M\omega_l}} & \text{при } N \to N-1, \\ \sqrt{\dfrac{(N+1)\hbar}{2M\omega_l}} & \text{при } N \to N+1. \end{cases} \tag{6.4.10}$$

Энергия осциллятора в N-м состоянии равна $(N+1/2)\hbar\omega_l$ и складывается из энергии N фононов. Поскольку таких осцилляторов в кристалле множество, N можно заменить средним числом фононов, которое, согласно формуле Планка, при температуре решетки T равно

$$N \to N_q = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_l}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{6.4.11}$$

Массу осциллятора M можно заменить на ρV, где ρ — плотность вещества, а V — объем элементарной ячейки. Окончательно матричный элемент гамильтониана принимает вид

$$\left| H_{k\pm q,\, k} \right| = \varepsilon_{\text{ак}} q_l \sqrt{\left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{2\rho V \omega_l}}. \tag{6.4.12}$$

Содержащаяся здесь энергия акустического фонона $\hbar\omega_l$ мала по сравнению с тепловой энергией $k_B T$. Поэтому N_q приближенно можно вычислять, полагая $k_B T/(\hbar\omega_l) \gg 1$, и так как в этом приближении $N_q + 1 \approx N_q$, то матричные элементы при поглощении и испускании фонона совпадают:

$$\left| H_{k\pm q,\, k} \right| = \varepsilon_{\text{ак}} q_l \sqrt{\frac{k_B T}{2\rho V \omega_l^2}} = \varepsilon_{\text{ак}} \sqrt{\frac{k_B T}{2V c_l}}, \tag{6.4.13}$$

где введена продольная упругая постоянная $c_l = \rho\omega_l^2/q_l^2 = \rho u_l^2$ [В гл. 7 мы рассмотрим тензорные свойства $\varepsilon_{\text{ак}}$; здесь же отметим лишь, что в кубическом кристалле при распространении волны в направлении $\langle 100\rangle$ $c_l = c_{11}$, в направлении $\langle 110\rangle$ $c_l = (c_{11} + c_{12} + c_{44})/2$ и в направлении $\langle 111\rangle$ $c_l = (c_{11} + 2c_{12} +$

$+ 4c_{44})/3$, тогда как в других направлениях волны не являются строго продольными и имеют скорости, промежуточные по сравнению с крайними случаями, соответствующими ⟨100⟩ и ⟨111⟩; c_{11}, c_{12} и c_{44} — компоненты тензора упругости.]

Матричный элемент не зависит от энергии электрона и угла рассеяния. Поскольку его значения при испускании и поглощении фонона приблизительно одинаковы, мы можем учесть оба процесса, умножив просто на 2 вероятности рассеяния (6.2.13):

$$S = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{k'k}|^2 \{\delta(\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k}) + \hbar\omega_l] + \delta[\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k}) - \hbar\omega_l]\} \approx$$

$$\approx 2\frac{2\pi}{\hbar} |H_{k'k}|^2 \delta[\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k})]. \quad (6.4.14)$$

При расчете времени релаксации импульса, согласно (6.2.23), учитывая $k^2dk = m^2v\hbar^{-3}d\varepsilon$, получаем

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{v}{l_{\text{ак}}}, \quad (6.4.15)$$

где введена длина свободного пробега

$$l_{\text{ак}} = \frac{\pi\hbar^4 c_l}{m^2\varepsilon_{\text{ак}}^2 k_B T}, \quad (6.4.16)$$

которая не зависит от скорости носителя. Поэтому для зависимости τ_m от энергии выполняется степенной закон

$$\tau_m \sim \varepsilon^{-1/2} \quad (6.4.17)$$

с показателем степени $-1/2$.

Средняя длина свободного пробега уменьшается с повышением температуры, так как при высоких температурах возбуждается больше фононов, и поэтому существует больше центров рассеяния. Зависимость от эффективной массы входит через плотность состояний k^2dk. В гл. 7 будет определено понятие эффективной массы плотности состояний для случая более сложной зонной структуры, и именно такая масса входит в это выражение. В рассматриваемой здесь элементарной модели зонной структуры ($\varepsilon \sim k^2$) имеется только один вид эффективной массы.

Подвижность определяется выражением

$$\mu = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e\hbar^4 c_l}{m^{5/2} k_B^{3/2} \varepsilon_{\text{ак}}^2 T^{3/2}}. \quad (6.4.18)$$

В единицах $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ имеем

$$\mu = 3{,}06 \cdot 10^4 \frac{c_l/10^2 \text{ дин/см}^2}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^{5/2} \left(\frac{T}{100\text{K}}\right)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon_{\text{ак}}}{\text{эВ}}\right)^2} \sim T^{-3/2}. \quad (6.4.19)$$

Например, для $n =$ Ge при $T = 100$ К вычисленная подвижность равна $3 \cdot 10^4$ см^2/(В·с) ($c_l = 1{,}56 \cdot 10^{12}$ дин/см^2, $m/m_0 = 0{,}2$ $\varepsilon_{ак} = 9{,}5$ эВ). Однако при этой и более высоких температурах нельзя пренебрегать вкладом рассеяния на оптическом потенциале деформации, поэтому зависимость подвижности от температуры имеет вид $\mu \sim T^{-1{,}67}$. Для определения показателя степени удобно отложить зависимость μ от T в логарифмическом масштабе.

Поскольку подвижность обратно пропорциональна $m^{5/2}$, носители с малой эффективной массой обладают высокой подвижностью (например, легкие дырки в германии при температурах, при которых рассеяние на акустических фононах преобладает над рассеянием на оптических фононах.)

§ 5. Рассеяние горячих носителей на акустическом деформационном потенциале

До сих пор, рассматривая рассеяние на акустоэлектрическом деформационном потенциале, мы считали этот процесс упругим. Интересно посмотреть, сколько энергии на самом деле теряет носитель за единицу времени при взаимодействии с решеткой [22]. По определению

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{\int \varepsilon(\mathbf{k}) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} d^3k}{\int f d^3k}, \qquad (6.5.1)$$

где $(-\partial f/\partial t)_{\text{столкн}}$ дается выражением (6.2.16). Интегрируя по частям, можно свести (6.5.1) к виду

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{\int \left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} f(\mathbf{k})\, d^3k}{\int f(\mathbf{k})\, d^3k}, \qquad (6.5.2)$$

где, согласно (6.2.16),

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int [\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}')]\, S(\mathbf{k}, \mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{k}')]\, d^3k'. \qquad (6.5.3)$$

Для вероятности рассеяния $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ следует брать не приближенное выражение (6.4.14), а точное выражение

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\varepsilon_{ак}^2 \hbar q}{2\rho V u_l} \{N_q \delta[\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k}) - \hbar u_l q] + (N_q + 1)\, \delta[\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k}) + \hbar u_l q]\}, \qquad (6.5.4)$$

где мы заменили ω_l на u_l/q_l и опустили индекс l при q_l. Интегрирование по d^3k' можно заменить интегрированием по $d^3q =$

$= -2\pi q^2 dq d(\cos\theta)$. В случае элементарной модели зонной структуры аргументами δ-функции являются

$$\varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) - \hbar u_l q = \\ = \frac{\hbar^2}{2m}\left(2kq\cos\theta + q^2 - \frac{2mu_l q}{\hbar}\right) = \frac{\hbar^2 q}{2m}(q - q_\beta) \qquad (6.5.5)$$

и

$$\varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) + \hbar u_l q = \\ = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-2kq\cos\theta + q^2 + \frac{2mu_l q}{\hbar}\right) = \frac{\hbar^2 q}{2m}(q - q_\alpha), \qquad (6.5.6)$$

где введены новые постоянные

$$q_\beta = -2k\cos\theta + \frac{2mu_l}{\hbar}, \quad q_\alpha = 2k\cos\theta - \frac{2mu_l}{\hbar}. \qquad (6.5.7)$$

Проинтегрируем сначала по q, а затем по $\cos\theta$. Вследствие наличия δ-функции [1]) множитель $\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}')$ в (6.5.3) при поглощении фонона превращается в $+\hbar u_l q$ и при испускании фонона в $-\hbar u_l q$. Поскольку

$$\delta\left[\frac{\hbar^2 q}{2m}(q - q_{\alpha,\beta})\right] = \frac{2m}{\hbar^2 q}\delta(q - q_{\alpha,\beta}), \qquad (6.5.8)$$

из (6.5.3) следует

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{m\varepsilon_{\text{ак}}^2}{2\pi\hbar\rho}\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\left[q_\beta^3 N_{q_\beta}\{1 - f(\mathbf{k}+\mathbf{q}_\beta)\} - \right. \\ \left. - q_\alpha^3(N_{q_\alpha}+1)\{1 - f(\mathbf{k}-\mathbf{q}_\alpha)\}\right]. \qquad (6.5.9)$$

Пределы интегрирования определяются условиями $q_\beta \geqslant 0$ и $q_\alpha \geqslant 0$. Заменяем $d(\cos\theta)$ в первом члене на $-(2k)^{-1}dq_\beta$, а во втором — на $+(2k)^{-1}dq_\alpha$. В первом интеграле верхний предел интегрирования $\cos\theta = +1$ дает $q_\beta = -2k + 2mu_l\hbar \approx -2k$ (такое приближение является хорошим, так как даже при очень низких температурах скорость электрона $\hbar k/m$ велика по сравнению со скоростью звука u_l). Поскольку $q_\beta \geqslant 0$, для верхнего предела находим $q_\beta = 0$. Нижний предел (из $\cos\theta = -1$) определяется величиной

$$q_{\beta m} = 2k + \frac{2mu_l}{\hbar}. \qquad (6.5.10)$$

---

[1]) Некоторые свойства δ-функции приведены, например, в книге [1]. Полезно знать что $\delta[f(x)] = \sum_i \delta(x - x_i)/\left(\left|df/dx\right|_{x=x_i}\right)$, где $f(x_i) = 0$.

Во втором интеграле верхний предел (из $\cos\theta = +1$) обозначаем

$$q_{am} = 2k - \frac{2mu_l}{\hbar}, \tag{6.5.11}$$

а нижний предел $-2k - 2m u_l/\hbar$ был бы отрицательным, поэтому мы заменяем его на нуль. Таким образом, из (6.5.9) следует

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{m\varepsilon_{\text{ак}}^2}{2\pi\hbar\rho 2k}\left\{\int\limits_{q_{\beta m}}^{0} dqq^3 N_q\,[1 - f(\mathbf{k}+\mathbf{q})] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{q_{am}} dqq^3 (N_q + 1)\,[1 - f(\mathbf{k}-\mathbf{q})]\right\}, \tag{6.5.12}$$

что можно выписать в более удобной форме

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{m\varepsilon_{\text{ак}}^2}{4\pi\rho\hbar k}\left\{\int\limits_{q_{am}}^{q_{\beta m}} dqq^3 N_q\,[1 - f(\mathbf{k}+\mathbf{q})] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{q_{am}} dqq^3\,[N_q\,\{f(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - f(\mathbf{k}+\mathbf{q})\} - \{1 - f(k-q)\}]\right\}. \tag{6.5.13}$$

Разность $f(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - f(\mathbf{k}+\mathbf{q})$ определяем разложением в ряд

$$f(\varepsilon \pm \hbar u_l q) \approx f(\varepsilon) \pm \hbar u_l q \frac{df}{d\varepsilon}. \tag{6.5.14}$$

Как и в гл. 4, § 13, полагаем, что функция $f(\varepsilon)$ имеет вид функции распределения Ферми — Дирака с электронной температурой T_e:

$$f(\varepsilon) = \left[1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \zeta}{k_B T_e}\right)\right]^{-1}, \tag{6.5.15}$$

откуда

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \frac{f(f-1)}{k_B T_e}. \tag{6.5.16}$$

За исключением случая, когда возникает разность $f(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - f(\mathbf{k}+\mathbf{q})$, функцию $f(\mathbf{k}\pm\mathbf{q})$ можно аппроксимировать функцией $f(\varepsilon)$; как и раньше, N_q приближенно заменяем на $k_B T/(\hbar u_l q)$:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{m\varepsilon_{\text{ак}}^2}{4\pi\rho\hbar k}\left\{\frac{k_B T}{\hbar u_l}(1-f)\int\limits_{q_{am}}^{q_{\beta m}} q^2\,dq + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{q_{am}} q^3\,dq\left[\frac{2T}{T_e} f(1-f) - (1-f)\right]\right\}. \tag{6.5.17}$$

В приближении, справедливом при $\hbar k/m \gg u_l$, значение первого интеграла равно $2^4 m u_l \hbar k^2/\hbar$, а верхний предел второго интеграла можно заменить на $2k$:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \frac{n_i e_{\text{ак}}^2 k^3}{\pi\rho\hbar}(f-1)\left[\frac{4mk_BT}{\hbar^2k^2}+\frac{2T}{T_e}f-1\right]. \quad (6.5.18)$$

После процедуры усреднения, согласно (6.5.2), и интегрирования по частям имеем

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{2me_{\text{ак}}^2}{\pi^{3/2}\hbar\rho}\left(\frac{2mk_BT_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} 2\,\frac{T_e-T}{T_e}\,\frac{F_1(\eta)}{F_{1/2}(\eta)}, \quad (6.5.19)$$

где интегралы Ферми имеют вид (3.1.32), а $\eta = \zeta/(k_BT_e)$ — приведенная энергия Ферми.

Это выражение можно упростить и привести к виду

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = 4mu_l^2\langle\tau_m^{-1}\rangle\,\frac{T_e-T}{T}, \quad (6.5.20)$$

если ввести среднее обратное время релаксации импульса

$$\langle\tau_m^{-1}\rangle = \left\langle\frac{1}{l_{\text{ак}}}\left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)^{1/2}\right\rangle = \frac{2m^2e_{\text{ак}}^2k_BT}{\pi^{3/2}\hbar^4\rho u_l^2}\left(\frac{2k_BT_e}{m}\right)^{1/2}\frac{F_1(\eta)}{F_{1/2}(\eta)}. \quad (6.5.21)$$

Выражение (6.5.20) применимо как для вырожденного, так и для невырожденного полупроводника. В последнем случае $\langle\tau_m^{-1}\rangle = (2/l_{\text{ак}})(2k_BT_e/\pi m)^{1/2} = 8/(3\pi\langle\tau_m\rangle)$. Таким образом, подвижность

$$\mu = \frac{8}{3\pi}\,\frac{e}{m\langle\tau_m^{-1}\rangle}. \quad (6.5.22)$$

Используя уравнение баланса энергии (4.13.7) и выражение $\mu = \mu_0(T/T_e)^{1/2}$ [согласно (6.4.17)], можно решить уравнение (6.5.20) относительно T_e/T:

$$\frac{T_e}{T} = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{3\pi}{8}\left(\frac{\mu_0E}{u_l}\right)^2}\right]. \quad (6.5.23)$$

Электронная температура теплых носителей, для которых $T_e - T \ll T$, растет пропорционально квадрату напряженности поля E:

$$\frac{T_e}{T} = 1+\frac{3\pi\mu_0^2}{32u_l^2}E^2; \quad (6.5.24)$$

в случае горячих носителей ($T_e \gg T$) она растет линейно:

$$\frac{T_e}{T} = \sqrt{\frac{3\pi}{32}}\,\frac{\mu_0}{u_l}E. \quad (6.5.25)$$

На фиг. 6.5 показана зависимость T_e от E. Если исключить T_e из (6.5.23) и $\mu/\mu_0 = \sqrt{T_e/T}$, для зависимости подвижности от поля мы получим соотношение

$$E^2 = \frac{32}{3\pi}\frac{u_l^2}{\mu_0^2}\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2} - 1\right). \qquad (6.5.26)$$

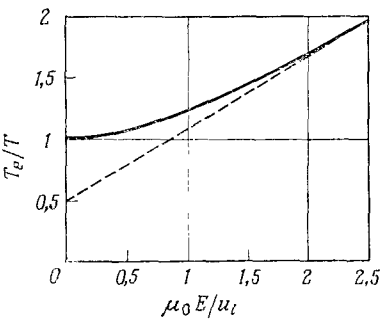
В приближении теплых носителей коэффициент β определяется выражением

$$\beta = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 E^2} = -\frac{3\pi}{64}\frac{\mu_0^2}{u_l^2} = -0{,}147\left(\frac{\mu_0}{u_l}\right)^2, \qquad (6.5.27)$$

а в случае горячих носителей отношение μ/μ_0 равно [23]

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{32}{3\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{u_l}{\mu_0 E}} = 1{,}81\sqrt{\frac{u_l}{\mu_0}}\,E^{-1/2} \qquad (6.5.28)$$

и дрейфовая скорость $v_d = \mu E$ увеличивается пропорционально $E^{1/2}$. Экспериментальные результаты приведены, например, на фиг. 4.34, где при $T = 20$ К и при напряженности поля, достаточно большой, чтобы пренебречь рассеянием на ионизованных примесях, рассеяние на акустических фононах должно быть преобладающим процессом рассеяния.



Фиг. 6.5. Зависимость электронной температуры (в единицах температуры решетки) от напряженности электрического поля (в единицах отношения скорости звука к подвижности в слабом поле).

Согласно (6.5.28), напряженность электрического поля, при которой отклонения от закона Ома становятся значительными, равна u_l/μ_0. Типичные значения u_l и μ_0 равны $5\cdot10^5$ см/с и $5\cdot10^3$ см/(В·с); следовательно, критическое поле равно 10^2 В/см.

Наконец, вычислим время релаксации энергии теплых носителей. Оно определяется уравнением (4.13.7), в котором левая часть при неравновесных условиях равна $\langle -d\varepsilon/dt\rangle_{\text{столкн}}$. При

$T_e - T \ll T$ из разложения в ряд разности энергий следует

$$\langle \varepsilon(T_e)\rangle - \langle \varepsilon(T)\rangle \approx (T_e - T)\frac{\partial}{\partial T_e}\frac{\int \varepsilon f d^3k}{\int f d^3k} =$$

$$= \frac{3}{2} k_B (T_e - T)\frac{\partial\left(T_e \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}}\right)}{\partial T_e}. \quad (6.5.29)$$

При дифференцировании учитываем, что концентрация носителей $n \sim T_e^{3/2} E_{1/2}$ не зависит от T_e, и, таким образом,

$$0 = \frac{dn}{dT_e} \sim \frac{3}{2} T_e^{1/2} F_{1/2} + T_e^{3/2}\frac{dF_{1/2}}{d\eta}\frac{d\eta}{dT_e}, \quad (6.5.30)$$

откуда следует

$$T_e \frac{d\eta}{dT_e} = -\frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}. \quad (6.5.31)$$

Таким образом, дифференцирование становится несложным:

$$\frac{\partial}{\partial T_e}\left(T_e \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}}\right) = \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} + \left(1 - \frac{F_{3/2}F_{-1/2}}{F_{1/2}^2}\right) T_e \frac{d\eta}{dT_e} =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}. \quad (6.5.32)$$

Теперь из (4.13.11), (6.5.20) и (6.5.29) получаем для произведения $\tau_\varepsilon \langle \tau_m^{-1}\rangle$

$$\tau_\varepsilon \langle \tau_m^{-1}\rangle = \frac{3k_B T}{8mu_l^2}\left(\frac{5}{2}\frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}}\right), \quad (6.5.33)$$

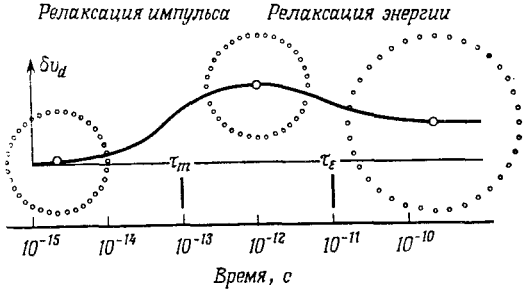
откуда в случае невырожденного полупроводника

$$\tau_\varepsilon \langle \tau_m^{-1}\rangle = \frac{3k_B T}{8mu_l^2} \gg 1. \quad (6.5.34)$$

Это произведение приближенно равно числу соударений, необходимому для релаксации энергии. Например, для n-Ge при 100 K оно порядка 10^2, если считать, что $u_l = 5{,}4 \cdot 10^5$ см/с и $m/m_0 = 0{,}2$. Следовательно, для релаксации энергии необходимо большое число соударений, тогда как релаксация распределения импульсов происходит уже после одного соударения, т. е. за время порядка $\langle \tau_m \rangle$.

На фиг. 6.6 приведено схематическое изображение релаксационных свойств теплых и горячих носителей [24]. Пусть создаваемое в полупроводнике электрическое поле E скачком уве-

личивается на небольшую величину δE и при этом дрейфовая скорость электронов возрастает на величину δv_d. Кривая изображает изменение δv_d со временем. Большие круги дают распределение носителей в k-пространстве в различные моменты времени; их диаметры соответствуют средним энергиям носителей. Разупорядочение направленного начального импульса носителей, вызванного увеличением напряженности поля, вследствие соударений происходит за время порядка $\langle\tau_m\rangle$; энергия при этом еще не меняется. Ее увеличение длится в течение времени τ_ε. Поскольку время релаксации импульса $\langle\tau_m\rangle$, а следовательно, и дрейфовая скорость уменьшаются при увеличении энергии, во время релаксации энергии происходит некоторое



Фиг. 6.6. Схематическое изображение релаксации горячих носителей [24].

уменьшение δv_d. Теперь релаксация завершилась полностью, и новое значение дрейфовой скорости соответствует электрическому полю $E + \delta E$.

Отклонения от закона Ома и связанные с ними явления, такие, как релаксация энергии, легче всего измерять при низких температурах, при которых, однако, на подвижность влияет рассеяние на ионизованных примесях; поэтому в следующем параграфе мы рассмотрим совместное действие рассеяния на колебаниях решетки и на ионизованных примесях и в свете этого соответствующие экспериментальные результаты.

§ 6. Совместное действие рассеяния на ионизованных примесях и на акустическом деформационном потенциале

Если действуют несколько механизмов рассеяния, то следует сложить соответствующие скорости рассеяния, которые в хорошем приближении равны величинам, обратным временам релаксации импульса. В случае совместного действия рассеяния на ионизованных примесях и на акустическом деформационном

потенциале в приближении времени и релаксации имеем

$$\frac{1}{\tau_m} = \left(\frac{1}{\tau_m}\right)_{\text{ион}} + \left(\frac{1}{\tau_m}\right)_{\text{ак}}. \qquad (6.6.1)$$

Поскольку $(1/\tau_m)_{\text{ак}} \sim \varepsilon^{1/2}$ и $(1/\tau_m)_{\text{ион}} \sim \varepsilon^{-3/2}$, получаем

$$\frac{(\tau_m)_{\text{ак}}}{(\tau_m)_{\text{ион}}} = q^3 \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^{-2}, \qquad (6.6.2)$$

где q^2 — коэффициент пропорциональности, равный

$$q^2 = 6\frac{\mu_{\text{ак}}}{\mu_{\text{ион}}}, \qquad (6.6.3)$$

а $\mu_{\text{ак}}$ и $\mu_{\text{ион}}$ — подвижности, определяемые выражениями (6.4.18) и (6.3.22). Поэтому τ_m имеет вид

$$\tau_m = (\tau_m)_{\text{ак}} \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2 \left\{q^2 + \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2\right\}. \qquad (6.6.4)$$

Найдем подвижность для распределения Максвелла — Больцмана, соответствующего электронной температуре T_e, а не температуре решетки T. Согласно (4.2.23), в рассматриваемом случае невырожденного полупроводника подвижность определяется выражением

$$\mu = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{e}{m} \int_0^\infty \tau_m \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)^{3/2} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \qquad (6.6.5)$$

Для τ_m в виде (6.6.4) и $(\tau_m)_{\text{ак}} = \tau_0 (\varepsilon/k_B T)^{-1/2}$ [см. (6.4.17)] имеем

$$\mu = \mu_{\text{ак}} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^{1/2}}{q^2 + \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)^{3/2} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right), \qquad (6.6.6)$$

где $\mu_{\text{ак}} = [4/(3\sqrt{\pi})]\, e\tau_0/m$ — подвижность в слабом поле, обусловленная рассеянием на акустических колебаниях в виде (6.4.18). Введем параметры $\lambda = T/T_e$ и $q' = \lambda q$. Разлагая знаменатель подынтегральной функции на множители, находим

$$\mu = \mu_{\text{ак}} \lambda^{1/2} \left\{1 - \frac{q'^2}{2}\left[\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) + iq'} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) - iq'}\right]\right\}, \qquad (6.6.7)$$

где $i=\sqrt{-1}$. Для оценки интегралов в комплексной плоскости вспомним, что

$$-\operatorname{si}(q)=\int_q^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad -\operatorname{Ci}(q)=\int_q^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt, \tag{6.6.8}$$

и введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} f(q) &= \operatorname{Ci}(q)\sin q - \operatorname{si}(q)\cos q = \frac{1}{q}+\frac{dg}{dq}, \\ g(q) &= -\operatorname{Ci}(q)\cos q - \operatorname{si}(q)\sin q = -\frac{df}{dq}. \end{aligned} \tag{6.6.9}$$

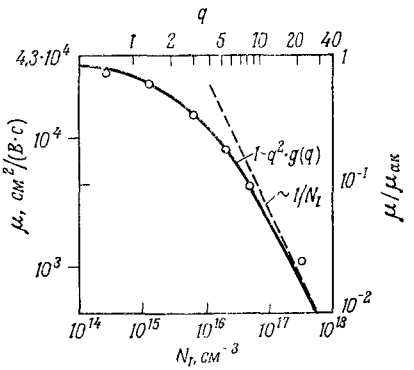
Тогда результат принимает вид

$$\mu=\mu_{\text{ак}}\sqrt{\lambda}\,[1-q'^2 g(q')]. \tag{6.6.10}$$

В случае равновесных носителей ($\lambda=1$) подвижность в слабом поле выражается как [25]

$$\mu=\mu_{\text{ак}}[1-q^2 g(q)]. \tag{6.6.11}$$

Кривая на фиг. 6.7 изображает зависимость $\mu/\mu_{\text{ак}}$ от q. Точки соответствуют результатам измерений подвижности Холла в n — Ge при 77 К для образцов с различной концентрацией примесей, совпадение с кривой получено в предположении, что $\mu_{\text{ак}}=4{,}3\cdot10^4$ см/(В·с) и $N_I/q^2=6{,}25\cdot10^{14}$ см$^{-3}$. Вместо N_I приведена концентрация носителей, т. е. компенсация примесей не учтена. Кроме того, пренебрегается рассеянием на оптических фононах, которое, как известно, имеет место в n-Ge при 77 К. Поэтому полностью полагаться на значения подгоночных параметров не следует.



Фиг. 6.7. Зависимость подвижности (6.6.11), обусловленной рассеянием на акустическом деформационном потенциале, от концентрации примесей для германия n-типа при 77 К.

Рассеяние на ионизованных примесях является упругим процессом, поэтому его можно не учитывать в балансе энергии. Мы рассмотрим здесь только случай теплых носителей, так как рассеяние на ионизованных примесях менее существенно в случае горячих носителей [поскольку $(\tau_m)_{\text{ион}}\sim\varepsilon^{+3/2}$]. В случае теплых

носителей уравнение баланса энергии (4.13.6) с учетом (6.5.20) после преобразований принимает вид

$$\mu e E^2 = -(\lambda - 1)\frac{32}{3\pi}\frac{eu_l^2}{\mu_{ак}}. \qquad (6.6.12)$$

Подстановка вместо μ его значения (6.6.11) и замена множителя $-(3\pi/64)\mu_{ак}^2/u_l^2$ величиной $\beta_{ак}$, определяемой выражением (6.5.27), дают

$$[1 - q^2 g(q)]E^2 = \frac{\lambda - 1}{2\beta_{ак}}. \qquad (6.6.13)$$

Множитель $(\lambda - 1)$ можно исключить, если воспользоваться уравнением (4.13.8) в виде

$$\beta E^2 = (\lambda - 1)\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}. \qquad (6.6.14)$$

Решая относительно $\beta/\beta_{ак}$, получаем

$$\frac{\beta}{\beta_{ак}} = \frac{2[1 - q^2 g(q)]}{\mu}\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = \frac{2}{\mu_{ак}}\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}. \qquad (6.6.15)$$

Производную от μ легко вычислить из (6.6.9):

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \mu_{ак}\left\{\frac{1 - q'^2 g(q')}{2\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} q \frac{d}{dq'}[1 - q'^2 g(q')]\right\}. \qquad (6.6.16)$$

В случае $\lambda = 1$ и $q' = q$ формула (6.6.16) принимает вид

$$\frac{2}{\mu_{ак}}\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 1 - q^2 g - 2q\frac{d}{dq}(q^2 g) = 1 - 5q^2 g - 2q^3\frac{dg}{dq}. \qquad (6.6.17)$$

Воспользовавшись (6.6.9), получаем окончательно для отношения $\beta/\beta_{ак}$ [26, 27]

$$\frac{\beta}{\beta_{ак}} = 1 + 2q^2 - 5q^2 g - 2q^3 f. \qquad (6.6.18)$$

В случае малой концентрации ионизованных примесей, когда $q \ll 1$, из (6.6.11) и (6.6.18) следует

$$\frac{\mu}{\mu_{ак}} \approx 1 - q^2 \ln\left(\frac{1}{1{,}781q}\right) \qquad (6.6.19)$$

и

$$\frac{\beta}{\beta_{ак}} \approx 1 - 5q^2 \ln\left(\frac{1}{1{,}781q}\right). \qquad (6.6.20)$$

Как подвижность в слабом поле, так и коэффициент β уменьшаются вследствие рассеяния на ионизованных примесях, причем последний более значительно, чем первый.

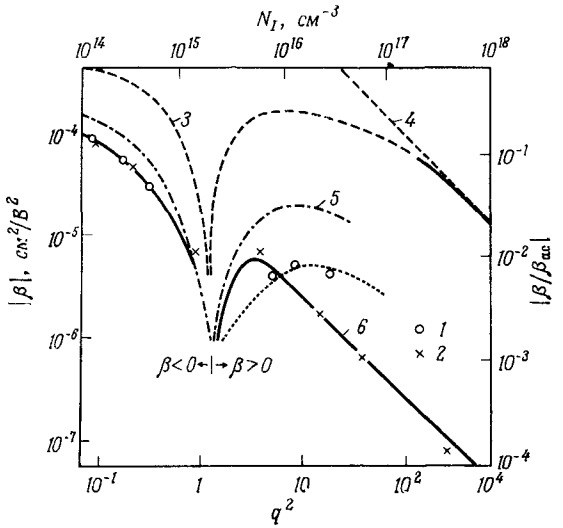
В случае большой концентрации ионизованных примесей, когда $q \gg 1$, имеем

$$\frac{\mu}{\mu_{ак}} \approx \frac{3!}{q^2} - \frac{5!}{q^4} + \frac{7!}{q^6} - \ldots \qquad (6.6.21)$$

и

$$\frac{\beta}{\beta_{ак}} = -\frac{3\cdot 3!}{q^2} + \frac{7\cdot 5!}{q^4} - \frac{11\cdot 7!}{q^6} + \ldots . \qquad (6.6.22)$$

Если в разложении (6.6.21) сохранить только первый член, то подвижность μ равна величине $\mu_{ион}$, определяемой выражением



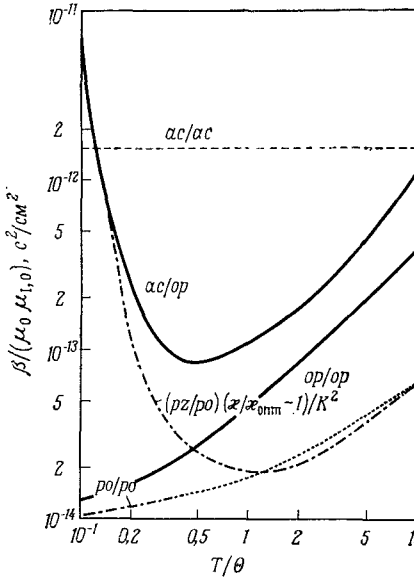
Фиг. 6.8. Зависимость абсолютных значений β от концентрации ионизованных примесей для германия n-типа [28].

Экспериментальные результаты: *1* — Ганна [29]; *2* — Чулена [30] в направлении [100]. Результаты вычислений: *3* — согласно (6.6.18); *4* — асимптота N_I^{-1}; *5* — Адави [32] вариационным методом; *6* — используя распределение Максвелла — Больцмана. В работе [32] учитываются акустическое и оптическое рассеяния, отношение констант которых $D\varepsilon_{ак} = 0{,}4\omega_0/u_l$.

(6.6.3), а коэффициент β меняет знак и становится обратно пропорциональным концентрации ионизованных примесей $N_I \sim q^2$. Сопоставление двух последних выражений показывает, что рассеяние на ионизованных примесях более значительно влияет на β, чем на μ. Для уменьшения μ до 0,5 $\mu_{ак}$ необходимо, чтобы параметр q увеличивался до 1,7, тогда как β равно 0,5 $\beta_{ак}$ уже при $q = 0{,}5$.

На фиг. 6.8 штриховая кривая изображает зависимость абсолютного значения β от $q^2 \sim N_I$ [28]. При больших N_I кривая асимптотически приближается к штриховой прямой, которая в логарифмическом масштабе изображает пропорциональность

N_I^{-1}. Экспериментальные точки исследований Ганна [29] (кружки) и Чулена [30] (крестики) в случае n-Ge при 77 К лежат существенно ниже [1]), а ожидаемая пропорциональность N_I^{-1} не обнаружена. Результаты расчетов (пунктирная и штрих-пунктирная кривые) [32], в которых учтено также и рассеяние на оптических фононах (гл. 6, § 8), качественно согласуются с экспериментальными данными. В пределе, когда легирование достаточно велико, чтобы функция Максвелла — Больцмана была хорошим приближением вследствие сильного межэлектронного взаимодействия (гл. 6, § 11), но не столь велико, чтобы имело место вырождение [2]), зависимость отношения $\beta/\mu_0\mu_{I,0}$ от температуры при различных механизмах релаксации энергии и импульса показана на фиг. 6.9 [28], где μ_0



Фиг. 6.9. Температурная зависимость коэффициента β, нормированного на произведение подвижностей в слабом поле в чистом образце μ_0 и в образце с преобладающим рассеянием на ионизованных примесях μ_{I0}, при различных процессах релаксации импульса и энергии [28].

Например, *ac/op* обозначает релаксацию импульса на акустических колебаниях и релаксацию энергии на оптических колебаниях. Параметры: $u_l = 5{,}4 \cdot 10^5$ см/с, $m/(k_B\Theta) = 10^{-14}$ с^2/см^2, $D/\varepsilon_{ak} = 0{,}4\omega_0/u_l$.

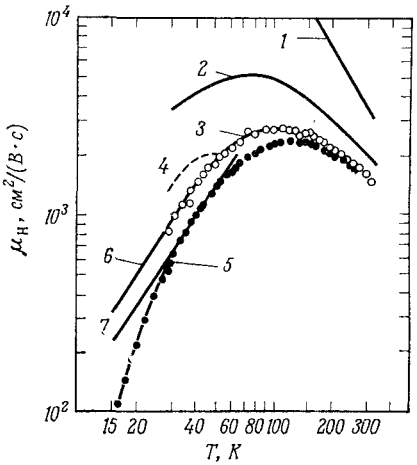
и $\mu_{I,0}$ — подвижности в слабом поле в чистом и легированном образцах. Например, кривая, обозначенная *ac/op*, соответствует релаксации импульса на акустических колебаниях и релаксации энергии на оптических колебаниях в чистом образце. Характеристикой последнего является температура Дебая Θ. Когда $T/\Theta \approx$ $\approx 0{,}2$, что в случае n-Ge соответствует температуре 77 К, релаксация импульса на акустических и оптических колебаниях и релаксация энергии на оптических колебаниях приводят к значениям $\beta/\mu_0\mu_{I,0}$, лежащим значительно ниже горизонтальной прямой, обозначенной *ac/ac*; поэтому получаемые значения β согласуются с наблюдениями. Так или иначе, отклонения от закона Ома в однородно легированных примесных полупроводниках не-

[1]) См. также фиг. 4.35 и работу [31].

[2]) Относительно вырождения см. работы [33, 34].

значительны. Интересно заметить, что в металлах, таких, как медь и платина, не обнаружено отклонений от закона Ома при напряженностях электрического поля до 2 кВ/см [35].

Рассмотрим кратко на основе уравнения (6.6.10) горячие носители. Член $q'^2 g(q')$, где $q' = q(T/T_e)$, определяет влияние примесного рассеяния на подвижность. С увеличением температуры носителей до значений, соответствующих $T_e \gg T$, величина q' становится малой даже при больших концентрациях примесей, когда $q \gg 1$. Поэтому можно ожидать, что роль рассеяния на ионизованных примесях незначительна в экспериментах с горячими носителями. Конечно, для разогрева носителей необходимы более сильные электрические поля, что следует из уравнения баланса энергии и обусловлено уменьшением подвижности вследствие примесного рассеяния.



Фиг. 6.10. Зависимость холловской подвижности от температуры для образцов германия [36].

1 — нелегированный образец *n*-типа; *2* — некомпенсированный образец 99В, легированный Sb до $5 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$; *3* — образец 98С, легированный Zn; *4* — тот же образец при освещении; *5* — образец 104Н, легированный Zn. Наклон прямых *6* и *7* равен 1,5.

На фиг. 6.10 показана зависимость подвижности от температуры; основной механизм рассеяния изменяется с изменением температуры и легирования [36]. Образцы содержат дважды заряженные ионы цинка, и рассеяние на ионах весьма интенсивно, так как заряд Z входит в уравнение (6.3.22) как Z^2. В образцах 98с и 104Н изменение температуры не приводит к изменению заряда центров. Отклонение от закона $T^{3/2}$ в образце 104Н при $T < 30$ К приписывается проводимости по примесной зоне (гл. 6, § 14).

Метод определения концентраций доноров и акцепторов в полупроводнике (в *p*-Si) по измерениям электропроводности, эффекта Холла и магниторезистивного эффекта в области закона Ома при 77 К приведен в работе Лонга и др. [18]. Браун и Брей [37] установили, что в *n*-Ge при концентрациях ниже 10^{15} см$^{-3}$ в интервале температур от 30 до 300 К рассеяние на ионизованных примесях хорошо описывается формулой Брукса — Херринга, которая, однако, дает завышенные значения подвижности при больших N_I или при низких T. Иглс и Эдвардс [38] продолжили

расчеты Херринга и Фогга [39], чтобы установить, как рассеяние на ионизованных примесях влияет на гальваномагнитные явления в многодолинном полупроводнике, который рассматривается в гл. 7.

§ 7. Пьезоэлектрическое рассеяние

Если полупроводниковый кристалл состоит из неодинаковых атомов, например SiC, и связь между атомами частично ионная (12% в SiC), а элементарная ячейка не содержит центра симметрии (как в решетке цинковой обманки или в тригональной решетке), то носители могут рассеиваться на продольных акустических волнах вследствие пьезоэлектрического рассеяния [40, 41]. Колебания ионов приводят к возникновению дипольного момента, величина которого, отнесенная к единице объема, называется поляризацией P. Индукция D, определяемая выражением

$$D = \varkappa_0 E + P, \tag{6.7.1}$$

исчезающе мала, так как смещение носителей ничтожно мало по сравнению со смещением ионов и пространственный заряд отсутствует. Поэтому возникает переменное электрическое поле

$$E = -\frac{P}{\varkappa_0}. \tag{6.7.2}$$

При распространении волны конечной длины возникает деформация $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$, где $\delta\mathbf{r}$ — смещение атома решетки из равновесного положения, определяемое из (6.4.1). Когда $(\nabla_r \delta\mathbf{r}) = 0$, диэлектрическая проницаемость $\varkappa$ определяется соотношением $D = \varkappa\varkappa_0 E$; в противном случае индукция содержит член, пропорциональный $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$:

$$D = \varkappa\varkappa_0 E + e_{pz}(\nabla_r \delta\mathbf{r}). \tag{6.7.3}$$

Коэффициент пропорциональности e_{pz} (пьезоэлектрическая постоянная), определяемый из пьезоэлектрических измерений, по порядку величины равен 10^{-5} Кл/см^2; это значение также следует из предположения, что типичное смещение атомов составляет 10^{-8} см, а в единице объема содержится 10^{22} см$^{-3}$ элементарных зарядов $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (по одному на атом).

Из (6.7.3) при $D = 0$ следует

$$E = -\frac{e_{pz}}{\varkappa\varkappa_0}(\nabla_r \delta\mathbf{r}). \tag{6.7.4}$$

Изменение деформации $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$ при распространении акустической волны с волновым вектором $\mathbf{q}$ описывается уравнением

(6.4.3). Поскольку E пропорционально $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$, потенциальная энергия

$$\delta\varepsilon = |e| \int E\, dr = |e| \frac{E}{q} \tag{6.7.5}$$

также зависит от $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$:

$$\delta\varepsilon = \frac{|e| e_{pz}}{\varkappa\varkappa_0 q} (\nabla_r \delta\mathbf{r}). \tag{6.7.6}$$

Сравнивая данное выражение с выражением (6.4.6), которое соответствует рассеянию на неполярном акустическом потенциале, мы видим, что вместо константы акустического деформационного потенциала $\varepsilon_{ак}$ выражение (6.7.6) содержит множитель $|e| e_{pz}/(\varkappa\varkappa_0 q)$, который в отличие от постоянной $\varepsilon_{ак}$ зависит от

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \approx 2|\mathbf{k}| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2mv}{\hbar} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{6.7.7}$$

Абсолютная величина матричного элемента $H_{k'k}$ определяется выражением

$$|H_{k'k}| = \frac{|e| e_{pz}}{\varkappa\varkappa_0 q} \sqrt{\frac{k_B T}{2V c_l}} = \sqrt{\frac{e^2 K^2 k_B T}{2V\varkappa\varkappa_0 q^2}}, \tag{6.7.8}$$

которое похоже на (6.4.12); в (6.7.8) введен безразмерный коэффициент электромеханической связи K^2, определяемый соотношением

$$\frac{K^2}{1 - K^2} = \frac{e_{pz}^2}{\varkappa\varkappa_0 c_l}; \tag{6.7.9}$$

когда $K^2 \ll 1$, левая часть равна K^2. Например, в SiC пьезоэлектрическая постоянная $e_{pz} = 10^{-5}$ Кл/см^2, $\varkappa = 10{,}2$ и $c_l = 1{,}8 \cdot 10^{12}$ дин/см^2, а $K^2 = 6 \cdot 10^{-4}$. Во многих полярных полупроводниках коэффициент K^2 равен по порядку величины 10^{-3}. Коэффициент K^2 тесно связан с мощностью заряженного конденсатора, которая зависит от $\varkappa$. Обозначим для простоты $(\nabla_r \delta\mathbf{r})$ через S. Связь между механическим напряжением, деформацией и электрическим полем в одномерном случае имеет вид

$$T = c_l S - e_{pz} E. \tag{6.7.10}$$

Если натяжений нет ($T = 0$), деформация, обусловленная электрическим полем, равна

$$S = \frac{e_{pz}}{c_l} E. \tag{6.7.11}$$

Из (6.7.3) после исключения S имеем

$$\frac{D}{E} = \varkappa\varkappa_0 + \frac{e_{pz}^2}{c_l}. \tag{6.7.12}$$

Мы видим, что работа, совершаемая при зарядке конденсатора, состоит из электрической $\sim \varkappa\varkappa_0$ и механической $\sim e_{pz}^2/c_l$ составляющих. (Если мы могли бы приложить силы натяжения без деформации, то имели бы только электрическую составляющую.) Таким образом, коэффициент K^2 определяется отношением механической работы к полной работе:

$$K^2 = \frac{e_{pz}^2/c_l}{\varkappa\varkappa_0 + (e_{pz}^2/c_l)}, \tag{6.7.13}$$

Расчет вероятности рассеяния по формуле (6.4.14) и времени релаксации импульса по формуле (6.2.23) не представляет трудностей:

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int 2\,\frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{e^2K^2k_BT}{2V\varkappa\varkappa_0 q^2}\,\delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k)] \times$$
$$\times\, k^2\,dk\,(1 - \cos\theta)\sin\theta\,d\theta \cdot 2\pi, \tag{6.7.14}$$

где q^2 приближенно определяется выражением $4k^2\sin^2(\theta/2)$, а $dk = \hbar^{-1}(m/2\varepsilon)\ d\varepsilon$. Интегрирование (6.7.14) дает

$$\tau_m = \frac{2^{3/2}\pi\hbar^2\varkappa\varkappa_0}{\sqrt{m}\,e^2k^2k_BT}\,\sqrt{\varepsilon}. \tag{6.7.15}$$

Заметим, что

$$\tau_m \sim \sqrt{\varepsilon}, \tag{6.7.16}$$

т. е. имеет место степенная зависимость τ_m от энергии с показателем степени $+1/2$. Поэтому можно ожидать, что $\beta > 0$ для теплых носителей.

Подвижность невырожденных равновесных носителей, согласно (6.7.15), определяется выражением

$$\mu = \frac{16\sqrt{2\pi}}{3}\,\frac{\hbar\varkappa\varkappa_0}{m^{3/2}eK^2(k_BT)^{1/2}} \sim T^{-1/2}, \tag{6.7.17}$$

или в единицах $см^2/(В\cdot с)$

$$\mu = 2{,}6\,\frac{\varkappa}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^{3/2}K^2\sqrt{\frac{T}{100\,К}}}. \tag{6.7.18}$$

Подстановка типичных значений параметров $\varkappa = 10$, $m/m_0 = 0{,}1$, $K^2 = 10^{-3}$ и $T = 100$ К дает значение подвижности $8{,}25 \times$ $\times 10^5$ $см^2/(В\cdot с)$; оно существенно больше, чем подвижность в случае неполярного акустического рассеяния, которое является конкурирующим механизмом рассеяния в полупроводниках с частично ионной связью.

Представляет интерес поэтому сравнить подвижность в случае пьезоэлектрического рассеяния (которую для этой цели мы обозначим μ_{pz}) и подвижность, обусловленную только рассеянием на акустическом деформационном потенциале ($\mu_{ак}$), определяемую выражением (6.4.18); отношение $\mu_{pz}/\mu_{ак}$ равно

$$\frac{\mu_{pz}}{\mu_{ак}} = 0{,}75 \frac{\left(\frac{\varkappa}{10}\right)^2 \frac{m}{m_0} \frac{T}{100\text{K}} \left(\frac{\varepsilon_{ак}}{\text{эВ}}\right)^2}{\left(\frac{e_{pz}}{10^{-5}\ \text{Кл/см}^2}\right)^2}. \qquad (6.7.19)$$

При достаточно низких температурах в бездислокационном полупроводнике подвижность может определяться в основном пьезоэлектрическим рассеянием, а не рассеянием на акустическом деформационном потенциале ($\mu_{pz} \ll \mu_{ак}$). Пьезоэлектрическое рассеяние более интенсивно, если эффективная масса m мала. В типичном случае, когда $\varkappa = 10$, $m/m_0 = 0{,}1$ $T = 10$ К, $\varepsilon_{ак} = 5$ эВ, $e_{pz} = 10^{-5}$ Кл/см^2, отношение $\mu_{pz}/\mu_{ак} \approx 0{,}2 \ll 1$, т. е. преобладает пьезоэлектрическое рассеяние. Однако если иметь в виду достигнутую в настоящее время степень чистоты полярных полупроводников, то в вышеуказанных условиях, видимо, будет преобладать рассеяние на ионизованных примесях. По этой причине пьезоэлектрическое рассеяние не представляет значительного практического интереса. Коган [42] вычислил скорость передачи энергии, но мы не будем здесь ее рассматривать, так как это рассеяние проявляется редко.

§ 8. Спектр фононов в кристалле

До сих пор мы ограничились рассмотрением процессов рассеяния электронов с участием лишь длинноволновых акустических фононов. Они характеризуются не зависящей от частоты скоростью звука. В кристаллах с более чем одним атомом в элементарной ячейке следует учесть оптические фононы. В этом параграфе спектр фононов кристалла будет получен на основе упрощенной модели одномерной цепочки атомов. Чтобы не рассматривать эффектов, связанных с поверхностью, мы предположим, что цепочка имеет вид кольца; это позволяет использовать периодические граничные условия.

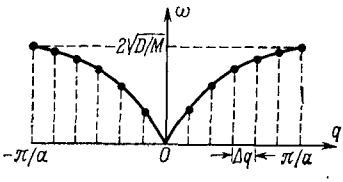
Пусть цепочка состоит из N точечных масс M, соединенных пружинами, упругие постоянные которых равны D. Рассмотрим массу j в точке x_j, совершающую гармонические колебания; ее движение описывается уравнением

$$M \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -D(x_j - x_{j-1}) - D(x_j - x_{j+1}). \qquad (6.8.1)$$

Первый член в правой части представляет собой силу, с которой действует на рассматриваемую массу пружина, соединяющая ее с массой, расположенной в точке x_{j-1}, а второй член — такую же силу по другую сторону от массы j. Гармоническое решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x_j = x_0 \exp(iqja - i\omega t), \tag{6.8.2}$$

где a — расстояние между покоящимися соседними массами, ω — угловая частота колебаний и $q = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны).



Фиг. 6.11. Квантование спектра колебаний кольцевой цепочки атомов.

Из уравнения (6.8.1) и его решения (6.8.2) следует

$$-M\omega^2 = D[\exp(iqa) - 2 + \exp(-iqa)]. \tag{6.8.3}$$

Поскольку $\exp(iqa) + \exp(-iqa) = 2\cos(qa)$, из (6.8.3) имеем

$$-\frac{M\omega^2}{4D} = \frac{\cos(qa) - 1}{2} = -\sin^2\frac{qa}{2}. \tag{6.8.4}$$

Решая относительно $\omega > 0$, получаем

$$\omega = 2\sqrt{\frac{D}{M}}\left|\sin\frac{qa}{2}\right|. \tag{6.8.5}$$

В цепочке N атомов соединены в кольцо, поэтому

$$x_{j+N} = x_j, \tag{6.8.6}$$

откуда следует

$$\exp(iqNa) = 1, \tag{6.8.7}$$

или

$$q = \frac{n2\pi}{Na}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{6.8.8}$$

Разность между двумя соседними значениями q равна

$$\Delta q = \frac{2\pi}{Na}; \tag{6.8.9}$$

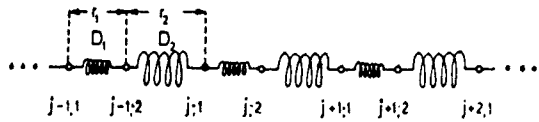
она тем меньше, чем больше точечных масс содержит кольцо.

График решения (6.8.5) представлен на фиг. 6.11. На языке квантовой механики $\hbar\omega$ — энергия, а $\hbar q$ — импульс фонона. Область $-N/2 \leqslant n \leqslant N/2$, эквивалентная $-\pi/a \leqslant q \leqslant \pi/a$, называется первой зоной Бриллюэна в пространстве импульсов фо-

нонов. При малых значениях q синус в (6.8.5) заменяем его аргументом. Деление ω на q дает скорость звука

$$u_s = \frac{\omega}{q} = a\sqrt{\frac{D}{M}}, \tag{6.8.10}$$

которая на самом деле не зависит от ω (дисперсия отсутствует). Однако при больших q дисперсия, конечно, существует.



Фиг. 6.12. Цепочка с чередующимися пружинами двух типов.

Рассмотрим теперь случай, когда на длине элементарной ячейки размещаются два атома:

$$a = r_1 + r_2, \tag{6.8.11}$$

где $r_1 \neq r_2$; кроме того, упругие постоянные пружин различны: $D_1 \neq D_2$, как показано на фиг. 6.12. Уравнения движения для этого случая имеют вид

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x_{j,1}}{dt^2} &= -D_1(x_{j,1} - x_{j,2}) - D_2(x_{j,1} - x_{j-1,2}), \\ M\frac{d^2x_{j,2}}{dt^2} &= -D_1(x_{j,2} - x_{j,1}) - D_2(x_{j,2} - x_{j+1,1}). \end{aligned} \tag{6.8.12}$$

Попытаемся подставить гармонические решения

$$\begin{aligned} x_{j,1} &= X_1 \exp(iqja - i\omega t), \\ x_{j,2} &= X_2 \exp\{iqj(a - r_2) - i\omega t\} \end{aligned} \tag{6.8.13}$$

и введем обозначение

$$Y = D_1 \exp(-iqjr_2) + D_2 \exp(-iqa - iqjr_2). \tag{6.8.14}$$

Тогда из (6.8.12) следует

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2 - M\omega^2)X_1 - YX_2 &= 0, \\ -Y^*X_1 + (D_1 + D_2 - M\omega^2)X_2 &= 0, \end{aligned} \tag{6.8.15}$$

где Y и Y^* — комплексно сопряженные величины. Эта система линейных однородных уравнений для X_1 и X_2 имеет решение, если определитель равен нулю:

$$(D_1 + D_2 - M\omega^2)^2 - YY^* = 0. \tag{6.8.16}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} M\omega^2 &= D_1D_2 \pm \sqrt{YY^*} = D_1 + D_2 \pm \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2\cos qa} = \\ &= (D_1 + D_2)\cdot\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4D_1D_2}{(D_1 + D_2)^2}\sin^2 qa}\right]. \end{aligned} \tag{6.8.17}$$

Два знака перед квадратным корнем соответствуют двум ветвям в спектре фононов — акустической и оптической. Допустим на время, что $D_1 = D_2 = D$; тогда получим

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{M}} \sqrt{1 \pm \cos \frac{qa}{2}}. \qquad (6.8.18)$$

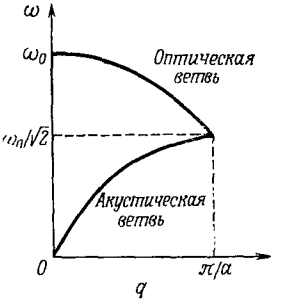
В случае знака минус в (6.8.17) выражение (6.8.18) упрощается:

$$\omega = \omega_0 \left| \sin \frac{qa}{4} \right|, \qquad (6.8.19)$$

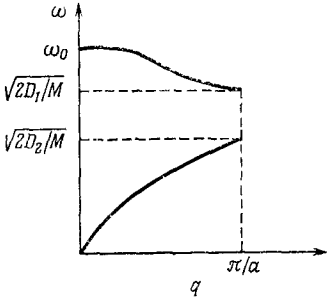
где введено обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{M}}. \qquad (6.8.20)$$

Формула (6.8.19) аналогична (6.8.5); они различаются лишь тем, что элементарная ячейка теперь вдвое больше, чем раньше. Закон дисперсии (6.8.19) соответствует акустической ветви.



Фиг. 6.13. Спектр фононов одномерного кристалла, содержащего две равные точечные массы в ячейке.



Фиг. 6.14. Спектр фононов одномерного кристалла с двумя равными точечными массами в ячейке, попеременно соединенными двумя разными пружинами. (Аналогичный спектр соответствует цепочке с разными массами).

В случае знака плюс в (6.8.17) выражение (6.8.18) принимает вид

$$\omega = \omega_0 \left| \cos \frac{qa}{4} \right|. \qquad (6.8.21)$$

Когда $q = 0$, угловая частота равна ω_0 и называется частотой оптических фононов. При $q = \pi/a$ оптическая и акустическая ветви вырождены и имеют одинаковую частоту $\omega_0/\sqrt{2}$. По причинам, которые будут объяснены в гл. 7, § 5, она называется

частотой междолинных фононов. Обе ветви спектра фононов показаны на фиг. 6.13.

При выводе (6.8.18) мы приняли $D_1 = D_2$. В общем случае это условие не выполняется, а в бинарных соединениях массы атомов также различаются, в результате чего вырождение на границе зоны Бриллюэна $q = \pi/a$ снимается; в спектре фононов образуется разрыв между акустической и оптической ветвями, как показано на фиг. 6.14.

Если элементарная ячейка содержит более двух атомов, то возникает более чем одна оптическая ветвь. В одномерной модели, которую мы рассматриваем, возникают только продольные колебания атомов. В трехмерном кристалле кроме них на каждое продольное колебание имеются по два поперечных колебания, причем в кубическом кристалле они вырождены.

Кубическая элементарная ячейка решеток алмаза и цинковой обманки показана на фиг. 2.12. Она содержит центральный атом и 8 атомов в вершинах куба. Каждый атом в вершине принадлежит четырем соседним кубам, так как каждый атом участвует всего в четырех связях; поэтому весовой множитель этих атомов равен $^1/_4$. Таким образом, элементарная ячейка содержит $1 + {}^4/_4 = 2$ атома.

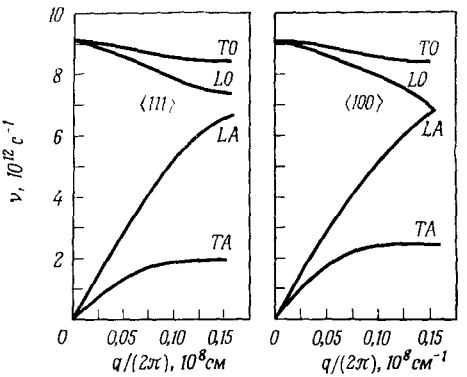
Для определения спектра фононов кристалла кроме спектроскопии комбинационного рассеяния, кратко описываемой в гл. 11, § 7, используется нейтронная спектроскопия [43, 44]. Необходимые большие потоки нейтронов получаются из атомных реакторов. Поток фильтруют через пластинку бериллия, которая поддерживается при температуре 4,2 К. Холодные нейтроны являются медленными, и их длина волны более чем вдвое превышает постоянную решетки, поэтому они не претерпевают дифракции на решетке и проходят пластинку насквозь. Более быстрые нейтроны многократно отражаются от микрокристаллитов пластинки и наконец поглощаются атомами бериллия, сечение захвата которых обратно пропорционально скорости и при 4,2 К велико. Когда холодные нейтроны попадают в теплый полупроводник, они поглощают фононы и тоже становятся «теплыми». Спектрометр времени пробега определяет распределение скоростей нейтронов, которое используется для определения энергии и импульса поглощенных фононов.

Результаты исследования германия [45] и арсенида галлия [46] приведены на фиг. 6.15 и 6.16. Температура оптических фононов называется температурой Дебая [1]). В германии она равна $\hbar\omega_0/k_B = \Theta = 430$ К, а в GaAs — 417 К. Вследствие ионного характера связи между атомами в бинарных соединениях

[1]) Эта температура на самом деле несколько отличается от температуры, определяемой по измерениям удельной теплоты.

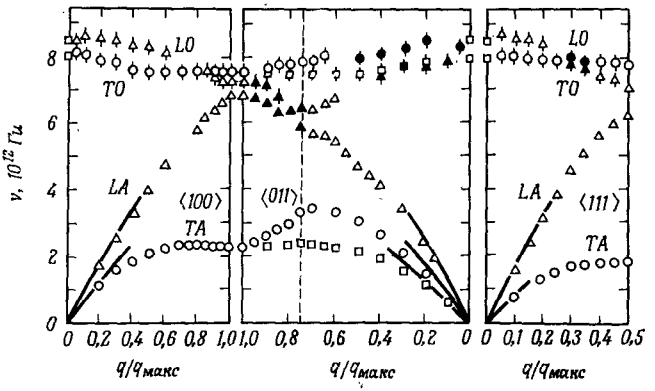
оптические колебания атомов можно возбудить электромагнитным излучением (гл. 11, § 7). Отсюда происходит название «оптические фононы». Если температура оптических фононов равна 400 К, то резонансная длина волны находится в далекой инфракрасной области и равна 32 мкм в вакууме.

Приведенные расчеты



Фиг. 6.15. Спектр колебаний решетки германия при 300 К в направлениях [111] и [100], определенный по рассеянию холодных нейтронов (поперечные колебания двукратно вырождены) [47].

выполнены в приближении модели одномерного кристалла. Кривые на фиг. 6.15 и 6.16 соответствуют трехмерным кристаллам и лишь в грубом приближении могут быть описаны формулами (6.8.19) и (6.8.21).



Фиг. 6.16. Спектр колебаний решетки GaAs при 296 К [48].

Поляризация колебаний, которым соответствуют черные кружки, не установлена. Штриховая линия — граница зоны в направлении ⟨011⟩. Сплошные линии проведены под углами, соответствующими скоростям звука, вычисленным из упругих постоянных.

Как можно видеть из фиг. 6.16, в бинарном соединении с частично ионной связью при $\mathbf{q} = 0$ частота продольных оптических фононов ν_l несколько больше, чем частота поперечных оптических фононов ν_t. В гл. 11, § 7, показано, что показатель преломления, равный квадратному корню из диэлектрической проницаемости при низких частотах $\sqrt{\varkappa}$, тоже больше, чем на оптических

частотах, где он равен $\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}$ ($\varkappa$ — статическая диэлектрическая проницаемость).

Докажем теперь соотношение Лидана — Закса — Теллера [49] для полярных оптических фононов [1])

$$\frac{\omega_l}{\omega_t} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}, \tag{6.8.22}$$

согласно которому отношение частот продольных и поперечных фононов при $q = 0$ равно отношению показателей преломления.

Механические колебания, диэлектрическая поляризация $\mathbf{P}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ связаны системой уравнений

$$\mathbf{P} = \gamma_{11}\mathbf{E} + \gamma_{12}\mathbf{w}, \tag{6.8.23}$$

$$-\frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = \gamma_{22}\mathbf{w} - \gamma_{12}\mathbf{E}; \tag{6.8.24}$$

здесь γ_{ik} — коэффициенты, смысл и вид которых мы определим позднее; $\mathbf{w}$ — приведенное смещение, равное

$$\mathbf{w} = \delta\mathbf{r}\sqrt{MN_u}, \tag{6.8.25}$$

где N_u — число ячеек в единице объема, а M — приведенная масса атомов, для которой

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M^+} + \frac{1}{M^-}, \tag{6.8.26}$$

где M^+ и M^- — массы положительных и отрицательных ионов, а $\delta\mathbf{r}$ — их относительное смещение.

В гл. 7, § 8, рассматривается взаимодействие носителей и когерентных акустических волн в полярных решетках при помощи аналогичных уравнений (7.8.17) и (7.8.18). В случае *акустических* волн в отсутствие электрического поля $\mathbf{E} = 0$ поляризация $\mathbf{P}$ пропорциональна деформации $S = (\nabla_r\delta\mathbf{r})$, а в случае *оптических* колебаний, как это следует из (6.8.23) и (6.8.25), $\mathbf{P}$ пропорционально смещению $\delta\mathbf{r}$. Существенным признаком оптических колебаний при $\mathbf{q} = 0$, т. е. при бесконечной длине волны, является то, что положительные ионы смещаются как целое относительно отрицательных, а в случае длинноволновых акустических колебаний атомы в макроскопическом небольшом объеме движутся практически синфазно. В гл. 6, § 11, это свойство оптических колебаний используется для обоснования пропорциональности матричного элемента $H_{k'k}$ и $\delta\mathbf{r}$.

Нет надобности подробно объяснять пропорциональность $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ в (6.8.23) при $\mathbf{w} = 0$. Вследствие инерции атомов решетки случай $\mathbf{w} \approx 0$ осуществляется в переменном поле на оптических

[1]) Доказательство, подобное приведенному, имеется в работе [50].

частотах, при которых оптическая диэлектрическая проницаемость $\varkappa_{опт}$ выражается посредством соотношения

$$\mathbf{P} = \varkappa_0 (\varkappa_{опт} - 1)\,\mathbf{E}. \tag{6.8.27}$$

а из (6.8.23) при $\mathbf{w} = 0$ следует

$$\gamma_{11} = \varkappa_0 (\varkappa_{опт} - 1). \tag{6.8.28}$$

Из (6.8.23) при $\mathbf{E} = 0$ можно определить поляризацию, обусловленную приведенным относительным смещением $\mathbf{w}$ положительных и отрицательных ионов. Тот же коэффициент пропорциональности γ_{12} входит в выражение (6.8.24), согласно которому статическое смещение ($\mathbf{w}$ при $d^2\mathbf{w}/dt^2 = 0$) возникает вследствие приложения постоянного электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{w} = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}\mathbf{E}. \tag{6.8.29}$$

Тот факт, что в (6.8.23) и (6.8.24) входит один и тот же коэффициент γ_{12}, станет ясным ниже; это обусловлено наличием множителя $\sqrt{MN_u}$, входящего в определение $\mathbf{w}$, согласно (6.8.25). Если исключить $\mathbf{w}$ из (6.8.29) и (6.8.23), то для поляризации $\mathbf{P}$ как функции от $\mathbf{E}$ получим

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}} + \gamma_{11}\right)\mathbf{E}. \tag{6.8.30}$$

Поскольку мы имеем дело со стационарными условиями, соотношение (6.8.30) содержит статическую диэлектрическую проницаемость:

$$\mathbf{P} = \varkappa_0 (\varkappa - 1)\,\mathbf{E}, \tag{6.8.31}$$

где $\varkappa_0$ — электрическая постоянная. Из (6.8.30) и (6.8.31) следует

$$\frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}} + \gamma_{11} = \varkappa_0 (\varkappa - 1). \tag{6.8.32}$$

Если для γ_{11} принять выражение (6.8.28) и решить уравнение (6.8.32) относительно γ_{12}^2, то мы получим

$$\gamma_{12}^2 = \gamma_{22}\varkappa_0 (\varkappa - \varkappa_{опт}). \tag{6.8.33}$$

Уравнение колебательного движения атомов решетки (6.8.24) при $\mathbf{E} = 0$ непосредственно следует из закона Гука и второго закона Ньютона. Коэффициент γ_{22} равен квадрату угловой частоты колебаний.

В случае волн мы рассматриваем поле и поляризацию только в направлении распространения волн. Следовательно, $\mathbf{E} = 0$

для поперечных колебаний (индекс t) и

$$\gamma_{22} = \omega_t^2, \tag{6.8.34}$$

а для продольных колебаний (индекс l) имеем

$$0 = \mathbf{D} = \varkappa_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{6.8.35}$$

откуда, используя (6.8.23) для $\mathbf{P}$, получаем

$$0 = \varkappa_0 \mathbf{E} + \gamma_{11} \mathbf{E} + \gamma_{12} \mathbf{w}. \tag{6.8.36}$$

Решая это уравнение относительно поля $\mathbf{E}$ и подставляя его в (6.8.24), получаем уравнение движения в случае продольных колебаний

$$-\frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = \left\{ \gamma_{22} + \frac{\gamma_{12}^2}{\varkappa_0 + \gamma_{11}} \right) \mathbf{w}. \tag{6.8.37}$$

Множитель в скобках равен квадрату угловой частоты колебаний:

$$\gamma_{22} + \frac{\gamma_{12}^2}{\varkappa_0 + \gamma_{11}} = \omega_l^2. \tag{6.8.38}$$

Из (6.8.38) и (6.8.34) с учетом (6.8.33) и (6.8.28) для отношения ω_l^2/ω_t^2 находим

$$\frac{\omega_l^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{22}(\varkappa_0 + \gamma_{11})} = 1 + \frac{\varkappa_0 (\varkappa - \varkappa_{\text{опт}})}{\varkappa_0 + \varkappa_0 (\varkappa_{\text{опт}} - 1)} = \frac{\varkappa}{\varkappa_{\text{опт}}}. \tag{6.8.39}$$

Отсюда непосредственно следует (6.8.22).

Мы использовали метод электростатики, т. е. неявно подразумевали наличие кулоновского взаимодействия зарядов, тогда как в случае волн в решетке следует использовать запаздывающее кулоновское взаимодействие.

Уравнение (6.8.24) может быть выведено из уравнений Гамильтона

$$\frac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{w}} H, \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \nabla_{\dot{\mathbf{w}}} H, \tag{6.8.40}$$

где точка, как обычно, обозначает производную по времени, а гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{22}\mathbf{w}^2 - \gamma_{12}(\mathbf{wE}) - \\ - \frac{1}{2}\gamma_{11}\mathbf{E}^2 + \mathbf{EP} + \frac{1}{2}\left(\varkappa_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}\right) \tag{6.8.41}$$

(μ_0 — магнитная постоянная). Если для $\mathbf{P}$ использовать его значение (6.8.23), коэффициент γ_{22} принять равным ω_t^2 и γ_{11}

определить из (6.8.28), то гамильтониан принимает вид

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\omega_t^2\mathbf{w}^2+\frac{1}{2}\left(\varkappa_0\varkappa_{\text{опт}}\mathbf{E}^2+\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}\right). \quad (6.8.42)$$

Первые два члена представляют собой удельную энергию механических колебаний решетки, а последний член в случае поперечных колебаний дает плотность энергии излучения. Производная гамильтониана по времени

$$\frac{dH}{dt}=\frac{d\mathbf{w}}{dt}\left(\frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2}+\gamma_{22}\mathbf{w}-\gamma_{12}\mathbf{E}\right)+\frac{d\mathbf{E}}{dt}(\mathbf{P}-\gamma_{12}\mathbf{w}-\gamma_{11}\mathbf{E})+$$
$$+\mathbf{E}\frac{d}{dt}(\varkappa_0\mathbf{E}+\mathbf{P})+\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (6.8.43)$$

существенно упрощается после учета (6.8.23) и (6.8.24):

$$\frac{dH}{dt}=\mathbf{E}\frac{d}{dt}(\varkappa_0\mathbf{E}+\mathbf{P})+\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (6.8.44)$$

где $\varkappa_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, а $\mathbf{B}/\mu_0$ — вектор напряженности магнитного поля. Уравнение (6.8.44) дает скорость изменения плотности энергии в немагнитном материале. Из (6.8.40) — (6.8.44) становится очевидным, что исходная точка предыдущих расчетов — соотношения (6.8.23) и (6.8.24), содержащие тот же коэффициент γ_{12}, — является в основном правильной [1]).

Выведем теперь из (6.8.35), (6.8.36) и (6.8.25) полезное соотношение между $\mathbf{P}$ и $\delta\mathbf{r}$ для продольных оптических колебаний

$$\mathbf{P}=-\varkappa_0\mathbf{E}=\varkappa_0\frac{\gamma_{12}}{\varkappa_0+\gamma_{11}}\delta\mathbf{r}\sqrt{MN_u}. \quad (6.8.45)$$

Подстановка значений γ_{12} и γ_{11} из (6.8.33) и (6.8.28) и использование соотношения Лидана — Закса — Теллера (6.8.39) дает

$$\mathbf{P}=\omega_t\left[\varkappa_0\left(\varkappa_{\text{опт}}^{-1}-\varkappa^{-1}\right)MN_u\right]^{1/2}\delta\mathbf{r}. \quad (6.8.46)$$

Произведение MN_u часто приближенно заменяется плотностью ρ. Так как поляризация определяется дипольным моментом $e_C\delta\mathbf{r}$ единицы объема, которая в данном случае равна объему ячейки N_u^{-1}:

$$\mathbf{P}=\frac{e_C\,\delta\mathbf{r}}{N_u^{-1}}, \quad (6.8.47)$$

---

[1]) При проверке размерности за единицу массы удобно брать В·А·с³/см² (равную 10^7 г).

то эффективный заряд Каллена [51] при продольных оптических колебаниях равен

$$e_C = \omega_l \sqrt{\frac{\varkappa_0 \left(\varkappa_{\text{опт}}^{-1} - \varkappa^{-1}\right) M}{N_u}}. \qquad (6.8.48)$$

Обычно e_C принято определять в единицах элементарного заряда e. Например, в $\alpha = \mathrm{SiC}$ были измерены частоты $\omega_l = (1{,}82 \pm 0{,}05) \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ и $\omega_t = (1{,}49 \pm 0{,}01) \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, из которых следует

$$\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa} = \left[\left(\frac{\omega_l}{\omega_t}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{\varkappa} = (0{,}49 \pm 0{,}15) \frac{1}{\varkappa}. \qquad (6.8.49)$$

Хотя частоты определены весьма точно методом спектроскопии комбинационного рассеяния, разность $(\omega_l/\omega_t)^2 - 1$ известна менее точно. Статическая диэлектрическая проницаемость SiC $\varkappa = 10{,}2$, плотность $\rho = 3{,}2$ г/см^3, плотность ячеек $N_u = 1{,}05 \cdot 10^{23}$ см$^{-3}$, поэтому вычисленное значение $e_C/e = 0{,}40$. Для GaAs, например, эффективный заряд равен лишь 0,17. Соответствующие значения эффективного заряда Сигети e_S [52]:

$$e_S = e_C \frac{3\varkappa_{\text{опт}}}{\varkappa + 2}, \qquad (6.8.50)$$

известные из теории ионной связи, равны для SiC 0,67 и для GaAs 0,38.

§ 9. Механизмы неупругого рассеяния

До сих пор мы имели дело с механизмами практически упругого рассеяния, такими, как рассеяние на примесях и на акустических фононах. Однако при рассеянии на оптических фононах энергия фонона того же порядка величины, что и тепловая энергия носителей, поэтому такие процессы следует считать неупругими. Следовательно, скорости рассеяния из состояния $\mathbf{k}$ в состояния $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ и $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ существенно различаются.

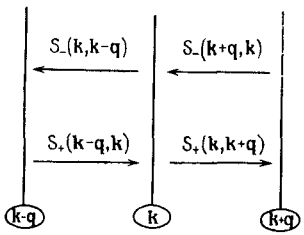
На фиг. 6.17 схематически показаны все четыре возможных перехода из состояния $\mathbf{k}$ и в состояние $\mathbf{k}$. Например, $S_-(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q})$ есть вероятность испускания фонона с импульсом $\hbar\mathbf{q}$, в результате которого импульс электрона меняется с $\hbar\mathbf{k}$ на $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Таким образом, уравнение (6.2.16) после подстановок принимает вид

$$\left(-\frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3q \{S_-(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}) f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{k} - \mathbf{q})] +$$
$$+ S_+(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) f(\mathbf{k}) [1 - f(\mathbf{k} + \mathbf{q})] - S_-(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) f(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \times$$
$$\times [1 - f(\mathbf{k})] - S_+(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) f(\mathbf{k} - \mathbf{q}) [1 - f(\mathbf{k})]\}. \qquad (6.9.1)$$

Индексы + и — при S соответствуют поглощению и испусканию фонона. Обычное интегрирование по $\mathbf{k}'$ заменяется интегрированием по $\mathbf{q}$, так как $\mathbf{k}'$ равно либо $\mathbf{k}+\mathbf{q}$, либо $\mathbf{k}-\mathbf{q}$. В отсутствие вырождения электронного газа величины в квадратных скобках можно положить равными единице:

$$\left(-\frac{\partial f(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3q\,\{[S_-(\mathbf{k},\ \mathbf{k}-\mathbf{q})+S_+(\mathbf{k},\ \mathbf{k}+\mathbf{q})]f(\mathbf{k})- \\ -S_-(\mathbf{k}+\mathbf{q},\ \mathbf{k})f(\mathbf{k}+\mathbf{q})-S_+(\mathbf{k}-\mathbf{q},\ \mathbf{k})f(\mathbf{k}-\mathbf{q})\}. \qquad (6.9.2)$$

Поскольку рассеяние неупруго, $f(\mathbf{k}\pm\mathbf{q})$ нельзя заменить на $f(\mathbf{k})$ и преобразование уравнения (6.9.2) к виду (6.2.22) невозможно; таким образом, нельзя ввести время релаксации им-



Фиг. 6.17. Схема переходов электрона при поглощении и испускании фонона.

пульса τ_m. Мы покажем, однако, что в частном случае, когда матричный элемент $|H_{k'k}|$ не зависит от $\mathbf{q}$, множители $f(\mathbf{k}\pm\mathbf{q})$ в последних двух членах уравнения (6.9.2) можно свести к $f_0(\mathbf{k})$ путем интегрирования по $\mathbf{q}$; тогда даже в случае неупругого рассеяния можно ввести τ_m. В других случаях время релаксации импульса τ_m не существует. Поскольку этот частный случай реализуется при рассеянии на оптическом деформационном потенциале, ниже приводится его обоснование.

Функция распределения $f(\mathbf{k})$ в диффузионном приближении (6.2.19) определяется выражением

$$f(\mathbf{k}) = f_0(k) + f_1(k)\cos\vartheta, \qquad (6.9.3)$$

где $f_1(k)$ обозначает величину $-(\hbar kG/m)\partial f_0/\partial k$. В отсутствие магнитного поля коэффициент $\mathbf{G}$ пропорционален напряженности электрического поля $\mathbf{E}$; ϑ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{E}$, полярная ось направлена вдоль $\mathbf{E}$. Угол между $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{E}$ обозначим через ϑ'. Тогда

$$f(\mathbf{k}') = f_0(k') + f_1(k')\cos\vartheta'. \qquad (6.9.4)$$

Покажем сначала, что [1]

$$\int \cos\vartheta'\delta\{\varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon(\mathbf{k}) \mp \hbar\omega_0\}\,d^3q = 0, \qquad (6.9.5)$$

[1]) Если ω_0 не зависит от q, то и $k' = \sqrt{k^2 \pm 2m\omega_0/\hbar}$ тоже не зависит от q, поэтому при интегрировании по q функции $f_0(k')$ и $f_1(k')$ можно считать постоянными.

где энергия оптического фонона $\hbar\omega_0$ считается постоянной. Для вычисления $\cos\vartheta'$ введем полярные координаты с осью вдоль $\mathbf{k}'$:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} \pm \mathbf{q} = (\pm q \sin\theta\cos\varphi,\ \pm q\sin\theta\sin\varphi,\ k \pm q\cos\theta), \qquad (6.9.6)$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, а φ — азимутальный угол. В этой системе отсчета вектор электрического поля есть

$$\mathbf{E} = E(\sin\vartheta\cos\psi,\ \sin\vartheta\sin\psi,\ \cos\vartheta) \qquad (6.9.7)$$

и

$$\cos\vartheta' = \frac{(\mathbf{k}'\mathbf{E})}{k'E} = \frac{\pm q\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\psi) \pm q\cos\theta\cos\vartheta + k\cos\vartheta}{\sqrt{q^2 + k^2 \pm 2qk\cos\theta}}. \qquad (6.9.8)$$

Поскольку $d^3q = q^2 dq\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, сначала проинтегрируем по φ, в результате чего исчезнет член, содержащий $\cos(\varphi-\psi)$, и возникнет множитель 2π при других членах; δ-функция Дирака, содержащаяся в выражениях для вероятностей рассеяния S_- и S_+ в (6.9.2):

$$\delta\{\varepsilon(\mathbf{k}\pm\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) \mp \hbar\omega_0\} = \delta\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(\pm 2kq\cos\theta + q^2) \mp \hbar\omega_0\right\}, \qquad (6.9.9)$$

не зависит от φ. Интегрирование по φ и θ легко выполняется (см. примечание на стр. 216):

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\vartheta'\, d\varphi\, \delta\{\varepsilon(\mathbf{k}\pm\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{k}) \mp \hbar\omega_0\}\sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi m}{\hbar^2 kq}\cos\vartheta\frac{A_\pm - q^2}{\sqrt{k^2 \pm \frac{2m\omega_0}{\hbar}}}, \qquad (6.9.10)$$

где введена постоянная

$$A_\pm = 2k^2 \pm \frac{2m\omega_0}{\hbar}. \qquad (6.9.11)$$

На заключительном этапе интегрирования по q рассмотрим только множители, содержащие q:

$$\int_{q_1}^{q_2} \frac{A_\pm - q^2}{q} q^2\, dq = \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2)\left(A_\pm - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}\right). \qquad (6.9.12)$$

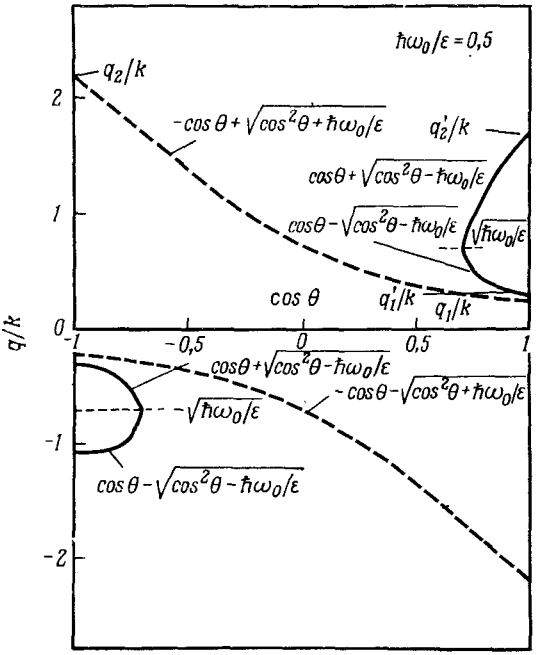
Из условий сохранения импульса и энергии, согласно которым аргумент δ-функции (6.9.9) обращается в нуль для $q \geqslant 0$, нижний предел интегрирования равен

$$q_1 = \mp k \pm \sqrt{A_\pm - k^2}, \qquad (6.9.13)$$

а верхний предел

$$q_2 = +k + \sqrt{A_\pm - k^2}. \qquad (6.9.14)$$

На фиг. 6.18 показана зависимость этих пределов на диаграмме q/k от $\cos\theta$ для $\hbar\omega_0/\varepsilon = 0{,}5$. При таких значениях пределов интеграл (6.9.12) обращается в нуль, что означает справедливость уравнения (6.9.5) как при поглощении, так и при испускании



Фиг. 6.18. Отношение q/k как функция косинуса угла рассеяния, полученное из законов сохранения энергии и импульса при поглощении (штриховые кривые) и испускании (сплошные кривые) фонона.

фонона. Используя уравнение (6.9.4), записанное в виде

$$f(\mathbf{k}\pm\mathbf{q}) = f_0(\mathbf{k}\pm\mathbf{q}) + f_1(\mathbf{k}\pm\mathbf{q})\cos\vartheta', \qquad (6.9.15)$$

и (6.2.17), можно свести (6.9.2) к виду, содержащему в правой части разность функций $f(\mathbf{k}) - f_0(\mathbf{k})$, что позволяет определить τ_m, согласно (6.2.22). Бир [53] обобщил уравнение (6.9.4) на случай любого числа сферических гармоник:

$$f(\mathbf{k}) = \sum_l f_l(k)\, P_l(\cos\vartheta). \qquad (6.9.16)$$

Из (6.2.22) и (6.9.2) следует, что

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{\hbar}\left\{\int_{q_1}^{q_2} |H_{k+q,k}|^2 \frac{2\pi m}{\hbar k q} q^2\, dq + \right.$$

$$\left. + \int_{q_1'}^{q_2'} |H_{k-q,k}|^2 \frac{2\pi m}{\hbar k q} q^2\, dq \right\}; \qquad (6.9.17)$$

здесь первый интеграл, соответствующий поглощению фонона $\hbar\omega_0$ при переходе из $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}+\mathbf{q}$, имеет пределы (6.9.13) и (6.9.14), преобразованные к виду

$$q_1 = -k + \sqrt{k^2 + \frac{2m\omega_0}{\hbar}} = (a-1)k, \qquad (6.9.18)$$

где

$$a = \sqrt{1 + \frac{\hbar\omega_0 2m}{\hbar^2 k^2}} = \sqrt{1 + \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}}, \qquad (6.9.19)$$

при $\theta = 0$ и

$$q_2 = +k + \sqrt{k^2 + \frac{2m\omega_0}{\hbar}} = (a+1)k \qquad (6.9.20)$$

при $\theta = \pi$; второй интеграл, описывающий испускание фонона $\hbar\omega_0$ при переходе из $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}-\mathbf{q}$, имеет пределы

$$q_1' = (1-b)k, \quad q_2' = (1+b)k, \qquad (6.9.21)$$

где

$$b = \mathrm{Re}\sqrt{1 - \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}}. \qquad (6.9.22)$$

Здесь Re обозначает, что берется действительная часть комплексного числа; это исключает возможность испускания при $\varepsilon < \hbar\omega_0$. В результате несложного интегрирования получаем

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi\hbar^4}\left[|H_{k+q,k}|^2\sqrt{\varepsilon+\hbar\omega_0} + \right.$$

$$\left. + |H_{k-q,k}|^2 \mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon-\hbar\omega_0}\right]. \qquad (6.9.23)$$

Ниже мы увидим, что второй матричный элемент отличается от первого только множителем $\exp(\hbar\omega_0/k_BT)$; поэтому

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi\hbar^4}|H_{k+q,k}|^2\left[\sqrt{\varepsilon+\hbar\omega_0} + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon-\hbar\omega_0}\right]. \qquad (6.9.24)$$

Теперь легко определить скорость потери энергии, так как при соударении теряется или приобретается энергия оптического фонона $\pm\hbar\omega_0$, которая предполагалась постоянной:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{\sqrt{2}\,Vm^{3/2}}{\pi\hbar^4}\,|H_{k+q,\,k}|^2\,\hbar\omega_0\left[\sqrt{\varepsilon+\hbar\omega_0} - \right.$$
$$\left. - \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT}\right)\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon-\hbar\omega_0}\right]. \qquad (6.9.25)$$

При поглощении фонона энергия носителя меняется на $+\hbar\omega_0$, а при испускании — на $-\hbar\omega_0$.

§ 10. Уравнение баланса импульса и смещенное максвелловское распределение

Метод расчета полевой зависимости подвижности теплых и горячих носителей, при котором для упрощения предполагается наличие распределения Максвелла — Больцмана с температурой T_e, состоит в следующем. Во-первых, это распределение используется для усреднения τ_m и определяется зависимость подвижности от температуры T_e; во-вторых, из уравнения баланса энергии

$$\mu eE^2 = \left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} \qquad (6.10.1)$$

определяется зависимость между $\mathbf{E}$ и T_e, и, в-третьих, из этих двух зависимостей исключается температура T_e.

Согласно другому методу, сначала определяется $\bar{\tau}_m$ (среднее значение τ_m) по формуле

$$\left\langle -\frac{d(\hbar k_E)}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{mv_d}{\bar{\tau}_m}, \qquad (6.10.2)$$

где слева производится усреднение по смещенному распределению (4.2.41). Величина $\hbar k_E$ — компонента импульса носителей в направлении поля, среднее значение которой равно mv_d, где v_d — скорость дрейфа. Подвижность приближенно определяется как

$$\mu = \frac{|e|}{m}\bar{\tau}_m. \qquad (6.10.3)$$

Поскольку $\mu E = v_d$, а $|e|E$ — импульс, приобретаемый за единицу времени от поля E, выражение (6.10.3) следует из (6.10.2) и уравнения баланса импульса

$$\left\langle -\frac{d(\hbar k_E)}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = |e|E. \qquad (6.10.4)$$

В остальном процедура такая же, как и раньше. Результаты слегка отличаются от получаемых первым методом. Второй ме-

тод был применен в случае полярного рассеяния [54, 55]. Рассмотрим его кратко.

Если k_E определяется как

$$k_E = k\cos\vartheta, \tag{6.10.5}$$

то компонента волнового вектора оптического фонона в направлении электрического поля q_E определяется из (6.9.6) и (6.9.7):

$$q_E = \frac{(\mathbf{qE})}{E} = q\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\psi) + q\cos\theta\cos\vartheta. \tag{6.10.6}$$

Изменение импульса носителей в направлении электрического поля определяется величиной импульса фонона $\pm\hbar q_E$, приобретаемого при поглощении или теряемого при испускании, умноженной на соответствующую вероятность рассеяния (фиг. 6.17) и проинтегрированной по фазовому пространству:

$$\left[-\frac{d(\hbar k_E)}{dt}\right]_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int(\hbar q_E S_- - \hbar q_E S_+)\,d^3q. \tag{6.10.7}$$

Это и есть квантовомеханический эквивалент классического уравнения баланса импульса, например, в виде (4.2.39).

Поскольку вероятность рассеяния не зависит от угла φ, при интегрировании (6.10.6) член, содержащий $\cos(\varphi-\psi)$, обращается в нуль. Следовательно, скорость потери импульса (6.10.7) принимает вид

$$\left(-\frac{dk_E}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \cos\vartheta\,\frac{V}{(2\pi)^2}\int\cos\theta\,(S_- - S_+)\,q^3\,dq\sin\theta\,d\theta. \tag{6.10.8}$$

Обозначим правую часть через $g(\varepsilon)\cos\vartheta$, где

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^2}\int\cos\theta\,(S_- - S_+)\,q^3\,dq\sin\theta\,d\theta. \tag{6.10.9}$$

Так как вероятности рассеяния S_+ и S_- содержат δ-функции, интегрирование по θ производится так же, как в (6.9.10):

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\delta\left(\mp\frac{\hbar^2kq}{m}\cos\theta + \frac{\hbar^2q^2}{2m} \pm \hbar\omega_0\right)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \pm\frac{m}{2\hbar^2k^2} + \frac{m^2\hbar\omega_0}{\hbar^4k^2q^2} = \pm\frac{1}{4\varepsilon}\left(1 \pm \frac{2mk_B\Theta}{\hbar^2q^2}\right), \tag{6.10.10}$$

где ε и $k_B\Theta$ введены вместо $\hbar k^2/2m$ и $\hbar\omega_0$ соответственно; верхний знак соответствует испусканию фонона, а нижний —

поглощению. Функция $g(\varepsilon)$ принимает вид

$$g(\varepsilon)=\frac{V}{8\pi\hbar\varepsilon}\left[\int_{q_1}^{q_2}|H_{k+q,\,k}|^2\left(1-\frac{2mk_B\Theta}{\hbar^2q^2}\right)q^3\,dq+\right.$$
$$\left.+\int_{q_1'}^{q_2'}|H_{k-q,\,k}|^2\left(1+\frac{2mk_B\Theta}{\hbar^2q^2}\right)q^3\,dq\right], \qquad (6.10.11)$$

где пределы определены соотношениями (6.9.18), (6.9.20) и (6.9.21).

При усреднении используется смещенное распределение Максвелла — Больцмана

$$f(\mathbf{k})\sim\exp\left[-\frac{(\hbar\mathbf{k}-m\mathbf{v}_d)^2}{2mk_BT_e}\right]. \qquad (6.10.12)$$

При не слишком большой напряженности электрического поля показатель экспоненты можно приближенно записать в виде $-(\hbar^2k^2-2\hbar kmv_d\cos\vartheta)/(2mk_BT_e)$, а экспоненту представить в виде

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)\exp\left(\frac{\hbar kv_d\cos\vartheta}{k_BT_e}\right)\approx$$
$$\approx\left(1+\frac{\hbar kv_d\cos\vartheta}{k_BT_e}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right). \qquad (6.10.13)$$

Таким образом, функция распределения

$$f(\mathbf{k})=f_0(\varepsilon)+f_1(\varepsilon)\cos\vartheta \qquad (6.10.14)$$

состоит из симметричной части $f_0(\varepsilon)\sim\exp(-\varepsilon/k_BT_e)$ и несимметричной части $f_1(\varepsilon)\cos\vartheta$, где $f_1(\varepsilon)$ определяется выражением

$$f_1(\varepsilon)=f_0(\varepsilon)\frac{v_d\sqrt{2m\varepsilon}}{k_BT_e}. \qquad (6.10.15)$$

Поскольку усреднение

$$\left\langle-\frac{dk_E}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}}=\frac{\int\cos\vartheta g(\varepsilon)f(\mathbf{k})k^2\,dk\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi}{\int f(\mathbf{k})k^2\,dk\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi} \qquad (6.10.16)$$

содержит интегралы

$$\int_0^\pi\cos\vartheta f(\mathbf{k})\sin\vartheta\,d\vartheta=\int_0^\pi\cos^2\vartheta f_1(\varepsilon)\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{2}{3}f_1(\varepsilon), \qquad (6.10.17)$$

$$\int_0^\pi f(\mathbf{k})\sin\vartheta\,d\vartheta=\int_0^\pi f_0(\varepsilon)\sin\vartheta\,d\vartheta=2f_0(\varepsilon), \qquad (6.10.18)$$

выражение для средних потерь принимает вид

$$\left\langle -\frac{dk_E}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{2^{1/2}}{3\sqrt{\pi}} v_d \sqrt{\frac{m}{k_B T_e}} \int_0^\infty g(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) \frac{\varepsilon}{k_B T_e} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \tag{6.10.19}$$

Окончательно из (6.10.2) получаем

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{2^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{\hbar}{\sqrt{m k_B T_e}} \int_0^\infty g(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) \frac{\varepsilon}{k_B T_e} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \tag{6.10.20}$$

Эта величина несколько отличается от величины $\langle \tau_m^{-1} \rangle$, приведенной в (6.9.23). По формуле (6.10.3) нетрудно определить подвижность как функцию электронной температуры T_e.

Вычислим теперь из (6.10.1) напряженность электрического поля E, необходимую для разогрева до температуры T_e:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int (\hbar\omega S_- - \hbar\omega S_+) d^3q. \tag{6.10.21}$$

Если, как это принято для рассеяния на оптических фононах, частота ω не зависит от q, то она может быть вынесена из-под знака интеграла ($\omega = \omega_0$). Поскольку в правой части остается разность значений $1/\tau_m$ для испускания и поглощения, получаем

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \hbar\omega_0 \left[\left(\frac{1}{\tau_m}\right)_- - \left(\frac{1}{\tau_m}\right)_+\right], \tag{6.10.22}$$

откуда в случае рассеяния на оптическом деформационном потенциале следует (6.9.25).

Для среднего значения важна только симметричная часть функции распределения:

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \hbar\omega_0 \int_0^\infty \left\{\left(\frac{1}{\tau_m}\right)_- - \left(\frac{1}{\tau_m}\right)_+\right\} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{k_B T_e}} d\left(\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \tag{6.10.23}$$

Из (6.10.1) и (6.10.3) получаем для напряженности электрического поля

$$E = \sqrt{\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} \frac{m}{\bar{\tau}_m e^2}} \tag{6.10.24}$$

и для дрейфовой скорости

$$v_d = \sqrt{\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} \frac{\bar{\tau}_m}{m}}, \qquad (6.10.25)$$

где независимой переменной является T_e, а $\bar{\tau}_m$ и $\langle -d\varepsilon/dt\rangle_{\text{столкн}}$ заданы выражениями (6.10.20) и (6.10.23) соответственно. Если вычислить обе эти функции от T_e, то можно определить зависимость $v_d(E)$.

Основной недостаток данного метода в случае полярного оптического рассеяния связан с тем, что смещенное распределение Максвелла — Больцмана недостаточно хорошо описывает реальное распределение[1]), которое более вытянуто в направлении электрического поля и не может быть представлено с помощью только одного параметра T_e [56].

§ 11. Рассеяние на оптическом деформационном потенциале

Рассмотрим теперь рассеяние носителей на продольных оптических фононах в неполярных кристаллах. Угловую частоту оптического фонона, которая в гл. 6, § 8, обозначалась через ω_l, в дальнейшем мы будем обозначать ω_0. Для фононов с энергией $\hbar\omega_0$ посредством соотношения

$$\hbar\omega_0 = k_B\Theta \qquad (6.11.1)$$

введем температуру Θ, называемую температурой Дебая, так как ω_0 — наивысшая частота фононов, а Дебай в своей известной теории удельной теплоемкости постулировал отсечку спектра фононов при ω_0.

В § 8 настоящей главы [текст после формулы (6.8.26)] говорилось, что при длинноволновых оптических колебаниях все положительные атомы смещаются навстречу отрицательным, вследствие чего энергия носителя при переходе от положительного к отрицательному атому меняется пропорционально смещению:

$$\delta\varepsilon = D\,\delta r. \qquad (6.11.2)$$

Коэффициент пропорциональности D называется константой оптического деформационного потенциала экстремума зоны (единица измерения эВ/см) [57]. Для упрощения мы опустили индексы e или h для электронов или дырок соответственно. Формула (6.11.2) не совпадает с аналогичными формулами (6.4.5) и (6.4.6), описывающими взаимодействие носителей с акусти-

[1]) Если не учитывать другие механизмы рассеяния, то в указанных условиях вообще нет стационарного распределения — происходит убегание электронов [54]. — *Прим. ред.*

ческой ветвью колебаний, однако результат расчета матричного элемента гамильтониана [23, 58]

$$|H_{k\pm q,\,k}| = D\sqrt{\left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{2\rho V\omega_0}} \qquad (6.11.3)$$

подобен (6.4.12). Он не зависит от q, так как спектр оптической ветви вблизи $\mathbf{q} = 0$ постоянен и N_q зависит только от ω_0:

$$N_q = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_BT} - 1\right)\right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{\Theta}{T} - 1\right)\right]^{-1}. \qquad (6.11.4)$$

Именно этот случай рассмотрен в гл. 7, § 9, и для определения времени релаксации импульса τ_m можно использовать выражение (6.9.24):

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{m^{3/2}D^2N_q}{\sqrt{2}\,\pi\rho\hbar^2k_B\Theta}\left[\sqrt{\varepsilon + k_B\Theta} + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon - k_B\Theta}\right], \qquad (6.11.5)$$

а для скорости потерь энергии — выражение (6.9.25):

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = -\frac{m^{3/2}D^2N_q}{\sqrt{2}\,\pi\rho\hbar^2}\left[\sqrt{\varepsilon + k_B\Theta} - \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon - k_B\Theta}\right]. \qquad (6.11.6)$$

Зависимость τ_m от энергии носителя ε показана на фиг. 6.19. Если $\varepsilon \geqslant k_B\Theta$, то преобладает испускание оптических фононов, что особенно отчетливо видно при более низких температурах решетки. Изломы, подобные тому, который имеется при $\varepsilon = k_B\Theta$, должны возникать также при $\varepsilon = 2k_B\Theta$, $3k_B\Theta$ и т. д., когда становится возможным одновременное испускание двух или трех фононов. Однако изложенная выше теория не учитывает многофононные процессы ввиду относительно небольшой их вероятности. Штриховые кривые изображают τ_m при рассеянии на акустических фононах, когда $\varepsilon_{\text{ак}}/u_l = D/\omega_0$, а все остальные параметры те же. При больших энергиях хвосты сплошных и штриховых кривых сливаются.

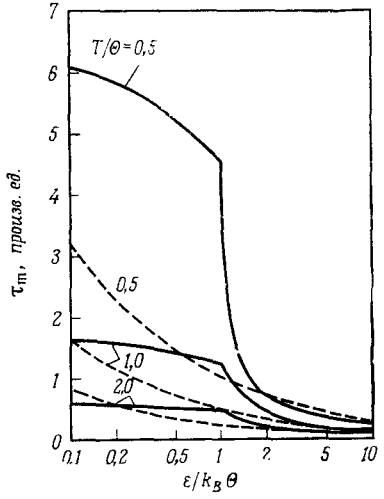
Время релаксации импульса уменьшается при увеличении энергии, поэтому разогрев носителей приводит к отрицательному отклонению от закона Ома. Подвижность в слабом электрическом поле $\mu_0 = (e/m)\langle\tau_m\rangle$, где $\langle\tau_m\rangle$ определяется выражением (6.3.19), легко найти для невырожденного электронного газа, когда справедливо распределение Максвелла — Больцмана:

$$\mu_0 = \frac{4\sqrt{2\pi}\,e\hbar^2\rho\sqrt{k_B\Theta}}{3m^{3/2}D^2}f\left(\frac{T}{\Theta}\right). \qquad (6.11.7)$$

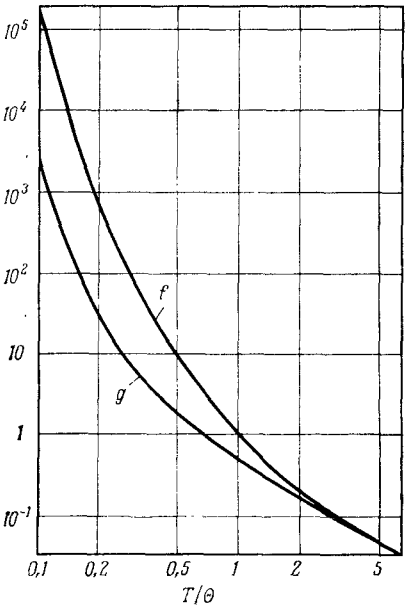
Функция $f(T/\Theta)$ определяется выражением

$$f\left(\frac{T}{\Theta}\right) = (2z)^{5/2}\,[\exp(2z) - 1]\int_0^\infty \frac{y^{3/2}\exp(-2zy)\,dy}{\sqrt{y+1} + \exp(2z)\,\mathrm{Re}\sqrt{y-1}}, \qquad (6.11.8)$$

где $z = \Theta/2T$ и $y = \varepsilon/k_B\Theta$. Функция $f(T/\Theta)$ показана на фиг. 6.20. Подвижность пропорциональна этой функции и монотонно



Фиг. 6.19. Зависимость времени релаксации импульса от энергии при оптических колебаниях



Фиг. 6.20. Функции $f(T/\Theta)$ (6.11.8) и $g(T/\Theta)$ (6.11.23) в случае рассеяния на оптическом деформационном потенциале.

уменьшается при увеличении температуры; ее значение в единицах $см^2/(В\cdot с)$ вычисляется по формуле

$$\mu = 2{,}04\cdot 10^3 \frac{\left(\frac{\rho}{г/см^3}\right)\sqrt{\frac{\Theta}{400\,К}}}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^{5/2}\left(\frac{D}{10^8\ эВ/см}\right)^2} f\left(\frac{T}{\Theta}\right). \qquad (6.11.9)$$

Скорость потери энергии горячих носителей (6.11.6) усредним теперь по распределению Максвелла — Больцмана с температурой T_e:

$$f(\varepsilon) \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right). \qquad (6.11.10)$$

Первый член в квадратных скобках в выражении (6.11.6) при усреднении дает

$$\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon + k_B\Theta}\,\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\varepsilon =$$

$$= (k_BT_e)^2\int_0^\infty \sqrt{\frac{\varepsilon}{k_BT_e}+\frac{\Theta}{T_e}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_BT_e}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\left(\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right) =$$

$$= (k_BT_e)^2\frac{\Theta}{2T_e}\exp\left(\frac{\Theta}{2T_e}\right)K_1\left(\frac{\Theta}{2T_e}\right), \qquad (6.11.11)$$

где K_1 — модифицированная функция Бесселя [формула (2.4) приложения 2]. При усреднении второго члена в квадратных скобках в выражении (6.11.6) вводим переменную $\xi = [\varepsilon/(k_BT_e)] - \Theta/T_e$ и, опуская множитель $\exp(\Theta/T)$, получаем

$$\int_{k_B\Theta}^\infty \sqrt{\varepsilon - k_B\Theta}\,\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\varepsilon = (k_BT_e)^2\exp\left(-\frac{\Theta}{T_e}\right)\times$$

$$\times\int_0^\infty \sqrt{\xi}\sqrt{\xi+\frac{\Theta}{T_e}}\exp(-\xi)\,d\xi =$$

$$= (k_BT_e)^2\frac{\Theta}{2T_e}\exp\left(-\frac{\Theta}{2T_e}\right)K_1\left(\frac{\Theta}{2T_e}\right). \qquad (6.11.12)$$

Оба члена следует разделить на нормирующий множитель

$$\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\varepsilon = (k_BT_e)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (6.11.13)$$

Как и раньше, для упрощения введем обозначения $z = \Theta/2T$ и $\lambda = T/T_e$. После усреднения выражение (6.11.6) принимает вид

$$-\left\langle\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{m^{3/2}D^2\sqrt{k_B\Theta}}{\pi^{3/2}\hbar^2\rho}\,\frac{\sqrt{\lambda z}\,K_1(\lambda z)}{\operatorname{sh}(z)}\operatorname{sh}[(1-\lambda)z]. \qquad (6.11.14)$$

Не зависящее от T_e время релаксации энергии τ_ε может быть введено, строго говоря, только в случае теплых электронов, когда гиперболический синус в хорошем приближении можно заменить его аргументом:

$$\operatorname{sh}[(1-\lambda)z] \approx (1-\lambda)z \approx z\frac{T_e - T}{T}, \qquad (6.11.15)$$

или, иначе говоря, когда $\lambda = 1$. Согласно определениям (4.13.7) и (4.13.11), для времени релаксации энергии теплых электронов

имеем

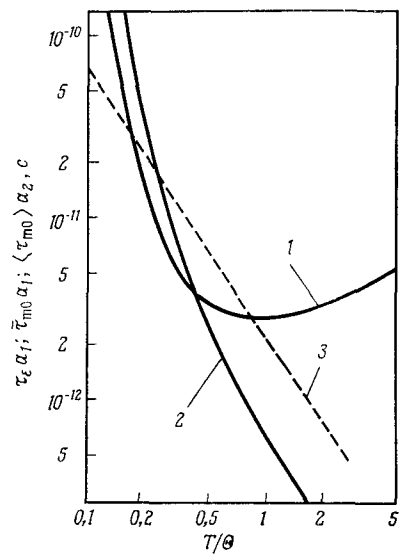
$$\tau_\varepsilon = \frac{3\pi^{1/2}}{4}\,\frac{\hbar^2\rho\sqrt{k_B\Theta}}{m^{3/2}D^2}\,\frac{\operatorname{sh} z}{z^{5/2}K_1(z)} \qquad (6.11.16)$$

где $z = \Theta/2T$. В случае многодолинной модели, обсуждаемой в гл. 7, § 6, $m^{3/2}$ следует заменить на $m_t m_l^{1/2}$, где m_t и m_l — поперечная и продольная эффективные массы. Численное значение τ_ε в секундах вычисляется по формуле

$$\tau_\varepsilon = 1{,}6\cdot 10^{-12}\,\frac{\left(\dfrac{\rho}{\text{г/см}^3}\right)\sqrt{\dfrac{\Theta}{400\ \text{K}}}}{\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{3/2}\left(\dfrac{D}{10^8\ \text{эВ/см}}\right)}\,\frac{\operatorname{sh} z}{z^{5/2}K_1(z)}, \qquad (6.11.17)$$

где $z = \Theta/2T$.

Зависимость τ_ε от T/Θ показана на фиг. 6.21. Она имеет минимум вблизи $T = \Theta$. При высоких температурах как поглощение, так и испускание оптических фононов становятся сильными, и результат определяется разностью двух больших величин; поэтому простого ответа на вопрос, почему τ_ε увеличивается пропорционально $\sqrt{T/\Theta}$ при $T \gg \Theta$, не существует.



Фиг. 6.21. Времена релаксации энергии и импульса, усредненные по распределению Максвелла — Больцмана при рассеянии на оптическом деформационном потенциале.

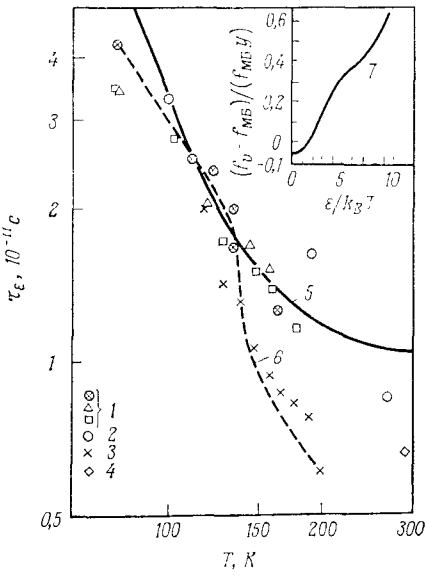
$1-\tau_\varepsilon a_1$; $2-\tau_{m0}a_1$; 3 — время релаксации импульса в случае рассеяния на акустическом деформационном потенциале $\langle\tau_{m0}\rangle a_2$, где

$$a = \frac{(m/m_0)^{3/2}\,(D/10^8\ \text{эВ/см})^2}{\rho/g\ \text{см}^{-3}\sqrt{\Theta/400\ \text{K}}},$$

$$a_2 = \frac{(m/m_0)^{3/2}\,(\varepsilon_{a\text{K}}/\text{эВ})^2}{c_l/10^{12}\ \text{дин}\cdot\text{см}^{-2}}.$$

Экспериментальные значения $\tau_\varepsilon(T)$ в германии n-типа, полученные разными сверхвысокочастотными методами [59—64], приведены на фиг. 6.22. По-видимому, наиболее точные результаты получил Хесс [59—61], используя метод смешения гармоник (гл. 4, § 14). Сплошная кривая рассчитана по формуле (6.11.17) при следующих значениях параметров: $c_l = 1{,}56\cdot 10^{12}$ дин/см^2, $m/m_0 = 0{,}2$, $\Theta = 430$ K, характерных для германия n-типа, и при $D = 4{,}8\cdot 10^8$ эВ/см. Из данных по инфракрасному поглоще-

нию было получено значение $D = 4 \cdot 10^8$ эВ/см, а из различных электрических измерений следуют значения от $5 \cdot 10^8$ до $9 \times \times 10^8$ эВ/см [56]. Так как распределение Максвелла—Больцмана лишь грубо описывает истинное распределение, совпадение значения D с ранее приведенными результатами лучше, чем следовало ожидать. Адави [32] использовал вариационный метод расчета β в n-Ge, а Хесс [1]) применил этот метод для расчета τ_ε (штриховая кривая) и функции распределения, показанной в верхнем правом углу на фиг. 6.22. Нельзя сказать, что совпадение с экспериментальными результатами лучше, чем при использовании в расчетах распределения Максвелла — Больцмана. Более ран-



Фиг. 6.22. Зависимость времени релаксации энергии от температуры в n-Ge [32, 59—64].

Экспериментальные результаты: *1*—Хесса [59—61]; *2*—Зеегера [63]; *3*—Моргана и Келли [62]; *4*—Гибсона и др. [64]. Результаты вычислений: *5*—в случае распределения Максвелла—Больцмана при $D = 4{,}8 \cdot 10^8$ эВ/см; *6*—вариационным методом [32] при $D/\varepsilon_{ак} = 0{,}4\omega_0/u_l$, $D = 8 \cdot 10^8$ эВ/см; *7*—поправка к функции распределения Максвелла—Больцмана, вычисленная вариационным методом, $y = (3\pi/16)\mu_{ак}^2 E^2/u_l^2$

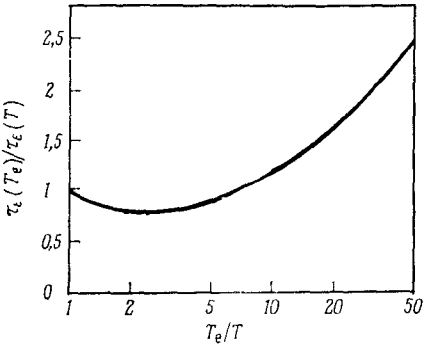
ние экспериментальные данные получили различными сверхвысокочастотными методами Морган и Келли [62], Зеегер [63] и Гибсон, Грэнвилл и Пейдж [64]. Вклад акустических фононов в релаксацию энергии (время релаксации $3 \cdot 10^{-10}$ с $\times \times \sqrt{100\ \text{К}/T}$) может преобладать ниже $T = 50$ К.

Были проведены также исследования [59—61] кремния n- и p-типа и германия p-типа, в том числе при одноосном давлении. В противоположность n-Ge, время релаксации τ_ε в этих материалах анизотропно, что, по-видимому, можно понять, если учесть структуру энергетических зон.

До сих пор обсуждалось время релаксации энергии теплых носителей. В случае горячих носителей приближение (6.11.15) непригодно, а τ_ε зависит от T_e и, следовательно, от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Время релаксации, вводимое

[1]) Неопубликованные данные.

посредством (4.13.7) и (4.13.11), остается полезным, хотя зависимость времени от энергии перестает быть экспоненциальной. На фиг. 6.23 показана зависимость τ_ε от T_e/T при $T = \Theta/6$, вычисленная в предположении распределения Максвелла — Больцмана. При $T_e = 2T$ имеется пологий минимум, а при больших T_e время релаксации τ_ε увеличивается как $(T_e/T)^{1/2}$. Измерения τ_ε в n-Ge в области горячих электронов выполнили Гибсон, Грэнвилл и Пейдж [64] при комнатной температуре. При $E = 1$ кВ/см экспериментальная зависимость близка к степенному закону $\tau_\varepsilon \sim T_e^{-1/4}$, при $E = 5$ кВ/см более под-



Фиг. 6.23. Зависимость времени релаксации энергии от температуры электронов T_e при рассеянии на оптическом деформационном потенциале. (Обе величины нормированы на единицу при $T_e = T$.)

ходит зависимость $\tau_\varepsilon \sim \sqrt{T_e}$, а в области промежуточных полей показатель степени меняется в пределах между $-1/4$ и $+1/2$.

Воспользуемся теперь методом уравнений баланса гл. 6, § 10, для расчета скорости дрейфа в сильных электрических полях. Сначала оценим функцию $g(\varepsilon)$, определенную выражением (6.10.11). Так как матричные элементы гамильтониана $H_{k\pm q,\,k}$ не зависят от q [выражения (6.11.3)], интегрирование не представляет труда и дает

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{8\pi\hbar\varepsilon}\frac{\hbar^2 D^2 N_q}{2\rho V k_B\Theta}\left[\frac{q_2^2 - q_1^2}{2}\left(\frac{q_2^2 + q_1^2}{2} - \frac{2mk_B\Theta}{\hbar^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\frac{q_2'^2 - q_1'^2}{2}\left(\frac{q_2'^2 + q_1'^2}{2} + \frac{2mk_B\Theta}{\hbar^2}\right)\right], \qquad (6.11.18)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{m^2 D^2 N_q}{\pi\hbar^3\rho k_B\Theta}\left[\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon + k_B\Theta} + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{Re}\,\sqrt{\varepsilon - k_B\Theta}\right]. \qquad (6.11.19)$$

При расчете $1/\tilde{\tau}_m$, согласно (6.10.20), вводятся параметр $t = \Theta/(2T_e)$ и для первого члена в выражении для $g(\varepsilon)$ перемен-

ная $\xi = \varepsilon/k_B T_e$, а для второго члена переменная $\xi = (\varepsilon - k_B\Theta)/(k_B T_e)$:

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{2m^{3/2}\tilde{D}^2 N_q}{3\pi^{3/2}\hbar^2\rho\sqrt{k_B\Theta}}\, t^{3/2}\left\{\exp(t)\,[K_2(t) - K_1(t)] + \right.$$
$$\left. + \exp\left(\frac{\Theta}{T} - t\right)[K_2(t) + K_1(t)]\right\}, \qquad (6.11.20)$$

где K_1 и K_2 — модифицированные функции Бесселя, приведенные в приложении 2. Подстановка N_q из (6.4.11) дает

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m} = \frac{2m^{3/2}D^2(\lambda z)^{3/2}}{3\pi^{3/2}\hbar^2\rho\sqrt{k_B\Theta}\,\mathrm{sh}(z)}\{\mathrm{ch}[(1-\lambda)z]\,K_2(\lambda z) +$$
$$+ \mathrm{sh}[(1-\lambda)z]\,K_1(\lambda z)\}, \qquad (6.11.21)$$

где, как обычно, $z = \Theta/2T$ и $\lambda = T/T_e$. Подвижность в слабом поле, согласно (6.10.3), при $\lambda = 1$ в принятом приближении принимает вид

$$\mu_0 = \frac{4\sqrt{2\pi}\,e\hbar^2\rho\sqrt{k_B\Theta}}{3m^{5/2}D^2}\, g\left(\frac{T}{\Theta}\right), \qquad (6.11.22)$$

где функция $g(T/\Theta)$ [ее не следует путать с $g(\varepsilon)$] определяется выражением

$$g\left(\frac{T}{\Theta}\right) = \frac{9\pi}{2^{7/2}z^{3/2}}\,\frac{\mathrm{sh}(z)}{K_2(z)}; \qquad (6.11.23)$$

она приведена на фиг. 6.20 в сравнении с функцией $f(T/\Theta)$ в формуле (6.11.7). Подвижность, вычисленная методом уравнений баланса, несколько ниже, чем при использовании обычной процедуры, особенно при низких температурах.

Расчет напряженности электрического поля и скорости дрейфа как функций λ, согласно уравнениям (6.10.24) и (6.10.25), с учетом потерь энергии в виде (6.11.14) дает

$$\frac{v_d}{v_{ds}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{cth}\,z}{\lambda z\left\{1 + \dfrac{\mathrm{cth}\,[(1-\lambda)z]\,K_2(\lambda z)}{K_1(\lambda z)}\right\}}} \qquad (6.11.24)$$

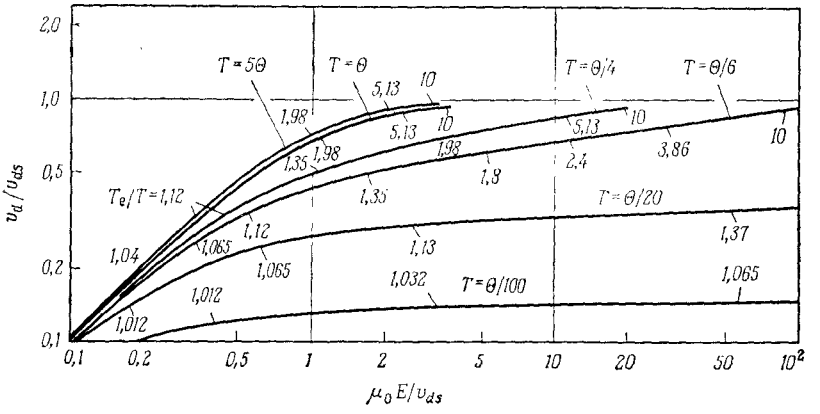
и

$$\frac{\mu_0 E}{v_{ds}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{cth}\,z}{z}}\,\frac{\lambda\,\mathrm{sh}\,[(1-\lambda)z]\,K_1(\lambda z)}{K_2(z)}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{cth}\,[(1-\lambda)z]\,K_2(\lambda z)}{K_1(\lambda z)}}, \qquad (6.11.25)$$

где

$$v_{ds} = \sqrt{\frac{3k_B\Theta}{4m\,\mathrm{cth}\,z}} \qquad (6.11.26)$$

— значение скорости дрейфа при насыщении в случае большой напряженности электрического поля. В области насыщения энергия дрейфа носителя $mv_{ds}^2/2$ примерно равна энергии оптического фонона $k_B\Theta = \hbar\omega_0$, так как при высоких температурах электронов скорость дрейфа ограничивается эмиссией фононов. Скорость v_{ds} уменьшается при повышении температуры решетки, но лишь незначительно (на 13% между $T \ll \Theta$ и $T = \Theta/2$).



Фиг. 6.24. Зависимость нормированной скорости дрейфа от нормированной напряженности электрического поля при рассеянии на оптическом деформационном потенциале.

Параметр кривых T/Θ; на кривых указаны значения T_e/T

На фиг. 6.24 показаны в логарифмическом масштабе расчетные зависимости скорости дрейфа от напряженности электрического поля для различных значений отношения температуры решетки к температуре Дебая T/Θ. Закону Ома соответствует прямая с углом наклона 45° в области слабого поля. В сильных электрических полях скорость дрейфа насыщается; значение скорости дрейфа при насыщении, зависящее, согласно (6.11.26), от температуры через $z = \Theta/2T$, используется на фиг. 6.24 для нормировки как v_d, так и $\mu_0 E$, где μ_0 — подвижность в слабом электрическом поле. На кривых указаны значения отношения температуры электронов к температуре Дебая. При низких температурах решетки переход к насыщению происходит весьма постепенно, а отклонение от закона Ома существенно уже в очень слабых полях. Насколько слабы эти поля, можно оценить из расчета коэффициента β для теплых электронов.

Из (6.6.14) находим

$$\beta E^2 = (1-\lambda)\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\tilde{\tau}_{m0}}{\tilde{\tau}_m}\right)\right]_{\lambda=1}, \qquad (6.11.27)$$

где множитель $(1-\lambda)$ может быть исключен, если воспользоваться уравнением баланса энергии теплых электронов

$$\mu_0 |e| E^2 = (1-\lambda)\frac{3k_B T}{2\tau_\varepsilon}. \qquad (6.11.28)$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{2\mu_0 |e| \tau_\varepsilon}{3k_B T}\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\bar{\tau}_{m0}}{\bar{\tau}_m}\right)\right]_{\lambda=1}. \qquad (6.11.29)$$

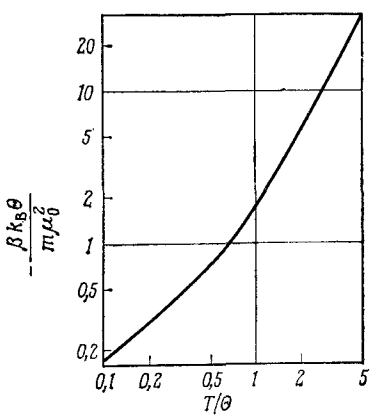
После дифференцирования зависящих от λ множителей в формуле (6.11.21) и подстановки $\lambda = 1$ получаем

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\bar{\tau}_{m0}}{\bar{\tau}_m}\right)\right]_{\lambda=1} = \frac{3}{2} + z\frac{K_2' - K_1}{K_2} = -\left(0{,}5 + 2z\frac{K_1}{K_2}\right), \qquad (6.11.30)$$

где K_2' — производная от K_2, приведенная в приложении 2. Подстановка μ_0 из (6.11.22) и τ_ε из (6.11.16) дает безразмерную величину

$$-\frac{\beta_B^k \Theta}{m\mu_0^2} = \frac{(K_2 - K_1)(K_2 + 4zK_1)}{6zK_1K_2}, \qquad (6.11.31)$$

где K_1 и K_2 — функции от $z = \Theta/2T$. Эта величина растет при повышении температуры. Зависимость ее от T/Θ показана на фиг. 6.25. Однако при этом μ_0 сильно уменьшается (фиг. 6.20) и $(-\beta)$ тоже сильно уменьшается (примерно в 10^5 раз в диапазоне T/Θ от 0,1 до 1). Для оценки порядка величины $(-\beta)$, например при $T/\Theta = 0{,}2$, вспомним, что $k_B\Theta/m$ примерно равно



Фиг. 6.25. Зависимость $-\beta k_B\Theta/(m\mu_0^2)$ от отношения температуры решетки T к температуре Дебая Θ при рассеянии на оптическом деформационном потенциале.

квадрату скорости дрейфа при насыщении v_{ds}^2. Типичные значения $v_{ds} = 10^7$ см/с, $\mu_0 = 2\cdot 10^4$ см^2/(В·с); отсюда коэффициент $(-\beta)$ примерно равен 10^{-7} см^2/В^2. Этот вычисленный коэффициент на три порядка величины меньше наблюдаемого, например, в n-Ge при 77 К ($T/\Theta \approx 0{,}2$); при этих условиях баланс энергии обеспечивается рассеянием как на оптическом, так и на акустическом деформационном потенциале [65, 66] (см. также

[56]), а баланс импульса — рассеянием только на акустическом деформационном потенциале [65, 67]. Различное влияние обоих механизмов рассеяния объясняется наличием большого числа акустических фононов низкой энергии и малым числом оптических фононов большой энергии.

Насыщение скорости дрейфа на самом деле имеет место, например, в германии n-типа, и, хотя скорость дрейфа при насыщении v_{ds} по порядку величины совпадает с вычисленной, существует другая теория, предполагающая образование в полупроводнике электрических доменов (неоднородного распределения поля), из которой следует более правдоподобное объяснение. Этот вопрос рассматривается в гл. 7, § 7.

Отношение $\tau_\varepsilon/\bar{\tau}_{m_0}$ приближенно равно числу соударений, необходимых для релаксации энергии. Его величина равна

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\bar{\tau}_{m0}} = \frac{T}{\Theta} \frac{K_2\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}{K_1\left(\frac{\Theta}{2T}\right)} \tag{6.11.32}$$

и содержит всего один параметр материала — температуру Дебая Θ. При температурах $T \gg 0{,}42\,\Theta$ релаксация энергии происходит значительно медленнее, нежели релаксация импульса, обеспечивающая рандомизацию импульса дрейфа, что отмечено при обсуждении фиг. 6.6 [1]).

§ 12. Полярное оптическое рассеяние

Взаимодействие носителей с оптическими колебаниями решетки в полярных полупроводниках называется полярным оптическим рассеянием. Как и в случае пьезоэлектрического рассеяния, потенциальная энергия носителя определяется по формуле (6.7.5):

$$\delta\varepsilon = \frac{|e|E}{q}, \tag{6.12.1}$$

где напряженность электрического поля E обусловлена поляризацией P, которая, согласно (6.8.47), возникает при продольных оптических колебаниях решетки:

$$E = -\frac{P}{\varkappa_0} = -\frac{N_u e_C\,\delta r}{\varkappa_0}. \tag{6.12.2}$$

Следовательно,

$$\delta\varepsilon = -\frac{|e|N_u e_C}{\varkappa_0 q}\,\delta r. \tag{6.12.3}$$

[1]) Выражение (6.11.32), так же как (6.11.16), содержит ошибку, связанную с использованием функции распределения Максвелла — Больцмана, тогда как при оптическом рассеянии функция распределения вытянута в направлении поля и обрезана при $\varepsilon = \hbar\omega_0$.

Это выражение аналогично (6.11.2), но коэффициент пропорциональности между $\delta\varepsilon$ и δr теперь зависит от q. По аналогии с (6.11.3) определяем матричный элемент гамильтониана

$$|H_{k\pm q,\,k}| = \frac{|e|N_u e_C}{\varkappa_0 q}\sqrt{\left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{2\rho V\omega_0}}. \qquad (6.12.4)$$

Удобно ввести две постоянные, содержащие параметры энергетической зоны. Одна из них

$$E_0 = \frac{|e|m}{4\pi\varkappa_0^2\rho\hbar\omega_0}(N_u e_C)^2 \qquad (6.12.5)$$

с учетом (6.8.48) принимает вид

$$E_0 = \frac{|e|mk_B\Theta}{4\pi\varkappa_0\hbar^2}\left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa}\right), \qquad (6.12.6)$$

а ее численное значение в единицах кВ/см определяется выражением

$$E_0 = 16{,}3\,\frac{m}{m_0}\,\frac{\Theta}{\text{K}}\left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa}\right). \qquad (6.12.7)$$

Она называется эффективной напряженностью электрического поля. Вторая безразмерная постоянная α называется полярной константой и определяется выражением

$$\alpha = \frac{\hbar|e|E_0}{\sqrt{2m}\,(\hbar\omega_0)^{3/2}} = \frac{1}{137}\sqrt{\frac{mc^2}{2k_B\Theta}}\left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa}\right) =$$

$$= 397{,}4\sqrt{\frac{m/m_0}{\Theta/\text{K}}}\left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa}\right), \qquad (6.12.8)$$

где $1/137 = e^2/(4\pi\varkappa_0\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры, а c — скорость света. В n-GaAs, например, $E_0 = 5{,}95$ кВ/см и $\alpha = 0{,}067$.

После подстановки этих постоянных в (6.12.4) квадрат матричного элемента принимает вид

$$|H_{k\pm q,\,k}|^2 = \frac{2\pi\hbar^2|e|E_0}{Vmq^2}\left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^{3/2}\pi\hbar\alpha\,(\hbar\omega_0)^{3/2}}{Vm^{1/2}q^2}\left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right). \qquad (6.12.9)$$

В § 9 данной главы было показано, что в рассматриваемом случае, когда матричный элемент зависит от q и процесс рассеяния неупругий (энергия $\hbar\omega_0$ сравнима со средней энергией или даже превышает последнюю), время релаксации импульса, строго говоря, не имеет смысла. Несмотря на это, в грубом приближении заменим в (6.9.2) функцию $f(\mathbf{k}\pm\mathbf{q})$ на $f_0(\mathbf{k})$.

Тогда из (6.9.17) следует

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{\hbar}\frac{2^{3/2}\pi\hbar a(\hbar\omega_0)^{3/2}N_q}{Vm^{1/2}}\left[\int_{q_1}^{q_2}\frac{2\pi m}{\hbar^2 kq^3}q^2\,dq + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\int_{q_1'}^{q_2'}\frac{2\pi m}{\hbar^2 kq^3}q^2\,dq\right]. \qquad (6.12.10)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{1}{\tau_m} = \alpha\omega_0\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}}N_q\left[\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right], \qquad (6.12.11)$$

где a и b определяются выражениями (6.9.19) и (6.9.22).

При низких температурах $T \ll \Theta$, когда $\varepsilon \ll \hbar\omega_0$, имеем $b \approx 0$ и $N_q \approx \exp(-\Theta/T)$; поэтому время релаксации импульса τ_m можно приближенно оценить по формуле

$$\frac{1}{\tau_m} \approx 2\alpha\omega_0\exp\left(-\frac{\Theta}{T}\right). \qquad (6.12.12)$$

Обратное время релаксации импульса определяется в основном произведением полярной константы на вероятность поглощения фонона. Подвижность $\mu = (e/m)\tau_m$ равна

$$\mu = \frac{|e|}{2m\alpha\omega_0}\exp\left(\frac{\Theta}{T}\right); \qquad (6.12.13)$$

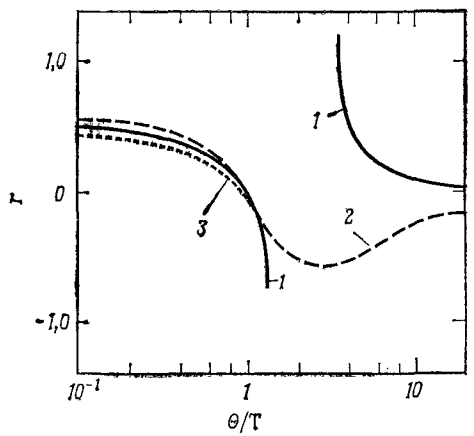
в единицах см^2/(В·с) при $T \ll \Theta$ она вычисляется по формуле

$$\mu = 2{,}6\cdot 10^5\frac{\exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)}{\alpha\left(\frac{m}{m_0}\right)\left(\frac{\Theta}{\text{K}}\right)}. \qquad (6.12.14)$$

Например, в n-GaAs, в котором $\Theta = 417$ К, $m/m_0 = 0{,}072$, $\alpha = 0{,}067$, при $T = 100$ К, согласно вычислениям, $\mu = 2{,}2\times 10^5$ см^2/(В·с). Это на порядок превышает наибольшую подвижность, измеренную в этом материале. При этой и более низких температурах в полупроводниковых соединениях, даже наиболее очищенных, преобладает рассеяние на примесях. Это, к сожалению, ограничивает возможности сравнения формулы (6.12.14) с результатами экспериментов.

Указанные выше трудности расчета τ_m можно обойти, если воспользоваться, например, вариационным методом [67]. Вычисленная таким методом подвижность [68] при низких температурах $T \ll \Theta$ совпадает со значением, определяемым из (6.12.14), а при высоких температурах результат вычисления по формуле (6.12.14) следует умножить на $8\sqrt{T/(9\pi\Theta)}$. В промежуточной области следует использовать численные методы. Согласно вариа-

ционному методу, в электропроводность, эффект Холла и термоэлектрический эффект входят различные $\tau_m(\varepsilon)$. На фиг. 6.26 показана зависимость от Θ/T показателя r предполагаемого степенного закона $\tau_m \sim \varepsilon^r$ для этих эффектов [68]. Показатель r, входящий в выражение для электропроводности, становится неограниченно большим при $T \approx \Theta$, что указывает на невозможность определения функции $\tau_m(\varepsilon)$, справедливой при всех значениях ε.



Фиг. 6.26. Показатели степенной зависимости эффективного времени релаксации импульса от энергии $\tau_m \sim \varepsilon^r$ при полярном оптическом рассеянии [68]. Показатели r: *1*—для подвижности; *2*—для коэффициента Холла R_H; *3*—для термо-э. д. с. (4.9.17).

Для вычисления скорости потери энергии первый член справа в уравнении (6.12.11) умножаем на $-\hbar\omega_0 = -k_B\Theta$, а второй — на $+k_B\Theta$, так как они соответствуют поглощению и испусканию фонона:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\text{столкн}} = \frac{\alpha (k_B\Theta)^{5/2}}{\hbar\sqrt{\varepsilon}} N_q \left[-\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right| + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right]. \tag{6.12.15}$$

В случае невырожденного электронного газа скорость потери энергии усредняем по распределению Максвелла — Больцмана с температурой T_e:

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{2\alpha N_q}{\sqrt{\pi}\hbar}\left(\frac{\Theta}{T_e}\right)^{3/2}\left[-\int_0^{\infty}\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\varepsilon + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right)\int_{k_B\Theta}^{\infty}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT_e}\right)d\varepsilon\right] k_B\Theta. \tag{6.12.16}$$

Первый интеграл в правой части определяется без трудностей [формула (2.3) приложения 2]:

$$k_B T_e \int_0^\infty \ln \left| \frac{\sqrt{1+2\frac{t}{\xi}}+1}{\sqrt{1+2\frac{t}{\xi}}-1} \right| \exp(-\xi)\, d\xi = k_B T_e \exp(t)\, K_0(t), \quad (6.12.17)$$

где $\xi = \varepsilon/k_B T_e$ — новая переменная интегрирования, а $t = \Theta/(2T_e)$ — параметр. При вычислении второго интеграла с нижним пределом $k_B\Theta$ вводим переменную $\xi = (\varepsilon - k_B\Theta)/k_B T_e$:

$$k_B T_e \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right) \int_0^\infty \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\frac{2t}{\xi+2t}}}{1-\sqrt{1-\frac{2t}{\xi+2t}}} \right| \exp[-(\xi+2t)]\, d\xi =$$

$$= k_B T_e \exp\left(\frac{\Theta}{T} - 2t\right) \exp(t)\, K_0(t). \quad (6.12.18)$$

Так как $t = \lambda z$, где $\lambda = T/T_e$, выражение для средней скорости потери энергии принимает окончательный вид [69]

$$\left\langle -\frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle_{\text{столкн}} = \frac{2^{5/2}\alpha (k_B\Theta)^2 \sqrt{\lambda z}}{\sqrt{\pi}\,\hbar} \frac{K_0(\lambda z)\,\mathrm{sh}\,[(1-\lambda)z]}{\mathrm{sh}\, z}. \quad (6.12.19)$$

В случае теплых носителей, когда $\mathrm{sh}[(1-\lambda)z] \approx (1-\lambda)z$ и $\lambda \approx 1$, время релаксации энергии определяется выражением

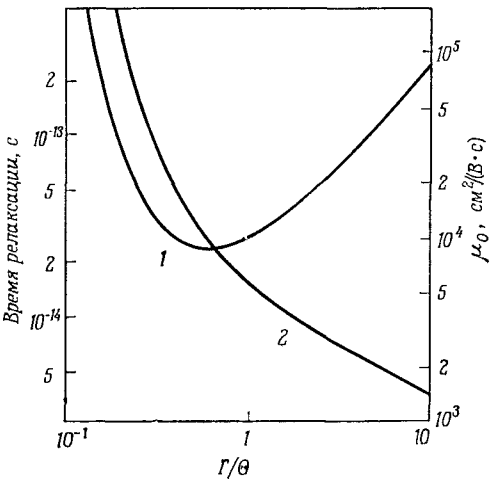
$$\tau_\xi = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^{7/2}\alpha\omega_0} \frac{\mathrm{sh}\, z}{z^{5/2} K_0(z)} = \frac{0{,}47}{\alpha\omega_0} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}{\left(\frac{\Theta}{2T}\right)^{5/2} K_0\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}. \quad (6.12.20)$$

На фиг. 6.27 представлена зависимость от T/Θ произведения

$$\tau_\varepsilon \left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}} - \frac{1}{\varkappa}\right) \sqrt{\frac{\Theta}{\mathrm{K}} \frac{m}{m_0}} = 9{,}05 \cdot 10^{-15}\ \text{с} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}{\left(\frac{\Theta}{2T}\right)^{5/2} K_0\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}. \quad (6.12.21)$$

При температуре примерно вдвое меньше температуры Дебая ($\Theta/2T \approx 1$) функция имеет минимум. В минимуме $\tau_\varepsilon = 1{,}29/\alpha\omega_0$, откуда можно определить длину электромагнитной волны, подходящую для измерений τ_ε: ее следует выбирать примерно в $1/\alpha$ раз больше длины волны оптического фонона. Так как α во многих полупроводниках незначительно отличается от 0,1, а длина волны оптического фонона приближенно равна 30 мкм

(гл. 11, § 7), наиболее подходящая длина волны для измерения τ_ε составляет около 1,3 мм. Следовательно, величину τ_ε можно измерять с помощью волн субмиллиметрового диапазона. Некоторые результаты исследования n-GaAs и n-InAs показаны на фиг. 6.28 [33, 70, 71]. Кривые, рассчитанные по формуле (6.12.21), были согласованы с экспериментальными данными подбором полярной постоянной α.



Фиг. 6.27. Зависимость времени релаксации энергии τ_ε теплых носителей, времени релаксации импульса τ_{m0} и подвижности μ_0 от температуры решетки в случае полярного оптического рассеяния.

$1-\tau_\varepsilon\left(\varkappa_{\text{опт}}^{-1}-\varkappa^{-1}\right)\sqrt{(\Theta/\text{K})\,(m/m_0)}$;

$2-\tau_{m0}\left(\varkappa_{\text{опт}}^{-1}-\varkappa^{-1}\right)\sqrt{(\Theta/\text{K})\,(m/m_0)}$,

а также подвижность μ_0, вычисленная для n-GaAs по формуле (6.12.23) при $\Theta=417$K и $\left(\varkappa_{\text{опт}}^{-1}-\varkappa^{-1}\right)\sqrt{(\Theta/\text{K})\,(m/m_0)}=0{,}067$.

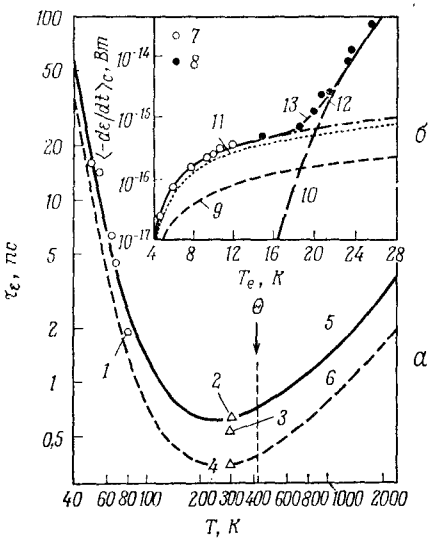
Поскольку вычисления скорости дрейфа в сильных электрических полях методом уравнений баланса [54] подобны соответствующим вычислениям в случае рассеяния на оптическом деформационном потенциале [формулы (6.11.18) — (6.11.31)], за исключением того, что теперь матричные элементы пропорциональны q^{-2}, детали вычислений мы опустим и приведем лишь окончательный результат. Обратное среднее время релаксации импульса определяется выражением

$$\frac{1}{\bar{\tau}_m}=\frac{2^{5/2}\alpha\omega_0\,(\lambda z)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}\,\operatorname{sh} z}\{\operatorname{ch}[(1-\lambda)z]\,K_1(\lambda z)+\operatorname{sh}[(1-\lambda)z]\,K_0(\lambda z)\},\tag{6.12.22}$$

где, как обычно, $z=\Theta/2T$ и $\lambda=T/T_e$. Множитель в фигурных скобках отличается от соответствующего множителя в (6.11.21) только тем, что порядок обеих модифицированных функций Бесселя на единицу меньше. В данном приближении формула для подвижности в слабом электрическом поле принимает вид

$$\mu_0=\frac{3\sqrt{\pi}}{2^{5/2}}\frac{|e|}{m\alpha\omega_0}\frac{\operatorname{sh} z}{z^{3/2}K_1(z)}=\frac{31{,}8\ \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})}{\left(\frac{1}{\varkappa_{\text{опт}}}-\frac{1}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\Theta}{\text{K}}}\left(\frac{m}{m_0}\right)^{3/2}}\frac{\operatorname{sh} z}{z^{3/2}K_1(z)}.\tag{6.12.23}$$

При высоких температурах, когда $z \ll 1$, подвижность, вычисленная по этой формуле, больше вычисленной вариационными методами [68] в $32/9\pi \approx 1{,}13$ раза, а при низких температурах ($z \gg 1$) она меньше в $3T/2\Theta$ раз. Подвижность электронов в n-GaAs, вычисленная по формуле (6.12.23), показана на фиг. 6.27; ее значение при комнатной температуре, равное 7800 см^2/(В·с), согласуется с экспериментально измеренным значением.



Фиг. 6.28. Результаты исследования скорости релаксации в n-GaAs и n-InAs [33, 70, 71].

а. Температурная зависимость времени релаксации энергии теплых носителей в n-GaAs. Эксперимент: *1*—метод СВЧ на образце с $n=5\cdot10^{14}$ см$^{-3}$, μ_H (77 К)=3600 см^2/(В·с); *2—4*—с использованием инфракрасной техники (на образцах): *2*—с $n=7\cdot10^{14}$ см$^{-3}$, $N_I=1\cdot10^{16}$ см$^{-3}$; *3*—с $n=3{,}4\cdot10^{15}$ см$^{-3}$, $N_I=1\cdot10^{17}$ см$^{-3}$; *4*—с $n=7{,}8\cdot10^{15}$ см$^{-3}$, $N_I=2{,}7\cdot10^{16}$ см$^{-3}$). Вычисления: *5*—при $\alpha=0{,}036$; *6*—при $\alpha=0{,}067$. *б*. Зависимость скорости потерь энергии от T_e в n-InAs при 4,2 К. Эксперимент: *7*—по эффекту Шубникова—де Гааза; *8*—по измерению подвижности. Вычисления с учетом: *9*—экранированного пьезоэлектрического рассеяния; *10*—полярного оптического рассеяния; *11*—рассеяния на экранированном акустическом деформационном потенциале; *12*—совместного действия всех трех механизмов.

В противоположность рассеянию на оптическом деформационном потенциале скорость дрейфа в области сильных полей не насыщается. Весьма удобно, однако, ввести скорость v_{ds}, которая определяется формулой (6.11.26). Тогда

$$\frac{v_d}{v_{ds}} = \sqrt{\frac{2\operatorname{cth} z}{\lambda z\left\{1+\dfrac{\operatorname{cth}[(1-\lambda)z]\,K_1(\lambda z)}{K_0(\lambda z)}\right\}}}, \qquad (6.12.24)$$

где $\lambda = T/T_e$ и $z = \Theta/2T$. Это выражение аналогично выражению (6.11.24), полученному для рассеяния на оптическом деформационном потенциале. Однако для малых значений аргумента, т. е. при высокой температуре электронов, отношение $K_1(\lambda z)/K_0(\lambda z) \approx 1/[\lambda z \ln(2/\lambda z)]$. Следовательно,

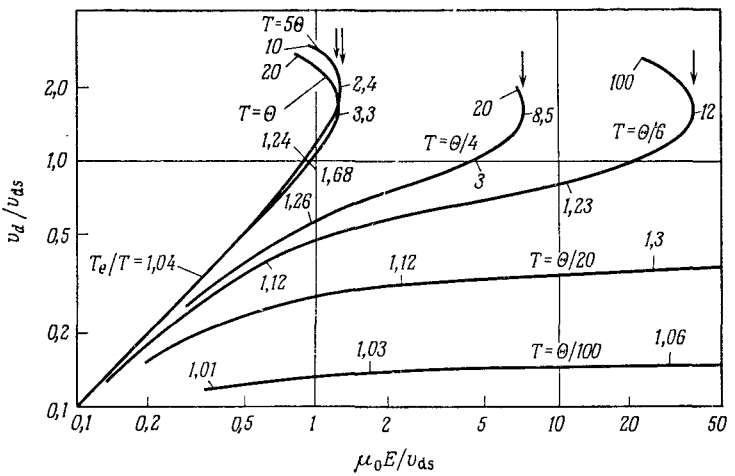
$$(v_d)_{T_e\to\infty} \approx v_{ds}\sqrt{2\ln\left(\frac{2}{\lambda z}\right)} \to \infty. \qquad (6.12.25)$$

Учитывая то, что зависимость скорости дрейфа от температуры логарифмическая, можно ожидать существования области характеристики, где скорость дрейфа якобы насыщается.

Напряженность электрического поля, нормированная на постоянную E_0 (6.12.5), определяется выражением

$$\frac{E}{E_0} = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{3\pi}} \frac{(\lambda z)\,\mathrm{sh}\,[(1-\lambda)\,z]\,K_0(\lambda z)}{\mathrm{sh}\,z} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{cth}\,[(1-\lambda)\,z]\,K_1(\lambda z)}{K_0(\lambda z)}}\,. \tag{6.12.26}$$

На фиг. 6.29 показана зависимость v_d/v_{ds} от $\mu_0 E/v_{ds}$ при различных температурах; ее можно сравнить с семейством кривых



Фиг. 6.29. Зависимость скорости дрейфа (в единицах v_{ds}) от напряженности электрического поля (в единицах v_{ds}/μ_0) при различной температуре решетки (в единицах температуры Дебая Θ) в случае полярного оптического рассеяния. На кривых указаны значения T_e/T; стрелками показано поле диэлектрического пробоя при различной температуре решетки.

на фиг. 6.24, соответствующих рассеянию на оптическом деформационном потенциале. При низких температурах ($T/\Theta \ll 1$) существует плато, где скорость дрейфа почти не меняется в широком диапазоне напряженностей электрического поля. Плато переходит в сверхлинейную зависимость, которая связана с диэлектрическим пробоем [72][1]). При высоких температурах плато отсутствует, а пробойная характеристика развивается непосредственно из омической области. Такой пробой в полупроводниках еще не обнаружен экспериментально ввиду того, что в сильных

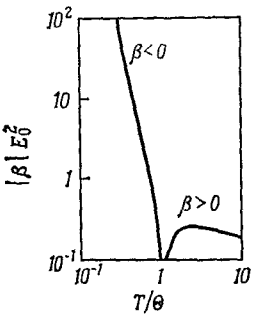
[1]) См. также [56]. Относительно диэлектрического пробоя см. [73, 74].

предпробойных полях другие механизмы потерь энергии, такие, как междолинное рассеяние и ударная ионизация, становятся существенными и ограничивают разогрев электронов, так что температура электронов, необходимая для возникновения диэлектрического пробоя, не достигается.

Имеется возможность заметить наступление сверхлинейной характеристики при напряженности электрического поля, соответствующей области теплых электронов. Коэффициент β вычисляется так же, как в случае рассеяния на оптическом деформационном потенциале [формулы (6.11.27)—(6.11.31)]; результат имеет вид [55]

$$-\beta = \frac{m\mu_0^2}{3k_B\Theta}\left[4z - \frac{K_1(z)}{K_0(z)}\right] = \frac{3\pi}{16E_0^2}\operatorname{sh}^2 z\,\frac{4zK_0(z) - K_1(z)}{z^3K_1^2(z)\,K_0(z)}. \qquad (6.12.27)$$

На фиг. 6.30 приведена зависимость $|\beta|E_0^2$ от T/Θ. При низких температурах $T < 1{,}08\,\Theta$ коэффициент β отрицателен, а при высоких температурах — положителен. Положительные значения указывают на предпробойное состояние. Экспериментальные исследования β при $T > \Theta$ пока отсутствуют.



Фиг. 6.30. Зависимость $|\beta|E_0^2$ от температуры решетки в случае полярного оптического рассеяния [55].

Число соударений, необходимое для релаксации энергии, приближенно определяется отношением

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\tilde{\tau}_{m0}} = \frac{T}{\Theta}\,\frac{K_1\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}{K_0\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}. \qquad (6.12.28)$$

За исключением температуры Дебая Θ, это отношение не зависит от выбора полупроводника. При температурах $T \gg 0{,}65\,\Theta$ релаксация энергии происходит значительно медленнее, нежели релаксация импульса. Это означает быструю рандомизацию импульса дрейфа и способствует установлению смещенного распределения Максвелла — Больцмана.

Предыдущие расчеты основаны на предположении, что при всех температурах устанавливается смещенное распределение Максвелла — Больцмана. Чтобы получить лучшее приближение

к истинной функции распределения, применялся вариационный метод [68], а относительно недавно — метод Монте-Карло [75, 76]. Суть последнего заключается в моделировании траектории движения электрона в **k**-пространстве при помощи электронной вычислительной машины с учетом как влияния электрического поля, так и соударений. Набор случайных чисел используется для определения как вероятности рассеяния, так и направления движения после рассеяния. Для статистической сходимости необходимо около 10^4 актов рассеяния.

Недавно предложен еще один метод — итерационный [77], дополненный понятием саморассеяния [78, 79]. Пусть после n шагов вычислена функция распределения f_n. Ее можно использовать для расчета правой части уравнения Больцмана, содержащей механизмы рассеяния. Функцию распределения в левой части уравнения обозначают f_{n+1} и находят с помощью интегрирования. Под саморассеянием понимают такой искусственный нефизический процесс рассеяния, при котором носитель в действительности остается в прежнем состоянии в **k**-пространстве, но который существенно упрощает распределение вероятности рассеяния. Этот метод весьма пригоден для вычисления, например, высокочастотной электропроводности в полярных полупроводниках [80, 81].

В щелочногалоидных соединениях, где $\alpha \gtrsim 1$ (например, для NaCl $\alpha = 5{,}5$; для AgBr $\alpha = 1{,}6$), очень плодотворным оказалось понятие полярона. Вследствие сильного полярного взаимодействия решетка вблизи электрона проводимости поляризуется, и поляризация перемещается вместе с электроном. Поэтому эффективная масса электрона $m_{\text{пол}}$ больше, чем в отсутствие поляризации (когда она равна m) и отношение $m_{\text{пол}}/m$ зависит от константы полярного взаимодействия α. При слабом взаимодействии ($\alpha \ll 1$) поляризацию можно рассматривать как слабое возмущение, и из квантовомеханической теории возмущений следует [1])

$$\frac{m_{\text{пол}}}{m} = \left(1 - \frac{\alpha}{6}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\alpha}{6}. \qquad (6.12.29)$$

Среднее число виртуальных фононов, движущихся вместе с электроном, равно $\alpha/2$. Углубление дна зоны проводимости составляет около $\alpha\hbar\omega_0$. В сильном магнитном поле, достаточном для возникновения уровней Ландау в энергетических зонах (гл. 9, § 2), энергия первого из этих уровней равна

$$\varepsilon_{n=1} \approx \frac{3}{2}\hbar\omega_c\left(1 - \frac{\alpha}{6}\right) - \alpha\hbar\omega_0, \qquad (6.12.30)$$

[1]) Краткий обзор и ссылки на другие работы приведены, например, в работе [82].

где ω_c — циклотронная частота [83—85]. В результате сильного взаимодействия с решеткой образуется полярон. (Это понятие не следует путать с понятием «поляритон», упомянутым в гл. 11, § 7.) Соответственно горячие носители в полярных полупроводниках можно называть горячими поляронами [86, 87]. При больших концентрациях носителей n электронно-фононное взаимодействие экранируется, т. е. $\alpha = \alpha(n)$ [88].

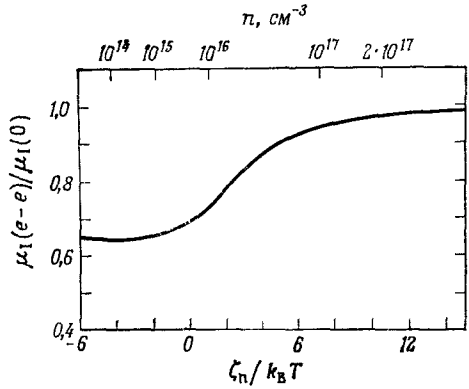
§ 13. Межэлектронное рассеяние

В процессе, в котором электрон рассеивается другим электроном ($e-e$-рассеяние), полный импульс электронного газа не меняется. Поэтому межэлектронное рассеяние незначительно влияет на подвижность. Однако, поскольку всегда действуют и другие механизмы рассеяния, которые могут быть усилены межэлектронным рассеянием, оно может оказаться важным. Например, если в результате $e-e$-рассеяния электрон занимает место в k-пространстве, оставленное другим электроном, который потерял энергию $\hbar\omega_0$ в результате оптического рассеяния, то скорость потерь энергии возрастает.

Изменение подвижности вследствие $e-e$-рассеяния в неполярном полупроводнике вычислил Аппель [89], а в полярном — Бейт и др. [90]. Аппель использовал вариационный метод Кохлера [91—93]. В этом методе не используется понятие времени релаксации (ведь рассеяние неупруго!); вместо этого принимается, что скорость возрастания энтропии при учете всех механизмов рассеяния максимальна в стационарном состоянии. В невырожденном полупроводнике, когда преобладает рассеяние на ионизованных примесях, подвижность $\mu_I(0)$ уменьшается до значения $\mu_I(e-e)$, которое учитывает межэлектронное рассеяние [$M_I(e-e) \approx 0{,}6\,\mu_I(0)$]. При сильном вырождении уменьшения нет, что на первый взгляд является странным.

Для промежуточных значений вырождения Бейт и др. [90] вычислили зависимость отношения $\mu_I(e-e)/\mu_I(0)$ от приведенной энергии Ферми ζ_n/k_BT; эта зависимость представлена на фиг. 6.31. На верхней шкале приведена концентрация электронов для n-InSb при 80 К. Значительное влияние межэлектронного взаимодействия имеется при $n < 10^{17}$ см$^{-3}$, где $\zeta_n < 7 < k_BT$. При малых концентрациях электронов полярное оптическое рассеяние преобладает над рассеянием на ионизованных примесях, и следует учитывать влияние межэлектронного рассеяния на скорость полярного оптического рассеяния. При еще меньших концентрациях ($n < 10^{14}$ см$^{-3}$) влияние межэлектронного рассеяния, которое пропорционально n, становится ничтожно малым. [В случае комбинации рассеяния на ионизованных примесях и межэлектронного рассеяния это не совсем так

(фиг. 6.31), поскольку рассеяние на ионизованных примесях тоже пропорционально n, если $N_I = n$, и отношение $\mu_I(e - e)/\mu_I(0)$ становится не зависящим от n.] Влияние межэлектронного рассеяния еще меньше, если преобладает рассеяние на акустическом деформационном потенциале. В n-Ge, содержащем $6{,}1 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ неглубоких доноров, максимальное изменение (до 0,94) ожидается при температуре 35 К [94].



Фиг. 6.31. Поправка, обусловленная межэлектронным рассеянием, к подвижности, определяемой рассеянием на ионизованных примесях [90].

На нижней оси абсцисс отложены значения приведенной энергии Ферми, на верхней — концентрации электронов в случае непараболической зоны проводимости InSb при 80 К.

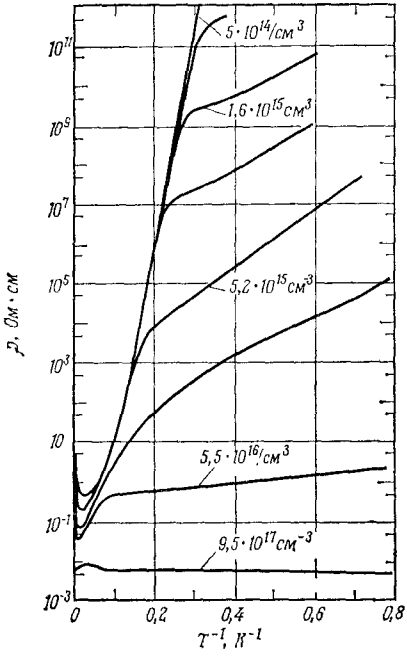
В собственном полупроводнике электронно-дырочное рассеяние может влиять на подвижность носителей обоих знаков. Когда исследуются горячие носители, это рассеяние стремится выравнять температуры электронов и дырок.

§ 14. Проводимость по примесной зоне и механизм перескоков

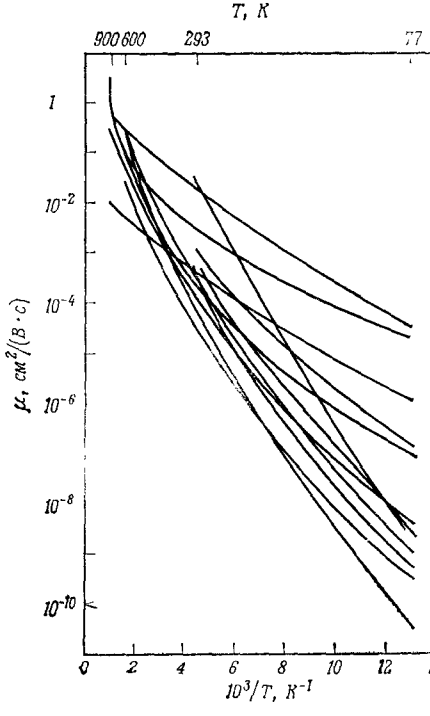
В сильно легированном полупроводнике примесные состояния уже нельзя считать локализованными. С увеличением концентрации примесей среднее расстояние между соседними атомами примеси уменьшается, а уровни примесей сливаются в зону, подобно образованию зон в кристалле в приближении сильной связи (гл. 2, § 3), с тем различием, что распределение примесей случайно. (Рассеяние на кластерах [95] мы не будем рассматривать.) Эти зоны заполнены лишь частично, и можно ожидать возникновения металлической проводимости. Поскольку атомы примеси находятся все же относительно далеко друг от друга, образовавшаяся зона является узкой; поэтому эффективная масса носителей велика, а подвижность в примесной зоне мала. В этом отношении проводимость по примесной зоне сравнима с проводимостью плохих металлов.

В германии n-типа проводимость по примесной зоне преобладает только при низких температурах [96], что иллюстрирует

фиг. 6.32. В случае кривой, соответствующей содержанию примесей $5 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, обычная проводимость и вымораживание носителей сохраняются при наибольшем удельном сопротивлении. Если легирование сильнее, то наклон кривой при переходе



Фиг. 6.32. Зависимость удельного сопротивления n-Ge, легированного Sb, от обратной температуры [96].



Фиг. 6.33. Температурная зависимость подвижности для различных образцов бора, легированных углеродом [97].

к проводимости по примесной зоне уменьшается. При этом коэффициент Холла значительно уменьшается (кроме случая очень сильного легирования $>10^{18}$ см$^{-3}$) и перестает зависеть от температуры при понижении последней даже до 2 К.

На фиг. 6.33 показана зависимость подвижности носителей от температуры в образцах сильно легированного бора [97]. При повышении температуры подвижность увеличивается по экспоненциальному закону со средней энергией активации 0,1 эВ. Такая закономерность характерна не столько для какой-либо металлической проводимости, сколько для «механизма перескоков»: считается, что носители перескакивают от одного атома

примеси к другому, соседнему, преодолевая потенциал кулоновского взаимодействия за счет тепловой энергии.

Представление о перескоках подтверждается в аналогичных случаях исследованиями частотных характеристик, согласно которым проводимость увеличивается при повышении частоты [98]. Было найдено, что в области частот ν от 10^2 до 10^5 Гц и в интервале температур от 1 до 20 К проводимость сильно легированного кремния n-типа изменяется пропорционально $\nu^{0,74}$, ..., $\nu^{0,79}$. Перескок является статистическим процессом, и его вероятность равна $\int G(\tau)\exp(-t/\tau)\,d\tau$, где τ — среднее время между двумя перескоками, а $G(\tau)$ — весовой множитель. Тогда после преобразования Лапласа частотная характеристика проводимости принимает вид [1])

$$\operatorname{Re}\sigma \sim \int_0^\infty G(\tau)\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\,d\tau. \qquad (6.14.1)$$

Если $G(\tau)$ имеет пик при $\tau \ll 1/\omega$, то проводимость пропорциональна ω^2; в случае когда $1/\omega \ll \tau$, проводимость не зависит от частоты. Если подобрать соответствующим образом функцию $G(\tau)$, то формально можно объяснить возникновение любого показателя степени для ω от 0 до 2 в определенном интервале частот. Более строгое рассмотрение в применении к аморфным полупроводникам провели Остин и Мотт [99].

§ 15. Рассеяние на дислокациях

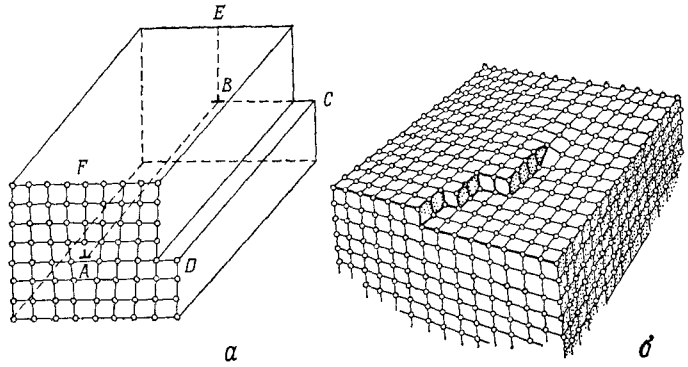
Дислокация в кристаллической решетке принадлежат к одному из двух типов, показанных на фиг. 6.34; это краевая и винтовая дислокации [100, 101]. При образовании краевой дислокации сетка атомов смещается поперек линии дислокации AB (вектор скольжения BC); в винтовой дислокации вектор скольжения параллелен линии дислокации. Краевая дислокация образует глубокие уровни в германии и других полупроводниках [103]. Считается, что эти уровни связаны с блуждающими связями, которые играют роль акцепторов. Однако эксперименты показали, что они могут быть заполнены как электронами, так и дырками [104]. Нет единого мнения об энергии уровней даже в наиболее исследованном полупроводнике — германии n-типа.

---

[1]) Эквивалентная цепь состоит из последовательно соединенных конденсатора C и резистора R. После приложения постоянного напряжения ток возникает сразу, а потом уменьшается со временем по закону $\exp(-t/\tau)$, где $\tau = RC$. Сопротивление переменному току равно $R + 1/i\omega C$, а действительная часть проводимости равна $R^{-1}\omega^2\tau^2/(1+\omega^2\tau^2)$.

В работе [105] наряду с уровнями обсуждается зона уровней, связанных с дислокациями.

Рид [106] сделал предположение, что линии дислокации заряжены и окружены цилиндрами объемного заряда. Носители, движущиеся под углом θ к цилиндрам, отклоняются, и их подвижность уменьшается. Из простой механической модели, учитывающей зеркальное отражение от поверхности непроницаемых цилиндров, следует, что средняя длина свободного пробега



Фиг. 6.34. Схематическое расположение атомов в кристалле, содержащем краевую (*а*) и винтовую (*б*) дислокации [102].

$l = 3/(8NR)$, где R — радиус цилиндра, а N — число дислокаций на единицу площади. Вероятность рассеяния τ_m^{-1} предполагается равной $(v/l)\sin\theta$, где v — скорость носителя, и эта вероятность складывается с вероятностью рассеяния на колебаниях решетки. Дальнейшее уменьшение подвижности связано с уменьшением площади поперечного сечения кристалла, доступной для электронов проводимости, вследствие наличия непроницаемых цилиндров.

Позднее Бонч-Бруевич и Коган [107] предложили более удовлетворительный метод. Они решили уравнение Пуассона в цилиндрических координатах x, r и φ для потенциала $V(r)$:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{e(n-n_0)}{\varkappa\varkappa_0} =$$

$$= n_0\left[\exp\left(\frac{eV}{k_BT}\right) - 1\right]\frac{e}{\varkappa\varkappa_0} \approx \frac{n_0e^2V}{\varkappa\varkappa_0 k_BT} = \frac{V}{L_D^2}, \qquad (6.15.1)$$

где n_0 — концентрация носителей вдали от цилиндра объемного заряда, а L_D — дебаевская длина экранирования (5.2.24). Из сопоставления (6.15.1) и (2.1) (приложение 2) следует, что $V = AK_0(r/L_D)$, где A — некоторая постоянная и K_0 — модифи-

цированная функция Бесселя нулевого порядка. Если Q — линейная плотность заряда на линии дислокации, а $\mathbf{E} = -\nabla_r V = AK_1/L_D$ — напряженность электрического поля, то с учетом (2.9), (2.13) и (2.17) получаем

$$\frac{Q}{\varkappa\varkappa_0} = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{d(rE)}{dr} 2\pi r\, dr = 2\pi r E\Big|_0^\infty = 2\pi A. \qquad (6.15.2)$$

Отсюда

$$V(r) = \frac{Q}{2\pi\varkappa\varkappa_0} K_0\left(\frac{r}{L_D}\right). \qquad (6.15.3)$$

Рассматривая этот случай цилиндрической симметрии так же, как случай сферической симметрии (гл. 6, § 2), Педер [108, 109] вычислил дифференциальное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta) = \frac{2\pi m^2 e^2}{\hbar^4 k_t}\left\{\int_0^\infty V(r) I_0\left(2k_t r \sin\frac{\theta}{2}\right) r\, dr\right\}^2 =$$

$$= \frac{m^2 e^4 f^2}{32\pi\hbar^4\varkappa^2\varkappa_0^2 k_t^5 a^2}\frac{1}{\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{\beta^2}\right]^2} \qquad (6.15.4)$$

и обратное время релаксации импульса

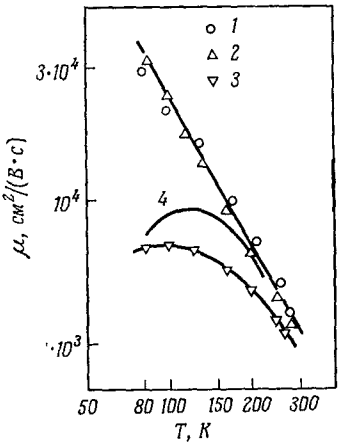
$$\tau_m^{-1} = N v_t \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\,\sigma(\theta)\,d\theta = \frac{Ne^4 f^2 L_D}{8\varkappa^2\varkappa_0^2 a^2 m^2}\left(v_t^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2 L_D^2}\right)^{-3/2}, \qquad (6.15.5)$$

где k_t и v_t — компоненты $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$, перпендикулярные линии дислокации; $I_0(t)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; a — расстояние между центрами на линии дислокации и f — вероятность их заполнения ($Q = ef/a$). Пренебрегая при высоких температурах вторым членом в скобках, для подвижности в невырожденном электронном газе получаем

$$\mu_0 = \frac{30\sqrt{2\pi}\,\varkappa^2\varkappa_0^2 a^2}{e^3 f^2 L_D\sqrt{m}}\frac{(k_B T)^{3/2}}{N}. \qquad (6.15.6)$$

Кривая *1* на фиг. 6.35 показывает температурную зависимость $(1/\mu + 1/\mu_l)^{-1}$, где μ_l — подвижность при рассеянии на колебаниях решетки, при $N = 10^7$ см$^{-2}$, $\varkappa = 16$, $m = 0{,}3m_0$ и $a = 3{,}5$ Å. Прямая изображает $\mu(T)$ для недеформированного образца ($N = 4\cdot 10^3$ см$^{-2}$), а нижняя кривая — для изогнутого образца. Концентрация дислокаций N вычислена из радиуса кривизны. Совпадение нижней кривой и кривой *1* удовлетворительное.

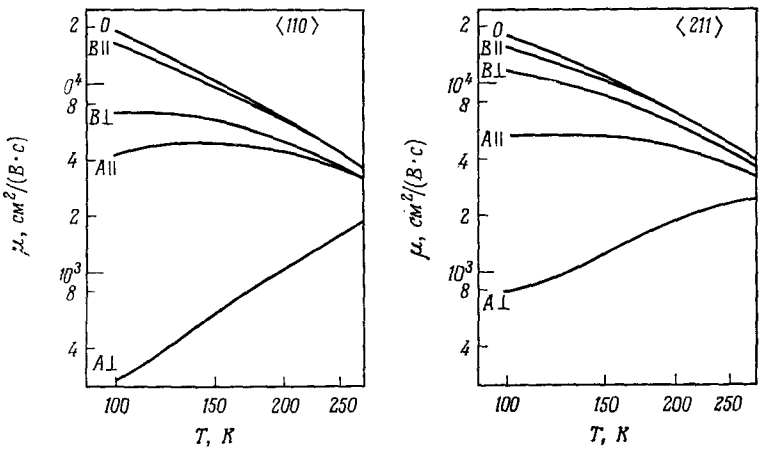
Хотя это специально не указано, но можно считать, что при исследованиях образец рассматривался как одно целое. Ван Веерен и др. [110] показали, что пластинки B, вырезанные из участка изогнутого образца, близкого к нейтральной плоскости, характеризуются иной подвижностью, нежели пластинки A, расположенные выше или ниже нейтральной плоскости; подвижность также различна в кристаллах, изогнутых вокруг направления ⟨110⟩ и направ-



Фиг. 6.35. Подвижность электронов в n-Ge [109].

1—до изгиба и термической обработки; *2*—после термической обработки; *3*—после изгиба; *4*—расчет для изогнутого образца.

ления ⟨211⟩, и, конечно, она зависит от ориентации измерения относительно оси изгиба. Все эти случаи иллюстрируются на



Фиг. 6.36. Холловская подвижность в n-Ge до и после изгиба при 1103 К вокруг осей ⟨110⟩ (слева) и ⟨211⟩ (справа) [110].

фиг. 6.36. Как и следовало ожидать, вольтамперные характеристики в случае горячих носителей различны для направлений вдоль и поперек линии дислокации [111].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968, p. 110. (Имеется перевод: *Л. Шифф*, Квантовая механика, ИЛ, М., 1959.)
2. *Massey H. S. W., Burhop E. N. S.*, Electronic and Ionic Impact Phenomena, Clarendon, Oxford, Vol. 1, 1969, Ch. 6.3.
3. *Ramsauer C.*, Ann. Phys., **64**, 513 (1921).
4. *Ramsauer C.*, Ann. Phys., **66**, 545 (1921).
5. *Erginsoy C.*, Phys. Rev., **79**, 1013 (1950).
6. *Koenig S. H., Brown R. D., Schillinger W.*, Phys. Rev., **128**, 1668 (1962).
7. *Otsuka E., Murase K., Iseki J.*, Journ. Phys. Soc. Japan, **21**, 1104 (1966).
8. *Schwartz C.*, Phys. Rev., **124**, 1468 (1961).
9. *Rotenberg M.*, Ann. Phys., **19**, 262 (1962).
10. *Pomerantz M.*, Proc. IEEE, **53**, 1438 (1965).
11. *Fermi E.*, Nuclear Physics, Univ. Chicago Press, Chicago, 1950, p. 142.
12. *Adler R. B., Smith A. C., Longini R. L.*, Introduction to Semiconductor Physics, Sec. 1.5.3 and 3.3, Wiley, New York, 1964.
13. *Brooks H.* в книге Advances in Electronics and Electron Physics (ed. L. Marton), Vol. 7, Acad. Press Inc., New York, 1955, p. 85.
14. *Brooks H.*, Phys. Rev. **83**, 879 (1951).
15. *Conwell E., Weisskopf V. F.*, Phys. Rev., **77**, 388 (1950).
16. *Blatt F. J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **1**, 262 (1957).
17. *Blatt F. J.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 4, Acad. Press, New York, 1957, p. 199.
18. *Long D., Motchenbacher C. D., Myers J.*, Journ. Appl. Phys., **30**, 353 (1959).
19. *Bardeen J., Schockley W.*, Phys. Rev., **80**, 72 (1950).
20. *Peierls R.*, Ann. Phys. (Leipzig) (5), **12**, 154 (1932).
21. *Wilson A. H.*, The Theory of Metals, Cambridge Univ. Press, London, 1965, p. 255, 298.
22. *Greene R. F.*, Journ. Electronics and Control, **3**, 387 (1957).
23. *Shockley W.*, Bell Syst. Techn. Journ., **30**, 990 (1951).
24. *Schmidt-Tiedemann K. J.* в книге Festkörperprobleme (Hrg. F. Sauter), Bd. I, Vieweg, Braunschweig, 1962, S. 122.
25. *Debye P. P., Conwell E. M.*, Phys. Rev., **93**, 693 (1954).
26. *Sodha M. S.*, Phys. Rev., **107**, 1266 (1957).
27. *Seeger K.*, Zs. Phys., **156**, 582 (1959).
28. *Seeger K.*, Zs. Phys., **244**, 439 (1971).
29. *Gunn J. B.*, Journ. Phys. Chem. Solids **8**, 239 (1959).
30. *Tschulena G.*, Acta Phys. Austr., **33**, 42 (1971).
31. *Conwell E. M.*, Phys. Rev., **90**, 769 (1953).
32. *Adawi I.*, Phys. Rev., **120**, 118 (1960).
33. *Kuchar F., Philipp A., Seeger K.*, Solid State Commun., **11**, 965 (1972).
34. *Tschulena G., Keil R.*, Phys. Stat. Sol., **49**, 191 (1972).
35. *Heinrich H., Jantsch W.*, Solid State Commun., **7**, 377 (1969).
36. *Tyler W. W., Woodbury H. H.*, Phys. Rev., **102**, 647 (1956).
37. *Brown D. M., Bray R.*, Phys. Rev., **127**, 1593 (1962).
38. *Eagles P. M., Edwards D. M.*, Phys. Rev., **138**, A1706 (1965).
39. *Herring C., Vogt E.*, Phys. Rev., **101**, 944 (1956).
40. *Hutson A. R.*, Journ. Appl. Phys., **32**, Suppl., 2287 (1961).
41. *Meyer H. J. G., Polder D.*, Physica, **19**, 255 (1953).
42. *Коган С. М.*, ФТТ, **4**, 2474 (1962).
43. *Cowley R. A.* в книге Modern Solid State Physics (eds. R. H. Enns, R. R. Haering), Vol. 2, Gordon and Breach, New York, 1969, p. 43.
44. *Kothari L. S., Singwi K. S.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 8, Acad. Press, New York, 1969, p. 108.

45. *Pelah I., Eisenhauer C. M., Hughes D. J., Palevsky H.*, Phys. Rev. **108**, 1091 (1957).
46. *Brockhouse B. N., Palevsky H., Hughes D. J., Kley W., Tunkelo E.*, Phys. Rev. Letters, **2**, 258 (1959).
47. *Brockhouse B. N., Iyengar P. K.*, Phys. Rev., **111**, 747 (1958).
48. *Dolling G., Waugh J. L. T.*, Lattice Dynamics (ed. R. F. Wallis), Pergamon Press, London, 1965, p. 19.
49. *Lyddane R. H., Sachs R. G., Teller E.*, Phys. Rev., **59**, 673 (1941).
50. *Born M., Huang K.*, Dynamical Theory of Crystal Lattices, Clarendon Press., Oxford, 1954, p. 82. (Имеется перевод: *М. Борн, Хуан Кунь*, Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ., М., 1958.)
51. *Callen H. B.*, Phys. Rev., **76**, 1394 (1949).
52. *Szigeti B.*, Trans. Faraday Soc., **45**, 155 (1949).
53. *Beer A. C.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Suppl. 4, Acad. Press, New York, 1963, p. 286.
54. *Stratton R.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A246**, 406 (1958).
55. *Stratton R.*, Journ. Phys. Soc. Japan, **17**, 590 (1962).
56. *Conwell E. M.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull, H. Ehrenreich), Suppl. 9, Acad Press., New York, 1967. (Имеется перевод: *Э. Конуэлл*, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, «Мир», М., 1970.)
57. *Meyer H. J. G.*, Phys. Rev., **112**, 298 (1958).
58. *Harrison W. A.*, Phys. Rev., **104**, 1281 (1956).
59. *Hess K., Seeger K.*, Zs. Phys., **218**, 431 (1969).
60. *Hess K., Seeger K.*, Zs. Phys,. **237**, 252 (1970).
61. *Hess K.*, Thesis,, Univ. Wien, Austria, 1970.
62. *Morgan T. N., Kelly C. E.*, Phys. Rev,. **137**, A1573 (1965).
63. *Seeger K.*, Zs. Phys., **172**, 68 (1963).
64. *Gibson A. F., Granville J. W., Paige E. G. S.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **19**, 198 (1961).
65. *Morgan T. N.*, Bull. Am. Phys. Soc. (Ser. 2), **2**, 265 (1959).
66. *Morgan T. N.*, Journ. Phys. Chem Solids, **8**, 245 (1959).
67. *Howarth D. J., Sondheimer E. H.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A219**, 53 (1953).
68. *Ehrenreich H.*, Journ. Appl. Phys., **32**, Suppl., 2155 (1961).
69. *Conwell E. M.*, Phys. Rev., **143**, 657 (1966).
70. *Hess K., Kahlert H.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **32**, 2262 (1971).
71. *Bauer G., Kahlert H.*, Phys. Rev., **B5**, 566 (1972).
72. *Fröhlich H., Paranjape B. V.*, Proc. Phys. Soc. (London), **B69**, 21 (1956).
73. *Fröhlich H.*, Proc. Roy. Soc (London), **A160**, 230 (1937).
74. *Fröhlich H.*, Adv. Physics, **3**, 325 (1961).
75. *Kurosawa T.*, Proc. 8th Intern. Conf. Semicond. Physics, The Physical Soc. Japan, Tokyo, 1966 [Journ. Phys. Soc. Japan, **21**, Suppl., 424 (1966)].
76. *Fawcett W., Boardmann A. D., Swain S.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **31**, 1963 (1970).
77. *Budd H.*, Proc. 8th Intern. Conf. Semicond. Physics, The Physical Soc. Japan, Tokyo, 1966 [Journ. Phys. Soc. Japan, **21**, Suppl., 420 (1966)].
78. *Rees H. D.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **30**, 643 (1969).
79. *Rees H. D.*, IBM Journ. Res. Develop., **13**, 537 (1969).
80. *Seeger K., Pötzl H.*, Acta Phys. Austr., Suppl. X, 341 (1973); Springer, Wien — New York, 1973.
81. *Zimmerl O.*, Thesis, T. H. Wien, 1972.
82. *Kittel C.*, Quantum Theory of Solids, Wiley, New York, 1963, p. 137. (Имеется перевод: *Ч. Киттель*, Квантовая теория твердых тел, «Наука», М., 1967.)
83. *Larsen D. M.*, Phys. Rev., **135**, A419 (1964).
84. *Larsen D. M.*, Phys. Rev., **144**, 697 (1966).

85. *Larsen D. M., Johnson E. J.*, Proc. 8th Intern. Conf. Semicond. Physics, The Physical Soc. Japan, Tokyo, 1966, p. 443 [Journ. Phys. Soc. Japan, **21**, Suppl., 443 (1966)].
86. *Mikkor M., Brown F. C.*, Phys. Rev., **162**, 848 (1967).
87. *Hodby J. W., Borders J. A., Brown F. C.*, Journ. Phys., **C3**, 335 (1970).
88. *Ehrenreich H.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8**, 130 (1959).
89. *Appel J.*, Phys. Rev., **122**, 1760 (1961).
90. *Bate R. T., Baxter R. D., Reid F. J., Beer A. C.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **26**, 1205 (1965).
91. *Kohler M.*, Zs. Phys., **124**, 772 (1948).
92. *Kohler M.*, Zs. Phys. **125**, 679 (1949).
93. *Sondheimer E. H.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A203**, 75 (1950).
94. *McLean T. P., Paige E. G. S.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **16**, 220 (1960).
95. *Weisberg L. R.*, Journ. Appl. Phys,, **33**, 1817 (1962).
96. *Fritzsche H.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **6**, 69 (1958).
97. *Klein W., Geist D.*, Zs. Phys., **201**, 411 (1967).
98. *Pollak M., Geballe T. H.*, Phys. Rev., **122**, 1742 (1961).
99. *Austin I. G., Mott N. F.*, Advan. Phys., **18**, 14 (1969).
100. *Friedel J.*, Dislocations, Pergamon, Oxford, 1964. (Имеется перевод: Ж. Фридель, Дислокации, «Мир», М., 1967.)
101. *Amelincks S.* в книге Solids State Physics (eds F. Seitz, D. Turnbull), Suppl. 6, Acad. Press, New York, 1964. (Имеется перевод: С. Амелинкс, Методы прямого наблюдения дислокаций, «Мир», М., 1968.)
102. *McKelvey J. P.*, Solid-State and Semiconductor Physics, Harper and Row, New York, 1966.
103. *Pearson G. L., Read W. T., Morin F. J.*, Phys. Rev., **93**, 666 (1954).
104. *Schröter W.*, Phys. Stat. Sol., **21**, 211 (1967).
105. *Schröter W., Labusch R.*, Phys. Stat. Sol., **36**, 539 (1969).
106. *Read W. T., Jr.*, Phil. Mag., **46**, 111 (1955).
107. *Бонч-Бруевич В. Л., Коган С. М.*, ФТТ, **1**, 1221 (1959).
108. *Pödör B.*, Acta Physica Acad. Sci. Hung., **23**, 393 (1967).
109. *Pödör B.*, Phys. Stat. Sol., **16**, K167 (1966).
110. *van Weeren J. H. P., Struikmans R., Blok J.*, Phys. Stat. Sol., **19**, K107 (1967).
111. *Gibson A. F.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8**, 147 (1959).

Глава 7. ПЕРЕНОС ЗАРЯДА И ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ В МНОГОДОЛИННОЙ МОДЕЛИ

В гл. 2, § 4 (фиг. 2.27 и 2.28), мы видели, что изоэнергетические поверхности в зоне проводимости для германия имеют вид восьми полуэллипсоидов, а для кремния — шести эллипсоидов вращения. Соответственно этому в германии имеются четыре энергетические долины, а в кремнии — шесть. В этих и многих других полупроводниках многодолинная модель энергетических зон оказалась плодотворной при описании наблюдаемой анизотропии электрических и оптических явлений. Циклотронный резонанс (гл. 11, § 11) обеспечивает возможность прямого экспериментального определения эффективной массы в каждой долине для каждого кристаллографического направления.

В настоящей главе мы рассчитаем наиболее важные гальваномагнитные эффекты в многодолинной модели энергетических зон, рассмотрим междолинные переходы и наконец коснемся доменов сильного поля и акустоэлектрической неустойчивости, причем последнюю рассмотрим также в случае пьезоэлектрической связи в однодолинной модели, так как метод расчета аналогичен применяемому в случае междолинной связи в неполярных многодолинных полупроводниках.

§ 1. Тензор деформационного потенциала

Уравнения (6.4.5) и (6.4.6) определяют постоянную акустического деформационного потенциала ε_{ak}, которая для кристаллов представляет собой тензор. Рассмотрим сначала в общем виде шесть компонент деформации в кристалле [1]. В недеформированном кристалле мы используем прямоугольную систему координат с единичными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. При небольшой деформации эти векторы смещаются. Смещенные единичные векторы обозначим $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, причем начало координат возьмем в той же точке решетки, что и до деформации. Тогда смещение представляет собой просто поворот, описываемый следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= (1+\varepsilon_{xx})\,\mathbf{a} + \varepsilon_{xy}\mathbf{b} + \varepsilon_{xz}\mathbf{c}, \\ \mathbf{b}' &= \varepsilon_{yx}\mathbf{a} + (1+\varepsilon_{yy})\,\mathbf{b} + \varepsilon_{yz}\mathbf{c}, \\ \mathbf{c}' &= \varepsilon_{zx}\mathbf{a} + \varepsilon_{zy}\mathbf{b} + (1+\varepsilon_{zz})\,\mathbf{c}, \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

где предполагается, что ε_{xx}, ε_{xy} и т. д. — малые величины, а их произведения пренебрежимо малы. Поэтому косинусы углов

между $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$, $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{a}'$, обозначаемые e_4, e_5 и e_6, задаются следующими выражениями:

$$e_4 = (\mathbf{a}'\mathbf{b}') = \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy}, \quad e_5 = (\mathbf{b}'\mathbf{c}') = \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz}, \quad e_6 = (\mathbf{c}'\mathbf{a}') = \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz}. \tag{7.1.2}$$

Вводя обозначения

$$e_1 = \varepsilon_{xx}, \quad e_2 = \varepsilon_{yy}, \quad e_3 = \varepsilon_{zz}, \tag{7.1.3}$$

имеем все шесть компонент деформации, которые уже были использованы в (4.12.4). Единичный объем ($V = 1$) призмы, имеющей ребра $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, в результате деформации становится равным

$$1 + \delta V = (\mathbf{a}'[\mathbf{b}'\mathbf{c}']) \approx 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 1 + e_1 + e_2 + e_3. \tag{7.1.4}$$

Следовательно, изменение объема определяется выражением

$$\delta V/V = e_1 + e_2 + e_3. \tag{7.1.5}$$

Сдвиг материальной точки, обусловленный деформацией, можно описать в системе координат $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с помощью коэффициентов u, v, w:

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}. \tag{7.1.6}$$

С другой стороны, $\mathbf{r}' = x\mathbf{a}' + y\mathbf{b}' + z\mathbf{c}'$ и $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, поэтому из (7.1.1) получаем

$$\begin{aligned} u &= x\varepsilon_{xx} + y\varepsilon_{yx} + z\varepsilon_{zx}, \\ v &= x\varepsilon_{xy} + y\varepsilon_{yy} + z\varepsilon_{zy}, \\ w &= x\varepsilon_{xz} + y\varepsilon_{yz} + z\varepsilon_{zz}. \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Каждый из шести коэффициентов e_1, e_2, ..., e_6, заданных уравнениями (7.1.2) и (7.1.3), можно теперь представить с помощью производных $\partial u/\partial x$ и т. д.:

$$e_1 = \partial u/\partial x, \quad e_2 = \partial v/\partial y, \quad e_3 = \partial w/\partial z, \quad e_4 = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y, \quad e_5 = \partial w/\partial y + \partial v/\partial z, \quad e_6 = \partial u/\partial z + \partial w/\partial x. \tag{7.1.8}$$

Вызванное деформацией смещение, например края зоны проводимости $\Delta\varepsilon_c$ в данной долине, можно разложить в ряд Тейлора:

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} e_1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{yy}} e_2 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{zz}} e_3 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}} e_4 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{yz}} e_5 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xz}} e_6 + \ldots. \tag{7.1.9}$$

Направим ось x системы координат вдоль оси вращения эллипсоидальной изоэнергетической поверхности и введем две

постоянные [2]

$$\Xi_d = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{yy}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{zz}}\right),$$
$$\Xi_u = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{xx}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{yy}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{zz}}\right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon'_{xx}} - \Xi_d, \tag{7.1.10}$$

где компоненты деформации в системе координат, связанной с эллипсоидом, обозначены через ε'_{ii}. Покажем, что Ξ_u есть постоянная деформационного потенциала в случае деформации сдвига вдоль оси симметрии долины, а $\Xi_d + {}^1/_3\Xi_u$ — постоянная деформационного потенциала в случае растяжения.

Рассмотрим сначала долину, расположенную вдоль оси $\langle 111\rangle$ в зоне проводимости германия. Из соображений симметрии [3] следует, что $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xx} = \partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{yy} = \partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{zz}$ и $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xy} = \partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xz} = \partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{yz}$. Таким образом, мы получаем

$$\Delta\varepsilon_c = (\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xx})(e_1 + e_2 + e_3) + (\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xy})(e_4 + e_5 + e_6) + \ldots. \tag{7.1.11}$$

Поворот оси x до совпадения с осью симметрии эллипсоида можно описать матрицей

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{7.1.12}$$

Следовательно, тензор ε, компоненты которого суть ε_{xx}, ε_{xy}, ..., связан с тензором ε' с компонентами ε'_{xx}, ε'_{xy}, ... преобразованием

$$\varepsilon = D_1^{-1}\varepsilon' D_1. \tag{7.1.13}$$

Расчет суммы $e_4 + e_5 + e_6$ с учетом этого соотношения дает

$$e_4 + e_5 + e_6 = 2\varepsilon'_{xx} - \varepsilon'_{yy} - \varepsilon'_{zz} = 2e'_1 - e'_2 - e'_3. \tag{7.1.14}$$

Сумма $e_1 + e_2 + e_3$ получается на основе того факта, что расширение (7.1.4) инвариантно относительно преобразования координат:

$$e_1 + e_2 + e_3 = e'_1 + e'_2 + e'_3. \tag{7.1.15}$$

Последние два уравнения дают

$$\Delta\varepsilon_c = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} + 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}}\right)e'_1 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}}\right)(e'_2 + e'_3). \tag{7.1.16}$$

В системе координат, связанной с главными осями, по определению

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{xx}} e'_1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{yy}} e'_2 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{zz}} e'_3. \qquad (7.1.17)$$

Вследствие вращательной симметрии $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon'_{zz} = \partial\varepsilon/\partial\varepsilon'_{yy}$. Сравнивая (7.1.16) и (7.1.17), получаем

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} + 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{xx}}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{yy}}. \qquad (7.1.18)$$

Согласно определению (7.1.10), находим

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{xx}} = \Xi_u + \Xi_d, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon'_{yy}} = \Xi_d. \qquad (7.1.19)$$

Решая уравнения (7.1.18) относительно $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{xx}$ и $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{yy}$, получаем

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}} = \Xi_d + \frac{1}{3}\Xi_u, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xy}} = \frac{1}{3}\Xi_u. \qquad (7.1.20)$$

Окончательно для $\Delta\varepsilon_c$ получаем

$$\Delta\varepsilon_c = \left(\Xi_d + \frac{1}{3}\Xi_u\right)(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{1}{3}\Xi_u (e_4 + e_5 + e_6). \qquad (7.1.21)$$

В случае гидростатического давления $e_4 + e_5 + e_6 = 0$ и $\Delta\varepsilon_c \sim$ $\sim \delta V/V$, где коэффициент пропорциональности имеет вид

$$\varepsilon_{\text{ак}} = \Xi_d + \frac{1}{3}\Xi_u. \qquad (7.1.22)$$

Экспериментальные значения Ξ_u, полученные из пьезосопротивления или из акустоэлектрического эффекта в германии n-типа, находятся между 15,8 и 19,3 эВ. Положительный знак Ξ_u означает, что при одноосном сжатии энергия долины $\langle 111\rangle$ уменьшается по отношению к трем остальным долинам. Величина Ξ_u зависит от температуры. Выше 60 К она увеличивается с температурой и достигает 21 эВ при 100 К [4]. При 77 К отношение Ξ_d/Ξ_u составляет около —0,38 согласно Херрингу и Фогту [3] и —0,45 согласно Смиту [5]. Рассчитанные по этим данным значения $\Xi_d + {}^1/_3\Xi_u$ равны —0,88 и —1,8 эВ. Гидростатическое давление 30 000 кг/см^2 повышает минимумы $\langle 111\rangle$ линейно на 0,03 эВ, в то время как долины $\langle 100\rangle$ понижаются настолько, что оба типа долин оказываются на одном и том же уровне энергии. Центральная долина при $\mathbf{k} = 0$, которая в отсутствие давления находится на 0,15 эВ выше долин $\langle 111\rangle$, повышается на 0,21 эВ при давлении 30 000 кг/см^2 [1]).

[1]) См. стр. 158 и фиг. 36 в работе [6].

В кремнии наиболее низко расположенные долины находятся на оси ⟨100⟩ и эквивалентных осях. Для долины ⟨100⟩ преобразования координат не требуется, и благодаря симметрии $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon_{zz} = \partial\varepsilon/d\varepsilon_{yy}$, $d\varepsilon/\partial\varepsilon_{xy} = 0$ и т. д., поэтому

$$\Delta\varepsilon_c = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}}\right) e_1 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{yy}}\right)(e_2 + e_3). \tag{7.1.23}$$

Так как $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx}$ и т. д., из (7.1.10) получаем

$$\Xi_d = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{yy}}, \quad \Xi_d + \Xi_u = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon_{xx}}. \tag{7.1.24}$$

Таким образом,

$$\Delta\varepsilon_c = \Xi_d (e_1 + e_2 + e_3) + \Xi_u e_1 =$$

$$= \left(\Xi_d + \frac{1}{3}\Xi_u\right)(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{1}{3}\Xi_u [(e_1 - e_2) + (e_1 - e_3)]. \tag{7.1.25}$$

Величина $\Delta\varepsilon_c$ для других долин получается путем преобразования координат.

Экспериментальные значения Ξ_u для кремния находятся между 8,5 и 9,6 эВ. Постоянная деформационного потенциала $\Xi_d \ll \Xi_u$, но достоверно не известна [7, 8].

§ 2. Электропроводность

Рассмотрим сначала ρ-ю долину, расположенную в k-пространстве в точке $\mathbf{k}_\rho$. Пусть три ее главные оси параллельны осям координат. Эффективные массы в направлениях осей обозначим m_1, m_2 и m_3. Удобно ввести тензор обратной массы с диагональными элементами $\alpha_{ii} = m_\sigma/m_i$, где эффективная масса электропроводности m_σ определена формулой (7.2.19). Энергия носителей

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m_\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\rho)\,\alpha\,(\mathbf{k} - \mathbf{k}_\rho). \tag{7.2.1}$$

Так как тензор α диагональный, то это выражение упрощается и принимает вид

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m_\sigma} w^2, \tag{7.2.2}$$

где вектор $\mathbf{w}$ имеет компоненты

$$w_i = \sqrt{\alpha_{ii}}\,(k_i - k_{\rho i}). \tag{7.2.3}$$

Этим преобразованием эллипсоидальные поверхности в k-пространстве сводятся к сферическим поверхностям в w-пространстве [3].

В электрическом поле $\mathbf{E}$ и магнитном поле $\mathbf{B}$ распределение $f(\mathbf{k})$ носителей определяется уравнением Больцмана в приближении времени релаксации:

$$\frac{e}{\hbar}\left(\mathbf{E}+\hbar^{-1}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\mathbf{B}]\right)\nabla_{\mathbf{k}}f=-\frac{f-f_0}{\tau_m}. \qquad (7.2.4)$$

Поскольку в интегралах по $\mathbf{k}$-пространству $dk_i=dw_i/\sqrt{\alpha_{ii}}$ и $fd^3k=fd^3w/\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}=gd^3w$, можно ввести функцию

$$g=f/\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}, \qquad (7.2.5)$$

которую в случае теплового равновесия обозначим

$$g_0=f_0/\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}. \qquad (7.2.6)$$

Так как $\nabla_{\mathbf{k}}=\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}$, то из (7.2.4), разделив на $\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}$, получаем

$$\frac{e}{\hbar}\left(\mathbf{E}+\hbar^{-1}[\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}\varepsilon\mathbf{B}]\right)\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}g=-\frac{g-g_0}{\tau_m}. \qquad (7.2.7)$$

Введя эффективные напряженности полей

$$E_i^*=\sqrt{\alpha_{11}}\,E_i \quad \text{и} \quad B_i^*=\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{32}/\alpha_{ii}}\,B_i, \qquad (7.2.8)$$

приводим уравнение (7.2.7) к виду (7.2.4). Первый член в (7.2.7) принимает вид

$$\left(\mathbf{E}\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}g\right)=\sum_i E_i\sqrt{\alpha_{ii}}\,\frac{\partial g}{\partial w_i}=\sum_i E_i^*\frac{\partial g}{\partial w_i}=(\mathbf{E}^*\nabla_{\mathbf{w}}g), \qquad (7.2.9)$$

а второй член

$$\begin{aligned}[\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}\varepsilon\mathbf{B}]\sqrt{\alpha}\,\nabla_{\mathbf{w}}g=\\ =\left(\sqrt{\alpha_{22}}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial w_2}B_3-\sqrt{\alpha_{33}}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial w_3}B_2\right)\sqrt{\alpha_{11}}\,\frac{\partial g}{\partial w_1}+\text{цикл. перест.}=\\ =\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial w_2}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,B_3-\frac{\partial\varepsilon}{\partial w_3}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{33}}\,B_2\right)\frac{\partial g}{\partial w_1}+\text{цикл. перест.}=\\ =([\nabla_{\mathbf{w}}\varepsilon\mathbf{B}^*]\,\nabla_{\mathbf{w}}g). \qquad (7.2.10)\end{aligned}$$

При таком преобразовании джоулево тепло не должно изменяться:

$$(\mathbf{jE})=(\mathbf{j}^*\mathbf{E}^*)=(\mathbf{j}^*\sqrt{\alpha}\,\mathbf{E})=(\sqrt{\alpha}\,\mathbf{j}^*\mathbf{E}). \qquad (7.2.11)$$

Отсюда видно, что плотность тока $\mathbf{j}$ преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{j}=\sqrt{\alpha}\,\mathbf{j}^*. \qquad (7.2.12)$$

Тензор проводимости $\sigma_w = \sigma_w(B^*)$ в **w**-пространстве определяется из уравнения

$$\mathbf{j}^* = \sigma_w \mathbf{E}^*. \tag{7.2.13}$$

Умножая это уравнение на $\sqrt{\alpha}$, получаем

$$\mathbf{j} = \sqrt{\alpha}\ \sigma_w \mathbf{E}^* = \sqrt{\alpha}\ \sigma_w \sqrt{\alpha}\ \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \tag{7.2.14}$$

Отсюда видно, как преобразуется σ:

$$\sigma = \sqrt{\alpha}\ \sigma_w \sqrt{\alpha}. \tag{7.2.15}$$

Рассмотрим здесь только область слабых магнитных полей, когда проводимость в сферической долине σ_w определяется формулой (4.3.53) с заменой **B** на **B*** и m на m_σ. Рассмотрим сначала простейший случай отсутствия магнитного поля $\mathbf{B}^* = 0$. Тогда получим

$$\sigma = \alpha\sigma_0 = \alpha \frac{ne^2\langle\tau_m\rangle}{m_\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2.16}$$

В кристалле кубической симметрии проводимость изотропна. В силу симметрии в энергетической зоне должно быть не менее трех анизотропных долин. Если имеются три долины, их большие оси должны быть взаимно перпендикулярны. Перед применением преобразования (7.2.3) каждая из двух других долин должна быть преобразована к положению первой долины, с которой связана система координат. Для этого применяются матрицы

$$D_2 = D_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D_3 = D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.17}$$

и, конечно, единичная матрица D_1. Предположим, что полная концентрация носителей n, входящая в (4.3.40), распределена поровну между тремя долинами ($n/3$ на каждую долину); тогда путем суммирования вкладов всех трех долин в случае изотропного времени релаксации $\langle\tau_m\rangle$ получаем

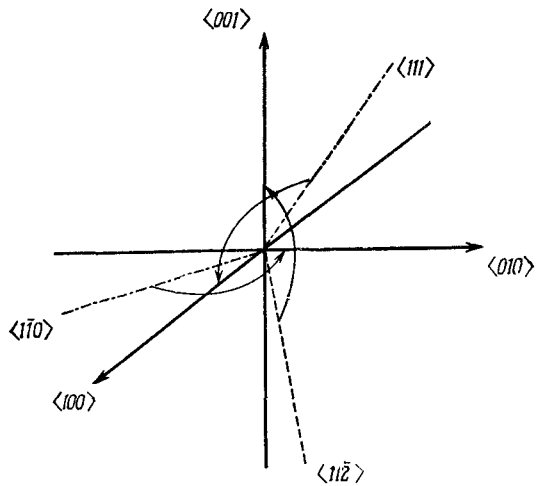
$$\sigma = \frac{1}{3}\sum \alpha_{ii}\sigma_0 = \frac{ne^2\langle\tau_m\rangle}{m_\sigma}\frac{1}{3}\sum \alpha_{ii} = \frac{ne^2\langle\tau_m\rangle}{m_\sigma}. \tag{7.2.18}$$

Для шести долин, таких, как в кремнии, получается тот же результат, что и для модели трех долин. Так как $\alpha_{ii} = m_\sigma/m_i$,

мы можем определить наконец эффективную массу электропроводности m_σ:

$$\frac{1}{m_\sigma} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right), \tag{7.2.19}$$

Эффективная масса электропроводности определяет также массу в любой отдельной долине в направлении, которое симметрично



Фиг. 7.1. Поворот D_1 осей прямоугольной системы координат.

по отношению ко всем долинам; например, для модели трех долин на осях типа ⟨100⟩

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_\sigma} = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2} + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m_3}, \tag{7.2.20}$$

где

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = \frac{k^2}{3}.$$

Определим еще эффективную массу плотности состояний

$$m_D = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3}, \tag{7.2.21}$$

имея в виду, что плотность состояний пропорциональна интегралу $\int d^3k = \int d^3w / \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}$.

Рассмотрим теперь германий, для которого имеются четыре долины, локализованные на диагоналях куба в **k**-пространстве, как показано на фиг. 2.28. Матрицу поворота эллипсоида на оси ⟨111⟩ определяем согласно (7.1.12). На фиг. 7.1 показано преобразование осей к осям ⟨100⟩, ⟨010⟩ и ⟨001⟩, образующим

прямоугольную систему координат. Существенно, что вращение не сопровождается зеркальным отражением, т. е. преобразованием правой системы координат в левую. Матрицы поворота для трех других долин имеют такие же элементы, как D_1, за исключением знаков; поэтому мы выпишем только знаки:

$$D_2=\begin{pmatrix}+&+&-\\+&-&0\\-&-&-\end{pmatrix},\quad D_3=\begin{pmatrix}+&-&+\\+&+&0\\-&+&+\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad D_4=\begin{pmatrix}-&+&+\\+&+&0\\-&+&-\end{pmatrix}. \tag{7.2.22}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ и плотность тока $\mathbf{j}$ преобразуются, конечно, таким же образом, т. е. в уравнении (7.2.14) $\mathbf{j}$ заменяется на $D_\rho\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ на $D_\rho\mathbf{E}$:

$$D_\rho\mathbf{j}=\sqrt{\alpha}\,\sigma_w\sqrt{\alpha}\,D_\rho\mathbf{E}. \tag{7.2.23}$$

Умножение (7.2.23) на D_ρ^{-1} приводит к уравнению $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, где

$$\sigma=D_\rho^{-1}\sqrt{\alpha}\,\sigma_w\sqrt{\alpha}\,D_\rho. \tag{7.2.24}$$

Если $B=0$, то тензор σ_w диагонален и $\sqrt{\alpha}\,\sigma_w\sqrt{\alpha}=\sigma_0\alpha$. Введем следующие обозначения: m_l — эффективная масса в направлении большой оси эллипсоида вращения, m_t — эффективная масса в направлении перпендикулярной оси, $K=m_l/m_t$ — фактор анизотропии [1]), $\lambda=(K-1)/(2K+1)$ и матрицы

$$D_\rho^{-1}\alpha D_\rho=\Lambda_\rho, \tag{7.2.25}$$

где, например, матрица Λ_1 может быть представлена в виде

$$\Lambda_1=\frac{m_\sigma}{m_t}\,\frac{2K+1}{3}\begin{pmatrix}1&-\lambda&-\lambda\\-\lambda&1&-\lambda\\-\lambda&-\lambda&1\end{pmatrix}. \tag{7.2.26}$$

Если полная концентрация носителей n, входящая в (4.3.40), распределена поровну между четырьмя долинами, то путем суммирования вкладов четырех долин получаем

$$\sigma=\sigma_0\,\frac{1}{4}\sum_{\rho=1}^{4}\Lambda_\rho=\sigma_0\,\frac{m_\sigma}{4m_t}\,\frac{2K+1}{3}\,4=\sigma_0; \tag{7.2.27}$$

здесь m_σ определяется выражением (7.2.19), и так как $m_1=m_2=m_t$ и $m_3=m_l$, то подставлено значение

$$m_\sigma=\frac{3m_l}{2K+1}. \tag{7.2.28}$$

[1]) Для простоты мы опускаем здесь индекс m у величины K, так как предполагаем, что время релаксации изотропно.

В модели, где 6 или 12 долин локализованы на оси ⟨110⟩ и эквивалентных осях [10, 11], электропроводность σ_0 также получается изотропной с эффективной массой (7.2.28) в предположении, что время релаксации τ_m изотропно.

§ 3. Эффект Холла в слабом магнитном поле

Линейные по магнитному полю B составляющие электропроводности σ определяются матрицей (4.3.42). Теперь, как уже указывалось выше, мы должны заменить $\tilde{\mathbf{B}}$ на $\mathbf{B}^*$ и m на m_σ. Применяя преобразование Херринга — Фогта (7.2.24) для долин ⟨111⟩, например в германии n-типа, получаем

$$\sigma = \frac{1}{4}\sum_{\rho=1}^{4} D_\rho^{-1}\sqrt{\alpha}\begin{Vmatrix} 0 & \gamma_0 B_3^* & -\gamma_0 B_2^* \\ -\gamma_0 B_3^* & 0 & \gamma_0 B_1^* \\ \gamma_0 B_2^* & -\gamma_0 B_1^* & 0 \end{Vmatrix}\sqrt{2}\, D_0, \qquad (7.3.1)$$

где γ_0 имеет вид (4.3.43) с заменой m на m_σ, а вектор $\mathbf{B}^*$ в ρ-й долине имеет составляющие

$$B^*_{l(\rho)} = \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}}{\alpha_{ll}}}\sum_{k=1}^{4} D_\rho^{lk} B_k. \qquad (7.3.2)$$

Например, для первой долины, которая расположена в направлении ⟨111⟩, получаем

$$\mathbf{B}^*_{(1)} = \frac{m_\sigma}{m_l}\sqrt{\frac{K}{6}}\begin{Vmatrix} \sqrt{2K}\,(B_1 + B_2 + B_3) \\ \sqrt{3}\,(B_1 - B_2) \\ B_1 + B_2 - 2B_3 \end{Vmatrix}. \qquad (7.3.3)$$

Введем для краткости обозначение

$$\lambda' = \frac{K+2}{K-1}. \qquad (7.3.4)$$

Составляющая σ_{12} тензора проводимости в первой долине имеет вид

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{1}{4}\gamma_0 \frac{m_\sigma}{m_l}\frac{\sqrt{K}}{6}\left(-2\sqrt{6}\,B_3^* + 2\sqrt{3K}\,B_1^*\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\gamma_0\left(\frac{m_\sigma}{m_l}\right)^2 \frac{K}{3}(K-1)(B_1 + B_2 + \lambda' B_3). \qquad (7.3.5)$$

Для составляющих $\sigma_{13}^{(1)}$ и $\sigma_{23}^{(1)}$ получаем аналогичные выражения с тем отличием, что для них последний множитель принимает вид $(-B_1 - \lambda' B_2 - B_3)$ и $(\lambda' B_1 + B_2 + B_3)$ соответственно.

Для второй долины получаем эффективную магнитную индукцию

$$\mathbf{B}^*_{(2)} = \frac{m_\sigma}{m_l}\sqrt{\frac{K}{6}}\begin{vmatrix}\sqrt{2K}\,(B_1+B_2+B_3)\\ \sqrt{3}\,(B_1-B_2)\\ -B_1-B_2-2B_3\end{vmatrix} \tag{7.3.6}$$

и составляющую тензора проводимости

$$\sigma^{(2)}_{12} = \frac{1}{4}\gamma_0\frac{m_\sigma}{m_l}\frac{\sqrt{K}}{6}\left(-2\sqrt{6}\,B^*_3 - 2\sqrt{3K}\,B^*_1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\gamma_0\left(\frac{m_\sigma}{m_l}\right)^2\frac{K}{3}(K-1)(-B_1-B_2+\lambda' B_3). \tag{7.3.7}$$

Расчеты других составляющих и вкладов других долин проводятся аналогичным образом. Суммируя вклады всех четырех долин, получаем

$$\sigma = \frac{1}{4}\gamma_0\left(\frac{m_\sigma}{m_l}\right)^2\frac{K}{3}(K-1)\,4\lambda'\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2\\ -B_3 & 0 & B_1\\ B_2 & -B_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.3.8}$$

Зависимость между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{B}$ получается такая же, как и в случае модели одной сферической долины, за исключением того, что γ_0 теперь заменяется некоторым коэффициентом:

$$\gamma_H = \gamma_0\left(\frac{m_\sigma}{m_l}\right)^2\frac{K}{3}(K-1)\lambda' = \frac{ne^3}{m_H^2}\langle\tau_m^2\rangle. \tag{7.3.9}$$

Мы ввели здесь понятие холловской эффективной массы

$$m_H = m_l\sqrt{\frac{3}{K(K+2)}} \tag{7.3.10}$$

и приняли, что время релаксации импульса τ_m изотропно.

Для расчета отношения холловской и дрейфовой подвижностей μ_H/μ без потери общности можно положить, что электрическое поле направлено по оси y, а магнитное поле — по оси z. Тогда плотность холловского тока

$$\mathbf{j} = \gamma_H\begin{pmatrix}0 & B_3 & 0\\ -B_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ E_2\\ 0\end{pmatrix} = \gamma_H\begin{pmatrix}E_2B_3\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{7.3.11}$$

имеет единственную составляющую $j_1 = \gamma_H E_2 B_3$. Кроме того, существует, конечно, продольная составляющая плотности тока

$j_2 = \sigma E_2$, где в приближении слабого поля проводимость $\sigma = \sigma_0$ не зависит от B. Холловское поле определяется выражением

$$\mathbf{F}_1 = \frac{j_1}{\sigma} = \frac{\gamma_H}{\sigma} j_2 B_3, \tag{7.3.12}$$

а коэффициент Холла

$$R_H = \frac{E_1}{j_2 B_3} = \frac{\gamma_H}{\sigma_0^2} = \frac{1}{ne} \frac{\langle \tau_m^2 \rangle}{\langle \tau_m \rangle^2} \left(\frac{m_\sigma}{m_H} \right)^2, \tag{7.3.13}$$

где холловский массовый множитель

$$\left(\frac{m_\sigma}{m_H} \right)^2 = \frac{3K(K+2)}{(2K+1)^2}. \tag{7.3.14}$$

При $K = 1$ этот множитель равен единице, при $K = 20$ составляет 0,78, а при $K \to \infty$ достигает 0,75. Поскольку $\mu_H = |R_H| \sigma$ и $\mu = \sigma/(n|e|)$, то холл-фактор r_H принимает вид

$$r_H = \frac{\mu_H}{\mu} = \frac{\langle \tau_m^2 \rangle}{\langle \tau_m \rangle^2} \left(\frac{m_\sigma}{m_H} \right)^2. \tag{7.3.15}$$

Для кремния получаем такие же результаты: коэффициент Холла в слабых полях изотропен и пропорционален холловскому массовому множителю (7.3.14).

§ 4. Магниторезистивный эффект в слабом магнитном поле

Квадратичные по магнитной индукции **B** члены тензора электропроводности σ представлены матрицей (4.3.50). Применяя преобразование Херринга — Фогта (7.2.24), для германия n-типа получаем

$$\sigma = \frac{1}{4} \sum_{\rho=1}^{4} D_\rho^{-1} \sqrt{\alpha}\, \beta_0 \begin{Vmatrix} B_2^{*2} + B_3^{*2} & -B_1^* B_2^* & -B_1^* B_3^* \\ -B_1^* B_2^* & B_1^{*2} + B_3^{*2} & -B_2^* B_3^* \\ -B_1^* B_3^* & -B_2^* B_3^* & B_1^{*2} + B_2^{*2} \end{Vmatrix} \sqrt{\alpha}\, D_\rho, \tag{7.4.1}$$

где β_0 определяется выражением (4.3.51), но с заменой m на m_σ. В зависимости от номера долины ρ составляющие вектора $\mathbf{B}^*$ должны быть заменены линейными комбинациями составляющих вектора **B** согласно (7.3.3), (7.3.6) и т. д. Вычисления довольно трудоемки, но не сложны; поэтому мы представим только результат, полученный для квадратичного по магнитной

индукции **B** члена электропроводности ([6], стр. 22):

$$\sigma = \beta_M \begin{vmatrix} B_2^2 + B_3^2 & -B_1B_2 & -B_1B_3 \\ -B_1B_2 & B_1^2 + B_3^2 & -B_2B_3 \\ -B_1B_3 & -B_2B_3 & B_1^2 + B_2^2 \end{vmatrix} + \\ + \beta_M \frac{2(K-1)^2}{(2K+1)(K+2)} \begin{vmatrix} B_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3^2 \end{vmatrix}, \qquad (7.4.2)$$

где

$$\beta_M = -\left(ne^4/m_l^3\right)\langle\tau_m^3\rangle K(K+2)(2K+1)/9. \qquad (7.4.3)$$

Второй член справа в (7.4.2) не возникает в случае кремния n-типа, где долины локализованы на осях $\langle 100\rangle$ и эквивалентных осях, а также в случае модели сферической зоны. Чтобы исследовать этот член, рассмотрим случай, когда векторы **j**, **E** и **B** параллельны направлению x. Определим продольный магниторезистивный эффект как отношение

$$\left.\frac{\Delta\rho}{\rho B^2}\right|_{\text{прод}} = \frac{j(0) - j(B)}{j(0)\,B^2} = -\frac{\beta_M}{\sigma_0}\frac{2(K-1)^2}{(2K+1)(K+2)} = \\ = \frac{e^2}{m_l^2}\frac{2K(K-1)^2}{3(2K+1)}\frac{\langle\tau_m^3\rangle}{\langle\tau_m\rangle}; \qquad (7.4.4)$$

при выводе (7.4.4) мы учитывали как квадратичные, так и линейные по магнитной индукции **B** члены проводимости σ, но линейные члены, умноженные на $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, при данном направлении вектора $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ обращались в нуль. Вводя магниторезистивную подвижность μ_M, определенную формулой (1.16) приложения 1, и заменяя m на m_l, получаем

$$\left.\frac{\Delta\rho}{\rho B^2}\right|_{\text{прод}} = \mu_M^2 \frac{2K(K-1)^2}{3(2K+1)}. \qquad (7.4.5)$$

При типичном для n-Ge значении $K = 20$ зависящий от K множитель в (7.4.5) равен 118, тогда как при $K = 1$ он равен нулю; отсюда видно, что анизотропия эффективной массы оказывает сильное влияние на магниторезистивный эффект.

В случае кремния n-типа вместо (7.4.2) получаем

$$\sigma = \begin{vmatrix} \beta'_M(B_2^2 + B_3^2) & -\beta''_M B_1B_2 & -\beta''_M B_1B_3 \\ -\beta''_M B_1B_2 & \beta'_M(B_1^2 + B_3^2) & -\beta''_M B_2B_3 \\ -\beta''_M B_1B_3 & -\beta''_M B_2B_3 & \beta'_M(B_1^2 + B_2^2) \end{vmatrix}, \qquad (7.4.6)$$

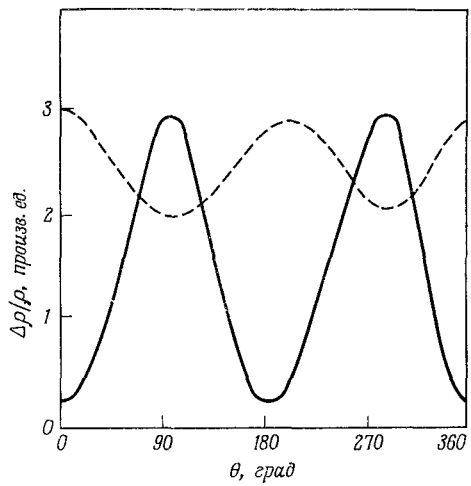
где

$$\beta'_M = -(ne^4/m_l^3)\langle\tau_m^3\rangle K(K^2+K+1)/3 \qquad (7.4.7)$$

и

$$\beta''_M = -(ne^4/m_l^3)\langle\tau_m^3\rangle K^2. \qquad (7.4.8)$$

Поскольку σ_{xx} не зависит от B_1, в противоположность случаю германия n-типа в направлении $\langle 100\rangle$ продольный магниторезистивный эффект не возникает.



Фиг. 7.2. Магниторезистивный эффект в n-Ge (штриховая кривая) и n-Si (сплошная кривая) в зависимости от угла между током (в направлении $\langle 100\rangle$) и магнитным полем в плоскости (010)

На фиг. 7.2 показан магниторезистивный эффект n-Ge [11] и n-Si [12] в слабом магнитном поле как функция угла θ между вектором **B** и направлением $\langle 100\rangle$ в плоскости (010), когда ток параллелен направлению $\langle 100\rangle$. При $\theta = 0^0$ магниторезистивный эффект чисто продольный; он максимален для n-Ge и минимален для n-Si; в последнем случае, как указывалось выше, он должен обращаться в нуль. Случай, когда долины локализованы на осях $\langle 110\rangle$ и эквивалентных осях, мы здесь рассматривать не будем (см. [11], табл. VII, стр. 228).

В эксперименте плотность тока **j** обычно поддерживается постоянной и измеряются напряжения, по которым определяются напряженности холловского и продольного полей. Следовательно, для сравнения с экспериментом нам необходима электропроводность σ как функция величин **j** и **B**, а не как функция **E** и **B**. В случае слабых магнитных полей магниторезистивный эффект кубического кристалла представляем с помощью

обращенного уравнения Зейтца [13]

$$\frac{\Delta\rho}{\rho B^2} = b + c(il + jm + kn)^2 + d(i^2l^2 + j^2m^2 + k^2n^2), \quad (7.4.9)$$

где (i, j, k) — единичный вектор в направлении тока, (l, m, n) — единичный вектор в направлении магнитного поля,

$$b = -(\beta + \mu_H^2), \quad c = \mu_H^2 - \gamma, \quad d = -\delta, \quad (7.4.10)$$

$\mu_H = |R_H|\sigma_0$ — холловская подвижность, ρ, γ и δ — коэффициенты обычного уравнения Зейтца

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma_0} = \mathbf{E} + \mu_H[\mathbf{EB}] + \beta B^2\mathbf{E} + \gamma(\mathbf{EB})\mathbf{B} + \delta \begin{Vmatrix} B_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3^2 \end{Vmatrix} \mathbf{E}. \quad (7.4.11)$$

Систему отсчета для единичных векторов задаем векторами кубической решетки. Для специального случая, когда векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{B}$ расположены в плоскости (110) $(i = j = l = m = \sin\theta/\sqrt{2}$, $k = n = \cos\theta)$, из уравнения (7.4.9) для магниторезистивного эффекта находим

$$\frac{\Delta\rho}{\rho B^2} = (b + c + d) - \frac{1}{2} d \sin^2\theta(3\cos^2\theta + 1). \quad (7.4.12)$$

Такая же угловая зависимость получается для величины $\Delta\rho/\rho E^2$, характеризующей разогрев электронов и дырок [(7.5.41) и фиг. 7.8, *а*]. Для любого направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{B}$ в плоскости (111), но при условии, что $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$, получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho B^2} = b + c + \frac{d}{2}. \quad (7.4.13)$$

Для поперечного магниторезистивного эффекта, когда вектор $\mathbf{B}$ находится в плоскости (110), а вектор $\mathbf{j}$ направлен вдоль оси $\langle 110\rangle$, причем $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$, получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho B^2} = b + \frac{1}{2} d \sin^2\theta. \quad (7.4.14)$$

Имеются также расчеты угловой зависимости коэффициента Холла R_H, подобной зависимости (7.4.12). В них получено, что зависящий от θ член пропорционален B^2 [14].

Используя сокращенные обозначения

$$T'_M = \frac{\langle\tau_m^3\rangle\langle\tau_m\rangle}{\langle\tau_m^2\rangle^2} \quad \text{и} \quad q = 1 + \frac{3K}{(K-1)^2}, \quad (7.4.15)$$

для долин ⟨100⟩ в кремнии n-типа получаем следующие соотношения:

$$\frac{b}{\mu_H^2} = T'_M \frac{(2K+1)(K^2+K+1)}{K(K+2)^2} - 1,$$
$$\frac{c}{\mu_H^2} = 1 - 3T'_M \frac{2K+1}{(K+2)^2}, \qquad (7.4.16)$$
$$\frac{d}{\mu_H^2} = -T'_M \frac{(2K+1)(K-1)^2}{K(K+2)^2},$$

а также

$$b + c = -d > 0 \quad \text{и} \quad q = -\frac{\mu_H^2 + b}{d}. \qquad (7.4.17)$$

Если уравнение (7.4.15) для q решить относительно K, то получим два корня K_+ и K_-:

$$K_\pm = \frac{1}{2} \frac{2q+1 \pm \sqrt{12q-3}}{q-1}. \qquad (7.4.18)$$

Корень $K_+ > 1$ соответствует вытянутому (сигарообразному) эллипсоиду изоэнергетической поверхности в **k**-пространстве, а корень $K_- < 1$ соответствует сплюснутому (дискообразному) эллипсоиду. Если механизм рассеяния и, следовательно, T'_M (7.4.15) известны, одно из двух значений K может быть исключено. Например, Стирн и Бекер [16] нашли, что в n = AlSb, где, подобно кремнию n-типа, имеются долины ⟨100⟩, при 77 K преобладает примесное рассеяние; в этом случае из (7.4.15) следует $T'_M = 1{,}58$, т. е. $T'_M > 1$, и физический смысл имеет только корень $K_+ > 1$.

Когда вектор плотности тока **j** направлен параллельно оси ⟨100⟩, а вектор **B** перпендикулярен направлению тока, из уравнения (7.4.9) следует, что $\Delta\rho/\rho^2$ не зависит от направления **B** в плоскости, перпендикулярной вектору **j**. Если этот факт не подтверждается экспериментально, то можно подозревать, что либо металлические контакты к полупроводниковому образцу закорачивают цепь в поперечном направлении, либо кристалл неоднороден. Следует помнить, что это справедливо лишь в области слабых магнитных полей.

Отношение $\Delta\rho/\rho B^2$ часто обозначают символом M с нижним индексом, указывающим кристаллографическое направление, в котором протекает ток, и верхним индексом, указывающим направление магнитного поля, например

$$M_{110}^{001} = b \quad \text{и} \quad M_{110}^{1\bar{1}0} = b + \frac{1}{2}d.$$

Если второе значение M меньше первого, т. е. $d < 0$, то имеются веские основания предполагать, что в кристалле есть долины $\langle 100\rangle$, как, например, в n-Si и n-AlSb.

Критерий наличия долин $\langle 111\rangle$, таких, как в n-Ge, можно представить в виде

$$b = -c \quad \text{и} \quad d > 0. \tag{7.4.19}$$

Экспериментальное определение величин b, c и d на одном образце с боковыми отростками возможно на основе планарного эффекта Холла, который мы обсуждали в гл. 4, § 7. Если ток направлен параллельно оси $\langle 100\rangle$, а поле Холла $\mathbf{E}_p$ параллельно оси $\langle 010\rangle$, то планарный коэффициент Холла $P_H = c/\sigma_0$, тогда как в случае ориентации $\mathbf{j} \parallel \langle 110\rangle$ и $\mathbf{E}_p \parallel \langle \bar{1}10\rangle$ $P_H = (c + d)/\sigma_0$. Таким образом, если измерим коэффициент c при ориентации $\mathbf{j} \parallel \langle 100\rangle$, определим коэффициент b по магниторезистивному эффекту при том же направлении тока, но при $\mathbf{B} \parallel \langle 010\rangle$, а также найдем значение суммы $b + c + d$ при $\mathbf{B} \parallel \langle 100\rangle$, то получим значения коэффициентов b, c и d, используя только один образец. Есть и другая возможность: определить сумму $c + d$ на основе планарного эффекта Холла при $\mathbf{j} \parallel \langle 110\rangle$, коэффициент b — по магниторезистивному эффекту при $\mathbf{B} \parallel \langle 001\rangle$, а сумму $b + d/2$ — по магниторезистивному эффекту при $\mathbf{B} \parallel \langle 110\rangle$. Вследствие конечной толщины боковых отростков образца в экспериментальные данные требуется вводить поправки [17].

До сих пор мы полагали, что время релаксации импульса τ_m изотропно. Херринг и Фогт [3], а позднее Иглс и Эдвардс [18] рассматривали случай анизотропного времени релаксации τ_m с составляющими τ_l и τ_t вдоль и поперек оси вращения эллипсоида постоянной энергии в $\mathbf{k}$-пространстве. Вводя обозначения $\tau_l/\tau_t = K_\tau$ и $m_l/m_t = K_m$, получаем для фактора анизотропии

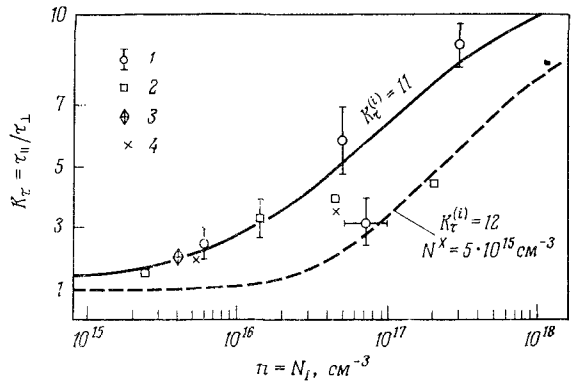
$$K = \frac{K_m}{K_\tau}, \tag{7.4.20}$$

поскольку электропроводность определяется отношением m/τ_m. Например, для кремния n-типа вместо (7.4.16) можно теперь написать выражение [19]

$$\frac{b}{\mu_H^2} = T'_M \frac{\left(\langle \tau_t^3 K_\tau^2\rangle / \langle \tau_t^3\rangle + K_m \langle \tau_t^3 K_\tau\rangle / \langle \tau_t^3\rangle + K_m^2\right)\left(\langle \tau_t K_\tau\rangle / \langle \tau_t\rangle + 2K_m\right)}{K_m \left(2\langle \tau_t^2 K_\tau\rangle / \langle \tau_t^2\rangle + K_m\right)^2} - 1. \tag{7.4.21}$$

При рассеянии на колебаниях решетки время релаксации τ_m можно считать почти изотропным, тогда как рассеяние на при-

месях в n-Ge, согласно расчетам [18], приводит к значению $K_\tau = 11{,}2$. В германии n-типа с концентрацией примесей $N_I = 4 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$ имеем $K = K_m/K_\tau = 20$ при температуре 4 К и $K = 5$ при температуре 20 К. Такая температурная зависимость связана с переходом от решеточного рассеяния при низких температурах, где примеси нейтральны вследствие вымораживания носителей, к комбинированному рассеянию на ионизованных примесях и на колебаниях решетки при более высоких темпе-



Фиг. 7.3. Зависимость параметра анизотропии времени релаксации импульса K_τ от концентрации примесей N_I в n-Ge при 77 К.

Сплошные кривые рассчитаны для комбинированного рассеяния на акустическом деформационном потенциале и на ионизованных примесях (для чистого рассеяния на ионизованных примесях принято значение $K_\tau = 11$) Штриховая кривая учитывает, кроме того, изотропное рассеяние на нейтральных примесях Экспериментальные данные получены из измерений эффекта Фарадея (*1*) [21] и магниторезистивного эффекта (*2*) [23], (*3*) [20] и *4* [24].

ратурах [20]. При температуре 77 К переход от решеточного рассеяния к рассеянию на ионизованных примесях может быть получен путем изменения концентрации примесей N_I. Зависимость параметра K_τ от концентрации примесей N_I показана на фиг. 7.3, где принято, что в пределе чисто примесного рассеяния, когда $N_I \to \infty$, параметр K_τ достигает значения насыщения $K_\tau^i = 11$ или 12. Экспериментальные данные были получены из измерений эффекта Фарадея в n-Ge при $T = 77$ К на сверхвысоких частотах [21] [1]); они согласуются со значением $K_\tau^i = 11$, что в пределах точности эксперимента соответствует приведенному выше расчетному значению $K_\tau^i = 11{,}2$.

[1]) Дальнейшие экспериментальные данные см. в работе [22].

§ 5. Рассеяние между эквивалентными долинами и эффект перезаселения долин

В § 2—4 настоящей главы мы предполагали, что носители распределены поровну между эквивалентными, т. е. имеющими одинаковую энергию, долинами. Однако всякое воздействие, такое, как поле, давление или градиент температуры, вносящее выделенное направление в первоначально изотропное твердое тело, может привести к перезаселению долин, ибо равновесие заселенности долин носит динамический характер вследствие междолинного рассеяния. Рассеяние, не приводящее к переходу в другие долины, называется внутридолинным [2]. Прежде чем приступить к рассмотрению эффектов перезаселения, рассмотрим скорость междолинного рассеяния.

Переход электрона из одной долины в k-пространстве в другую долину сопровождается большим (порядка радиуса первой зоны Бриллюэна) изменением импульса. Этот импульс может быть передан либо примесному атому, либо фонону из окрестности края зоны Бриллюэна фононов, где акустические и оптические ветви имеют близкую или одинаковую энергию (фиг. 6.13 и 6.14). Мы не будем рассматривать здесь рассеяние на примесях, так как оно существенно лишь при низких температурах и в сильно легированных полупроводниках. Фононы учитываем так же, как в случае рассеяния на оптических фононах, с той разницей, что вместо энергии оптического фонона $\hbar\omega_0 = k_B\Theta$ используем несколько меньшую энергию междолинного фонона $\hbar\omega_i = k_B\Theta_i$, значение которой находится между энергиями оптического и акустического фононов вблизи края зоны Бриллюэна фононов (для n-Ge $\Theta_i = 315$ K, а $\Theta = 430$ K). Правила отбора при рассеянии рассматривались различными авторами [25]. В кремнии n-типа различают два типа рассеяния: g-рассеяние, происходящее между данной долиной и долиной на противоположной стороне той же оси, например между долинами $\langle 100\rangle$ и $\langle\bar{1}00\rangle$, и f-рассеяние, когда электрон переходит из данной долины в одну из остальных эквивалентных долин, например из долины $\langle 100\rangle$ в долину $\langle 010\rangle$. Как f-, так и g-рассеяние сопровождается процессом переброса, при котором следует учитывать вектор обратной решетки (гл. 6, § 4). Фононы, участвующие в g-рассеянии, имеют температуру около 190 и 720 K; фононы, участвующие в f-рассеянии, имеют температуру 680 K и участвуют в процессе перезаселения долин, который рассматривается ниже [19, 26, 27] [1]).

[1]) В работе [27] показано, что оптическое междолинное рассеяние в кремнии n-типа несущественно.

Величину, обратную времени релаксации импульса, запишем в виде [25]

$$\frac{1}{\tau_i} = w_2\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_B\Theta_i}+1}+\exp\frac{\Theta_i}{T}\,\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_B\Theta_i}-1}\right)\Big/\left(\exp\frac{\Theta_i}{T}-1\right), \tag{7.5.1}$$

где w_2 — некоторая постоянная. Эта формула соответствует формуле (6.11.5) для рассеяния на оптическом деформационном потенциале. Если мы усредним $1/\tau_i$ по функции распределения Максвелла — Больцмана вида $\exp(-\lambda\varepsilon/k_BT)$, где $\lambda = T/T_e$, то получим

$$\left\langle\frac{1}{\tau_i}\right\rangle = w_2\sqrt{\frac{2\lambda z}{\pi}}\,\frac{\mathrm{ch}\,[(1-\lambda)\,z]\,K_1(\lambda z)}{\mathrm{sh}\,(z)}; \tag{7.5.2}$$

здесь K_1 — модифицированная функция Бесселя (приложение 2), а параметр $z = \Theta_i/2T$. Для равновесных электронов и дырок $\lambda = 1$. Учитывая рассеяние на акустическом деформационном потенциале наряду с междолинным рассеянием, для полного времени релаксации импульса τ_m можем написать

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_{\text{ак}}} + \frac{1}{\tau_i}, \tag{7.5.3}$$

где $\tau_{\text{ак}}$ совпадает с τ_m, определенным (6.4.15). Херринг [2] рассчитал подвижность μ как функцию температуры T. Зависимость отношения μ/μ_0 от T/Θ_i, где

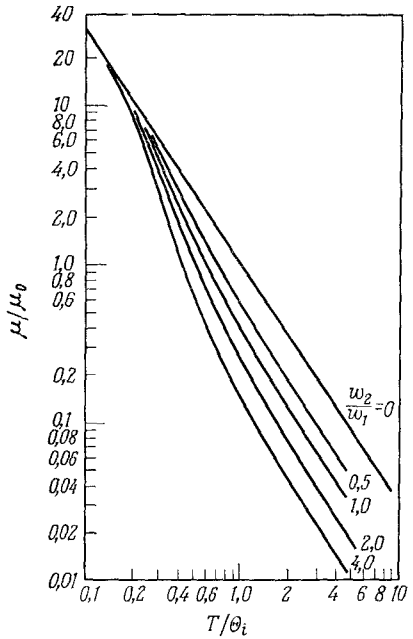
$$\mu_0 = \mu_{\text{ак}}(T/\Theta_i)^{3/2}, \tag{7.5.4}$$

показана на фиг. 7.4 при различных значениях параметра w_2/w_1. Постоянная $w_1 = l_{\text{ак}}^{-1}(2k_B\Theta_i/m)^{1/2}\Theta_i/T$, где $l_{\text{ак}}$ — длина свободного пробега при акустическом рассеянии (6.4.16). Если мы введем постоянную междолинного потенциала деформации D_1 по аналогии с соответствующей оптической постоянной (6.11.5), то отношение $w_2/w_1 = {}^1/_2(D_i u_l/\varepsilon_{\text{ак}}\omega_1)^2$. Было показано [19, 26, 27], что в кремнии n-типа f-рассеяние невелико [1]). Причины наблюдаемой температурной зависимости подвижности $\mu \sim T^{-2,5}$ объясняются так же, как и зависимость, показанная на фиг. 7.4 с $\Theta_i = 720$ К и $w_2/w_1 = 3$. Постоянная w_2 для n-Ge была определена экспериментально на основе акустоэлектрического эффекта (§ 8 настоящей главы).

Рассмотрим теперь перезаселение эквивалентных долин в сильном электрическом поле. На фиг. 7.5 показана двухдолинная

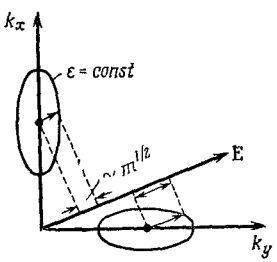
[1]) По вопросу об отношении интенсивностей f- и g-рассеяния не существует единого мнения; см., например, [99]. — *Прим. ред.*

модель в **k**-пространстве; вектор **E** составляет некоторый угол с осью y в пространстве координат. В обеих долинах эффективная масса электронов берется в направлении вектора **E**. Поскольку эффективная масса пропорциональна квадрату длины стрелки на фиг. 7.5, эффективные массы в двух долинах различны, за исключением случая, когда вектор **E** направлен под углом 45° относительно обеих долин. Так как эффективные массы электронов различны, то должны быть различны и скорости их разогрева в электрическом поле. Поэтому температура электронов T_e будет выше в той долине, продольная ось которой составляет больший угол с вектором электрического поля.



Фиг. 7.4. Влияние междолинного рассеяния на температурную зависимость подвижности при различных значениях константы связи [2].

Согласно (7.5.2), скорость переброса электронов из горячей долины в холодную будет больше, чем в обратном направлении.



Фиг. 7.5. Двухдолинная модель с различными эффективными массами для данного направления поля.

В результате равновесная заселенность горячей долины окажется меньше заселенности холодной долины. В случае невырожденного электронного газа уравнение для скорости перезаселения при наличии произвольного числа долин

имеет вид

$$-\frac{dn_\rho}{dt} = n_\rho \sum_\sigma{}' \left\langle \frac{1}{\tau_{i,\,\rho\to\sigma}} \right\rangle - \sum_\sigma{}' n_\sigma \left\langle \frac{1}{\tau_{i,\,\sigma\to\rho}} \right\rangle, \qquad (7.5.5)$$

где первый член в правой части уравнения представляет собой скорость *ухода* электронов из ρ-й долины вследствие рассеяния, а второй член — скорость прихода электронов в эту долину; штрихи у знаков суммирования показывают, что суммирование ведется по всем долинам, за исключением ρ-й. Обычно делается упрощающее предположение, что $\langle 1/\tau_{i,\,\rho\to\sigma}\rangle$ зависит только от температуры в испускающей электроны ρ-й долине $T_{e\rho} = T/\lambda_\rho$. Если в процессе междолинного рассеяния участвуют фононы нескольких типов с температурами Дебая Θ_{i1}, Θ_{i2}, ..., Θ_{is}, ..., как, например, в *n*-Si, то в правой части (7.5.2) величину z следует заменить на $z_s = \Theta_{is}/2T$ и взять сумму по всем s.

Для полного числа долин N теперь можно написать аналогичное (7.5.5) уравнение

$$-\frac{dn_\rho}{dt} = \left(n_\rho - n_\rho^{(0)}\right)(N-1)\left\langle \frac{1}{\tau_{i\rho}} \right\rangle, \qquad (7.5.6)$$

где $n_\rho^{(0)}$ — равновесная концентрация электронов:

$$n_\rho^{(0)} = \sum_\sigma{}' \frac{n_\sigma \langle 1/\tau_{i\sigma}\rangle}{(N-1)\langle 1/\tau_{i\sigma}\rangle}. \qquad (7.5.7)$$

Предполагая для простоты, что электрическое поле направлено вдоль большой оси холодной долины (индекс c), тогда как остальные $N-1$ долины одинаково «горячие» (индекс h), из (7.5.7) находим

$$n_c^{(0)}\left\langle \frac{1}{\tau_{ic}} \right\rangle = n_h^{(0)}\left\langle \frac{1}{\tau_{ih}} \right\rangle = \frac{n}{\langle 1/\tau_{ic}\rangle^{-1} + (N-1)\langle 1/\tau_{ih}\rangle^{-1}}, \qquad (7.5.8)$$

где $n = n_c + (N-1)n_h$ — полная концентрация электронов, которая предполагается неизменной. Эти уравнения для скорости перезаселения полезны при расчете не только эффектов сильного постоянного электрического поля, но и эффектов переменного поля, таких, как акустоэлектрический эффект (гл. 7, § 8).

Междолинное рассеяние вносит вклад также в потери энергии, которые рассчитываются так же, как при рассеянии на оптических фононах, с той лишь разницей, что теперь изменение энергии электрона при соударении равно $\hbar\omega_1$, а не $\hbar\omega_0$, а постоянная потенциала деформации D в неполярном полупроводнике заменяется величиной D_{ij} [28]; эффективная масса

m заменяется произведением $m_t^{2/3}m_l^{1/3}$ для долины, в которую попадает рассеянный электрон. Для внутридолинного рассеяния (как акустического, так и оптического) тоже производим замену величины m на $m_t^{2/3}m_l^{1/3}$ и, кроме того, при акустическом рассеянии величину $\varepsilon_{ак}^2$ в формуле для τ_m заменяем выражением $^3/_4\Xi_d^2\left[1{,}31+1{,}61\Xi_u/\Xi_d+1{,}01\,(\Xi_u/\Xi_d)^2\right]/4$, а в формуле для $\langle -d\varepsilon/dt\rangle$ — выражением $(2/3)\Xi_d^2\left[1+0{,}5\,(m_l/m_t)\,(1+\Xi_u/\Xi_d)^2\right]$ [28].

Чтобы рассчитать вольтамперную характеристику с учетом междолинного рассеяния, назовем величину $n_0=n/N$ равновесной концентрацией электронов в данной долине в отсутствие электрического поля. После включения электрического поля равновесная концентрация электронов в ρ-й долине меняется на величину

$$\Delta n_\rho = n_\rho^{(0)} - n_0, \tag{7.5.9}$$

причем $\sum\limits_\rho \Delta n_\rho = 0$ в силу сохранения числа электронов. В случае отсутствия магнитного поля плотность тока можно записать в виде

$$\mathbf{j}=\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\left(1+\frac{\Delta n_\rho}{n_0}\right)\Lambda_\rho\sigma_w\mathbf{E}, \tag{7.5.10}$$

где Λ_ρ мы определили выше в (7.2.25). Рассмотрим, например, случай кремния n-типа с вектором $\mathbf{E}$ в произвольном направлении в плоскости $(1\bar{1}0)$. Долины 1 и 2 симметричны по отношению к направлению вектора $\mathbf{E}$, поэтому $\Delta n_1=\Delta n_2$, тогда как

$$\Delta n_3 = -2\,\Delta n_1 = -2\,\Delta n_2. \tag{7.5.11}$$

Если вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси $\langle 111\rangle$, то все долины симметричны по отношению к этому вектору, вследствие чего $\Delta n_1 = \Delta n_2 = \Delta n_3 = 0$. Обозначим проводимость в этом направлении $\sigma_0 S(E)$, где σ_0 — омическая проводимость, которая изотропна в кубическом кристалле кремния [1]). Рассчитаем плотность тока для произвольного направления вектора $\mathbf{E}$ в плоскости $(1\bar{1}0)$:

$$\mathbf{E}=E\left(\sin\theta/\sqrt{2};\ \sin\theta/\sqrt{2};\ \cos\theta\right). \tag{7.5.12}$$

Используя эффективную напряженность поля $E^*_{(\rho)}$ для ρ-й долины, которая определяется согласно (7.2.8) и (7.2.23):

$$\mathbf{E}^*_{(\rho)}=\sqrt{\alpha}\,D_\rho\mathbf{E}, \tag{7.5.13}$$

[1]) Это определение σ_0 отличается от (4.3.39), поскольку вместо m здесь берется эффективная масса плотности состояний m_σ.

получаем из (7.5.10) плотность тока

$$\mathbf{j} = \tau_0 \frac{1}{N} \sum_{\rho=1}^{N} \left(1 + \frac{\Delta n_\rho}{n_0}\right) S(E^*_{(\rho)})\, \Lambda_\rho \mathbf{E}, \qquad (7.5.14)$$

где для кремния n-типа $N = 3$, а величина Λ_ρ определяется формулой (7.2.25). Рассчитаем величины $\mathbf{E}^*_{(\rho)}$ и Λ_ρ для рассматриваемого случая. Для долины 1 эффективная напряженность поля

$$\mathbf{E}^*_{(1)} = E\sqrt{3/(2K+1)} \begin{pmatrix} \sin\theta/\sqrt{2} \\ \sqrt{K/2}\sin\theta \\ \sqrt{K}\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (7.5.15)$$

а ее модуль

$$E^*_{(1)} = E\sqrt{1 + [(K-1)/(2K+1)](3\cos^2\theta - 1)/2}. \qquad (7.5.16)$$

В силу симметрии $E^*_{(2)} = E^*_{(1)}$; в то же время вектор

$$\mathbf{E}^*_{(3)} = E\sqrt{3/(2K+1)} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sqrt{K/2}\sin\theta \\ \sqrt{K/2}\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad (7.5.17)$$

а его модуль

$$E^*_{(3)} = E\sqrt{1 + [(K-1)/(2K+1)](1 - 3\cos^2\theta)}. \qquad (7.5.18)$$

Можно показать, что для единичного вектора $\mathbf{h}_\rho$ от начала координат до ρ-й долины и единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{E}/E$ в направлении поля

$$E^*_{(\rho)} = E\sqrt{1 + [(K-1)/(2K+1)][1 - 3(\mathbf{h}_\rho \mathbf{e})^2]}, \qquad (7.5.19)$$

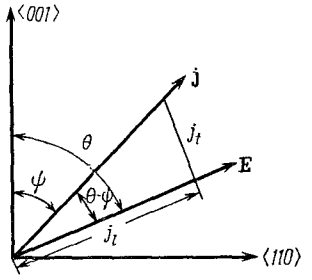
где в случае кремния n-типа $\mathbf{h}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{h}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{h}_3 = (0, 0, 1)$, а вектор $\mathbf{e}$ для направления $\mathbf{E}$ в плоскости $(1\bar{1}0)$ определяется из (7.5.12). Расчет матриц Λ_ρ не представляет затруднений. Так как $E^*_{(1)} = E^*_{(2)}$, матрицы Λ_1 и Λ_2 можно сложить:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\mathbf{E} = E\frac{3}{2K+1} \begin{pmatrix} (K+1)\sin\theta/\sqrt{2} \\ (K+1)\sin\theta/\sqrt{2} \\ 2K\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (7.5.20)$$

Подобно этому, для $\Lambda_3\mathbf{E}$ получаем

$$\Lambda_3\mathbf{E} = E\frac{3}{2K+1} \begin{pmatrix} K\sin\theta/\sqrt{2} \\ K\sin\theta/\sqrt{2} \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (7.5.21)$$

Как видно из (7.5.14), вследствие наличия множителя $(1+\Delta n_\rho/n_0)\,S(E^*_{(\rho)})$ направление вектора плотности тока, вообще говоря, не совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. Это замечание справедливо и в случае, когда нет перезаселения долин. Однако перезаселение усили-



Фиг. 7.6. Продольная и поперечная составляющие плотности тока в плоскости $(1\bar{1}0)$.

вает эффекты разогрева электронов. Введем продольную j_l и поперечную j_t составляющие плотности тока $\mathbf{j}$, как показано на фиг. 7.6:

$$j_l = j\cos(\theta-\psi) = j\cos\psi\cos\theta + j\sin\psi\sin\theta = \\ = j_z\cos\theta + j_x\sqrt{2}\sin\theta, \qquad (7.5.22)$$

$$j_t = j\sin(\theta-\psi) = j\cos\psi\sin\theta - j\sin\psi\cos\theta = \\ = j_z\sin\theta - j_x\sqrt{2}\cos\theta, \qquad (7.5.23)$$

где

$$\mathbf{j} = j\left(\sin\psi/\sqrt{2};\ \sin\psi/\sqrt{2};\ \cos\psi\right). \qquad (7.5.24)$$

Расчет j_l и j_t на основе (7.5.14) и (7.5.20) — (7.5.23) приводит к следующему результату:

$$j_l = \frac{\sigma_0 E}{2K+1}\left[2\left(K\cos^2\theta + \frac{K+1}{2}\sin^2\theta\right)\left(1+\frac{\Delta n_3}{2n_0}\right)S(E^*_1) + \right. \\ \left. + (\cos^2\theta + K\sin^2\theta)\left(1+\frac{\Delta n_3}{n_0}\right)S(E^*_{(3)})\right], \qquad (7.5.25)$$

$$j_t = \frac{\sigma_0 E}{2K+1}\,\frac{K-1}{2}\left[\left(1-\frac{\Delta n_3}{n_0}\right)S(E^*_{(1)}) - \left(1+\frac{\Delta n_3}{n_0}\right)S(E^*_{(1)})\right]. \qquad (7.5.26)$$

Эти уравнения можно записать в форме, пригодной для германия n-типа в случае, когда вектор $\mathbf{E}$ находится в плоскости $(1\bar{1}0)$:

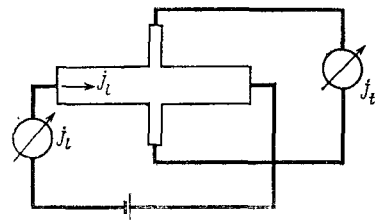
$$j_l = \sigma_0 E\,\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2\left(1+\frac{\Delta n_\rho}{n_0}\right)S(E^*_{(\rho)}), \qquad (7.5.27)$$

$$j_t = -\sigma_0 E\,\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta n_\rho}{n_0}\right)S(E^*_{(\rho)})\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2. \qquad (7.5.28)$$

Отношение j_t/j_l позволяет определить угол Сасаки $\theta—\psi$ (фиг. 7.6):

$$\operatorname{tg}(\theta - \psi) = \frac{j_t}{j_l}. \qquad (7.5.29)$$

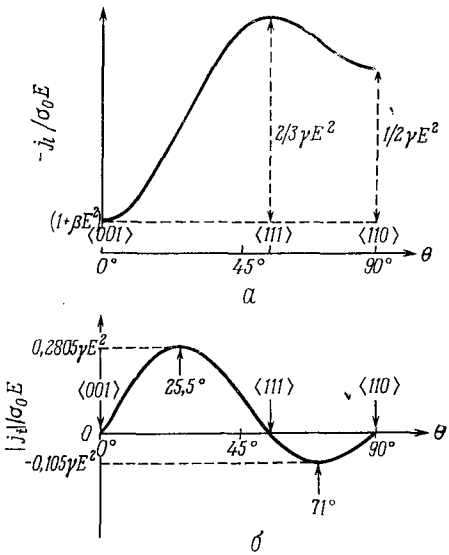
Схема экспериментальной установки, применяемой для измерения этого отношения, показана на фиг. 7.7; она похожа на



Фиг. 7.7. Схема экспериментальной установки для измерения эффекта Сасаки — Шибуи.

установку Холла (фиг. 4.2), но здесь отсутствует магнитное поле. Обычно измеряют не плотности тока, а напряжения и применяют импульсную технику для уменьшения влияния джоулева тепла. Из этих данных находят отношение напряженностей электрических полей $|E_t/E_l| = |j_t/j_l|$.

На фиг. 7.8 показаны j_l и j_t как функции угла θ для случая теплых электронов, рассчитанные согласно (7.5.27) и (7.5.28). Подобные зависимости получены и для горячих электронов; соответствующие экспери-



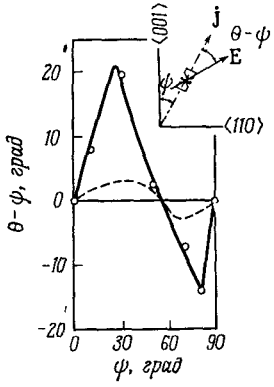
Фиг. 7.8. Продольная (*а*) и поперечная (*б*) составляющие тока Сасаки — Шибуи в зависимости от угла между вектором напряженности поля и направлением ⟨001⟩. (Численные значения соответствуют теплым электронам.)

ментальные данные для n-Ge при $T = 90$ К и $E = 750$ В/см показаны на фиг. 7.9 [29, 30]. Этот эффект известен как «эффект Сасаки — Шибуи»; его предсказал Шибуя [31] и обнаружили экспериментально Сасаки и др. [29, 30]. Эффект, рассчитанный Шибуей без учета перезаселения, представлен на фиг. 7.9 штриховой кривой. Рейк и Рискен [32] теоретически

показали, что в n-Ge в области насыщения скорости дрейфа максимальное перезаселение определяется из соотношения

$$\left(1+\frac{\Delta n_\rho}{n_0}\right)_{\text{макс}}=\left(\frac{E}{E^*_{(\rho)}}\right)\Big/\frac{1}{4}\sum_{\rho=1}^{4}\left(\frac{E}{E^*_{(\rho)}}\right). \qquad (7.5.30)$$

Это соотношение было проверено экспериментально [35] в сильных электрических полях (фиг. 7.10). Уменьшение $\Delta n_\rho/n_0$ в сильных полях обусловлено, вероятно, перебросом электронов в вышележащие долины, локализованные на оси ⟨100⟩ и эквивалентных осях (неэквивалентное междолинное рассеяние, гл. 7, § 7). Перебросы между долинами, вызванные междолинным рассеянием, уменьшают



Фиг. 7.9. Теоретическая зависимость (штриховая кривая) угла Сасаки от угла между вектором плотности тока и осью ⟨001⟩ и соответствующие экспериментальные данные (точки) для n-Ge при 90 К [29, 30].

разность температур, а тем самым и разность заселенностей долин.

Рассмотрим более детально случай теплых электронов [36]. Из уравнения (4.13.3) получаем

$$S(E)=1+\beta E^2, \qquad (7.5.31)$$

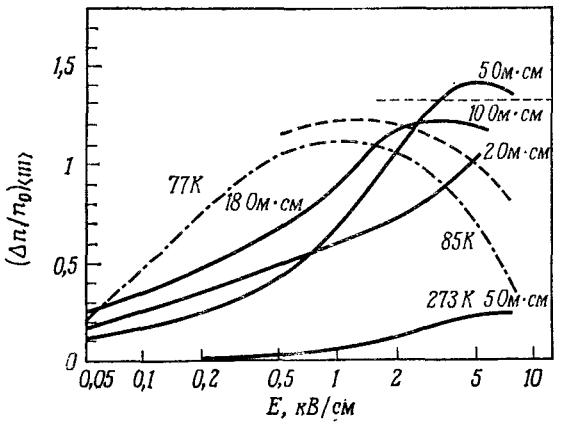
где $|\beta E^2|\ll 1$. Вследствие незначительной напряженности поля имеем также $|\Delta n_\rho/n_0|\ll 1$, поэтому произведение $(1+\Delta n_\rho/n_0)S(E^*_{(\rho)})$ приближенно равно $1+\Delta n_\rho/n_0+\beta E^{*2}_{(\rho)}$. Тогда из (7.5.27) следует, что продольная составляющая

$$j_l=\sigma_0 E\frac{1}{N}\left[\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2+\sum_{\rho=1}^{N}\frac{\Delta n_\rho}{n_0}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2+\beta E^2\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^4\right]. \qquad (7.5.32)$$

Используя (7.5.19), первый член в правой части (7.5.32) можно записать в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2=1+\frac{K-1}{2K+1}\left[1-\frac{3}{N}\sum_{\rho=1}^{N}(\mathbf{h}_\rho\mathbf{e})^2\right]=1. \qquad (7.5.33)$$

Для доказательства второго равенства в (7.5.33) напомним, что $\mathbf{h}_\rho$ и $\mathbf{e}$ суть единичные векторы, а расположение долин имеет



Фиг. 7.10. Относительное увеличение заселенности «холодной» долины при направлении поля $\langle 111\rangle$ и температуре 85 К для образцов с различным удельным сопротивлением (указаны значения ρ при комнатной температуре) [35].
Штрихпунктирная кривая — экспериментальные данные [33]; горизонтальная штриховая прямая рассчитана по формуле (7.5.30); штриховая кривая — теория Франца [34].

кубическую симметрию. Рассмотрим затем последний член в (7.5.32):

$$\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^4 = 1 + 2\frac{K-1}{2K+1}\left[1 - \frac{3}{N}\sum_{\rho=1}^{N}(\mathbf{h}_\rho\mathbf{e})^2\right] + \\ + \frac{(K-1)^2}{(2K+1)^2}\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}[1 - 3(\mathbf{h}_\rho\mathbf{e})^2]^2. \qquad (7.5.34)$$

Как и в (7.5.33), второй член в правой части (7.5.34) обращается в нуль. Последняя сумма

$$\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}[1 + 3(\mathbf{h}_\rho\mathbf{e})^2]^2 = 1 - 2 + \frac{9}{N}\sum_{\rho=1}^{N}(\mathbf{h}_\rho\mathbf{e})^4 = \\ = -1 + 3\left[\cos^4\theta + \frac{1}{2}\sin^4\theta\right] = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)^2. \qquad (7.5.35)$$

Второе равенство в (7.5.35) справедливо для направления вектора $\mathbf{e}$ в плоскости $(1\bar{1}0)$ под углом θ относительно оси $\langle 001\rangle$.

Таким образом, из (7.5.32) получаем

$$j_l = \sigma_0 E \left\{ 1 + \frac{1}{N} \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\Delta n_\rho}{n_0} \left(\frac{E_\rho^*}{E} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \beta E^2 \left[1 + \left(\frac{K-1}{2K+1} \right)^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)^2}{2} \right] \right\}. \quad (7.5.36)$$

Если в кремнии n-типа поле направлено параллельно оси $\langle 111 \rangle$, т. е. симметрично по отношению ко всем долинам, то перезаселения долин не происходит: $\Delta n_\rho = 0$. Более того, $3\cos^2\theta - 1 = 0$. Снабжая коэффициент β индексом $\langle 111 \rangle$ для этого направления, получаем

$$j_l = \sigma_0 E (1 + \beta_{\langle 111 \rangle} E^2). \quad (7.5.37)$$

Для других направлений вектора **E** в плоскости $(1\bar{1}0)$ без учета перезаселения получаем

$$j_l = \sigma_0 E (1 + \beta E^2), \quad (7.5.38)$$

где

$$\beta = \beta_{\langle 111 \rangle} + \beta_{\langle 111 \rangle} \left(\frac{K-1}{2K+1} \right)^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)^2}{2} =$$
$$= \beta_{\langle 111 \rangle} + \frac{1}{3} \gamma \left[\frac{3}{2} (3\cos^2\theta + 1)(\cos^2\theta - 1) + 2 \right]. \quad (7.5.39)$$

Зависимость коэффициента β от угла θ следует из симметрии кристаллической решетки, и она не может измениться при перезаселении. Таким образом, вместо множителя $\beta_{\langle 111 \rangle}(K-1)^2/(2K+1)^2$ можно ввести коэффициент $\gamma/3$, который, как это будет показано в (7.5.49), зависит от Δn_ρ:

$$\beta = \beta_{\langle 111 \rangle} + \frac{\gamma}{3} \left[\frac{3}{2} (3\cos^2\theta + 1)(\cos^2\theta - 1) + 2 \right]. \quad (7.5.40)$$

Если значение коэффициента β при $\theta = 0°$ обозначить β_0, то мы получим

$$\beta = \beta_0 - \gamma \frac{\sin^2\theta}{2} (3\cos^2\theta + 1). \quad (7.5.41)$$

Отсюда следует, что для любого направления вектора **E** в плоскости [111] коэффициент $\beta = \beta_0 - \gamma/2$. Кривая, показанная на фиг. 7.8, *а*, получена из (7.5.41). Выражение (7.5.41) справедливо также для германия n-типа, если вместо $\gamma/3$ подставить $-\gamma/2$; отметим, что в n-Ge при $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ не происходит перезаселения долин. Экспериментальные данные для германия n-типа показаны на фиг. 4.36.

Если в (7.5.28) ввести γ, то после небольших преобразований мы получим

$$j_t = \frac{1}{2}\gamma\sigma_0 E^3 \frac{\sin 2\theta}{2}(3\cos^2\theta - 1). \qquad (7.5.42)$$

Отношение j_t/j_l для теплых электронов приближенно равно $j_t/\sigma_0 E$:

$$\frac{j_t}{\sigma_0 E} = \operatorname{tg}(\theta - \psi) = \frac{1}{2}\gamma E^2 \frac{\sin 2\theta}{2}(3\cos^2\theta - 1). \qquad (7.5.43)$$

Постоянная γ была введена таким образом, чтобы плотность тока j_t была пропорциональна γ. Эта функция представлена на фиг. 7.8, *б*. Она равна нулю для главных направлений симметрии кристаллической решетки. Это отчетливо следует из геометрических рассуждений. Пусть ток направлен под углом θ к **E**, а вектор **E** параллелен оси симметрии N-го порядка; повернем кристалл на угол $360°/N$ вокруг этой оси. Поскольку новое положение не отличается от предыдущего, вектор **j** должен иметь первоначальное направление, что возможно только при $\theta = 0°$.

Поскольку долины расположены вдоль направлений симметрии в **k**-пространстве, с помощью эффекта Сасаки — Шибуи нельзя измерить составляющую $j_t \neq 0$ при максимальном перезаселении. Поэтому наибольшая точность определения Δn_ρ может быть получена при измерении продольной составляющей тока [35].

Для определения величины Δn_ρ для теплых электронов в кремнии n-типа используем (7.5.36) и определение γ:

$$\frac{1}{3}\sum_\rho \frac{\Delta n_\rho}{n_0}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2 + \beta E^2\left(\frac{K-1}{2K+1}\right)^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\gamma E^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)^2. \qquad (7.5.44)$$

После преобразований получаем

$$\frac{1}{3}\sum_\rho \frac{\Delta n_\rho}{n_0}\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2 = \left[-\beta\left(\frac{K-1}{2K+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\gamma\right] E^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)^2. \qquad (7.5.45)$$

Поскольку множитель $(3\cos^2\theta - 1)^2/2$ в правой части (7.5.45) входит также в выражение для $(1/3)\sum_\rho (E^*_{(\rho)}/E)^4$, проще всего представить Δn_ρ как функцию двух неизвестных X и Y:

$$\frac{\Delta n_\rho}{n_0} = X\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2 + Y. \qquad (7.5.46)$$

Используя (7.5.46), запишем уравнение (7.5.45) в виде

$$X\left[1+\left(\frac{K-1}{2K+1}\right)^2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)^2\right]+Y=$$
$$=\left[-\beta\left(\frac{K-1}{2K+1}\right)^2+\frac{1}{3}\gamma\right]E^2\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)^2. \quad (7.5.47)$$

Если $\cos\theta=1/\sqrt{3}$, то

$$X=-Y=\left[-\beta_{\langle 111\rangle}+\frac{1}{3}\gamma\left(\frac{2K+1}{K-1}\right)^2\right]E^2, \quad (7.5.48)$$

и для кремния n-типа получаем

$$\frac{\Delta n_\rho}{n_0}=\left[-\beta_{\langle 111\rangle}+\frac{1}{3}\gamma\left(\frac{2K+1}{K-1}\right)^2\right]E^2\left[\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2-1\right]. \quad (7.5.49)$$

Аналогично для германия n-типа

$$\frac{\Delta n_\rho}{n_0}=\left[-\beta_{\langle 100\rangle}-\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{2K+1}{K-1}\right)^2\right]E^2\left[\left(\frac{E^*_{(\rho)}}{E}\right)^2-1\right]. \quad (7.5.50)$$

В обоих кристаллах наибольшее перезаселение получается при направлении электрического поля вдоль оси вращения эллипсоида энергии, т. е. вдоль оси $\langle 111\rangle$ в германии и оси $\langle 100\rangle$ в кремнии.

В заключение отметим, что существование поперечной составляющей плотности тока служит важным подтверждением того, что поверхности постоянной энергии несферичны.

§ 6. Гальваномагнитные эффекты, обусловленные теплыми и горячими носителями заряда

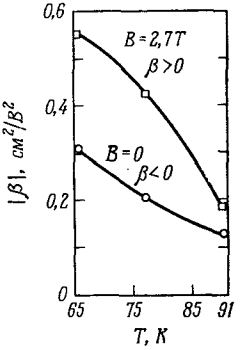
Магнитное поле всегда приводит к охлаждению горячих и теплых носителей заряда. Сила Лоренца отклоняет носителей заряда от направления дрейфа, уменьшая тем самым энергию, получаемую от ускоряющего электрического поля, по сравнению с той, которую приобретают носители заряда в отсутствие магнитного поля. Прежде чем рассматривать это явление в многодолинной модели, остановимся кратко на более простом случае однодолинной сферической модели.

На фиг. 7.11 показаны экспериментальные температурные зависимости коэффициента $|\beta|$ для теплых электронов в n-In при значениях магнитной индукции B, равных 0 и 2,7 Т [37]. В n-InSb имеется сферическая долина в точке $\mathbf{k}=0$ и преобладает полярное оптическое рассеяние, приводящее к значениям $\beta<0$ в интервале температур от 65 до 90 К. В магнитном поле $B=2{,}7$ Т подвижность, первоначально составляющая около $3\cdot10^5$ см^2/(В·с), уменьшается приблизительно в два раза;

при этом $\mu B = 80 \gg 1$, а коэффициент β положителен. На фиг. 7.12 схематически показана зависимость подвижности от напряженности электрического поля при наличии сильного магнитного поля ($\mu B \gg 1$) и при $B = 0$. В простом случае, когда преобладает рассеяние на деформационном акустическом потенциале, при учете поля Холла наряду с приложенным электрическим полем вычисления дают отрицательный магниторезистивный эффект для горячих электронов [38]:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0 B^2} = -7{,}6 \cdot 10^{-3} \mu_H^2(0), \qquad (7.6.1)$$

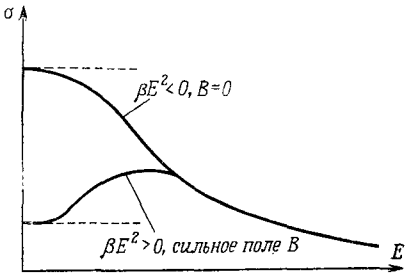
где $\mu_H(0)$ — холловская подвижность в отсутствие электрического поля, причем пред-



Фиг. 7.11. Наблюдаемая температурная зависимость параметра $\beta = [\mu(E) - \mu_0]/\mu_0 E^2$ в n-InSb при наличии сильного магнитного поля и в отсутствие его [37].

полагается, что магнитная индукция $B \ll 1/\mu_H(0)$. В пределе сильных магнитных полей расчеты дают $\Delta\rho/\rho_0 = -5{,}4 \cdot 10^{-3}$.

В многодолинной модели наблюдается отрицательный магниторезистивный эффект, а также зависимость эффекта Холла

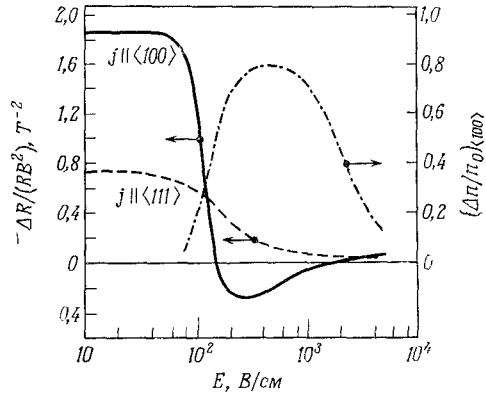


Фиг. 7.12. Зависимость электропроводности от напряженности электрического поля в магнитном поле и без него.

и магниторезистивного эффекта от полярности (зависимость от полярности означает, что при изменении направления **B** на обратное меняются значения μ_H и $\Delta\rho/\rho B^2$). Рассмотрим сначала отрицательный магниторезистивный эффект, который обусловлен перезаселением долин при воздействии сильного электрического поля. (Для тех направлений вектора **E**, которые симметричны по отношению к долинам, переброс заряда не возникает и магниторезистивный эффект положителен.)

На фиг. 7.13 показана зависимость поперечного магниторезистивного эффекта в кремнии n-типа в слабом магнитном

поле от напряженности электрического поля $\mathbf{E}\|\langle 100\rangle$ при $T = 77$ К [7, 39]. Штрихпунктирной кривой показано перезаселение долин $\langle 100\rangle$ без магнитного поля, определенное по анизотропии вольтамперной характеристики. В интервале значений напряженности поля E, где $\Delta n/n_0 \geqslant 0{,}5$, магниторезистивный эффект оказывается отрицательным. При объяснении этого явления мы должны принять во внимание, что магнитное поле приводит не только к охлаждению электронов: оно также генерирует поле Холла, что уже отмечалось выше. Это поле скла-



Фиг. 7.13. Наблюдаемая зависимость поперечного магниторезистивного эффекта в кремнии n-типа при $T = 77$ К от напряженности электрического поля для двух направлений вектора плотности тока [7].

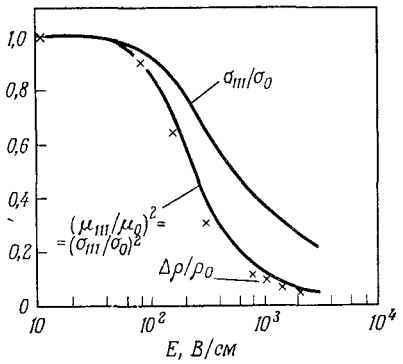
Штрихпунктирная кривая — среднее из экспериментальных значений заселенности долин $\langle 100\rangle$ [41].

дывается с приложенным электрическим полем $\mathbf{E}\|\langle 100\rangle$, и результирующее поле оказывается наклонным к продольной оси эллипсоида изоэнергетической поверхности в n-Si, что эквивалентно уменьшению эффективной массы электронов; электроны больше ускоряются, и проводимость возрастает. Аналогичные явления наблюдались и в n-Ge при направлении векторов $\mathbf{j}\|\langle 111\rangle$ и $\mathbf{B}\|\langle 1\bar{1}0\rangle$ [40][1]) в области полей, где по измерениям вольт-амперных характеристик найдено значение $\Delta n/n_0 > 0{,}8$ [33].

Если направление тока симметрично по отношению к долинам, как, например, при $\mathbf{j}\|\langle 111\rangle$ в n-Si, то зависимость величины $\Delta\rho/\rho_0$ от $\mathbf{E}$ в слабых магнитных полях совпадает с зависимостью величины μ^2 от $\mathbf{E}$, так как $\Delta\rho/\rho_0 \sim \mu^2 B^2$. Это показывают экспериментальные данные фиг. 7.14 [7, 39].

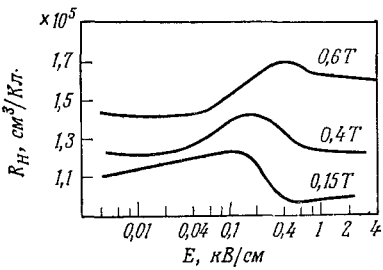
[1]) Эти эффекты в n-Ge более полно исследованы в работе [98]. — *Прим. ред.*

Неудивительно также, что коэффициент Холла в многодолинных полупроводниках зависит от напряженности электрического поля E. На фиг. 7.15 представлена зависимость R_H от E



Фиг. 7.14. Экспериментальная зависимость электропроводности $\sigma_{\langle 111\rangle}$ кремния n-типа нормированной на значение электропроводности σ_0 в слабом поле, а также величины $(\sigma_{\langle 111\rangle}/\sigma_0)^2$ от напряженности электрического поля, направленного параллельно оси $\langle 111\rangle$ при $T = 77$ К (крестиками показаны экспериментальные данные по магниторезистивному эффекту) [7].

в германии n-типа при значениях магнитной индукции 0,15, 0,4 и 0,6 Т ($\mathbf{B} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \| \langle 1\bar{1}0\rangle$) [40]. Максимум объясняется просто



Фиг. 7.15. Зависимость коэффициента Холла в n-Ge при $T = 80$ К от напряженности электрического поля при различных значениях магнитной индукции [40].

двухзонной проводимостью аналогично (4.3.74) с легкими и тяжелыми электронами, которые обозначены индексами l и h соответственно:

$$R_H = -\frac{r_H}{|e|}\frac{n_l\mu_l^2 + n_h\mu_h^2}{(n_l\mu_l + n_h\mu_h)^2} = R_H(0)\frac{(1+\eta)(1+\eta b^2)}{(1+\eta b)^2}, \qquad (7.6.2)$$

где $R_H(0) = -r_H/[|e|(n_l + n_h)]$, $b = \mu_h/\mu_l$ — отношение подвижностей, $\eta = n_h/n_l$ — отношение концентраций электронов. Заселенность холодной долины возрастает с увеличением напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, и при $\eta = 1/b$ отношение $[R_H(E) - R_H(0)]/R_H(0)$ достигает максимального значения $(1 - b^2)/4b$. Для кривой 0,6 Т на фиг. 7.15 увеличение составляет 0,25, что соответствует значениям $b = 0{,}4$ и $\eta = 2{,}5$, и

скорость переброса $(n_h - n_0)/n_0$ равна $(3 - 1/\eta)/(1 + 1/\eta) = 1{,}8$, где n_0 — равновесная заселенность в отсутствие электрического поля (имеются всего 4 долины). Наибольшее значение скорости переброса, полученное из анизотропии вольт-амперных характеристик при $B = 0$, равно 1,1 [33], что сравнимо по величине с указанным выше значением.

Рассмотрим теперь зависящие от полярности эффект Холла и магниторезистивный эффект. Эти эффекты для горячих носителей заряда в многодолинных полупроводниках могут меняться по абсолютной величине при изменении направления **B** на обратное даже в слабых магнитных полях $B \ll 1/\mu$ [42—45]. Рассмотрим сначала эффект Холла для горячих носителей заряда, поскольку подобный эффект наблюдается и для равновесных носителей заряда, но не в слабых магнитных полях и поскольку этот эффект легче рассчитать.

Когда вектор магнитной индукции параллелен оси $\langle 0\bar{1}1\rangle$, а ток — оси $\langle 111\rangle$, можно ожидать, что напряженность электрического поля имеет три составляющие (E_1, E_2, E_2), где

$$E_1 = \frac{E_L}{\sqrt{3}} + \frac{2E_H}{\sqrt{6}} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{E_L}{\sqrt{3}} - \frac{E_H}{\sqrt{6}}, \tag{7.6.3}$$

т. е. представляет собой суперпозицию приложенного поля $\mathbf{E}_L \| \mathbf{j}$ и поля Холла $\mathbf{E}_H \| \langle 2\bar{1}\bar{1}\rangle$. К вектору **E** применим тензор электропроводности кремния n-типа, записанный с точностью до членов B^2, и учтем уравнения (7.3.8) и (7.4.6); тогда получим

$$\begin{aligned} (\sigma_0 + \beta'_M B^2) E_1 + \gamma_H \sqrt{2}\, B E_2 &= \frac{j}{\sqrt{3}}, \\ -\frac{\gamma_H B}{\sqrt{2}} E_1 + \left[\sigma_0 + (\beta'_M + \beta''_M)\frac{B^2}{2}\right] E_2 &= \frac{j}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \tag{7.6.4}$$

где $\mathbf{B} = (0, -B/\sqrt{2}, B/\sqrt{2})$. Решим эту систему уравнений относительно E_1/E_2:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_0 - \gamma_H \sqrt{2}\, B + (\beta'_M + \beta''_M) B^2/2}{\sigma_0 + (\gamma_H/\sqrt{2})\, B + \beta'_M B^2}. \tag{7.6.5}$$

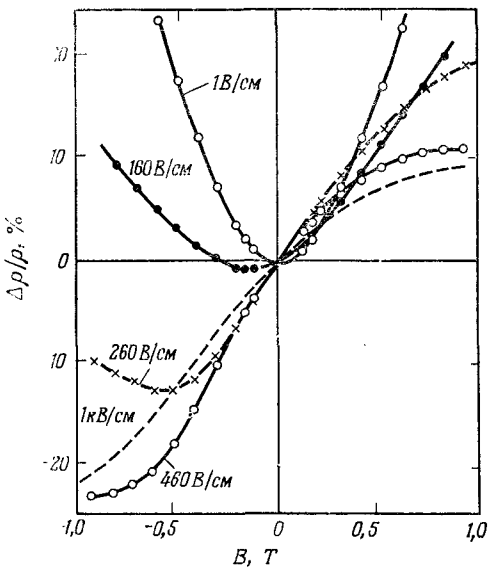
Из (7.6.3) находим холловскую подвижность $\mu_H = |E_H/(E_L B)|$:

$$\mu_H = \frac{\sqrt{2}}{B} \frac{1 - E_1/E_2}{2 + E_1/E_2} = \frac{\gamma_H + (\beta''_M - \beta'_M) B/3\sqrt{2}}{\sigma_0 + (\beta''_M + 5\beta'_M) B^2/6}, \tag{7.6.6}$$

где $\sigma_0 = (ne^2/m_l)\langle\tau_m\rangle(2K+1)/3$, а γ_H, β'_M и β''_M определяются из (7.3.9), (7.4.7) и (7.4.8) соответственно; окончательно получаем

$$\mu_H = \frac{\gamma_H}{\sigma_0}\,\frac{1+[(K-1)^2/(K+2)]\,(B/3\sqrt{2})\,e\langle\tau_m^3\rangle/(m_l\langle\tau_m^2\rangle)}{1-[5K(K^2+1{,}6K+1)/(2K+1)]\,(B^2/6)\,e^2\langle\tau_m^3\rangle/(m_l^2\langle\tau_m\rangle)}. \tag{7.6.7}$$

Этот результат содержит линейный по B член, который меняет знак, когда **B** меняет полярность. Важно, чтобы магнитная

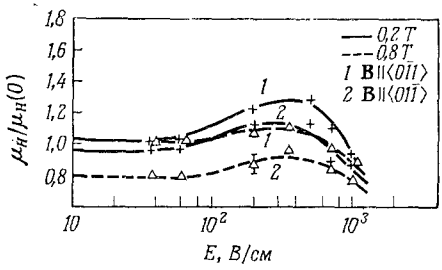


Фиг. 7.16. Зависимость $\Delta\rho/\rho$ от B при различных значениях напряженности магнитного поля (ориентация указана в тексте) [42].

индукция B не была слишком велика, т. е. чтобы можно было отбросить квадратичные члены; в то же время значение B должно быть больше, чем в области $B \ll 1/\mu_H$, рассмотренной в § 3 этой главы. Так как линейный член пропорционален величине $K-1$, в сферической модели, где $K=1$, он обращается в нуль. Подобным же путем можно показать, что в отличие от § 4 зависимость магниторезистивного эффекта от полярности обусловлена членами высшего, чем второй, порядка.

На фиг. 7.16 показан поперечный магниторезистивный эффект в кремнии n-типа при $T = 77$ K, когда вектор **j** составляет угол 24° с направлением ⟨100⟩ в плоскости [110], а магнитная индукция **B** также параллельна этой плоскости [42].

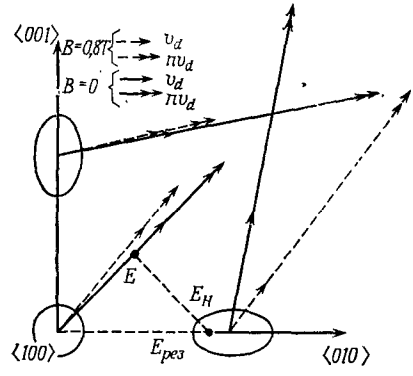
При $E = 1$ В/см получается параболичная зависимость $\Delta\rho/\rho \sim$ $\sim B^2$. При $E = 260$ В/см эта зависимость в широкой области значений магнитной индукции почти линейна. На фиг. 7.17 показана зависимость нормированной на значение $(\mu_H)_{B\to 0}$ холловской подвижности μ от напряженности электрического поля E



Фиг. 7.17. Зависимость нормированной холловской подвижности μ_H/μ_H (0) от напряженности электрического поля при $\mathbf{j} \parallel \langle 111\rangle$ и $\mathbf{B} \parallel \langle 0\bar{1}1\rangle$ и $\langle 011\rangle$ [45].

при $\mathbf{B}\parallel\langle 0\bar{1}1\rangle$ (кривые *1*) и при $\mathbf{B}\parallel\langle 01\bar{1}\rangle$ (кривые *2*), когда $\mathbf{j}\parallel\langle 111\rangle$ [45]. Расчетные данные (не показанные на фиг. 7.17) качественно согласуются с этими кривыми.

На фиг. 7.18 показана схема, представляющая изоэнергетические поверхности ⟨001⟩, ⟨010⟩, а также ⟨100⟩ (вид сверху). В случае отсутствия



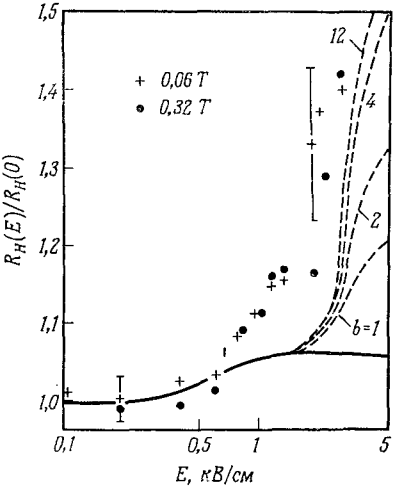
Фиг. 7.18. Схематическая диаграмма, представляющая влияние магнитного поля на скорость дрейфа в каждой долине и вклад каждой долины в ток [45].

магнитного поля сплошные одинарные стрелки указывают скорость дрейфа, двойные стрелки — плотность тока каждой долины. Электрическое поле приложено в направлении ⟨011⟩. Наложение магнитного поля в направлении ⟨100⟩ приводит к возникновению поля Холла E_H, показанного на фигуре стрелкой такой же длины, что и приложенное электрическое поле, так что суммарное поле направлено вдоль оси ⟨010⟩. Штриховыми стрелками указаны скорости дрейфа и плотности тока при наличии магнитного поля; скорость дрейфа в долине ⟨010⟩ сильно уменьшилась вследствие возрастания эффективной массы. Тем не менее эта долина дает наибольший вклад в ток благодаря увеличению ее заселенности.

При еще больших напряженностях поля происходит переброс носителей заряда в неэквивалентные долины, который рассматривается в следующем параграфе.

§ 7. Неэквивалентное междолинное рассеяние. Отрицательная дифференциальная проводимость и осцилляции Ганна

Как показано на фиг. 2.26, кроме обычных минимумов ⟨111⟩ в зоне проводимости германия имеются вышележащие минимумы в точке $\mathbf{k} = 0$, а также вдоль оси ⟨100⟩ и эквивалентных осей. Вследствие сильной кривизны минимума в точке $\mathbf{k} = 0$ плотность состояний в нем очень мала, и поэтому число электронов, которые могут быть переброшены в эту долину, ничтожно мало. Однако электроны могут быть переброшены в минимумы ⟨100⟩, такие, как в кремнии, которые находятся на 0,18 эВ выше минимумов ⟨111⟩. На фиг. 7.19 показаны экспериментальные и теоретические результаты исследования коэффициента Холла R_H в германии n-типа при $T = 200$ К, когда вектор плотности тока $\mathbf{j}$ параллелен оси ⟨100⟩, симметричной по отношению ко всем обычно заполненным долинам ⟨111⟩ [46]. Коэффициент R_H сильно возрастает выше 1 кВ/см. Считают, что это происходит вследствие переброса электронов в долины ⟨100⟩, где подвижность намного ниже, чем в обычно заполненных долинах. Штриховые кривые рассчитаны для различных отношений подвижностей b. Если бы электроны в долинах ⟨100⟩ были неподвижны, коэффициент Холла $R_H \sim 1/n_{\langle 111\rangle}$ возрастал бы по мере уменьшения числа электронов $n_{\langle 111\rangle}$ в обычно заполненных долинах ⟨111⟩. Результаты дальнейших экспериментальных

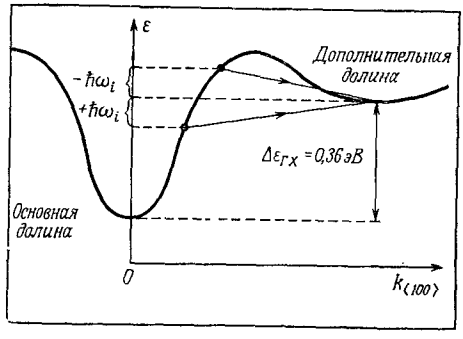


Фиг. 7.19. Зависимость коэффициента Холла для n-Ge, нормированного на единицу при $E = 0$, от напряженности поля E при температуре решетки $T = 200$ К и $\mathbf{j} \parallel \langle 100\rangle$.

Сплошная кривая рассчитана для электронов только в долине ⟨111⟩. Штриховые кривые соответствуют переброску электронов в долины ⟨100⟩ и неэквивалентному междолинному рассеянию. У штриховых кривых указаны использованные в расчетах значения отношения подвижностей в долинах двух типов.

исследований n-Ge обсуждаются в конце этого параграфа.

Рассмотрим теперь наиболее простой и эффектный случай GaAs n-типа, где основная долина в точке $\mathbf{k} = 0$ находится ниже всех долин в зоне проводимости, а дополнительные долины $\langle 100 \rangle$, такие, как в кремнии, находятся на $\Delta\varepsilon_{\Gamma X} = 0{,}36$ эВ выше основной долины, как показано на фиг. 7.20. Эффективная масса в основной долине равна $0{,}07\, m_0$, а в шести дополнительных долинах весьма вероятно значение $0{,}4 m_0$. (Значение



Фиг. 7.20. Основная и дополнительная долины в зоне проводимости арсенида галлия (показано схематически).

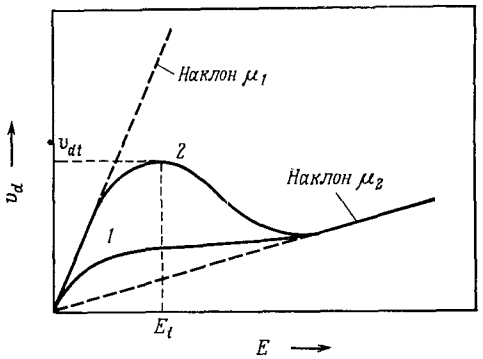
Сплошные прямые указывают электронные переходы между долинами, сопровождающиеся испусканием или поглощением междолинного фонона.

$0{,}4 m_0$ наблюдается в n-GaP, где ниже всех находятся долины $\langle 100 \rangle$.) Поскольку эффективная масса плотности состояний в одной долине пропорциональна $m^{3/2}$, согласно (3.1.31), мы будем в дальнейшем рассматривать вместо шести только одну дополнительную долину с эффективной массой $(0{,}4^{3/2} \cdot 6)^{2/3} m_0 = 1{,}3 m_0$.

Вследствие малой эффективной массы в основной долине электроны очень сильно разогреваются электрическим полем и приобретают энергию $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$, т. е. 0,36 эВ, при $E \approx 3$ кВ/см. До достижения этой энергии подвижность не испытывает значительного изменения вследствие рассеяния на полярных оптических фононах (гл. 6, § 12). Когда $E \approx 3$ кВ/см, наступает переброс электронов в дополнительные долины, где электроны становятся тяжелыми, время релаксации их импульса уменьшается вследствие рассеяния между этими долинами и вследствие большей плотности состояний в этих долинах. В результате подвижность в дополнительных долинах составляет только 150 см^2/(В·с) [в GaP, где ниже всех находятся X-долины, наблюдается $\mu = 80$ см^2/(В·с)], тогда как в центральной Г-долине

подвижность составляет 6000—8000 см^2/(В·с) в зависимости от чистоты (все данные соответствуют комнатной температуре). Как и в случае эквивалентного междолинного рассеяния, изменение импульса при переброске электронов происходит за счет испускания или поглощения фононов (фиг. 7.20 и § 5 данной главы).

Эти соображения приводят к двум возможным типам зависимости скорости дрейфа от поля, показанным на фиг. 7.21. При малых напряженностях поля наклон кривой определяется высокой подвижностью μ_1 в центральной долине, тогда как в



Фиг. 7.21. Зависимость скорости дрейфа от напряженности электрического поля при наличии переходов из основной долины (подвижность μ_1) в дополнительную (подвижность μ_2).

области сильных полей наклон определяется низкой подвижностью μ_2 в дополнительных долинах, если все электроны перешли в эти долины. Кривая *2* обнаруживает область отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП), а кривая *1* всюду имеет положительный наклон. Тип наблюдаемой кривой зависит от отношения интервала энергий $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ к тепловой энергии k_BT, которая при комнатной температуре составляет 0,026 эВ. Так как в GaAs это отношение очень велико, при комнатной температуре в чистом GaAs реализуется характеристика второго типа. С увеличением концентрации примесей сначала возрастает пороговое поле E_t, а затем область ОДП полностью исчезает.

В GaSb *n*-типа основная долина (Г) тоже самая низкая, однако лежащие выше долины находятся на осях ⟨111⟩ (L), а энергетический зазор между этими долинами $\Delta\varepsilon_{\Gamma L} = 0{,}075$ эВ. Эта энергия лишь втрое больше тепловой энергии при комнатной температуре. В силу этого ОДП не наблюдается. В InSb энергия $\Delta\varepsilon_{\Gamma L}$ составляет 0,5 эВ, но ширина запрещенной зоны

$\Delta\varepsilon_G$ составляет только 0,2 эВ, и, за исключением очень коротких интервалов времени порядка 10^{-9} с, наступает ударная ионизация, а не переброс электронов [47].

Представление об ОДП при перебросе электронов в GaAs и $GaAs_xP_{1-x}$ впервые выдвинули Ридли и Уоткинс [48, 49], а также Хилсум [50]. Эти авторы рассмотрели также возможности генерации колебаний тока на частотах вплоть до 10^3 ГГц, а также применение для целей усиления в этой области частот. Ганн [51] наблюдал осцилляции в GaAs и InP n-типа на частотах между 0,47 и 6,5 ГГц при напряженностях электрического поля E, превышающих 3 кВ/см. Дальнейшие эксперименты показали, что это были осцилляции, предсказанные в работах [48—50]. (Исторический обзор см. в работе [53].)

В расчетах ОДП последуем упрощенной модели Хилсума [50]. Он предположил, что в основной долине (индекс 1) и дополнительных долинах (индекс 2) температуры электронов одинаковы. Отношение концентраций электронов $\eta = n_1/n_2$ определяется отношением эффективных плотностей состояний N_{c1}/N_{c2} и разностью энергий долин $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$:

$$\eta = \frac{N_{c1}}{N_{c2}} \exp \frac{\Delta\varepsilon_{\Gamma X}}{k_B T_e}. \tag{7.7.1}$$

В последующих публикациях (см., например, [28]) были проведены расчеты без этих упрощающих предположений, что привело к лучшему согласию с экспериментальными результатами. Уравнение (7.7.1) приводит к хорошему приближению для $n_1 = n\eta/(1+\eta)$ и $n_2 = n/(1+\eta)$ и к проводимости

$$\sigma = |e|(n_1\mu_1 + n_2\mu_2) = |e| n\mu_2 \frac{\eta b + 1}{\eta + 1}, \tag{7.7.2}$$

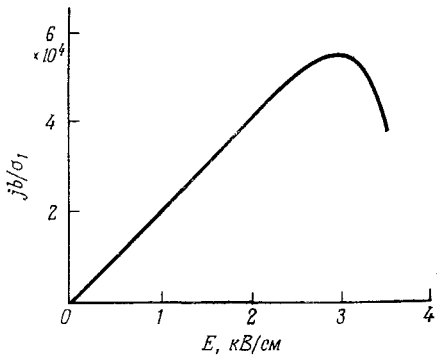
где $b = \mu_1/\mu_2$ — отношение подвижностей. Если к нитевидному образцу длиной L и сечением A приложено напряжение V, то ток $I = \sigma AV/L$ как функция V имеет наклон, определяемый производной

$$\frac{dI}{dV} = \frac{A}{L}\left(\sigma + V\frac{d\sigma}{dV}\right) = \frac{A}{L}\sigma\left(1 + \frac{E}{\sigma}\frac{d\sigma}{dE}\right) =$$
$$= \frac{A}{L} n|e|\mu_2 \frac{\eta b + 1}{\eta + 1}\left[1 - \frac{\eta(b-1)}{(\eta+1)(\eta b+1)}\frac{\Delta\varepsilon_{\Gamma X} E}{k_B T_e^2}\frac{dT_e}{dE}\right]. \tag{7.7.3}$$

Знак производной dI/dV сильно зависит от dT_e/dE, что было рассчитано на основе (6.12.26) и уравнения баланса энергии (4.13.6). Полученная таким образом вольтамперная характеристика показана на фиг. 7.22. Пороговое значение напряженности поля 3 кВ/см, рассчитанное с использованием сдвинутого

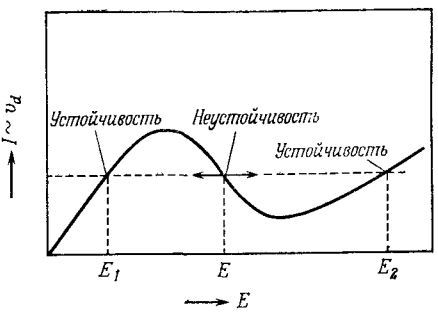
распределения Максвелла — Больцмана, не изменяется заметно при использовании распределения, полученного из решения уравнения Больцмана.

Рассмотрим теперь генерацию колебаний в области ОДП. На основе фиг. 7.23 можно показать, что рабочая точка в области ОДП неустойчива [7, 55]. При средней напряженности поля E образуются две области длиной l_1 и l_2 с напряженностями поля E_1 и E_2, так что полное напряжение $V = E_1 l_1 + E_2 l_2$. Домен



Фиг. 7.22. Зависимость плотности тока от электрического поля, рассчитанная для n-GaAs при $T = 373$ К с учетом полярного оптического рассеяния [50].

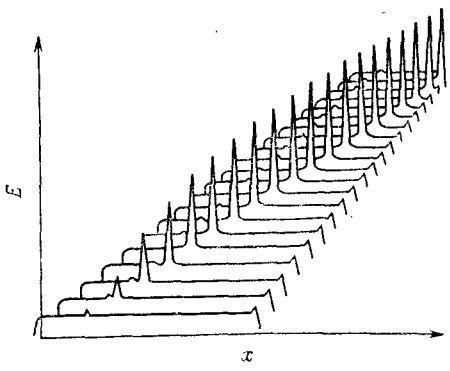
сильного поля не фиксирован локально, но дрейфует с электронами через кристалл. Внутри домена большинство электронов принадлежит дополнительным долинам, причем скорость дрейфа этих тяжелых электронов равна скорости дрейфа легких электронов вне домена. Домен с напряженностью поля E_2, показанной на фиг. 7.23, имеет плоскую вершину. Однако такой до-



Фиг. 7.23. Неустойчивость в области отрицательной дифференциальной проводимости.

мен с плоской вершиной в GaAs не наблюдался [55]. На фиг. 7.24 показано действительное распределение поля в образце через последовательные промежутки времени. Домен образуется на некоторой неоднородности легирования вблизи катода и, нарастая, движется к аноду. После его исчезновения в аноде возникает новый домен. В этом случае частота повторения генерации домена равна частоте осцилляций, определяемой отношением v_d/L, где $v_d \approx 10^7$ см/с — скорость дрейфа, L — длина образца. Если $L = 0{,}1$ мм, то получается частота около 1 ГГц, т. е. в диапазоне сверхвысоких частот. Генерация

СВЧ-волн постоянным током в кусочке кристалла, который достаточно прочен и имеет большой срок действия по сравнению с вакуумными приборами, находит важные применения в радиолокации в системах дистанционной связи; генерирующий кристалл называется диодом Ганна (конкурирующим прибором является диод Рида, см. гл. 10, § 2).



Фиг. 7.24. Домен сильного поля зарождается на неоднородности легирования и, нарастая, движется в длинном образце к аноду [54].

Расчет скорости роста домена сильного поля мы начнем с уравнения Пуассона, рассматривая для простоты одномерный случай

$$\frac{\partial E}{\partial x} = |e| \frac{n - N_D}{\varkappa \varkappa_0}. \tag{7.7.4}$$

Концентрацию доноров N_D и диэлектрическую проницаемость $\varkappa$ считаем постоянными, тогда как концентрация носителей заряда n меняется во времени t:

$$n = n_0 + \Delta n \exp(i\omega t); \tag{7.7.5}$$

аналогично этому плотность тока

$$j = j_0 + \Delta j \exp(i\omega t) \tag{7.7.6}$$

и напряженность электрического поля

$$E = E_0 + \Delta E \exp(i\omega t), \tag{7.7.7}$$

где $\Delta n \ll n_0$, $\Delta j \ll j_0$ и $\Delta E \ll E_0$. В плотности тока учитываем дрейфовый и диффузионный члены, а также ток смещения:

$$j = n|e|v_d - |e| D \frac{\partial n}{\partial x} + \varkappa \varkappa_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{7.7.8}$$

Коэффициент диффузии D считаем независимым от поля. Для случая малых сигналов получаем

$$\Delta j = n_0 |e| \frac{\partial v_d}{\partial E} \Delta E + |e| v_d \Delta n - |e| D \frac{\partial \Delta n}{\partial x} + i\omega \varkappa \varkappa_0 \Delta E. \tag{7.7.9}$$

Величину Δn и ее производную находим из (7.7.4):

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial x} = \frac{|e|}{\varkappa\varkappa_0}\Delta n, \qquad \frac{\partial^2 \Delta E}{\partial x^2} = \frac{|e|}{\varkappa\varkappa_0}\frac{\partial \Delta n}{\partial x}. \tag{7.7.10}$$

Для волны вида $\Delta E \sim \exp(-iqx)$ с волновым вектором $\mathbf{q}$ левые части (7.7.10) равны соответственно $-iq\,\Delta E$ и $-q^2\Delta E$. Используя это, вместо (7.7.9) получаем

$$\Delta j = \varkappa\varkappa_0\left(\tau_d^{-1} + i\omega - iqv_d + q^2D\right)\Delta E, \tag{7.7.11}$$

где τ_d — дифференциальное время максвелловской релаксации:

$$\tau_d^{-1} = \frac{n_0|e|}{\varkappa\varkappa_0}\frac{\partial v_d}{\partial E}. \tag{7.7.12}$$

В условиях постоянного тока $\Delta j = 0$ электрическая волна, распространяющаяся в кристалле, имеет угловую частоту

$$\omega = qv_d + i\left(\tau_d^{-1} + q^2D\right). \tag{7.7.13}$$

Мнимая часть частоты ω характеризует затухание волны:

$$\exp(i\omega t) = \exp\left(iqv_d t\right)\exp\left[-\left(\tau_d^{-1} + q^2D\right)t\right]. \tag{7.7.14}$$

Действительная часть определяет фазовую скорость, равную скорости дрейфа электронов, $\mathrm{Re}(\omega)/q = v_d$. Поскольку величина τ_d^{-1} пропорциональна производной $\partial v_d/\partial E$, в области ОДП она отрицательна. Если наклон в этой области достаточно крутой, так что $-\tau_d^{-1} > q^2D$, то (7.7.14) описывает экспоненциальный рост амплитуды, которая затем выходит на насыщение (фиг. 7.24). Форма импульса домена может быть исследована путем анализа Фурье. В таком случае для каждой гармоники должен быть записан соответствующий член (7.7.7). Диффузия вследствие ее тенденции к выравниванию локального распределения электронов препятствует формированию домена.

Если диффузией можно пренебречь, а величины τ_d и v_d можно приравнять их средним по всему образцу значениям, то, решая полученное из (7.7.9) и (7.7.10) дифференциальное уравнение, получаем

$$\Delta E = \Delta E(x) = \frac{\Delta jL}{\varkappa\varkappa_0 v_d s}\left[1 - \exp\left(-\frac{sx}{L}\right)\right], \tag{7.7.15}$$

где s — безразмерная комплексная величина

$$s = \frac{L}{v_d}\left(\tau_d^{-1} + i\omega\right). \tag{7.7.16}$$

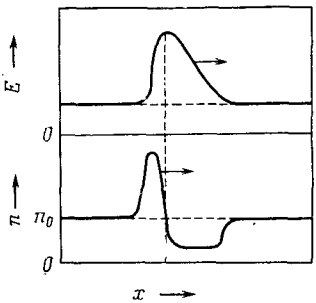
Налагая граничное условие $\Delta E(0) = 0$, находим импеданс образца $Z = Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = \frac{1}{A\,\Delta j}\int_0^L \Delta E\,dx = \frac{L}{A\varkappa\varkappa_0 v_d s}\left[L + \frac{L}{s}(e^{-s} - 1)\right] = \frac{L^2}{A\varkappa\varkappa_0 v_d}\,\frac{e^{-s} + s - 1}{s^2}. \tag{7.7.17}$$

Импеданс становится равным нулю в максимуме мнимой части частоты при $s = -1{,}77 \pm i\,1{,}08$, т. е. возникает неустойчивость тока при постоянном приложенном напряжении. Подставляя это значение в (7.7.16), получаем критическую длину образца

$$L_{\text{кр}} = 1{,}77 v_d(-\tau_d) = \frac{1{,}77\varkappa\varkappa_0 v_d}{n_0 |e| (-\partial v_d/\partial E)}. \tag{7.7.18}$$

Это минимальная длина образца, необходимая для формирования домена. В GaAs n-типа произведение $n_0 L_{\text{кр}}$ определяется максимальным значением $-\partial v_d/dE$, которое составляет



Фиг. 7.25. Схематический график зависимости напряженности электрического поля и плотности электронов от координаты при движении домена сильного поля вправо [56]

500 см^2/(В·с), средней скоростью дрейфа $v_d \approx 10^7$ см/с, а также диэлектрической проницаемостью $\varkappa = 13{,}5$. При этих значениях параметров получаем

$$n_0 L_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^{11}\ \text{см}^{-2}. \tag{7.7.19}$$

Например, если $L = 0{,}3$ мм, то минимальная концентрация $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$. С другой стороны, если образец слишком длинный, то при формировании домена поле вблизи катода уменьшается недостаточно для того, чтобы предотвратить возбуждение второго домена прежде, чем первый достигнет анода.

На фиг. 7.25 показана форма домена, движущегося слева направо. У переднего фронта имеется недостаток электронов, а у заднего фронта — их избыток: легкие Г-электроны захватываются передним фронтом домена и благодаря сильному электрическому полю превращаются в тяжелые Х-электроны.

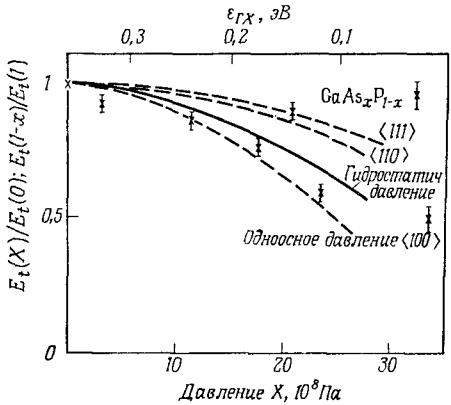
Поскольку их подвижность низка, они скапливаются у заднего фронта импульса, несмотря на действие сильного электрического поля. Если они отстают от домена, то немедленно превращаются в высокоподвижные Г-электроны и снова захватываются доменом. Так можно объяснить накопление электронов у заднего фронта импульса и наклон $\partial \Delta E/\partial x \sim \Delta n$ (7.7.10). Батчер и Фосетт [57] опубликовали численные расчеты, включающие диффузию носителей заряда. Рассчитанная форма домена действительно наблюдалась [58]. Из сравнения расчета с экспериментом [59] получено время междолинной релаксации τ_i, составляющее около 10^{-12} с, т. е. короткое по сравнению с временем дрейфа, равным 10^{-9} с.

Объяснение осцилляций Ганна перебросом электронов между неэквивалентными долинами было подкреплено двумя экспериментами, в которых разность энергий между долинами уменьшалась путем воздействия гидростатического давления на GaAs [60] или путем изменения состава (x) твердого раствора $GaAs_x P_{1-x}$ [61]. Эти эффекты хорошо известны по измерениям края оптического поглощения; они рассматриваются в гл. 11, § 2, где, например, на фиг. 11.13 показан сдвиг края поглощения в GaAs при гидростатическом давлении. Основная долина поднимается, а дополнительные долины опускаются при увеличении давления, и при $6 \cdot 10^9$ Па они оказываются на одном уровне на 0,49 эВ выше положения основной долины при нулевом давлении. Пороговое поле для возникновения осцилляций Ганна уменьшается с давлением, пока не достигает значения 1,4 кВ/см при давлении $2{,}6 \cdot 10^9$ Па. Выше этого давления осцилляции не возникают. С уменьшением разности энергий $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ между долинами требуется меньшая температура электронов для их переброса в дополнительные долины. Однако при слишком малых значениях $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ по сравнению с $k_B T$ область ОДП исчезает (кривая *1* на фиг. 7.20) и осцилляции прекращаются.

На фиг. 7.26 показаны зависимости порогового поля от гидростатического давления [60] (сплошная кривая) и одноосного давления в трех кристаллографических направлениях [62] (штриховые кривые). Наиболее сильное уменьшение порогового поля с увеличением давления происходит при одноосном давлении в направлении ⟨100⟩, что согласуется с расположением дополнительных долин на оси ⟨100⟩ и эквивалентных осях: две из этих долин, расположенные в направлении давления, движутся вниз и определяют пороговое поле, тогда как остальные четыре немного перемещаются вверх [63]. Одноосное давление в направлении ⟨111⟩ является симметричным по отношению ко всем долинам, и, поскольку оно действует лишь в одном из трех направлений в пространстве, его воздействие

составляет только $^1/_3$ воздействия гидростатического давления той же величины.

В GaP n-типа долины ⟨100⟩ самые низкие даже в отсутствие давления, как в случае зоны проводимости кремния. Если предположить, что в $GaAs_xP_{1-x}$ зависимость $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ от состава x линейна, причем $\Delta\varepsilon_{\Gamma X} = 0$ при $x = 0{,}5$, то шкалу давлений на фиг. 7.26 можно дополнить шкалой энергий $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ и на той же диаграмме представить экспериментальную зависимость порогового поля от состава [62] (точки); она хорошо согласуется с наблюдаемой зависимостью от давления.



Фиг. 7.26. Нормированное пороговое поле как функция давления в GaAs и как функция разности энергий между долинами, полученная на основе анализа твердых растворов $GaAs_xP_{1-x}$ (для наименьшего значения $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ пороговое поле соответствует изменению сопротивления, а не осцилляциям) [62].

Для технических применений диодов Ганна предпочтительны синусоидальные, а не импульсные колебания. Синусоидальные колебания обнаружены в InP; они объяснены с помощью модели трех долин с различными постоянными деформационного потенциала, характеризующими переброс электронов $\Gamma \to X$ и следующий за ним переход $X \to L$ с испусканием фонона [64—66][1]). Эти переходы считаются быстрыми по сравнению с обратным переходом из L-долины в начальную Γ-долину.

Если диод Ганна установлен в резонаторе, то частоту можно изменять в два раза без уменьшения коэффициента полезного действия. Диоды, для которых произведение nL превышает более чем в несколько раз 10^{12} см$^{-2}$ [см. (7.7.19)], дают наибольшую выходную мощность на частоте, которая несколько меньше, чем обратное время пролета домена через диод. Если же произведение nL меньше 10^{12} см$^{-2}$, то диод не может генерировать, но может быть применен для целей усиления на частоте, равной обратному времени пролета [68]. В генераторе с ограниченным накоплением объемного заряда (ОНОЗ) по-

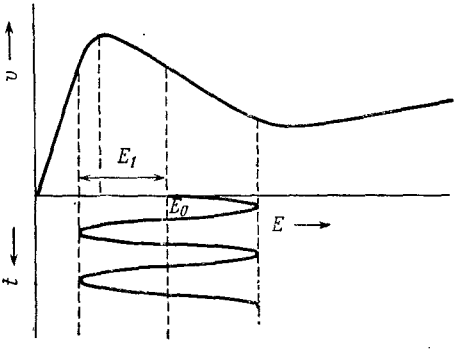
[1]) В работе [67] приведены характерные энергии соединений $A^{III}B^{V}$.

стоянное электрическое поле E_0 складывается с коллинеарным переменным полем $E_1\cos(2\pi\nu t)$ настолько большой амплитуды, что в течение небольшой части периода дифференциальная подвижность dv_d/dE становится положительной [69], как показано на фиг. 7.27. При достаточно высокой частоте ν объемный заряд почти не образуется: $n_0/\nu < 2\cdot10^5$ см$^{-3}$ Гц$^{-1}$. Благодаря падающей характеристике мощность, получаемая электроном от поля $E_0+E_1\cos(2\pi\nu t)$ за период $1/\nu$, может стать меньше мощности P_0, которую электрон получил бы только от одного постоянного электрического поля:

$$P_{\text{полн}} = e\nu\int_0^{1/\nu} Ev\,dt < P_0 = e\nu E_0\int_0^{1/\nu} v\,dt, \qquad (7.7.20)$$

т. е. выход $(P - P_{\text{полн}})/P_0$ положителен. Максимальное расчетное значение выхода составляет 11% для материала с подвижностью в слабых полях $\mu_0 = 5000$ см^2/(В·с) и 23% при $\mu_0 = 9000$ см^2/(В·с) [71].

В другом методе подавления процесса образования доменов Ганна диод Ганна покрывают изолирующим веществом с высо-



Фиг. 7.27. Изменение поля во времени в генераторе типа ОНОЗ [70].

кой диэлектрической проницаемостью, таким, как $BaTiO_3$ [72]. В упрощенной модели, согласно (7.7.12), отрицательное значение τ_d^{-1} может быть таким путем уменьшено до значения, при котором возможно усиление, а свободные колебания отсутствуют.

После открытия эффекта Ганна в GaAs и InP n-типа было показано, что осцилляции этого типа возникают и в некоторых других полупроводниках с похожей зонной структурой: CdTe [73], InSb [47], $Ga_xIn_{1-x}Sb$ [74] и InAs [75]. При температурах ниже 130 К осцилляции, хотя и намного меньшей амплитуды, наблюдались также в германии n-типа [76], что совсем удивительно, так как в этом случае подвижности для низших (L) долин [$3{,}9\cdot10^4$ см^2/(В·с) при 77 К] и для высших (X) долин [$5\cdot10^4$ см^2/(В·с) по наблюдениям в n-Si при 77 К] почти не различаются. Тем не менее Пэйдж [77] теоретически показал

возможность слабой ОДП выше 2—5 кВ/см при температуре 27—77 К, полагая при этом, что значение акустического деформационного потенциала для переходов L → X равно $1 \cdot 10^8$ эВ/см, а температура фононов $\Theta_i = 320$ К. Этим объясняются слабые осцилляции, наблюдавшиеся, например, для направлений тока вдоль оси ⟨100⟩ или ⟨110⟩, а также тот факт, что для тока в направлении ⟨111⟩ осцилляций нет. В последнем случае происходит перезаселение L-долин, приводящее к уменьшению подвижности, в силу чего последующий переброс в X-долины не ведет к возникновению области ОДП. Когда ток течет в направлении ⟨100⟩, заселенность L-долин не изменяется, но происходит переброс преимущественно в долины ⟨100⟩ с низкой подвижностью (в долины ⟨010⟩ и ⟨001⟩ переброс менее интенсивен); для тока в направлении ⟨110⟩ заселенности не слишком отличаются от значений, соответствующих току в направлении ⟨100⟩.

После наблюдения эффекта Ганна в германии *n*-типа возник вопрос, почему вместо области ОДП возникает область постоянного тока, когда частота осцилляций Ганна превышает максимальную частоту устройства, как это было в ранних исследованиях [76]. Было предположено, что распределение поля в образце может быть неоднородным, но статическим с формированием домена с плоской вершиной [1]). Из уравнения Пуассона (7.7.4) с $N_D = n_0$ и средней скоростью дрейфа $\langle v_d \rangle$, определяемой из соотношения

$$n_0 |e| \langle v_d \rangle = n(x) |e| v_d(E), \tag{7.7.21}$$

получаем явное выражение для $\partial E/\partial x$:

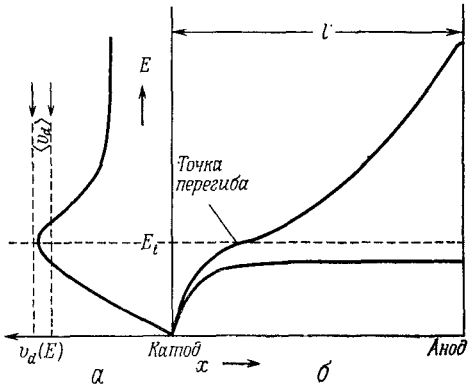
$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{|e| n_0}{\varkappa \varkappa_0} \left[\frac{\langle v_d \rangle}{v_d(E)} - 1 \right]. \tag{7.7.22}$$

Кривая $v_d(E)$ показана на фиг. 7.28, *а*; соответствующие зависимости $E(x)$ при двух значениях $\langle v_d \rangle$ показаны на фиг. 7.28, *б*. Если значение $\langle v_d \rangle$ ниже порогового, то поле E однородно, за исключением области вблизи катода, где кристалл сильно легирован при формировании металлического контакта. Если же значение $\langle v_d \rangle$ выше порогового, равного $\mathrm{Max}[v_d(E)]$, то из (7.7.22) получаем $\partial E/\partial x > 0$ для любых значений x, т. е. по всему образцу, с точкой перегиба при пороговой напряженности поля E_t. Если произведение концентрации электронов на длину образца удовлетворяет условию

$$n_0 L > \frac{\varkappa \varkappa_0 E_t}{|e|}, \tag{7.7.23}$$

[1]) Статический домен может формироваться в силу многих причин и не иметь плоской вершины. См., например, [100]. — *Прим. ред.*

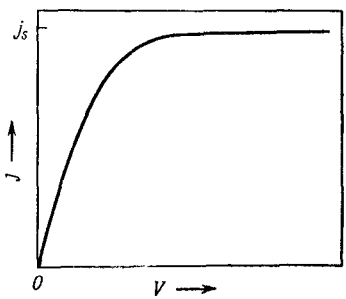
то, как показано на фиг. 7.29, плотность тока j лишь слегка возрастает с увеличением полного напряжения на образце при $j > n_0|e|\mathrm{Max}[v_d(E)]$; последнее значение принято называть током насыщения. Поскольку небольшие неоднородности легирования в образце приводят к большим неоднородностям поля,



Фиг. 7.28. Зависимость скорости дрейфа от поля (*а*), подобная кривой *2* на фиг. 7.21, и зависимость электрического поля от координаты (*б*) при двух значениях средней скорости дрейфа, указанных слева [76].

вблизи тока насыщения невозможно определить величину дифференциальной проводимости и ее знак.

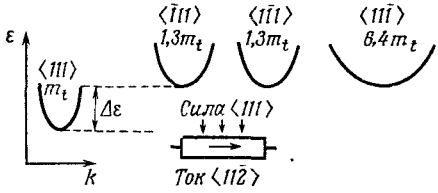
Рассмотрим наконец осцилляции Ганна в германии n-типа, подвергнутом одноосному давлению в направлении ⟨111⟩ при



Фиг. 7.29. Вольтамперная характеристика длинного образца, соответствующая ситуации, показанной на фиг. 7.28.

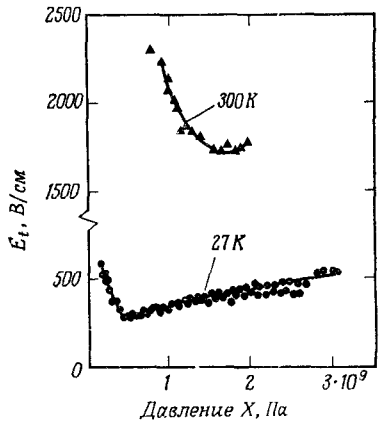
протекании тока в направлении $\langle 11\bar{2}\rangle$, перпендикулярном направлению давления. Одна L-долина, продольная ось которой параллельна направлению давления, движется вниз, а остальные — вверх. Как показано на фиг. 7.30, эффективные массы в направлении тока таковы: m_t — в нижней долине, $1{,}3m_t$ — в двух верхних долинах, $6{,}4m_t$ — в остальных верхних долинах,

где $m_t = 0{,}08m_0$ — поперечная масса. Пороговое значение поля как функция давления показано на фиг. 7.31 для концентраций электронов от 10^{14} до $1{,}6 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$. Минимум этой зависимости можно объяснить, исходя из предположения, что при высоких давлениях и соответственно больших разностях энергии для

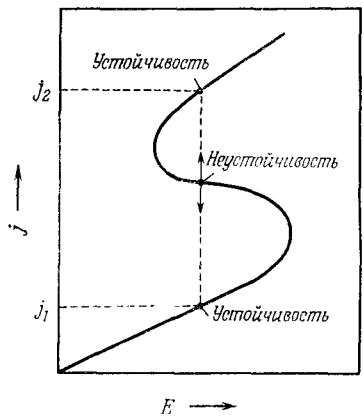


Фиг. 7.30. Сдвиг долин у дна зоны проводимости германия, вызванный одноосным давлением в направлении ⟨111⟩ (указаны значения эффективных масс в направлении тока; Δε = 10,2 мкэВ/атм) [5].

переброса электронов требуется высокая электронная температура; при таких значениях электронной температуры скорость дрейфа в каждой долине почти постоянна вследствие испускания фононов большой энергии [78].



Фиг. 7.31. Зависимость порогового поля от одноосного давления в направлении ⟨111⟩ в германии n-типа при температуре 27 и 300 К [5].



Фиг. 7.32. S-образная вольтамперная характеристика, соответствующая неустойчивости (формированию шнура тока).

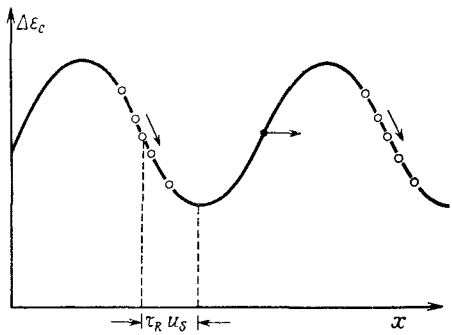
В аналогичных экспериментах с кремнием n-типа наблюдалось насыщение скорости дрейфа в полях $E > 15$ кВ/см при давлениях выше 5000 атм, однако осцилляции не наблюдались. Имеется библиография по эффекту Ганна [55, 79, 80].

Кроме эффекта Ганна существуют многие другие эффекты, которые приводят к контролируемой напряжением N-образной характеристике, показанной на фиг. 7.21. Так как эти эффекты

дают намного более низкую амплитуду или частоту колебаний по сравнению с эффектом Ганна, в настоящее время они не находят применения в приборах. В некоторых однородно легированных полупроводниках наблюдается контролируемая током S-образная характеристика, схематически показанная на фиг. 7.32; она приводит к формированию шнуров тока j_1 и j_2. Такое поведение было обнаружено, например, во время ударной ионизации компенсированного n-Ge (гл. 10). Подробности об эффектах такого рода можно найти, например, в работах Конуэлл [28] и Барнетта [81].

§ 8. Акустоэлектрический эффект

Появление постоянного электрического поля вдоль направления распространения акустической волны в полупроводнике называется акустоэлектрическим эффектом. Он возникает вследствие увлечения носителей волной, подобно движению сплавного леса к берегу или подобно переносу заряда в линейном



Фиг. 7.33. Зависимость потенциальной энергии от координаты при распространении акустической волны и скопление носителей заряда на переднем фронте волны.

ускорителе. На фиг. 7.33 показано синусоидальное изменение потенциальной энергии $\Delta\varepsilon_c$ в кристалле акустической волной в определенный момент времени. Подвижные носители заряда (показанные кружками) стремятся к скоплению в потенциальных впадинах, как показано стрелками у кривой. Однако, так как волна распространяется вправо со скоростью u_s, а для достижения равновесия требуется конечное время τ_R, носители заряда никогда не достигнут впадин, если $\omega\tau_R \approx 1$, где ω — угловая частота. Поэтому на передних фронтах волны концентрация электронов становится больше, чем на задних фронтах. Результирующая средняя сила действует на носители в направлении распространения волны. В конце концов носители

скапливаются у той грани образца, через которую из него выходит акустическая волна. В образце возникает постоянное электрическое поле. Если может протекать постоянный ток, то происходит передача энергии акустической волны электронному газу и волна затухает.

С другой стороны, акустическая волна усиливается постоянным током, если скорость дрейфа носителей несколько превышает скорость волны. В этом случае образуются скопления носителей на задних фронтах волны. Таким образом, оказывается возможным построить акустоэлектрические усилители и генераторы [82]. Необходимо отметить, что упомянутое в гл. 4, § 10, увлечение фононами отличается от акустоэлектрического эффекта; за последний ответственны когерентные акустические волны, а не некогерентные фононы.

Мы рассмотрим сначала акустоэлектрический эффект в неполярных многодолинных полупроводниках, таких, как германий n-типа. В пьезоэлектрическом полупроводнике, таком, как CdS, акустоэлектрический эффект намного сильнее, но CdS не принадлежит к многодолинным полупроводникам. Однако анализ для CdS в значительной степени похож на анализ соответствующего эффекта в n-Ge, поэтому мы рассмотрим его здесь.

Волна сдвига с частотой от 20 до 60 МГц, получаемая от кварца Y-среза, вводилась в кристалл n-Ge в направлении $\langle 100\rangle$; волна была поляризована в направлении $\langle 010\rangle$ [83—85]. Обозначим эти направления символами x и y соответственно. При смещении среды

$$\delta y = \delta y_1 \sin(\omega t - qx), \tag{7.8.1}$$

где δy_1 — амплитуда, а ω — угловая частота, мы получаем деформацию сдвига

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial \delta y}{\partial x} = -q\,\delta y_1 \cos(\omega t - qx), \tag{7.8.2}$$

и изменение потенциальной энергии, определяемое (7.1.21),

$$\Delta\varepsilon_e = \pm \frac{1}{3} \Xi_u \varepsilon_{xy}; \tag{7.8.3}$$

знак в (7.8.3) зависит от положения долины в зоне проводимости германия, как показано на фиг. 7.34. Следовательно, имеются два класса долин в зоне проводимости, обозначаемых индексами $+$ и $-$. Группирование электронов в долинах различных классов происходит с различными фазами. Удобно ввести формально акустический заряд $e_{ак}$, определяемый как

$$e_{ак} = \frac{1}{3} \frac{\Xi_u}{\sqrt{c_t}}, \tag{7.8.4}$$

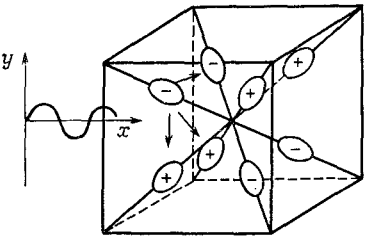
где c_t — упругая постоянная, обозначенная в теории упругости символом c_{44} (4.12.4), а также акустический потенциал

$$\phi = -\sqrt{c_t}q\,\delta y_1 \cos(\omega t - qx) = \phi_1 \cos(\omega t - qx). \qquad (7.8.5)$$

В этих обозначениях из (7.8.3) получаем

$$\Delta\varepsilon_c = \pm e_{\text{ак}}\phi. \qquad (7.8.6)$$

Предположим, что смещение среды, а следовательно, и амплитуда малы по сравнению со средним смещением при тепловых



Фиг. 7.34. Разделение изоэнергетических поверхностей в **k**-пространстве для германия n-типа на два класса (+ и −) при распространении поперечной акустической волны в реальном пространстве. Указана поляризация волны; для большей наглядности полуэллипсонды заменены эллипсондами. Куб не представляет зону Бриллюэна.

колебаниях; тогда концентрации носителей n_+ и n_- можно выразить в виде

$$n_\pm = n_0 \exp\left(\mp \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}\right) \approx n_0\left(1 \mp \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}\right), \qquad (7.8.7)$$

где n_0 — концентрация носителей в каждой долине при $\phi = 0$. Когда $\phi \neq 0$, при равновесии мы имели бы

$$n_+ - n_- = -2n_0 \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}. \qquad (7.8.8)$$

Естественно, равновесия нет, и скорость перехода $R_{+\to-}$ определяется выражением

$$R_{+\to-} = -R_{-\to+} = \frac{2}{3}\left\langle\frac{1}{\tau_i}\right\rangle\left(n_+ - n_- + 2n_0 \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}\right), \qquad (7.8.9)$$

где τ_i — время междолинного рассеяния (§ 5 данной главы), а множитель $^2/_3$ появляется потому, что только в двух из трех междолинных переходов электроны меняют класс, как показано стрелками на фиг. 7.34. Из условия сохранения числа частиц следует, что $n_+ + n_- = 2n_0$; поэтому из (7.8.9) получаем

$$R_{+\to-} = \frac{4}{3}\left\langle\frac{1}{\tau_i}\right\rangle\left[n_+ - n_0\left(1 - \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}\right)\right]. \qquad (7.8.10)$$

Из уравнения непрерывности

$$R_{+\to-} = \frac{\partial n_-}{\partial t} + \frac{\partial j_-}{\partial x} = -\frac{\partial n_+}{\partial t} - \frac{\partial j_+}{\partial x} \qquad (7.8.11)$$

и выражений для плотности потока частиц

$$j_{\pm} = \mp e_{\text{ак}} \frac{\partial \phi}{\partial x} n_{\pm} \frac{D_n}{k_B T} - D_n \frac{\partial n_{\pm}}{\partial x}, \tag{7.8.12}$$

а также соотношения Эйнштейна (между подвижностью и коэффициентом диффузии D_n) после некоторых алгебраических выкладок получаем

$$n_+ - n_0 = -n_0 (1 + i\omega\tau_R)^{-1} \frac{e_{\text{ак}}\phi}{k_B T}, \tag{7.8.13}$$

где введено зависящее от частоты время релаксации

$$\tau_R = \left(\frac{4}{3}\left\langle\frac{1}{\tau_i}\right\rangle + q^2 D_n\right)^{-1} \approx \left(\frac{4}{3}\left\langle\frac{1}{\tau_i}\right\rangle + \frac{\rho\omega^2}{c_t} D_n\right)^{-1}. \tag{7.8.14}$$

Из (7.8.14) следует, что релаксация распределения электронов определяется двумя процессами, а именно междолинным рассеянием и диффузией из сгустков. Средняя сила $\bar{F}$, действующая на частицу со стороны акустической волны:

$$\bar{F} = \left\langle -e_{\text{ак}} \frac{\partial \phi}{\partial x} (n_+ - n_0) \right\rangle \Big/ \langle n_0 \rangle, \tag{7.8.15}$$

получается из (7.8.5) и (7.8.13):

$$\bar{F} = eE_0 = \frac{\Xi_u^2 J}{9 c_t u_s^2 k_B T} \frac{\omega^2 \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2}, \tag{7.8.16}$$

где E_0 — напряженность акустоэлектрического поля, $u_s = \omega/q$ — скорость звука, $J = {}^1/_2 (\phi_1^2 u_s)$ — поток акустической энергии, усредненный по периоду волны. При $J = 1$ Вт/см^2, $f = 60$ МГц, $T = 77$ К, $\tau_i = 10^{-11}$ с, $\Xi_u = 16$ эВ, $c_t = 1{,}56 \cdot 10^{12}$ дин/см^2 и $u_s = 5{,}4 \cdot 10^5$ см/с, что соответствует германию, расчетное значение напряженности поля составляет 1 мкВ/см. Усиление волн дрейфующими носителями заряда рассматривается, например, в монографии [28].

По экспериментальным результатам [83—85], полученным в интервале температур от 20 до 160 К на пяти образцах различной чистоты (10^{14}—10^{16} см$^{-3}$), с помощью (7.8.16), (7.8.14) определены значения $\langle 1/\tau_i \rangle$, которые показаны на фиг. 7.35 как функции температуры. При больших температурах экспериментальные зависимости для всех кристаллов, в особенности для более чистых, совпадают со штриховой кривой, которая рассчитана на основе (7.5.2) с использованием значений $\lambda = 1$ (т. е. $T_e = T$), $\Theta_i = 315$ К и $w_2 = 10^{11}$ с$^{-1}$. Путем сравнения данных для наиболее чистого образца при низких температурах и частоте 20 МГц с данными при 60 МГц, когда $\omega^2\tau_R^2 \approx 1$, была определена с точностью до 10% постоянная деформационного

потенциала $\Xi_u = 16$ эВ. Отклонения экспериментальных данных от штриховой кривой приписываются рассеянию на ионизованных и нейтральных примесях.

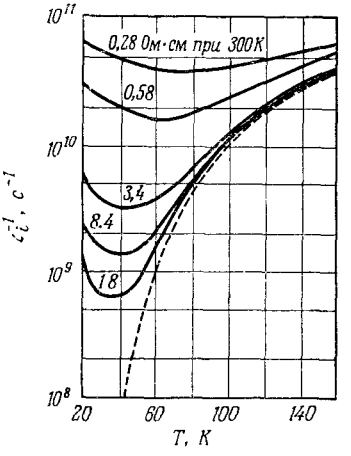
Рассмотрим теперь усиление продольных ультразвуковых волн в *пьезоэлектрических полупроводниках*. Это явление исследовали Уайт [86], а также Хатсон и Уайт [87]. Связь между электронами и решеткой за счет пьезоэлектрического эффекта обсуждалась в гл. 6, § 7. Диэлектрическое смещение определяется выражением (6.7.3), где относительную деформацию $(\nabla_r \delta r)$ удобно обозначить буквой S:

$$D = \varkappa\varkappa_0 E + e_{pz} S. \tag{7.8.17}$$

Напряжение T определяется выражением (6.7.10)

$$T = c_1 S - e_{pz} E, \tag{7.8.18}$$

где c_1 — упругая постоянная при постоянном поле; первый член справа представляет закон Гука, а второй — пьезоэлектрический эффект. Введем обозначения: n_0 — средняя концентрация электронов проводимости, $n_0 + fn_s$ — мгновенное локальное значение концентрации, причем en_s — плотность пространственного заряда; часть f пространственного заряда принимает участие в процессе проводимости, остальная часть захватывается на локальные состояния в запрещенной зоне. Такие ловушки в пьезоэлектрических полупровод-



Фиг. 7.35. Температурная зависимость скорости междолинного рассеяния в германии n-типа [83].

никах, подобных CdS или ZnO, играют большую роль, чем в германии и кремнии.

Плотность тока j дается выражением

$$j = |e|(n_0 + fn_s)\mu E - eD_n \frac{\partial (n_0 + fn_s)}{\partial x}, \tag{7.8.19}$$

где для электронов $e < 0$. Уравнение непрерывности имеет вид

$$e\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{7.8.20}$$

а уравнение Пуассона

$$\frac{\partial D}{\partial x} = en_s. \tag{7.8.21}$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени t, получаем

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sigma + \frac{e}{|e|}\mu f\frac{\partial D}{\partial x}\right)E\right] + D_n f\frac{\partial^3 D}{\partial x^3}, \quad (7.8.22)$$

где мы приняли во внимание (7.8.20). Если приложено постоянное поле E_0 и имеется переменное поле амплитуды $E_1 \ll E_0$, связанное с ультразвуковой волной:

$$\delta x = \delta x_1 \exp i(\omega t - qx), \quad (7.8.23)$$

$$E = E_0 + E_1 \exp i(\omega t - qx), \quad (7.8.24)$$

а также

$$D = D_0 + D_1 \exp i(\omega t - qx) = \\ = D_0 + (\varkappa\varkappa_0 E_1 - iqe_{pz}\,\delta x_1)\exp i(\omega t - qx), \quad (7.8.25)$$

где использованы (7.8.17) и (7.8.23), мы получаем

$$E_1 = i\frac{qe_{pz}\,\delta x_1}{\varkappa\varkappa_0}\left[1 - \frac{i}{\omega\tau_d(\gamma - i\omega/\omega_D)}\right]^{-1}; \quad (7.8.26)$$

здесь произведения D_1 на E_1 как величины второго порядка отброшены, τ_d — время диэлектрической релаксации (5.2.23), $\omega_D = c_1/\rho D_n$ — диффузионная частота, $\gamma = 1 - (e/|e|)f\mu E_0/u_s$ — дрейфовый параметр, μE_0 — скорость дрейфа, $u_s = \omega/q$ — скорость звука. Предположим, что (7.8.23) и (7.8.24) суть решения волнового уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 \delta x}{\partial t^2} = c_1\frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2} - e_{pz}\frac{\partial \Xi}{\partial x}, \quad (7.8.27)$$

где принято во внимание (7.8.18); тогда мы найдем зависимость между δx_1 и E_1:

$$-\rho\omega^2\,\delta x_1 = -c_1 q^2\,\delta x_1 + iqe_{pz}E_1. \quad (7.8.28)$$

Это можно записать в обычной форме

$$-\rho\omega^2\,\delta x_1 = -c_1' q^2\,\delta x_1, \quad (7.8.29)$$

если формально ввести комплексную упругую постоянную c_1'. Принимая во внимание (7.8.26), получаем для отношения c_1'/c_1

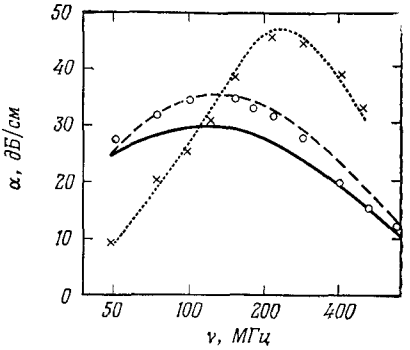
$$\frac{c_1'}{c_1} = 1 - i\frac{e_{pz}}{q}\frac{E_1}{\delta x_1} = 1 + K^2\left[1 - \frac{i}{\omega\tau_D(\gamma - i\omega/\omega_D)}\right]^{-1}, \quad (7.8.30)$$

где мы ввели коэффициент электромеханической связи $K^2 \ll 1$, согласно (6.7.9). Действительная часть величины c_1' равна просто произведению ρu_s^2, откуда $u_s = \mathrm{Re}\sqrt{c_1'/\rho}$, и, поскольку

$K^2 \ll 1$, мы можем приближенно представить величину u_s в виде

$$u_s = u_{s0}\left\{1 + \frac{1}{2}K^2\left[1 - \frac{\frac{1}{\omega\tau_d}\left(\frac{1}{\omega\tau_d} + \frac{\omega}{\omega_D}\right)}{\gamma^2 + \left(\frac{1}{\omega\tau_d} + \frac{\omega}{\omega_D}\right)^2}\right]\right\}, \qquad (7.8.31)$$

где $\sqrt{c_1/\rho} = u_{s0}$ — скорость звука при $K^2 = 0$. Если величину q в (7.8.23) считать комплексной, обозначая ее мнимую часть $\mathrm{Im}(q) = -\alpha$, то положительное значение α соответствует затуханию волны. Используя соотношение $\sqrt{\rho}\omega = \sqrt{c_1'}q$, которое



Фиг. 7.36. Зависимость коэффициента электронного затухания сдвиговой волны от частоты в фотопроводящем CdS [89].

Крестики и пунктирная кривая — экспериментальные и расчетные данные соответственно при $v_d/u_s = 1{,}25$ и $\rho = 2{,}85\cdot10^1$ Ом·см; кружки и сплошная кривая — при $v_d/u_s = 1{,}5$ и $\rho = 1{,}13\cdot10^4$ Ом·см; штриховая кривая — при $v_d/u_s = 1{,}5$ и $\rho = 9{,}2\cdot10^3$ Ом·см.

следует из (7.8.29), можно найти выражение для α в том же приближении, что и (7.8.31):

$$\alpha = -\omega\sqrt{\rho}\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1'}}\right) = \frac{1}{2}\frac{K^2}{\tau_d u_{s0}}\frac{\gamma}{\gamma^2 + \left(\frac{1}{\omega\tau_d} + \frac{\omega}{\omega_D}\right)^2}. \qquad (7.8.32)$$

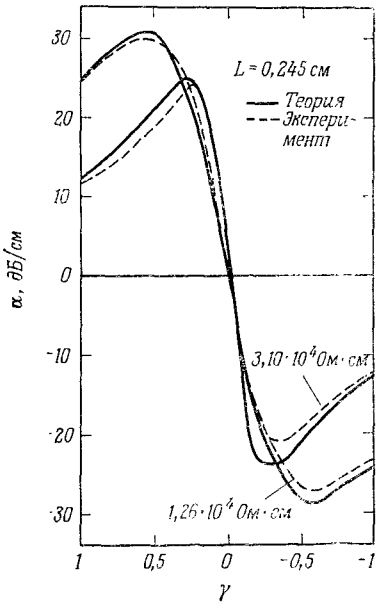
Постоянная затухания пропорциональна дрейфовому параметру γ. Принимая $f = 1$ и полагая, что скорость дрейфа μE_0 немного больше скорости звука u_s и имеет то же направление, получаем отрицательные, т. е. соответствующие усилению волны, значения величин γ и α. Для электронов ($e < 0$) постоянное поле E_0 должно быть отрицательным, т. е. противоположным направлению распространения волны.

Член $1/\omega\tau_d + \omega/\omega_D$ можно записать в виде $1/\omega\tau_R$, где зависящее от частоты время релаксации τ_R имеет почти такую же форму, как в (7.8.14), а именно

$$\tau_R = \left(\frac{1}{\tau_d} + \frac{\rho\omega^2}{\mathrm{Re}\,(c_1')}D_n\right)^{-1}. \qquad (7.8.33)$$

Наибольшее относительное уменьшение скорости звука, происходящее при $\gamma = 0$, составляет $K^2/\{2[1 + (u_{s0}/\omega L_D)^2]\}$, что

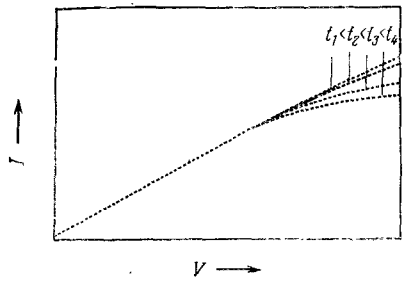
мало́, так как $K^2 \ll 1$; L_D — дебаевская длина, определяемая (5.2.24). Однако важно то, что коэффициент затухания отрицателен. Его максимальное значение $(K^2/8)\sqrt{\omega_D/\tau_d}/u_{s0} = K^2/8L_D$ достигается при $\gamma = -(2/u_{s0})\sqrt{D_n/\tau_d}$. Для CdS рассчитаны значения $\gamma = -10{,}1$ и $\alpha = -5{,}6 \cdot 10^3$ дБ/см; еще большее значение $-\alpha$ получено для ZnO, а именно $-\alpha = 1{,}3 \cdot 10^4$ дБ/см и $\gamma = -5{,}1$ [88].



Фиг. 7.37. Зависимость коэффициента электронного затухания сдвиговой волны от дрейфового параметра в фотопроводящем CdS при $T = 300$ К на частоте 50 МГц [89].

На фиг. 7.36 и 7.37 показаны экспериментальные зависимости коэффициента затухания α от частоты и от параметра γ соответственно для CdS [89]. Кривые рассчитаны по формуле (7.8.32). Согласие между экспериментальными и теоретическими результатами очень хорошее, хотя в действительности в экспериментах усиливались сдвиговые, а не продольные волны.

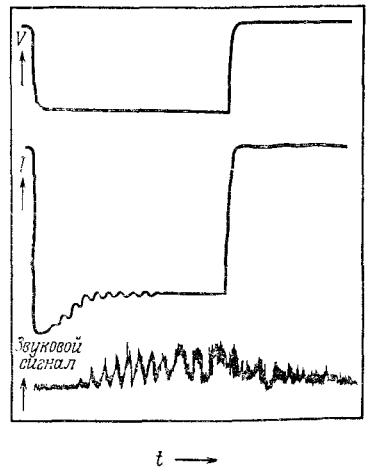
На фиг. 7.38 показаны вольтамперные характеристики для CdS, снятые через различные промежутки времени, от $\ll 1$ до



Фиг. 7.38. Вольтамперные характеристики сульфида кадмия, снятые через различные промежутки времени после приложения напряжения (фиг. 7.39).

80 мкс после приложения напряжения [90]. Отклонение от закона Ома при больших промежутках времени обусловлено генерацией дополнительного акустического потока, действующего

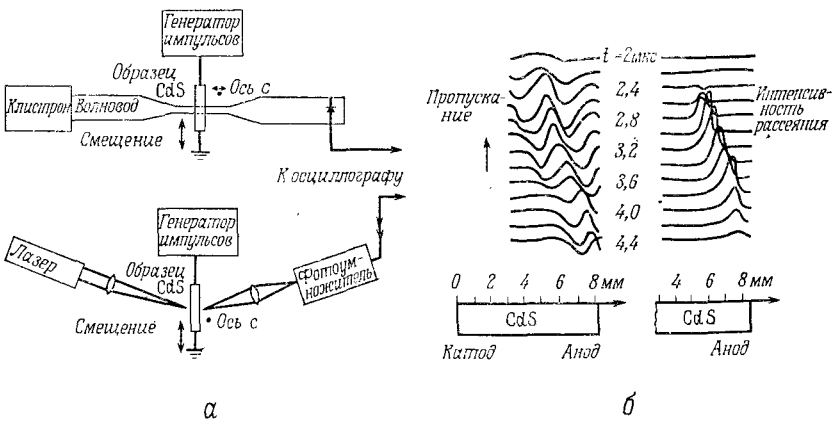
как рассеяние на акустических фононах, который возникает из тепловых колебаний решетки вследствие акустоэлектрического эффекта. Сигнал на выходе преобразователя (ультразвукового микрофона), установленного на образце, отчетливо указывает на наличие этой генерации [87] (фиг. 7.39, нижняя осциллограмма). Средняя осциллограмма на фиг. 7.39 показывает ток через образец. На ней видны



Фиг. 7.39. Возникновение ультразвукового потока в образце CdS с удельным сопротивлением $\rho = 3{,}3 \cdot 10^4$ Ом·см [90].

Верхняя осциллограмма — импульс напряжения 1,5 кВ длительностью 120 мкс; средняя — импульс тока; нижняя — сигнал от преобразователя, настроенного на 45 МГц.

осцилляции, обусловленные акустоэлектрическими доменами, движущимися в кристалле туда и обратно. Доказательство су-



Фиг. 7.40. Устройства для обнаружения акустоэлектрических доменов по прохождению СВЧ волн и по бриллюэновскому рассеянию (*а*); коэффициент пропуска СВЧ волн и интенсивность бриллюэновского рассеяния через различные промежутки времени после приложения напряжения (*б*). (Отрицательные пики обусловлены накоплением пространственного заряда.) [95, 96].

ществования этих доменов, в некоторых отношениях подобных доменам Ганна, было получено на основе наблюдений

рассеяния света на них (бриллюэновского рассеяния)[1]), а также на основе модуляции СВЧ-волн, прошедших через образец, как показано на фиг. 7.40 [95, 96]. Современные исследования направлены на выявление кинетики формирования домена, механизма нелинейных эффектов, таких, как параметрическое умножение частоты при высоких уровнях акустической мощности, а также электрических неустойчивостей, вызванных акустоэлектрическим эффектом (обзор см. в [88]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kittel C.*, Introduction to Solid State Physics, Wiley, New York, 1965, Ch. 4. (Имеется перевод 1-го изд.: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1962.)
2. *Herring C.*, Bell Syst. Techn. Journ., **34**, 237 (1955).
3. *Herring C., Vogt E.*, Phys. Rev., **101**, 944 (1956), **105**, 1933 (1957).
4. *Koenig S. H.*, Proc. Int. School of Physics, Vol. XXII, Acad. Press, New York, 1961, p. 515.
5. *Smith J. E.*, Jr., Appl. Phys. Letters, **12**, 233 (1968).
6. *Page E. G. S.* в книге Progress in Semiconductors, Vol. 8 (eds. A. F. Gibson, R. E. Burgess), Temple Press, London, 1960.
7. *Heinrich H., Kriechbaum M.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **31**, 927 (1970).
8. *Bulthuis K.*, Philips Res. Repts., **23**, 25 (1968).
9. *Shibuya M.*, Phys. Rev., **95**, 1385 (1954).
10. *Shibuya M.*, Physica, **20**, 971 (1954).
11. *Beer A. C.* в книге Solid State Physics, Suppl. **4** (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Acad. Press, New York, 1963, p. 228.
12. *Pearson G. L., Suhl H.*, Phys. Rev., **83**, 768 (1951).
13. *Pearson G. L., Herring C.*, Physica, **20**, 975 (1954).
14. *Seitz F.*, Phys. Rev., **79**, 372 (1950).
15. *Miyazawa H.*, Proc. 6th Int. Conf. Phys. Semicond., The Institute of Physics and The Physics Society, London, 1962, p. 636.
16. *Stirn R. J., Becker W. M.*, Phys. Rev., **141**, 621 (1966).
17. *Herring C., Geballe T. H., Kunzler J. E.*, Bell Syst. Techn. Journ., **38**, 657 (1959).
18. *Eagles P. M., Edwards D. M.*, Phys. Rev., **138**, A1706 (1965).
19. *Long D.*, Phys. Rev., **120**, 2024 (1960).
20. *Laff R. A., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **112**, 317 (1958).
21. *Haller H. O.*, Thesis, Univ. Wien, Austria, 1972.
22. *Neuringer L. J.*, Proc. 7th Intern. Conf. Semicond. Physics, Dunod, Paris, 1964, p. 379.
23. *Bruns H.*, Zs. Naturforsch, **19a**, 533 (1964).
24. *Goldberg C., Howard W. E.*, Phys. Rev., **110**, 1035 (1953).
25. *Streitwolf H. W.*, Phys. Stat. Sol., **37**, K47 (1970).
26. *Аше М., Бойченко Б. А., Бондар В. М., Сарбей О. Г.*, Труды 9-й Международной Конференции по физике полупроводников, «Наука», Л., 1969, стр. 793.
27. *Harrison W. A.*, Phys. Rev., **104**, 1281 (1956).
28. *Conwell E. M.*, High Field Effects in Semiconductors в книге Solid State Physics, Suppl. **9** (eds. F. Seitz, D. Turnbull, H. Ehrenreich), Acad. Press,

[1]) Бриллюэновским рассеянием удобно называть рассеяние видимого и инфракрасного света на акустических фононах в отличие от рассеяния на оптических фононах (гл. 11, § 7) и плазме твердого тела, известного как комбинационное рассеяние [91]; обзор см., например, в [92—94].

New York, 1967, p. 154. (Имеется перевод: *Э. Конуэлл*, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, «Мир», М., 1970.)
29. *Sasaki W., Shibuya M., Mizuguchi K.*, Journ. Phys. Soc. Japan, **13**, 456 (1958).
30. *Sasaki W., Shibuya M., Mizuguchi K., Hatoyama G.*, Journ. Phys. Chem. Sol., **8**, 250 (1959).
31. *Shibuya M.*, Phys. Rev., **99**, 1189 (1955).
32. *Reik H. G., Risken H.*, Phys. Rev., **126**, 1737 (1962).
33. *Nathan M. I.*, Phys. Rev., **130**, 2201 (1963).
34. *Franz W.*, Phys. Stat. Sol., **3**, 1260 (1963).
35. *Schweitzer D., Seeger K.*, Zs. Phys., **183**, 207 (1965).
36. *Schmidt-Tiedemann K. J.*, Philips Res. Repts., **18**, 338 (1963).
37. *Sladek R. J.*, Phys. Rev., **120**, 1589 (1960).
38. *Budd H. F.*, Phys. Rev., **140**, A2170 (1965).
39. *Asche M., Bondar V. M., Sarbej O. G.*, Phys. Stat. Sol., **31**, K143 (1969).
40. *Мовчан Е. А., Миселюк Е. Г.*, ФТП, **3**, 671 (1969).
41. *Kästner P., Röth E. P., Seeger K.*, Zs. Phys., **185**, 359 (1967).
42. *Аше М., Завьялов Ю. Г., Сарбей О. Г.*, Письма в ЖЭТФ, **13**, 401 (1971).
43. *Asche M., Maksimchuk A. G., Sarbej O. G.*, Phys. Stat. Sol. (b), **47**, K45 (1971).
44. *Heinrich H., Kriechbaum M.*, Phys. Stat. Sol. (b), **50**, K45 (1972).
45. *Kriechbaum M., Heinrich H., Wajda J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **33**, 829 (1972).
46. *Heinrich H., Lischka K., Kriechbaum M.*, Phys. Rev., **B2**, 2009 (1970).
47. *Smith J. E., Jr., Nathan M. I., McGroddy J. C., Porowski S. A., Paul W.*, Appl. Phys. Letters, **15**, 242 (1969).
48. *Ridley B. K., Watkins T. B.*, Proc. Phys. Soc., **78**, 293 (1961). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 17.)
49. *Ridley B. K.*, Proc. Phys. Soc., **82**, 954 (1963).
50. *Hilsum G.*, Proc. IRE, **50**, 185 (1962). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 37.)
51. *Gunn J. B.*, Solid State Commun., **1**, 88 (1963). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 51.)
52. *Gunn J. B.* в книге Plasma Effects in Solids (ed. J. Bok), Dunod, Paris, 1964, p. 199. (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 55.)
53. *Gunn J. B.*, Intern. Journ. Sci. Technol., **46**, 43 (1965).
54. *Mc Cumber D. E., Chynoweth A. G.*, IEEE Trans. **ED-13**, 4 (1966).
55 *Carroll J. E.*, Hot Electron Microwave Generators, Arnold, London, 1970, p. 105. (Имеется перевод: *Дж. Кэррол*, СВЧ-генераторы на горячих электронах, «Мир», М., 1972.)
56. *Butcher P. N., Fawcett W., Hilsum C.*, Brit. Journ. Appl. Phys., **17**, 841 (1966). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 131.)
57. *Butcher P. N., Fawcett W.*, Brit. Journ. Appl. Phys., **17**, 1425 (1966). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 153.)
58. *Gunn J. B.*, Journ. Phys. Soc. Japan, Suppl., **21**, 505 (1966). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 67.)
59. *Ridley B. K.*, Phys. Letters, **16**, 105 (1965).
60. *Hutson A. R., Jayaraman A., Chynoweth A. G., Corriel A. S., Feldman A. L.*, Phys. Rev. Letters, **14**, 639 (1965).
61. *Allen J. W., Shyam M., Chen Y. S., Pearson G. L.*, Appl. Phys. Letters, **7**, 78 (1965).
62. *Shyam M., Allen J. W., Pearson G. L.*, IEEE Trans. **ED-13**, 63 (1966). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 251.)
63. *Keyes R. W.* в книге Solid State Physics, **11** (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Acad. Press, New York, 1960, p. 149.
64. *Hilsum C., Rees H. D.*, Electr. Letters, **6**, 277 (1970).

65. *Hilsum C., Rees H. D.*, Electr. Letters, 6, 310 (1970).
66. *Law H. C., Kao K. C.*, Journ. Appl. Phys., **41**, 829 (1970).
67. *Hilsum C.*, Proc. 7th Intern. Conf. Semicond. Physics, Dunod, Paris, 1964, p. 1127.
68. *Thim H. W., Barber M. R., Hakki B. W., Knight S., Uenohara M.*, Appl. Phys. Letters, **7**, 167 (1965).
69. *Copeland J. A.*, Journ. Appl. Phys., **38**, 3096 (1967). (Имеется перевод в сборнике [97], стр. 169.)
70 *Acket G. A.* в книге Festkörperprobleme, IX (ed. O. Madelung) Pergamon, Oxford and Vieweg, Braunschweig, 1969, p. 282.
71. *Bott I. B., Hilsum C.*, IEEE Trans., **ED-14**, 492 (1967).
72. *Kataoka S., Tateno H., Kawashima M., Komamiya Y.*, Proc. 7th Intern. Conf. Microwave Optical Generation and Amplification, Hamburg, VDE Verlag, Berlin, 1968.
73. *Ludwig G. W.*, IEEE Trans., **ED-14**, 547 (1967).
74. *McGroddy J. C., Lorenz M. R., Plaskett T. S.*, Solid State Commun., **7**, 901 (1969).
75. *Allen J. W., Shyam M., Pearson G. L.*, Appl. Phys. Letters, **11**, 253 (1967).
76. *McGroddy J. C., Nathan M. I., Smith J. E.*, Jr., IBM Journ. Res. Develop., **13**, 543 (1969).
77. *Paige E. G. S.*, IBM Journ. Res. Develop., **13**, 562 (1969).
78. *Смит Дж., Мак-Гродди Дж., Натан М.*, Труды 9-й Международной Конференции по физике полупроводников, «Наука», Л., 1968, стр. 950.
79. *Gaylord T. K., Shah P. L., Rabson T. A.*, IEEE Trans., **ED-15**, 777 (1968).
80. *Gaylord T. K., Shah P. L., Rabson T. A.*, IEEE Trans., **ED-16**, 490 (1969).
81. *Barnett A. M.*, IBM Journ. Res. Develop., **13**, 522 (1969).
82. *Maines J. D., Paige E. G. S.*, Journ. Phys. C., **2**, 175 (1969).
83. *Weinreich G., Sanders T. M., Jr., White H. G.*, Phys. Rev., **114**, 33 (1959).
84. *Einspruch N. G.* в книге Solid State Physics, Vol. 17 (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Acad. Press, New York, 1965, p. 243.
85. *Pomerantz M.*, Proc. IEEE, **53**, 1438 (1965).
86. *White D. L.*, Journ. Appl. Phys., **33**, 2547 (1962).
87. *Hutson A. R., White D. L.*, Journ. Appl. Phys., **33**, 40 (1962).
88. *Meyer N. I., Jörgensen M. H.* в книге Festkörperprobleme, **X**, Pergamon, Oxford and Vieweg, Braunschweig, 1970, p. 21.
89. *White D. L., Handelman E. T., Hanlon J. T.*, Proc. IEEE, **53**, 2157 (1965).
90. *McFee J. H.*, Journ. Appl. Phys., **34**, 1548 (1963).
91. *Brillouin L.*, Ann. Phys., **17**, 88 (1922).
92. *Benedek G. B., Fritsch K.*, Phys. Rev., **149**, 647 (1966).
93. *Dickson R. W.*, IEEE Trans. **QE-3**, 85 (1967).
94. *Hope L. L.*, Phys. Rev., **166**, 883 (1968).
95. *Wettling W.* в книге II—VI Semiconducting Compounds (ed. D. G. Thomas), Benjamin, New York, 1967, p. 928.
96. *Hess K., Kuzmany H.*, Pros. IIth Intern. Conf. Phys. Semicond., PWN — Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1972, p. 1233.
97*. Новые методы полупроводниковой СВЧ-электроники. Эффект Ганна и его применение, Сборник переводов под ред. В. И. Стафеева, «Мир», М., 1968.
98*. *Кроткус А. И., Вашкявичюс Р. А., Репшас К. К.*, Литовск. физич. сборник, **XI**, 247 (1971); **XI**, 815 (1971).
99*. *Денис В. И., Пожела Ю. К.*, Горячие электроны, «Минтис», Вильнюс, 1971.
100*. *Бонч-Бруевич В. Л., Миронов А. Г., Звягин И. П.*, Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках, «Наука», М., 1972.

Глава 8. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МОДЕЛИ ГОФРИРОВАННЫХ СФЕР

Валентные зоны германия, кремния и соединений $A^{III}B^{V}$ имеют экстремум в точке $\mathbf{k} = 0$, а зона в этой точке оказывается вырожденной. Изоэнергетические поверхности имеют форму гофрированных сфер, о чем уже говорилось в гл. 2, § 4 (фиг. 2.29 и 2.30). В противоположность решетке алмаза решетка цинковой обманки, типичная для соединений $A^{III}B^{V}$, не имеет центра инверсии.

§ 1. Энергетические зоны и плоскость состояний

В гл. 2, § 2, где рассматривалась структура энергетических зон, не обсуждалась модель гофрированных сфер. Поэтому мы дадим здесь краткое представление о том, как эта модель выводится из уравнения Шредингера [1]).

Поскольку максимум валентной зоны расположен в точке $\mathbf{k} = 0$, удобно использовать метод, который называется $(\mathbf{kp})$-приближением. Этот метод основан на теории возмущений. Подстановка волновых функций Блоха $\psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\exp[i(\mathbf{kr})]$ в уравнение Шредингера одноэлектронной задачи приводит к уравнению

$$\frac{p^2}{2m} + V(r)u(\mathbf{r}) + \frac{\hbar(\mathbf{kp})}{m}u(\mathbf{r}) = \left(\varepsilon - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)u(\mathbf{r}), \qquad (8.1.1)$$

где $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla_r$ — оператор импульса. При вычислении параметров зоны в окрестности $\mathbf{k} = 0$ член $\hbar(\mathbf{kp})/m$ считается малым возмущением. Собственные значения уравнения сокращенно обозначим

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}. \qquad (8.1.2)$$

Мы рассмотрим здесь только алмазоподобную решетку, симметрия которой в точке $\mathbf{k} = 0$ (соответствующей центру инверсии) такова, что члены, содержащие $\mathbf{k}$ в первой степени, обращаются в нуль, а ε меняется как $|\mathbf{k}|^2$ в любом из направлений $\mathbf{k}$-пространства. Следовательно, уравнение

$$H_{kp}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar(\mathbf{kp})}{m}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \varepsilon'\mathbf{u}(\mathbf{r}) \qquad (8.1.3)$$

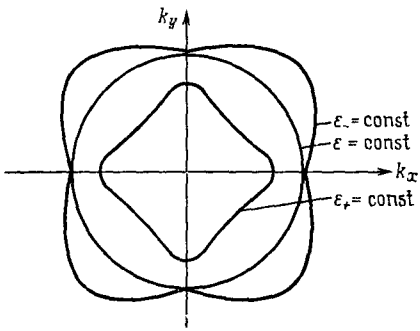
---

[1]) Ход дальнейших рассуждений заимствован из работы [1].

следует решать с точностью до второго порядка. Пока пренебрегается спин-орбитальным взаимодействием, функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ выражается как линейная комбинация атомных волновых функций:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}yz + \mathbf{b}zx + \mathbf{c}xy}{r^2}, \tag{8.1.4}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — неизвестные коэффициенты. Чтобы определить коэффициенты $\mathbf{a} = \mathbf{a}(k_x, k_y, k_z)$ и т. д., нужно решить систему линейных уравнений (8.1.3) (для компонент) примерно так, как в любой задаче физики, в которой содержится зависимость от векторной величины во второй степени, например в задаче определе-



Фиг. 8.1. Сечение плоскостью (100) изоэнергетических поверхностей гофрированных сфер.

ния зависимости магниторезистивного эффекта от напряженности магнитного поля. Для определителя уравнения (8.1.3) по аналогии с (4.3.53), пренебрегая линейными членами ($\gamma_0 = 0$), имеем

$$\begin{vmatrix} Ak_x^2 + B(k_y^2 + k_z^2) - \varepsilon & Ck_xk_y & Ck_xk_z \\ Ck_xk_y & Ak_y^2 + B(k_z^2 + k_x^2) - \varepsilon & Ck_yk_z \\ Ck_xk_z & Ck_yk_z & Ak_z^2 + B(k_x^2 + k_y^2) - \varepsilon \end{vmatrix} = 0, \tag{8.1.5}$$

где ε' заменено на ε, а A, B и C следует определить обычными методами теории возмущений. Не проводя этих вычислений, запишем (8.1.5) в плоскости k_xk_y ($k_z = 0$):

$$\left[(Ak_x^2 + Bk_y^2 - \varepsilon)(Ak_y^2 + Bk_x^2 - \varepsilon) - Ck_x^2k_y^2)\right](Bk_x^2 + Bk_y^2 - \varepsilon) = 0, \tag{8.1.6}$$

откуда следует

$$\varepsilon_\pm = \frac{A+B}{2}(k_x^2 + k_y^2) \pm \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4}(k_x^2 - k_y^2)^2 + C^2k_x^2k_y^2} \tag{8.1.7}$$

и

$$\varepsilon = B(k_x^2 + k_y^2). \tag{8.1.8}$$

Изоэнергетические кривые состоят из гофрированных (8.1.7) и нормальных окружностей (8.1.8), совокупность которых показана на фиг. 8.1.

Когда учитывается спин-орбитальное взаимодействие при $\mathbf{k}=0$, каждое из трех рассмотренных выше состояний становится двойным; следовательно, матрицу 6×6, которую мы сокращенно представим в виде

$$\begin{vmatrix} H_{kp} & 0 \\ 0 & H_{kp} \end{vmatrix},$$

следует дополнить матрицей, содержащей спиновые матрицы Паули. Приближенно полную матрицу 6×6 можно разбить на матрицы 2×2 и 4×4. Из матрицы 2×2 следует выражение, аналогичное (8.1.8), с той лишь разницей, что энергия смещена на величину Δ:

$$\varepsilon = A_0 k^2 - \Delta, \tag{8.1.9}$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, а A_0 — некоторый коэффициент. Из матрицы 4×4 следует выражение для энергии, подобное (8.1.7):

$$\varepsilon_{\pm} = A_0 k^2 \pm \sqrt{(B_0 k^2)^2 + C_0^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)}, \tag{8.1.10}$$

где B_0 и C_0 — еще два коэффициента [2]. В отщепленной валентной подзоне с законом дисперсии (8.1.9) полному моменту количества движения соответствует число $j = 1/2$; в подзонах легких и тяжелых дырок, описываемых выражением (8.1.10), $j = 3/2$.

Весьма часто анизотропия мала, т. е. $|C_0| \ll |B_0|$, и квадратный корень можно разложить в ряд. Тогда удобно ввести коэффициенты

$$B_0' = \sqrt{B_0^2 + \frac{C_0^2}{6}} \tag{8.1.11}$$

и

$$\Gamma_{\pm} = \mp \frac{C_0^2}{2B_0'(A_0 \pm B_0')}, \tag{8.1.12}$$

где верхний знак соответствует зоне легких дырок, а нижний — зоне тяжелых дырок. После подстановки новых коэффициентов выражение (8.1.10) принимает вид

$$\varepsilon_{\pm} = (A_0 + B_0') k^2 \pm$$

$$\pm B_0' k^2 \left[\sqrt{1 \pm \frac{2(A_0 \pm B_0')\Gamma_{\pm}}{B_0'} \left(\frac{k_x^2 k_y^2 + \ldots}{k^4} - \frac{1}{6} \right)} - 1 \right]. \tag{8.1.13}$$

Разложим корень в ряд, считая второй член подкоренного выражения малым и пренебрегая членами, содержащими $\Gamma_{\pm}$ в

более высоких степенях:

$$\varepsilon_{\pm} = (A_0 \pm B_0')\, k^2 \left[1 - \Gamma_{\pm}\left(\frac{k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2}{k^4} - \frac{1}{6}\right)\right]. \quad (8.1.14)$$

Если $k_x = k_y = k_z = k/\sqrt{3}$, то второй член равен $\Gamma/6$ и ряд сходится даже в случае легких дырок в Si при 4 K, когда $2(A_0 + B_0')\,\Gamma_{\pm}/B_0' \approx 4$; следовательно, такое приближение приемлемо. Множитель

$$\frac{k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2}{k^4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{k_x^4 + k_y^4 + k_z^4}{k^4}\right) \quad (8.1.15)$$

обозначим $-q$ и введем полярные координаты:

$$-q = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} - \sin^4\theta\,(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) - \cos^4\theta\right]. \quad (8.1.16)$$

Введем обозначение

$$g_{\pm} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\,\frac{A_0 \pm B_0'}{k_B T}\,(1 + \Gamma_{\pm} q); \quad (8.1.17)$$

тогда (8.1.14) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon_{\pm}}{k_B T} = -\,g_{\pm} k^2. \quad (8.1.18)$$

Величина $q_{\pm}$ положительна, так как энергия дырок отрицательна. Отсюда получаем формулы (2.1.32) для подзон легких и тяжелых дырок.

Концентрация дырок p определяется по формуле (3.2.14). Постоянная N_v вычисляется по формуле, аналогичной (4.2.29), с тем отличием, что энергия дырок отрицательна:

$$N_v = \frac{1}{4\pi^3}\int \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) d^3k = \frac{1}{4\pi^3}\int \exp(-\,gk^3)\, d^3k, \quad (8.1.19)$$

где для d^3k в полярных координатах имеем

$$d^3k = k^2\, dk \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{2}\, g^{-3/2}\sqrt{gk^2}\; d(gk^2) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \quad (8.1.20)$$

Для упрощения записи пренебрегаем индексами $\pm$. Интеграл по gk^2 от 0 до ∞ равен $\sqrt{\pi}/2$. При интегрировании по θ и φ разлагаем $g^{-3/2}$ в ряд, где g имеет вид (8.1.17):

$$g^{-3/2} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{A_0 \pm B_0'}{k_B T}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{3}{2}\,\Gamma q + \frac{15}{8}\,\Gamma^2 q^2 - \frac{35}{16}\,\Gamma^3 q^3 + \ldots\right). \quad (8.1.21)$$

После интегрирования по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π для эффективной плотности состояний N_v получаем

$$N_v = 2\left[\frac{m_0 k_B T}{2\pi\hbar^2 (A_0 \pm B_0')}\right]^{3/2} (1 + 0{,}05\Gamma + 0{,}0164\Gamma^2 + \\ + 0{,}000908\Gamma^3 + \ldots); \quad (8.1.22)$$

согласно (3.1.31), она равна $2(m_p k_B T/2\pi\hbar^2)^{3/2}$. Следовательно, эффективная масса плотности состояний, которую обозначим через m_d вместо m_p, равна

$$m_d = \frac{m_0}{A_0 \pm B_0'}(1 + 0{,}0333\Gamma + 0{,}01057\Gamma^2 - \\ - 1{,}8 \cdot 10^{-4}\Gamma^3 - 3 \cdot 10^{-5}\Gamma^4 + \ldots). \quad (8.1.23)$$

Для сравнения приведем изотропную эффективную массу электропроводности m_σ, вычисляемую в следующем параграфе:

$$m_\sigma = \frac{m_0}{A_0 \pm B_0'}(1 + 0{,}3333\Gamma - 0{,}02566\Gamma^2 - 9{,}5 \cdot 10^{-4}\Gamma^3 + \ldots). \quad (8.1.24)$$

В обоих выражениях минус в знаменателе соответствует тяжелым дыркам, а плюс — легким. Если предположить, что времена релаксации импульса для обоих типов дырок одинаковы, то полная электропроводность равна

$$\sigma = \left(\frac{p_h}{m_h} + \frac{p_l}{m_l}\right) e^2 \langle \tau_m \rangle, \quad (8.1.25)$$

где индексы h и l соответствуют тяжелым и легким дыркам.

Определение коэффициентов A_0, $|B_0|$ и $|C_0|$ из экспериментов по циклотронному резонансу обсуждается в гл. 11, § 11. В табл. 8.1 приведены эти коэффициенты и эффективные массы электропроводности для кремния и германия при 4 К (m_s — эффективная масса отщепленной валентной подзоны).

Таблица 8.1

Коэффициенты A_0, B_0, C_0 (в единицах $\hbar^2/2m_0$) и эффективные массы электропроводности для кремния [2] и германия [3]

	A_0	$\lvert B_0 \rvert$	$\lvert C_0 \rvert$	m_h/m_0	m_l/m_0	m_s/m_0
Si	4,1	1,6	3,3	0,49	0,16	0,245
Ge	−13,27	8,62	12,4	0,29	0,0437	0,075

Согласно (8.1.22), отношение констант N_v и, следовательно, концентраций легких и тяжелых дырок равно

$$\frac{p_l}{p_h} = \frac{(A_0 - B_0')^{3/2}}{(A_0 + B_0')^{3/2}(1 + 0{,}05\Gamma + \ldots)}, \qquad (8.1.26)$$

где подзона легких дырок считается изотропной. Это отношение равно 4% в Ge и 16% в Si.

Рассмотрим кратко влияние давления на валентные зоны германия и кремния [4]. Если не учитывается отщепленная валентная подзона, то изменение энергии $\Delta\varepsilon_v$ равно

$$\Delta\varepsilon_v = a(e_1 + e_2 + e_3) \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{b^2}{2}[(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2] + \frac{d^3}{4}(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2)}, \qquad (8.1.27)$$

где $e_1, \ldots, e_6$ — компоненты тензора деформации вида (7.1.2), (7.1.3), а a, b, d — константы деформационного потенциала. Для германия, например, $a = 3{,}1$ эВ, $b = 2{,}2$ эВ, $d = 4{,}5$ эВ; для кремния $a = \Xi_d + {}^1/_3\Xi_u = -1{,}65$ эВ, $b = 2{,}2$ эВ, $d = 5{,}3$ эВ [5]. При растяжении в направлении $\langle 111\rangle$, как это следует из первого члена в правой части (8.1.27), валентная зона опускается примерно на $4 \cdot 10^{-11}$ эВ·Н$^{-1}$м^2. При низких температурах (~ 4 К, если $e_1 > {}^1/_{450}$ в Ge) второй член существенно больше, чем тепловая энергия k_BT, и только одна из двух подзон занята дырками (нижняя в смысле энергии дырки). Изоэнергетическая поверхность этой подзоны — эллипсоид с центром в $k = 0$. Такой полупроводник с эллипсоидальным потолком валентной зоны называется расщепленным германием p-типа. Обзор явлений переноса в таком полупроводнике сделал Кёниг [6].

§ 2. Электропроводность

Количество дырок в отщепленной подзоне пренебрежимо мало, поэтому электропроводность определяется выражением (8.1.25), в котором используются эффективные массы (8.1.24). Для доказательства (8.1.24) запишем выражение электропроводности (4.2.30), в котором τ_m определим посредством (4.2.8), а энергию $|\varepsilon|$ — из (8.1.18):

$$\tau_m = \tau_0 (gk^2)^r. \qquad (8.2.1)$$

Величина $(\partial\varepsilon/\partial k_z)^2$ определяется из (8.1.13), а результат разлагается в ряд по степеням Γ. После интегрирования, подобного тому, в результате которого было получено выражение

(8.1.22), имеем [7]

$$\sigma = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{e^2\tau_0}{m_0} \left(r + \frac{3}{2}\right)! 2 \left(\frac{m_0 k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \frac{1 + 0{,}01667\Gamma + \ldots}{\sqrt{A_0 \pm B_0'}} \exp \frac{\varepsilon_v - \zeta}{k_B T}. \quad (8.2.2)$$

Если $\Gamma = 0$, $A_0 \pm B_0' = 1$, а эффективная масса равна m_0, то электропроводность равна $\sigma(m_0)$. На самом деле

$$\sigma = \frac{\sigma(m_0)}{\sqrt{A_0 \pm B_0'}} (1 + 0{,}01667\Gamma + 0{,}041369\Gamma^2 +$$

$$+ 9{,}0679 \cdot 10^{-4}\Gamma^3 + 9{,}1959 \cdot 10^{-4}\Gamma^4 + \ldots). \quad (8.2.3)$$

Из этого выражения непосредственно следует формула (8.1.24) для эффективной массы электропроводности. Результат в виде (8.2.3) подобен тому, который соответствует случаю носителей с изотропной эффективной массой.

§ 3. Эффект Холла и магниторезистивный эффект

При решении уравнения Больцмана для носителей в электрическом и магнитном полях в гл. 4, § 3, предполагалось, что зависимость $\varepsilon(\mathbf{k})$ имеет квадратичный вид. Поскольку в рассматриваемом здесь случае закон дисперсии (8.1.10) отличается от квадратичного, уравнение Больцмана может быть решено только при некоторых приближениях. Лэкс и Мавройдес [7] рассмотрели случай слабых магнитных полей, используя разложение в ряд по степеням $\mathbf{B}$. Рассмотрим кратко метод Макклюра [8], который можно применять в магнитных полях произвольной напряженности. Суть его заключается в том, что скорость дырки, определяемая (4.2.28) и меняющаяся вдоль орбиты дырки в $\mathbf{k}$-пространстве (годографа), разлагается в окрестности пересечения изоэнергетической поверхности и плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$, в ряд по степеням $\omega_c t$, где $\omega_c = \varkappa e B (A_0 - B_0')/m_0$ — частота движения по годографу в отсутствие электрического поля. Для большого отклонения изоэнергетической поверхности от сферы следует сохранить большее число членов разложения Фурье (до $5\omega_c t$ для тяжелых дырок).

Рассмотрим теперь случай слабого магнитного поля. Уравнение Больцмана (4.3.5), в котором $\nabla_r f = 0$, а $\mathbf{v}$ дается формулой (4.2.28), сводится к виду

$$\frac{e}{\hbar}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\hbar}[\nabla_k \varepsilon \mathbf{B}] \nabla_k f\right\} + \frac{f - f_0}{\tau_m} = 0 \quad (8.3.1)$$

и упрощается подстановкой выражения

$$f = f_0 - a\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \tag{8.3.2}$$

подобного (4.3.3). Время релаксации импульса τ_m считаем не зависящим от направления, так как экстремум зоны находится в точке $\mathbf{k} = 0$ и имеется симметрия кубической решетки. Тогда из (8.3.1) получаем

$$\frac{e}{\hbar}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{\hbar}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon \mathbf{B}]\right\}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\nabla_{\mathbf{k}}a - a\frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon^2}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\right) - \\ - \frac{a}{\tau_m}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0. \tag{8.3.3}$$

В случае слабого электрического поля произведениями $\mathbf{E}$ на a и $\mathbf{E}$ на $\nabla_{\mathbf{k}}a$ можно пренебречь. Произведение $([\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon \mathbf{B}]\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) = 0$; поэтому уравнение (8.3.3) принимает вид

$$a = \tau_m \frac{e}{\hbar}\left\{(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) + \frac{1}{\hbar}(\mathbf{B}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon \nabla_{\mathbf{k}}a])\right\} = \\ = \tau_m \frac{e}{\hbar}(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) + \tau_m e(\mathbf{B}\Omega)a, \tag{8.3.4}$$

где введен оператор

$$\Omega = \hbar^{-2}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon \nabla_{\mathbf{k}}]. \tag{8.3.5}$$

Для небольших значений a в первом приближении

$$a_1 = \tau_m \frac{e}{\hbar}(E\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon), \tag{8.3.6}$$

во втором приближении

$$a_2 = \tau_m \frac{e}{\hbar}(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) + \tau_m \frac{e^2}{\hbar}(\mathbf{B}\Omega)\tau_m(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) \tag{8.3.7}$$

и т. д. Для любого приближения плотность тока $\mathbf{j}$ определяется, как обычно [скорость дрейфа см., например, (4.2.19)], подстановкой величины a в выражение

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{4\pi^3\hbar}\int \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon a \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3k, \tag{8.3.8}$$

где a_1, a_2, ... имеют вид (8.3.6), (8.3.7) и т. д. Феноменологически $\mathbf{j}$ состоит из компонент

$$j_i = -\sum_j \sigma_{ij}E_j + \sum_{jk}\sigma_{ijk}E_jB_k + \sum_{jkl}\sigma_{ijkl}E_jB_kB_l + \ldots. \tag{8.3.9}$$

Из сопоставления коэффициентов следует

$$\sigma_{ij} = -\frac{e^2}{4\pi^3\hbar^2}\int \tau_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_j}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3k, \tag{8.3.10}$$

$$\sigma_{ijk} = \frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4}\int \tau_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\sum_{r,s}\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_r}\frac{\partial}{\partial k_s}\left(\tau_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_j}\right)\delta_{krs} d^3k, \tag{8.3.11}$$

где δ_{krs} — тензор перестановки ($\delta_{123} = +1$, $\delta_{132} = -1$, $\delta_{krs} = 0$, если два индекса одинаковы), и

$$\sigma_{ijkl} = -\frac{e^4}{4\pi^3\hbar^6}\int \tau_m \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_i}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} \times$$
$$\times \sum_{r,s,t,u} \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_r}\frac{\partial}{\partial k_s}\left[\tau_m \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_t}\frac{\partial}{\partial k_u}\left(\tau_m \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_j}\right)\right]\delta_{lrs}\delta_{ktu}\, d^3k. \quad (8.3.12)$$

Если τ_m зависит от ε, но не зависит от направления $\mathbf{k}$, его можно вынести перед знаком оператора $\boldsymbol{\Omega}$ в выражении (8.3.7), так как

$$\boldsymbol{\Omega}\tau_m(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon) = (\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon)\,\boldsymbol{\Omega}\tau_m + \tau_m\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon), \quad (8.3.13)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}\tau_m = \hbar^{-2}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\nabla_{\mathbf{k}}\tau_m] = \hbar^{-2}\frac{d\tau_m}{d\varepsilon}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon] = 0. \quad (8.3.14)$$

Следовательно, в подынтегральных выражениях (8.3.11) и (8.3.12) τ_m можно вынести из скобок и объединить с имеющимся там множителем τ_m; в результате появятся множители τ_m^2, τ_m^3 и т. д. Результаты интегрирования в обозначениях, которые использовались в (8.2.3), принимают вид [9—12][1])

$$\sigma_{ijk} = \sigma_{ijk}(m_0)\sqrt{A_0 \pm B_0'}\,(1 - 0{,}01667\Gamma + $$
$$+ 0{,}017956\Gamma^2 - 0{,}0069857\Gamma^3 + \ldots), \quad (8.3.15)$$

$$\sigma_{xxyy} = \sigma_{xxyy}(m_0)\,(A_0 \pm B_0')^{1/2}(1 - 0{,}2214\Gamma + $$
$$+ 0{,}3838\Gamma^2 - 0{,}0167\Gamma^3 + 0{,}00755\Gamma^4 + \ldots), \quad (8.3.16)$$

$$\sigma_{xxxx} = -2\sigma_{xyyx} = \frac{16}{1155}\sigma_{xxyy}(m_0)\,(A_0 \pm B_0')^{3/2}\Gamma^2 \times$$
$$\times(1 - 0{,}4295\Gamma + 0{,}0188\Gamma^2 + 0{,}0103\Gamma^3 + \ldots), \quad (8.3.17)$$

$$\sigma_{xyxy} = -\sigma_{xxyy}(m_0)\,(A_0 \pm B_0')^{3/2}(1 - 0{,}05\Gamma - $$
$$- 0{,}0469\Gamma^2 + 0{,}04\Gamma^3 - 0{,}00063\Gamma^4 + \ldots), \quad (8.3.18)$$

где $\sigma_{xxyy}(m_0) < 0$, и так как $\sigma_{xxxx} \neq 0$, то существует продольный магниторезистивный эффект, который является следствием гофрированности изоэнергетических поверхностей. Если воспользоваться обозначениями, приведенными в тексте перед формулой

[1]) В работах [11, 12] указывается, что Лэкс и Мавройдес приводят неверное значение компоненты σ_{xxyy}.

(7.4.19), то для магниторезистивного эффекта получаем

$$M_{100}^{100} = -\frac{\sigma_{xxxx}}{\sigma_0},$$

$$M_{110}^{110} = -\frac{\sigma_{xxxx} + \sigma_{xxyy} + \sigma_{xyyx} + \sigma_{xyxy}}{2\sigma_0},$$

$$M_{100}^{010} = -\frac{\sigma_{xxyy}}{\sigma_0} - \left(\frac{\sigma_{xyz}}{\sigma_0}\right)^2, \qquad (8.3.19)$$

$$M_{110}^{\bar{1}10} = -\frac{\sigma_{xxxx} + \sigma_{xxyy} - \sigma_{xyyx} - \sigma_{xyxy}}{2\sigma_0}.$$

Ограничимся этими примерами, соответствующими наиболее важным кристаллографическим направлениям; более подробные формулы можно найти в работах [9—13].

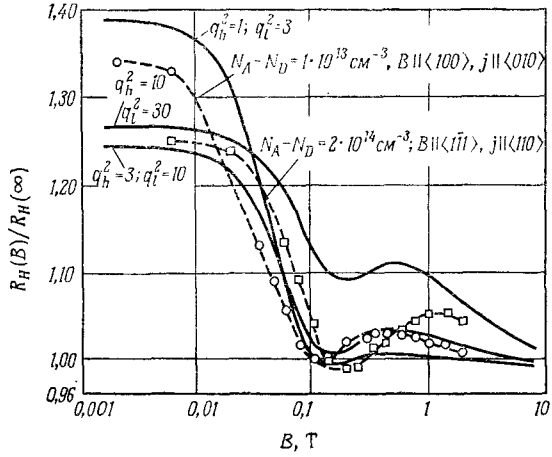
Для сопоставления этих расчетов и результатов экспериментальных исследований p-Ge [14] и p-Si [15] вклады в электропроводность и в магниторезистивный эффект легких и тяжелых дырок складываются по формулам (8.1.25) и (4.4.15) соответственно. При вычислении электропроводности вкладом легких дырок можно пренебречь вследствие небольшого их количества, однако в случае магниторезистивного эффекта учет легких дырок совершенно необходим. Предположение, что времена релаксации тяжелых и легких дырок одинаковы, легко обосновать. Любая легкая дырка быстро превращается в тяжелую вследствие рассеяния на колебаниях решетки по двум причинам: 1) избыток энергии легкой дырки уносит фонон, поэтому обратный процесс менее вероятен [$N_q + 1 > N_q$, см. (6.4.12)], и 2) плотность состояний в подзоне тяжелых дырок больше и, следовательно, вероятность перехода в эту подзону больше вероятности обратного перехода. Однако в случае рассеяния на ионизованных примесях времена релаксации легких и тяжелых дырок различаются. В диапазоне температур, в котором легкие дырки рассеиваются на ионизованных примесях, а тяжелые дырки — на колебаниях решетки, трудно дать удовлетворительное объяснение экспериментальных результатов.

Экспериментальная зависимость холловской подвижности от температуры в диапазоне от 120 до 300 К в чистом p-Ge ($N_A = 1{,}44 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $N_D = 0{,}19 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$ [16]) может быть представлена в виде

$$\mu_H = 2060 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с}) \cdot \left(\frac{T}{300\text{K}}\right)^{-2{,}3}. \qquad (8.3.20)$$

Она объясняется рассеянием на оптических и акустических фононах, отношение констант деформационного потенциала которых $Du_l/\varepsilon_{ак}\omega_c$ принимается равным $\sqrt{3{,}8}$ с учетом эффектив-

ных масс дырок $m_h/m_0 = 0{,}35$ и $m_l/m_0 = 0{,}043$ и отношения концентраций 23,2. Зависимость эффективных масс от температуры не учитывается, хотя, согласно измерениям циклотронного резонанса, масса легких дырок увеличивается на 16% при изменении температуры от 10 до 100 К [17]: это не вносит существенной поправки в величину электропроводности вследствие относительно небольшого числа легких дырок. В диапазоне от 50 до 80 К подвижность пропорциональна $T^{-3/2}$ и всего на 10—20% меньше вычисленной с учетом рассеяния на акустических фононах. При более низких температурах увеличивается влияние



Фиг. 8.2. Зависимость коэффициента Холла от магнитной индукции для германия p-типа при 77 К, измеренная для двух значений концентрации носителей (штриховые кривые) и рассчитанная (сплошные кривые) [18].

рассеяния на ионизованных примесях; очень хорошее согласие с формулой Брукса — Херринга (6.3.23) получено до $T = 20$ К.

Следует отметить влияние зонной структуры на гальваномагнитные свойства, в особенности на магниторезистивный эффект, а также вне области $\mu_H B \ll 1$ на зависимость коэффициента Холла R_H от B. Зависимость $R_H(B)$ имеет минимум при некотором значении B, которое увеличивается с температурой. Экспериментальные данные о $R_H(B)$ приведены на фиг. 8.2 [18]. Параметры кривых q_h^2 и q_l^2 определены в (6.6.3); индексы относятся к тяжелым и легким дыркам. Имеется качественное согласие между экспериментом и расчетом.

В табл. 8.2 магниторезистивный эффект в p-Ge, измеренный для различных направлений **j** и **B** при 77 К [14], сравнивается с теоретическими результатами [9—12], в которых время релаксации предполагается изотропным и равным $1{,}03\cdot10^{-12}$ с.

Таблица 8.2

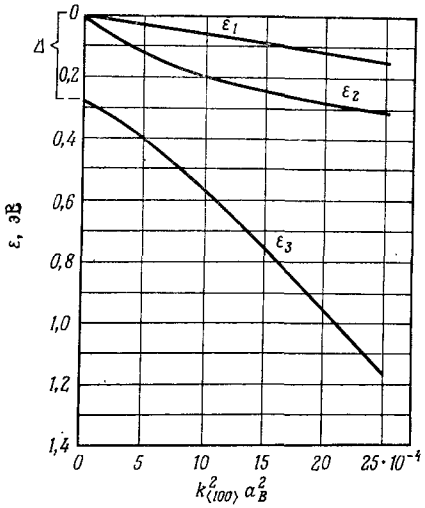
Магниторезистивный эффект в p-Ge при 77 K (в единицах $1/T^2$)

$(\Delta\rho/\rho B^2)_j^B$	Эксперимент	Теория
M_{100}^{010}	3,04	3,04
$M_{110}^{1\bar{1}0}$	2,70	2,74
M_{110}^{100}	0,014	0,0093
M_{110}^{110}	0,2	0,325

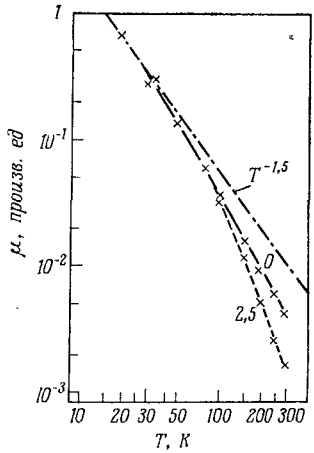
Продольный магниторезистивный эффект в направлении $\langle 111\rangle$ на порядок меньше, чем в других направлениях. Поэтому даже небольшое отклонение от направления $\langle 111\rangle$ может привести к значительной ошибке при измерениях, и совпадение экспериментальных и теоретических результатов может быть не столь хорошим, как в направлениях, соответствующих большому магниторезистивному эффекту. В сильных магнитных полях (около 10 Т) продольный магниторезистивный эффект насыщается в направлении $\langle 111\rangle$, но не насыщается в направлении $\langle 100\rangle$.

Гальваномагнитные явления в кремнии p-типа в некоторых отношениях отличаются от аналогичных явлений в германии p-типа. Энергия Δ отщепленной валентной подзоны в p-Si составляет всего 0,04 эВ; даже при комнатных температурах, когда $k_BT = 0{,}026$ эВ, эта подзона заполнена незначительно ввиду небольших эффективных масс и плотности состояний в ней. При расчетах зонной структуры даже приведенное выше небольшое значение Δ уже приводит к непараболическому закону дисперсии в подзонах тяжелых и легких дырок. В случае тяжелых дырок, особенно в направлении $\langle 110\rangle$ $\mathbf{k}$-пространства, отклонение от закона k^2 становится существенным при энергиях в несколько миллиэлектронвольт (фиг. 8.3); изоэнергетические сечения подзоны тяжелых дырок плоскостью $[1\bar{1}0]$ при различных энергиях (когда отношение энергии к Δ равно 0,25, 0,95 и 1,5) показаны на фиг. 2.29, *б*. Изоэнергетическая поверхность подзоны тяжелых дырок при больших энергиях вспучивается в направлении $\langle 110\rangle$, как показано на фиг. 2.29. Распределение носителей по энергиям в сферической непараболической зоне вычислил Мац [20]. Это приближение использовали Аше и Борцесковски [21] для вычисления зависимости подвижности тяжелых дырок от температуры для значений отношения

$Du_l/\varepsilon_{ак}\omega = 0$ и $\sqrt{2,5}$ (фиг. 8.4). При температурах $T > 100$ К учет рассеяния на оптическом деформационном потенциале наряду с рассеянием на акустическом деформационном потенциале, когда отношение констант деформационных потенциалов равно $\sqrt{2,5}$, обеспечивает совпадение с экспериментально установленной зависимостью $T^{-2,9}$ (фиг. 8.4). Зависимость $T^{-1,9}$ в диа-



Фиг. 8.3. Структура валентной зоны p-Ge в направлении ⟨100⟩, $\Delta = 0{,}29$ эВ (в Si $\Delta = 0{,}044$ эВ) [19].



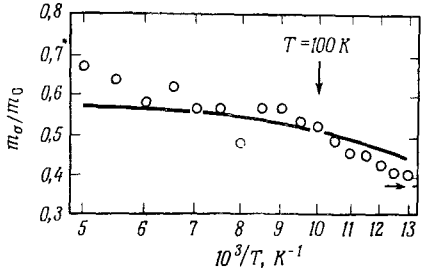
Фиг. 8.4. Зависимость подвижности дырок от температуры в p-Si, рассчитанная с учетом непараболичности зоны для двух значений параметра $(Du_l/\omega_0\varepsilon_{ак})^2$ [21].

пазоне от 50 до 100 К следует из вычислений, в которых учитывается только рассеяние на акустическом деформационном потенциале. Отклонение значения показателя — 1,9 от обычного значения — 1,5, соответствующего элементарной модели сферической зоны, обусловлено непараболическим законом дисперсии в подзоне.

Вследствие непараболичности подзоны тяжелых дырок эффективная масса электропроводности возрастает с температурой, так как в результате увеличения средней тепловой энергии k_BT дырки занимают те уровни в подзоне, где непараболичность больше. На фиг. 8.5 приведена температурная зависимость эффективной массы электропроводности в p-Si, определенная из

эффекта Керра в продольном магнитном поле [22][1]). Эта зависимость отчетливо демонстрирует непараболический закон дисперсии [23]. Как показали Перски и Бартелинк [24] и Фосет и Рач [25], непараболический закон дисперсии в зоне может привести к появлению отрицательного дифференциального сопротивления.

Исследования в магнитных полях до 9 Т показали, что зависимость коэффициента Холла R_H от B в p-Si анизотропна [26]. Этот факт, а также анизотропия магниторезистивного эффекта,



Фиг. 8.5. Температурная зависимость эффективной массы электропроводности p-Si, полученная из измерений эффекта Керра в продольном магнитном поле [22].

Горизонтальной стрелкой указана масса, измеренная методом циклотронного резонанса при 4 К.

увеличивающаяся с температурой, также свидетельствуют в пользу непараболического закона дисперсии в подзоне тяжелых дырок. Из измерений Лонга [27] магниторезистивного эффекта в p-Si при 77 К в слабом магнитном поле следует, что коэффициенты обращенного уравнения Зейца (7.4.9) равны: $b = 14{,}2$, $c = -10{,}6$ и $d = 0{,}8$ [в единицах 10^7 $(\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с}))^2 = 0{,}1$ Т^{-2}].

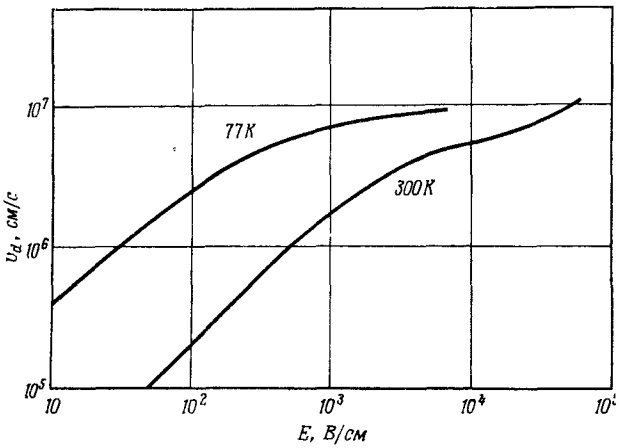
§ 4. Теплые и горячие дырки

Если результаты теоретических и экспериментальных исследований гальваномагнитных явлений в p-Ge и p-Si согласуются лишь качественно, то ситуация становится еще более сложной, когда рассматриваются теплые и горячие дырки. Уже отмечалось, что время превращения легкой дырки в тяжелую сопоставимо со временем свободного пробега, т. е. вероятность превращения при соударении является большой. Поэтому температуры дырок обоих типов можно считать одинаковыми.

Рассмотрим сначала случай очень сильных электрических полей. Экспериментальные зависимости скорости дрейфа дырок в p-Ge от напряженности поля приведены на фиг. 8.6 для двух значений температуры решетки [28, 29]. При низких температурах имеется тенденция к насыщению. Исследование эффекта

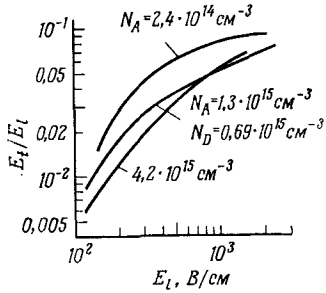
[1]) Эффект Керра в продольном магнитном поле состоит в изменении эллиптической поляризации сверхвысокочастотных электромагнитных волн при отражении от образца.

Сасаки — Шибуи (гл. 7, § 5, фиг. 7.9), как показано и на фиг. 8.7, дает в случае p-Ge тот же знак, что и n-Ge. В материале обоих типов направление поля отклоняется от направления тока в сторону оси ⟨111⟩ [30]. Компенсированные и некомпенсированные образцы ведут себя одинаково.



Фиг. 8.6. Зависимость скорости дрейфа от напряженности электрического поля в p-Ge [28, 29].

Распределение горячих дырок по энергии в p-Ge исследовалось по инфракрасному поглощению. Эти результаты обсуждаются в гл. 11, § 10. Здесь следует лишь отметить, что функция распределения не является максвелловской. Незначительное по сравнению с максвелловским распределением заполнение горячими дырками уровней с большой энергией и

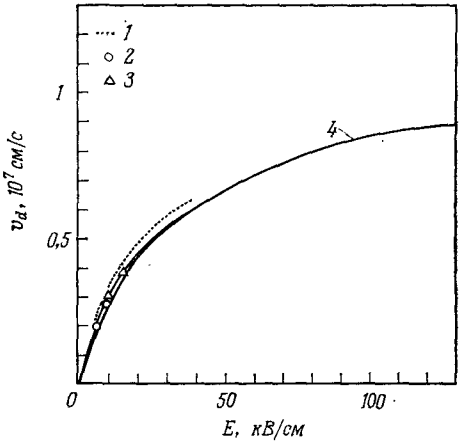


Фиг. 8.7. Эффект Сасаки — Шибуи в p-Ge при температуре решетки 77 К [30].

скопление большинства дырок при энергиях ниже энергии оптического фонона 37 мэВ указывают на сильное рассеяние на оптических фононах. Дырки, ускоренные полем до более высоких энергий, очень эффективно рассеиваются с испусканием оптических фононов, и их энергия уменьшается. Это приводит к периодическому сильно направленному движению дырок в **k**-пространстве, что существенно отличается от диффузионного

движения дырок в случае слабого их взаимодействия с оптическими фононами [31, 32]. Вычисления подтверждают такой характер распределения [33].

Результаты измерения скорости дрейфа дырок в p-Si при электрических полях до 100 кВ/см показаны на фиг. 8.8. Пока $E < 10$ кВ/см, при 77 К в чистых образцах, например при $\rho(300\ \text{К}) = 1500$ Ом·см, анизотропии v_d нет [21]. Объяснение зависимости скорости дрейфа от поля при 77 К основано на учете непараболичности подзоны тяжелых дырок. Когда дырки



Фиг. 8.8. Зависимость скорости дрейфа от напряженности электрического поля для кремния p-типа при комнатной температуре [34—37].
1 и *2*—по данным измерений времени пролета в высокоомных образцах (*1*—[34], *2*→[35]); *3* и *4*—по данным измерений вольтамперных характеристик на образцах различного удельного сопротивления (*3*—[36], *4*—[37]).

становятся горячими, они в то же время становятся тяжелыми и медленнее ускоряются полем. Поэтому распределение дырок обрывается в области энергий, несколько меньших, чем энергия оптического фонона, и в чистых образцах преобладает рассеяние на акустических фононах. Однако остается неясным, можно ли при этом пренебречь вкладом легких дырок. Рассеяние на оптических фононах оказывает существенное влияние на подвижность в слабом поле при температурах $T > 150$ К.

В случае теплых дырок, когда зависимость тока от $\mathbf{E}$ может быть представлена в виде (7.5.36) и (7.5.38), были измерены коэффициенты β_0 и γ для p-Ge и p-Si [38]. Однако было получено лишь качественное согласие теории и эксперимента [12]. Из формы изоэнергетических поверхностей подзоны тяжелых дырок можно заключить, что эффективная масса в направлении $\langle 100 \rangle$ меньше, чем в направлении $\langle 111 \rangle$, и бóльшая компонента

тока более легких дырок, движущихся в направлении ⟨100⟩, обеспечивает поворот вектора тока от направления ⟨111⟩ ($\gamma > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pincherle L.* в книге Proc. Intern. School of Physics XXII (ed. R. A. Smith), Acad. Press, New York, 1963, p. 43.
2. *Dresselhaus G., Kip A. F., Kittel C.*, Phys. Rev., **98**, 368 (1955).
3. *Levinger B. W., Frankl D. R.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **20**, 281 (1961).
4. *Пикус Г. Е., Бир Г. Л.*, ФТТ, **1**, 1642 (1959).
5. *Bulthuis K.*, Philips Res. Repts., **23**, 25 (1968).
6. *Koenig S. H.* в книге Proc. Intern. School of Physics XXII (ed. R. A. Smith), Acad. Press, New York, 1963, p. 515.
7. *Lax B., Mavroides J. G.*, Phys. Rev., **100**, 1650 (1955).
8. *McClure J. W.*, Phys. Rev., **101**, 1642 (1956).
9. *Mavroides J. G., Lax B.*, Phys. Rev., **107**, 1530 (1957).
10. *Mavroides J. G., Lax B.*, Phys. Rev., **108**, 1648 (1957).
11. *Lawaetz P.*, Phys. Rev., **174**, 867 (1968).
12. *Lawaetz P.*, Thesis, Techn. Univ. Kopenhagen 1967, p. 138.
13. *Beer A. C.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Suppl. 4, Ch. 20 b, Acad. Press, New York, 1963.
14. *Pearson G. L., Suhl H.*, Phys. Rev., **83**, 768 (1951).
15. *Pearson G. L., Herring C.*, Physica, **20**, 975 (1954).
16. *Brown D. M., Bray R.*, Phys. Rev., **127**, 1593 (1962).
17. *Bagguley D. M. S., Stradling R. A.*, Proc. Phys. Soc. (London), **78**, 1078 (1961).
18. *Beer A. C., Willardson R. K.*, Phys. Rev,. **110**, 1286 (1958).
19. *Kane E. O.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **1**, 82 (1956).
20. *Matz D.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **28**, 373 (1967).
21. *Asche M., Borzeszkowski J.*, Phys. Stat. Sol., **37**, 433 (1970).
22. *Hauge P.*, Thesis, The University of Minnesota, Minn., USA, 1967.
23. *Costato M., Reggiani L.*, Letters. Nuovo Cimento, Ser 1, **3**, 239 (1970).
24. *Persky G., Bartelink D. J.*, IBM Journ. Res. Develop., **13**, 607 (1969).
25. *Fawcett W., Ruch J. G.*, Appl. Phys. Letters, **15**, 369 (1969).
26. *Miyazawa H., Suzuki K., Maeda H.*, Phys. Rev., **131**, 2442 (1963).
27. *Long D.*, Phys. Rev., **107**, 672 (1957).
28. *Bray R., Brown D. M.*, Proc. 5th Intern. Conf. Phys. Semicond., Czech. Acad. Sci., Prague, 1960, p. 82.
29. *Prior A. C.*, Proc. Phys. Soc. (London), **76**, 465 (1960).
30. *Gibbs W. E. K.*, Journ. Appl. Phys., **33**, 3369 (1962).
31. *Pinson W. E., Bray R.*, Phys. Rev., **136**, A1449 (1964).
32. *Baynham A. C., Paige E. G. S.*, Phys. Letters, **6**, 7 (1963).
33. *Budd H. F.*, Phys. Rev., **158**, 798 (1967).
34. *Norris C. B., Jr., Gibbons J. F.*, International Electron Device Meeting, 1966, Washington, D. C., IEE Trans. Electron Devices, **14**, 38 (1967).
35. *Alberigi, Quaranta A., Cipolla F., Martini M.*, Phys. Letters, **17**, 102 (1965).
36. *Ryder E. J.*, Phys. Rev., **90**, 766 (1953).
37. *Seidel T. E., Scharfetter D. L.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **28**, 2563 (1967).
38. *Röth E. P., Tschulena G., Seeger K.*, Zs. Phys., **212**, 183 (1968).

Глава 9. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЯВЛЕНИЯХ ПЕРЕНОСА

В гл. 2 было показано, как квантование энергии атомов приводит к образованию зонной структуры кристаллического твердого тела. Однако это не единственное проявление квантовомеханических свойств в физике полупроводников. Так, хотя большинство явлений переноса можно объяснить с помощью предположения о классическом электронном газе, существуют и такие явления, описать которые можно только на языке квантовой механики. В § 1 данной главы мы рассмотрим явления, в основе которых лежит квантовомеханический туннельный эффект. В § 2—4 на основе квантования электронных орбит в сильном магнитном поле с образованием уровней Ландау будут объяснены осцилляционные эффекты в явлениях переноса.

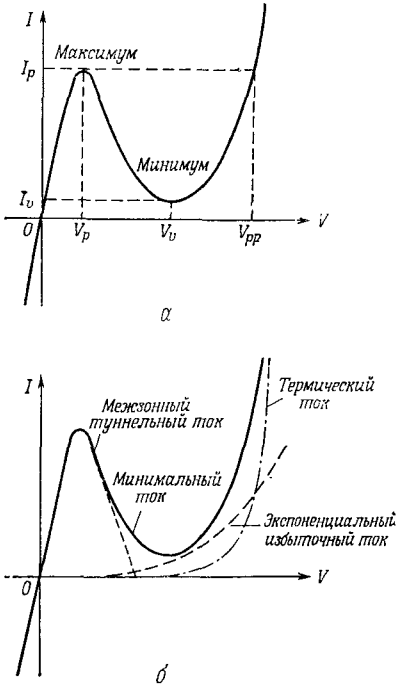
§ 1. Туннельный диод

Хотя аномальный характер вольтамперной характеристики при протекании тока в прямом направлении вырожденного $p-n$-перехода наблюдался многими исследователями, только Есаки [1] в 1958 г. удалось объяснить это явление с помощью понятия о квантовом туннельном эффекте. С тех пор «диод Есаки», или туннельный диод, широко используется как быстродействующий (безынерционный) прибор с низким уровнем шумов на выходе, работающий при малой мощности (см. обзор [2]).

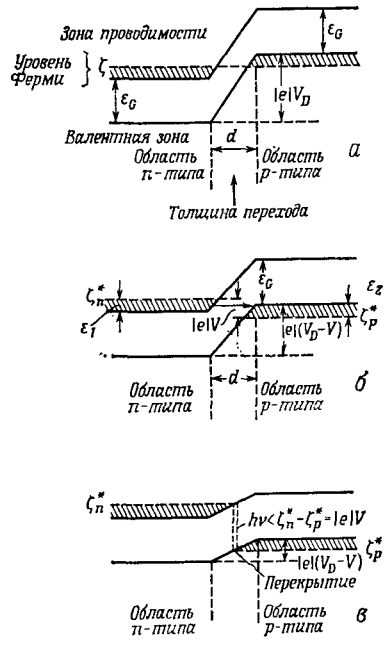
Вольтамперная характеристика схематически представлена на фиг. 9.1, *а*. Ток в обратном направлении растет с ростом напряжения. Ток в прямом направлении достигает максимума при напряжении V_p, сразу за которым в интервале между V_p и V_v существует интересная область отрицательной дифференциальной проводимости. Различные компоненты тока показаны на фиг. 9.1, *б*. Рассмотрим сначала туннельный ток при температурах вблизи абсолютного нуля.

На фиг. 9.2, *а* приведена упрощенная диаграмма равновесного распределения потенциала в $p-n$-переходе, вырожденном с обеих сторон. Уровень Ферми ζ полагается постоянным вдоль перехода. В области n-типа электроны заполняют зону проводимости вплоть до энергии ζ, в то время как в области p-типа с этой энергии начинается заполнение валентной зоны дырками (заштрихованные участки). Фиг. 9.2, *б* иллюстрирует включение

малого напряжения смещения V в прямом направлении. Электроны из зоны проводимости области n-типа туннелируют через щель на свободные места (дырки) в валентной зоне области p-типа. Прежде чем вычислять туннельный ток, рассмотрим случай, когда в прямом направлении подано *большое* напряже-



Фиг. 9.1. Статическая вольтамперная характеристика типичного туннельного диода (схематический вид) (*а*) и компоненты тока на вольтамперной характеристике (*б*) [7].



Фиг. 9.2. Вырожденный p — n-переход: *а* — при термодинамическом равновесии; *б* — при малом напряжении смещения в прямом направлении. *в* — при большом напряжении смещения в прямом направлении.

ние смещения, как это показано на фиг. 9.2, *в*. Перекрытие заштрихованных участков в вертикальном направлении представляет интерес при изучении свойств полупроводникового лазера в гл. 13, § 2; из фиг. 9.2, *в* видно, что горизонтальное перекрытие (а следовательно, туннельный ток) отсутствует. В таких условиях имеется лишь обычный тепловой диффузионный ток, показанный на фиг. 9.1, *б*.

Туннелирование является прямым, если в зависимости энергии от импульса носителей $\varepsilon(\mathbf{k})$ краям зоны проводимости

и валентной зоны соответствует одно и то же значение $\mathbf{k}$; в противном случае процесс называется непрямым. В непрямом процессе импульс, необходимый для переброса электрона с края зоны проводимости на край валентной зоны, сообщается ему либо примесью (туннелирование с участием примеси), либо фононом (туннелирование с участием фонона). Мы будем рассматривать только прямой процесс.

Квантовомеханический расчет туннелирования через потенциальный барьер V_0 аналогичен проделанному выше в (2.1.1)—(2.1.16). Падающая и отраженная электронные волны записываются в виде

$$\psi = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \text{ при } x < -w, \tag{9.1.1}$$

прошедшая волна в виде

$$\psi = A_3 e^{ikx} \text{ при } x > w, \tag{9.1.2}$$

а волна внутри барьера есть решение уравнения (2.1.3):

$$\psi = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x}. \tag{9.1.3}$$

Используя непрерывность ψ и $d\psi/dx$ в точках $x = \pm w$, получаем выражение для вероятности перехода

$$T_t = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{k} + \frac{k}{\beta}\right)^2 \operatorname{sh}^2 2\beta w\right]^{-1}, \tag{9.1.4}$$

которое при $\beta w \gg 1$ имеет асимптотику

$$T_t = \left(\frac{4\beta k}{\beta^2 + k^2}\right)^2 e^{-4\beta w} \approx 4e^{-4\beta w}. \tag{9.1.5}$$

Последнее приближение справедливо для $k^2 \approx \beta^2 = 2m(V_0 - \varepsilon)/\hbar^2$, где m — приведенная эффективная масса. До сих пор мы рассматривали прямоугольный барьер шириной $d = 2w$ и высотой V_0. Однако, как видно из фиг. 9.2, *б*, барьер имеет форму треугольника с высотой порядка ε_G (энергией электрона ε можно пренебречь). Если положить величину β равной $\sqrt{2m\hbar^{-2}\varepsilon_G}$ и $w = d/2 \approx \varepsilon_G/(2|e|E)$, где E — электрическое поле на переходе, то расчет для треугольного барьера приводит к появлению в показателе экспоненты дополнительного множителя $^2/_3$:

$$T_t = 4\exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}\,\varepsilon_G^{3/2}}{3|e|E\hbar}\right). \tag{9.1.6}$$

В случае параболического барьера получим такой же результат с той лишь разницей, что множитель $4\sqrt{^2/_3} = 1{,}88$ заменяется на $\pi/2^{3/2} = 1{,}11$. Для простоты в рассматриваемом одномерном случае мы пренебрегаем составляющей импульса, нормальной к направлению, в котором происходит туннелирование. При не-

прямом процессе с участием фонона в уравнении (9.1.6) необходимо заменить ε_G на $(\varepsilon_G - \hbar\omega_0)$, где $\hbar\omega_0$ — энергия фонона [3, 4]:

$$T_t = 4\exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}\,(\varepsilon_G - \hbar\omega_0)^{3/2}}{3|e|E\hbar}\right). \qquad (9.1.7)$$

Аналогичное выражение для туннелирования с участием фотона, когда $\hbar\omega_0$ заменяется на энергию фотона $\hbar\omega$, будет получено в гл. 11, § 4, при исследовании поглощения света в однородных полупроводниках в электрическом поле. При вычислении тока величина T_t считается постоянной при малых изменениях напряжения.

При тепловом равновесии туннельный ток $I_{c\to v}$ из зоны проводимости в валентную зону определяется выражением

$$I_{c\to v} = AT_t \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_v} f_c(\varepsilon)\, g_c(\varepsilon)\,[1 - f_v(\varepsilon)]\, g_v(\varepsilon)\, d\varepsilon, \qquad (9.1.8)$$

где $f_c(\varepsilon)$ и $f_v(\varepsilon)$ — функции распределения Ферми — Дирака электронов в зоне проводимости и валентной зоне соответственно, $g_c(\varepsilon)$ и $g_v(\varepsilon)$ — соответствующие плотности состояний, A — постоянная. Ток в обратном направлении определяется выражением

$$I_{v\to c} = AT_t \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_v} f_v(\varepsilon)\, g_v(\varepsilon)\,[1 - f_c(\varepsilon)]\, g_c(\varepsilon)\, d\varepsilon. \qquad (9.1.9)$$

Если напряжение смещения отсутствует, то, согласно принципу детального равновесия, $I_{c\to v} = I_{v\to c}$. Когда же на переход подано напряжение смещения, туннельный ток приближенно определяется выражением [1]

$$I = I_{c\to v} - I_{v\to c} = AT_t \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_v} d\varepsilon\,(f_c - f_v)\, g_c g_v, \qquad (9.1.10)$$

где в выражениях для f_c и f_v уровни Ферми заменены квазиуровнями Ферми ζ_n^* и ζ_p^*, связанными с приложенным напряжением соотношением $V = (\zeta_n^* - \zeta_p^*)/|e|$. Согласно уравнению (3.1.28), плотности состояний меняются с энергией как $\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$ и $\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_v}$ соответственно. Если $2k_BT \geqslant (\zeta_n^* - \varepsilon_c)$, $(\varepsilon_v - \zeta_p^*)$, функцию распределения Ферми — Дирака можно линеаризовать:

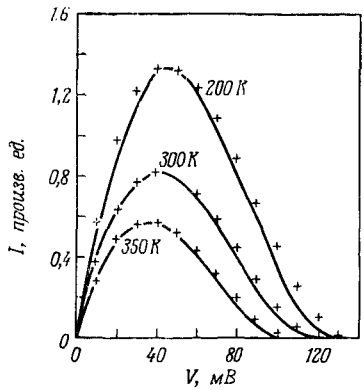
$$f_c(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon - \zeta_n^*}{4k_BT}, \quad f_v(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} + \frac{\zeta_p^* - \varepsilon}{4k_BT}. \qquad (9.1.11)$$

Тогда из (9.1.10) получаем

$$I = A' \frac{|e|V}{4k_BT}(\varepsilon_c - \varepsilon_v)^2 = A' \frac{|e|V}{4k_BT}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - |e|V)^2 \quad (9.1.12)$$

при $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant |e|V$; здесь A' — новая постоянная и, как видно из фиг. 9.2, *б*, $\varepsilon_1 = \zeta_n^* - \varepsilon_c$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_v - \zeta_p^*$ [5].

На фиг. 9.3 для сравнения приведены экспериментальные кривые, полученные Есаки, и ряд точек, рассчитанных по формуле (9.1.12), где постоянные A' и $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ подобраны так, чтобы они соответствовали максимумам кривых [5]. С учетом сделанных предположений совпадение теории с экспериментом удовлетворительное.



Фиг. 9.3. Вольтамперные характеристики туннельного диода при различных температурах [5].

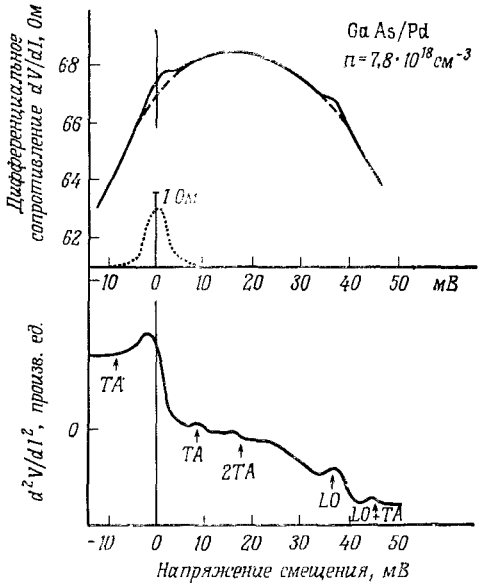
Сплошные линии — экспериментальные данные; крестики — теоретический расчет

Для напряжений $V \geqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/|e|$ туннельный ток падает до нуля, и через переход должен течь обычный диодный ток; однако реальный ток несколько больше. Избыточный ток отмечен на фиг. 9.1, *б*. Происхождение его связано с тем, что в сильном электрическом поле края зон не резкие, как это должно следовать из зависимости $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$, а имеют хвосты [6]: $g(\varepsilon) \sim \exp(-\text{const}\,\varepsilon^2)$ для $\varepsilon < \varepsilon_c$ (гл. 11, § 4). Между хвостами зоны проводимости и валентной зоны происходит туннелирование. Оно также может проходить через примесные состояния в энергетической щели.

Если $p-n$-переход легирован недостаточно сильно, так что обе области только близки к вырождению, то участок с отрицательной проводимостью отсутствует и в прямом направлении имеется лишь область высокого сопротивления. В таком случае вольтамперная характеристика в точности противоположна характеристике для обычного диода. Такие диоды называются обращенными. Они применяются для выпрямления слабых СВЧ-сигналов при малом уровне шума. Более подробно см. в книге [7].

Рассеяние туннельных электронов примесями на переходе или на барьере Шоттки (металл — вырожденный полупроводник с обедненным приконтактным слоем) с испусканием одного или двух фононов исследовалось при низких температурах

путем измерения второй производной напряжения смещения по току. На фиг. 9.4 приведены экспериментальные кривые, полученные Томасом и Квайссером [8—10] на барьерах Шоттки *n*-GaAs/Pd при 2 К. На этой же фигуре указан тип испускаемого фонона (поперечный акустический или продольный оптический). Подобная методика измерений носит название туннельной спектроскопии.



Фиг. 9.4. Производные от вольтамперной характеристики барьера Шоттки, состоящего из n-GaAs — Pd с $n = 7{,}8 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ при $T = 2$ К (сплошная линия) и $T = 20$ К (штриховая линия) [8].

Пунктирной линией показано избыточное дифференциальное сопротивление. Стрелки определяют энергию фононов (в единицах элементарного заряда TA — поперечный акустический, LO — продольный оптический) в GaAs.

Туннелирование через щель в случае невырожденных p — n-переходов с обратным напряжением смещения рассматривал Зинер [11, 12]. Если поле **E** на переходе очень сильное, то вероятность туннельного эффекта, вычисленная по формуле (9.1.6), оказывается достаточно большой, чтобы туннелирование привело к пробою в обратном направлении вольтамперной характеристики. Однако почти во всех промышленных диодах Зинера пробой обусловлен ударной ионизацией [13], а не туннелированием (гл. 10, § 2).

§ 2. Магнитные квантовые эффекты

В гл. 11, § 11, рассматривается спиральное движение носителей заряда в магнитном поле. Ось спирали параллельна направлению поля. Поглощение электромагнитного излучения носит в этом случае резонансный характер (циклотронный резонанс). В этом параграфе мы рассмотрим явления переноса в полупроводнике в сильном магнитном поле, когда вследствие квантования орбит носителей энергетические зоны трансформируются в набор энергетических уровней, носящих название уровней Ландау [14].

Волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ электрона с энергией ε, находящегося в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, является решением уравнения Шредингера (гл. 2, § 1)

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla_{\mathbf{r}} + |e|\mathbf{A})^2\psi = \varepsilon\psi. \tag{9.2.1}$$

Спином электрона мы пренебрегаем. Если ось z декартовой системы координат направить вдоль $\mathbf{B}$, то можно выбрать следующую калибровку векторного потенциала $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = (0,\ Bx,\ 0). \tag{9.2.2}$$

Волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ является произведением $\exp(-ik_y y - ik_z z)$ на функцию $\varphi(x)$, для которой имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dx'^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\varepsilon' - \frac{1}{2}m\omega_c^2 x'^2\right)\varphi = 0, \tag{9.2.3}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar^2 k_z^2/2m$, $x' = x - \hbar k_y/|e|B$, $\omega_c = |e|B/m$. Это уравнение описывает движение гармонического осциллятора, обладающего уровнями энергии $\varepsilon' = (n + 1/2)\hbar\omega_c$, где n — квантовое число. Тогда для энергии электрона получаем

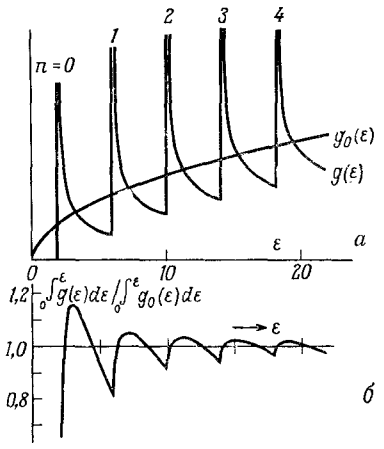
$$\varepsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9.2.4}$$

Энергия движения в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$, квантована, в то время как энергия движения вдоль поля $\varepsilon_{k_z} = \hbar^2 k_z^2/2m$ остается неизменной.

Перейдем к вычислению плотности состояний. Число разрешенных значений волнового вектора k_z, которые меньше заданного $|k_0| = 2\pi/\lambda_0$, равно $L_z/(\lambda_0/2) = L_z k_0/\pi = L_z\sqrt{2m\varepsilon_{k_0}}\,(\pi\hbar)^{-1}$. Здесь L_z — размер кристалла в направлении магнитного поля. Дифференцируя по ε_{k_0}, находим число разрешенных значений k_z в интервале энергии $d\varepsilon_{k_z}$:

$$g(k_z)\,d\varepsilon_{k_z} = \frac{L_z\sqrt{2m}}{2\pi\hbar\sqrt{\varepsilon_{k_z}}}\,d\varepsilon_{k_z}. \tag{9.2.5}$$

Предположим, что кристалл ограничен плоскостями, перпендикулярными к осям x, y и z, и его размеры составляют L_x, L_y и L_z. Тогда в силу периодичности функций Блоха разрешенные значения k_y и k_z определяются выражениями $k_y = 2\pi n_y/L_y$ и $k_z = 2\pi n_z/L_z$, где n_y, n_z — целые числа. В единичном интервале k_y имеется $L_y/2\pi$ состояний. Допустим, что волновая функция электрона $\psi(\mathbf{r})$ обращается в нуль на границах $x = 0$ и $x = L_x$. Величина x' лежит в интервале между 0 и L_x, и поскольку волновая функция ψ центрирована в точке $x = \hbar k_y/|e|B$ (согласно определению x'), то значения k_y простираются вплоть до $L_x|e|B\hbar^{-1}$. Тогда полное число разрешенных значений k_y определяется выражением



Фиг. 9.5. Плотность состояний в отсутствие магнитного поля $g_0(\varepsilon)$ и при $B \neq 0$ $g(\varepsilon)$ (a; указаны номера уровней Ландау) и отношение числа состояний с энергией меньше заданной при $B \neq 0$ к числу состояний при $B = 0$ ($б$) [15].

$$\mathrm{Max}(n_y) = \frac{L_y}{2\pi}\,\mathrm{Max}(k_y) = \frac{L_y}{2\pi}\,\frac{L_x|e|B}{\hbar}. \qquad (9.2.6)$$

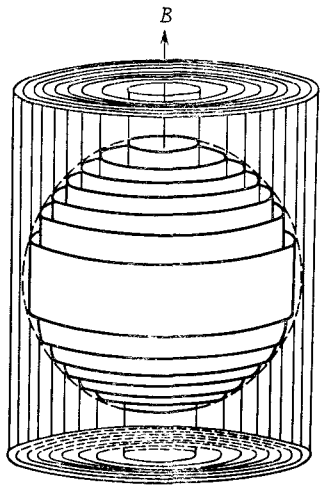
Умножая это выражение на правую часть (9.2.5) и суммируя по всем квантовым числам n, находим плотность состояний в магнитном поле

$$g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \sum_{n=0}^{n_{\text{макс}}} \frac{V|e|B\sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)^2\sqrt{\varepsilon_{k_z}}}\,d\varepsilon = \frac{V|e|B\sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)^2} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{n_{\text{макс}}} \left[\varepsilon - \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right]^{-1/2} d\varepsilon. \qquad (9.2.7)$$

Здесь $V = L_xL_yL_z$ — объем кристалла; верхний предел суммирования выбирается равным $n_{\text{макс}}$, так что $\varepsilon \geqslant (n + 1/2)\hbar\omega_c$. На фиг. 9.5, a построен график зависимости $g(\varepsilon)$ от энергии ε и для сравнения график функции плотности состояний электрона в отсутствие магнитного поля $g_0(\varepsilon)$, которая определяется выражением (3.1.28). На фиг. 9.5, $б$ приведена зависимость отношения

$\int_0^{\varepsilon} g(\varepsilon)\,d\varepsilon \Big/ \int_0^{\varepsilon} g_0(\varepsilon)\,d\varepsilon$ от энергии. В случае вырожденного полупроводника, который при $\mathbf{B} = 0$ имеет сферическую поверхность Ферми (сфера Ферми), при наличии магнитного поля вдоль оси z разрешенные значения волнового вектора $\mathbf{k}$ лежат на поверхностях набора концентрических цилиндров с осями, параллельными k_z (фиг. 9.6)[1]). С ростом магнитного поля радиусы цилиндров увеличиваются, а число цилиндров внутри сферы Ферми, граничная энергия которой равна энергии Ферми ζ, уменьшается. При $\hbar\omega_c > \zeta$ носители могут собираться только на внутреннем цилиндре с $n = 0$; этот случай носит название квантового предела.



Фиг. 9.6. Вследствие квантования орбит в магнитном поле сферическая (при $B = 0$) поверхность Ферми в $\mathbf{k}$-пространстве превращается в набор концентрических цилиндров с осями, параллельными направлению поля [16].

Для наблюдения квантовых эффектов необходимо, чтобы слагаемое $\hbar^2 k_z^2/2m$ в (9.2.4) было много меньше $\hbar\omega_c$. Это условие эквивалентно $k_B T \ll \hbar\omega_c$, или, что то же самое, $T/K \ll$ $\ll 1{,}34\ B/\mathrm{T}$ при $m = m_0$. Даже в случае малых эффективных масс наблюдение квантовых эффектов в реально достижимых магнитных полях возможно при температурах порядка нескольких градусов Кельвина. При столь низких температурах электронный газ является вырожденным и средняя энергия носителей ζ_n должна быть близка к $\hbar\omega_c$.

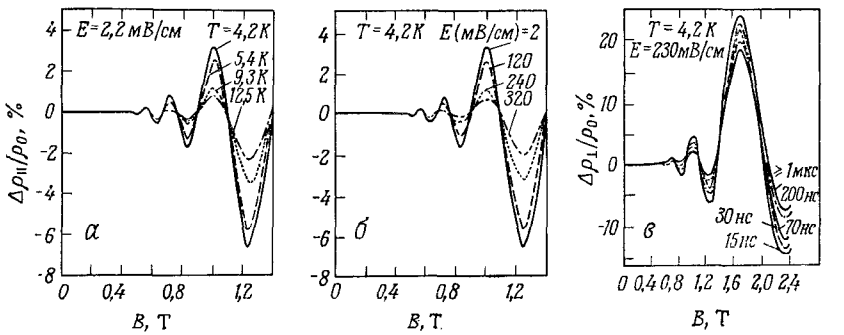
Ясно, что когда цилиндры на фиг. 9.6 при увеличении напряженности магнитного поля пересекают сферу Ферми, ряд физических величин, характеризующих свойства полупроводников, испытывает осцилляции. На фиг. 9.7, *а* [17, 18] отложена зависимость продольного магниторезистивного эффекта $\Delta\rho/\rho$ в n-InAs с концентрацией $n = 2{,}5 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ от магнитного поля при различных температурах в интервале от 4,2 до 12,5 К. Наблюдаемые осцилляции сопротивления получили название эф-

[1]) Подобная иллюстрация правомерна в рамках квазиклассического приближения (см. [16]). — *Прим. перев.*

фекта Шубникова — де Гааза [19]. Величина $\Delta\rho/\rho$ вычислена в работе [20]:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \cos\left(\frac{2\pi\zeta_n}{\hbar\omega_c} r - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (9.2.8)$$

На графике зависимости $\Delta\rho/\rho$ от $1/B \sim 1/\omega_c$ период осцилляций не зависит от магнитного поля; он зависит от концентрации че-



Фиг. 9.7. Эффект Шубникова — де Гааза в n-InAs [17, 18].

а — в слабом электрическом поле при различных температурах по истечении больших промежутков времени после включения поля; *б* — при температуре решетки $T = 4{,}2$ К и при различных напряженностях поля; *в* — при температуре решетки $T = 4{,}2$ К в сильном электрическом поле для различных промежутков времени после включения поля.

рез энергию Ферми ζ_n. Коэффициенты b_r быстро убывают с ростом номера r; в практических расчетах достаточно ограничиться членом с $r = 1$:

$$b_r = (-1)^r \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\zeta_n r}} \cos\left(r\frac{\pi}{2} g \frac{m}{m_0}\right) \frac{r \cdot 2\pi^2 (k_B T/\hbar\omega_c)}{\operatorname{sh}\left[r \cdot 2\pi^2 (k_B T/\hbar\omega_c)\right]} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{r 2\pi^2 k_B T_D}{\hbar\omega_c}\right). \qquad (9.2.9)$$

Здесь g — множитель Ланде для электронов [1]), а T_D — температура Дингля [23], которая определяет естественную ширину линий переходов между соседними уровнями Ландау. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, для носителя со временем жизни τ_c в состоянии с энергией ε неопределенность по энергии составляет

$$\Delta\varepsilon = \frac{h}{\tau_c}. \qquad (9.2.10)$$

[1]) См., например, [21]; относительно электронов в соединениях $A^{III}B^{V}$ см. [22].

Если эту величину разделить на расстояние между уровнями $\hbar\omega_c$, то мы получим следующее выражение для амплитудного фактора:

$$\exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{\hbar\omega_c}\right)=\exp\left(-\frac{2\pi^2 k_B T_D}{\hbar\omega_c}\right), \tag{9.2.11}$$

где введена температура Дингля

$$k_B T_D=\frac{1}{\pi}\frac{\hbar}{\tau_c}. \tag{9.2.12}$$

Поскольку гиперболический синус в (9.2.9) можно аппроксимировать экспонентой, комбинируя его с экспоненциальным множителем (9.2.11), получаем $\exp[-2\pi^2 k_B(T_D+T)/\hbar\omega_c]$. Входящая в это выражение температура T есть, в сущности, температура электронов T_e. Поэтому с помощью эффекта Шубникова — де Гааза можно определить температуру вырожденного электронного газа, который нагревается сильным электрическим полем **E** [24]. На фиг. 9.7, *б* показаны осцилляции продольного магниторезистивного эффекта при различных значениях напряженности поля **E** и при постоянной температуре решетки [17]. Сравнивая фиг. 9.7, *а* и 9.7, *б*, можно заключить, что, например, поле 320 мВ/см нагревает электронный газ до температуры 12,5 К, в то время как температура решетки равна 4,2 К. Из результатов измерений через промежутки времени 10^{-8}—10^{-6} с с момента включения электрического поля, представленных на фиг. 9.7, *в*, можно определить время релаксации энергии. В интервале температур между 4,2 и 12,5 К это время возрастает с 40 до 70 нс. При получении этих результатов предполагалось, что температура Дингля (равная 7,0 К при $\tau_c = 3{,}5\cdot 10^{-13}$ с для данного случая) не зависит от **E** в рассматриваемом интервале напряженностей электрического поля: поскольку изменение подвижности носителей в вырожденном полупроводнике, связанное с разогревом электронов, меньше 3%, влияние электрического поля на время жизни носителей и, следовательно, на температуру Дингля оказывается пренебрежимо малым.

Температура электронов как функция напряженности приложенного электрического поля измерялась указанным способом не только в вырожденных полупроводниках, но и в полуметаллах, например в сером олове α-Sn. При $E = 130$ мВ/см температура электронов составляет 15 К при температуре решетки 4,2 К. В полях вплоть до этого значения никаких отклонений от закона Ома не наблюдалось [25].

Учет спина электрона приводит к появлению в правой части (9.2.4) дополнительного слагаемого:

$$\varepsilon=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\pm\frac{1}{2}g\mu_B B, \tag{9.2.13}$$

где $\mu_B = e\hbar/2m_0 = 57{,}7$ мкэВ/Т — магнетон Бора [1]), а g — множитель Ланде. Отношение $g\mu_B B/\hbar\omega_c = gm/2m_0$ входит также в аргумент косинуса в (9.2.9). Значения этого отношения, экспериментально определенные на основе эффекта Шубникова — де Гааза [22], лежат в интервале от 0,33 (для n-InSb) до 0,013 (для n-GaAs). Отсюда находится множитель Ланде; он составляет от —44 (для InSb) до +0,32 (для GaAs). Обзор других экспериментальных работ см. в [26] [2]).

Магнитооптический метод определения величины g рассматривается в гл. 11, § 4. В заключение кратко остановимся на эффекте де Гааза — ван Альфена [28, 29] — осцилляциях магнитной восприимчивости в металлах, полуметаллах и вырожденных полупроводниках. Эти осцилляции являются также периодическими в зависимости от $1/B$, и амплитуда их увеличивается с ростом B.

Магнитный момент определяется следующим образом [30, 31]:

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{T=\text{const}}, \tag{9.2.14}$$

где $F = U - TS$ — свободная энергия, U — внутренняя энергия и S — энтропия носителей (гл. 3, § 1). Осциллирующая часть магнитного момента определяется выражением

$$M_{\text{осц}} = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin\left(\frac{2\pi\zeta}{\hbar\omega_c} r - \frac{\pi}{4}\right), \tag{9.2.15}$$

где a_r имеет тот же вид, что и b_r, с той лишь разницей, что множитель $\sqrt{\hbar\omega_c/2\zeta r}$ в выражении для b_r необходимо заменить на $3n(\hbar\omega_c)^{3/2}\left(r^{1/2}4\pi B\sqrt{2\zeta}\right)^{-1}$, где n — концентрация носителей [3]). Этот эффект исследовался в основном в металлах для определения их поверхностей Ферми [32].

§ 3. Магнитное вымораживание носителей

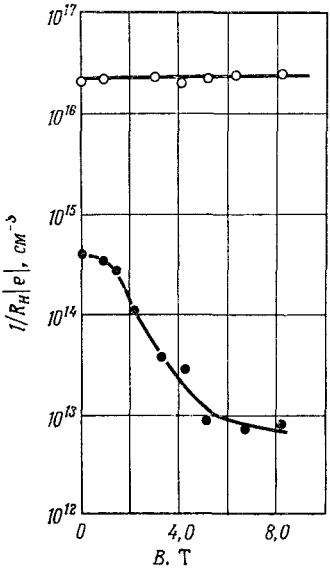
Из выражения (9.2.4) видно, что с ростом магнитного поля энергия наинизшего уровня Ландау ($n = 0$) увеличивается как $^1/_2 e\hbar m^{-1}B$. Магнитное поле влияет не только на энергетические зоны, но и на примесные уровни. В работе [34] рассчитана водородоподобная модель примесных состояний в случае сильных магнитных полей, когда $^1/_2\hbar\omega_c$ много больше энергии Ридберга. Когда $\gamma = \hbar\omega_c/2Ry \gtrsim 1$, волновая функция основного состояния

[1]) Строго говоря, магнетон Бора равен $\mu_B\mu_0$, где μ_0 — магнитная постоянная.

[2]) Термомагнитные эффекты рассмотрены в работе [27].

[3]) Вывод выражения (9.2.15) см. [33].

атома водорода, первоначально сферическая, принимает сигарообразную форму с главной осью в направлении поля **B**. Волновая функция сжата, особенно в плоскости, перпендикулярной направлению **B**; среднее расстояние электронов от ядра уменьшается, и энергия ионизации, которая определяется как разность между значениями энергии в наинизшем связанном состоянии и наинизшем состоянии в зоне проводимости, возрастает. При $\gamma \approx 2$ энергия ионизации удваивается, но при больших значениях γ возрастание происходит медленней, чем по линейному закону. С ростом энергии ионизации концентрация электронов проводимости убывает согласно выражению (3.2.10). Однако в последнем выражении в квантовом пределе для статистики Максвелла — Больцмана эффективная плотность состоя-



Фиг. 9.8. Магнитное вымораживание носителей в n-InSb при $T = 4{,}2$ K происходит в образце с концентрацией электронов $n \approx 10^{14}$ см$^{-3}$ (темные кружки), но не происходит в образце с концентрацией $n \approx 10^{16}$ см$^{-3}$ (светлые кружки) [35].

ний $N_c = \sqrt{2\pi m k_B T}\, eBh^{-2}$, как это следует из (9.2.7) при $n_{\text{макс}} = 0$ и (3.1.36):

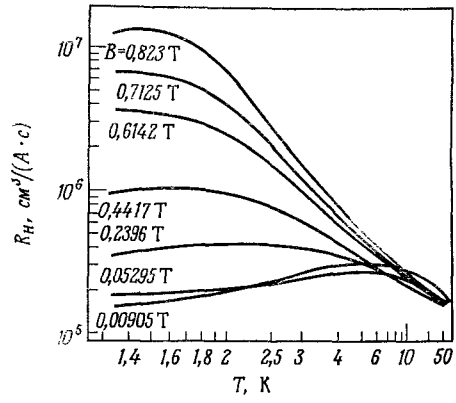
$$n = \sqrt{2\pi m k_B T}\, \frac{|e|B}{h^2} \exp\left(\frac{\zeta_n - {}^1/_2\,\hbar\omega_c}{k_B T}\right) = N_c \exp\left(\frac{\zeta_n - {}^1/_2\,\hbar\omega_c}{k_B T}\right). \tag{9.3.1}$$

(Отметим, что, например, в InSb с большим значением g для электронов проводимости спиновое расщепление порядка расстояния между соседними уровнями Ландау и поэтому на низшем уровне находятся электроны только с одним направлением спина.) Уменьшение концентрации носителей заряда n с ростом магнитного поля носит название магнитного вымораживания носителей.

Имеется ряд полупроводников, в которых условие $\gamma > 1$ выполняется для реально достижимых напряженностей магнитного поля. Даже эти полупроводники не получены в настолько чистом виде, чтобы среднее расстояние между соседними приме-

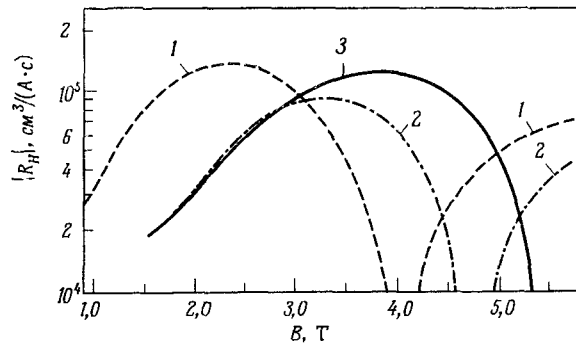
сями было на порядок больше боровского радиуса, как это предполагалось в работе [34] (для модели изолированного атома водорода). Поэтому нельзя ожидать количественного согласия между теорией и экспериментом.

Полупроводником, в котором можно было бы ожидать магнитного вымораживания в интервале температур от 1 до 5 К, является n-InSb. На фиг. 9.8 показаны результаты измерения



Фиг. 9.9. Температурная зависимость коэффициента Холла в n-InSb для различных напряженностей магнитного поля [40].

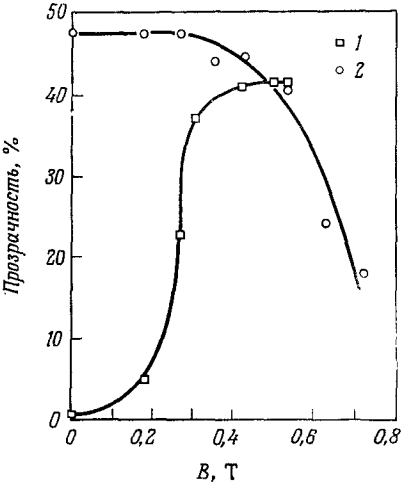
зависимости коэффициента Холла от напряженности магнитного поля при 4,2 К в двух образцах с концентрациями носителей в слабом магнитном поле $4{,}2 \cdot 10^{14}$ и $2{,}0 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ [35]. В образце



Фиг. 9.10. Зависимость коэффициента Холла в n-InSb при $T = 3$ К от напряженности магнитного поля для различных концентраций электронов [39]. *1* — $n = 2{,}7 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, $\mu_H = 5{,}5 \cdot 10^4$ см^2/(В·с) при $T = 4{,}2$ К; *2* — $n = 6 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, $\mu_H = 5{,}5 \cdot 10^4$ см^2/(В·с); *3* — $n = 6 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, $\mu_H = 3{,}5 \cdot 10^4$ см^2/(В·с).

с большей концентрацией носителей и, следовательно, с большей концентрацией примесей перекрытие примесных волновых функций сохраняется вплоть до значительно более высоких напряженностей магнитного поля, чем в другом образце. На фиг. 9.9 представлена температурная зависимость коэффициента Холла при напряженностях магнитного поля от $9 \cdot 10^{-3}$ до

0,823 Т [36, 37]. Вымораживание увеличивается с понижением температуры, как этого и следовало ожидать согласно (3.2.10). Если предположить, что коэффициент Холла R_H пропорционален $\exp(\Delta\varepsilon_D/k_BT)$, где $\Delta\varepsilon_D$ — энергия связи, то для последней получается зависимость $\Delta\varepsilon_D \sim B^{1/3}$ [38]. Кроме того, коэффициент Холла зависит от концентрации носителей n, как это показано на фиг. 9.10 [39]: при более высокой концентрации носителей l для достижения того же эффекта вымораживания необходимо более сильное магнитное поле. При больших напряженностях магнитного поля происходит изменение знака R_H. В этом случае также нет количественного согласия теории с экспериментом, а если учесть еще и обращение знака R_H, то нет и качественного согласия.



Фиг. 9.11. Прозрачность n-InSb (толщина образца 0,8 мм, $T = 1{,}8$ К) в зависимости от напряженности магнитного поля [40].
1 — область СВЧ, $\lambda = 1{,}4$ мм; *2* — далекая инфракрасная область, $\lambda = 0{,}197$ мм

В n-InSb в сильном магнитном поле ($\approx 0{,}7$ Т) при температуре 1,8 К субмиллиметровые волны ($\lambda = 0{,}2$ мм) поглощаются донорами (фиг. 9.11), что приводит к фотопроводимости, поскольку вымороженные магнитным полем носители перебрасываются в зону проводимости [40]. Этот эффект использовался для детектирования инфракрасного излучения. На больших длинах волн (например, $\lambda = 1{,}4$ мм, фиг. 9.11), когда преобладает поглощение свободными носителями (гл. 11, § 10), наблюдалась обратная зависимость, что связывалось с уменьшением концентрации свободных носителей при увеличении напряженности магнитного поля.

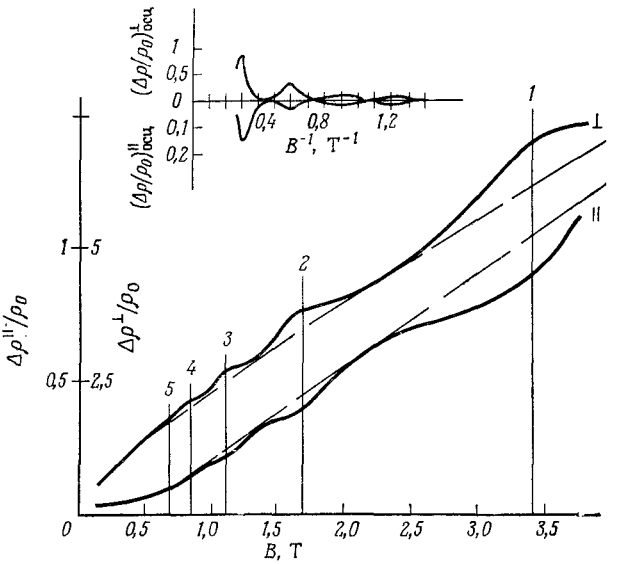
§ 4. Магнитофононный эффект

В противоположность осцилляциям Шубникова — де Гааза, которые наблюдаются в вырожденном электронном газе при очень низких температурах [см. текст после выражения (9.2.7)], существует и другой тип осцилляций. Эти осцилляции наблюдаются при более высоких температурах; для наблюдения их не требуется, чтобы электронный газ был вырожден. Они свя-

заны с рассеянием на продольных оптических фононах с энергией $\hbar\omega_0$ и происходят каждый раз, когда энергия оптического фонона становится кратной энергии уровня Ландау $\hbar\omega_c$:

$$\hbar\omega_0 = n\hbar\omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9.4.1}$$

Поглощая фонон, электрон переходит с данного ρ-го уровня Ландау на $\rho + n$-й уровень. Этот эффект носит название магнитофононного. Он был предсказан Гуревичем и Фирсовым [42]



Фиг. 9.12. Поперечный и продольный магниторезистивный эффект в n-InSb при 90 К [44].

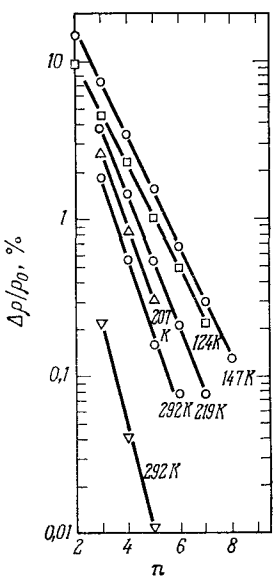
В верхней части дана зависимость осциллирующей части от обратного магнитного поля. У вертикальных линий указаны значения отношения частоты фонона к циклотронной частоте [44].

и независимо от них Клингером [43] и наблюдался Фирсовым и др. [44]. На фиг. 9.12 представлены экспериментальные данные о продольном и поперечном магниторезистивном эффекте в n-InSb при 90 К. Показано также поведение осциллирующей части в зависимости от $1/B$. Период осцилляций постоянен и определяется выражением

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{e}{m\omega_0}, \tag{9.4.2}$$

как это следует из (9.4.1). Для n-InSb с $m/m_0 = 0{,}016$ и $\omega_0 = 3{,}7 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$ в магнитном поле 3,4 Т из (9.4.2) следует $\Delta(1/B) = 0{,}3$ Т$^{-1}$. При резонансе поперечный магниторезистив-

ный эффект имеет максимум, а продольный — минимум. В отличие от периода осцилляций Шубникова — де Гааза [см (9.2.7)] период магнитофононных осцилляций не зависит от концентрации носителей. Поскольку при больших концентрациях носителей [1]) и соответственно больших концентрациях примесей рассеяние на ионизованных примесях доминирует над рассеянием на оптических фононах, при концентрациях больше $5 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$ осцилляции не наблюдались. При очень низких температурах магнитофононный эффект отсутствует из-за недостатка оптических фононов, а при очень высоких температурах — из-за того, что даже в сильных полях не выполняется условие $\omega_c \tau_m \gg 1$, необходимое для наблюдения осцилляций всех типов. Из-за этих ограничений эффект очень слабый, и для его наблюдения требуется совершенная техника, например применение двойного дифференцирования [46]. Осцилляции продольного магниторезистивного эффекта наблюдаются в том случае, когда конкурируют два типа механизмов рассеяния, таких, как



Фиг. 9.13. Зависимость экспериментальных значений амплитуд экстремумов магнитофононных осцилляций в n-GaAs в поперечной конфигурации от номера гармоники n при различных температурах [48].

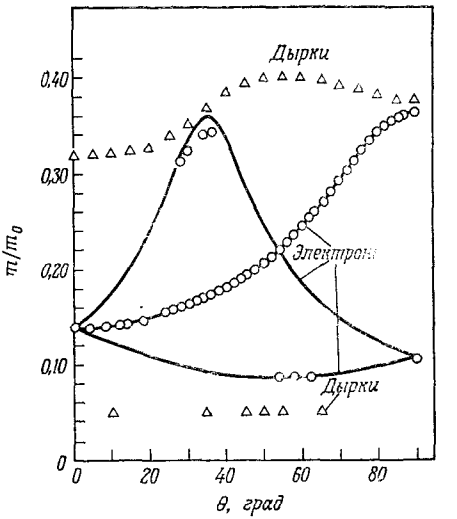
неупругое рассеяние на оптических фононах и упругое рассеяние на примесях [47].

Амплитуды $\Delta\rho/\rho_0$, наблюдаемые для поперечной конфигурации в n-GaAs как функции номера гармоники, представлены на фиг. 9.13 [48]. Поскольку в полулогарифмическом масштабе эти зависимости представляют собой прямые, отсюда следует, что $\Delta\rho \sim \exp(-\gamma\omega_0/\omega_c)$ с постоянным значением γ; как следует из наблюдений, в GaAs $\gamma = 0{,}77$.

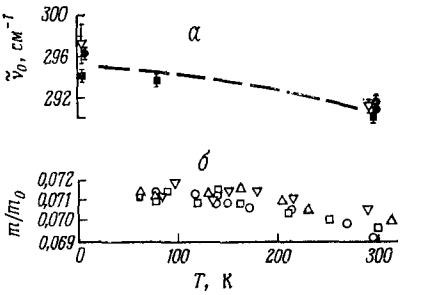
Если частота оптического фонона ω_0 известна, например из экспериментов по комбинационному рассеянию, то магнитофононный эффект позволяет определить эффективную массу носителей m. На фиг. 9.14 отложены значения эффективных масс электронов и дырок в Ge в зависимости от угла между магнит-

[1]) Расчет магнитофононного резонанса в вырожденных полупроводниках проведен Эфросом [45].

ным полем и направлением ⟨100⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$, полученные из экспериментов по магнитофононному резонансу. Значения эффективных масс дырок и поперечной массы электронов, полученные при 120 К, существенно отличаются от значений, найденных из экспериментов по циклотронному резонансу при 4 К. В то же время значение продольной массы электрона совпадает с циклотронной массой [46]. Эти расхождения объясняются непараболичностью зон: в магнитофононных измерениях с ростом температуры заполняются более высокие, чем при 4 К, участки энергетических зон. В полярных полупроводниках в связи с существованием поляронного эффекта (гл. 6, § 12) значение массы, определенное по магнитофононным осцилляциям, в



Фиг. 9.14. Зависимость эффективной массы носителей в германии от угла между магнитным полем и направлением ⟨111⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$ [46]



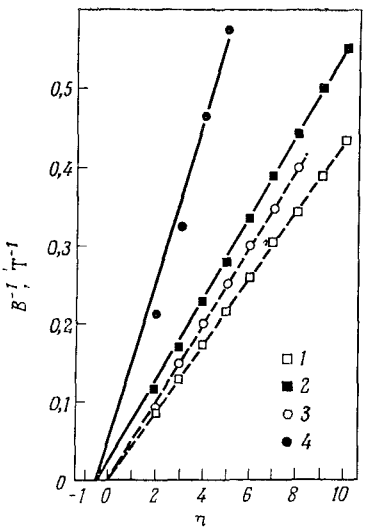
Фиг. 9.15. Температурные зависимости для GaAs

а — частота продольного оптического фонона с $k=0$; *б* — эффективная масса электронов в GaAs *n*-типа, определенная по известной частоте продольного оптического фонона и положению максимумов магнитофононных осцилляций [48].

$(1+\alpha/3)$ раз превышает низкочастотное значение и в $(1+\alpha/2)$ раз — высокочастотное, или значение массы «голого» электрона. Здесь α — константа полярного взаимодействия (6.12.8); значение ее в *n*-GaAs составляет 0,06 [49]. На фиг. 9.15, *б* представлена температурная зависимость массы электрона в *n*-GaAs, найденная по магнитофононным осцилляциям [48]. На фиг. 9.15, *а* показана температурная зависимость

частоты оптического фонона, необходимая для определения массы. Найденные значения массы после внесения поправок на непараболичность зоны находятся в согласии с данными по циклотронному резонансу, вращению Фарадея и межзонному магнитооптическому поглощению.

При температурах ниже 60 К магнитофононные осцилляции в n-GaAs не наблюдаются, однако при разогреве электронов электрическим полем с напряженностью от 1 до 10 В/см при температурах решетки от 20 до 50 К осцилляции появляются вновь [50]. На фиг. 9.16 [51] отложены значения $1/B$, соответствующие максимумам магнитофононных осцилляций, в зависимости от номера гармоники для последовательностей, соответствующих эмиссии продольного оптического фонона в GaAs и CdTe. Для сравнения приведены максимумы, соответствующие случаю высоких температур.



Фиг. 9.16. Зависимость обратной величины напряженности магнитного поля в максимумах магнитофононных осцилляций от номера гармоники n для последовательности максимумов, обусловленных эмиссией продольных оптических фононов [51].

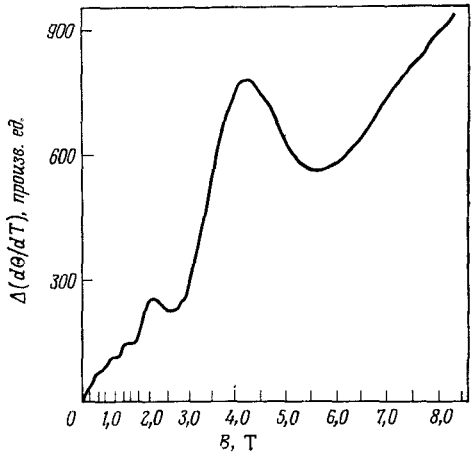
1 — GaAs при 77 К, оптический случай; *2* — GaAs при 20 К, сильное электрическое поле; *3* — CdTe при 60 К, оптический случай; *4* — CdTe при 14 К, сильное электрическое поле.

Экстраполируя последние до значения $1/B = 0$, получаем $n = 0$; в то же время для случая носителей в сильном электрическом поле экстраполяция дает $n = -1/2$. В этом случае доминирующий механизм рассеяния энергии связан с эмиссией оптического фонона и захватом теплого электрона донорной примесью с энергией $\Delta\varepsilon_D(B)$. При относительно слабой напряженности магнитного поля энергию донора можно приближенно записать в виде $\Delta\varepsilon_D(0) + 1/2\hbar\omega_c$. Тогда вместо (9.4.1) получаем

$$\hbar\omega_0 = \Delta\varepsilon_D(0) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c. \qquad (9.4.3)$$

Прямая линия, на которой в случае GaAs лежат максимумы магнитофононных осцилляций с $n \geqslant 7$ на фиг. 9.16, хорошо описывается выражением (9.4.3), если принять $\Delta\varepsilon_D(0) = 5{,}8$ мэВ, что согласуется с водородоподобной моделью примесей с $\varkappa = 12{,}5$ и $m/m_0 = 0{,}0675$. Точки, соответствующие $n < 7$, не-

сколько отклоняются от этой прямой, поскольку с ростом магнитного поля B зависимость $\Delta\varepsilon_D(B)$ становится более слабой. В магнитофононном эффекте на теплых электронах подвижность и, следовательно, удельное сопротивление определяются рассеянием на ионизованных примесях и очень чувствительны к изменениям электронной температуры T_e. Осцилляции T_e обусловлены осциллирующим характером зависимости вероятности эмиссии оптического фонона из хвоста функции распределения



Фиг. 9.17. Зависимость абсолютной термо-э. д. с. в n-InSb от напряженности продольного магнитного поля при 120 К (максимумы на кривой обусловлены магнитофононным резонансом) [27].

от напряженности магнитного поля. По этой причине зависимость времени релаксации энергии τ_ε от B в условиях магнитофононного резонанса также носит осциллирующий характер.

В CdTe при $E > 7$ В/см появляются дополнительные максимумы магнитофононных осцилляций, которые согласуются с положением гармоник при более высоких температурах, когда электрическое поле отсутствует; они описываются выражением (9.4.1).

В n-InSb и n-GaAs при низких температурах (например, 11 К) и пороговых полях 0,07 и 0,8 В/см соответственно наблюдаются последовательности максимумов. Они приписываются одновременному испусканию электронами в хвосте функции распределения двух противоположно направленных поперечных акустических фононов $\hbar\omega_t$:

$$2\hbar\omega_t = n\hbar\omega_c, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.4.4}$$

Считается, что эти фононы находятся в X-точке зоны Бриллюэна фононов и имеют энергию, равную 5,15 мэВ в InSb и 9,7 мэВ в GaAs. Двухфононные процессы наблюдались также в инфракрасном решеточном поглощении (гл. 11, § 8). Матричный элемент, описывающий эмиссию двух фононов, на восемь порядков величины меньше матричного элемента, описывающего испускание одного продольного оптического фонона [51].

Измерялись также магнитофононные осцилляции эффекта Холла [52], которые, однако, значительно меньше осцилляций магниторезистивного эффекта. Осциллирующие члены в выражении для ρ_{xy} обусловлены членами второго порядка малости $(\omega_c\tau_m)^{-2}$, которые удерживаются в выражении (4.3.84) для коэффициента Холла в пределе сильного магнитного поля.

Магнитофононные осцилляции термо-э.д.с. в n-InSb при 120 K показаны на фиг. 9.17 [27]. Магнитное поле является продольным. Было идентифицировано по меньшей мере пять максимумов. Резонанс при $B = 4{,}25$ T можно связать с переходом с наинизшего уровня Ландау на следующий уровень, сопровождаемым эмиссией продольного оптического фонона с энергией 25 мэВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Esaki L.*, Phys. Rev., **109**, 603 (1958).
2. *Chow W. F.*, Principles of Tunnel Diode Circuits, Wiley, New York, 1964.
3. *Kane E. O.*, Journ. Appl. Phys., **32**, 83 (1961).
4. *Kane E. O.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **2**, 181 (1960).
5. *Karlovsky J.*, Phys. Rev., **127**, 419 (1962).
6. *Kane E. O.*, Phys. Rev., **131**, 79 (1963).
7. *Sze S. M.*, Physics of Semiconductor Devices, Wiley, New York, 1969. (Имеется перевод: *С. М. Зи*, Физика полупроводниковых приборов, «Энергия», М., 1973.)
8. *Thomas P., Queisser H. J.*, Phys. Rev., **175**, 983 (1968).
9. *Thomas P.*, Fachberichte DPG, Teubner, Stuttgart, 1968, S. 114.
10. *Zetsche H.*, Fachberichte DPG, Teubner, Stuttgart, 1970, S. 172.
11. *Zener C.*, Proc. Roy. Soc. (London), **145**, 523 (1934).
12. *McAfel K. B., Ryder E. J., Shockley W., Sparks M.*, Phys. Rev., **83**, 650 (1953).
13. *Miller S. L.*, Phys. Rev., **99**, 1234 (1955).
14. *Landau L. D.*, Zs. Phys., **64**, 629 (1930).
15. *Madelung O.* в книге Halbleiterprobleme (Hrg. F. Sauter), Bd. V, Vieweg, Braunschweig, 1960, S. 87.
16. *Chambers R. G.*, Can. Journ. Phys., **34**, 1395 (1956).
17. *Bauer G., Kahlert H.*, Phys. Rev., **B5**, 566 (1972).
18. Proc. 10th Intern. Conf. Semiconductor Physics, 1970 (eds. S. P. Keller, J. C. Hensel, F. Stern), USAEC, Oak Ridge/Tenn., 1970, p. 65.
19. *Shubnikow L., de Haas W. J.*, Leiden Commun., 207a, 207c, 207d, 210a (1930).
20. *Adams E. N., Holstein T. D.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **10**, 254 (1959). (Имеется перевод в сборнике «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», ИЛ, М., 1961.)

21. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1969, p. 441. (Имеется перевод: *Л. Шифф*, Квантовая механика, ИЛ, М., 1959.)
22. *Cardona M.*, Journ. Phys. Chem Solids, **24**, 1543 (1963).
23. *Dingle R. B.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A211**, 517 (1952).
24. *Isaacson R. A.*, *Bridges F.*, Solid State Comm., **4**, 635 (1966).
25 *Bauer G.*, *Kahlert H.*, Phys. Letters, **41A**, 351 (1972).
26. *Roth L. M.*, *Argyres P. N.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 1, Acad. Press, New York, 1966, p. 159.
27. *Puri S. M.*, *Geballe T. H.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 1, Acad. Press, New York, 1966, p. 203.
28. *de Haas W. J.*, *van Alphen P. M.*, Leiden Commun., 208d, 212a (1930).
29. *de Haas W. J.*, *van Alphen P. M.*, Leiden Commun., 220d (1933).
30 *Smith R. A.*, The Physical Principles of Thermodynamics, Chapman and Hall, London, 1952, p. 154.
31. *Smith R. A.*, Wave Mechanics of Crystalline Solids, Chapman and Hall, 1961, p. 384.
32. *Schoenberg D.* в книге The Physics of Metals, 1. Electrons (ed. J. M. Ziman), Univ. Press, Cambridge, 1969. (Имеется перевод в сборнике «Физика металлов. I. Электроны» под ред. Дж. Займана, «Мир», М., 1972.)
33. *Ziman J. M.*, Principles of the Theory of Solids, Univ. Press, Cambridge, 1964, Ch. 9.7.
34. *Yafet Y.*, *Keyes R. W.*, *Adams E. N.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **1**, 137 (1956).
35. *Keyes R. W.*, *Sladek R. J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **1**, 143 (1956).
36. *Putley E. H.*, Proc. Phys. Soc. (London), **76**, 802 (1960).
37. *Putley E. H.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **22**, 241 (1961).
38. *Нейрингер Л. Дж.* в сборнике Труды IX Международной конференции по физике полупроводников, «Наука», Л., 1969, стр. 757.
39 *Fantner E. J.*, Thesis, Univ. Wien, Austria. 1975.
40. *Putley E. H.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 1, Acad. Press, New York, 1966, p. 289.
41. *Putley E. H.*, Phys. Stat. Sol., **6**, 571 (1964).
42. *Гуревич В. Л.*, *Фирсов Ю. А.*, ЖЭТФ, **40**, 199 (1961).
43. *Клингер М. И.*, ФТТ, **3**, 1342 (1961).
44. *Firsov Yu. A.*, *Gurevich V. L.*, *Parfeniev R. V.*, *Shalyt S. S.*, Phys. Rev. Letters, **12**, 660 (1964).
45 *Эфрос А. Л.*, ФТТ, 3. 2848 (1961).
46. *Eaves L.*, *Stradling R. A.*, *Wood R. A.*, Proc. 10th Int. Conf. Semiconductor Physics, 1970 (eds. S. P. Keller, J. C. Hensel, F. Stern), USAEC, Oak Ridge/Tenn., 1970, p. 816.
47. *Гуревич В. Л.*, *Фирсов Ю. А.*, ЖЭТФ. **47**, 734 (1964).
48. *Stradling R. A.*, *Wood R. A.*, Journ. Phys. C, **1**, 1711 (1968).
49. *Mears A. L.*, *Stradling R. A.*, *Inall E. K.*, Journ. Phys. C., **1**, 821 (1968).
50. *Reynolds R. A.*, Solid State Electronics, **11**, 385 (1968).
51. *Stradling R. A.*, *Eaves L.*, *Hoult R. A.*, *Mears A. L.*, *Wood R. A.*, Proc. 10th Int. Conf Semiconductor Physics 1970 (eds. S. P. Keller, J. C. Hensel, F Stern). USAEC Oak Ridge/Tenn. 1970 p 369
52. *Wood R. A.*, *Stradling R. A.*, *Molodyan I. P.*, Journ. Phys. C, 3, L154 (1970).

Глава 10. УДАРНАЯ ИОНИЗАЦИЯ И ЛАВИННЫЙ ПРОБОЙ

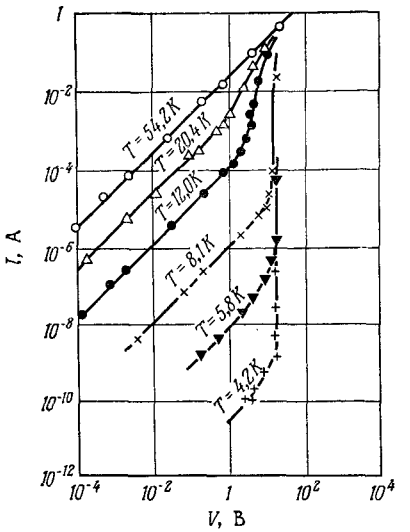
Ударная ионизация и лавинный пробой в полупроводниках в некоторых отношениях похожи на соответствующие явления при газовых разрядах. Полупроводники могут служить модельным веществом для исследования газовой плазмы, так как в твердых телах заряды ионов практически неподвижны и поэтому интерпретация экспериментальных результатов в них легче. Ударная ионизация была осуществлена как в объеме однородно легированных полупроводников при низких температурах, так и в p—n-переходах при комнатной температуре. Мы рассмотрим эти случаи отдельно.

§ 1. Ударная ионизация в однородно легированных полупроводниках при низких температурах

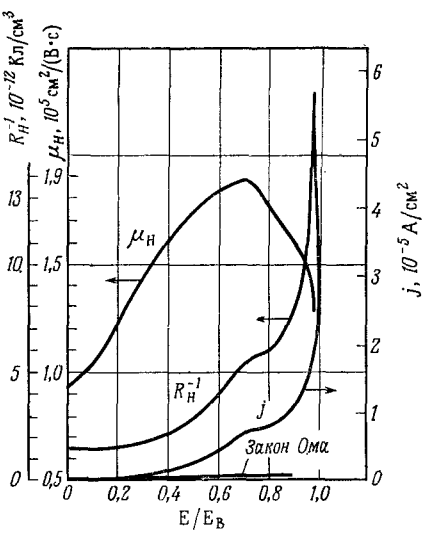
Рассмотрим сначала ударную ионизацию неглубоких примесных уровней в германии n-типа. На фиг. 10.1 приведены типичные вольтамперные характеристики для температур от 4,2 до 54,2 К [1]. Чем ниже температура, тем больше электронов вымораживается на уровнях примесей. Поскольку энергия ионизации составляет всего около 10^{-2} эВ, пробой начинается при полях в несколько вольт на сантиметр и не прекращается до полной ионизации данной примеси. В случае наиболее высокой температуры (фиг. 10.1) все примеси термически ионизованы, и в рассматриваемом диапазоне напряженности поля пробоя нет. (При очень сильных полях может произойти туннелирование через запрещенную зону.)

Картина возникновения пробоя отчетливо видна на фиг. 10.2, где кроме вольтамперной характеристики приведены также кривые обратного коэффициента Холла и холловской подвижности [2, 3]. Уже в области предпробойных полей концентрация носителей постепенно увеличивается с возрастанием напряженности поля, а подвижность проходит через максимум. В слабом поле подвижность определяется рассеянием на ионизованных примесях. Так как с увеличением напряженности поля энергия электронов возрастает, их подвижность увеличивается до тех пор, пока не начинает преобладать рассеяние на колебаниях решетки, в результате чего подвижность начинает уменьшаться с возрастанием поля. Как только начинает преобладать рассеяние на колебаниях решетки, которое в противоположность

рассеянию на ионизованных примесях неупруго, скорость возрастания концентрации электронов становится меньше, что обусловливает выпуклость на кривой $R_H^{-1}(E)$.



Фиг. 10.1. Низкотемпературные вольтамперные характеристики для германия *n*-типа при разных значениях температуры решетки [1].



Фиг. 10.2. Ударная ионизация в *n*-Ge при низких температурах: холловская подвижность μ_H, обратный коэффициент Холла R_H^{-1}, плотность тока j в зависимости от напряженности поля [2].

Образец легирован Sb, $N_D - N_A = 2{,}2 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, $T = 5{,}056$ К, напряженность поля пробоя $E_b = 9{,}14$ В/см.

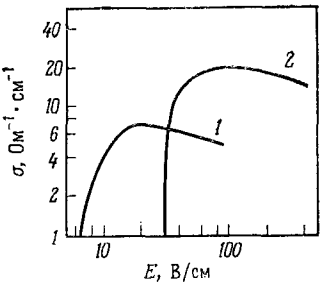
Исследовался также верхний участок характеристики (фиг. 10.3). Кривая *1* на фиг. 10.3 соответствует концентрации электронов $n = 5{,}0 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ при полной ионизации и наблюдалась для различных образцов, наименьшие поперечные размеры которых составляли от 0,5 до 5 мм. В противоположность проведенным ранее исследованиям [5] зависимость от размеров не обнаружена. В случае образца $n = 5{,}2 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$ (кривая *2*) как поле пробоя, так и максимальная электропроводность больше. Уменьшение электропроводности обусловлено упомянутым выше уменьшением подвижности в условиях постоянной концентрации электронов. Произведение подвижности в слабом поле и напряженности поля пробоя, примерно равное скорости дрейфа в предпробойном поле, почти одинаково в разных об-

разцах с неглубокими примесями и не зависит от уровня легирования [2, 3].

При ударной ионизации неглубоких доноров в электрическом поле E при температуре T изменение концентрации электронов в полупроводнике n-типа описывается уравнением [2]

$$\frac{dn}{dt} = A_T(N_D - N_A) + A_I n[N_D - (N_A + n)] - \\ - B_T n(N_A + n) - B_I n^2(N_A + n), \quad (10.1.1)$$

где t — время, $A_T(T)$ и $A_I(E)$ — коэффициенты процессов термической и ударной ионизации соответственно, $B_T(T, E)$ — коэффициент термической рекомбинации одного электрона и одного



Фиг. 10.3. Зависимость электропроводности n-Ge от напряженности электрического поля при 4,2 К [4].

1 — для $N_D - N_A = 5{,}2 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$; *2* — для $N_D - N_A = 5 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$.

ионизованного донора, $B_I(T, E)$ — коэффициент рекомбинации Оже, когда два электрона сталкиваются вблизи ионизованного донора и один из них захватывается на донорный уровень, а другой уносит избыток энергии. Рекомбинацией Оже можно пренебречь при небольших концентрациях n. $N_D - N_A$ — концентрация нескомпенсированных доноров, $N_A + n$ — концентрация ионизованных доноров, а $N_D - (N_A + n)$ — концентрация нейтральных доноров. Концентрацией нейтральных акцепторов и концентрацией дырок пренебрегается.

Стационарное значение концентрации n обозначим n_0. При небольших значениях n (когда рекомбинацию Оже можно не учитывать и $N_A \gg n$) из (10.1.1) получаем

$$n_0 = \frac{A_T(N_D - N_A)}{B_T N_A - A_I(N_D - N_A)}. \quad (10.1.2)$$

Пробой имеет место в поле напряженностью E_b, при котором знаменатель равен нулю:

$$B_T(T, E_b) N_A - A_I(E_b)(N_D - N_A) = 0. \quad (10.1.3)$$

Следовательно, при заданной температуре поле пробоя является однозначной функцией степени компенсации N_A/N_D.

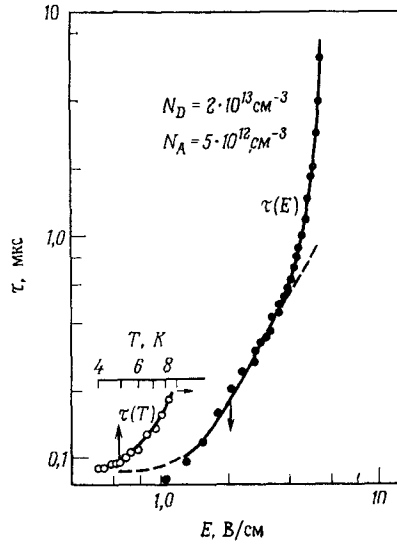
Если ввести постоянную времени

$$\tau = \frac{n_0}{A_T (N_D - N_A)}, \qquad (10.1.4)$$

то уравнение (10.1.1) при тех же упрощающих предположениях, которые использовались при выводе (10.1.2), можно записать в виде

$$-\frac{dn}{dt} = \frac{n - n_0}{\tau}, \qquad (10.1.5)$$

откуда следует экспоненциальная зависимость концентрации от времени. Из кинетики восстановления после пробоя установлена зависимость τ от E при 4,2 К (фиг. 10.4, темные кружки) [6]. Светлые кружки на фиг. 10.4 изображают зависимость τ от температуры решетки T для равновесных электронов. При степени компенсации $N_A/N_D = 5 \cdot 10^{12}/2 \cdot 10^{13} = 25\%$ постоянная времени τ составляет 10^{-6}—10^{-7} с. Согласно (10.1.4), τ больше при большей концентрации компенсирующей примеси. Сечение захвата электрона на донор приблизительно равно 10^{-12} см^2 и на порядок превышает геометрические размеры атома, что объясняется захватом электрона сначала на орбиту больших размеров, соответствующую сильно возбужденному состоянию, с последующим каскадным переходом в невозбужденное состояние [6, 7].



Фиг. 10.4. Зависимость времени рекомбинации в n-Ge от напряженности электрического поля при 4,2 К после пробоя и от температуры решетки для равновесных электронов [6]

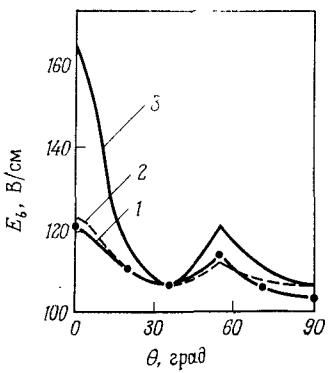
В многодолинном полупроводнике поле пробоя анизотропно. Если предположить, что в предпробойных полях только электроны горячих долин обладают энергией, достаточной для ионизации [8], в случае n-Ge (долины на оси ⟨111⟩ и на

эквивалентных осях) имеем [9]

$$\frac{E_b(\theta)}{E_b(90°)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(2-\cos^2\theta-\sqrt{2}\sin 2\theta)(1-K^{-1})}{3}}} & \text{при } 0° \leqslant \theta \leqslant 55°, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta(1-K^{-1})}{3}}} & \text{при } 55° \leqslant \theta \leqslant 90°, \end{cases} \tag{10.1.6}$$

где, как обычно, $\theta = 0$ соответствует полю $\mathbf{E}_b$ в направлении $\langle 001 \rangle$, $\theta = 55°$ — в направлении $\langle 111 \rangle$ и $\theta = 90°$ — в направлении $\langle 110 \rangle$; $K = \mu_t/\mu_l$ — отношение поперечной и продольной подвижностей. Экспериментальные и теоретические результаты сравниваются на фиг. 10.5 [10] [1]).

Ударная ионизация примесей с глубокими уровнями наступает при существенно более сильных полях по сравнению с рассмотренным случаем неглубоких примесных уровней. Например, акцептор Zn в Ge имеет акцепторные уровни 0,033 и 0,09 эВ, соответствующие Zn^- и Zn^{--}. На фиг. 10.6 показан случай последовательной ионизации обоих уровней при температуре 20,3 К [12]. В данном случае, как и при ионизации неглубоких уровней, потери энергии вследствие рассеяния на колебаниях решетки полностью преобладают над потерями энергии, обусловленными ионизацией.



Фиг. 10.5. Зависимость поля пробоя n-Ge при 4,2 К от угла между направлением поля в плоскости $(1\bar{1}0)$ и осью $\langle 001 \rangle$ [10].

1 — эксперимент; *2* — вычислено с учетом потерь энергии на ионизацию доноров; *3* — вычислено с учетом рассеяния на акустическом деформационном потенциале.

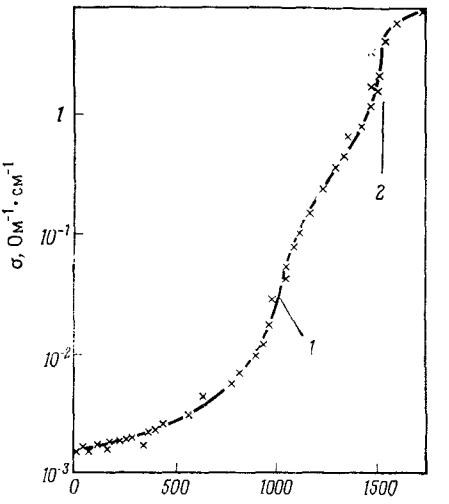
В полупроводниках с узкой запрещенной зоной, таких, как InSb ($\varepsilon_G = 0{,}2$ эВ), InAs ($\varepsilon_G = 0{,}4$ эВ) и Te ($\varepsilon_G = 0{,}35$ эВ), ударная ионизация атомов решетки (а не атомов примесей), во время которой создаются одинаковые количества свободных электронов и дырок, наблюдалась при температурах от 4,2 до 300 К. На фиг. 10.7 приведены результаты экспериментального

[1]) Кремний n-типа рассмотрен в работе [11].

исследования n-InAs при 77 К, соответствующие различному времени после включения поля [13]. Из кинетики развития пробоя во времени определялась скорость генерации

$$g(E) = \frac{1}{n_0}\frac{dn}{dt}, \quad (10.1.7)$$

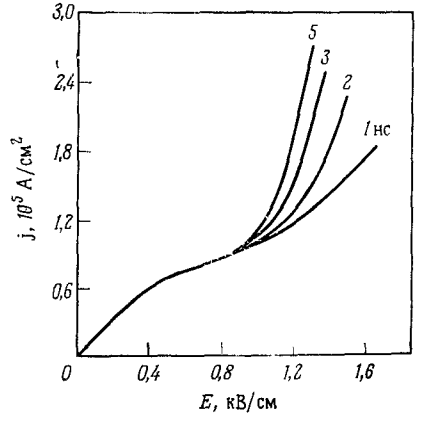
зависимость которой от поля приведена на фиг. 10.8 вместе с теоретическими результатами Думке [14] для 0 и 229 К (см. также [15]). Величина, обратная скорости генерации, порядка 10^{-7}—10^{-8} с. В поперечном магнитном поле 0,6 Т при 77 К, когда $\mu B \approx 2$, скорость генерации почти на 40% меньше (пунктирная кривая на фиг. 10.8). Это объясняется охлаждением горячих электронов в магнитном поле.



Фиг. 10.6. Зависимость электропроводности Ge, легированного Zn, от напряженности электрического поля при 20,3 К [12].

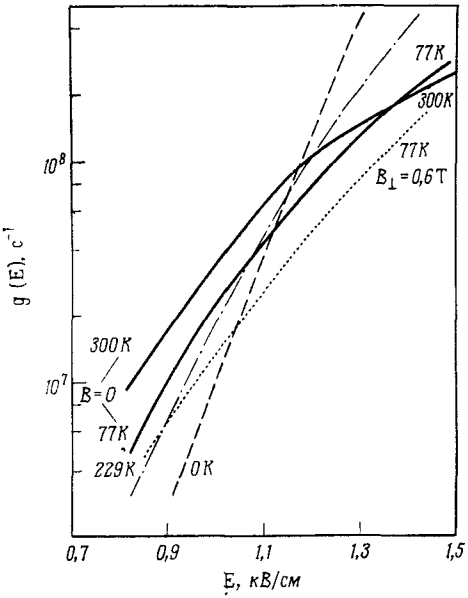
Две ступеньки (*1*, *2*) на характеристике пробоя соответствуют двум акцепторным уровням примеси цинка

Во многих полупроводниках, таких, как p-Te [16] при 77 К и компенсированный Ge [17] при 4,2 К, наблюдались области отрицательного дифференциального сопротивления (о. д. с.). На фиг. 10.9 приведены вольтамперные характеристики Ge, легированного In и компенсированного Sb. Образец *2* легирован больше, чем образец *1*. Наблюдалось образование нитей тока в области пробоя, что согласуется с термодинамически обоснованными



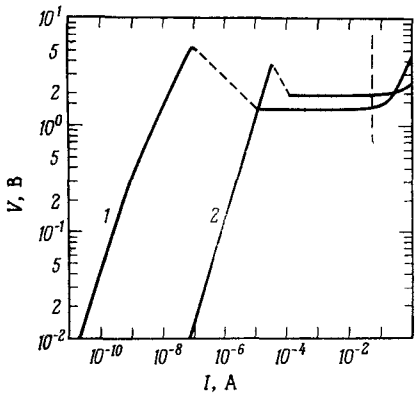
Фиг. 10.7. Зависимости тока от поля в n-InAs при 77 К (указана продолжительность действия поля в наносекундах) [13].

соображениями Ридли для S-образных (контролируемых током) характеристик [18, 19]. Отрицательное дифференциальное со-



Фиг. 10.8. Скорость генерации в n-InAs, измеренная при 300 и 77 К и при 77 К в поперечном магнитном поле 0,6 Т [13] и рассчитанная по теории Думке при 229 и 0 К [14].

противление может быть обусловлено как релаксацией энергии в результате рассеяния на деформационном потенциале



Фиг. 10.9. Вольтамперная характеристика Ge, легированного In и компенсированного Sb, при 4,2 К [17].

Образец 2 легирован сильнее, чем образец 1. Толщина образцов 0,43 мм, диаметр контактов 1 мм. Результаты справа от вертикальной штриховой линии соответствуют импульсным измерениям.

в магнитном поле тока [20], так и релаксацией импульса на примесях. (В компенсированном материале концентрация

ионизованных примесей больше, чем до компенсации.) В полупроводниках, неосновные носители которых обладают существенно меньшей массой, нежели основные, не исключена возможность того, что неосновные носители, образовавшиеся в результате лавинного процесса и легче ускоряемые полем, по мере увеличения их количества начинают определять ход ионизации.

В узкозонных материалах обнаружен пинч-эффект: когда в ходе ионизации количество электронов и дырок сравнивается, сила Лоренца, обусловленная магнитным полем тока, направляет электроны и дырки к центру образца, где создается нить тока [21]. Плотность тока в нити может быть столь высокой, что кристаллическая решетка там плавится, а после выключения тока затвердевает в виде поликристалла.

§ 2. Лавинный пробой в *p—n*-переходах

В обедненном слое *p—n*-перехода с напряжением смещения в обратном направлении достигается напряженность электрического поля до 10^6 В/см при пренебрежимо малом нагреве за счет джоулева тепла. В этих условиях ударная ионизация через запрещенную зону происходит даже в полупроводниках с широкой запрещенной зоной. В случае *p—n*-перехода, характеристика которого приведена на фиг. 5.8, пробой происходит при напряжении 1200 В.

Относительное увеличение концентрации электронов или дырок на единицу длины называется скоростью ионизации:

$$\alpha = \frac{1}{n}\frac{dn}{dx}. \qquad (10.2.1)$$

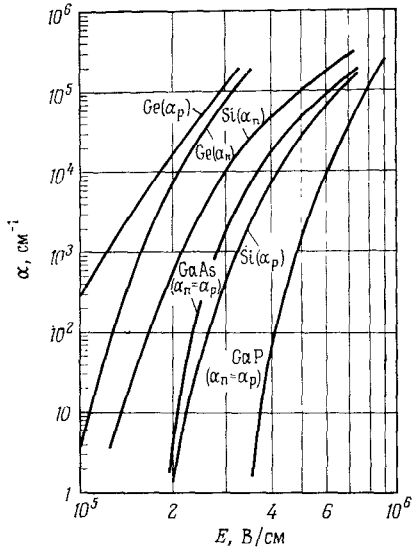
Коэффициент размножения M связан со скоростью ионизации α соотношением

$$1 - \frac{1}{M} = \int_0^d \alpha\,(E)\,dx, \qquad (10.2.2)$$

где подразумевается, что если в точке $x = 0$ на одной из границ слоя сильного поля толщиной d было инжектировано n_0 носителей, то на противоположную границу при $x = d$ приходят Mn_0 носителей, причем скорости ионизации электронов и дырок считаются равными. При выводе (10.2.2) рассматривается увеличение компоненты тока j_n, переносимого электронами, на отрезке от x до $x + dx$ вследствие ионизации за счет электронов и дырок (компонента тока j_p):

$$\frac{dj_n}{dx} = \alpha j_n + \alpha j_p = \alpha j. \qquad (10.2.3)$$

Полный ток j везде одинаков. При $x = d$ ток переносится исключительно электронами, т. е. считается, что инжекции дырок нет ($j_n = j$), тогда как при $x = 0$ компонента тока j_n равна току инжекции электронов $M^{-1}j$ (согласно определению коэффициента размножения M). С этими краевыми условиями уравнение (10.2.3) после интегрирования принимает вид (10.2.2). Пробой имеет место, когда правая сторона (10.2.2) становится равной единице, а, следовательно, $M \to \infty$. При измерении зависимости M от напряжения смещения в обратном направлении носители, как правило, инжектируются светом [22, 23][1]).



Фиг. 10.10. Зависимости скорости лавинной ионизации при комнатной температуре от напряженности поля для различных полупроводников [25].

На фиг. 10.10 приведены полученные экспериментально зависимости α от E для Ge, Si, GaAs и GaP [25]. Кривые для Ge и Si могут быть описаны следующей зависимостью:

$$\alpha \sim \exp\left(-\frac{\text{const}}{E}\right), \qquad (10.2.4)$$

а кривые для GaAs, GaP лучше аппроксимируются зависимостью

$$\alpha \sim \exp\left(-\frac{\text{const}}{E^2}\right), \qquad (10.2.5)$$

где константы в показателях экспонент являются подгоночными параметрами. Покажем правдоподобность приведенных зависимостей $\alpha(E)$. Более полные вычисления приводит Бараф [26, 27].

Рассмотрим соударение, характеризуемое скоростями электрона v_i и v_f до и после соударения и скоростями v_n и v_p электрона и дырки образовавшейся пары[2]). Для простоты ограничимся одномерной моделью. Из законов сохранения импульса

[1]) Обзор явлений размножения носителей см. в работе [24].
[2]) Ход рассуждений заимствован из работы [28].

и энергии следует

$$m_n v_i = m_n v_f + m_n v_n + m_p v_p, \tag{10.2.6}$$

$$\frac{m_n v_i^2}{2} = \varepsilon_G + \frac{m_n v_f^2}{2} + \frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{m_p v_p^2}{2}. \tag{10.2.7}$$

Минимальная энергия первичного электрона, если положить $v_f = v_n = v_p$, равна

$$\varepsilon_i = \frac{m_n v_i^2}{2} = \frac{2m_n + m_p}{(m_n + m_p)} \varepsilon_G. \tag{10.2.8}$$

Если первичной частицей является дырка, то в этой формуле m_n и m_p следует поменять местами. При $m_n = m_p$ находим $\varepsilon_i = 1{,}5\varepsilon_G$. В зависимости от величины отношения m_n/m_p множитель перед ε_G принимает значения от 1 до 2.

Количество носителей с энергией $\varepsilon > \varepsilon_i$ пропорционально $\exp(-\varepsilon_i/k_B T_e)$ для невырожденного электронного газа, характеризуемого температурой T_e. Последняя определяется из уравнения баланса энергии

$$eEv_d = \frac{3}{2} \frac{k_B (T_e - T)}{\tau_\varepsilon} \approx \frac{k_B}{\tau_\varepsilon} T_e, \tag{10.2.9}$$

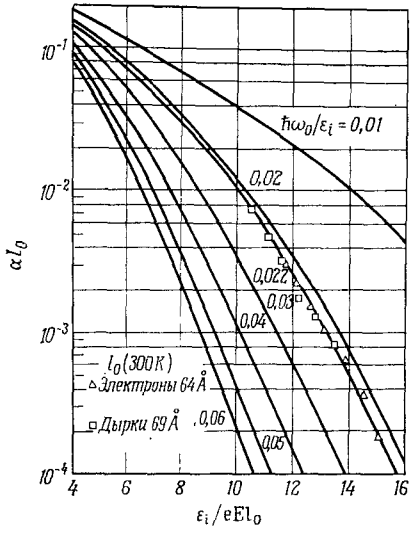
в котором при грубых оценках пренебрегается множителем $^3/_2$ и температурой T. При рассматриваемых здесь сильных полях скорость дрейфа v_d практически постоянна. Считая время релаксации энергии τ_ε постоянным, а произведение $v_d \tau_\varepsilon = l_0$ средней длиной свободного пробега между испусканием оптических фононов, для скорости ионизации α имеем

$$\alpha \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T_e}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{eEl_0}\right). \tag{10.2.10}$$

Если величину ε_i/el_0 считать подгоночным параметром, то из (10.2.10) следует (10.2.4). С другой стороны, принимая $v_d\tau_\varepsilon$ пропорциональным E, получаем зависимость вида (10.2.5).

На фиг. 10.11 показана зависимость произведения αl_0 от ε_i/eEl_0 при различных значениях отношения энергии оптического фонона $\hbar\omega_0$ к ε_i [25]. Экспериментальные результаты для p—n-переходов в германии при 300 К совпадают с кривой для $\hbar\omega_0/\varepsilon_i = 0{,}022$. Если считать, что $\varepsilon_i = 1{,}5\varepsilon_G$ и $\varepsilon_G = 1{,}1$ эВ для прямых переходов при комнатной температуре, то $\hbar\omega_0 = 37$ мэВ. Значения l_0 равны 64 Å для электронов и 69 Å для дырок. Поскольку скорость дрейфа в Ge при сильных полях составляет около $6 \cdot 10^6$ см/с, отсюда можно определить значение τ_ε, равное около 10^{-13} с, что более чем на порядок меньше значения, полученного из сверхвысокочастотных измерений [29]. Тем не менее кривая Барафа достаточно хорошо описывает экспериментальные результаты.

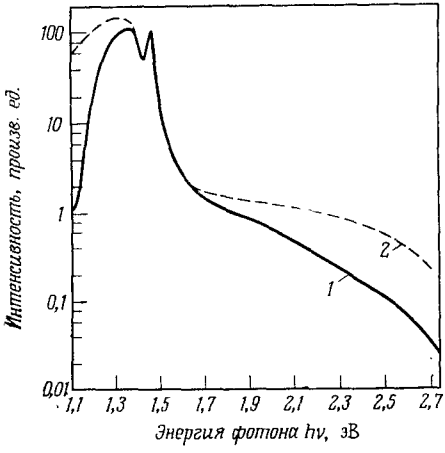
В области ударной ионизации диоды излучают свет с квантовым выходом от 10^{-3} до 10^{-5} фотонов на электрон, проходящий через переход. Характерный спектр излучения GaAs при 77 К приведен на фиг. 10.12 [30]. Максимум широкого спектра находится вблизи энергии запрещенной зоны. В предпробойных условиях свет излучается не равномерно по всей площади перехода, а только из некоторых



Фиг 10.11. Расчетные зависимости Барафа для $p-n$-переходов в Ge при 300 К [25—27] для различных значений $\hbar\omega_0/\varepsilon_i$ и $\varepsilon_i = 1{,}5\ \varepsilon_G$ и экспериментальные данные для электронов с l_0 (300 К) = 64 Å и дырок с l_0 (300 К) = 69 Å [7].

точек; плотность тока и шум в этих точках больше; их принято называть микроплазмами. Бездислокационные переходы этого явления не обнаруживают.

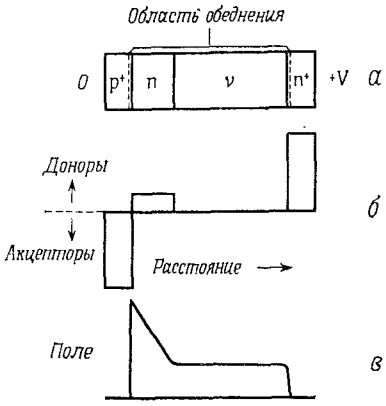
Ударная ионизация и сдвиг фазы переменного тока через p—n-переход используются для генерации сверхвысокочастотных волн. Соответствующие приборы называются лавинопролетными диодами (ЛПД). Пер-



Фиг. 10.12. Спектр излучения $p-n$-перехода в GaAs при напряжении смещения в обратном направлении и $T = 77$ К [30].
1—исходные данные; *2*—с учетом спектральной чувствительности детектора.

вым прибором такого рода был диод Рида [31, 32]. Мы дадим лишь краткое описание физических принципов работы диода Рида; детали можно найти в работах [28, 33].

На фиг. 10.13 показано распределение поля в $p^+n\nu n^+$-структуре, в которой область ν имеет почти собственную проводимость (слегка n-типа; область проводимости слегка p-типа обозначается π) [28, 33]. Пусть в области сильного поля p^+n-перехода возникает ударная ионизация, а в обедненной области поле достаточно сильное для того, чтобы считать скорость дрейфа v_d почти не зависящей от поля. Обозначив полную проводимость обедненной области через Y, для тока инжекции в область лавины имеем $j_n = YV$, где V — напряжение на диоде. Движение заряда по обедненной области наводит на внешней цепи ток, связанный с изменением емкости; его плотность равна $\varkappa\varkappa_0 \partial E/\partial t = (\varkappa\varkappa_0/L)\partial V/\partial t$, где L — длина обедненной области.



Фиг. 10.13. Диод Рида (*а*), распределение примесей (*б*) и распределение поля (*в*) [28].

Внешний ток в момент времени t наводится движением носителей, генерированных в интервале времен между t и $t - \tau$, где $\tau = L/v_d$ — время пролета носителей. Таким образом, задержка между инжекцией заряда и наведенным током составляет в среднем $\tau/2$. В случае синусоидальных колебаний с частотой ω для наведенного тока j имеем

$$j \sim YV \exp\left(-\frac{i\omega\tau}{2}\right). \qquad (10.2.11)$$

Если сумма фазы колебания Y и изменения фазы при пролете $-\omega\tau/2$ лежит между 90 и 270°, то можно показать, что ток колеблется с частотой ω, даже если переменное напряжение не подано. Для скорости дрейфа при насыщении $2 \cdot 10^7$ см/с (как, например, в Si) при длине $L = 10^{-3}$ см частота составляет около 5 ГГц. Имеются приборы непрерывной генерации мощностью в несколько ватт. Достигнуты частоты до 300 ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lautz G.* в книге Halbleiterprobleme (Hrg. F. Sauter), Bd. VI, Vieweg, Braunschweig, 1961.
2. *Koenig S. H., Gunther-Mohr G. R.*, Journ Phys. Chem. Solids, **2**, 268 (1957).
3. *Sclar N., Burstein E.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **2**, 1 (1957).
4. *Baumann K., Kriechbaum M., Kahlert H.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **31**, 1163 (1970).

5. *Zylbersztejn A., Conwell E.*, Phys. Rev. Letters, **11**, 417 (1963).
6. *Koenig S. H.*, Proc. Intern. Conf. Solid State Physics, Brussels 1958 (ed. M. Desirant), Acad. Press., London, 1960, p. 422.
7. *Lax M.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8**, 66 (1959).
8. *Koenig S. H., Brown R. D.*, Schillinger, Phys. Rev., **128**, 1668 (1962).
9. *Seeger K.*, Zs. Phys., **182**, 510 (1965).
10. *Kawamura N.*, Phys. Rev., **133**, A 585 (1964).
11. *Kawamura N.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **27**, 919 (1966).
12. *Zylbersztejn A.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **23**, 297 (1962)
13. *Bauer G., Kuchar F.*, Phys Stat. Sol. (a), **13**, 169 (1972).
14. *Dumke W. P.*, Phys. Rev. **167**, 783 (1968).
15. *Curby R. C., Ferry D. K.*, Phys. Stat. Sol. (a), **15**, 319 (1973).
16. *Nimtz G.*, Proc. 10th Intern. Conf. Physics Semicond., Cambridge/Mass. 1970 (eds. S. P. Keller, J. C. Hensel, F. Stern), USAEC, Oak Ridge/Tenn. 1970, p. 396.
17. *McWhorter A. L., Rediker R. H.*, Proc. 5th Intern. Conf. Physics Semicond., Prague 1960, Czech. Acad. Sciences, Prague 1960, p. 134.
18. *Ridley B. K.*, Proc. Phys. Soc. (London), **81**, 996 (1963).
19. *Barnett A. M.*, IBM Journ. Res. Develop., **13**, 522 (1969).
20. *Казаринов Р. Ф., Скобов В. Г.*, ЖЭТФ, **42**, 1047 (1962).
21. *Ancker-Johnson B.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 1, Acad. Press., New York, 1966, p. 379.
22. *Chynoweth A. G., McKay K. G.*, Phys. Rev., **108**, 29 (1957).
23. *Lee C. A., Logan R. A., Batdorf R. L., Kleimack J. J., Wiegman W.*, Phys. Rev. **134**, A 761 (1964).
24. *Chynoweth A. G.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. Willardson R. K., Beer A. C.), Vol. 4, Acad. Press. New York, 1968, p. 263.
25. *Sze S. M.*, Physics of Semiconductor Devices, J. Wiley and Sons, New York, 1969, p. 60. (Имеется перевод: *С. М. Зи*, Физика полупроводниковых приборов, «Энергия», М., 1973.)
26. *Baraff G. A.*, Phys. Rev. **128**, 2507 (1962).
27. *Baraff G. A.*, Phys. Rev., **133**, A 26 (1964).
28. *Carroll J. E.*, Hot Electron Microwave Generators, Arnold, London, 1970. (Имеется перевод: *Дж. Кэррол*, СВЧ-генераторы на горячих электронах, «Мир», М., 1972.)
29. *Gibson A. F., Granville J. W., Paige E. G. S.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **19**, 198 (1961).
30. *Michel A. E., Nathan M. I., Marinace J. C.*, Journ. Appl. Phys., **35**, 3543 (1964).
31. *Read W. T.*, Bell Syst. Techn. Journ., **37**, 401 (1958).
32. *Shockley W.*, Bell Syst. Techn. Journ., **33**, 799 (1954).
33. *Hartnagel H.*, Semiconductor Plasma Instabilities, Heinemann, London, 1969, p. 200.

Глава 11. ПОГЛОЩЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА

Распространение электромагнитного излучения в полупроводнике в общем зависит от температуры и давления, а также от электрического и магнитного полей. Измерения этих эффектов дают информацию о зонной структуре и уровнях энергии в полупроводниках. В приложении 4 приведены формулы для расчета показателей преломления и поглощения соотношения между коэффициентами отражения и пропускания, а также соотношения Крамерса — Кронига. Для облегчения вычислений полезно отметить, что кванту энергии $\hbar\omega$, равному 1 эВ, соответствуют волновое число $\tilde{\nu} = 8060$ см$^{-1}$ и длина волны $\lambda = 1{,}24$ мкм.

§ 1. Собственное поглощение и зонная структура

Для объяснения многих явлений переноса в полупроводниках необходимо ввести предположение о наличии запрещенной зоны энергии шириной ε_G между валентной зоной и зоной проводимости. Поскольку в идеальном полупроводнике нет энергетических уровней внутри запрещенной зоны, такой полупроводник должен быть прозрачен для света, угловая частота которого меньше критического значения ω_e, определяемого из соотношения

$$\hbar\omega_e = \varepsilon_G \tag{11.1.1}$$

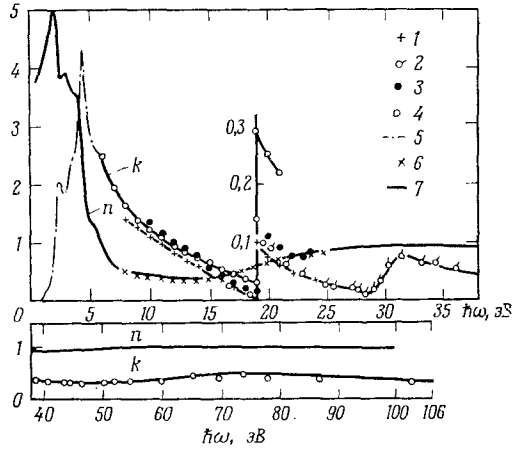
при условии, что поглощение квантов света обусловлено только перебросом электронов из валентной зоны в зону проводимости. Это поглощение называется собственным; величина ω_e определяет *край* собственного поглощения.

Сказанное справедливо также в случае неидеальных полупроводников, пока концентрация носителей заряда (называемых в оптике свободными носителями) не настолько велика, чтобы проводимость была металлической, т. е. пока поглощение носителями не становится того же порядка величины, что и собственное поглощение.

На фиг. 11.1 показаны зависимости показателя поглощения k и показателя преломления n германия от энергии фотонов [1—4]. Показатель поглощения близок к нулю, когда энергия фотонов

меньше ширины запрещенной зоны, составляющей около 0,7 эВ, затем он резко возрастает до максимального значения, когда энергия составляет несколько электронвольт, и снова уменьшается, когда энергия возрастает до значений, соответствующих области мягких рентгеновских лучей. В максимуме $k \approx n \approx 4$, и мнимая часть диэлектрической проницаемости $k_i = 2nk$ составляет примерно 32.

Показатель преломления n был рассчитан для участка спектра $k(\omega)$ на основе соотношений Крамерса — Кронига (приложение 4). Этот расчет подтверждается экспериментальными



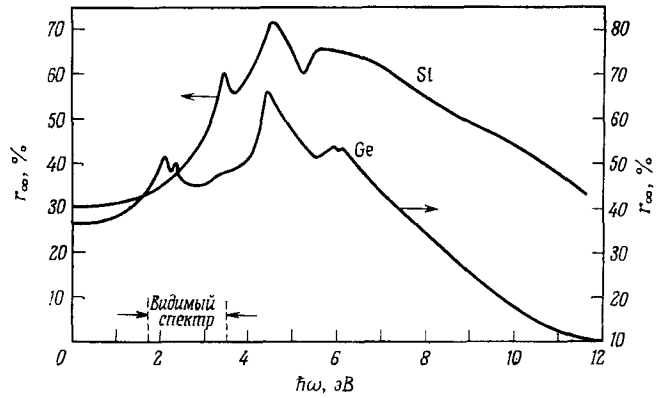
Фиг. 11.1. Спектральные зависимости показателя преломления n [3] и показателя поглощения k германия [1].

Результаты измерений: *1*, *2* — Мартона и Тутса; *3* — Хантера; *4* — Сасаки; *5* — Филиппа и Эреирайха; *6* — Филиппа и Тафта; *7* — результаты расчета на основе анализа Кронига — Пеини.

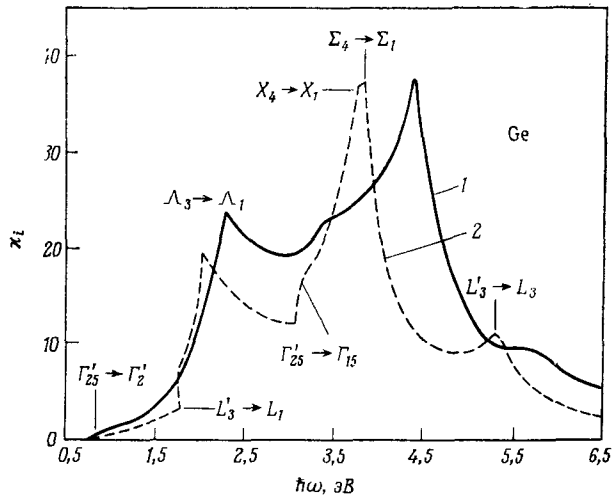
данными в интервале энергий от 8 до 20 эВ, где показатель преломления n меньше единицы. В области малых энергий показатель преломления n достигает значения около 4, что соответствует значению действительной части диэлектрической проницаемости $\varkappa_r = 16$. В рентгеновской области n стремится к единице. Подобные результаты получены и для других полупроводников.

На фиг. 11.2 показан коэффициент отражения r_∞ для германия и кремния как функция энергии вплоть до 12 эВ [5], а на фиг. 11.3 — мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varkappa_i$ германия [6]. Коэффициент отражения r_∞ и величина $\varkappa_i$ имеют максимумы почти при одних и тех же значениях энергии. Максимальный коэффициент отражения составляет около 70%. Величина $\varkappa_i$ рассчитывалась также на основе зонной структуры,

показанной на фиг. 2.25 [6]; результат показан на фиг. 11.3 штриховой кривой. Между этими двумя кривыми имеется каче-



Фиг. 11.2. Зависимость коэффициента отражения германия и кремния от $\hbar\omega$ при комнатной температуре [5].

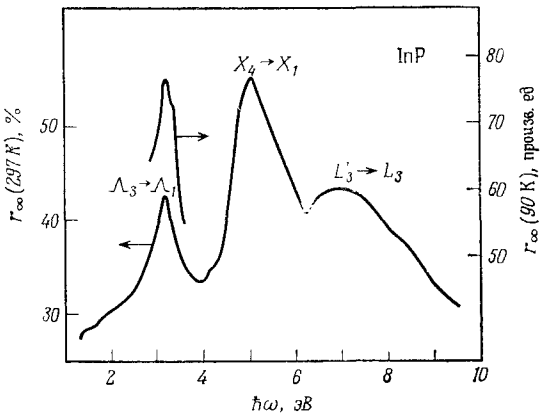


Фиг. 11.3. Мнимая часть диэлектрической проницаемости германия [6].
1 — полученная на основе измерений коэффициента отражения; *2* — рассчитанная Брусто и др.

ственное согласие; максимумы зависимости $\varkappa_i(\omega)$ можно связать с переходами между энергетическими зонами.

Наибольший максимум при $\hbar\omega \approx 4$ эВ обусловлен двумя переходами: первым — из валентной зоны в ближайшую зону

проводимости на границе первой зоны Бриллюэна в направлении ⟨100⟩ (на фиг. 2.25 обозначено $X_4 \to X_1$) и вторым $\Sigma_4 \to \Sigma_1$ — в направлении ⟨110⟩ (на фиг. 2.25 не обозначен, так как там показаны только направления ⟨111⟩ и ⟨100⟩). Все обозначенные переходы, в том числе соответствующие пикам при 2, 2,18 и 6 эВ, происходят из зоны тяжелых дырок; в точке $\mathbf{k} = 0$, где зоны легких и тяжелых дырок вырождены, переходы $\Gamma'_{25} \to \Gamma'_2$ (0,8 эВ) и $\Gamma'_{25} \to \Gamma_{15}$ (3 эВ) приводят к перегибам на кривой $\varkappa_i(\omega)$. Обозначения точек и осей в первой зоне Бриллюэна



Фиг 11.4. Коэффициент отражения фосфида индия при комнатной температуре и температуре 90 К [11—13].

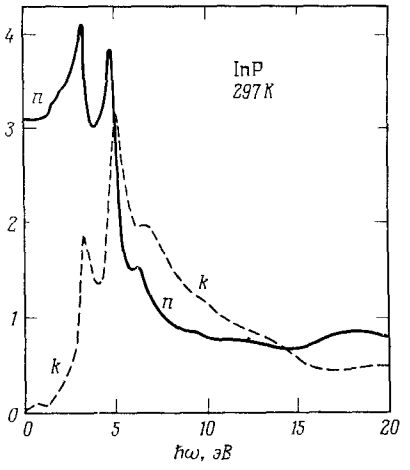
греческими и латинскими прописными буквами были введены вместе с теорией групп (гл. 2, § 4) и соответствующими исследованиями симметрии кристаллической решетки [8][1]).

На графике зависимости $\varkappa_i(\omega)$ теоретические максимумы сдвинуты относительно экспериментальных в сторону низких энергий. Может возникнуть искушение улучшить согласие путем введения дополнительных параметров в расчет зонной структуры. Однако заслуживает внимания тот факт, что в представленных расчетах использованы только три подгоночных параметра, так как расчеты очень сложны.

Спектры отражения германия и кремния, как и общий характер их зонной структуры, очень похожи. Имеются различия в расположении подзон проводимости: в кремнии подзона Γ'_2 практически совпадает с Γ_{15}, поэтому подзона Γ'_2 расположена ниже Λ_1, а не выше ее. Разности энергий $L'_3 - L_1$ и $\Lambda_3 - \Lambda_1$ здесь

[1]) Краткое введение см. в работе [9].

больше, чем в германии, вследствие чего основной минимум зоны проводимости находится не в L_1, а в Δ_1. В силу этого пик отражения при $\hbar\omega = 3{,}4$ эВ в кремнии связан с иными переходами, чем переходы, ответственные за пик при $\hbar\omega = 2{,}1$ эВ в германии; с какими именно, пока неизвестно: возможно, это прямые переходы $\Gamma'_{25} \to \Gamma_{15}$ между потолком валентной зоны и зоной проводимости при $\mathbf{k} = 0$ или переходы $\Gamma'_{25} \to \Gamma'_2$ и $L'_3 \to L_1$. Оптические исследования твердых растворов германия и кремния показали, что пик при 3,4 эВ становится слабее с уменьшением содержания кремния вблизи 75 ат.% Si [10]. По-видимому, при большем содержании германия отражательная способность при этом значении энергии определяется другими переходами.



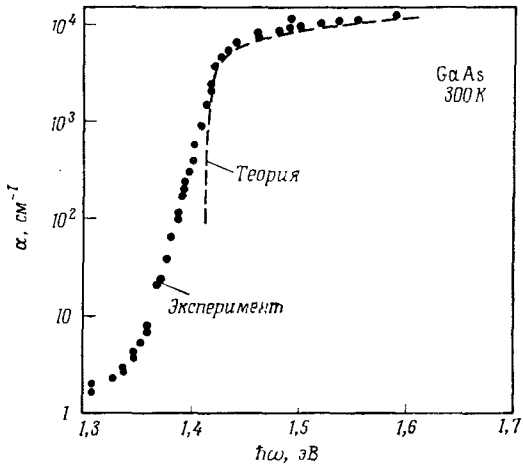
Фиг. 11.5. Показатели преломления и поглощения фосфида индия, полученные по данным фиг. 11.4 методом анализа Кронига — Пенни.

Выберем в качестве примера полупроводниковое соединение InP и рассмотрим его коэффициент отражения r_∞ (фиг. 11.4), а также показатели n и k (фиг. 11.5) [11—13]. Зонные структуры InP и Ge похожи. При низких температурах наблюдается расщепление пика на величину 0,14 эВ, что рассматривается как следствие спин-орбитального расщепления валентной зоны. Расщепление этого пика на 0,28 эВ наблюдалось и в германии, но оно не учтено в зонной структуре, представленной на фиг. 2.25. С увеличением атомного веса энергия расщепления возрастает и достигает 0,75 эВ для AlSb и 0,8 эВ для GaSb и InSb. Дальнейшие подробности указаны в работе [14].

§ 2. Край собственного поглощения: зависимость от температуры, давления, состава твердого раствора и вырождения

Рассмотрим теперь край собственного поглощения, который, согласно (11.1.1), непосредственно связан с шириной запрещенной зоны. На фиг. 11.6 и 11.7 показаны спектры поглощения арсенида галлия и германия соответственно при различных температурах. В обоих случаях ширина запрещенной зоны уменьшается

с повышением температуры. На фиг. 11.8 показана зависимость ширины запрещенной зоны германия от температуры. Выше 150 К она линейна с коэффициентом пропорциональности —0,43 мэВ/К. В полупроводниках, ширина запрещенной зоны которых различается на порядок, этот коэффициент изменяется не более чем в два раза: например, для GaP, где $\varepsilon_G = 2{,}24$ эВ при 300 К, он составляет —0,54 мэВ/К, а для InSb, где $\varepsilon_G = 0{,}167$ эВ при 300 К, он равен —0,28 мэВ/К. Хотя в PbS, PbSe

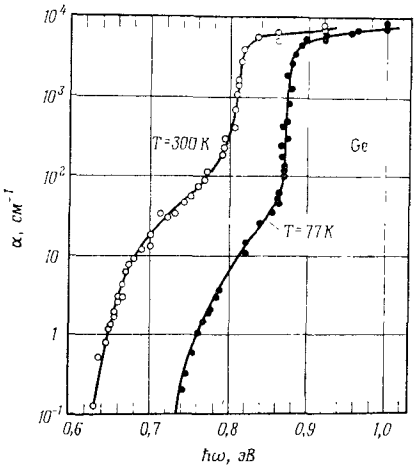


Фиг. 11.6. Край поглощения света в арсениде галия при комнатной температуре [15].

и PbTe ширина запрещенной зоны увеличивается с ростом температуры, нормальным поведением считается уменьшение.

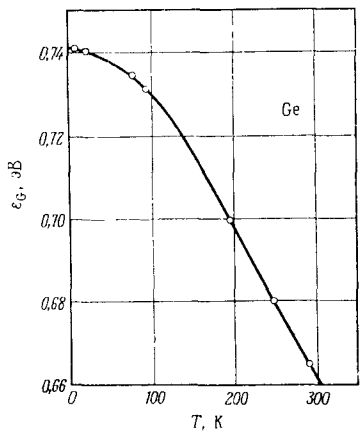
Сравнив фиг. 11.6 и 11.7, можно заметить небольшое различие в ходе зависимостей коэффициентов поглощения арсенида галлия и германия от энергии. В германии наблюдается перегиб, который отсутствует в арсениде галлия. Этот перегиб обусловлен тем, что в германии основной минимум зоны проводимости находится на краю первой зоны Бриллюэна, тогда как в GaAs он расположен в точке $\mathbf{k} = 0$. Поскольку максимум валентной зоны обоих кристаллов расположен в точке $\mathbf{k} = 0$, переход, подчиняющийся закону (11.1.1), в германии происходит с изменением импульса, а в арсениде галлия — без изменения импульса. Эта ситуация показана схематически на фиг. 11.9. Переходы называются непрямым и прямым соответственно. В германии возможны оба перехода, однако, несмотря на меньшую требуемую энергию, непрямые переходы менее вероятны, в силу чего они приводят лишь к перегибу кривой поглощения

(фиг. 11.7). Зона проводимости GaAs показана на фиг. 11.9 штриховой кривой [1]) (нормированной на кривую германия в точке $\mathbf{k} = 0$). В этом случае прямые переходы требуют наименьшей энергии. Непрямые переходы, обозначенные штрихпунктирными стрелками, также могут возникнуть, но их нельзя обнаружить в спектре поглощения вследствие их малой вероятности и большей требуемой энергии. В соответствии с этими переходами арсенид галлия называют прямым полупроводником, а германий — непрямым полупроводником.



Фиг. 11.7. Край поглощения света в германии при температуре 77 и 300 К [16].

Перегиб на кривых при $\alpha = 10^2$ $см^{-1}$ указывает на переход от непрямого поглощения к прямому поглощению



Фиг. 11.8 Температурная зависимость ширины запрещенной зоны в германии [17].

Поскольку импульс фотона пренебрежимо мал [2]), закон сохранения импульса в непрямых переходах требует участия другой частицы. Во время перехода импульс этой частицы меняется на величину $\hbar\mathbf{q}$. Такой частицей может быть междолинный фонон $\hbar\omega_i$, поглощаемый или испускаемый при переходе. Закон сохранения энергии при переходе в случае поглощения требует выполнения равенства

$$\hbar\omega_e = \varepsilon_G - \hbar\omega_i \qquad (11.2.1)$$

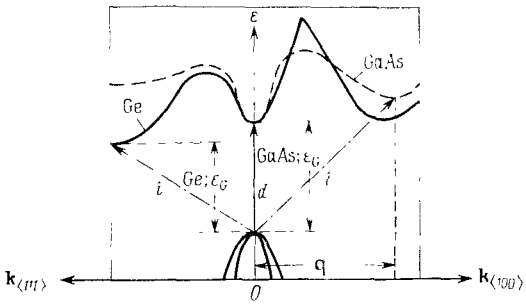
вместо (11.1.1), однако обычно $\varepsilon_G \gg \hbar\omega_i$. Такой частицей может быть также атом примеси или дислокация. В этих случаях

[1]) Полиая зониая структура GaAs приведена в работе [5].

[2]) При $\hbar\omega = 1$ эВ и постоянной решетки $a = 3 \cdot 10^{-8}$ см этот импульс равен приблизительно $\pi/(2000\ a)$.

процесс рассеяния с хорошим приближением можно считать упругим. Значение q должно быть меньше, чем обратная длина Дебая. Однако в большинстве интересующих нас случаев упругие процессы встречаются реже, чем взаимодействие с фононами.

В гл. 11, § 9, дается квантовомеханическая трактовка оптических переходов. Коэффициент поглощения света пропорционален вероятности перехода, которая в основном определяется произведением матричного элемента на дельта-функцию, проинтегрированным по всем возможным конечным состояниям



Фиг. 11.9. Схема прямых и непрямых переходов в Ge и GaAs.
i — непрямые переходы. Шкалы энергий обоих полупроводников нормированы на одно и то же значение ширины запрещенной зоны.

в зоне проводимости. В первом приближении матричный элемент можно считать независимым от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Так как в приближении сферических зон $d^3k \sim \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon$ и $d^3k' \sim \sqrt{-\varepsilon_G - \varepsilon'}\, d\varepsilon'$ (за начало отсчета энергии принято дно зоны проводимости), интегрируя, получаем

$$\int [\varepsilon(-\varepsilon_G - \varepsilon')]^{1/2}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega \pm \hbar\omega_i)\, d\varepsilon\, d\varepsilon' =$$

$$= \int_0^{\hbar\omega \mp \hbar\omega_i - \varepsilon_G} [\varepsilon(-\varepsilon + \hbar\omega \mp \hbar\omega_i - \varepsilon_G)]^{1/2}\, d\varepsilon =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}(\hbar\omega \mp \hbar\omega_i - \varepsilon_G)^2, \qquad (11.2.2)$$

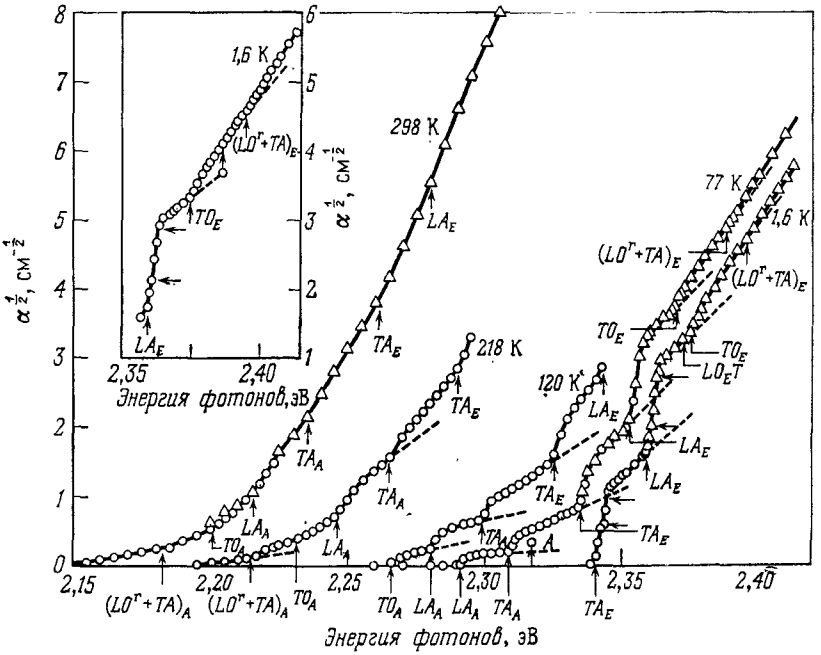
где принято $\hbar\omega \mp \hbar\omega_i > \varepsilon_G$ (в противном случае интеграл равен нулю).

Как и при любом переходе с участием фонона, здесь матричный элемент зависит от функции распределения фононов N_q. Следовательно, коэффициент поглощения α пропорционален этой функции:

$$\alpha \sim N_q(\hbar\omega + \hbar\omega_i - \varepsilon_G)^2 + (N_q + 1)(\hbar\omega - \hbar\omega_i - \varepsilon_G)^2, \qquad (11.2.3)$$

где $N_q = [\exp(\hbar\omega_i/k_BT) - 1]^{-1}$. В отличие от прямых переходов, которые лишь слабо зависят от температуры вследствие зависимости $\varepsilon_G = \varepsilon_G(T)$, непрямые переходы приводят к дополнительной экспоненциальной зависимости, так как величина N_q зависит от температуры.

При низких температурах и при значениях коэффициента поглощения порядка 10 см$^{-1}$ в спектре поглощения наблюдается

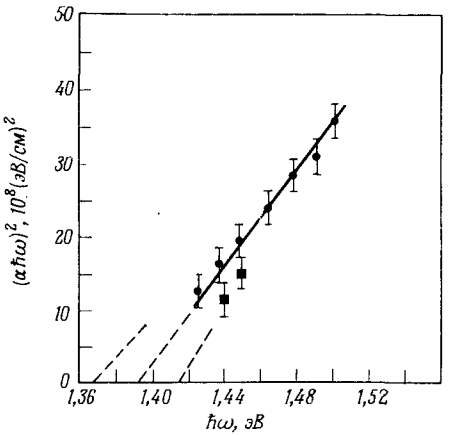


Фиг. 11.10. Край поглощения света в фосфиде галлия [18].
Указаны пороги образования свободных экситонов, сопровождающегося испусканием фононов.

структура, связанная с продольными и поперечными оптическими, а также с междолинными акустическими фононами. В случае GaP, для которого основной минимум зоны проводимости расположен в направлении ⟨100⟩, а зонная структура напоминает зонную структуру кремния, спектры поглощения показаны на фиг. 11.10. Пороги отчетливо видны вследствие влияния экситонов, которые рассматриваются в § 3 настоящей главы. За исключением этой структуры, квадратный корень из коэффициента поглощения по существу линейно зависит от $\hbar\omega$, так как переходами с поглощением фононов при низких температурах можно пренебречь.

Метод, обычно применяемый для определения края собственного поглощения, иллюстрируется на фиг. 11.11, где представлена зависимость величины $(\alpha\hbar\omega)^2$ от энергии фотона $\hbar\omega$ (α — коэффициент поглощения). Экспериментальные точки укладываются на прямую линию. Пересечение этой линии с осью абсцисс дает ширину запрещенной зоны 1,29 эВ с точностью $\pm$0,02 эВ. Однако еще большая точность может быть достигнута магнитооптическими методами (см. гл. 11, § 4).

Как будет показано на основе квантовой теории (гл. 11, § 9), коэффициент поглощения зависит от частоты в основном по закону $(\hbar\omega - \varepsilon_G)^{1/2}$. Причину использования квадрата произведения $\alpha\hbar\omega$, а не просто α^2 легко понять. Пусть электрон переходит из состояния k в состояние k', поглощая фотон, движущийся со скоростью c/n в среде с показателем преломле-



Фиг. 11.11. Край поглощения света в арсениде галлия [19].
По графику можно определить пороговое значение энергии. Экспериментальные точки соответствуют двум различным образцам.

ния n. Число переходов в единице объема за единицу времени, проинтегрированное по всем конечным состояниям, назовем скоростью переходов R/V. Полагая, что число фотонов в объеме V равно N, а поток фотонов равен $N_c/(nV)$, можно выразить величину R/V в виде произведения потока фотонов на коэффициент поглощения α; отсюда

$$R = N\frac{c}{n}\alpha. \qquad (11.2.4)$$

Поток энергии $\bar{S}$ равен произведению потока фотонов на энергию фотона $\hbar\omega$:

$$\bar{S} = N\frac{c}{nV}\hbar\omega. \qquad (11.2.5)$$

С другой стороны, величина $\bar{S}$ есть среднее по времени значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \qquad (11.2.6)$$

Векторный потенциал плоской волны

$$\mathbf{A} = A_0\mathbf{a}\cos(\mathbf{qr} - \omega t) =$$

$$= \frac{A_0}{2}\mathbf{a}\,[\exp(i\omega t - i\mathbf{qr}) + \exp(-i\omega t + i\mathbf{qr})], \quad (11.2.7)$$

где A_0 — амплитуда этого потенциала, $\mathbf{a}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{A}$. В немагнитной среде величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются через векторный потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \omega A_0\mathbf{a}\sin(\mathbf{qr} - \omega t), \quad (11.2.8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}[\nabla_r \mathbf{A}] = \frac{A_0}{\mu_0}[\mathbf{aq}]\sin(\mathbf{qr} - \omega t); \quad (11.2.9)$$

скалярный потенциал здесь не учитывается, что будет обосновано ниже. Вектор поляризации $\mathbf{a}$ направлен параллельно вектору $\mathbf{E}$. Среднее по времени значение $|\mathbf{S}|$ находим из (11.2.6):

$$\bar{S} = |\,\mathbf{a}(\mathbf{aq}) - \mathbf{q}\,|\frac{\omega A_0^2}{2\mu_0}. \quad (11.2.10)$$

В простом случае поперечной электромагнитной волны, для которой модуль волнового вектора $|\mathbf{q}| = \omega n/c$, получаем

$$\bar{S} = \frac{\omega^2 n A_0^2}{2\mu_0 c}. \quad (11.2.11)$$

Исключая из (11.2.4) и (11.2.5) величину N, получаем произведение коэффициента поглощения на энергию фотона:

$$\alpha\hbar\omega = \frac{377\ \text{Ом}}{n}\frac{2\hbar^2 R}{A_0^2 V}, \quad (11.2.12)$$

где вместо произведения $\mu_0 c$ записано его значение 377 Ом.

В (11.2.8) мы пренебрегаем скалярным потенциалом электромагнитной волны. Из теории электромагнитного излучения известно, что его можно всегда исключить путем калибровочного преобразования[1]). Гамильтониан электрона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ в таком случае имеет простой вид

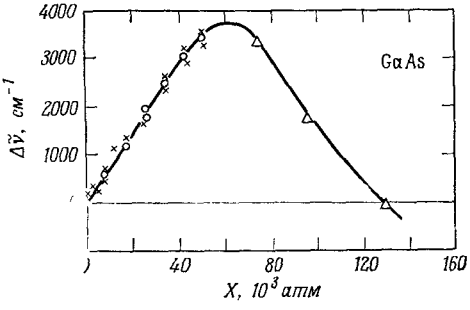
$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}(\hbar\mathbf{k} - e\mathbf{A})^2. \quad (11.2.13)$$

С помощью этого гамильтониана в гл. 11, § 9, будет показано, что квантовомеханическая вероятность перехода R

[1]) $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla_r f$; $V' = V + \partial f/\partial t$, где $f(\mathbf{r}, t)$ — произвольная функция, которая приводит к $V' = 0$. Напряженности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ нечувствительны к виду функции f; см., например, *Дж. Стрэттон*, Теория электромагнетизма, М., 1948, стр. 33—37.

пропорциональна A_i^2, что оправдывает построение графика зависимости произведения $\alpha\hbar\omega$ от частоты поглощенного света.

Мы уже отмечали, что край поглощения зависит от температуры. Сдвиг края поглощения возникает также под действием гидростатического давления. На фиг. 11.12 показано это явление в случае GaAs. После начального подъема с наклоном 9,4 мкэВ/атм наступает падение с наклоном около —8,7 мкэВ/атм. Максимум находится при давлении 60 000 атм. Такое поведение объясняется предположением о том, что при



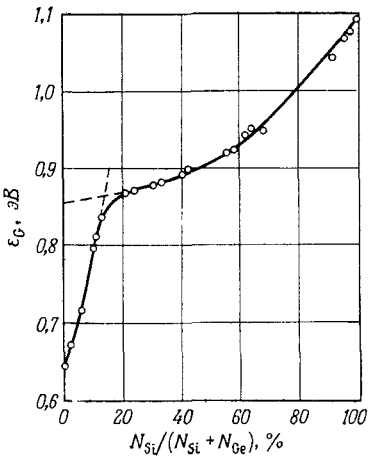
Фиг. 11.12. Зависимость края поглощения света в арсениде галлия от гидростатического давления X [20].

низком давлении дно зоны проводимости находится в точке $\mathbf{k} = 0$ (обозначенной символом Г). С ростом давления оно поднимается относительно максимума валентной зоны, находящегося также при $\mathbf{k}=0$. Однако имеются дополнительные долины, расположенные на оси ⟨100⟩ и эквивалентных осях. Эти долины опускаются с ростом давления. При давлении 60 000 атм дополнительные долины минуют основную долину и затем образуют дно зоны проводимости.

Для германия экспериментальные значения коэффициентов давления таковы: 5 мкэВ/атм для минимума ⟨111⟩, который при низком давлении образует дно зоны проводимости, —2 мкэВ/атм для минимума ⟨100⟩ и 12 мкэВ/атм для минимума ⟨000⟩. Для всех исследованных до настоящего времени полупроводников коэффициент давления для минимума ⟨100⟩ отрицателен, тогда как для Г- и L-минимумов он всегда положителен, причем в последнем случае значения близки к 4 мкэВ/атм для всех полупроводников [21].

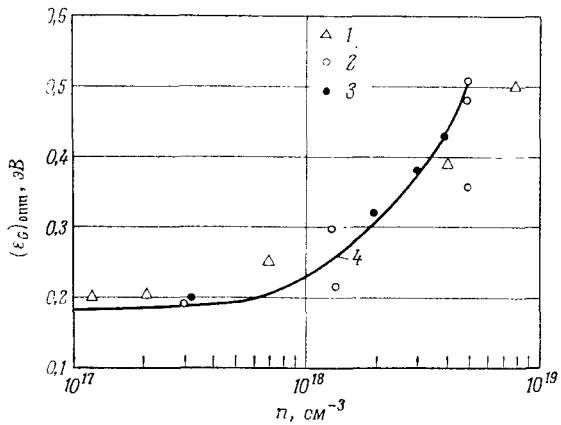
Зависимость края собственного поглощения $\hbar\omega_l$ твердых растворов от состава имеет некоторую связь с зависимостью $\hbar\omega_l$ компонентов от давления. На фиг. 11.13 показана зависимость ширины запрещенной зоны от состава твердого раствора

Ge—Si, определенная по поглощению света [22]. В богатых германием растворах дно зоны проводимости находится в L-точке и поднимается с ростом содержания кремния. В растворах, богатых кремнием, дно зоны образовано минимумом ⟨100⟩ и поднимается медленнее. По-видимому, L- и X-минимумы при содержании кремния около 15 атомн.% пересекаются.



Фиг. 11.13. Зависимость ширины запрещенной зоны твердого раствора германий — кремний от состава [22].

Наконец, рассмотрим влияние концентрации n носителей заряда на край поглощения. Такое влияние наблюдалось в полупроводниках n-типа с малой эффективной массой электронов. На фиг. 11.14 показаны результаты наблюдений для n-InSb [23—25]. Когда концентрация n больше 10^{18} см$^{-3}$ и электронный



Фиг. 11.14. Сдвиг Бурштейна кажущейся ширины запрещенной зоны антимонида индия с ростом концентрации электронов n.
1 — данные экспериментов [24]; *2* — [25] и *3* — [23]; сплошная кривая — теоретическая [23].

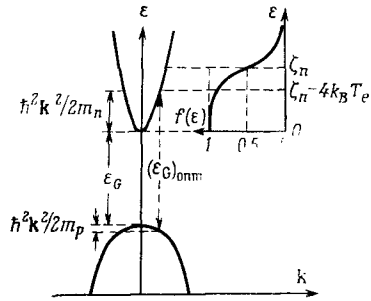
газ становится вырожденным, край поглощения $(\varepsilon_G)_{опт}$ с ростом n сдвигается в сторону больших энергий. Выражение

$$(\varepsilon_G)_{опт} - \varepsilon_G = \left(1 + \frac{m_n}{m_p}\right)(\zeta_n - 4k_BT_e) \qquad (11.2.14)$$

связывает этот сдвиг (сдвиг Бурштейна) с энергией Ферми ζ_n [26]. (Температура электронов T_e, находящихся в тепловом равновесии с решеткой, равна температуре решетки.) Допустим для простоты, что все энергетические уровни в зоне проводимости заняты вплоть до энергии

$$\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_n} = \zeta_n - 4k_BT_e \qquad (11.2.15)$$

(так как $1 - e^{-4} \approx 99\%$). Закон сохранения импульса требует, чтобы минимальная энергия фотона включала не только сумму энергий $\varepsilon_G + \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m_n)$, но и энергию $\hbar^2\mathbf{k}^2/(2m_p)$ состояния



Фиг. 11.15. Сдвиг Бурштейна в модели энергетических зон прямого полупроводника. (Справа показан график функции распределения Ферми — Дирака)

в валентной зоне с тем же значением вектора $\mathbf{k}$, как показано на фиг. 11.15:

$$\hbar\omega = \varepsilon_G + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2}\left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_p}\right) = \varepsilon_G + \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_n}\left(1 + \frac{m_n}{m_p}\right). \qquad (11.2.16)$$

Энергия электрона $\hbar^2\mathbf{k}^2/(2m_n)$ определяется согласно (11.2.15). Таким образом, для края поглощения $\hbar\omega_e = (\varepsilon_G)_{\text{опт}}$ получается выражение (11.2.14). Для непараболичных зон это выражение должно быть видоизменено.

Энергия Ферми зависит от температуры электронов T_e, а также от их концентрации n. Шур [27] показал, что эта зависимость позволяет определить соотношение между температурой электронов T_e в вырожденных полупроводниках и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$. Так как фононы не принимают участия в прямых переходах, не возникает другой температурной зависимости, кроме зависимости от T_e. Поэтому результаты одного эксперимента, проведенного при постоянной температуре и изменении $\mathbf{E}$, можно сравнивать с результатами другого эксперимента, в котором температура решетки возрастает, а $\mathbf{E} = 0$. Во втором эксперименте $T_e = T$, и, следовательно, эмпирическим путем получается зависимость T_e от $\mathbf{E}$.

Такие эксперименты были выполнены, например, для GaSb n-типа при $T = 77$ К [28]. Обозначим символом $S(\hbar\omega)$ произве-

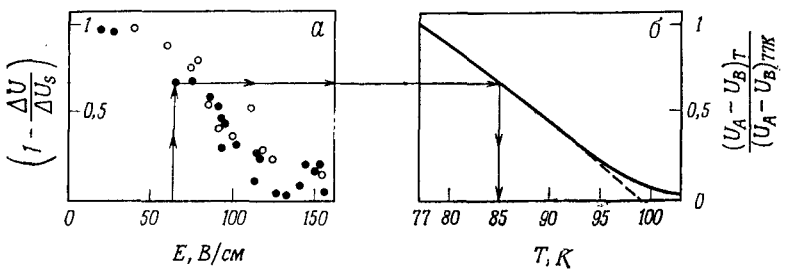
дение спектральной чувствительности детектора на спектральное распределение интенсивности света, а символом $T(\hbar\omega)$ — прозрачность вырожденного образца. Полихроматический свет вызывает появление сигнала детектора

$$U = \int_0^\infty T(\varepsilon)\, S(\varepsilon)\, d\varepsilon, \tag{11.2.17}$$

где $\varepsilon = \hbar\omega$. Если наложение электрического поля $\mathbf{E}$ приводит к возрастанию температуры электронов и смещению края поглощения на $\Delta\varepsilon$, прозрачность изменяется на $\Delta T = (dT/d\varepsilon)\Delta\varepsilon$, а сигнал — на величину

$$\Delta U \approx \Delta\varepsilon \int_0^\infty \frac{dT}{d\varepsilon} S(\varepsilon)\, d\varepsilon \sim \Delta\varepsilon \tag{11.2.18}$$

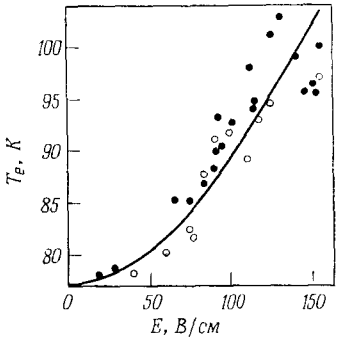
при условии, что $|\Delta\varepsilon| \ll 2S/(dS/d\varepsilon)$. Наибольший возможный сдвиг $\Delta\varepsilon$ соответствует полному снятию вырождения и равен



Фиг. 11.16. *а* — зависимость величины $1 - \Delta U/\Delta U_s$ от напряженности электрического поля для двух различных образцов [ΔU определяется выражением (11.2.18), ΔU_s — значение насыщения в сильном электрическом поле]; *б* — температурная зависимость нормированной разности сигналов, возбуждаемых на детекторе светом, прошедшим через образец A (GaSb n-типа, $n = 3{,}5 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$) и образец B ($n = 0{,}68 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$) (сплошная кривая), и рассчитанные значения отношения $\varepsilon(T)/\varepsilon_B$ (77 K), где $\varepsilon_B = (\varepsilon_G)_{\text{опт}} - \varepsilon_G$ (11.2.14)— сдвиг Бурштейна (штриховая прямая) [28].

$\zeta_n - 4k_BT_e$. Таким образом, сигнал достигает уровня насыщения ΔU_s. На фиг. 11.16, *а* показана зависимость величины $1 - \Delta U/\Delta U_s$ от напряженности электрического поля. В образце с концентрацией $n = 3{,}5 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ насыщение возникает при 150 В/см. В более сильно легированных образцах насыщение наступает при больших значениях напряженности поля. (При этом, конечно, требуется бóльшая напряженность поля для разогрева электронов до такой же температуры, так как рассеяние на ионизованных примесях становится более интенсивным.)

Во втором эксперименте измерялась температурная зависимость разности сигналов $U_A - U_B$, снимаемых с вырожденного образца A и невырожденного образца B ($n = 0{,}7 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$), в отсутствие электрического поля. Эта разность, нормированная на единицу при температуре первого эксперимента (77 К), показана на фиг. 11.16, *б* как функция температуры. Так как изменение сигнала, согласно (11.2.18), пропорционально изменению сдвига Бурштейна, а последнее также пропорционально $U_A - U_B$, может быть найдено соотношение между E и $T = T_e$, как показано на фиг. 11.16 последовательностью стрелок. Полученное соотношение показано на фиг. 11.17 точками. Соответствующая кривая рассчитана из уравнения баланса энергии (4.13.17) с учетом подвижности $\mu = 1{,}77 \cdot 10^4$ см^2/(В·с) и времени релаксации энергии $\tau_\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ с, определенного методом смешивания гармоник на сверхвысоких частотах (§ 15 данной главы). Согласие между расчетной и экспериментальной зависимостями удовлетворительное.



Фиг. 11.17. Зависимость температуры электронов от напряженности электрического поля в GaSb n-типа, полученная из измерений сдвига Бурштейна ($n = 3{,}5 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$) [28].

§ 3. Экситонное поглощение

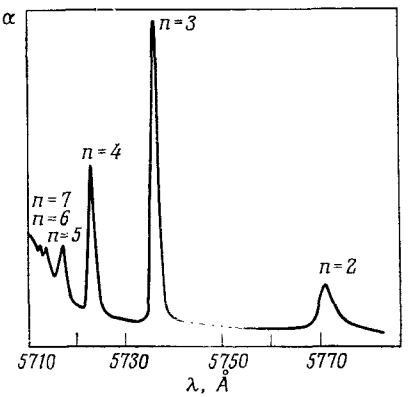
До сих пор мы рассматривали электрон и дырку, возникшие при поглощении фотона, как совершенно независимые друг от друга квазичастицы. В действительности это не всегда так. Из спектров поглощения атомов хорошо известно, что кроме непрерывного спектра имеются также дискретные линии поглощения, обусловленные возбуждением атомов. В полупроводниках такие возбуждения могут быть представлены упрощенно как электрон и дырка, связанные кулоновским взаимодействием. Согласно модели атома водорода, энергию связи можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon_{\text{экс}} = -\frac{m_r e^4}{2\hbar^2 (4\pi\varkappa\varkappa_0)^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{\Delta\varepsilon^{(1)}_{\text{экс}}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (11.3.1)$$

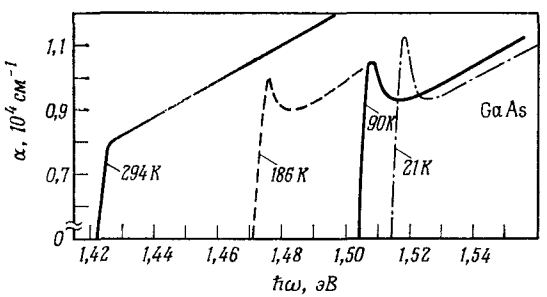
где m_r — приведенная эффективная масса:

$$m_r = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}, \qquad (11.3.2)$$

$\varkappa$ — статическая диэлектрическая проницаемость. Эти возбуждения называются экситонами. Энергия основного состояния экситона $\Delta\varepsilon^{(1)}_{\text{экс}}$ равна произведению величины $(m_r/m_0)\varkappa^{-2}$ на энергию Ридберга 13,6 эВ; например, при $m_r/m_0 = 0{,}05$ и $\varkappa = 13$ получаем $\Delta\varepsilon^{(1)}_{\text{экс}} = 4$ мэВ. Следовательно, на несколько миллиэлектронвольт ниже края собственного поглощения должна наблюдаться серия дискретных линий поглощения. На фиг. 11.18 показан такой спектр для Cu_2O [29]. Поскольку в этих экситонах дипольные переходы запрещены (§ 9 данной главы), линии спектра начинаются с квантового числа $n = 2$. Разрешенные переходы, наблюдаемые, например, в GaAs (фиг. 11.19), обычно дают только один пик $n = 1$, а остальные линии дискретного спектра



Фиг. 11.18. Спектр экситонного поглощения Cu_2O при $T = 4$ К [29].

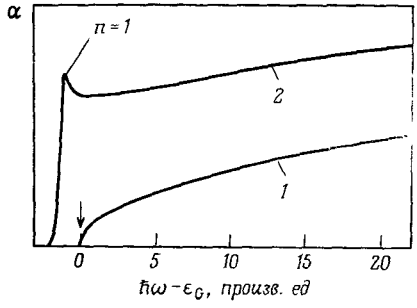


Фиг. 11.19. Экспериментальные спектры экситонного поглощения в GaAs при различных температурах от 21 до 294 К [30].

поглощения сливаются с краем собственного поглощения [30]. Сплошной спектр поглощения выше края собственного поглощения отличается от спектра, рассчитанного без учета экситонов, множителем

$$\frac{2\pi\sqrt{\Delta\varepsilon^{(1)}_{\text{экс}}/(\hbar\omega - \varepsilon_G)}}{1 - \exp\left[2\pi\sqrt{\Delta\varepsilon^{(1)}_{\text{экс}}/(\hbar\omega - \varepsilon_G)}\right]}.$$

На фиг. 11.20 показаны теоретические спектры поглощения с учетом влияния экситонов и без учета этого влияния. Из фиг. 11.19 следует, что в арсениде галлия $\Delta\varepsilon_{экс} = 3{,}4$ мэВ при $T = 21$ К. При комнатной температуре экситонный пик полностью стирается, так как фононы поставляют энергию порядка энергии связи. Экситоны не существуют и в полупроводниках с большой концентрацией носителей тока ($n > 2 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ в GaAs), а также в полуметаллах и металлах, так как свободные носители экранируют электронно-дырочное взаимодействие. Нейтральные примеси вызывают уширение, а при больших концентрациях — исчезновение экситонных линий.



Фиг. 11.20. Рассчитанные спектры поглощения для случая прямых переходов в простой зонной модели [30].
1 — без учета экситонных эффектов; *2* — с учетом экситонного пика $n = 1$, находящегося ниже края собственного поглощения. Край поглощения указан вертикальной стрелкой.

Экситоны в GaAs, который является прямым полупроводником (§ 2 данной главы), называют прямыми экситонами. В GaP, который является непрямым полупроводником, край собственного поглощения, показанный на фиг. 11.10, определяется непрямыми экситонами. Непрямые переходы сопровождаются испусканием и поглощением фононов. Поглощение, обусловленное экситонами, должно происходить ступенчатым образом; число ступенек вдвое больше числа ветвей фононов. В действительности наблюдаются перегибы на кривой поглощения, как показано на фиг. 11.10. Подобные спектры наблюдались также в германии и кремнии.

При очень низких температурах в непрямых полупроводниках (например, при 1,6 К в GaP) наблюдаются дискретные экситонные линии. Эти линии интерпретируются в предположении, что существуют экситоны, связанные с нейтральными донорами (связанные экситоны) [18—31]. Для серы в GaP энергия связи экситона равна 14 мэВ, что составляет 10% энергии ионизации этого донора.

На основе обсуждавшейся выше модели атома водорода можно рассчитать боровский радиус экситона

$$a_{экс} = \varkappa \left(\frac{m_r}{m_0}\right)^{-1} a_B, \qquad (11.3.3)$$

где $a_B = \hbar^2/m_0e^2 \approx 0{,}53$ Å — радиус Бора атома водорода. Например, при $m_r/m_0 = 0{,}05$ и $\varkappa = 13$ находим $a_{\text{экс}} = 130$ Å, что приблизительно равно радиусу орбиты валентного электрона в неглубоких донорах или акцепторах. Если концентрация носителей превышает величину $[2/(2\pi)^3]4\pi|\mathbf{k}|^3/3$, где $|\mathbf{k}| = 1/a_{\text{экс}}$ — фермиевский волновой вектор, то происходит экранирование экситонов носителями заряда.

Экситоны сравнительно больших размеров, определяемых по формуле (11.3.3), адекватно описываются моделью Ванье [32]. Френкель [33, 34] рассматривал экситоны в твердом теле, состоящем из слабо взаимодействующих атомов типа атомов инертного газа. В этом случае возбуждение по существу не отличается от возбуждения отдельного атома или молекулы; взаимодействие ближайших соседей можно рассматривать как малое возмущение. Поэтому радиус экситона Френкеля не превышает нескольких ангстрем, т. е. по порядку величины близок к постоянной решетки. Такие экситоны обсуждались в применении к некоторым щелочногалоидным соединениям и органическим фосфо́рам.

Если перпендикулярно направлению движения экситона приложено магнитное поле, то сила Лоренца стремится разъединить отрицательный электрон и положительную дырку. Такое же воздействие на экситон оказывает электрическое поле, приложенное вдоль оси диполя; в обоих случаях в поглощении света наблюдается эффект Штарка. Он был измерен в CdS Томасом и Хопфилдом [35]. Этот эксперимент показывает, что скорость образовавшегося экситона не равна нулю. Более подробные сведения об экситонах можно найти, например, в книге Декстера и Нокса [36] и в статье Нокса [37].

§ 4. Межзонные переходы в магнитном поле

В гл. 9 было показано, что магнитное поле приводит к образованию уровней Ландау в зоне проводимости и валентной зоне. Энергии этих уровней в параболической зоне определяются по формуле

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \hbar^2k_z^2/(2m), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (11.4.1)$$

где магнитное поле направлено вдоль оси z, m — эффективная масса, ω_c — циклотронная частота:

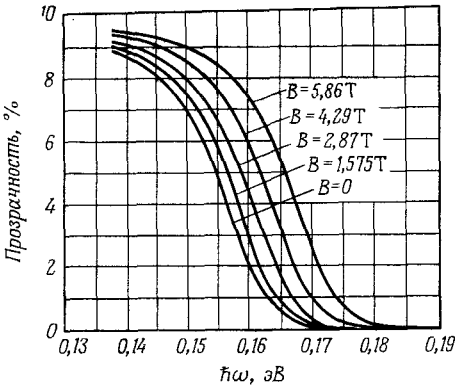
$$\omega_c = \frac{eB_z}{m}. \qquad (11.4.2)$$

При $n = 0$ находим, что дно зоны проводимости и потолок валентной зоны при изменении B_z движутся так, что ширина

запрещенной зоны увеличивается:

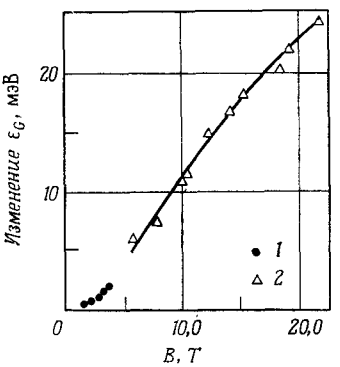
$$\varepsilon_G(B) = \varepsilon_G(0) + \frac{1}{2}\hbar\left(\frac{e}{m_n} + \frac{e}{m_p}\right)B_z = \varepsilon_G(0) + \frac{e\hbar}{2m_r}B_z, \quad (11.4.3)$$

где m_r — приведенная эффективная масса (11.3.2). Соответствующий сдвиг края собственного поглощения получен также экспериментально. Для параболических зон этот сдвиг пропорционален магнитной индукции B_z. Нелинейная зависимость может возникнуть вследствие непараболичности зон.



Фиг. 11.21. Сдвиг края поглощения света InSb в магнитном поле при комнатной температуре (вследствие непараболичности зоны проводимости сдвиг нелинеен по B_z) [38].

На фиг. 11.21 показана зависимость прозрачности InSb от энергии фотонов вблизи края собственного поглощения при различных значениях магнитной индукции [38]. С увеличением B_z этот край сдвигается в сторону больших энергий. В этом случае сдвиг не пропорционален B_z. На фиг. 11.22 показана зависимость сдвига края зоны проводимости InAs от магнитной индукции [39]. Нелинейная зависимость в слабых



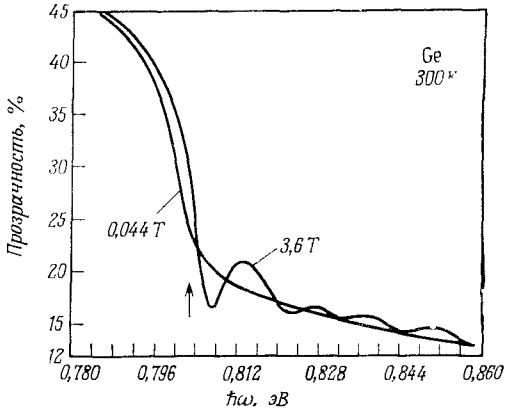
Фиг. 11.22. Зависимость ширины запрещенной зоны арсенида индия от магнитного поля [39].

1 — постоянное магнитное поле; *2* — импульсное магнитное поле.

магнитных полях не может быть объяснена простой моделью уровней Ландау. Нелинейная зависимость в сильных магнитных полях, по-видимому, обусловлена непараболичностью зоны проводимости.

Кроме сдвига края собственного поглощения в области несколько больших энергий фотонов наблюдается осциллирующая зависимость. Это показано на фиг. 11.23 для случая прямых

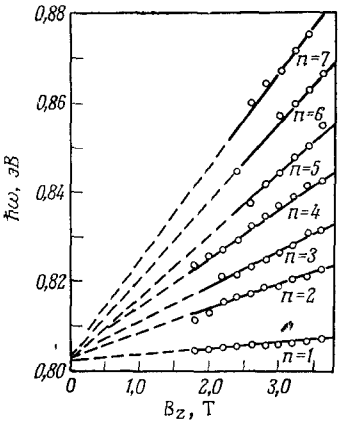
переходов в германии при $\mathbf{k} = 0$ [40]. На фиг. 11.24 показаны зависимости положения минимумов прозрачности от магнитной индукции B_z. Для каждого минимума зависимость между $\hbar\omega$



Фиг. 11.23. Осциллирующая прозрачность германия при комнатной температуре в магнитном поле 0,044 и 3,6 Т (стрелкой указана ширина прямой запрещенной зоны) [40].

и B_z линейна. По наклону прямой $n = 1$ была определена эффективная масса электронов в Г-долине $m = (0{,}036 \pm 0{,}002)\,m_0$ при комнатной температуре. Точность этого метода выше, чем какого-либо другого метода.

При низких температурах, когда член $\hbar^2 k_0^2/(2m)$ меньше первого члена в (11.4.1), переходы между уровнями Ландау в валентной зоне и зоне проводимости имеют тонкую структуру. В сильных магнитных полях уровни Ландау расщепляются вследствие двух возможных зна-



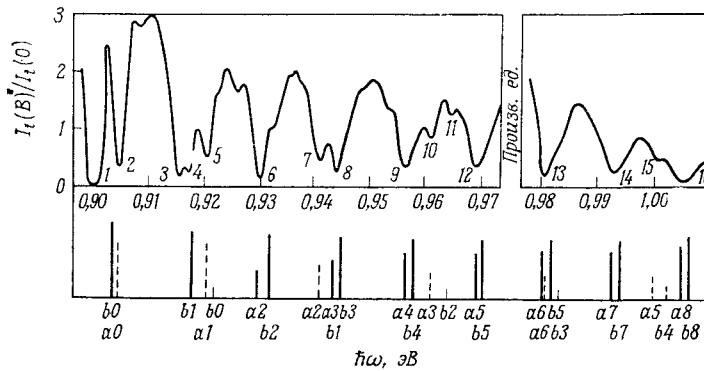
Фиг. 11.24. Зависимость положения минимумов на фиг. 11.23 от магнитного поля [41].

чений спина электронов, определяемых квантовым числом $M = \pm 1/2$. Энергия зеемановского расщепления

$$\Delta\varepsilon_{\pm} = gM\mu_B B_z, \qquad (11.4.4)$$

где g — множитель Ланде для электронов, $\mu_B = e\hbar/(2m_0) = 58$ мкэВ/Т — магнетон Бора. На фиг. 11.25 показаны тонкая

структура прямых переходов в германии, наблюдавшаяся при $T = 4{,}2$ К, и соответствующий теоретический линейчатый спектр [42]. В валентной зоне учитывались как тяжелые, так и легкие дырки. Экспериментальные и теоретические положения всех линий поглощения, за исключением двух наинизших, приближенно согласуются; эти линии сохраняются при уменьшении магнитной индукции до нуля, поэтому они отнесены к прямым экситонным переходам. (Случайная деформация расщепляет валентную зону, приводя к двум экситонным переходам вместо



Фиг. 11.25. Наблюдаемый и рассчитанный спектры поглощения в германии при температуре 4,2 К в магнитном поле $B = 3{,}89$ Т (вектор **B** параллелен вектору **E** световой волны) [42].

одного.) Для германия найдено значение множителя Ланде $g = -2{,}5$. Для n-InSb подобным же образом найдено, что этот множитель имеет очень большое отрицательное значение $g = -54$ [1]).

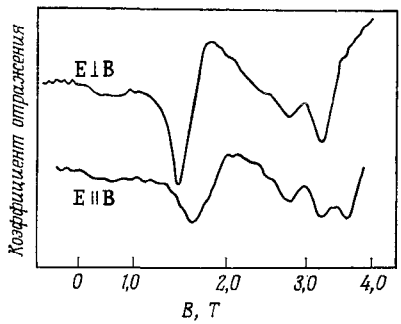
Влияние магнитного поля на отражение вблизи края поглощения иллюстрирует фиг. 11.26 [43]. На основе простой модели затухающего гармонического осциллятора можно рассчитать изменение показателей преломления и поглощения, а тем самым и изменение коэффициента отражения. Эта модель позволяет качественно объяснить наблюдаемые спектры отражения.

Кроме прямых переходов в магнитном поле были обнаружены также непрямые переходы. Например, на фиг. 11.27 показаны переходы между уровнями Ландау, а также непрямые экситонные переходы, наблюдавшиеся в германии при $T = 1{,}5$ К [44]. После экстраполяции к $B_z = 0$ и вычитания энергии ис-

[1]) В полупроводниках с узкой запрещенной зоной $g = [1 - (m_0/m_n - 1)/(2 + 3\varepsilon_G/\Delta)]$, где Δ — спин-орбитальное расщепление валентной зоны.

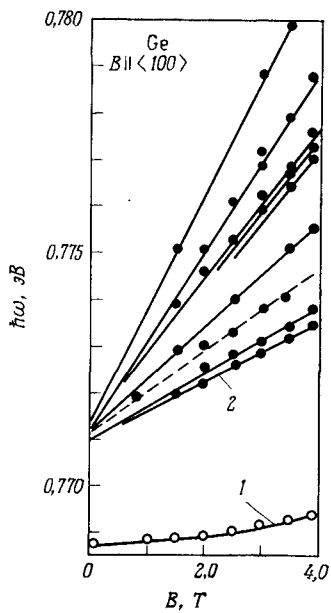
пускаемого фонона получена ширина запрещенной зоны $\varepsilon_G = 0{,}744$ эВ.

Положение минимума прозрачности, связанного с экситонными переходами, линейно зависит от B_z только при больших



Фиг. 11.26. Межзонное магнитоотражение света в InSb при температуре 85 K и энергии фотонов 236,7 мэВ [43].

значениях магнитной индукции. В слабых магнитных полях эта зависимость оказывается параболической. Показанная на фиг. 11.27 спектральная линия непрямого экситона в Ge может быть разрешена на две линии: одна соответствует энергии связи 2,1 мэВ, а другая — 3,2 мэВ. Представленная зависимость от B_z различна для направлений $B_z \| \langle 100 \rangle$ и $B_z \| \langle 111 \rangle$; это можно объяснить различием спектра фононов в разных кристаллографических направлениях, а также тем, что в действительности множитель Ланде для электронов и дырок — величина тензорная. На основе экспериментов по спиновому резонансу в области сверхвысоких

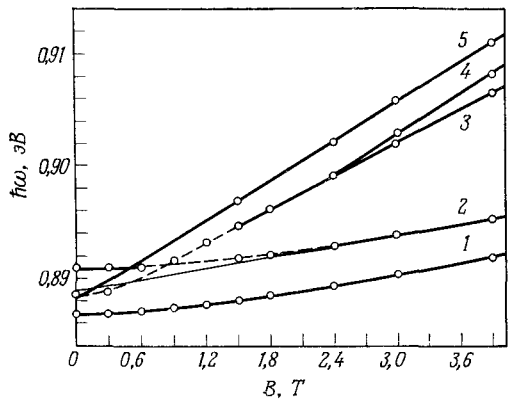


Фиг. 11.27. Зависимость положения минимумов прозрачности германия от магнитной индукции в случае непрямых экситонных переходов (*1*) и переходов между уровнями Ландау (*2*) при $T = 1{,}5$ K ($\mathbf{B} \| \langle 100 \rangle$) [44].

частот установлено, что множитель Ланде действительно имеет тензорный характер.

В более сильном магнитном поле, когда $B_z = 7{,}38$ Т, обнаружено дальнейшее расщепление линии непрямого экситона.

Оно возникает вследствие спинового расщепления уровней Ландау. По этим экспериментам были определены значения множителей Ланде для электронов $g = 1{,}8 \pm 0{,}3$ и $g = 1{,}5 \pm 0{,}3$; они согласуются с рассчитанными значениями. Для таких измерений образец должен иметь толщину всего несколько микрометров; его не следует закреплять на подложке с другим коэффициентом теплового расширения, так как при охлаждении возникнут деформации, снимающие вырождение энергетических уровней, и будет получено расщепление спектральных линий в магнитном поле. В описанных выше экспериментах такие меры предосторожности были приняты.



Фиг. 11.28. Зависимость положения минимумов прозрачности от магнитной индукции в случае прямых экситонных переходов (*1* и *3*) и переходов между уровнями Ландау в германии при температуре 77 К [45]

На фиг. 11.28 показана полевая зависимость положения минимума прозрачности, обусловленного прямыми экситонами в Ge при $T = 77$ К [45]. Наличие линейного участка кривой *1* позволяет определить приведенную эффективную массу экситона $m_r = 0{,}33 m_0$. Сходящиеся кривые *3*—*5* позволяют определить ширину прямой запрещенной зоны: $\varepsilon_G = 888{,}6 \pm 0{,}4$ мэВ при $T = 77$ К. Сравнение с результатами фиг. 11.24, полученными при комнатной температуре, позволяет сделать вывод, что эффективная масса в Г-минимуме возрастает, а ширина запрещенной зоны уменьшается с повышением температуры. Энергия связи прямого экситона 13,6 эВ·0,033/16^2 = 1,7 мэВ [1]). Более тонкий теоретический анализ приводит к значению 1,5 мэВ. Он показывает также, что для $p_\pm$-состояний нет линейной зависи-

[1]) 13,6 эВ — энергия Ридберга, 0,033 m_0 — эффективная масса; 16 — диэлектрическая проницаемость германия.

мости от магнитной индукции B_z, если эффективные массы электронов и дырок одинаковы. Это может быть в Cu_2O, где наблюдается только квадратичная зависимость.

§ 5. Эффект Франца — Келдыша (электропоглощение и электроотражение)

Рассмотрим теперь влияние сильного электрического поля на поглощение света в полупроводниках вблизи края собственного поглощения. Теорию этого явления дали Франц [46] и Л. В. Келдыш [47]. Это явление может быть описано как вызываемый фотоном туннельный переход через энергетический барьер, равный ширине запрещенной зоны (туннельный эффект см. также в гл. 9). Оно существует как в изоляторах, так и в полупроводниках. Чтобы отличить его от эффектов горячих электронов, для экспериментальных исследований лучше всего выбирать полуизолирующие полупроводники.

Рассмотрим сначала упрощенную модель, в которой электрон находится в вакууме. В электрическом поле **E**, параллельном оси x, потенциальная энергия равна $-|e|Ex$ в предположении, что в точке $x = 0$ энергия равна нулю. Согласно квантовой механике, для описания туннельного эффекта необходимо решить уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2\psi}{dx^2} - |e|Ex\psi = e\psi \tag{11.5.1}$$

относительно волновой функции ψ электрона. Здесь ε — кинетическая энергия движения в направлении x, которая равна полной кинетической энергии, если $\hbar(k_y^2 + k_z^2)/(2m_0) = 0$. Уравнение (11.5.1) можно привести к более простому виду

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi\psi \tag{11.5.2}$$

путем введения безразмерной координаты

$$\xi = -\frac{1}{l}\left(x + \frac{\varepsilon}{|e|E}\right), \tag{11.5.3}$$

где l — эффективная длина:

$$l = \left(\frac{\hbar^2}{2m_0|e|E}\right)^{1/3}. \tag{11.5.4}$$

Решение (11.5.2) при больших положительных значениях имеет вид

$$\psi \sim \xi^{-1/4}\exp\left(\pm\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right), \tag{11.5.5}$$

что легко проверить. Обозначим это выражение символом y. Производная логарифма этой величины

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \pm \xi^{1/2} - \frac{1}{4\xi}, \tag{11.5.6}$$

так как

$$\ln y = \pm \frac{2}{3} \xi^{3/2} - \frac{1}{4} \ln \xi. \tag{11.5.7}$$

Из уравнения (11.5.6) получаем

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \pm \frac{1}{2} \xi^{-1/2} + \frac{1}{4\xi^2} = \xi \mp \frac{1}{2\xi^{1/2}} + \frac{1}{16\xi^2} \pm \frac{1}{2\xi^{1/2}} + \frac{1}{4\xi^2} \approx \xi. \tag{11.5.8}$$

Это приближение справедливо при больших значениях ξ, когда членами с ξ^{-2} можно пренебречь. При конечной электронной плотности ψ должно стремиться к нулю при увеличении ξ до бесконечности, поэтому при $\xi > 0$ имеют физический смысл только отрицательные значения экспоненты в (11.5.5). Следовательно, решение по существу представляет собой экспоненциальный спад с увеличением расстояния от начала координат.

Для больших отрицательных значений ξ решение имеет вид

$$\psi \sim |\xi|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{11.5.9}$$

где

$$\sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right)\right]. \tag{11.5.10}$$

Этому решению можно придать более приемлемую форму путем замены величины ξ на $-\xi$ в (11.5.5), что делает аргумент чисто мнимым. Поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ суть линейные комбинации экспонент $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$, функция (11.5.9) является решением однородного дифференциального уравнения (11.5.2). Полное решение имеет вид функции Эйри [48]. (Таблицы функций Эйри можно найти в книге: *M. Abramowitz, I. A. Stegun*, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York, 1965, p. 475.)

Рассмотрим теперь электроны проводимости в полупроводниках. Решение вида (11.5.9) применимо для зоны проводимости, а решение (11.5.5) — для запрещенной зоны, если в (11.5.4) массу свободного электрона заменить эффективной массой. Вероятность найти электроны в точке x равна $|\psi(x)|^2 dx$. Коэффициент поглощения пропорционален вероятности, проинтегрированной по ширине запрещенной зоны:

$$\alpha \sim \int |\psi(\xi)|^2 \, d\xi \sim \int y^2 \, d\xi = y^2 \xi - \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2, \tag{11.5.11}$$

где при вычислении интеграла учтено, что $d^2y/d\xi^2 = \xi y$. При больших положительных значениях ξ мы будем пренебрегать степенной зависимостью от ξ и учитывать только экспоненциальную зависимость. В этом приближении для $x = 0$ и $\varepsilon = \hbar\omega - \varepsilon_G$ получаем

$$\alpha \sim \exp\left(-\frac{4}{3}\xi^{3/2}\right) = \exp\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{\varepsilon_G - \hbar\omega}{|e|El}\right)^{3/2}\right]. \quad (11.5.12)$$

Используя выражение (11.5.4) для l, находим

$$\alpha \sim \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}\,(\varepsilon_G - \hbar\omega)^{3/2}}{3|e|E\hbar}\right]. \quad (11.5.13)$$

Аналогичное выражение для туннелирования с участием фонона было получено в (9.1.7). При заданной энергии фотона $\hbar\omega$ поглощение возрастает с увеличением напряженности электрического поля. Это может быть представлено как сдвиг края собственного поглощения в сторону меньших энергий фотонов. Например, для сдвига 10 мэВ требуется напряженность поля E, которую с хорошим приближением можно определить из равенства

$$\frac{3|e|E\hbar}{4\sqrt{2m}} = (10^{-2}\ \text{эВ})^{3/2}, \quad (11.5.14)$$

или, если $m \approx m_0$,

$$E = \frac{4\cdot 10^{-3}V^{3/2}}{3\hbar}\sqrt{2m_0|e|} \approx 5\cdot 10^4\ \text{В/см}. \quad (11.5.15)$$

Удобно использовать следующий метод измерения: приложить к дискообразному образцу толщиной, например, $^1/_3$ мм переменное напряжение порядка 4 кВ, направить по нормали к образцу пучок монохроматического света и настроить усилитель, соединенный с детектором прошедшего света, на частоту, равную удвоенной частоте переменного напряжения. Сигнал как функция энергии $\hbar\omega$ пропорционален производной коэффициента поглощения по энергии $\hbar\omega$. Легко проверить, что для произвольной функции f

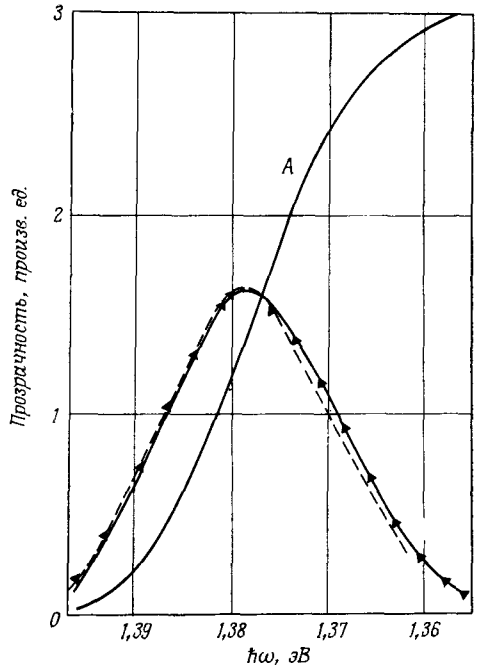
$$\alpha \sim f\left(\frac{\varepsilon_G - \hbar\omega}{E^{2/3}}\right) \quad (11.5.16)$$

производная

$$\frac{d\alpha}{dE} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_G - \hbar\omega}{E}\frac{d\alpha}{d(\hbar\omega)}. \quad (11.5.17)$$

При не слишком сильном поглощении и малой толщине образца из уравнения (4.16) приложения 4 получаем усредненный коэффициент прозрачности $\langle T\rangle$, который в основном пропорционален

$\exp(-\alpha d)$, где d — толщина образца. Изменение величины $\langle T \rangle$, вызванное электрическим полем напряженности E, пропорционально изменению коэффициента поглощения α. Результаты эксперимента требуют поправки на джоулево тепло, выделяющееся в кристалле и приводящее к изменению температуры и, следовательно, ширины запрещенной зоны ε_G.

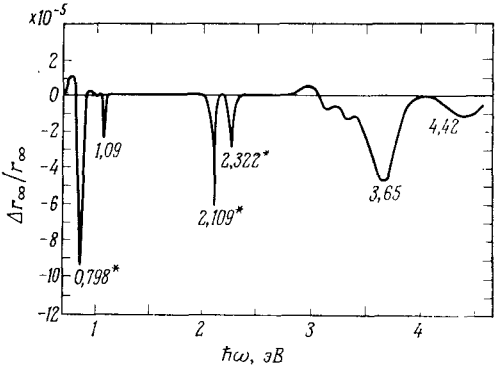


Фиг. 11.29. Прозрачность полуизолирующего GaAs вблизи края собственного поглощения света (кривая A) и среднеквадратичные значения переменной составляющей прозрачности, возникающей при воздействии на образец сильного переменного электрического поля (точки) (штриховая кривая получена дифференцированием кривой A) [49].

На фиг. 11.29 показаны значения $d\alpha/dE$, полученные для полуизолирующего арсенида галлия, а также коэффициент прозрачности при $E = 0$ [49]. Эффект Франца — Келдыша наблюдался также в других полупроводниках с широкой запрещенной зоной, таких, как чистый или компенсированный кристалл CdS с глубокими уровнями примесей, в котором выделяется незначительное джоулево тепло при высоком приложенном напряжении. Иногда для создания сильного электрического поля при небольшом количестве выделяемого тепла используется боль-

шое обратное смещающее напряжение, приложенное к полупроводниковому диоду.

Для фотонов, энергия которых больше ширины запрещенной зоны, выражение (11.5.9) предсказывает осциллирующую зависимость коэффициента поглощения от напряженности электрического поля E. Наряду с таким объяснением наблюдаемым эффектам можно дать и другое толкование, основанное на предположении, что электрическое поле разрушает экситоны и тем самым уменьшает поглощение [50].



Фиг. 11.30. Относительное изменение коэффициента отражения германия при воздействии электрического поля, нормального к отражающей поверхности (звездочками обозначены минимумы, истинная глубина которых в 10 раз больше представленной на фигуре) [51].

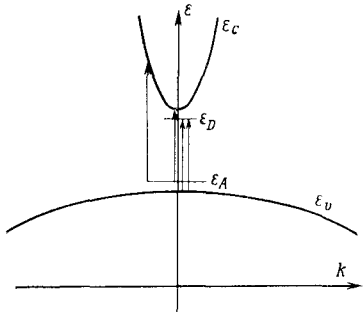
До сих пор мы рассматривали влияние сильного электрического поля на поглощение света вблизи края собственного поглощения. В § 1 данной главы показано, что в области собственного поглощения более адекватны измерения отражения. Влияние сильного электрического поля на отражательную способность в этой области наблюдалось с помощью описанной выше дифференциальной методики. Электрическое поле было перпендикулярно отражающей поверхности. На фиг. 11.30 показано относительное изменение коэффициента отражения $\Delta r_\infty/r_\infty$ в германии при комнатной температуре и при заданном значении напряженности электрического поля в области энергий фотонов $\hbar\omega$ от 0,5 до 4,5 эВ [51]. Сравнение этой кривой с фиг. 11.6 позволяет отметить более высокую чувствительность электроотражения как метода определения критических точек (сингулярностей Ван Хова, § 9 данной главы). Провалы в спектре электроотражения могут быть обусловлены экситонами, связанными с дополнительными минимумами в зонной структуре, которые находятся выше дна зоны проводимости и ниже

потолка валентной зоны. Однако при оценке данных с целью определения зонной структуры следует учитывать, что в сильном электрическом поле возникает эффект Штарка в экситонах, а также подавление экситонов [5].

§ 6. Примесное поглощение

Спектр поглощения света в полупроводниках видоизменяется в присутствии примесей двумя путями.

1. Возможны переходы нейтральных атомов примеси из основного состояния в возбужденные состояния. Вероятность такого перехода достигает наибольшего значения, когда энергия $\hbar\omega$ порядка энергии ионизации для акцепторов $\Delta\varepsilon_A$ и для доноров $\Delta\varepsilon_D$. Обычно эта энергия много меньше ширины за-



Фиг. 11.31. Схема электрических зон, поясняющая возникновение полос примесного поглощения вследствие разброса значений **k** волновых функций примесей [21].

прещенной зоны. Такие переходы могут возникнуть даже в том случае, если атом примеси не может быть ионизован термически (электрически нейтральная примесь).

2. Энергия перехода может принимать значения вблизи края собственного поглощения, как показано на фиг. 11.31, где неглубокие акцепторный и донорный уровни представлены отрезками горизонтальных прямых. Половина длины отрезка равна $1/a_{\text{прим}}$, где $a_{\text{прим}}$ — боровский радиус примесного атома:

$$a_{\text{прим}} = \varkappa \left(\frac{m}{m_0}\right)^{-1} a_B, \qquad (11.6.1)$$

$a_B \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см — радиус Бора атома водорода, m — эффективная масса электрона в зоне проводимости, если примесь является неглубоким донором, или эффективная масса дырки в валентной зоне, если примесь является неглубоким акцептором. Здесь можно использовать рассуждения, проведенные выше в связи с анализом экситонов в (11.3.3), за исключением эффективной массы. Волновые функции глубоких примесей, а также волновые функции акцепторов в полупроводниках IV группы и соединениях $A^{III}B^{V}$ содержат вклады нескольких

зон. В непрямых полупроводниках рассматриваемые переходы, как и межзонные, сопровождаются фононами.

Рассмотрим, например, переход из неглубокого акцептора в зону проводимости. Вероятность перехода пропорциональна концентрации ионизованных акцепторов N_A^-, которая может быть получена из (3.2.14) и (3.2.16):

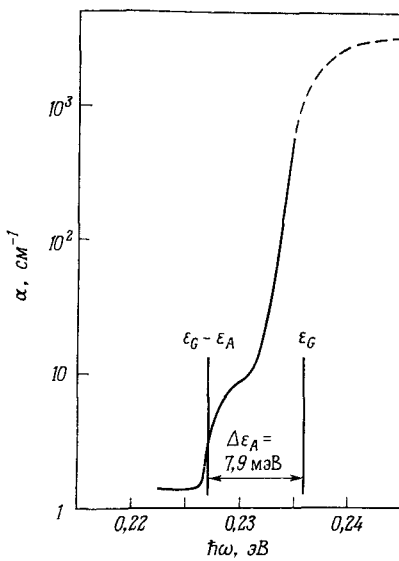
$$N_{A^-} = \frac{N_A}{g_A \exp \dfrac{\varepsilon_A - \zeta}{k_B T} + 1}. \qquad (11.6.2)$$

В случае разрешенных переходов с участием акцепторов, когда $m_p \gg m_n$, коэффициент поглощения α можно найти из соотношения

$$\alpha\hbar\omega \sim \frac{N_A \sqrt{\hbar\omega - (\varepsilon_G - \Delta\varepsilon_A)}}{g_A \exp \dfrac{\varepsilon_A - \zeta}{k_B T} + 1}. \qquad (11.6.3)$$

Ход спектральной зависимости здесь такой же, как и в случае собственного поглощения, за исключением сдвига $\Delta\varepsilon_A$. Однако примесное поглощение зависит от температуры и изменяется пропорционально концентрации примеси.

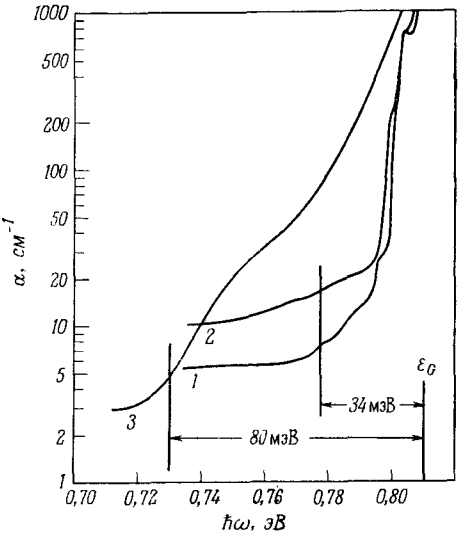
На фиг. 11.32 показаны экспериментальные результаты исследований поглощения света примесями цинка и кадмия в InSb [52]. Полагая, что ширина запрещенной зоны $\varepsilon_G = 235{,}7$ мэВ при $T = 10$ К, из (11.6.3) можно определить энергию ионизации $\Delta\varepsilon_A = 7{,}9$ мэВ. (Более точное значение получается по магнитопоглощению.)



Фиг. 11.32. Примесное поглощение в InSb при температуре около 10 К [52].

Влияние концентрации примеси на поглощение света в p-GaSb при $T = 10$ К показано на фиг. 11.33 [52]. Концентрация примесей, измеренная при $T = 300$ К, составляет $1{,}4 \cdot 10^{17}$ и $2{,}5 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ в образцах *1* и *2* соответственно; в образце *3* акцепторные примеси частично компенсированы теллуром,

который в GaSb является донором. Компенсация приводит к поднятию уровня Ферми приблизительно на 80 мэВ выше потолка валентной зоны, в результате чего глубокие акцепторные уровни, природа которых еще не установлена, заполняются электронами. Переходы этих электронов в зону проводимости с поглощением квантов света приводят к появлению длинного хвоста у края собственного поглощения (фиг. 11.33, кривая *3*).

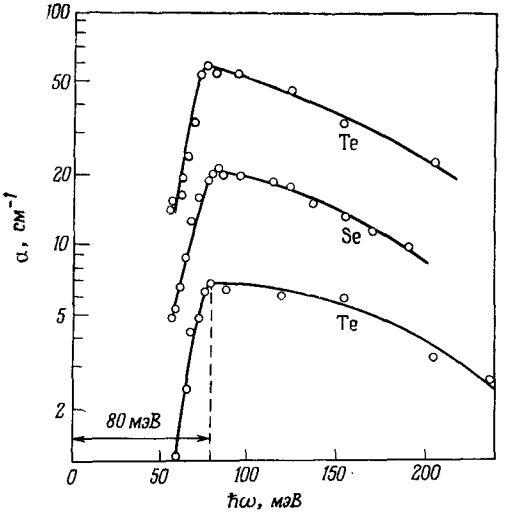


Фиг. 11.33. Хвост у края собственного поглощения GaSb при различных значениях концентрации примесей [52].
1 и *2* — в нелегированных образцах; *3* — в образце, легированном теллуром.

Глубокие акцепторные уровни проявляются также в области низких энергий фотонов $\hbar\omega \approx 80$ мэВ (фиг. 11.34), когда дырки переходят из этих акцепторных уровней в валентную зону [52]. Это соответствует рассмотренной выше кривой *1*. Так как глубокие уровни в GaSb можно получить также бомбардировкой кристалла электронами высокой энергии, можно подозревать, что эти уровни обусловлены дефектами решетки, а не наличием примесей [53—55].

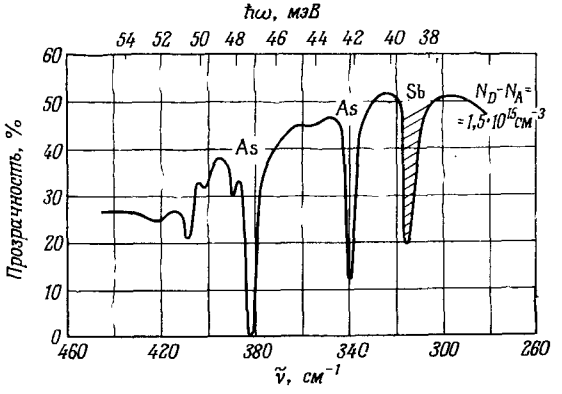
На фиг. 11.35 и 11.36 показано поглощение фотонов низкой энергии неглубокими донорами и акцепторами в кремнии при температуре 4,2 К. В чистых образцах получаются резкие полосы, поскольку взаимодействие с соседними атомами примеси несущественно. Имеется несколько резких полос поглощения в области энергий, меньших энергии ионизации. Полоса поглощения при волновом числе 316,4 $см^{-1}$ обусловлена примесью

сурьмы. Спектры примесей висмута и мышьяка очень похожи; главное различие состоит в сдвиге волнового числа на 140 $см^{-1}$,



Фиг. 11.34. Кривые примесного поглощения в GaSb при различных уровнях легирования теллуром и селеном [52].

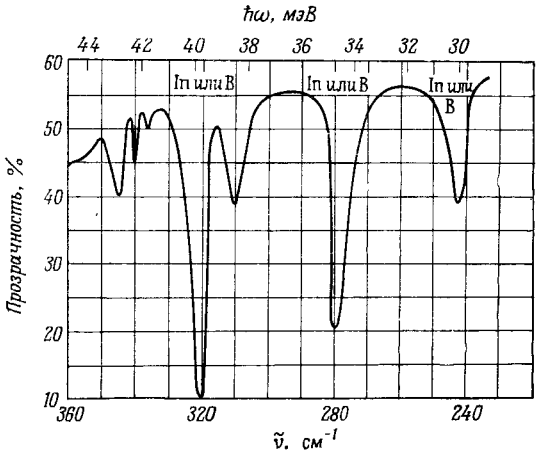
что эквивалентно сдвигу энергии на 17,3 мэВ. Сходство этих спектров обусловлено тем, что валентный электрон неглубокого



Фиг. 11.35. Спектр прозрачности кремния, легированного мышьяком до уровня $1{,}5 \cdot 10^{15}$ $см^{-3}$, при температуре 4,2 К (заштрихованная полоса обусловлена загрязнением сурьмой) [59].

донора движется по орбите большого радиуса, превышающего в несколько раз постоянную решетки; при этом волновая функция электрона определяется в большей степени решеткой

кристалла, чем замещающей примесью. То же самое справедливо для дырок, связанных с неглубокими акцепторами. Как показал Морган [56], небольшие различия в энергии связи ε_B различных примесей в основном объясняются локальным полем деформации, возникающим из-за различия размеров замещающего атома примеси и атома решетки. Согласие результатов расчета с данными наблюдений улучшается, если учитывается эффект Штарка, обусловленный электрическим полем ионов.



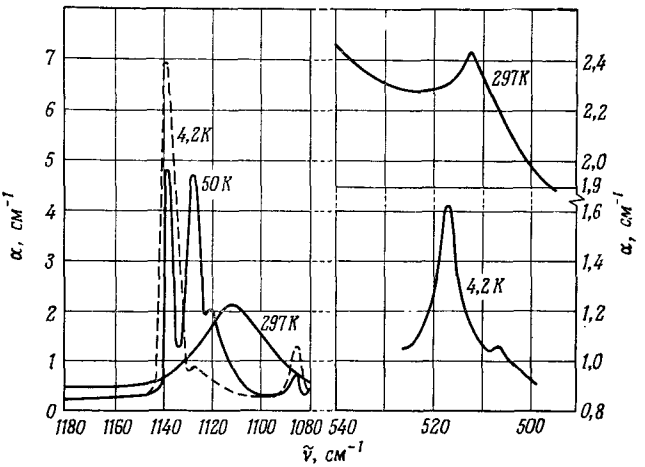
Фиг. 11.36. Спектр прозрачности кремния, легированного бором, при температуре 4,2 К [59].

Наблюдения люминесцентных переходов донор → акцептор в фосфиде галлия показали, что размер нарушения, связанного с примесью, достигает по меньшей мере четырех параметров решетки [57, 58]. Измерения постоянной решетки кристаллов кремния с помощью рентгеновских лучей показали, что легирование ведет к увеличению объема [60—62]. При высоких уровнях легирования в компенсированных полупроводниках образуются пары ионов $N_D^+ N_A^-$.

В кремнии наблюдаются пики поглощения света при 64 и 141 мэВ, которые обусловлены электрически неактивной примесью кислорода. Коэффициент поглощения при $T = 4{,}2$К равен всего нескольким обратным сантиметрам, даже если концентрация атомов кислорода составляет 10^{18} см$^{-3}$ (фиг. 11.37). Если более распространенный изотоп O^{16} замещается изотопом O^{18}, то полосы поглощения сдвигаются, что доказывает связь этих полос с кислородом [63].

Из магнитооптических наблюдений можно получить полезную информацию о роли спиновых состояний в переходах, подобных представленным на фиг. 11.35 и 11.36. Если кристалл

германия при $T = 4{,}2$ К находится в магнитном поле, параллельном оси ⟨100⟩, то уровни Ландау четырех долин зоны проводимости остаются вырожденными, и можно исследовать зеемановское расщепление связанных состояний донорной примеси фосфора. Линия $1s \to 2p$, $m = 0$ при 76,0 см$^{-1}$ остается неизменной, тогда как линия $1s \to 2p$, $m = \pm 1$ при 91,5 см$^{-1}$, как показано на фиг. 11.38, расщепляется на симметричный дублет [64]. По величине этого расщепления можно определить



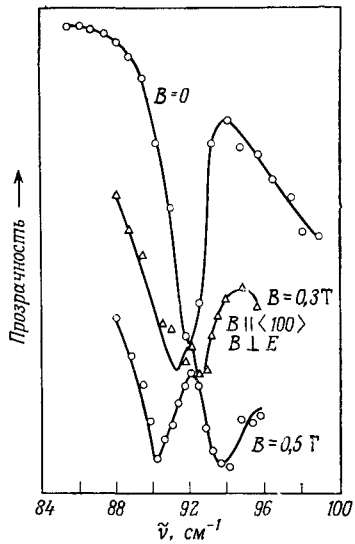
Фиг. 11.37. Полосы поглощения света в кремнии, обусловленные примесью кислорода, при температурах 4,2, 50 и 297 К [63].

Кристалл содержит кислород, обогащенный изотопами O^{18} (12%) и O^{17} (1%); полосы поглощения изотопа O^{16} находятся при $\tilde{\nu} = 1106$ и 515 см$^{-1}$.

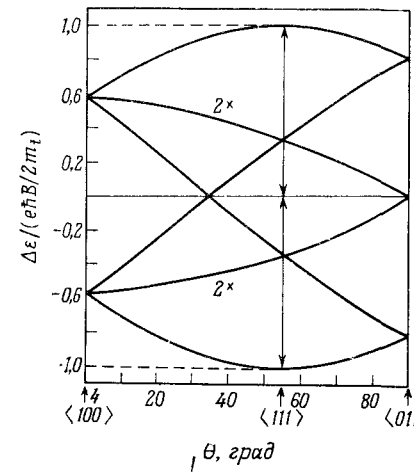
значение поперечной эффективной массы для германия $m_t = (0{,}077 \pm 0{,}005)m_0$, которое хорошо согласуется со значением $0{,}082m_0$, полученным из циклотронного резонанса. В теории линейного зеемановского расщепления [65] донорных состояний $2p_\pm$ в германии необходимо учитывать четыре эллипсоида зоны проводимости; в результате, как показано на фиг. 11.39 [66], расщепление $\Delta\varepsilon_\pm$ оказывается зависящим от угла θ между вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$ и направлением ⟨100⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$. Символ $2\times$ указывает на двукратное вырождение, которое обусловлено симметричным расположением двух эллипсоидов по отношению к плоскости $(1\bar{1}0)$. Для направления ⟨111⟩ и для эллипсоида, большая ось которого совпадает с этим направлением, расщепление

$$\Delta\varepsilon_{p\pm} = \pm \frac{e\hbar}{2m_t} |\mathbf{B}| = \pm \frac{\mu_B |\mathbf{B}| m_0}{m_t}, \qquad (11.6.4)$$

где m_t — поперечная эффективная масса, $\mu_B = 57{,}7$ мэВ/Т — магнетон Бора. В расчете не учитывается спин-орбитальное взаимодействие, что оправданно в сильных магнитных полях.



Фиг. 11.38. Зеемановское расщепление $2p_{\pm}$-уровня примеси фосфора в германии при $T = 4{,}2$ К [64].



Фиг. 11.39. Рассчитанные зависимости линейного зеемановского расщепления донорных $2p_{\pm}$-состояний от угла между магнитной индукцией **B** и направлением ⟨100⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$ в германии [66].

Для сферической зоны линейное зеемановское расщепление донорных $p_{\pm}$-состояний

$$\Delta\varepsilon_{p\pm} = \pm\hbar\omega_c, \tag{11.6.5}$$

тогда как p_0- и s-состояния не расщепляются, а имеют лишь квадратичный сдвиг.

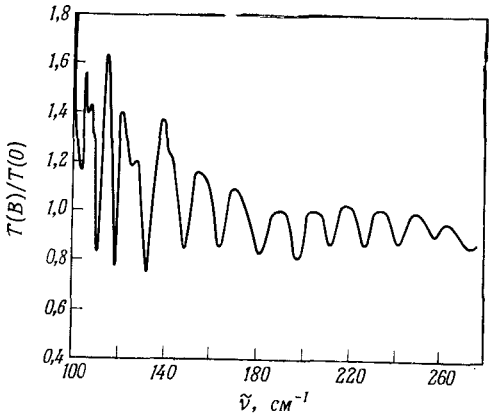
Для s-состояний, согласно [67], сдвиг

$$\Delta\varepsilon_s = (\hbar\omega_c)^2 \frac{1}{8\,\Delta\varepsilon_I}, \tag{11.6.6}$$

где $\Delta\varepsilon_I$ — энергия ионизации, а магнитное поле принимается слабым ($\hbar\omega_c \ll \Delta\varepsilon_I$).

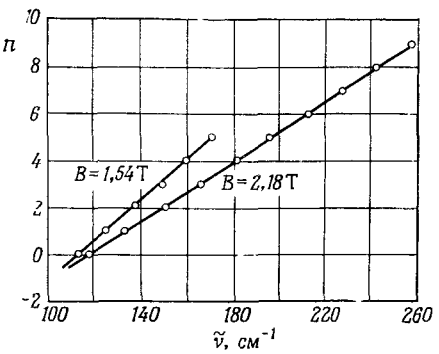
В сильном магнитном поле в зоне проводимости образуются уровни Ландау, и в сплошном спектре поглощения наблюдаются осцилляции. Это показано на фиг. 11.40 для германия, легированного $3\cdot10^{15}$ см$^{-3}$ донорными атомами мышьяка. На-

блюдение пропускания при изменении магнитной индукции **B** и постоянном значении волнового числа, например 137 $см^{-1}$, позволяет правильно приписать минимумам прозрачности кван-



Фиг. 11.40. Зависимость отношения прозрачности германия в магнитном поле $B = 2{,}18$ Т к прозрачности при $B = 0$ от волнового числа при температуре 4 К [64].

товые числа Ландау n. На фиг. 11.41 показана зависимость между номером минимума и соответствующим волновым числом при двух значениях магнитной индукции. Эти две прямые, экстраполированные в сторону отрицательных значений n, пересекаются при $n = -1/2$. Поскольку энергия Ландау линейно зависит от $(n + 1/2)\hbar\omega_c$, где $\omega_c = (e/m)B$, можно ожидать, что при $n = -1/2$ ис-



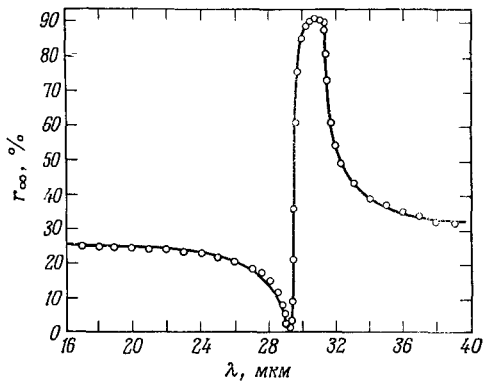
Фиг. 11.41. Зависимость номера n минимума прозрачности от волнового числа для $B = 2{,}18$ Т (фиг 11.40) и для $B = 1{,}54$ Т [64].

чезает всякая зависимость от **B**, как это происходит в рассматриваемом случае. Прямые пересекаются при значении волнового числа 108 $см^{-1}$, что соответствует энергии 13,4 мэВ. Как показали Хауард и Хасегава [69], эту энергию нельзя принимать за энергию связи донора, которая, согласно электрическим измерениям при различных температурах [68], составляет

12,8 мэВ. В действительности рассматриваемые здесь переходы являются переходами в связанные состояния, энергия которых меньше энергии свободных состояний Ландау на кулоновскую энергию примеси (связанные состояния Ландау). Эти локализованные состояния могут находиться как между уровнями Ландау, так и между нулевым уровнем Ландау и дном зоны проводимости при $B = 0$. Эта гипотеза была подтверждена экспериментом Бойля и Хауарда [70]. Такого рода магнитооптические измерения не открывают простого пути к определению энергии ионизации примесей [70].

§ 7. Решеточное отражение в полярных полупроводниках

В полярных кристаллах оптические колебания решетки имеют электрический дипольный момент, который может быть возбужден переменным электрическим полем с частотой, соответствующей инфракрасной области спектра. В узком диапазоне



Фиг. 11.42. Спектр решеточного отражения AlSb (рассчитанная кривая для модели одного классического осциллятора подогнана к экспериментальным данным) [71].

частот коэффициент отражения близок к 100%. Поэтому путем многократных отражений этот диапазон можно отфильтровать из белого спектра. Прошедшие лучи света называются остаточными лучами.

На фиг. 11.42 показан спектр отражения AlSb при комнатной температуре в области длин волн от 18 до 40 мкм [71]. Диапазон остаточных лучей находится между 29 и 31 мкм.

Рассмотрим этот вопрос теоретически, основываясь на простой модели классического гармонического осциллятора с собственной частотой ω_e и постоянной затухания γ. В электриче-

ском поле амплитуды E_1 и частоты ω уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_e^2x=eE_1\exp(i\omega t) \qquad (11.7.1)$$

имеет решение

$$x=\frac{e}{m}\frac{E_1\exp(i\omega t)}{\omega_e^2-\omega^2+i\omega\gamma}. \qquad (11.7.2)$$

Полагая, что в единице объема находится n осцилляторов, находим дипольный момент единицы объема:

$$\frac{ne^2}{m}\frac{E_1\exp(i\omega t)}{\omega_e^2-\omega^2+i\omega\gamma}=\frac{\omega_p^2}{\omega_e^2-\omega^2+i\omega\gamma}\varkappa_0E_1\exp(i\omega t), \qquad (11.7.3)$$

где ω_p — угловая плазменная частота:

$$\omega_p=\left(\frac{ne^2}{m\varkappa_0}\right)^{1/2}. \qquad (11.7.4)$$

Из уравнений (6.8.27) и (6.8.31) находим комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varkappa_r-i\varkappa_i=\varkappa_{\text{опт}}+\frac{\omega_p^2}{\omega_e^2-\omega^2+i\omega\gamma}, \qquad (11.7.5)$$

где $\varkappa_{\text{опт}}$ — диэлектрическая проницаемость на частотах $\omega\gg\omega_e$ и $\omega\gg\omega_p$. Используя соотношения (4.18) (приложение 4) между действительной $\varkappa_r$ и мнимой $\varkappa_i$ частями $\varkappa$, показателем преломления n и показателем поглощения k, можно получить следующие решения уравнения (11.7.5):

$$n^2-k^2=\varkappa_r=\varkappa_{\text{опт}}+\omega_p^2\frac{\omega_e^2-\omega^2}{(\omega_e^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}, \qquad (11.7.6)$$

$$2nk=\varkappa_i=\omega_p^2\frac{\omega\gamma}{(\omega_e^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}. \qquad (11.7.7)$$

Решая относительно n и k, получаем

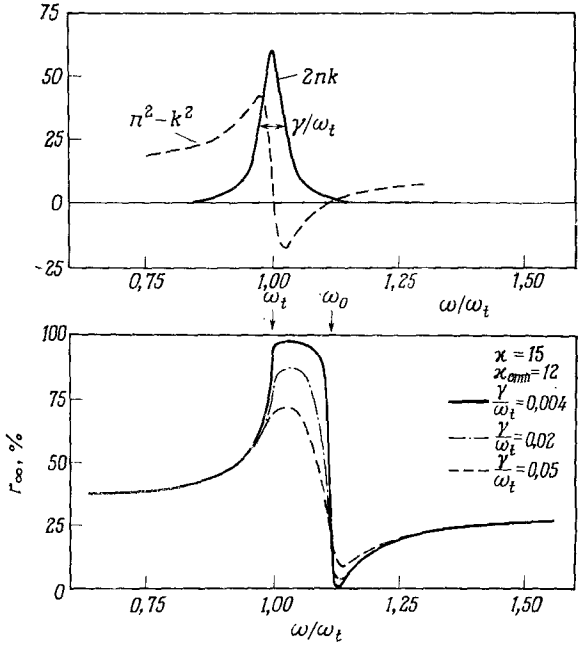
$$n=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varkappa_r+(\varkappa_r^2+\varkappa_i^2)^{1/2}]^{1/2}, \qquad (11.7.8)$$

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}}[-\varkappa_r+(\varkappa_r^2+\varkappa_i^2)^{1/2}]^{1/2}. \qquad (11.7.9)$$

Коэффициент отражения бесконечно толстой пластины при нормальном падении равен

$$r_\infty=\frac{(n-1)^2+k^2}{(n+1)^2+k^2}. \qquad (11.7.10)$$

На фиг. 11.43 показаны величины $\varkappa_r$, $\varkappa_i$ и r_∞ как функции ω/ω_e с произвольно выбранными параметрами $\varkappa_{\text{опт}} = 12$, $(\omega_p/\omega_e)^2 = 3$ и $\gamma/\omega_e = 0{,}05$. Вблизи резонансной частоты ω_e имеется резкий максимум $\varkappa_i$ и несколько более широкий пик r_∞, тогда как частотная зависимость разности $\varkappa_r - \varkappa_{\text{опт}}$ имеет сходство с частотной зависимостью производной величины $\varkappa_i$ по частоте.



Фиг. 11.43. Рассчитанные зависимости действительной ($n^2 - k^2$) и мнимой ($2nk$) частей диэлектрической проницаемости от частоты в модели одного классического осциллятора (вверху) и коэффициента отражения от частоты (внизу) при различных значениях параметра затухания (ω_t—частота осциллятора) [72].

Статическую диэлектрическую проницаемость $\varkappa$ можно определить по формуле (11.7.6) при $\omega = 0$:

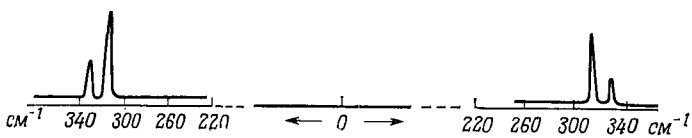
$$\varkappa = \varkappa_{\text{опт}} + \left(\frac{\omega_p}{\omega_e}\right)^2; \qquad (11.7.11)$$

на фиг. 11.43 $\varkappa$ принята равной 15. Коэффициент r_∞ имеет минимум при значении приведенной частоты

$$\frac{\omega}{\omega_e} = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa_{\text{опт}} - 1}\right)^{1/2}, \qquad (11.7.12)$$

которое приближенно равно $(\varkappa/\varkappa_{опт})^{1/2}$, если $\varkappa \gg 1$ и $\varkappa_{опт} \gg 1$. Соотношение Лидана — Закса — Теллера (6.8.22) показывает, что эта величина равна отношению ω_0/ω_t, где ω_0 и ω_t — частоты продольных и поперечных длинноволновых оптических фононов. Сравнивая с (11.7.12), находим, что собственная частота ω_e равна ω_t, так как поперечная электромагнитная волна возбуждает поперечные колебания. Следовательно, минимум отражения соответствует частоте продольных оптических фононов ω_0.

Анализ спектра отражения AlSb, представленного на фиг. 11.42, дает значения энергии фононов $\hbar\omega_0 = 42{,}0$ мэВ и $\hbar\omega_t = 39{,}6$ мэВ. Отношение $\gamma/\omega_t = (5{,}9 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-3}$, где $\omega_t/(2\pi c) = \tilde{\nu}_t = (318{,}8 \pm 0{,}5)$ см$^{-1}$. Значения $\tilde{\nu}_t = (318{,}9 \pm 0{,}5)$ см$^{-1}$ и $\tilde{\nu}_0 = (339{,}9 \pm 0{,}5)$ см$^{-1}$, полученные из экспериментов по комбинационному рассеянию света [73], хорошо согласуются с результатом измерений коэффициента отражения. Сравнительно



Фиг. 11.44. Спектр комбинационного рассеяния AlSb при комнатной температуре [73].

По оси абсцисс отложен сдвиг волнового числа рассеянного света относительно спектральной линии лазера. Слева — антистоксовы линии, обусловленные поглощением фононов; справа — стоксовы линии, обусловленные испусканием фононов.

большая погрешность в определении постоянной затухания γ связана с трудностью измерения модуля коэффициента отражения. Постоянная затухания γ обусловлена в основном ангармоничностью решетки.

Спектр комбинационного рассеяния AlSb показан на фиг. 11.44 [73]. Линии получаются от падающего лазерного луча в результате поглощения или испускания фононов с волновым числом $\tilde{\nu}_t$ (сильная линия) или $\tilde{\nu}_0$ (слабая линия). (Длина волны лазера АИГ [1]): Nd^{3+} $\lambda = 1.06$ мкм соответствует той части спектра, в которой кристалл прозрачен [2]); о различии между комбинационным и бриллюэновским рассеянием см. в примечании на стр. 340.) [3])

---

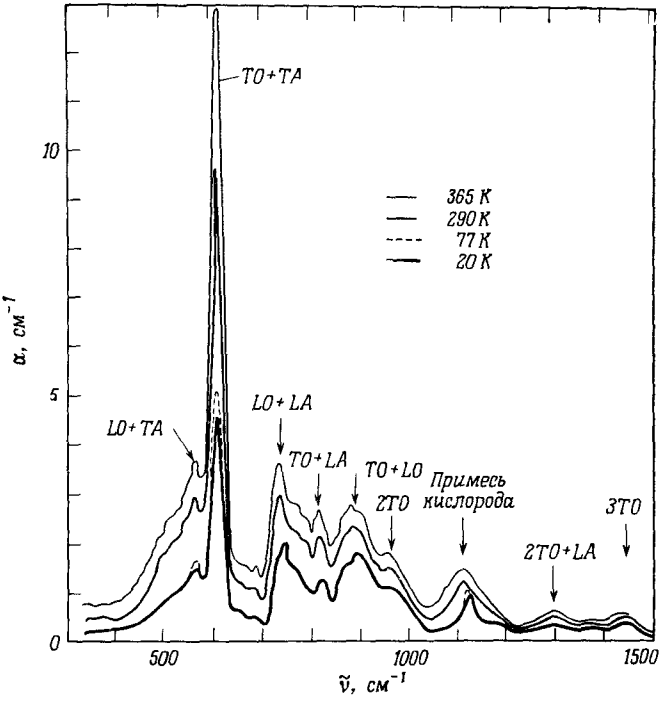
[1]) АИГ — алюмо-иттриевый гранат.

[2]) Обзор работ по комбинационному рассеянию в полупроводниках см. в [74], где рассматриваются также поверхностное рассеяние и комбинационное рассеяние равновесной и горячей плазмой твердого тела.

[3]) В кристаллах с сильной полярностью электромагнитная волна связана со звуковой волной и наоборот. Различие между фононом и фотоном в этом случае исчезает, и квант колебаний называют поляритоном [75—78].

§ 8. Многофононное решеточное поглощение

В элементарных полупроводниках с решеткой типа алмаза атомы кристалла нейтральны, поэтому они не имеют дипольного момента (собственные колебания, активные в инфракрасной области). Однако в этих и всех других полупроводниках наблюдается некоторое количество слабых полос поглощения, обусловленных взаимодействием падающего фотона одновременно



Фиг. 11.45. Решеточное поглощение, обусловленное многофононными процессами, в кремнии, выращенном в вакууме [80].

с несколькими фононами (многофононное поглощение). Поскольку эти полосы слабые, обнаружить их экспериментально в спектрах отражения не удается [79].

На фиг. 11.45 показаны спектры поглощения кремния при различных температурах от 20 до 365 К в области длин волн от 7 мкм (что соответствует приблизительно 1500 $см^{-1}$) до 20 мкм (приблизительно 300 $см^{-1}$) [80]. В интервале от 20 до 77 К значительных изменений спектра не происходит. Установлено, что энергии фотонов, соответствующие пикам, представляют собой комбинации энергий четырех фононов, а именно по-

перечного оптического (TO) и продольного оптического (LO) с энергиями 59,8 и 51,3 мэВ [1]), а также поперечного акустического (TA) и продольного акустического (LA) с энергиями 15,8 и 41,4 мэВ, причем все значения соответствуют краю зоны Бриллюэна фононов. (Спектр фононов для германия показан на фиг. 6.15.) Например, наибольшему пику соответствует комбинация $TO + TA$, тогда как наименьшему пику при $\tilde{\nu} = 1450$ см$^{-1}$ соответствует 3 TO и т. д. Таким образом, удается подобрать комбинации для десяти пиков; при этом их температурная зависимость согласуется с расчетами, основанными на этих значениях энергии фононов. Однако пик при $\tilde{\nu} = 1100$ см$^{-1}$ обусловлен примесью кислорода, которая существует, несмотря на то что кристалл выращен в вакууме (фиг. 11.37).

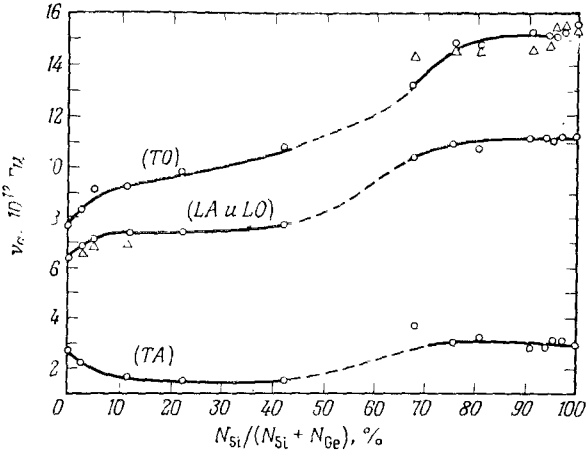
Полученные таким образом значения энергий фононов хорошо согласуются со значениями, найденными методом дифракции медленных нейтронов, согласно которому в направлении $\langle 100 \rangle$ $TO = 58{,}7$ мэВ, $LO = LA = 49{,}2$ мэВ, $TA = 17{,}9$ мэВ при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{макс}}$ [81] (гл. 6, § 8).

Аналогичные измерения были проведены также на других элементарных полупроводниках IV группы, на соединениях $A^{III}B^{V}$, на некоторых соединениях $A^{II}B^{VI}$, а также на карбиде кремния. Интересен случай твердых растворов германия и кремния. Здесь наблюдается наложение полос германия и кремния, причем картина нечувствительна к изменению состава, что наводит на мысль об образовании скорее конгломератов германия и кремния, чем истинного неупорядоченного твердого раствора [82]. Кроме того, наблюдаются две новые полосы (одна — в растворе, богатом германием, а другая — в растворе, богатом кремнием), которые являются полосами примесного поглощения, так как в чистых элементарных кристаллах этих полос нет; их интенсивность растет с изменением состава до 50% обоих компонентов. Сдвиг частот фононов с изменением состава твердого раствора показан на фиг. 11.46.

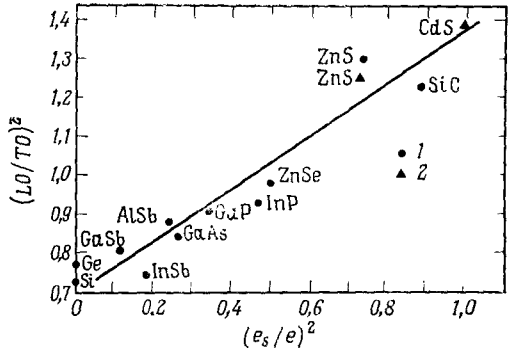
Рассмотрим, наконец, эмпирическую зависимость между отношением $(LO/TO)^2$ и квадратом эффективного заряда Сигети e_S, определенного выражением (6.8.50). На фиг. 11.47 видно, что эта зависимость линейна и большинство кристаллов ей подчиняется в хорошем приближении [83]. Когда $e_S = 0$, как в элементарных полупроводниках Ge и Si, на краю зоны Бриллюэна фононов $LO < TO$. Однако с увеличением e_S ветвь LO поднимается относительно ветви TO, так что при $(e_S/e)^2 > 0{,}5$ на краю зоны выполняется обратное неравенство $LO > TO$. Спектр фононов для случая GaAs показан на фиг. 6.16.

---

[1]) В гл. 7, § 5, среднее значение частот LO и TO фононов названо частотой междолинного фонона.



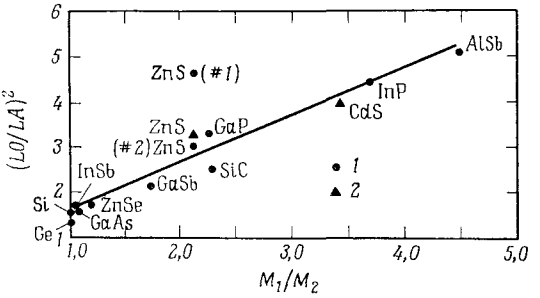
Фиг. 11.46. Зависимость частот фононов от состава твердых растворов Ge—Si (треугольники соответствуют полосам примесного поглощения) [82].



Фиг. 11.47. Зависимость квадрата отношения частот продольного оптического и поперечного оптического фононов от квадрата отношения эффективного заряда Сигети к элементарному заряду [83].

1—решетка цинковой обманки; *2*—решетка вюрцита.

Другая линейная зависимость связывает отношение $(LO/LA)^2$ с отношением масс атомов компонентов соединения [5, 84, 85]. Это показано на фиг. 11.48. Теория двухатомной линейной цепочки дает отношение оптической и акустической ча-



Фиг. 11.48. Зависимость квадрата отношения частот продольного оптического и продольного акустического фононов от отношения масс ионов в полупроводниковых соединениях [83].

1 — решетка цинковой обманки; *2* — решетка вюрцита.

стот на краю зоны Бриллюэна, равное $(D_1/D_2)^{1/2}$, если $M_1 = M_2$ (см. фиг. 6.14), или $(M_1M_2)^{1/2}$, если $D_1 = D_2$, где D_1 и D_2 — упругие постоянные, M_1 и M_2 — массы атомов.

§ 9. Квантовомеханическая трактовка края собственного поглощения света [1])

В § 2 данной главы мы рассмотрели поглощение света вблизи края собственного поглощения. Теперь мы исследуем эту проблему методом квантовомеханической теории возмущений, в которой электромагнитная волна рассматривается как малое возмущение электронной волны.

Классический гамильтониан электрона в электромагнитном поле имеет вид (11.2.13). Согласно правилам коммутации квантовомеханических операторов, нетрудно найти, например, коммутатор x-составляющей вектора импульса $\hbar\mathbf{k} = -i\hbar\nabla_r$ и той же составляющей векторного потенциала $\mathbf{A}$ [86]:

$$\hbar k_x A_x - A_x \hbar k_x = -i\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x}; \qquad (11.9.1)$$

тогда гамильтониан $(\hbar k_x - eA_x)^2$ можно преобразовать к виду

$$(\hbar k_x - eA_x)(\hbar k_x - eA_x) = \hbar^2 k_x^2 - 2eA_x\hbar k_x + ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x} + e^2 A_x^2. \qquad (11.9.2)$$

[1]) Читатель, не знакомый с квантовой механикой, может оставить этот параграф для последующего чтения. Более исчерпывающую трактовку можно найти в [5, 84, 85].

При малой интенсивности света слагаемым $\sim A_x^2$ можно пренебречь по сравнению с линейными членами. Слагаемое $\sim \nabla_r \mathbf{A}$ можно свести к нулю путем соответствующего калибровочного преобразователя [1]). Следовательно, уравнение Шредингера, зависящее от времени, имеет вид

$$(H_0 + H_1)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{11.9.3}$$

где взаимодействие между электроном и излучением представлено оператором

$$H_1 = i\frac{e\hbar}{m_0}(\mathbf{A}\nabla_r). \tag{11.9.4}$$

В теории возмущений матричный элемент перехода электрона из состояния $\mathbf{k}$ в состояние $\mathbf{k}'$ (например, из валентной зоны в зону проводимости) определяется как

$$H_{k'k} = \int \psi^*_{k'} H_1 \psi_k d^3r. \tag{11.9.5}$$

Волновая функция электрона имеет вид обычной функции Блоха $u_x \exp[i(\mathbf{kr})]$ (гл. 2, § 1). Поскольку импульс поглощаемого или испускаемого фотона в оптическом диапазоне намного меньше среднего импульса электрона и предполагается, что фононы не участвуют в рассматриваемом процессе, на графике зависимости энергии от импульса такой переход будет почти вертикальным ($\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$).

Используя векторный потенциал $\mathbf{A}$ (11.2.7), преобразуем матричный элемент к виду

$$H_{k'k} = i\frac{e\hbar A_0}{2m_0}\int u^*_{k'}\left[(\boldsymbol{a}\nabla_r u_k) + i(\mathbf{ak})u_k\right]d^3r. \tag{11.9.6}$$

Для разрешенных переходов второе слагаемое в подынтегральном выражении намного меньше первого, и им можно пренебречь. (Оно в точности равно нулю для вертикальных переходов.) Используя определение матричного элемента импульса

$$\mathbf{p}_{k'k} = -i\hbar\int u^*_{k'}\nabla_r u_k d^3r, \tag{11.9.7}$$

можем записать

$$H_{k'k} = -\frac{eA_0}{2m_0}(\mathbf{ap}_{k'k}). \tag{11.9.8}$$

Используя правую часть уравнения (6.2.14) и выражение (6.2.13) для вероятности перехода, можно рассчитать скорость

[1]) См. примечание в § 2.

перехода R, определенную выражением (11.2.4):

$$R = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{eA_0}{2m_0}\right)^2 (\mathbf{a}\mathbf{p}_{k'k})^2 \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega), \quad (11.9.9)$$

где V — объем элементарной ячейки, а множитель 2 учитывает возможное изменение спина в процессе поглощения фотона; предполагается также, что начальное состояние занято, а конечное — свободно, т. е. $f(k) = 1$, а $f(k') = 0$. Более того, здесь пренебрегается возможностью индуцированного испускания фотонов, так как ширина запрещенной зоны обычно велика по сравнению с k_BT.

При вычислении интеграла, который содержит дельта-функцию, полезно учесть примечание в гл. 6, § 5. Аргумент дельта-функции $\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega$ зависит от $\mathbf{k}$. Поскольку энергия фотона пренебрежимо мала, для этих переходов $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ (переходы прямые), и дельта-функция имеет вид

$$\delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega) = \frac{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{|\nabla_{\mathbf{k}}(\varepsilon' - \varepsilon)|_{\varepsilon' - \varepsilon = \hbar\omega}}. \quad (11.9.10)$$

Так как начальное состояние находится в валентной зоне, а конечное — в зоне проводимости, удобно ввести соответствующие индексы v и c. В $\mathbf{k}$-пространстве имеются точки, в которых $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_c(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_v(\mathbf{k})$ и, следовательно, знаменатель в (11.9.10) становится равным нулю; поэтому эти особые точки дают большой вклад в скорость перехода R. По сравнению с дельта-функцией множитель $(\mathbf{a}\mathbf{p}_{vc})^2$ лишь слабо зависит от $\mathbf{k}$ и поэтому может быть вынесен за знак интеграла. Произведение

$$f_{vc} = \frac{2}{m_0\hbar\omega} (\mathbf{a}\mathbf{p}_{vc})^2 \quad (11.9.11)$$

называется безразмерной силой осциллятора для этого перехода, а интеграл

$$J_{vc}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \delta[\varepsilon_c(\mathbf{k}) - \varepsilon_v(\mathbf{k}) - \hbar\omega] d^3k, \quad (11.9.12)$$

имеющий размерность $\text{эВ}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$, — межзонной плотностью состояний. Тогда для скорости перехода получаем

$$R = V \frac{\pi e^2 A_0^2 \omega}{4m_0} f_{vc} J_{vc}(\omega), \quad (11.9.13)$$

а для коэффициента поглощения

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{n} \frac{\pi e^2 \hbar}{2m_0} f_{vc} J_{vc}(\omega), \quad (11.9.14)$$

где n — показатель преломления. Здесь $\mu_0 c \pi e^2 \hbar / 2m_0 = 1{,}098 \cdot 10^{-16}$ эВ·см^2.

Рассмотрим теперь межзонную плотность состояний для простого случая сферической изоэнергетической поверхности при $\mathbf{k} = 0$, где

$$\hbar\omega = \varepsilon_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p} = \varepsilon_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}. \qquad (11.9.15)$$

Здесь $m_r = \left(m_n^{-1} + m_p^{-1}\right)^{-1}$ — приведенная эффективная масса. Обозначим для простоты $\hbar\omega$ символом ε. Тогда, согласно (11.9.12),

$$J_{vc} = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{4\pi}{3} k^3\right) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2} (\varepsilon - \varepsilon_G)^{1/2}. \qquad (11.9.16)$$

Используя это значение J_{vc}, мы, наконец, получаем коэффициент поглощения α в единицах $см^{-1}$:

$$\alpha = \frac{2{,}7 \cdot 10^5}{n} \left(\frac{2m_r}{m_0}\right)^{3/2} f_{vc} \left(\frac{\hbar\omega - \varepsilon_G}{\text{эВ}}\right)^{1/2}. \qquad (11.9.17)$$

Зависимость коэффициента α от $(\hbar\omega - \varepsilon_G)^{1/2}$ совпадает с наблюдаемой на опыте частотной зависимостью в случае прямых переходов. Полагая, например, что $\hbar\omega - \varepsilon_G = 10$ мэВ, $m_r = m_0/2$, $f_{vc} = 1$ и $n = 4$, находим $\alpha = 0{,}67 \cdot 10^4$ $см^{-1}$. Это значение того же порядка, что и максимальное экспериментальное значение α вблизи края собственного поглощения.

До сих пор не ясно, почему значение силы осциллятора оказывается порядка единицы, т. е. что в действительности означает вектор $\mathbf{p}_{vc}$, определенный выражением (11.9.7). Однако, поскольку волновые функции Блоха в зоне проводимости и валентной зоне, вообще говоря, в явной форме неизвестны, за исключением их симметрии, мы отметим здесь только, что сила осциллятора зависит от поляризации света и что по этим свойствам симметрии можно определить правила отбора для рассматриваемых переходов. Что касается атомных спектров, то для них существует правило f-сумм [87], из которого следует, что $f_{vc} \approx 1$ для дипольных переходов.

Очень интересно исследовать поведение функции $J_{vc}(\omega)$ в различных особых точках. Учитывая (11.9.10), перепишем (11.9.12) в виде

$$J_{vc}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} [\varepsilon_c(\mathbf{k}) - \varepsilon_v(\mathbf{k})]|_{\varepsilon_c - \varepsilon_v = \hbar\omega}}, \qquad (11.9.18)$$

где dS — элемент энергетической поверхности $\varepsilon_c(\mathbf{k}) - \varepsilon_v(\mathbf{k}) = \hbar\omega$ в $\mathbf{k}$-пространстве. Положим для простоты, что $\mathbf{k}$-пространство двумерное, а энергетическая поверхность [88] имеет вид

$$\varepsilon_c(\mathbf{k}) - \varepsilon_v(\mathbf{k}) = \varepsilon_G - A[\cos(k_x a) + \cos(k_y a) - 2], \qquad (11.9.19)$$

где $a > 0$ — некоторая постоянная, ε_G — ширина запрещенной зоны в точке $\mathbf{k} = 0$. Решения уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_x}(\varepsilon_c - \varepsilon_v) &= Aa \sin(k_x a) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_y}(\varepsilon_c - \varepsilon_v) &= Aa \sin(k_y a) = 0 \end{aligned} \tag{11.9.20}$$

в первой зоне Бриллюэна имеют вид

$$\mathbf{k} = (0,\ 0),\ \left(0,\ \pm\frac{\pi}{a}\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{a},\ 0\right),\ \left(\pm\frac{\pi}{a},\ \pm\frac{\pi}{a}\right); \tag{11.9.21}$$

они называются сингулярностями Ван Хова. Разложим энергию в окрестности этих точек как $\cos x \approx 1 - x^2/2$:

$$\varepsilon - \varepsilon_G = \begin{cases} \frac{1}{2}Aa^2(\Delta k_x^2 + \Delta k_y^2) & \text{в минимуме } (0,\ 0); \\ -\frac{1}{2}Aa^2(\Delta k_x^2 + \Delta k_y^2) + 4A & \text{в максимуме } (\pi/a,\ \pi/a); \\ \frac{1}{2}Aa^2(\Delta k_x^2 - \Delta k_y^2) + 2A & \text{в седловой точке } (0,\ \pi/a). \end{cases} \tag{11.9.22}$$

Межзонная плотность состояний в экстремальных точках получается просто [1]):

$$J_{vc} = \frac{2}{(2\pi)^2}\left|\frac{d}{d\varepsilon}[\pi\,(\Delta k)^2]\right| = \begin{cases} \frac{1}{\pi A a^2} & \text{для } \varepsilon > \varepsilon_G \text{ при } (0,\ 0), \\ \frac{1}{\pi A a^2} & \text{для } \varepsilon < \varepsilon_G + 4A \text{ при } (\pi/a,\ \pi/a) \end{cases} \tag{11.9.23}$$

и равна нулю в противном случае, тогда как в седловой точке

$$J_{vc}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_L \frac{ds}{|\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon|} = \frac{2}{(2\pi)^2}\,4\int_{\Delta k_{xm}}^{\Delta k_{xM}} \frac{d(\Delta k_x)}{|\partial\varepsilon/\partial\,\Delta k_y|} = \frac{2}{\pi^2 A a^2}\int_{\Delta k_{xm}}^{\Delta k_{xM}} \frac{d(\Delta k_x)}{\Delta k_y}, \tag{11.9.24}$$

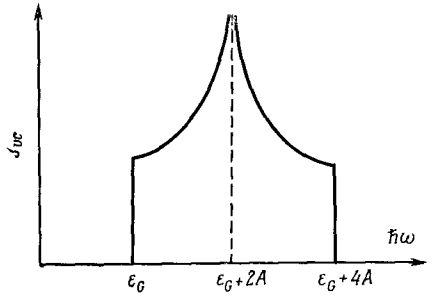
---

[1]) Здесь используется свойство дельта-ф $\int \delta[\varepsilon(k_x,\ k_y)]\,dk_x\,dk_y = \left|\frac{d}{d\varepsilon}\int dk_x\,dk_y\right|$, упоминавшееся в примечании в гл. 6, § 5.

где ds — элемент изоэнергетической линии, L — полная длина этой линии на двумерной поверхности $\varepsilon(k_x, k_y)$, а Δk_{xm} и Δk_{xM} — минимальное и максимальное значения Δk_x на этой линии. Разрешив (11.9.22) в седловой точке относительно Δk_y и вычислив интеграл в (11.9.24), получаем

$$J_{vc}(\omega) = \frac{2}{\pi^2 A a^2}\left[\ln\left(\Delta k_{xM} + \sqrt{\Delta k_{xM}^2 - 2\frac{\varepsilon - \varepsilon_G - 2A}{Aa^2}}\right) - \right.$$
$$\left. - \ln\sqrt{2\frac{\varepsilon - \varepsilon_G - 2A}{Aa^2}}\right], \qquad (11.9.25)$$

где учтено, что $\Delta k_{xm} = \sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_G - 2A)/(Aa^2)}$. [Это найдено из (11.9.22) при $\Delta k_y = 0$ и справедливо для положительного зна-



Фиг. 11.49. Межзонная плотность состояний в модели двумерной изоэнергетической поверхности.

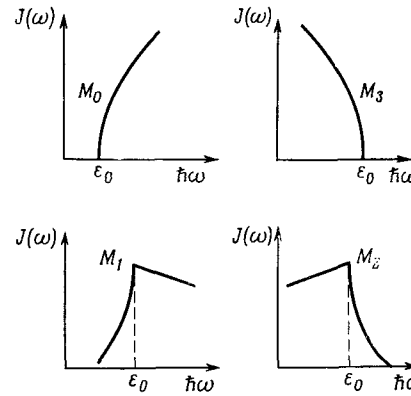
чения подкоренного выражения. $\Delta k_{xM} \approx \pi/a$.] Выражение (11.9.25) показывает, что $J_{vc}(\omega)$ имеет логарифмическую сингулярность в седловой точке, где $\varepsilon = \varepsilon_G + 2A$. Эта сингулярность показана на фиг. 11.49. Такие сингулярности впервые анализировал Ван Хов [89], а особые точки в зоне Бриллюэна, где возникают эти сингулярности, идентифицировал Филлипс [90].

В трехмерном случае разложение в окрестности особых точек

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_c(\mathbf{k}) - \varepsilon_v(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{a^2}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i (\Delta k_i)^2 \qquad (11.9.26)$$

содержит три коэффициента A_i, которые могут быть положительными или отрицательными. Седловая точка характеризуется либо одним отрицательным и двумя положительными коэффициентами (обозначаются символом M_1), либо двумя отрицательными и одним положительным коэффициентами (M_2). Когда все три коэффициента положительны, имеется минимум (M_0), где J_{vc} изменяется с $\varepsilon = \hbar\omega$ согласно (11.9.16), а когда

все коэффициенты отрицательны, имеется максимум (M_3) и $J_{vc} \sim (\varepsilon_G - \hbar\omega)^{1/2}$. Функции $J_{vc}(\omega)$ показаны схематически на фиг. 11.50. Рассмотрим вновь для сравнения спектр $\varkappa_i(\omega)$ германия, показанный на фиг. 11.3. Очевидно, что край, обозначенный, например, $\Lambda_3 \to \Lambda_1$, относится к M_1-типу. На фиг. 2.26 обозначены переходы в зонной структуре. Хотя на этой фигуре нельзя увидеть седловую точку, там отмечена точка $\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_c = \nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon_v$ для направления $k_{\langle 111\rangle}$. Другой пред-



Фиг. 11.50. Межзонная плотность состояний вблизи особых точек (индекс у буквы M указывает число отрицательных коэффициентов в разложении разности энергий зон по $\mathbf{k}$) [84]

ставляющий интерес для нас переход — это прямой переход из максимума валентной зоны в минимум зоны проводимости при $\mathbf{k} = 0$, который относится, конечно, к M_0-типу (фиг. 11.3).

§ 10. Поглощение и отражение света свободными носителями заряда

Поглощение света свободными носителями (т. е. электронами проводимости или дырками) мы рассмотрим сначала на основе классической теории гармонического осциллятора в пределе исчезающе малой энергии связи $\hbar\omega_e$. В этом случае из (11.7.6) и (11.7.7) получаем

$$n^2 - k^2 = \varkappa_r = \varkappa_{\text{опт}} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \tag{11.10.1}$$

$$2nk = \varkappa_i = \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \tag{11.10.2}$$

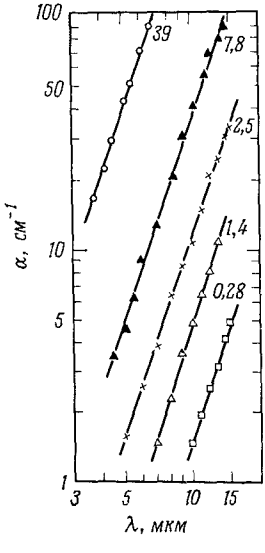
Ниже на основе квантовомеханического рассмотрения будет показано, что постоянная затухания γ по существу равна обратному времени релаксации импульса τ_m^{-1}. В случае слабого затухания подставляем в (11.10.2) вместо показателя n его значение $\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}$, полученное из (11.10.1) при условии, что $\gamma = 0$ и $\omega \gg \omega_p$, где ω — частота света. Тогда показатель поглощения

$$k = \frac{\omega_p^2\gamma}{2\omega^3\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}, \tag{11.10.3}$$

а коэффициент поглощения

$$\alpha = \frac{4\pi k}{\lambda} = \frac{377\ \text{Ом}}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{\sigma_0}{(\omega\tau_m)^2} \sim \lambda^2, \qquad (11.10.4)$$

где σ_0 — электропроводность на постоянном токе, а γ заменено величиной τ_m^{-1}. Например, при $\tau_m = 2 \cdot 10^{-13}$ с и длине волны $\lambda = 1$ мкм имеем $\omega\tau_m \approx 10^2$; при показателе преломления $\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}} = 4$ и электропроводности $\sigma_0 = 10^2$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ получается значение коэффициента поглощения $\alpha \approx 1$ см$^{-1}$, которое очень мало по сравнению с коэффициентом собственного поглощения, приблизительно равным 10^4 см$^{-1}$. Однако в металлах, где $\sigma_0 \approx \approx 10^6$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$, коэффициент поглощения свободными носителями по порядку величины равен коэффициенту собственного поглощения в полупроводниках и даже превышает его (например, в серебре на длине волны $\lambda = 0{,}6$ мкм при $T = 300$ К $k = 4{,}09$, $n = 0{,}05$).

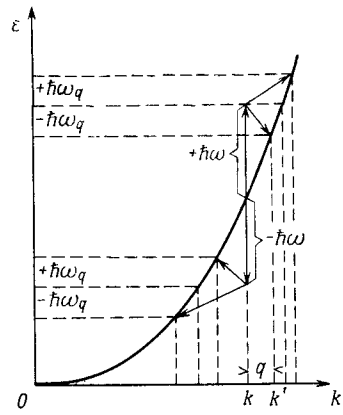


Фиг. 11.51. Спектр поглощения света свободными носителями в арсениде индия n-типа для различных значений концентрации электронов при комнатной температуре (указаны значения концентрации электронов в единицах 10^{17} см$^{-3}$) [91].

Согласно (11.10.4), коэффициент поглощения α пропорционален квадрату длины волны. На фиг. 11.51 в логарифмическом масштабе показаны зависимости $\alpha = \alpha(\lambda)$, полученные в n-InAs при комнатной температуре и различных значениях концентрации электронов. Хотя наблюдается степенная зависимость, но наклон прямых отвечает скорее зависимости $\alpha \sim \lambda^3$. Это расхождение снимается при квантовомеханическом рассмотрении проблемы с учетом различных видов электрон-фононного или электрон-примесного взаимодействия. На фиг. 11.52 видно, что в действительности процессы поглощения или испускания фотона с энергией $\hbar\omega = \Delta\varepsilon$ должны сопровождаться изменением импульса $\hbar\mathbf{q}$, которое намного превышает импульс самого фотона. Эту разность импульсов $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ может передать или получить фонон с энергией $\hbar\omega_q$.

Поскольку в процессе поглощения участвуют три частицы (электрон, фотон и фонон), необходимо рассматривать задачу

во втором приближении теории возмущений [1]), в котором предполагается наличие промежуточных, или виртуальных, состояний $\mathbf{k}'$ между начальным $\mathbf{k}$ и конечным $\mathbf{k}''$ состояниями. Переход из $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}''$ может происходить сначала с поглощением фотона $\hbar\omega$ (переход в состояние n), а затем с испусканием или поглощением фонона $\hbar\omega_q$ или в обратном порядке. Кроме этого, рассмотрим индуцированное испускание света, не имеющее аналога в классической теории, тоже с учетом поглощения или испускания фонона. Необходимо учесть 4 процесса, указанных на фиг. 11.52.



Фиг. 11.52. Изменение импульса носителей вследствие изменения их энергии при междолинных переходах с испусканием или поглощением фононов.

Во втором приближении теории возмущений вероятность перехода [86]

$$S_{\pm} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|H_{k'k}|^2_{\pm} |H_{k''k'}|^2}{\hbar^2\omega^2} \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega \pm \hbar\omega_q), \quad (11.10.5)$$

где $\hbar\omega$ — энергия фотона, $H_{k'k}$ — матричный элемент гамильтониана для испускания или поглощения фонона (индекс $+$ или $-$ соответственно), $H_{k''k'}$ — соответствующий элемент для поглощения фотона. Для процесса индуцированного испускания вероятность перехода обозначается символом $S'_{\pm}$; она отличается от $S_{\pm}$ только знаком перед $\hbar\omega$ в аргументе дельта-функции.

Скорость перехода R записываем согласно правой части (6.2.14), но с тем отличием, что теперь необходимо интегрировать также по всем начальным состояниям k, причем вследствие вырождения по спинам появляется множитель 2:

$$R_{\pm} = \frac{2V}{(2\pi)^6} \int d^3k d^3k' S_{\pm} f(k)[1 - f(k')]. \quad (11.10.6)$$

Ограничимся рассмотрением невырожденного электронного газа с температурой электронов T_e, пренебрегая $f(k')$; для $f(k)$

[1]) Читатель, не знакомый с квантовой механикой, может оставить это рассмотрение для последующего чтения. Приведенные расчеты заимствованы из работы [92]. Сущность метода изложена в работах [93, 94].

можем записать

$$f(k) = \frac{n}{N_c} e^{-\varepsilon/(k_B T_e)} = \frac{n}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T_e}\right)^{3/2} e^{-\varepsilon/(k_B T_e)}, \quad (11.10.7)$$

где n — концентрация электронов. В выражении (11.10.6) удобно заменить d^3k' на d^3q, где $\mathbf{q}$ — волновой вектор фонона.

Матричный элемент $H_{k''k'}$ имеет вид (11.9.8) с той лишь разницей, что теперь мы вводим вместо матричного элемента импульса величину

$$\frac{p_{k'k}}{m_0} \approx \frac{\hbar(k'-k)}{m} = \frac{\hbar\mathbf{q}}{m}, \quad (11.10.8)$$

где m_0 — масса электрона; как и в § 10, мы пренебрегаем импульсом фотона и учитываем периодический потенциал кристалла путем введения эффективной массы m. Следовательно, из (11.10.6) получаем

$$R_\pm = \frac{Ve^2A_0^2n}{2(2\pi)^5\hbar\omega^2m^2N_c}\int |H_{k'k}|^2_\pm (\mathbf{aq})^2 \times$$
$$\times \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega \pm \hbar\omega_q)\, e^{-\varepsilon/(k_B T_e)}\, d^3k\, d^3q. \quad (11.10.9)$$

Вообще говоря, матричный элемент $H_{k'k}$ зависит от q, а не от k. Поэтому интегрирование по k не составляет труда. Интеграл дельта-функции по θ и φ дает множитель

$$\int \delta\left[\frac{\hbar^2}{2m}(q^2 + 2kq\cos\theta) - \hbar\omega \pm \hbar\omega_q\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -\frac{2\pi m}{\hbar^2 kq}, \quad (11.10.10)$$

а интегрирование по k^2dk дает

$$-\frac{2\pi m}{\hbar^2 q}\int_{k_{\text{мин}}}^{\infty} e^{-\hbar^2k^2/(2mk_BT_e)}k^2\,dk = \frac{2\pi m^2 k_B T_e}{\hbar^4 q} e^{-\hbar^2 k_{\text{мин}}^2/(2k_BT_e m)}, \quad (11.10.11)$$

где нижний предел $k_{\text{мин}}$ определяется из закона сохранения энергии (аргумент дельта-функции равен нулю) при $\cos\theta = 1$:

$$k_{\text{мин}}^2 = \left(\frac{m(\hbar\omega \mp \hbar\omega_q)}{\hbar^2 q} - \frac{q}{2}\right)^2, \quad (11.10.12)$$

а верхний предел $k_{\text{макс}}^2 = \infty$ получается из условия $\cos\theta = 0$ [1]).

[1]) В кристалле истинное значение $k_{\text{макс}}$ по порядку величины равно π/a, где a — постоянная решетки; так как подынтегральная функция экспоненциально зависит от k^2 и очень мала при $k = \pi/a$, можно заменить π/a на ∞.

Удобно ввести параметр

$$z_{\pm} = \frac{\hbar\omega \pm \hbar\omega_q}{2k_B T_e} \tag{11.10.13}$$

(индексы $+$ и $-$ обозначают поглощение и испускание фонона), а также переменную

$$\xi = \frac{\hbar^2 q^2}{4mk_B T_e}. \tag{11.10.14}$$

Согласно (11.10.11), получаем

$$\int \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega \pm \hbar\omega_q) e^{-\varepsilon/(k_B T_e)} d^3k =$$

$$= \pi\hbar^{-3} m^{3/2} (k_B T_e)^{1/2} \exp(z_{\mp}) \xi^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{z_{\mp}^2}{\xi}\right)\right]. \tag{11.10.15}$$

Вводя угол θ' между единичным вектором $\mathbf{a}$ поляризации света и волновым вектором фонона $\mathbf{q}$, вычисляем интеграл по $d^3q = q^2\, dq \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$:

$$\int_0^{\pi} (\mathbf{aq})^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \int_0^{\pi} q^2 \cos^2\theta' \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \frac{\xi 16\pi m k_B T_e}{3\hbar^2} \tag{11.10.16}$$

и получаем, наконец, скорость перехода $R_{\pm}$:

$$R_{\pm} = \frac{Ve^2 A_0^2 n}{2(2\pi)^5 \hbar\omega^2 m^2 N_c} \frac{\pi m^{3/2} (k_B T_e)^{1/2}}{\hbar^3} \frac{16\pi m k_B T_e}{3\hbar^2} \frac{(4mk_B T_e)^{3/2}}{2\hbar^3} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} |H_{k'k}|_{\pm}^2 e^{z_{\mp}} e^{-1/2\left(\xi + z_{\mp}^2/\xi\right)} \xi\, d\xi, \tag{11.10.17}$$

а также, согласно (11.2.12), коэффициент поглощения

$$\alpha_{\pm} = R_{\pm} 2\hbar\mu_0 c \left(\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\, A_0^2 \omega\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{3/2} \frac{ne^2 m^{1/2} (k_B T_e)^{3/2} V}{\hbar^5 \omega^3} \int_0^{\infty} |H_{k'k}|_{\pm}^2 e^{z_{\mp}} e^{-1/2\left(\xi + z_{\mp}^2/\xi\right)} \xi\, d\xi. \tag{11.10.18}$$

Пределы интегрирования расширены от 0 до ∞ ввиду наличия экспоненциального множителя в подынтегральной функции, который при обоих пределах стремится к нулю. Обозначим $\varkappa_{\text{опт}} = \varkappa_{\text{опт}}(\omega)$.

Рассмотрим сначала простой случай, когда матричный элемент не зависит от q и, следовательно, от ξ, так что его можно

записать перед знаком интегрирования. Согласно формуле (2.5) приложения 2, этот интеграл равен

$$\int_0^\infty |H_{k'k}|_\pm^2 e^{z\mp e^{-1/2}\left(\xi+z_\mp^2/\xi\right)}\xi\, d\xi = |H_{k'k}|_\pm^2 e^{z\mp 2z_\mp^2} K_2(|z_\mp|), \quad (11.10.19)$$

где K_2 — модифицированная функция Бесселя.

Другой интересный случай имеет место, когда $H_{k'k} \sim 1/q$. В этом случае, согласно (2.4) (приложение 2), получаем

$$\int_0^\infty q^{-2} e^{z\mp e^{-1/2}\left(\xi+z_\mp^2/\xi\right)}\xi\, d\xi = \frac{\hbar^2}{4mk_BT_e} e^{z\mp 2|z_\mp|} K_1(|z_\mp|). \quad (11.10.20)$$

Предыдущий случай реализуется при рассеянии на акустическом и оптическом деформационном потенциалах, тогда как последний случай — при пьезоэлектрическом и полярном оптическом рассеяниях.

В рассеянии на ионизованных примесях фононы не участвуют, поэтому $z_\mp$ равно $z = \hbar\omega/(k_BT_e)$, и так как без учета экранирования $H_{k'k} \sim 1/q^2$, то

$$\int_0^\infty q^{-4} e^z e^{-1/2\left(\xi+z_\mp^2/\xi\right)}\xi\, d\xi = \frac{\hbar^4}{(4mk_BT_e)^2} e^z 2K_0(|z|). \quad (11.10.21)$$

Поскольку ион примеси является третьей частицей, применяется второе приближение теории возмущений.

Рассмотрим сначала *рассеяние на акустическом деформационном потенциале*. Матричный элемент для поглощения и испускания фонона имеет вид (6.4.13). Так как энергия фонона очень мала, $\hbar\omega_q \ll \hbar\omega$, то из (11.10.13) получаем $z_\pm \approx \hbar\omega/2k_BT_e$. Следовательно, для поглощения фотона (индекс a) получаем

$$\alpha_a = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{2^{7/2}}{3\pi^{3/2}} \frac{ne^2\varepsilon_{\text{ак}} m^{1/2} k_BT (k_BT_e)^{3/2}}{\hbar^5 c_1 \omega^3} \times$$
$$\times \left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right)^2 \exp\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right) K_2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right), \quad (11.10.22)$$

где введен множитель 2 для учета процессов поглощения и испускания фононов. Необходимо еще рассмотреть индуцированное испускание фотонов (индекс e). Описание этого процесса получается просто заменой знака перед $\hbar\omega$ в (11.10.5), (11.10.9) и др. Так как аргумент функции K_2 всегда положителен, то из

(11.10.19) получаем

$$\alpha_e \sim |H_{k'k}|^2_{\pm} e^{-z \pm 2z^2_{\pm}} K_2(|z_{\pm}|) \sim$$

$$\sim \left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right) K_2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right), \qquad (11.10.23)$$

где правая часть соответствует акустическому рассеянию. Полный коэффициент поглощения получаем путем вычитания α_e из α_a: $\alpha = \alpha_a - \alpha_e \sim e^z - e^{-z} = 2\,sh(z)$, т. е.

$$\alpha = \frac{\mu_0 c 2^{7/2} n e^2 e^2_{\text{ак}} (mk_BT)^{1/2}}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\, 3\pi^{3/2}\hbar^3 c_1 \omega} \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/2} \text{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right) K_2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right). \qquad (11.10.24)$$

Рассмотрим случай теплового равновесия $T_e = T$ при высоких температурах, когда $2k_BT \gg \hbar\omega$. Так как в этом случае $\text{sh}(z) \approx z$, а $K_2(z) \approx 2/z^2$, то получаем

$$\alpha \approx \frac{\mu_0 c 2^{7/2} n e^2 e^2_{\text{ак}} m^{1/2} (k_BT)^{3/2}}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\, 3\pi^{3/2}\hbar^4 c_1 \omega^2}. \qquad (11.10.25)$$

Это выражение можно упростить, вводя подвижность (6.4.18) и электропроводность $\sigma_0 = ne\mu$ на постоянном токе. Пренебрегая множителем $32/9\pi \approx 1{,}13$, мы получаем, наконец, выражение (11.10.4). Это подтверждает правильность замены постоянной затухания γ в классической модели на τ_m^{-1}. Так как $\hbar\omega \ll 2k_BT$, оправданно также пренебрежение индуцированным испусканием в классическом рассмотрении. Зависимость коэффициента поглощения α от температуры носителей T_e в этом приближении совпадает с той зависимостью, которую можно ожидать на основе (6.4.17):

$$\alpha \sim \gamma = \langle \tau_m^{-1} \rangle \sim T_e^{1/2}, \qquad (11.10.26)$$

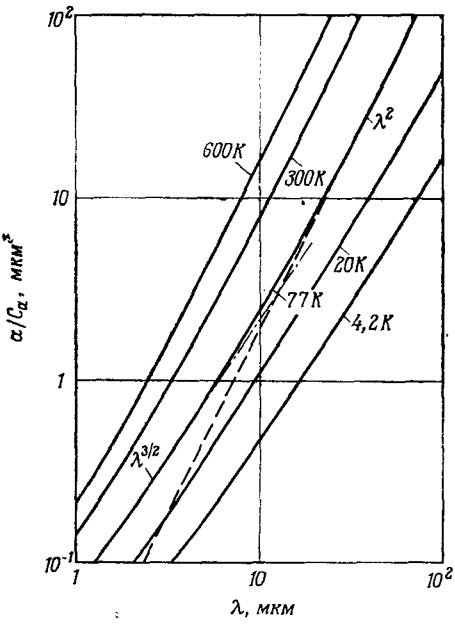
т. е. с ростом электронной температуры поглощение света увеличивается. Поскольку, согласно (6.5.25), температура возрастает линейно с увеличением постоянного электрического поля, в классической модели Друде получаем $\alpha \sim E^{1/2}$.

В квантовом пределе $\hbar\omega \gg 2k_BT_e$ поглощение становится независимым от T_e:

$$\alpha \approx \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{2^{1/2}}{3\pi} \frac{n e^2 e^2_{\text{ак}} m^{1/2} k_BT}{\hbar^{7/2} c_1 \omega^{3/2}} = \alpha_{\text{кл}} \frac{(\pi\hbar\omega)^{1/2}}{8(k_BT)^{1/2}}, \qquad (11.10.27)$$

где $\alpha_{\text{кл}}$ — коэффициент поглощения в классическом приближении в отсутствие электрического поля (11.10.25). В квантовом

пределе коэффициент поглощения больше, чем в классическом, но его зависимость от длины волны слабее ($\alpha \sim \lambda^{3/2}$, тогда как в классическом пределе $\alpha \sim \lambda^2$). На фиг. 11.53 эта зависимость показана в логарифмическом масштабе в широком диапазоне длин волн при различных значениях температуры T.



Фиг. 11.53. Зависимость коэффициента поглощения света свободными носителями от длины волны при рассеянии носителей на деформационном акустическом потенциале. (C_α — коэффициент пропорциональности.)

Зависимости типа $\lambda^{3/2}$ и λ^2 показаны прямыми линиями (штрих-пунктирной и штриховой), которые в областях малых и больших значений λ соответственно подогнаны к кривой для $T = 77$ К.

Отношение коэффициента поглощения в электрическом поле к коэффициенту поглощения в отсутствие поля имеет вид

$$\frac{\alpha(E)}{\alpha(0)} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh}\left[\hbar\omega/(2k_BT_e)\right] K_2\left[\hbar\omega/(2k_BT_e)\right]}{\operatorname{sh}\left[\hbar\omega/(2k_BT)\right] K_2\left[\hbar\omega/(2k_BT)\right]}. \quad (11.10.28)$$

На фиг. 11.54 показана зависимость между отношением $\alpha(E)/\alpha(0)$ и величиной $\mu_0 E/u_1$ с учетом зависимости электронной температуры от напряженности электрического поля E (6.5.23). Зависимость типа $E^{1/2}$ показана штриховой кривой. В сильных электрических полях температура носителей достаточно высока, и справедлива классическая оптика.

Численное значение сечения поглощения определяется выражением

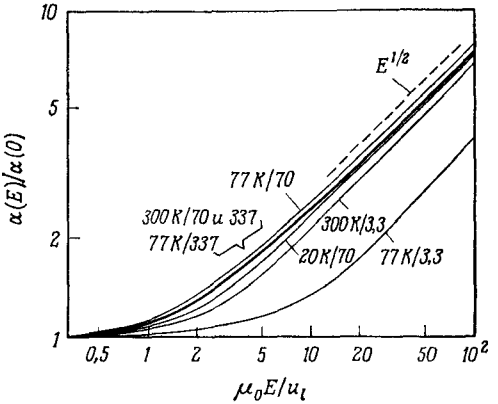
$$\frac{\alpha}{n} = \frac{(4{,}693\text{Å})^2 \frac{\lambda}{\text{мкм}} \operatorname{sh}\left[7195{,}3\left(\frac{\text{мкм}}{\lambda}\right)\left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)\right] K_2\left[7195{,}3\left(\frac{\text{мкм}}{\lambda}\right)\left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)\right]}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\left(\frac{m}{m_0}\right)^2\left(\frac{\mu}{\text{см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}}\right)\left(\frac{T_e}{100\text{K}}\right)}, \quad (11.10.29)$$

где $\mu = \mu(T_e) \sim T_e^{-1/2}$ — подвижность при рассеянии на акустических фононах.

Для *пьезоэлектрического рассеяния* матричный элемент, согласно (6.7.8), пропорционален $1/q$, и можно применить (11.10.20):

$$\alpha = \frac{\mu_0 c 2^{1/2} n e^4 K^2 (k_B T)^{1/2}}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\, 3\pi^{3/2}\hbar^2 \varkappa \varkappa_0 m^{1/2}\omega^2} \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/2} \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_e}\right) K_1\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_e}\right). \quad (11.10.30)$$

В классическом пределе множитель $\operatorname{sh}[\hbar\omega/(2k_B T_e)]K_1[\hbar\omega/(2k_B T_e)] \approx 1$ и $\alpha \sim \lambda^2$, тогда как в квантовом пределе этот множитель приблизительно равен $[\pi k_B T_e/(\hbar\omega)]^{1/2}$ и $\alpha \sim \lambda^{2,5}$ независимо от электронной температуры T_e. Если не учитывать более



Фиг. 11.54. Зависимость коэффициента поглощения света свободными носителями от напряженности электрического поля при рассеянии носителей на деформационном акустическом потенциале (указаны температура решетки и длина волны света в микрометрах).

сильной зависимости от длины волны, то этот случай похож на случай деформационного акустического рассеяния. Однако в отличие от последнего коэффициент поглощения уменьшается с температурой T_e в области $T_e \geqslant \hbar\omega/(3k_B) = 4800$ K/(λ/мкм), тогда как ниже этой области он возрастает, как обычно.

Для численных оценок введем, согласно (6.7.17), подвижность μ, зависящую от $T_e \sim \langle\varepsilon\rangle$ (6.7.16), и получим для сечения поглощения

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{(0{,}771\text{Å})^2\,(\lambda/\text{мкм})^2}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,[\mu/(\text{см}^2\cdot\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-1})]\,(m/m_0)^2} \operatorname{sh}\left[\frac{7195{,}3}{(\lambda/\text{мкм})\ (T/\text{K})}\right] K_1\left[\frac{7195{,}3}{(\lambda/\text{мкм})\ (T/\text{K})}\right] \quad (11.10.3)$$

Поскольку пьезоэлектрическое рассеяние дает высокую подвижность (гл. 6, § 7), поглощение света, обусловленное этим процессом, обычно можно не учитывать.

Рассмотрим теперь *рассеяние на оптическом деформационном потенциале*. Соответствующий матричный элемент приведен в (6.11.19). Он не зависит от q, поэтому можно воспользоваться равенством (11.10.19) [1]). Частота ω_q в данном случае равна частоте оптического фонона ω_0. Как и выше, вводим величину $z = \hbar\omega_0/(2k_BT)$. Поскольку $N_q + 1 = N_q \exp(2z)$, для четырех рассматриваемых процессов с точностью до общего множителя получаем

$$\begin{aligned} &\alpha_{a+} \sim e^{z+z_+^2} K_2(z_+), \qquad \alpha_{a-} \sim e^{2z+z-z_-^2} K_2(|z_-|), \\ &\alpha_{e+} \sim e^{-z-z_-^2} K_2(|z_-|), \quad \alpha_{e-} \sim e^{2z-z+z_+^2} K_2(z_+), \end{aligned} \tag{11.10.32}$$

а также

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_{a+} + \alpha_{a-} - \alpha_{e+} - \alpha_{e-} \sim 2e^z [&\operatorname{sh}(z_+ - z) z_+^2 K_2(z_+) + \\ &+ \operatorname{sh}(z_- + z) z_-^2 K_2(|z_-|)]. \end{aligned} \tag{11.10.33}$$

Записывая $2e^z N_q$ в виде $1/\operatorname{sh}(z)$ из (11.10.18), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \alpha = &\frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{2^{3/2} n e^2 D^2 m^{1/2}}{3\pi^{3/2}\hbar^4 \rho \omega_0 \omega^3} (k_B T_e)^{3/2} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh}(z_+ - z) z_+^2 K_2(z_+) + \operatorname{sh}(z_- + z) z_-^2 K_2(|z_-|)}{\operatorname{sh}(z)}. \end{aligned} \tag{11.10.34}$$

В случае равновесных носителей, когда $T_e = T$, находим, что $z_+ - z = z_- + z = \hbar\omega/(2k_BT)$. Вводя подвижность μ, согласно (6.11.22), получаем

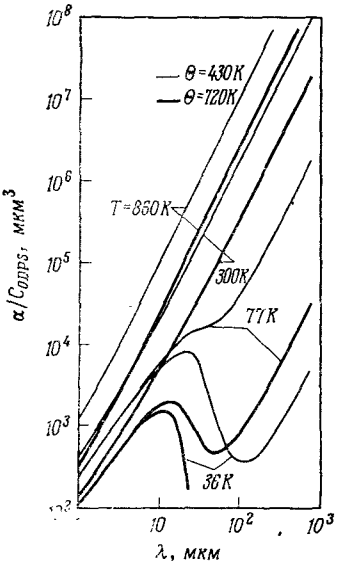
$$\frac{\alpha}{n} = \frac{(4{,}27 \cdot 10^{-2}\text{Å})^2}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{\left(\frac{\Theta}{100\text{K}}\right)\left(\frac{\lambda}{\text{мкм}}\right)^3 \operatorname{sh}(z_0)\left[z_+^2 K_2(z_+) + z_-^2 K_2(|z_-|)\right]}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\text{см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}}\right)\left(\frac{\Theta}{2T}\right)^3 K_2\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}, \tag{11.10.35}$$

где теперь $z_\pm = z_0 \pm \Theta/2T$, а $z_0 = 7195{,}3/(\lambda/\text{мкм})\,(T/\text{K})$. На фиг. 11.55 показана зависимость величины

$$\frac{\alpha}{C_{\text{ODPS}}} = \lambda^3 \operatorname{sh}(z_0) \frac{z_+^2 K_2(z_+) + z_-^2 K_2(|z_-|)}{(\Theta/2T)^{3/2} \operatorname{sh}(\Theta/2T)} \tag{11.10.36}$$

[1]) Хотя распределение Максвелла — Больцмана может быть плохим приближением к истинному распределению горячих носителей, оно дает результаты в аналитической форме, которые по крайней мере качественно верны.

(C_{ODPS} — коэффициент пропорциональности) от длины волны при различных значениях температуры решетки T и температуры Дебая Θ. При больших длинах волн $\alpha \sim \lambda^2$. Эта зависимость такая же, как в случае рассеяния на акустическом потенциале. Однако при низких температурах α имеет максимум, соответствующий длине волны $\lambda \approx \approx 7200/(\Theta/2)$ мкм. Это соответствует условию $z_- = 0$. Проверка четырех значений коэффициента α, заданных выражениями (11.10.32), показывает, что максимум обусловлен значением α_{a-}; при $\omega = \omega_0$ возникает резонансное поглощение фотона электроном, после чего электрон, возвращаясь в начальное состояние, испускает или поглощает оптический фонон той же частоты. Сравнивая (11.10.34) и (11.10.24) при $T_e = T$ и $\hbar\omega = \hbar\omega_0 \gg 2k_BT$, по-



Фиг. 11.55. То же, что на фиг. 11.53, но при рассеянии носителей на деформационном оптическом потенциале.

лучаем отношение коэффициентов поглощения, обусловленных рассеянием на оптическом и акустическом деформационных потенциалах:

$$\frac{\alpha_{\text{опт}}}{\alpha_{\text{ак}}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Du_l}{\varepsilon_{\text{ак}}\omega_0}\right)^2 \sqrt{\frac{T}{\Theta}}. \qquad (11.10.37)$$

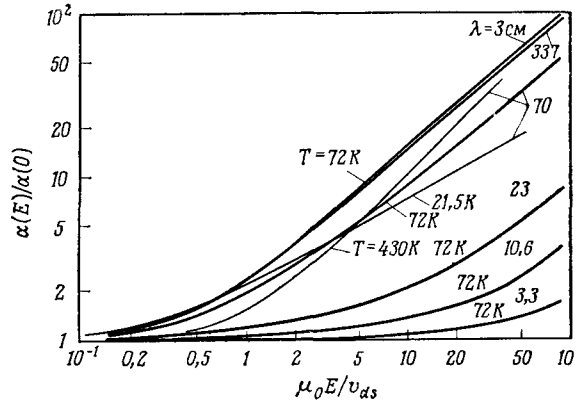
Это отношение того же порядка, что и отношение $[Du_l/(\varepsilon_{\text{ак}}\omega_0)]^2$, которое, например, для n-Ge приблизительно равно 0,2. В квантовом пределе $\alpha_{\text{опт}} \sim \lambda^{1,5}$ при $\hbar\omega \gg \hbar\omega_0$.

Для случая горячих носителей из (11.10.34) получаем

$$\frac{\alpha(E)}{\alpha(0)} = \sqrt{\frac{T_e}{T}} \frac{(z_0+z)^2 K_2(z_+)\,\mathrm{sh}\,(z_+ - z) + (z_0-z)^2 K_2(|z_-|)\,\mathrm{sh}\,(z_- + z)}{[(z_0+z)^2 K_2(z_0+z) + (z_0-z)^2 K_2(|z_0-z|)]\,\mathrm{sh}\,(z_0)}, \qquad (11.10.38)$$

где $z_\pm = (\hbar\omega \pm \hbar\omega_0)/(2k_BT_e)$, $z_0 = \hbar\omega/(2k_BT)$, $z = \hbar\omega_0/(2k_BT)$. Это отношение показано на фиг. 11.56 как функция напряженности электрического поля E, причем использована зависимость T_e от E (6 11.25). При длине волны $\lambda = 70$ мкм и температуре Дебая 430 К указано влияние температуры решетки: кривые

пересекаются при $\mu_0 E/v_{ds} \approx 4$. Для других кривых длина волны выбрана в качестве параметра. При всех значениях напряженности электрического поля отношение $\alpha(E)/\alpha(0)$ растет с увеличением длины волны. Однако в области длинных волн возникает насыщение. На фиг. 11.56 практически нет разницы между кривыми для $\lambda = 337$ мкм (длина волны цианового лазера) и для $\lambda = 3$ см (X-диапазон сверхвысоких частот). Для сравнения со случаем рассеяния на акустическом потенциале, показанным на фиг. 11.54, необходимо принять во внимание



Фиг. 11.56. То же, что на фиг. 11.54, но при рассеянии на деформационном оптическом потенциале.

различие шкал напряженности электрического поля E: при акустическом рассеянии берется отношение E к скорости звука, тогда как при оптическом рассеянии — отношение к дрейфовой скорости насыщения, которая, например в n-Ge в 20 раз больше скорости акустических волн. На фиг. 11.60 сравниваются влияния обоих этих механизмов рассеяния.

Рассмотрим теперь *полярное оптическое рассеяние*. Матричный элемент гамильтониана, согласно (6.12.4), пропорционален величине $1/q$. Следовательно, можно использовать уравнение (11.10.20) [1]). Чтобы отличить коэффициент поглощения α от константы полярного взаимодействия, последнюю обозначим здесь символом $\alpha_{\text{пол}}$. В результате получаем

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{2\alpha_{\text{пол}} n e^2 (\hbar\omega_0)^{3/2}}{3\pi^{1/2}\hbar^2\omega^3 m} (k_B T_e)^{1/2} \times$$
$$\times \frac{\operatorname{sh}(z_+ - z)\, z_+ K_1(z_+) + \operatorname{sh}(z_- + z)\,|z_-|\, K_1(|z_-|)}{\operatorname{sh}(z)}. \quad (11.10.39)$$

[1]) См. примечание на стр. 454.

Выделим в зависимости (11.10.39) множитель C_{POS} таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda^3 \operatorname{sh}(z_0) \frac{z_+ K_1(z_+) + |z_-| K_1(|z_-|)}{(\Theta/2T)^{3/2} \operatorname{sh}(\Theta/2T)} = \frac{\alpha}{C_{\text{POS}}}. \quad (11.10.40)$$

На фиг. 11.57 показана зависимость величины α/C_{POS} от длины волны при различных значениях температуры решетки T и температуры Дебая Θ. При больших длинах волн $\alpha \sim \lambda^2$, тогда как при малых $\alpha \sim \lambda^{2,5}$. Этот график очень похож на соответствующий график в случае рассеяния на оптическом деформационном потенциале. Для тепловых носителей заряда введем подвижность согласно (6.12.23); тогда для сечения поглощения получим

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{(3{,}02 \cdot 10^{-2}\text{Å})^2}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \times$$
$$\times \frac{\left(\frac{\Theta}{100\text{ K}}\right)\left(\frac{\lambda}{\text{мкм}}\right)^3 \operatorname{sh}(z_0)\left[z_+ K_1(z_+) + (z_-) K_1(|z_-|)\right]}{\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\text{см}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}}\right)\left(\frac{\Theta}{2T}\right)^2 K_1\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}. \quad (11.10.41)$$

В случае горячих носителей из (11.10.39) находим отношение коэффициентов поглощения

$$\frac{\alpha(E)}{\alpha(0)} = \sqrt{\frac{T_e}{T}} \times$$
$$\times \frac{(z_0 + z) K_1(z_+) \operatorname{sh}(z_+ - z) + |z_0 - z| K_1(|z_-|) \operatorname{sh}(z_- + z)}{[(z_0 + z) K_1(z_0 + z) + |z_0 - z| K_1(|z_0 - z|)] \operatorname{sh}(z_0)}, \quad (11.10.42)$$

где $z_\pm = (\hbar\omega \pm \hbar\omega_0)/(2k_B T_e)$, $z_0 = \hbar\omega/(2k_B T)$ и $z = \hbar\omega_0/(2k_B T)$. На фиг. 11.58 это отношение показано как функция напряженности электрического поля E, причем зависимость $T_e = T_e(E)$ определяется уравнением (6.12.26) Как и на фиг. 6.29, здесь имеется критическое поле пробоя и двузначность функции $\alpha(E)$. В остальном кривые подобны показанным на фиг. 11.56 для рассеяния на оптическом деформационном потенциале. Однако, как и в случае пьезоэлектрического рассеяния, здесь имеется область электронной температуры T_e, где коэффициент поглощения α *уменьшается* с ростом T_e.

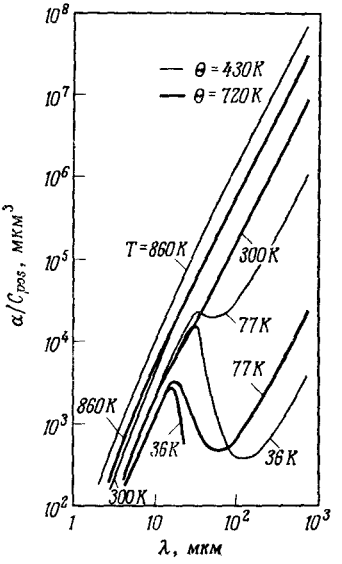
Мейер [95, 96] (см. также [97]) провел такие же расчеты для случая многодолинной модели. Гуревич и др. [98], Кёниг [99], а также Кёниг и Кранцер [100] исследовали случай полярного оптического рассеяния.

Рассеяние на ионизованных примесях исследовал Вольф [101]. Используя величину $H_{k'k}$ (6.3.13) при условии $L_D^{-1} \approx 0$

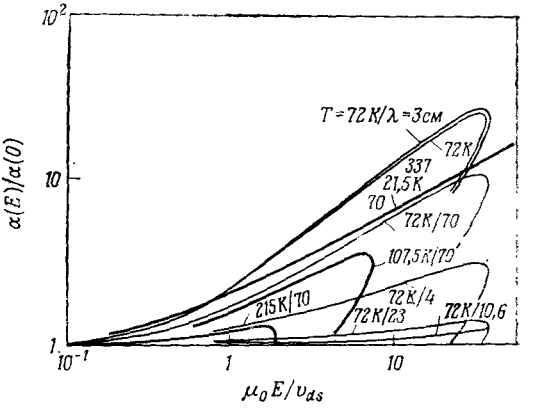
и $|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|=q$, из (11.10.18) и (11.10.21) для случая поглощения получаем

$$\alpha_a=\frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\frac{nV^{-1}Z^2e^6}{2^{3/2}3\pi^{3/2}\hbar\varkappa^2\varkappa_0^2m^{1/2}\omega^3}(k_BT_e)^{-1/2}e^zK_0(|z|), \quad (11.10.43)$$

где $z=\hbar\omega/(2k_BT_e)$. Случай индуцированного испускания получается заменой знака перед $\hbar\omega$. Как и в случае перехода от



Фиг. 11.57. То же, что на фиг. 11.53, но при полярном оптическом рассеянии носителей.



Фиг. 11.58. То же, что на фиг. 11.54, но при полярном оптическом рассеянии носителей.

(6.3.13) к (6.3.17), величину V^{-1} заменяем концентрацией примеси N_I. Тогда полный коэффициент поглощения можно записать в виде

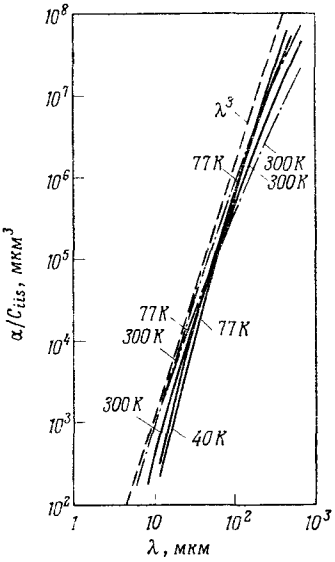
$$\alpha=\frac{\mu_0 c}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\frac{nN_IZ^2e^6}{\sqrt{2}\,3\pi^{3/2}\hbar\varkappa^2\varkappa_0^2m^{3/2}\omega^3}(k_BT_e)^{-1/2}\operatorname{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right)K_0\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_e}\right), \quad (11.10.44)$$

а сечение поглощения

$$\frac{\alpha}{n}=\frac{(3{,}88\cdot10^{-2}\text{Å})^2Z^2N_I\left(\frac{\lambda}{\text{мкм}}\right)^3\operatorname{sh}\left(\frac{7195}{(\lambda/\text{мкм})\,(T_e/\text{K})}\right)K_0\left(\frac{7195}{(\lambda/\text{мкм})\,(T_e/\text{K})}\right)}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,10^{17}\ \text{см}^{-3}\varkappa^2\,(m/m_0)^{3/2}\,(T_e/100\text{K})^{1/2}}, \quad (11.10.45)$$

где концентрация примеси N_I отнесена к значению 10^{17} см$^{-3}$. Поскольку в некомпенсированном полупроводнике в области примесной проводимости $N_I = n$, наблюдается увеличение коэффициента α пропорционально n^2, а не n, как это было в предыдущих случаях, где участвовали фононы.

Как отметил Вольф [101], для рассеяния на ионизованных примесях борновское приближение теории возмущений в некоторых случаях может оказаться непригодным. Рассматривая этот процесс как обратный процессу тормозного излучения, точное описание которого дал Зоммерфельд [103], получили различные приближения [95—97, 102]; однако необходимо еще учесть диэлектрическую проницаемость $\varkappa$ и отношение эффективных масс m/m_0 [1]). Борновское приближение пригодно при условии, что k_BT_e и $|k_BT_e \pm \hbar\omega| \gg \Delta\varepsilon_I$, где $\Delta\varepsilon_I$ — энергия ионизации. В пределе классической оптики, когда $\hbar\omega \ll \Delta\varepsilon_I$, но $k_BT_e \gg \Delta\varepsilon_I$, уравнение Зоммерфельда приводит к результату (11.10.44), где, однако,



Фиг. 11.59. То же, что на фиг. 11.53, но при рассеянии носителей на ионизованных примесях [сплошные кривые — $\mathrm{sh}\,(z)K_0(z)\lambda^3$, штрихпунктирные прямые — $(1-e^{-2z})\lambda^3$].

множитель $\mathrm{sh}\,(z)K_0(z)$ следует заменить постоянной $\pi/(2\sqrt{3}) = 0{,}907$. В промежуточном случае, когда $\hbar\omega \approx \Delta\varepsilon_I$, а $k_BT_e \ll \Delta\varepsilon_I$, необходимо заменить этот множитель единицей, тогда как при $k_BT_e \approx \Delta\varepsilon_I$ и $\hbar\omega \ll \Delta\varepsilon_I$ снова пригодно уравнение (11.10.44). На фиг. 11.59 показаны графики зависимости величин $\mathrm{sh}\,(z)K_0(z)\lambda^3$ и $(1-e^{-2z})\lambda^3$ от длины волны для $T_e = 40$, 77 и 300 К. Зависимость $\sim\lambda^3$ показана штриховой прямой. От энергии ионизации примеси зависит, какая из этих кривых применима. В квантовом пределе из борновского приближения следует $\alpha \sim \lambda^{3,5}$ независимо от температуры.

Для комбинации нескольких механизмов рассеяния коэффициенты поглощения α необходимо сложить, так как вероятности рассеяния S аддитивны, а коэффициент поглощения α

[1]) В работе [102] эти последние обстоятельства упущены из виду; основания для введения $\varkappa$ те же, что и в случае водородной модели неглубокой примеси.

пропорционален S. Это облегчает интерпретацию экспериментов по поглощению света по сравнению с экспериментами по исследованию явлений переноса, хотя в обоих случаях требуется знание сложной зависимости $T_e = T_e(E)$. Можно исследовать области зон, где $\varepsilon < \varepsilon_G$, в которые носители, по-видимому, не могут попасть в экспериментах по исследованию явлений переноса [95—97]. С другой стороны, часть спектра поглощения свободными носителями может быть перекрыта примесным, экситонным или решеточным поглощением.

Одновременное рассеяние на акустическом и оптическом деформационных потенциалах исследовалось в германии n-типа при $T = 200$ К на длине волны 10,6 мкм (излучение лазера на CO_2). Для простоты предполагалась модель сферических зон. Из уравнения баланса энергии была найдена следующая зависимость $T_e(E)$:

$$E = \frac{\left\{\left[\mu_{\text{ак}}^{-1}(T_e) + \mu_{\text{опт}}^{-1}(T_e)\right]\left[-\left\langle\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{ак}} - \left\langle\frac{d\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\text{опт}}\right]\right\}^{1/2}}{\mu_0(T)\left[\mu_{\text{ак}}^{-1}(T) + \mu_{\text{опт}}^{-1}(T)\right]}, \quad (11.10.46)$$

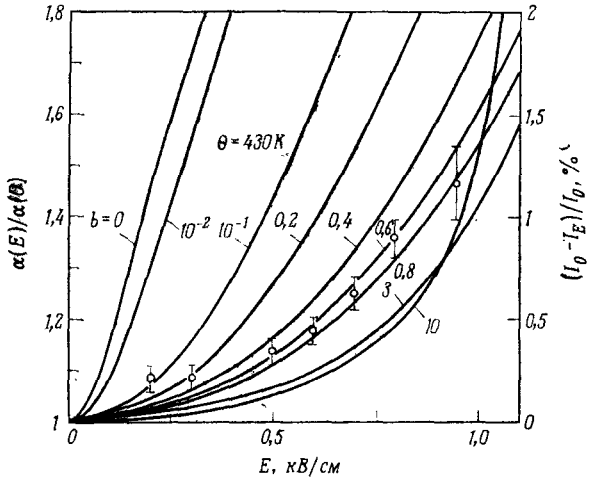
где $\mu_0(T)$ — экспериментальная подвижность в слабом электрическом поле [равная 7700 см^2/(В·с) при $T = 200$ К]; для простоты можно считать, что $\mu^{-1} \approx \mu_{\text{ак}}^{-1} + \mu_{\text{опт}}^{-1}$. В качестве параметра введено отношение $(Du_1)^2/(\varepsilon_{\text{ак}}\omega_0)^2 = b$. На фиг. 11.60 показана зависимость отношения $\alpha(E)/\alpha(0)$ от напряженности электрического поля. Для $b = 0$ получается чисто акустическое рассеяние, тогда как для $b \gg 1$ преобладает оптическое рассеяние. Экспериментальные значения, которые получил Лишка [104][1]), соответствуют $b \approx 0{,}6$. Следовательно, вклад оптических фононов в рассеяние в n-Ge незначителен, как это уже было установлено на основе гальваномагнитных эффектов (гл. 6, § 11). Поскольку концентрация носителей составляла лишь $5 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$, рассеяние на ионизованных примесях пренебрежимо мало. Для образца толщиной $d = 0{,}24$ см $\ll 1/\alpha$ отношение $\alpha(E)/\alpha(0)$ получается просто по значениям интенсивности света I_E и I_0 при наличии и в отсутствие постоянного электрического поля:

$$\frac{\alpha(E)}{\alpha(0)} = 1 + \frac{1 - r_\infty^2}{1 + r_\infty^2}\frac{I_0 - I_E}{I_0\alpha(0)\,d}. \quad (11.10.47)$$

В представленных здесь расчетах предполагалась изотропная функция распределения с электронной температурой T_e. Однако, согласно расчетам Фомина [106] и других авторов [107],

[1]) До этого сообщалось о модуляции излучения лазера на CO_2, вызванной разогревом носителей в n-Ge при комнатной температуре [105].

среднее значение множителя $(\mathbf{a}p_{k'k})^2$ в уравнении (11.9.9), а следовательно, и коэффициент поглощения в случае анизотропного распределения носителей, заданного разложением (6.9.16), даже для модели сферической зоны зависят от угла между направлением поляризации света **a** и вектором напряженности электрического поля **E**; эта зависимость определяется множителем $1+(1/5)(f_2/f_0)[3\cos^2(\mathbf{aE})-1]$, где f_2 и f_0 — коэффициенты разложения.



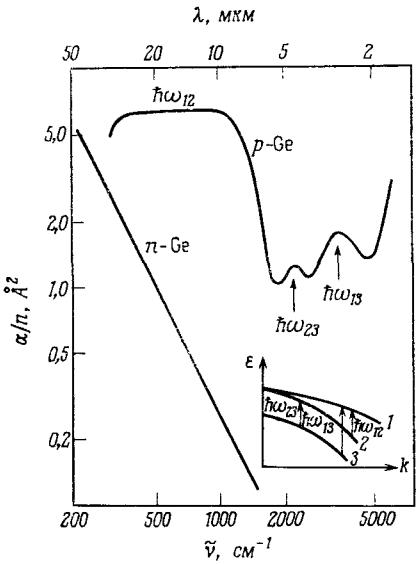
Фиг. 11.60. Зависимость относительного коэффициента поглощения света в n-Ge от напряженности электрического поля при $T = 200$ К, $\Theta = 430$ К и $\lambda = 10{,}6$ мкм при учете рассеяния носителей на акустическом и оптическом деформационных потенциалах.

Экспериментальные точки соответствуют $N_I \approx n = 5\cdot 10^{15}$ см$^{-3}$. Указаны значения параметра $b=[Du_l/(\varepsilon_{ак}\omega_0)]^2$. На вертикальной шкале справа дано относительное изменение интенсивности прошедшего света.

Для определения коэффициентов f_l ($l = 0, 1, 2, \ldots$) функции распределения горячих носителей более пригодны прямые межзонные переходы, нежели внутризонные переходы, так как последние по необходимости являются непрямыми, т. е. требуют участия фононов. Валентная зона большинства полупроводников состоит из подзон легких и тяжелых дырок, а также отщепленной подзоны, и переходы между этими подзонами почти идеально подходят для рассматриваемого случая [108—115].

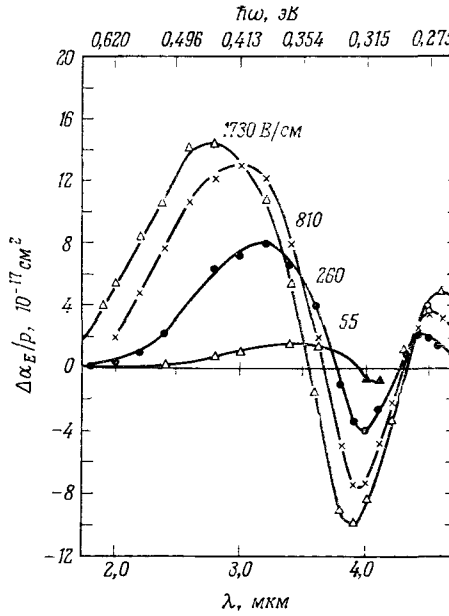
На фиг. 11.61 показаны спектры поглощения германия p-типа, а также для сравнения германия n-типа [116]. Указаны также переходы между подзонами, ответственные за наблюдаемые максимумы поглощения в p-Ge. (Стрелками указаны

переходы электронов.) Например, дырочный переход $1 \to 2$ с поглощением излучения лазера на CO_2, работающего на длине волны $\lambda = 10{,}6$ мкм (мощность в импульсе 10 кВт), преобразует тяжелую дырку в легкую, вследствие чего возрастает



Фиг. 11.61. Зависимость отношения коэффициента поглощения света свободными носителями к их концентрации в n-Ge и p-Ge при комнатной температуре (за вычетом решеточного поглощения) от волнового числа [116].

Стрелками указаны переходы между валентными подзонами: *1* — подзона тяжелых дырок; *2* — подзона легких дырок; *3* — отщепленная зона.



Фиг. 11.62. Зависимость коэффициента поглощения в p-Ge в электрическом поле, отнесенного к концентрации дырок, от энергии фотонов при $T = 77$ К [112. 113].

Указана напряженность электрического поля E в вольтах на сантиметр. Максимум при $\lambda = 3$ мкм соответствует энергии перехода $1 \to 3$, равной 0,412 эВ.

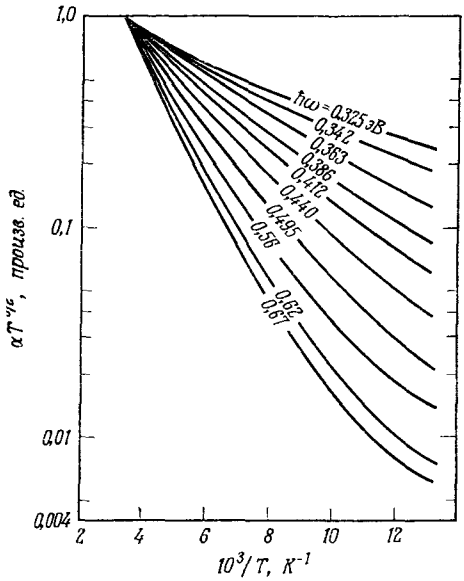
электропроводность [117]. Функция распределения тяжелых дырок была определена по переходам $1 \to 3$ при малых интенсивностях света.

На фиг. 11.62 показаны экспериментальные зависимости изменения сечения поглощения $[\alpha(E) - \alpha(0)]/p$, обозначенного $\Delta\alpha_E/p$, от длины волны λ при заданном значении температуры решетки $T = 77$ К, но при различных значениях напряженности электрического поля $\mathbf{E} \| \langle 111 \rangle$ и волнового вектора фотонов $\mathbf{q}$. На фиг. 11.63 показана зависимость произведения $\alpha T^{3/2}$ от $10^3/T$ в логарифмическом масштабе при различных энергиях фотонов

в области этих переходов. По наклону линейных участков кривых была определена энергия ε тяжелых дырок как функция $\hbar\omega$ исходя из соотношения

$$\alpha(0) \sim \left(\frac{p}{N_v}\right) g(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \sim T^{-3/2}\varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right), \quad (11.10.48)$$

где $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ — плотность состояний в зоне тяжелых дырок. Предполагая, что коэффициент пропорциональности в зависимости $\alpha(E)$ остается неизменным, а меняется только функция



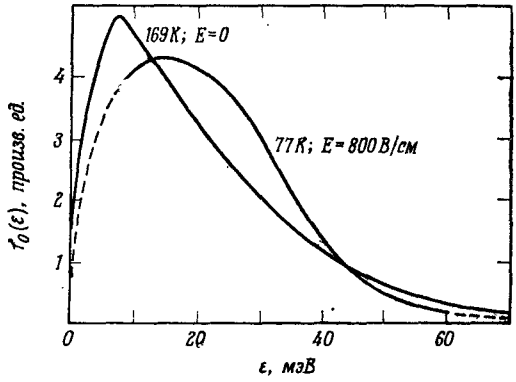
Фиг. 11.63. Зависимость произведения величины $T^{3/2}$ на коэффициент поглощения α, нормированный на единицу при $T = 300$ К, от обратной температуры [112, 113]

Указаны значения энергии фотонов, которые взяты вблизи значения 0,412 эВ, соответствующего переходу $1 \to 3$ в p-Ge.

$f(\varepsilon)$, можно определить эту функцию путем сравнения обоих экспериментов в интервале энергий $0{,}015 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}06$ эВ [112—114]. Вне этого интервала можно провести экстраполяцию.

На фиг. 11.64 показана симметричная часть $f_0(\varepsilon)$ функции распределения, полученная таким путем при $T = 77$ К и напряженности поля 800 В/см, а также функция распределения Максвелла — Больцмана с такой температурой носителей (равной 169 К), при которой средняя энергия носителей та же, что и для функции $f_0(\varepsilon)$. Как упоминалось в гл. 8, § 4, функция $f_0(\varepsilon)$

отличается от максвелловской, что указывает на уменьшение числа тяжелых дырок с энергией выше энергии оптического фонона 0,037 эВ и увеличение числа дырок с энергией ниже этого значения. Путем определения отношения коэффициентов поглощения, соответствующих поляризациям света $\mathbf{a} \parallel \mathbf{E}$ и $\mathbf{a} \perp \mathbf{E}$ (причем $\mathbf{q} \perp \mathbf{E}$), была определена анизотропия функции распределения $f_2(\varepsilon)/f_0(\varepsilon)$. На фиг. 11.65 показано это отношение как функция энергии при различных напряженностях электрического поля. Оно зависит от энергии и увеличивается до значения ~ 1. Как упоминалось в гл. 8, § 4, это указывает на эффект



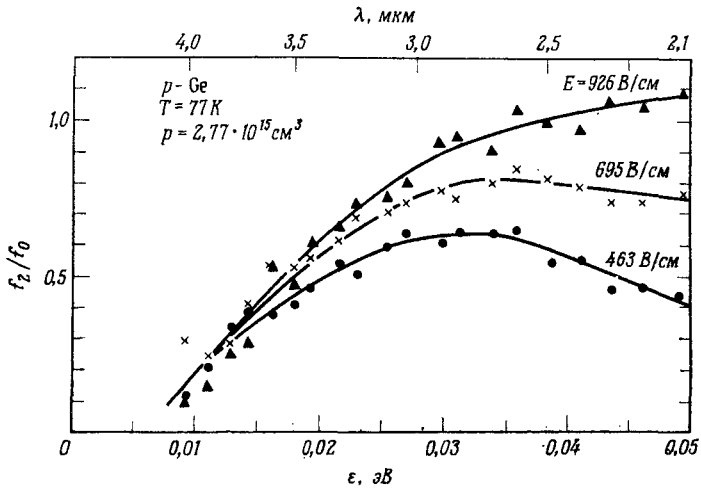
Фиг. 11.64. Симметричная часть функции распределения тяжелых дырок в германии, измеренная по поглощению света [112, 113].
Для сравнения показана функция распределения Максвелла—Больцмана, соответствующая тому же среднему значению энергии.

циклического течения, который вызван действием электрического поля на движение тяжелых дырок в **k**-пространстве.

Бад [118] получил теоретически функции $f_0(\varepsilon)$ и $f_2(\varepsilon)/f_0(\varepsilon)$. В области энергий $\varepsilon < \hbar\omega_0$ функцию $f_0(\varepsilon)$ можно аппроксимировать распределением Максвелла — Больцмана с электронной температурой T_{e1}, а в области $\varepsilon > \hbar\omega_0$ — такой же функцией с температурой $T_{e2} < T_{e1}$ [115, 118]. Христенсен [115] наблюдал изменение этой функции распределения, вызванное одноосным давлением. Средняя энергия носителей возрастает с давлением и почти насыщается в области давлений, где вызванное деформацией расщепление двух уровней $p_{3/2}$ достигает энергии оптического фонона $\hbar\omega_0$. В некоторых многодолинных полупроводниках наблюдалась структура в спектре поглощения, которая может быть обусловлена переходами между эквивалентными долинами.

На фиг. 11.66 показан спектр поглощения фосфида галлия n-типа, имеющий максимум при $\lambda = 3$ мкм [104, 105]. В GaP_xAs_{1-x} его положение почти не зависит от состава x при $x \lesssim 1$. Подобные максимумы были обнаружены в n-GaAs [120, 121] и n-AlSb [122]. Поглощение свободными дырками в GaAs (фиг. 11.67) также было объяснено межзонными переходами.

Наконец, рассмотрим случай большой концентрации носителей n, когда показатель преломления $\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}$ не постоянен,

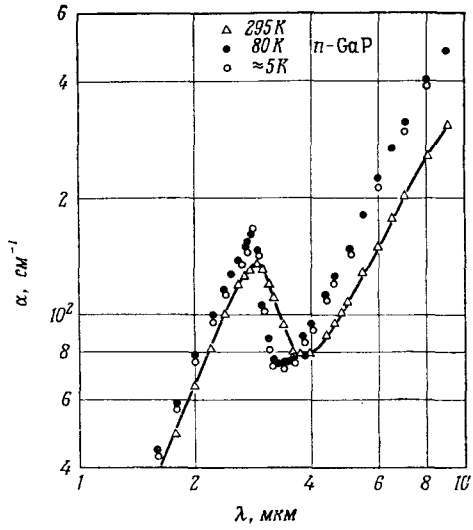


Фиг. 11.65. Отношение f_2/f_0 коэффициентов разложения функции распределения $f(\varepsilon)$ по полиномам Лежандра, полученное для тяжелых дырок в p-Ge при $T = 77$ К для различных напряженностей электрического поля [112, 113].

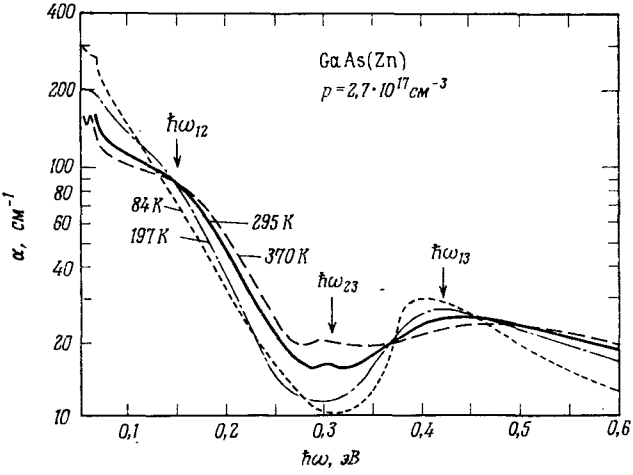
как это предполагалось до сих пор. Из (11.10.1) получаем вклад свободных носителей в действительную часть диэлектрической проницаемости:

$$\Delta\varkappa_r = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \approx -\frac{ne^2}{m\varkappa_0\omega^2}. \qquad (11.10.49)$$

Приближение справедливо при слабом затухании. Так как газ носителей заряда в области рассматриваемых здесь больших концентраций вырожден, то отношение n/m необходимо заменить выражением $[1/(4\pi^3)]\langle v\rangle S/(3\hbar)$, где S — площадь поверхности Ферми, $\langle v\rangle$ — усредненная по поверхности Ферми скорость носителей заряда [125]. При малых значениях показателя поглощения коэффициент отражения r_∞ становится равным $(\sqrt{\varkappa_r} - 1)^2/(\sqrt{\varkappa_r} + 1)^2$; он может быть весьма близким к единице, если вклад решетки в $\varkappa_r$ компенсируется отрицательным

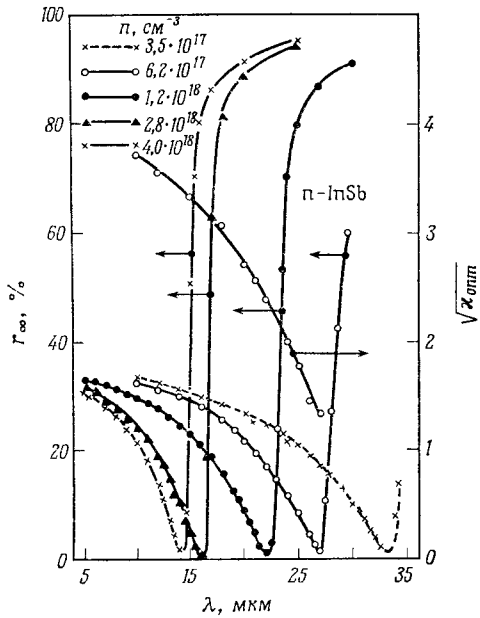


Фиг. 11.66. Спектр поглощения света свободными носителями в фосфиде галлия n-типа с концентрацией электронов $1 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ [119].



Фиг. 11.67. Спектры поглощения света свободными дырками в p-GaAs при различных температурах и объяснение максимумов наличием переходов, указанных на фиг. 11.61 [123].

вкладом носителей, в результате чего $\varkappa_r \approx 0$. При несколько другой частоте вклад носителей уже может стать достаточным для того, чтобы величина $\varkappa_r$ стала равной единице, а коэффициент отражения — почти равным нулю. Результаты экспери-



Фиг 11.68. Спектры отражения пяти образцов n-InSb при $T = 295$ K [125]
Показатель преломления $\varkappa_{\text{опт}}^{1/2}$ относится к образцу с концентрацией электронов $n = 6{,}2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$.

мента согласуются с этими предсказаниями [125] (фиг. 11.68). Минимум вблизи плазменной частоты

$$\tilde{\omega}_p = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varkappa_0\varkappa_{\text{опт}}}} \qquad (11.10.50)$$

был использован для определения эффективной массы m. По данным фиг. 11.68 найдено, что с увеличением концентрации носителей в n-InSb эффективная масса возрастает от 0,023 m_0 до 0,041 m_0. В GaAs n-типа найдены значения от 0,078 m_0 при $n = 0{,}49 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ до 0,089 m_0 при $n = 5{,}4 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ [104, 105]. В обоих случаях увеличение эффективной массы с ростом энергии Ферми обусловлено непараболичностью зоны проводимости.

Приближение слабого затухания $\omega\tau_m \gg 1$ (т. е. длина волны в вакууме $\lambda \ll 185{,}9$ мкм $\cdot \tau_m/10^{-13}$ с) применимо для большинства полупроводников в далекой инфракрасной области спектра.

§ 11. Циклотронный резонанс

Если носитель заряда движется под углом к направлению вектора постоянной магнитной индукции **B**, то его траектория представляет собой спираль вокруг направления поля, а круговая частота вращения, называемая циклотронной частотой, определяется по формуле [1])

$$\omega_c = 28{,}0 \cdot 2\pi \frac{m_0}{m} B \text{ ГГц}; \qquad (11.11.1)$$

соответствующая длина волны в вакууме

$$\lambda_c = 1{,}056 \frac{m}{m_0} B^{-1} \text{ см}, \qquad (11.11.2)$$

где B — магнитная индукция в тесла (Т). Если эффективная масса $m \approx m_0$, а магнитная индукция составляет несколько десятых тесла, то длина волны соответствует сверхвысокочастотному диапазону. Волна сверхвысокой частоты, падающая на образец и поляризованная под углом к **B**, испытывает поглощение с максимумом на частоте $\omega = \omega_c$. Это явление называется циклотронным резонансом (см. обзор [126]). По циклотронному резонансу можно определить значение эффективной массы m (11.11.1). Как и при любом резонансе, пик поглощения не наблюдается, если затухание велико, т. е. если большинство носителей испытывает соударение, прежде чем повернет на угол хотя бы в один радиан. Так как число соударений в единицу времени равно $1/\tau_m$, условие резонанса имеет вид

$$\omega_c > \frac{1}{\tau_m}. \qquad (11.11.3)$$

Это условие налагает строгое ограничение на возможность наблюдения циклотронного резонанса в диапазоне СВЧ: τ_m должно быть больше 10^{-10} с. Это достигается только при температуре жидкого гелия и лишь в некоторых полупроводниках достаточно высокой чистоты, такой, чтобы можно было пренебречь рассеянием на ионизованных и нейтральных примесях, доминирующим при такой низкой температуре.

---

[1]) Для численных расчетов полезно напомнить, что $1\text{Т} = 1$ Вб/м^2 $=$ $= 10$ кГс. В магнитном поле Земли частота циклотронного резонанса свободного электрона порядка 1 МГц.

Другой метод наблюдения основан на применении инфракрасного излучения вместо излучения СВЧ, а также сильного магнитного поля, которое можно создать либо в импульсном режиме (приблизительно до 100 Т), либо с помощью сверхпроводящего магнита (до 12 Т). В этом случае условие резонанса можно выполнить даже при комнатной температуре ($\tau_m = 10^{-13}$ с, что при длине волны $\lambda_c = 185{,}9$ мкм и $B \leqslant 30$ Т требует выполнения условия $m/m_0 \leqslant 0{,}52$). Поскольку с импульсными магнитами трудно работать вследствие потерь на индукцию, циклотронный резонанс в инфракрасном диапазоне при комнатной температуре позволяет измерить эффективную массу носителей, не превышающую $0{,}2m_0$. В требуемых сильных магнитных полях необходимо учитывать спиновое расщепление уровней и правило отбора для квантового числа $\Delta M = 0$ для линейно поляризованного поля в геометрии Фарадея (§ 12). В непараболичных зонах эффективная масса m зависит от магнитной индукции B, поскольку для циклотронного резонанса в инфракрасном диапазоне требуется сильное магнитное поле. Это другая трудность такого рода измерений.

В гл. 9, § 2, было показано, что при температуре T, где $k_B T < \hbar\omega_c$, наблюдается квантование в магнитном поле. При температурах ниже 77 К и $\omega_c \approx 10^{13}$ с$^{-1}$ это условие выполняется. В этом случае циклотронный резонанс можно рассматривать как переход между соседними уровнями Ландау.

Рассмотрим упрощенную модель циклотронного резонанса, основанную на уравнении движения носителя в переменном электрическом и постоянном магнитном полях и не учитывающую распределение носителей по энергиям:

$$\frac{d(m\mathbf{v}_d)}{dt} + \frac{m\mathbf{v}_d}{\tau_m} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_d\mathbf{B}]). \qquad (11.11.4)$$

Введем прямоугольную систему координат и в качестве оси z выберем направление вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. Выражение eB/m обозначим символом ω_c. Если $\mathbf{E} \sim \exp(i\omega t)$ и $ne\mathbf{v}_d = \sigma\mathbf{E}$, то для компонент тензора σ получаем

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0\tau_m^{-1}\frac{\tau_m^{-1} + i\omega}{(\tau_m^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}, \qquad (11.11.5)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \sigma_0\tau_m^{-1}\frac{\omega_c}{(\tau_m^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2}, \qquad (11.11.6)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_0\tau_m^{-1}}{\tau_m^{-1} + i\omega}, \qquad (11.11.7)$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau_m/m$ [в случае $\omega = 0$ см. (4.3.39) и (4.3.42)]. Рассмотрим волну с правой круговой поляризацией, для которой

$E_y = -iE_x$, и введем для нее эффективную электропроводность

$$\sigma_+ = \frac{j_x}{E_x} = \sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}E_y}{E_x} = \sigma_0\tau_m^{-1}\frac{\tau_m^{-1} + i\omega - i\omega_c}{(\tau_m^{-1} + i\omega)^2 + \omega_c^2} =$$

$$= \frac{\sigma_0\tau_m^{-1}}{\tau_m^{-1} + i(\omega + \omega_c)}. \quad (11.11.8)$$

Аналогично этому для левой круговой поляризации получаем

$$\sigma_- = \frac{\sigma_0\tau_m^{-1}}{\tau_m^{-1} + i(\omega - \omega_c)}. \quad (11.11.9)$$

Рассмотрим здесь только геометрию Фарадея, к которой электрическое поле поперечной электромагнитной волны перпендикулярно постоянной магнитной индукции $\mathbf{B}$. Мощность, поглощенная носителями, определяется выражением

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(jE^*), \quad (11.11.10)$$

где $\mathbf{E}^*$ — величина, комплексно сопряженная напряженности электрического поля E. Для волн каждой поляризации получаем

$$P_\pm = \frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2\operatorname{Re}\frac{\sigma_0\tau_m^{-1}}{\tau_m^{-1} + i(\omega \pm \omega_c)} = \frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2\frac{\sigma_0\tau_m^{-2}}{\tau_m^{-2} + (\omega \pm \omega_c)^2}. \quad (11.11.11)$$

Для линейно поляризованной волны, которую можно рассматривать как суперпозицию двух волн круговой поляризации, поля которых вращаются в противоположных направлениях, получаем

$$P(\omega) = P_+ + P_- =$$

$$= \frac{\sigma_0}{2}|\mathbf{E}|^2\left[\frac{1}{1 + (\omega + \omega_c)^2\tau_m^2} + \frac{1}{1 + (\omega - \omega_c)^2\tau_m^2}\right] =$$

$$= \sigma_0|\mathbf{E}|^2\frac{1 + (\omega^2 + \omega_c^2)\tau_m^2}{[1 + (\omega^2 - \omega_c^2)\tau_m^2]^2 + 4\omega_c^2\tau_m^2}. \quad (11.11.12)$$

При циклотронном резонансе, когда $\omega = \omega_c$, принимая $\omega_c\tau_m \gg \gg 1$, получаем

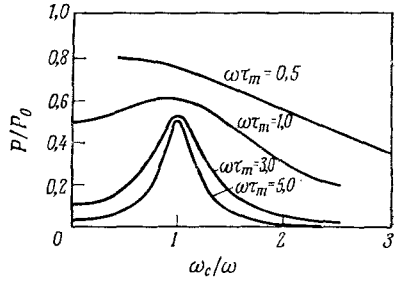
$$P(\omega_c) = \frac{1}{2}\sigma_0|\mathbf{E}|^2. \quad (11.11.13)$$

В этом случае электропроводности σ_+ для электронов ($\omega_c < 0$) и σ_- для дырок ($\omega_c > 0$), данные уравнениями (11.11.8) и

(11.11.9), равны электропроводности на постоянном токе σ_0, тогда как вне резонанса они меньше σ_0. На низких частотах поглощенная носителями мощность

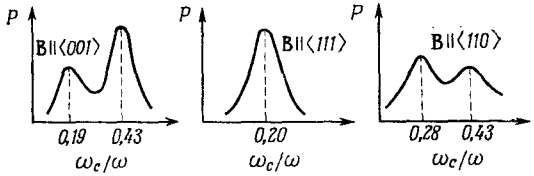
$$P(0) = \frac{\sigma_0 |\mathbf{E}|^2}{1 + (\omega_c \tau_m)^2}. \qquad (11.11.14)$$

Это значение совпадает с $\sigma|\mathbf{E}|^2$, где σ имеет вид (4.3.44), причем в данном приближении пренебрегается распределением носителей по энергиям.



Фиг. 11.69. Зависимость поглощенной СВЧ-мощности от отношения $\omega_c/\omega \sim B$ (ω_c — циклотронная частота) [127].

На фиг. 11.69 показана зависимость отношения P/P_0 от ω_c/ω, где $P_0 = \sigma_0|\mathbf{E}|^2$. Так как в эксперименте частота обычно постоянна, а изменяется магнитное поле, вполне естественно взять отношение ω_c/ω в качестве независимой переменной. Очевидно, резонанс исчезает при $\omega\tau_m < 1$.



Фиг. 11.70. Зависимость поглощенной мощности СВЧ волн частоты 23 ГГц в кремнии n-типа от отношения ω_c/ω для трех различных направлений магнитного поля [127].

Экспериментальные данные, полученные для кремния n-типа при $T = 4{,}2$ К, показаны на фиг. 11.70 [127]. Когда магнитная индукция $\mathbf{B}$ параллельна кристаллографическому направлению ⟨111⟩, имеется один резонанс; в случаях направлений ⟨001⟩ и ⟨110⟩ имеются два резонанса. Это объясняется многодолинной моделью зоны проводимости, которая рассматривалась в гл. 7. Поскольку в направлении ⟨111⟩ имеется только один пик, эллипсоиды энергии должны быть локализованы вдоль осей ⟨100⟩, так как при этом они эквивалентны по отношению к направлению магнитной индукции.

Чтобы объяснить фиг. 11.70, решим уравнение (11.11.4), принимая, что эффективная масса m — тензор диагональный в избранной нами системе координат. При резонансе, когда $\omega = \omega_c$, для упрощения можно пренебречь величинами $\mathbf{E}$ и τ_m^{-1}, тогда получаем

$$\begin{aligned} i\omega_c m_x v_x + e(v_z B_y - v_y B_z) &= 0, \\ i\omega_c m_y v_y + e(v_x B_z - v_z B_x) &= 0, \\ i\omega_c m_z v_z + e(v_y B_x - v_x B_y) &= 0. \end{aligned} \tag{11.11.15}$$

Направляющие косинусы вектора $\mathbf{B}$ обозначим буквами α, β и γ. Вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} i\omega_c m_x & -eB\gamma & eB\beta \\ eB\gamma & i\omega_c m_y & -eB\alpha \\ -eB\beta & eB\alpha & i\omega_c m_z \end{vmatrix} = 0 \tag{11.11.16}$$

имеет следующее решение:

$$\omega_c = eB\sqrt{\frac{\alpha^2 m_x + \beta^2 m_y + \gamma^2 m_z}{m_x m_y m_z}}. \tag{11.11.17}$$

Используя равенство $\omega_c = eB/m$, можно определить эффективную массу m:

$$m = \sqrt{\frac{m_x m_y m_z}{\alpha^2 m_x + \beta^2 m_y + \gamma^2 m_z}}. \tag{11.11.18}$$

Если возьмем долину в направлении $\langle 001 \rangle$ ($m_x = m_y = m_t = m_l/K$, $m_z = m_l$), то для вектора $\mathbf{B}$ в плоскости $(1\bar{1}0)$ при $\alpha = \beta = (\sin\theta)/\sqrt{2}$ и $\gamma = \cos\theta$ получаем

$$m = \frac{m_t}{\sqrt{K^2\cos^2\theta + K\sin^2\theta}}. \tag{11.11.19}$$

Электроны в долинах $\langle 100 \rangle$ и $\langle 010 \rangle$ имеют одинаковую эффективную массу, поскольку эти долины симметричны относительно плоскости $(1\bar{1}0)$:

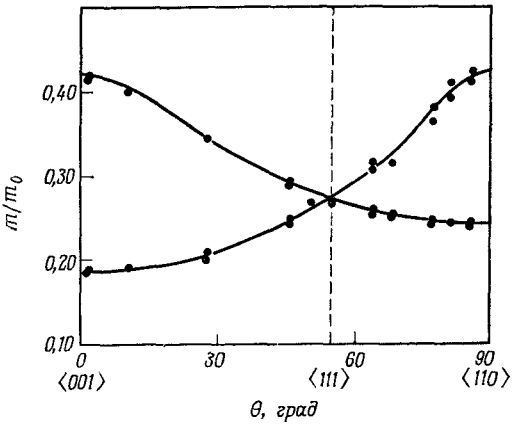
$$m = \frac{m_t}{\sqrt{K\cos^2\theta + {}^1/_2 K(K+1)\sin^2\theta}}. \tag{11.11.20}$$

Для направления $\langle 111 \rangle$ $\left(\alpha = \beta = \gamma = 1/\sqrt{3}\right)$ из (11.11.19) и (11.11.20) получаем

$$m = \frac{m_t}{\sqrt{K(K+2)/3}}. \tag{11.11.21}$$

На фиг. 11.71 показаны рассчитанные по формулам (11.11.19) и (11.11.20) кривые, подогнанные к результатам эксперимента путем подбора эффективных масс $m_l/m_0 = 0{,}90 \pm \pm 0{,}02$ и $m_t/m_0 = m_l/(Km_0) = 0{,}192 \pm 0{,}001$. Для любого на-

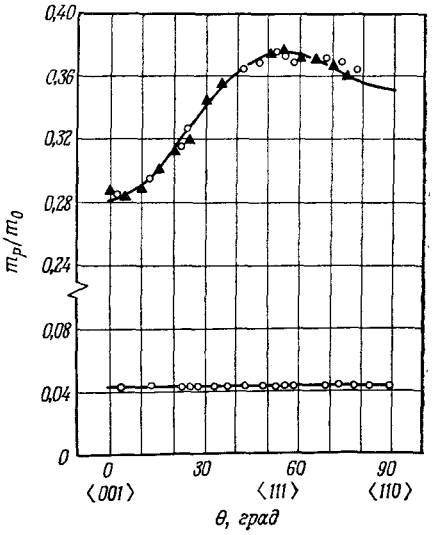
правления вектора **B**, не принадлежащего плоскости $(1\bar{1}0)$, имеются три резонансные частоты [128].



Фиг. 11.71. Зависимость эффективной циклотронной массы электронов в кремнии от угла между направлением магнитной индукции и осью ⟨001⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$ при $T = 4$ К [128].

В n-Ge, где имеются четыре эллипсоида на оси ⟨111⟩ и эквивалентных осях, в общем случае могут быть три резонансные частоты, если вектор **B** находится в плоскости $(1\bar{1}0)$, и четыре резонансные частоты в других направлениях. Анализ результатов эксперимента [127] приводит к значениям $m_l/m_0 = 1{,}64 \pm 0{,}03$ и $m_t/m_0 = (8{,}19 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-2}$.

На фиг. 11.72 показаны результаты наблюдений циклотронного резонанса в



Фиг. 11.72. Зависимость эффективной циклотронной массы дырок в p-Ge от угла между направлением магнитной индукции и осью ⟨001⟩ в плоскости $(1\bar{1}0)$ при $T = 4$ К [129].

p-Ge [129]. Две кривые соответствуют двум эффективным массам. Эффективная масса легких дырок, изотропная в плоскости

$(1\bar{1}0)$, имеет значение $0{,}043m_0$, тогда как масса тяжелых дырок меняется от $0{,}28m_0$ до $0{,}38m_0$ в зависимости от угла θ. Различные эффективные массы рассмотрены подробно в гл. 8 на основе модели гофрированных сферических зон. Циклотронную эффективную массу можно рассчитать по методу Шокли [130], сущность которого состоит в интегрировании уравнения движения

$$\frac{d(\hbar\mathbf{k})}{dt} = \frac{e}{\hbar}[\nabla_{\mathbf{k}}\varepsilon\mathbf{B}] \qquad (11.11.22)$$

(пренебрегая величинами $\mathbf{E}$ и $1/\tau_m$ при резонансе) в цилиндрической системе координат с осью z, параллельной вектору $\mathbf{B}$:

$$\hbar\frac{dk_\varphi}{dt} = \hbar k\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\hbar}B\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}. \qquad (11.11.23)$$

Это дает

$$\frac{\hbar^2}{2\pi}\oint\frac{k\,d\varphi}{\partial\varepsilon/\partial k} = m\omega_c\frac{1}{2\pi}\oint dt = m. \qquad (11.11.24)$$

Интеграл берется по изоэнергетической поверхности в $\mathbf{k}$-пространстве. Аппроксимируя зависимость $\varepsilon(\mathbf{k})$ выражением (8.1.14) и направляя вектор $\mathbf{B}$ параллельно плоскости $(1\bar{1}0)$, получаем

$$\frac{m_\pm}{m_0} = (A_0 \pm B_0')^{-1}\left[1 + \frac{1}{32}(1 - 3\cos^2\theta)^2\Gamma + \ldots\right], \qquad (11.11.25)$$

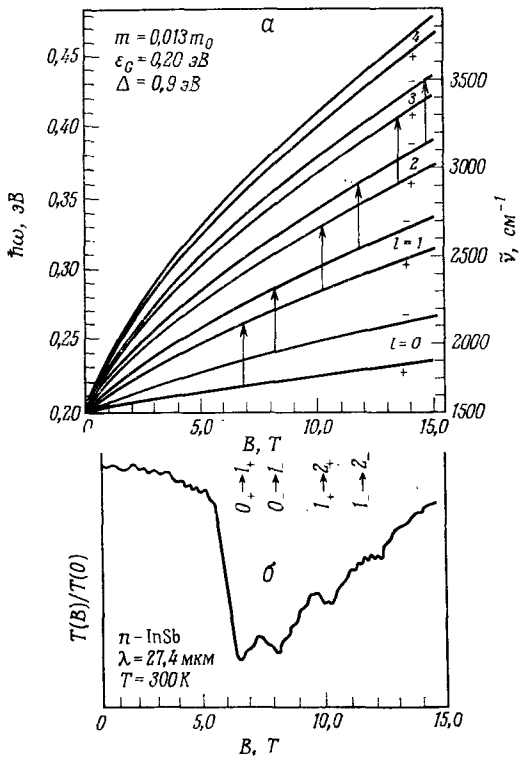
где индексы $+$ и $-$ относятся к легким и тяжелым дыркам, как в гл. 8,

$$B_0' = \sqrt{B_0^2 + \frac{1}{4}C_0^2}, \qquad \Gamma = \mp\frac{C_0^2}{2B_0'(A_0 \pm B_0')}. \qquad (11.11.26)$$

Циклотронная эффективная масса тяжелых дырок в германии получается путем подгонки выражения (11.11.25) со знаком минус к экспериментальному значению $0{,}3m_0$. Эффективная масса в отщепленной валентной зоне составляет $0{,}075m_0$.

Результаты измерений циклотронного резонанса в n-InSb при комнатной температуре на длине волны 27,4 мкм показаны на фиг. 11.73 [131]. В верхней части фиг. 11.73 показана зависимость уровней Ландау от магнитной индукции $\mathbf{B}$ с учетом спинового расщепления. Чтобы получить хорошее согласие с экспериментальными данными, необходимо принять, что $\varepsilon_G = 0{,}20$ эВ, тогда как оптическая запрещенная зона при комнатной температуре составляет лишь 0,18 эВ. Эффективная

масса при комнатной температуре равна $0{,}013m_0$. При $T = 77$ К получены значения $m = 0{,}0145m_0$ и $\varepsilon_G = 0{,}225$ эВ. Изменение эффективной массы с температурой обусловлено температурной



Фиг. 11.73. *а* — зависимость энергии уровней Ландау в зоне проводимости InSb (в точке $k_z = 0$) от магнитной индукции при комнатной температуре и разрешенные переходы при циклотронном резонансе; *б* — экспериментальная кривая циклотронного поглощения в InSb *n*-типа [131].

зависимостью ширины запрещенной зоны ε_G; оно было объяснено Кейном (гл. 8). Измерения циклотронного резонанса в инфракрасном диапазоне выполнены также на *n*-InAs, *n*-InP и *n*-GaAs [132].

Спиновый резонанс электронов в зоне проводимости относится к магнитным дипольным переходам, и поэтому он слабо выражен по сравнению с циклотронным резонансом, который связан с электрическими дипольными переходами. Тем не менее этим способом было определено, что множитель Ланде в *n*-InSb имеет большое отрицательное значение [133] (гл. 11, § 4).

§ 12. Магнитооптические эффекты, обусловленные свободными носителями

Для плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \exp(i\omega t - i\mathbf{qr}), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \exp(i\omega t - i\mathbf{qr}) \quad (11.12.1)$$

в немагнитном проводнике уравнения Максвелла можно записать в виде

$$[\nabla \mathbf{E}] = -i[\mathbf{qE}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{B}, \quad (11.12.2)$$

$$\frac{[\Delta \mathbf{B}]}{\mu_0} = -\frac{i[\mathbf{qB}]}{\mu_0} = \varkappa\varkappa_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} = i\omega\varkappa\varkappa_0\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}, \quad (11.12.3)$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость на частоте ω (не статическая диэлектрическая проницаемость). После исключения $\mathbf{B}$ получаем

$$\left(q^2 - \frac{\varkappa\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega\sigma\right)\mathbf{E} = (\mathbf{qE})\mathbf{q}, \quad (11.12.4)$$

где c — скорость света в вакууме.

Приложим постоянное магнитное поле вдоль оси z и введем циклотронную частоту ω_c в этом поле согласно (11.11.1) [1]). Тензор электропроводности задан уравнениями (11.11.5)—(11.11.7). Поскольку z-составляющая этого тензора не зависит от магнитного поля, она не будет нас здесь интересовать, и мы положим $E_z = 0$.

Рассмотрим сначала геометрию Фарадея, в которой волна распространяется в направлении постоянной магнитной индукции, т. е. $q_x = q_y = 0$, и поэтому $(\mathbf{qE}) = 0$. В этом случае правая часть (11.12.4) равна нулю. Запишем это уравнение для проекций на оси x и y:

$$\left(q^2 - \frac{\varkappa\omega^2}{c^2}\right)E_x + i\mu_0\omega(\sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y) = 0, \quad (11.12.5)$$

$$\left(q^2 - \frac{\varkappa\omega^2}{c^2}\right)E_y + i\mu_0\omega(-\sigma_{xy}E_x + \sigma_{xx}E_y) = 0. \quad (11.12.6)$$

Это система однородных уравнений для E_x и E_y. Она имеет решение, если ее определитель равен нулю:

$$\left(q^2 - \frac{\varkappa\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega\sigma_{xx}\right)^2 + (i\mu_0\omega\sigma_{xy})^2 = 0. \quad (11.12.7)$$

Отсюда получаем для q^2 два решения:

$$q_{\mp}^2 = \frac{\varkappa\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\sigma_{xx} \pm \mu_0\omega\sigma_{xy}. \quad (11.12.8)$$

[1]) Постоянное магнитное поле не следует путать с переменным магнитным полем, определяемым уравнением (11.12.1).

Вводя, согласно (11.11.8) и (11.11.9), эффективную электропроводность

$$\sigma_{\pm} = \sigma_{xx} \mp i\sigma_{xy} \tag{11.12.9}$$

для правой и левой круговой поляризации соответственно, получаем уравнение дисперсии в геометрии Фарадея:

$$\frac{c^2 q_{\mp}^2}{\omega^2} = \varkappa - i\left(\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\right)\sigma_{\mp} = \varkappa - \frac{i\left(\mu_0 c^2\right)\sigma_0 (\omega\tau_m)^{-1}}{\tau_m^{-1} + i(\omega \mp \omega_c)}. \tag{11.12.10}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой квадрат показателя преломления; он зависит от направления поляризации. Если показатель преломления равен нулю, $n = cq/\omega = 0$, то происходит полное отражение (приложение 4). Это так называемое «плазменное отражение» возникает на частоте, определяемой уравнениями (11.12.10), (11.11.8) и (11.11.9):

$$0 = \varkappa - i\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\frac{\sigma_0 \tau_m^{-1}}{\tau_m^{-1} + i(\omega \mp \omega_c)}. \tag{11.12.11}$$

Введем плазменную частоту, определенную выражением (11.10.50):

$$\bar{\omega}_p = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varkappa}} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varkappa\varkappa_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \sigma_0}{\varkappa\tau_m}}, \tag{11.12.12}$$

и решим (11.12.11) относительно ω, полагая $\tau_m^{-1} \ll |\omega \mp \omega_c|$; мы получим

$$\omega = \bar{\omega}_p\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{2\bar{\omega}_p}\right)^2} \pm \frac{\omega_c}{2\bar{\omega}_p}\right]. \tag{11.12.13}$$

В слабых магнитных полях $\sqrt{1 + [\omega_c/(2\bar{\omega}_p)]^2} \approx 1 + (1/2)[\omega_c/(2\bar{\omega}_p)]^2$, и для $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}_p$ получаем

$$\Delta\omega = \pm\frac{1}{2}\omega_c + \frac{1}{8}\frac{\omega_c^2}{\bar{\omega}_p}. \tag{11.12.14}$$

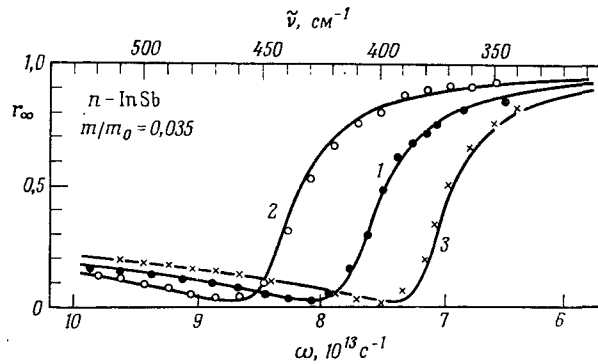
В первом приближении происходит линейный сдвиг края плазменного отражения в магнитном поле. На фиг. 11.74 показаны экспериментальные зависимости коэффициента отражения n-InSb при комнатной температуре для правой и левой круговой поляризации [134]. Кривая для $B = 0$ подобна кривым на фиг. 11.68. Концентрация электронов равна $1{,}03 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$. Магнитная индукция $B = 2{,}54$ Т дает сдвиг $\Delta\omega = 0{,}65 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$. В приближении слабого поля магнитоплазменный сдвиг равен половине циклотронной частоты. Отсюда можно получить отношение эффективной массы к массе свободного электрона:

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{e}{m_0}\right)\frac{B}{2\,\Delta\omega} = 0{,}035. \tag{11.12.15}$$

Наблюдаемую частотную зависимость можно сравнить с (11.12.10). Это сравнение позволяет определить значение времени релаксации импульса $\tau_m = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ с. На фиг. 11.74 видно, что при $B = 0$ плазменная частота $\tilde{\omega}_p = 7{,}5 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, поэтому условие $(\tilde{\omega}_p \tau_m)^2 \gg 1$ выполняется $(\tilde{\omega}_p \tau_m = 22{,}5)$. Это условие можно переписать в виде

$$\varkappa \left(\frac{\rho}{\text{Ом} \cdot \text{см}} \right) \ll \frac{\tau_m}{10^{-13}\ \text{с}}, \qquad (11.12.16)$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость, ρ — удельное сопротивление. Случай сильных магнитных полей, когда возбуждаются магнитоплазменные волны, рассматривается в § 14 данной главы.



Фиг. 11.74. Кривые плазменного отражения света круговой поляризации от n-InSb в геометрии Фарадея при комнатной температуре [134].

Сплошные линии — теория; точки — эксперимент: *1* — при $B = 0$; *2* — левая круговая поляризация, $B = 2{,}54$ Т; *3* — правая круговая поляризация, $B = 2{,}54$ Т.

Из уравнения (11.12.10) следует, что фазовые скорости волн левой и правой круговой поляризации в магнитном поле различны. Линейно поляризованную волну можно рассматривать как суперпозицию двух волн круговой поляризации. После прохождения через образец толщины d вновь получается линейно поляризованная волна, причем плоскость поляризации оказывается повернутой на угол θ_F относительно начального положения. Это вращение плоскости поляризации называется эффектом Фарадея. Угол θ_F равен среднему значению углов поворота векторов поля обеих круговых волн θ_+ и θ_-, как показано на фиг. 11.75:

$$\theta_F = \frac{1}{2}(\theta_+ - \theta_-) = \frac{1}{2}(q_+ - q_-)\, d, \qquad (11.12.17)$$

где d — толщина образца.

Из (11.12.10) для угла фарадеевского вращения получаем

$$\theta_F = \frac{\omega}{2c}\left[\sqrt{\varkappa - i\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\sigma_+} - \sqrt{\varkappa - i\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\sigma_-}\right]d. \quad (11.12.18)$$

Вводя плазменную частоту (11.12.12) и полагая $\tau_m^{-1} \ll |\omega \pm \omega_c|$, находим

$$\sqrt{\varkappa - i\left(\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\right)\sigma_\pm} = \sqrt{\varkappa}\sqrt{1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}} =$$

$$= \sqrt{\varkappa}\sqrt{1 - \frac{\bar{\omega}_p^2(\omega \mp \omega_c)}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}}. \quad (11.12.19)$$

В случае $\bar{\omega}_p^2 \ll \omega(\omega \pm \omega_c)$ корень можно разложить в ряд:

$$\sqrt{\varkappa - i\left(\frac{\mu_0 c^2}{\omega}\right)\sigma_\pm} = \sqrt{\varkappa}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \pm \frac{1}{2}\frac{\bar{\omega}_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}\right]. \quad (11.12.20)$$

Разность квадратных корней в (11.12.18) равна

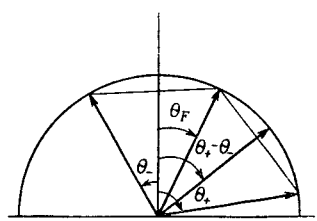
$$\sqrt{\varkappa}\,\bar{\omega}_p^2\omega_c/[\omega(\omega^2 - \omega_c^2)].$$

Окончательный результат для θ_F, выраженный не в радианах, а в градусах, имеет вид

$$\theta_F = \frac{360^\circ}{2\pi}\frac{ne^3Bd}{m^2\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,\varkappa_0 2c(\omega^2 - \omega_c^2)} =$$

$$= \frac{15{,}1^\circ}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\frac{n}{10^{18}\,\text{см}^{-3}}\left(\frac{\lambda}{10\,\text{мкм}}\right)^2\frac{B}{T}\frac{d}{\text{см}}\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}, \quad (11.12.21)$$

где для области оптических частот, определяемой условием $\bar{\omega}_p^2 \ll \omega(\omega \pm \omega_c)$, диэлектрическая проницаемость снабжена ин-



Фиг. 11.75. Построение угла Фарадея θ_F равного среднему значению углов θ_+ и θ_-, на которые поворачивается вектор напряженности электрического поля волн правой и левой круговой поляризации.

дексом «опт» и введена длина волны λ в вакууме. Знак угла θ_F для электронов и дырок различен и зависит от того, распространяется ли волна вдоль вектора **B** или в противоположном направлении. Отношение $\theta_F/(Bd)$ называется постоянной Верде.

При анализе экспериментальных данных иногда необходимо учитывать многократные отражения. В этом случае истинный угол поворота θ_F можно получить из измеренного значения θ'_F по формуле

$$\theta_F = \theta'_F \left[1 + 2r_\infty^2 \exp(-\alpha d)\cos(4\theta'_F)\right]^{-1}, \qquad (11.12.22)$$

где α — коэффициент поглощения [135] (приложение 4).

В многодолинной модели эффективная масса m определяется холловской эффективной массой (7.3.10). В этом смысле эффект Фарадея можно рассматривать как высокочастотный эффект Холла. Поскольку обратным временем релаксации импульса можно пренебречь, эффект Фарадея в слабом магнитном поле позволяет определить эффективную массу, причем этот метод в отличие от обычного эффекта Холла не вносит неопределенности, связанной с холл-фактором или анизотропией τ_m.

В вырожденном полупроводнике со сферическими изоэнергетическими поверхностями оптическая эффективная масса определяется по формуле [136][1])

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{\hbar^2 k}\frac{d\varepsilon}{dk}\right)_\zeta, \qquad (11.12.23)$$

где правая часть берется на уровне Ферми ζ.

Для тяжелых и легких носителей заряда того же знака множитель n/m^2 в (11.12.21) нужно заменить следующим образом:

$$\frac{n}{m^2} \to \frac{n_h}{m_h^2} + \frac{n_l}{m_l^2}, \qquad (11.12.24)$$

где индексы h и l соответствуют тяжелым и легким носителям.

Эллиптичность Фарадея ε_F определяется формулой

$$\varepsilon_F = \frac{d}{2}\left[\mathrm{Im}(q_+) - \mathrm{Im}(q_-)\right], \qquad (11.12.25)$$

где символ Im — мнимая часть. В приближении малых значений величины τ_m^{-1} из (11.12.10) находим

$$\mathrm{Im}(q_\pm) = -\frac{\omega\sqrt{\varkappa}\,\bar{\omega}_p^2(\omega \pm \omega_c)^{-2}\tau_m^{-1}}{2c\sqrt{1 - \bar{\omega}_p^2/[\omega(\omega \pm \omega_c)]}}. \qquad (11.12.26)$$

При больших значениях ω квадратный корень в знаменателе можно приравнять единице; тогда

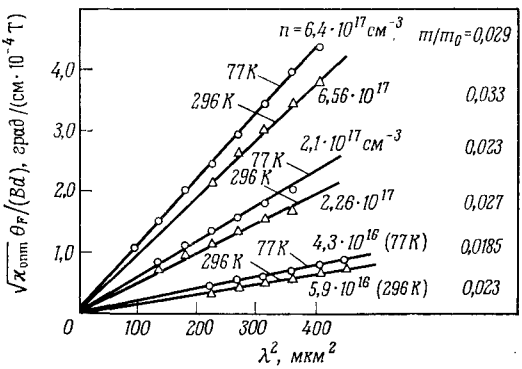
$$\varepsilon_F = \frac{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,\bar{\omega}_p^2\omega_c\omega d}{c\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)^2\tau_m} = \frac{ne^3Bd}{m^2\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,\varkappa_0 c\left[1 - \left(\omega_c^2/\omega^2\right)\right]\omega\tau_m}. \qquad (11.12.27)$$

[1]) Оптическая эффективная маса — это масса, входящая в выражение для вклада свободных носителей в диэлектрическую проницаемость.

При $\omega_c \ll \omega$ из (11.12.21) и (11.12.27) можно найти простое выражение для отношения ε_F/θ_F:

$$\frac{\varepsilon_F}{\theta_F} = \frac{2}{\omega\tau_m}, \qquad (11.12.28)$$

где θ_F выражено в радианах. Измерение этого отношения непосредственно дает τ_m. Однако, поскольку было принято $\tau_m^{-1} \ll \omega$, в пределах применимости формулы (11.12.28) эллиптичность невелика [137—140].



Фиг. 11.76. Фарадеевское вращение, обусловленное свободными электронами в n-InSb [143].

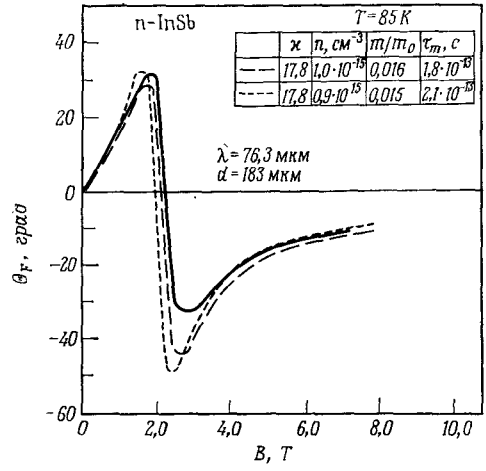
Отклонение экспериментальных данных от линейности в коротковолновой области обусловлено межзонным эффектом Фарадея. Указаны температура, концентрация электронов и эффективная масса.

На сверхвысоких частотах, где $\omega\tau_m \ll 1$, угол θ_F с хорошим приближением получается из (11.12.21) путем замены выражения $1 - \omega_c^2/\omega^2$ на $(\omega\tau_m)^{-2}$. Отношение ε_F/θ_F становится равным $\omega\tau_m$, т. е. вновь мало́ [141, 142][1]). Наибольшего значения это отношение достигает при $\omega\tau_m \approx 1$; отсюда очень удобно определить τ_m.

Экспериментальные данные, полученные на образцах InSb n-типа с различными концентрациями электронов при температурах 77 и 296 К, показаны на фиг. 11.76 [143]. Эффективная масса, полученная таким методом, является возрастающей функцией температуры и концентрации электронов в соответствии с хорошо известной непараболичностью зоны проводимости InSb. В области длин волн λ от 10 до 20 мкм $\theta_F \sim \lambda^2$ в соответствии с (11.12.21).

[1]) В работе [142] имеется обзор экспериментальных методов.

На фиг. 11.77 показаны зависимости $\theta_F(B)$ при $T = 85$ К для образца с концентрацией электронов $n \approx 10^{15}$ см$^{-3}$ [144]. Вплоть до $B = 2$ Т угол $\theta_F \sim B$; однако выше 2 Т возникает циклотронный резонанс, и допущение, что $\tau_m^{-1} \ll \ll |\omega - \omega_c|$, сделанное при выводе (11.12.21), становится непригодным, так как $\omega = \omega_c$. На фиг. 11.77 приведены также две теоретические кривые, рассчитанные на основе более строгого



Фиг. 11.77. Зависимость угла Фарадея от магнитной индукции в InSb n-типа в области циклотронного резонанса при $T = 85$ К (сплошная линия — теоретическая кривая) [144].

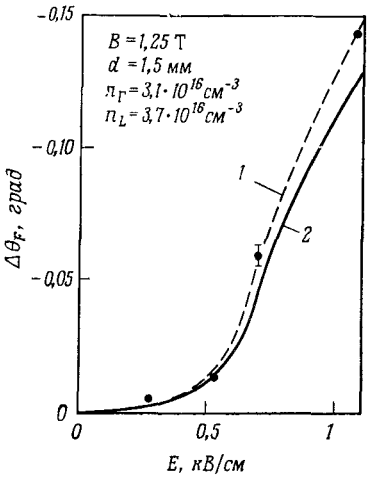
анализа. В сильных полях, где $\omega_c \gg \omega$, угол θ_F отрицателен и меняется обратно пропорционально магнитной индукции:

$$|\theta_F| = \frac{\mu_0 c}{2\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{ne}{B} d = \frac{0{,}174°}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}} \frac{n}{10^{10}\ \text{см}^{-3}} \frac{d}{\text{см}} \left(\frac{B}{\text{Т}}\right)^{-1}. \quad (11.12.29)$$

Эта пропорциональность согласуется с экспериментальными данными, представленными на фиг. 11.77.

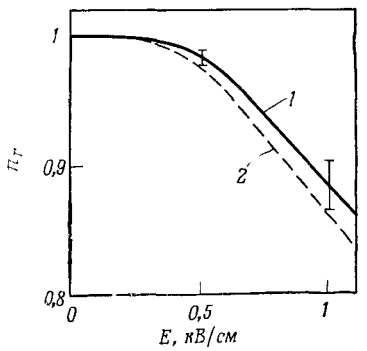
В GaSb n-типа с помощью эффекта Фарадея в инфракрасной области наблюдался разогрев электронов в постоянном электрическом поле, которое вызывает переброс электронов из основного в побочные минимумы зоны проводимости [145]. В основной долине (изотропная) эффективная масса составляет лишь $0{,}047m_0$, тогда как в побочных долинах $\langle 111 \rangle$ поперечная масса равна $0{,}143\ m_0$, а продольная масса в $K_m = 8{,}6$ раз больше поперечной. Подвижности в этих двух долинах в слабом электрическом поле составляют 3100 и 550 см^2/(В·с) соответственно, а энергетический зазор между долинами $\Delta_L = 0{,}1$ эВ.

На фиг. 11.78 показана экспериментальная зависимость угла θ_F от напряженности электрического поля E. Концентрация электронов в основной долине n_Γ и в побочных долинах n_L рассчитывалась по формуле (3.1.38), где вместо температуры T использовалась электронная температура T_e, которая для упрощения полагалась одинаковой в долинах обоих типов; заселенность основной долины n_Γ как функция напряженности электрического поля E показана на фиг. 11.79. Она уменьшается с разогревом электронов вследствие переброса их в другие долины. Штриховая кривая рассчитана, согласно (3.1.38), для электронной температуры T_e, определенной по (4.13.10), (4.13.12), причем τ_ε определено путем подгонки теоретической вольтамперной характеристики



Фиг. 11.78. Уменьшение угла Фарадея в n-GaSb с увеличением напряженности электрического поля [145].

1—наблюдаемое изменение; *2*—с учетом поправок на многократное отражение.



Фиг. 11.79. Зависимость концентрации электронов в основной долине зоны проводимости GaSb от напряженности электрического поля E, полученная из результатов измерений фарадеевского вращения, представленных на фиг. 11.78 кривой *2* [145, 146].

1—экспериментальная зависимость; *2*—рассчитанная концентрация электронов нормирована на единицу при $E = 0$.

к экспериментальной [146]. Вместо этого полуэмпирического подхода Рач [147] рассчитал тот же эффект с учетом рассеяния между неэквивалентными долинами, используя значение $D_{IV} = 1{,}5 \cdot 10^9$ эВ/см, и получил хорошее согласие с экспериментальными данными.

Рассмотрим теперь поперечную геометрию, или геометрию Фойгта, в которой $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}$, т. е. $\mathbf{q} = (0, q, 0)$ при $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$.

(Электромагнитная волна в твердом теле может быть частично продольной.) Как и прежде, рассмотрим линейно поляризованную волну. Проекция уравнения (11.12.4) на ось x имеет тот же вид (11.12.5), а проекция на ось y принимает вид

$$\left(\frac{\varkappa\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma_{xx}\right)E_y + i\omega\mu_0\sigma_{xy}E_x = 0. \qquad (11.12.30)$$

В случае $\tau_m^{-1} \ll \omega$ для отношения составляющих поля получаем

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{i\bar{\omega}_p^2\omega_c}{\omega\left(\bar{\omega}_p^2 + \omega_c^2 - \omega^2\right)}. \qquad (11.12.31)$$

Подстановка этого отношения в (11.12.5) приводит к уравнению дисперсии

$$\frac{c^2q^2}{\omega^2\varkappa} = 1 + \frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2} - \frac{\bar{\omega}_p^4\omega_c^2}{\omega^2\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\bar{\omega}_p^2\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)}. \qquad (11.12.32)$$

В слабом магнитном поле, когда $\omega_c^2 \ll \omega^2$, получается квадратное уравнение относительно ω^2:

$$\omega^4 - \left(2\bar{\omega}_p^2 + \frac{c^2q^2}{\varkappa}\right)\omega^2 + \bar{\omega}_p^2\left(\bar{\omega}_p^2 - \omega_c^2 + \frac{c^2q^2}{\varkappa}\right) = 0. \qquad (11.12.33)$$

В случае 100%-ного отражения при $q = 0$, а также при $\omega_c \ll \bar{\omega}_p$ получаем решение

$$\omega_\pm = \bar{\omega}_p \pm \frac{1}{2}\omega_c, \qquad (11.12.34)$$

тогда как в минимуме отражения, где $c^2q^2 = \omega^2$, из (11.12.33) получаем

$$\omega'_\pm = \frac{\bar{\omega}_p}{\sqrt{2(\varkappa - 1)}}\sqrt{2\varkappa - 1 \pm \sqrt{1 + 4\varkappa(\varkappa - 1)\frac{\omega_c^2}{\bar{\omega}_p^2}}}. \qquad (11.12.35)$$

Это решение при условиях $4\varkappa(\varkappa - 1)\omega_c^2 \ll \bar{\omega}_p^2$ и $\varkappa \gg 1$ можно записать в следующем приближенном виде:

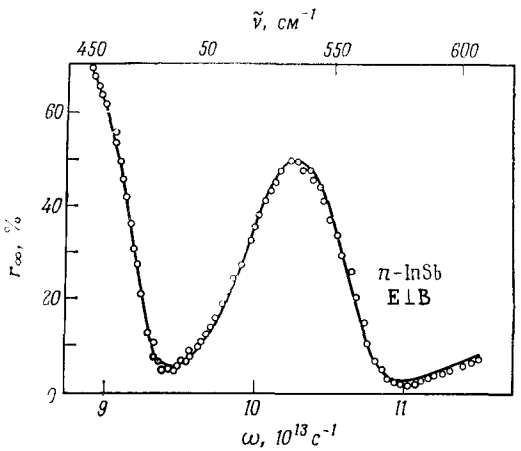
$$\omega'_\pm = \bar{\omega}_p\left(1 \pm \varkappa\frac{\omega_c^2}{2\bar{\omega}_p^2}\right) = \bar{\omega}_p \pm \frac{1}{2}\omega_c\left(\frac{\varkappa\omega_c}{\bar{\omega}_p}\right). \qquad (11.12.36)$$

На фиг. 11.80 показаны результаты измерения коэффициента отражения в n-InSb при комнатной температуре [11]. С учетом τ_m получается превосходное согласие теории и эксперимента. Такой эксперимент может служить для определения τ_m и n.

Как и в эффекте Фарадея, прошедшую волну можно представить как две волны круговой поляризации[1]) и найти фазовый угол Фойгта

$$\theta_V = (q_\perp - q_\parallel)\frac{d}{2}, \qquad (11.12.37)$$

где индексы соответствуют углам между направлением поляризации и вектором постоянной магнитной индукции. Из уравне-



Фиг. 11.80. Спектр магнитоплазменного отражения в InSb n-типа при комнатной температуре в геометрии Фойгта [43].

ния дисперсии (11.12.32) в приближении $\omega^2 \gg \omega_c^2$ и $\bar{\omega}_p^2$ получаем

$$q_\perp = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varkappa}\sqrt{1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2} - \frac{\bar{\omega}_p^2\omega_c^2}{\omega^4}} \approx$$

$$\approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varkappa}\left(1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{2\omega^2} - \frac{\bar{\omega}_p^2\omega_c^2}{2\omega^4}\right); \qquad (11.12.38)$$

$q_\parallel$ получаем из этого же уравнения, полагая $\omega_c = 0$, так как движение электрона параллельно магнитному полю не отличается от его движения в отсутствие магнитного поля.

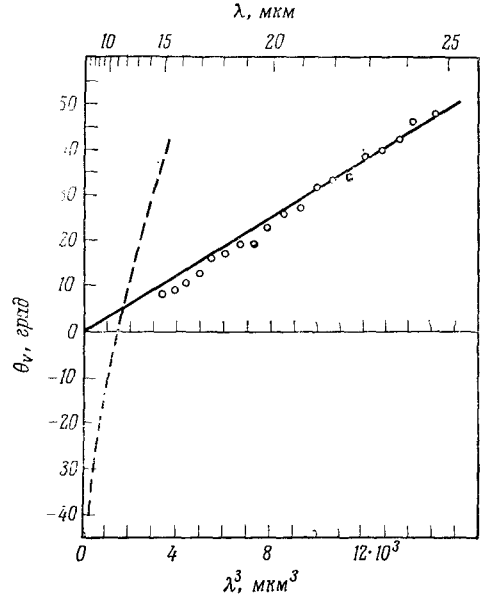
[1]) В действительности в геометрии Фойгта электрические поля нормальных волн колеблются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях; волна (*необыкновенная*), *для которой* вектор *напряженности* электрического *поля* перпендикулярен **B**, имеет волновое число $q_\perp$, а другая (обыкновенная) волна, для которой **E** ∥ **B**, имеет волновое число $q_\parallel$. — *Прим. ред.*

Следовательно, при $\omega_c \ll \omega$ для угла θ_V находим

$$\theta_V = -\frac{d}{2}\omega\frac{\sqrt{\varkappa}}{c}\frac{\bar{\omega}_p^2\omega_c^2}{2\omega^4} = -\frac{\mu_0 c}{4\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\frac{ne^4B^2d}{m^3\omega^3} =$$

$$= -\frac{7{,}05^\circ}{\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\frac{n}{10^{21}\ \text{см}^{-3}}\left(\frac{\lambda}{10\ \text{мкм}}\right)^3\left(\frac{B}{\text{Т}}\right)^2\frac{d}{\text{см}}\left(\frac{m_0}{m}\right)^3. \qquad (11.12.39)$$

Фазовый угол Фойгта меньше угла Фарадея в $\omega_c/(2\omega)$ раз, поэтому его трудно измерить.



Фиг. 11.81. Эффект Фойгта в InSb n-типа по данным Тейтлера и др. [149] согласно [132].

Точки — эффект свободных носителей при $B=1{,}95$ Т, $n=1{,}6\cdot10^{16}$ см$^{-3}$, $d=0{,}0575$ см, $\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}=3{,}96$, $m=0{,}016m_3$, $T=85$ К; сплошная прямая — расчетная. Штриховая кривая — межзонный эффект Фойгта при $B=3{,}27$ Т и $d=0{,}157$ см.

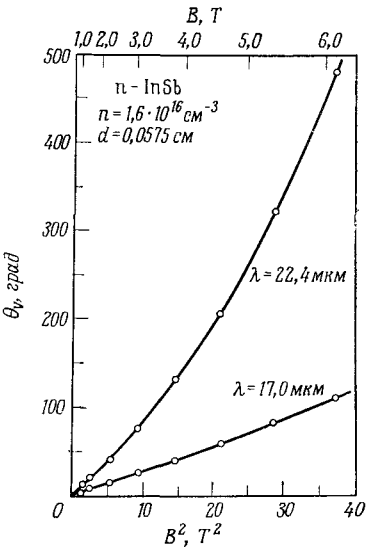
В многодолинной модели эффективную массу m следует заменить магниторезистивной массой m_M, которая определяется правой частью (7.4.5). В этом смысле эффект Фойгта можно назвать высокочастотным магниторезистивным эффектом. Так как анизотропия времени релаксации импульса не играет роли в эффекте Фойгта, анизотропия этого эффекта в отличие от обычного магниторезистивного эффекта непосредственно связана с зонной структурой.

Для измерений эффекта Фойгта падающий свет должен быть линейно поляризован под углом 45° по отношению к постоянной магнитной индукции. Хотя вращение плоскости поляризации при распространении через образец отсутствует, прошедшая волна оказывается эллиптически поляризованной. Согласно [148], эллиптичность составляет

$$\varepsilon_V = \operatorname{tg} \theta_V. \qquad (11.12.40)$$

Измерения эллиптичности позволяют, следовательно, определить фазовый угол Фойгта.

На фиг. 11.81 и фиг. 11.82 показаны экспериментальные зависимости $\theta_V = \theta_V(\lambda^3)$ и $\theta_V = \theta_V(B^2)$, полученные в InSb n-типа с концентрацией электронов $n = 1{,}6 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ при $T = 85$ K [149]. Небольшое отклонение от линейности зависимости $\theta_V(B^2)$ указывает на то, что условие $\omega \gg \omega_c$ здесь строго не выполняется. В области коротких волн возбуждаются межзонные переходы, которые рассматриваются в § 13 данной главы. Как и в случае фарадеевского вращения в вырожденных полупроводниках, эффективная масса здесь представляет собой «оптическую массу» на уровне Ферми.



Фиг. 11.82. Отклонение от пропорциональности между углом Фойгта и квадратом магнитной индукции в InSb n-типа при $T = 85$ K [149, 132].

Уравнение (11.12.32) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{c^2q^2}{\omega^2\varkappa} = 1 + \left(\frac{\bar{\omega}_p}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_c^2 - \bar{\omega}_p^2}\right). \qquad (11.12.41)$$

Отсюда видно, что в геометрии Фойгта резонанс ($q = \infty$) наступает при частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \bar{\omega}_p^2}, \qquad (11.12.42)$$

тогда как в геометрии Фарадея он наступает при $\omega = \omega_c$.

§ 13. Межзонные магнитооптические эффекты

Магнитооптические эффекты, обусловленные свободными носителями, мы рассчитывали на основе уравнения движения (11.11.4). Для связанных электронов, однако, необходимо добавить член $m\omega_e^2\mathbf{r}$ в левой части этого уравнения и заменить скорость $\mathbf{v}_d$ производной $d\mathbf{r}/dt$; получаем уравнение

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m\omega_e^2\mathbf{r} = e\left(\mathbf{E} + \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{B}\right]\right), \qquad (11.13.1)$$

где сила трения, пропорциональная τ_m^{-1}, не учитывается, так как собственная частота гармонического осциллятора $\omega_e \gg \tau_m^{-1}$. Электропроводность в поле волн правой и левой круговой поляризации теперь несколько отличается от (11.11.8) и (11.11.9), а именно

$$\sigma_\pm = \frac{i\varkappa_\infty\omega_p^2\omega}{\omega_e^2 - \omega^2 \pm \omega\omega_c}. \qquad (11.13.2)$$

В слабом магнитном поле, когда $\omega_c \ll (\omega_e^2 - \omega^2)/\omega$, получаем формулу для угла Фарадея

$$\theta_F = \frac{360^\circ}{2\pi}\,\frac{ne^3Bd}{2m^2\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}\,\varkappa_\infty c\omega^2\left[\left(\omega_e^2/\omega^2\right) - 1\right]^2}, \qquad (11.13.3)$$

которая очень похожа на (11.12.21), с тем отличием, что теперь в знаменателе вместо множителя $\left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)$ имеется множитель $\left(\omega_e^2/\omega^2 - 1\right)^2$. Угол Фойгта получается подобным же образом:

$$\theta_V = -\frac{\mu_0 c}{4\sqrt{\varkappa_{\text{опт}}}}\,\frac{ne^4B^2d}{m^3\omega^3\left[\left(\omega_e^2/\omega^2\right) - 1\right]^3}. \qquad (11.13.4)$$

При резонансе, когда $\omega = \omega_e$, углы θ_F и θ_V определяются, конечно, величиной τ_m^{-1}, которую мы здесь не учитывали.

На фиг. 11.83 показаны результаты наблюдений фарадеевского вращения в германии, обусловленного прямыми межзонными переходами в Γ-точке зоны Бриллюэна, при различных значениях энергии фотонов [150]. Наблюдаемое изменение знака нельзя учесть с помощью формулы (11.13.3). Квантовомеханическая трактовка с учетом зеемановского расщепления экситонных уровней [151] более адекватно описывает этот эффект по сравнению с моделью классического осциллятора. В квантовомеханическом подходе вводится феноменологическое время релаксации экситона τ порядка 10^{-13} с, а также частота экситона γB, где $\gamma = g\mu_B/(2\hbar)$, g — множитель Ланде, μ_B — магнетон

Бора. Эта теория предсказывает изменение знака для частот

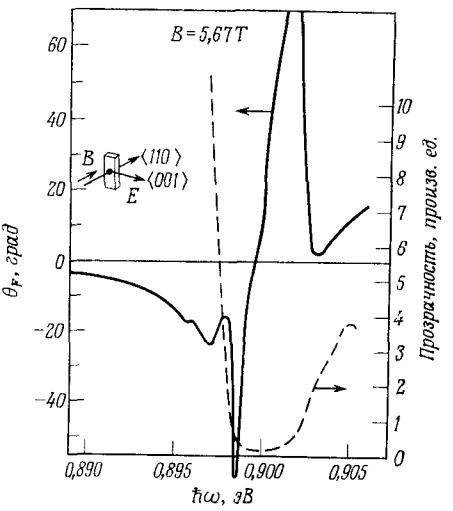
$$\omega_{\pm} = \omega_e \pm \sqrt{\tau^{-2} + \gamma^2 B^2}. \qquad (11.13.5)$$

Если имеется несколько резонансных частот ω_e, то один резонанс может давать вклад в месте локализации другого, предотвращая таким образом изменение знака, предсказываемое формулой (11.13.5). Этим объясняется однократное изменение знака на фиг. 11.83.

В геометрии Фойгта изменение знака происходит на частотах

$$\omega_{\pm} = \omega_e \pm \sqrt{\frac{1}{3}(\tau^{-2} + \gamma^2 B^2)}. \qquad (11.13.6)$$

Осциллирующий характер фарадеевского вращения на-



Фиг. 11.83. Зависимость угла Фарадея от энергии фотонов, обусловленная прямыми межзонными переходами в германии [150].

блюдался в германии при $T = 8$ К в магнитных полях до 10,3 Т [152]. Эффект этих осцилляций составляет около 2% общего вращения и объясняется отчасти экситонным поглощением, отчасти же переходами между уровнями Ландау.

§ 14. Магнитоплазменные волны

Уравнение дисперсии в геометрии Фарадея (11.12.10) в пределе сильных магнитных полей, когда $\omega_c \gg \omega$, имеет вид [1])

$$\frac{c^2 q_{\pm}^2}{\omega^2} - \varkappa = \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\mp\omega_c + i\tau_m^{-1}\right)}, \qquad (11.14.1)$$

где для удобства введена плазменная частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varkappa_0}}. \qquad (11.14.2)$$

[1]) Обзор см., например, в [153, 154].

В газах, где диэлектрическая проницаемость $\varkappa = 1$, уравнение (11.14.1) известно под названием уравнения Апплтона — Хартри. В случае слабого затухания, когда $\tau_m^{-1} \ll \omega_c$, уравнение (11.14.1) можно разложить в ряд:

$$\frac{c^2 q_{\mp}^2}{\omega^2} - \varkappa = \pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} - \frac{i\tau_m^{-1}\omega_p^2}{\omega\omega_c^2} + \ldots . \qquad (11.14.3)$$

В типичной плазме $\tilde{\omega}_p = \omega_p/\sqrt{\varkappa} \gg \sqrt{\omega\omega_c}$, и величиной $\varkappa$ можно пренебречь. В первом приближении мы пренебрегаем также затуханием; показатель преломления

$$\frac{cq_{\mp}}{\omega} = \sqrt{\pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}} \qquad (11.14.4)$$

имеет действительные значения только при положительном знаке подкоренного выражения. В зависимости от знака циклотронной частоты ω_c, т. е. от типа проводимости, распространяется волна либо левой, либо правой круговой поляризации. Фазовая скорость этой волны

$$\frac{\omega}{q} = c\sqrt{\frac{\omega\omega_c}{\omega_p^2}} = \sqrt{\frac{\omega B}{ne\mu_0}} = 1{,}77\sqrt{\frac{f}{\text{Гц}}\,\frac{B}{\text{Т}}\,\frac{10^{21}\ \text{см}^{-3}}{n}}\ \frac{\text{см}}{\text{с}} \qquad (11.14.5)$$

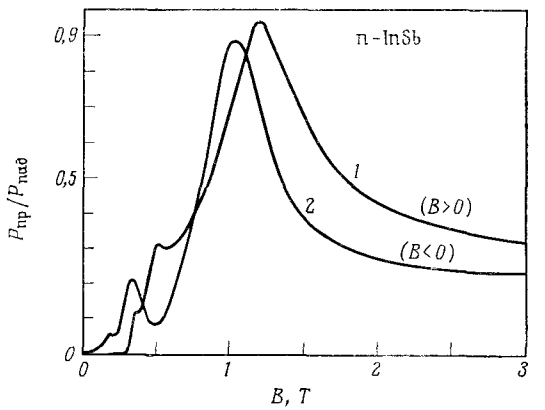
может быть очень малой. Например, в полупроводнике с концентрацией электронов $n = 10^{18}$ см$^{-3}$ при $B = 0{,}1$ Т на частоте 1 МГц скорость составляет лишь $1{,}77 \cdot 10^5$ см/с, и показатель преломления достигает примерно 10^5. Эта волна называется геликоном. Глубина проникновения геликона δ получается из (11.14.3):

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\omega\omega_c^2}{\tau_m^{-1}\omega_p^2}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c}} = \frac{c\omega_c^{3/2}\tau_m}{\omega_p\omega^{1/2}} = \sqrt{\frac{1}{e\mu_0 c}}\,\frac{\mu}{\sqrt{n}}\,\frac{B^{3/2}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (11.14.6)$$

где μ — подвижность носителей, λ — длина волны в вакууме. Например, в n-InSb при $T = 77$ К, $n = 1{,}2 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ $\mu = 3{,}5 \times \times 10^5$ см^2/(В·с), $B = 0{,}74$ Т и $f = 10$ ГГц (диапазон $\lambda \approx 3$ см) глубина проникновения геликона равна 1,8 см [155], что на множитель $\sqrt{2}/(\mu B)^{3/2}$ больше глубины проникновения при $B = 0$, равной около 10^{-2} см. В оптическом диапазоне требуется в десятки раз более сильное магнитное поле. В экспериментах на сверхвысоких частотах иногда наблюдаются размерные резонансы, которые возникают в условиях, когда толщина образца равна целому числу полуволн. Измерение резонансного значения длины волны позволяет затем определить из уравнения (11.14.5) концентрацию носителей n. На фиг. 11.84 показаны

резонансы, измеренные в n-InSb при температуре 77 К на частоте 35,76 ГГц [156].

В плазме, дрейфующей со скоростью v_d, возникает доплеровский сдвиг частоты. Поскольку фазовая скорость ω/q мала, может выполняться условие $v_d > \omega/q$, при котором дрейфующие носители передают энергию волне, приводя к ее усилению.



Фиг. 11.84. Зависимость отношения прошедшей мощности $P_{пр}$ волн круговой поляризации к мощности $P_{пад}$, падающей на пластинку n-InSb, от магнитной индукции в геометрии Фарадея при $T = 77$ К [156].

1 — волна левой круговой поляризации; *2* — волна правой круговой поляризации, $n = 7 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $\mu = 7 \cdot 10^5$ см$^2 \cdot$В$^{-1} \cdot$с$^{-1}$, $d = 3{,}66$ мм, $f = 35{,}76$ ГГц.

Скорость дрейфа v_d должна быть лишь ненамного больше фазовой скорости ω/q, однако в таком случае показатель преломления оказывается близким к нулю, и фазовая скорость снова становится высокой. Чтобы сохранить большое значение показателя преломления, необходима двухкомпонентная плазма, состоящая, например, из электронов и дырок с различными подвижностями. Так как дрейфовая скорость дырок, вообще говоря, отличается от фазовой скорости волны, показатель преломления остается очень большим, даже если скорость дрейфа электронов $v_d \approx \omega/q$. На этом основана двухпучковая неустойчивость [157]. Однако затухание, вызываемое соударениями, оказывается достаточно сильным, что препятствует практическому применению такого метода усиления волн.

Если в полярном полупроводнике фазовая скорость рассматриваемой волны равна скорости $\mathbf{u}_s$ поперечной звуковой волны (волны сдвига), то возникает взаимодействие волн; из (11.14.5)

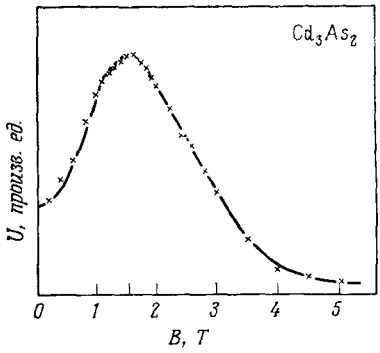
для этого случая получаем

$$|\mathbf{u}_s| = c\sqrt{\frac{\omega\omega_c}{\omega_p^2}}. \qquad (11.14.7)$$

Решая это уравнение относительно ω и полагая $|\mathbf{u}_s| \approx \approx 5\cdot 10^5$ см/с, находим

$$\omega = \left(\frac{u_s}{c}\right)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \approx 5\,\frac{n}{10^{12}\ \text{см}^{-3}}\left(\frac{B}{\text{Т}}\right)^{-1} \text{с}^{-1}. \qquad (11.14.8)$$

В эксперименте на Cd_3As_2 [158] с концентрацией электронов $n = = 10^{18}$ см$^{-3}$ при помощи кварцевого преобразователя, установленного с одной стороны дискообразного образца, возбуждались сдвиговые волны на частоте $f = 525$ кГц. Когда продольная магнитная индукция достигала 1,54 Т, звуковая волна приводила к возникновению геликонной волны, которая детектировалась катушкой, состоящей из нескольких витков вокруг образца. На фиг. 11.85 показано изменение напряжения на катушке с изменением магнитной индукции. Экспериментальные данные согласуются с выражением (11.14.8).



Фиг. 11.85. Зависимость сигнала U на катушке от магнитной индукции при геликон-фононном взаимодействии ($d = = 3{,}17$ мм, $f = 0{,}525$ МГц) [158].

В собственных полупроводниках и полуметаллах имеется равное количество электронов и дырок. Если условие $\tau_m^{-1} \ll \omega$ выполняется для обоих типов носителей [1]), то уравнение дисперсии (11.14.1) можно привести к следующему виду:

$$\frac{c^2 q_\mp^2}{\omega^2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega\,(\mp\omega_{ci} - \omega)} \approx \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_{pi}^2}{(\mp\omega_{ci}\omega)} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}. \qquad (11.14.9)$$

Приближенное равенство справедливо при условии $\omega_c \gg \omega$. Первый член справа исчезает, когда концентрации электронов и

[1]) Это нелегко осуществить; например, в InSb при комнатной температуре в некоторой области частот для электронов выполняется условие $\omega > \tau_m^{-1}$, тогда как для дырок $\tau_m^{-1} > \omega$.

дырок одинаковы. Второй член дает фазовую скорость

$$\frac{\omega}{q} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n\,(m_n + m_p)}} = \\ = 9{,}4 \cdot 10^{16} \frac{B}{\text{Т}} \left(\frac{n}{\text{см}^{-3}}\right)^{-1/2} \left(\frac{m_n + m_p}{m_0}\right)^{-1/2} \frac{\text{см}}{\text{с}}, \qquad (11.14.10)$$

которая не зависит от поляризации и поэтому справедлива также в случае линейно поляризованных волн. Эти волны называются альфвеновскими волнами. Например, в висмуте при комнатной температуре показатель преломления для этих волн $cq/\omega = 30$ при значении продольной магнитной индукции 1,6 Т.

Если волна падает под углом θ к направлению постоянной магнитной индукции, то происходит двойное лучепреломление. Волна, поляризованная параллельно плоскости падения, имеет фазовую скорость, в $\cos\theta$ раз меньшую, чем скорость перпендикулярно поляризованной волны. Согласно (11.14.10), альфвеновские волны несут информацию о сумме $m_n + m_p$ и, следовательно, о зонной структуре.

§ 15. Нелинейная оптика

Интенсивность света, излучаемого любыми источниками, за исключением лазеров, недостаточно высока, чтобы нарушить линейную связь между поляризацией диэлектрика $\mathbf{P}$ и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \qquad (11.15.1)$$

где восприимчивость

$$\chi = \varkappa_0 (\varkappa - 1), \qquad (11.15.2)$$

а также диэлектрическая проницаемость $\varkappa$, вообще говоря, могут быть тензорами второго ранга ($\varkappa_0$ — электрическая постоянная). Однако рубиновый лазер с модулированной добротностью может дать интенсивность до 10^9 Вт/см^2, которая соответствует напряженности электрического поля около 10^6 В/см [1]). Как и в случае горячих носителей, когда имеется нелинейная связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля, необходимо учесть нелинейные члены в зависимости $\mathbf{P} = \mathbf{P}(E)$

[1]) Интенсивность солнечного света на Земле при вертикальном падении составляет 0,135 Вт/см^2, что эквивалентно $E \approx 10$ В/см. Луч лазера мощностью 10^8 Вт, сфокусированный на площадь (10 мкм)^2, создает напряженность электрического поля порядка 10^8 В/см, при которой твердое тело разрушается.

[159, 160][1]):

$$P_i = \sum_k \chi_{ik} E_k + \sum_{kl} \chi_{ikl} E_k E_l + \sum_{klm} \chi_{iklm} E_k E_l E_m + \ldots . \quad (11.15.3)$$

Поскольку в диэлектриках наибольший вклад в восприимчивость дают связанные электроны, эта нелинейность наблюдается как в изоляторах, так и в полупроводниках. Однако в полупроводниках нелинейность обусловлена также свободными носителями, что рассматривается ниже в этом параграфе.

В классической модели нелинейность обусловлена ангармоничностью колебаний связанных электронов в переменном поле. Пусть уравнение движения осциллятора в однодолинной модели имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = \left(\frac{e}{m}\right) E_1 \cos \omega t, \quad (11.15.4)$$

где для упрощения затухание не учитывается, а коэффициент ε в нелинейном члене считается малым. В первом приближении возьмем решение вида $x = x_1 \cos \omega t$; тогда, используя тождество $4 \cos^3 \omega t = \cos 3\omega t + 3 \cos \omega t$, получаем

$$\frac{3}{4} \varepsilon x_1^3 + (\omega^2 - \omega_0^2) x_1 + \left(\frac{e}{m}\right) E_1 = 0, \quad (11.15.5)$$

где малое слагаемое $-{}^1/_4 \varepsilon x_1^3 \cos 3\omega t$ опущено. Второе приближение находится интегрированием уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \cos \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon x_1^3 \cos 3\omega t, \quad (11.15.6)$$

которое получается из (11.15.4) и (11.15.5) путем исключения величины E_1. Нелинейное решение имеет вид

$$x = x_1 \cos \omega t - \varepsilon \frac{x_1^3}{36\omega^2} \cos 3\omega t. \quad (11.15.7)$$

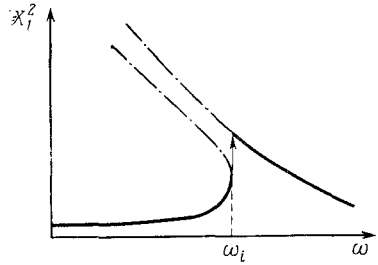
Отсюда получаем дипольный момент, пропорциональный величине ex, с частотами ω и 3ω. Поскольку поляризация $\mathbf{P}$ равна дипольному моменту единицы объема, получается третья гармоника, что адекватно описывается третьим членом правой части уравнения (11.15.3). Вторая гармоника обусловлена наличием в уравнении движения члена, пропорционального x^2, и соответствующего ему второго слагаемого в (11.15.3). Возвращающая сила пропорциональна x^2, что означает зависимость потенциала от x^3, т. е. $V(-x) \neq V(x)$: диэлектрик не имеет симметрии инверсии, если генерируется вторая гармоника. Следовательно, первостепенный интерес в этом отношении представляют пьезоэлектрики и сегнетоэлектрики.

[1]) См. также обзорные статьи [161—163].

Уравнение (11.15.5), которое связывает амплитуду осцилляций x_1 с частотой ω, можно преобразовать к виду

$$\frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{\omega_0^2}x_1^3=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)x_1-\frac{e}{m\omega_0^2}E_1. \qquad (11.15.8)$$

Левая часть этого уравнения на графике зависимости от x_1 представляется параболой третьей степени, тогда как правая часть дает прямую линию. Точки пересечения этих линий позволяют определить решения: при больших значениях частоты ω имеется единственное решение, тогда как при малых — три воз-



Фиг. 11.86. Зависимость квадрата амплитуды классического ангармонического осциллятора от частоты; при частоте ω_i возникает неустойчивость.

можных решения для амплитуды. Очевидно, наименьшая амплитуда соответствует устойчивым колебаниям. На частоте ω_i, где $d\omega/d(x_1^2)=0$, возникает неустойчивость (фиг. 11.86). Эта частота определяется выражением

$$\omega_i=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\varepsilon^{1/3}\left(\frac{eE_1}{m\omega_0^3}\right)^{2/3}}\approx$$

$$\approx\omega_0\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3}\varepsilon^{1/3}\left(\frac{eE_1}{m\omega_0^3}\right)^{2/3}\right]. \qquad (11.15.9)$$

Поскольку разложение в степенной ряд (11.15.3) справедливо только при условии $\varepsilon E_1^2\ll(m\omega_0^3/e)^2$, частота ω_i лишь немного меньше частоты ω_0. Следовательно, вблизи резонанса $\omega=\omega_0$ происходит усиленная генерация кратных частот.

Сказанное относится и к генерации биений на частотах $2\omega_1-\omega_2$ и $2\omega_2-\omega_1$, возникающих в результате воздействия суммы полей двух частот ω_1 и ω_2:

$$E=E_1\exp[i\omega_1 t-i(\mathbf{q}_1\mathbf{r})]+E_2\exp[i\omega_2 t-i(\mathbf{q}_2\mathbf{r})]. \qquad (11.15.10)$$

Если $\omega_2=2\omega_1$, то одна частота биений равна нулю, а другая равна $3\omega_1$. Первая частота соответствует оптическому выпрямлению путем смешивания гармоник.

Рассмотрим теперь случай длинных волн, когда в (11.15.10) величинами $(\mathbf{q}_1\mathbf{r})$ и $(\mathbf{q}_2\mathbf{r})$ можно пренебречь, оставляя лишь

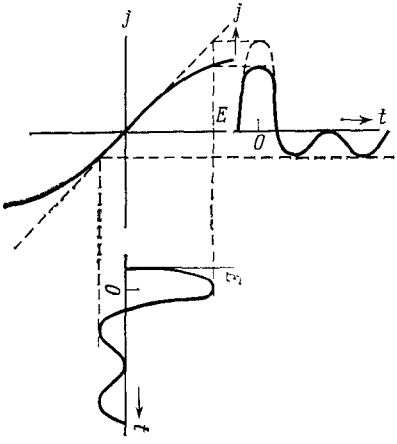
сдвиг фазы φ, т. е. когда вместо бегущих волн имеются просто переменные параллельные поля:

$$E(t) = E_1 \cos(\omega t + \varphi) + E_2 \cos 2\omega t. \qquad (11.15.11)$$

Приложим это поле к однородному изотропному полупроводнику (т. е. не к $p-n$-структуре), где в области теплых носителей заряда зависимость плотности тока $\mathbf{j}$ от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ подобна зависимости $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ (11.15.3):

$$j(t) = \sigma_0 (E + \beta E^3). \qquad (11.15.12)$$

Расчет показывает, что средняя по времени плотность тока пропорциональна произведению $\beta \cos 2\varphi$. Это плотность постоянного тока, откуда и происходит название «оптическое выпрямление». На фиг. 11.87 внизу показана функция $E(t)$ при $E_1 = E_2$ и $\varphi = 0$. Средняя по времени напряженность электрического поля равна нулю, что справедливо при любом значении угла φ. На фиг. 11.87 справа показана функция $j(t)$, полученная в случае нелинейной



Фиг. 11.87. Принцип оптического выпрямления переменного электрического поля.

симметричной зависимости $j = j(E)$. Положительное отклонение сильно уменьшается, тогда как отрицательное остается без существенных изменений. Следовательно, $\langle j \rangle \neq 0$. Если в расчетах величины $\langle j \rangle$ учесть времена релаксации импульса τ_m и энергии τ_ε, то амплитуда и сдвиг фаз окажутся зависимыми от τ_m и τ_ε:

$$\langle j \rangle = \frac{3}{4} \sigma_0 \beta E_1^2 E_2 A \cos 2(\varphi + \psi), \qquad (11.15.13)$$

где $A = A(\tau_m, \tau_\varepsilon)$ и $\psi = \psi(\tau_m, \tau_\varepsilon)$. В простом случае, когда $\omega\tau_m \ll 1$, дополнительный сдвиг фаз ψ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2\omega^3 \tau_\varepsilon^3 (1 + 3\omega^2 \tau_\varepsilon^2)^{-1}. \qquad (11.15.14)$$

Измерение угла ψ позволяет определить величину τ_ε (гл. 4. § 13, фиг. 6.21 и 6.28) [164—166].

Возвращаясь к рассмотрению бегущих волн, остановимся на важном вопросе согласования фаз в процессе генерации частоты ω_3 исходными частотами ω_1 и ω_2 в диэлектрике. Для фотонов, участвующих в этом процессе, закон сохранения энергии приводит к условию

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \tag{11.15.15}$$

а закон сохранения импульса — к условию

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2. \tag{11.15.16}$$

Полагая, что векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ параллельны, и вводя показатель преломления $n_i = c|\mathbf{q}_i|\omega_1$, можно удовлетворить обоим уравнениям одновременно только при $n_1 = n_2 = n_3$. Однако это выполняется не всегда. Генерируемая на частоте ω_3 мощность

$$P_3 \sim \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(q_1 + q_2 - q_3)x\right]}{(q_1 + q_2 - q_3)^2} \tag{11.15.17}$$

имеет максимальное значение при

$$x = \frac{\pi}{|q_1 + q_2 - q_3|} = \frac{1}{2}\left|\frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_2} - \frac{n_3}{\lambda_3}\right|^{-1}, \tag{11.15.18}$$

где λ_i — длина волны в вакууме. Например, при удвоении частоты получаем просто $x = (\lambda/4)\,|n_\omega - n_{2\omega}|^{-1}$, причем в случае малой дисперсии, т. е. при $n_\omega \approx n_{2\omega}$, это значение намного больше длины волны λ. Необходимость использования кристаллов такой длины [определяемой выражением (11.15.18)] и невозможность получения к. п. д. преобразования 100% представляют недостаток, который можно преодолеть, используя двулучепреломляющие, обычно одноосные, кристаллы, в которых двойное лучепреломление выражено сильнее, чем дисперсия. При определенном значении угла относительно оптической оси скорость обыкновенной волны частоты ω равна скорости необыкновенной волны удвоенной частоты. Основная волна и гармоника поляризованы в различных плоскостях. Согласование фаз происходит на длине когерентности, равной нескольким сантиметрам. Таким способом удается получить к. п. д. преобразования почти 100%. В качестве предварительного условия необходима, конечно, когерентность лазерного луча.

Если $\omega_2 = 0$, т. е. если наряду с полем электромагнитной волны приложено сильное постоянное (импульсное) электрическое поле, то на осцилляторе, подчиняющемся уравнению (11.15.4), получается удвоенная частота. Большие амплитуды поля (порядка 10^6 В/см) можно получить путем подачи низкого напряжения на $p-n$-переход с обратным смещением. Но даже с помощью не очень сильного постоянного электрического поля,

составляющего всего 10^2 В/см и приложенного к однородно легированному образцу n-InAs при комнатной температуре, излучение длины волны $\lambda = 10{,}6$ мкм от лазера на CO_2 с модулированной добротностью (мощность порядка 10^5 Вт/см^2) можно преобразовать в более коротковолновое излучение ($\lambda = 5{,}3$ мкм). Экспериментальные данные, показанные на фиг. 11.88, свидетельствуют о том, что мощность $P_{2\omega}$ пропорциональна квадрату постоянного тока через образец [167]. В интервале концентраций электронов от $1{,}5 \cdot 10^{16}$ до $3 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ мощность $P_{2\omega}$ пропорциональна этой концентрации, что доказывает связь этого явления с плазмой носителей заряда [1]). Генерация биений наблюдалась также при смешивании волн длины $\lambda_1 = 10{,}6$ мкм и $\lambda_2 = 9{,}6$ мкм, излучаемых CO_2-лазером; частоты биений $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$ и $2\omega_2 - \omega_1$ соответствуют длинам волн 8,7 и 11,8 мкм [171]. На фиг. 11.89 показана зависимость относительной выходной мощности на длине волны 11,8 мкм от концентрации электронов (кривая *1*) и от длины кристалла (кривая *2*). Тангенс угла наклона кривой *2* равен двум, откуда следует, что мощность P_3 пропорциональна квадрату длины кристалла. Эта зависимость получается из (11.15.17) при небольших значениях аргумента синуса.

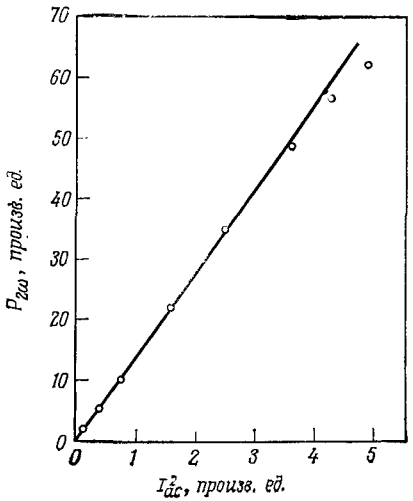
Развивая предшествующие работы, Стенфло [172] рассмотрел смешивание света подвижными носителями в полупроводниках. Вольф и Пирсон [173] (см. также [174]) показали, что нелинейность сильно увеличивается из-за непараболичности зоны. Лэкс и др. [175] предложили метод увеличения выходной мощности на частоте биений ω_3, состоящий в применении магнитного поля такой напряженности, что циклотронная частота близка к частоте ω_3. Как показано выше, при резонансе эффект нелинейности усиливается.

Не вникая в дальнейшие подробности, рассмотрим кратко параметрическое усиление [176, 177]. Частоту, которую необходимо усилить, обозначим ω_1. Путем смешивания частоты ω_1 с частотой накачки ω_2 большой амплитуды в нелинейной среде получаем частоту биений $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$. Частота биений ω_3, называемая в этом случае также промежуточной частотой, по мере нарастания амплитуды волны смешивается с частотой ω_2, давая частоту $\omega_3 - \omega_2$, которая оказывается равной ω_1. Как показали Мэнли и Роу [178], генерация частоты ω_3 всегда сопро-

---

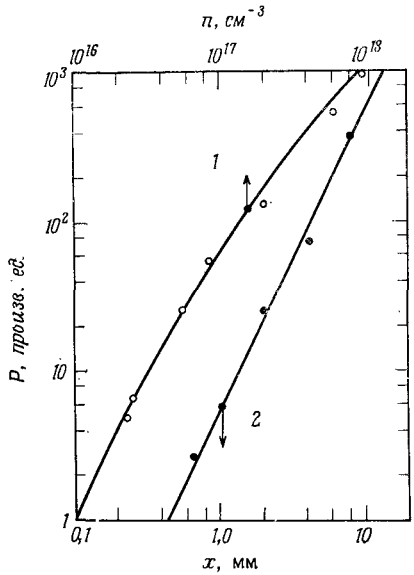
[1]) Первым обнаруженным проявлением биений в (газовой) плазме был «люксембургский эффект»: программу люксембургского радио можно было принимать на частоте биений $2\omega_1 - \omega_2$, где ω_1 — частота люксембургской радиостанции, а ω_2 — частота другой (менее мощной) радиостанции [168—170]. (Этот эффект наблюдался в 1923 г. при приеме передач радиостанций Люксембурга и г. Горького и известен в советской литературе как «люксембург-горьковский эффект». — *Прим. ред.*)

вождается нарастанием амплитуды сигнала, передаваемого на частоте ω_1. Усиление волн длины 17,88 мкм наблюдал Патель [179], используя в качестве нелинейного кристалла теллур, а в качестве источника накачки лазер на CO_2. Принцип параметрического усиления использован при конструировании генератора



Фиг. 11.88. Зависимость мощности второй гармоники ($\lambda = 5{,}3$ мкм) от квадрата постоянного тока через образец n-InAs [167].

Удельное сопротивление образца равно 1/143 Ом·см, $n = 4{,}4 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$. При $E_{пост} = 100$ В/см, что приблизительно соответствует $I^2_{dc} = 1$ на фигуре, мощность второй гармоники составляет около 40 мкВт при мощности падающей волны 1 кВт ($\lambda = 10{,}6$ мкм).



Фиг. 11.89. Зависимость полной выходной мощности смешанного сигнала ($\lambda = 11{,}8$ мкм) в n-InAs от концентрации носителей и от длины образца (экспериментальные точки и теоретические кривые) [171].

непрерывного действия [180] на нелинейном кристалле $Ba_2NaNb_5O_{15}$. Его главное преимущество по сравнению с общепринятой комбинацией обычного источника света и монохроматора состоит в большой выходной мощности при высокой разрешающей способности; при этом его частоту можно непрерывно регулировать путем изменения температуры, воздействия электрическим полем или путем поворота кристалла. Следовательно, такое устройство действует как перестраиваемый лазер.

§ 16. Светоэлектрический эффект (увлечение фотонами)

Электромагнитная волна, отражаясь от зеркала, оказывает на него давление, которое называется давлением излучения. Оно обусловлено передачей импульса фотонов электронам проводимости и объясняется классической электродинамикой как результат действия силы Лоренца, возникающей при движении электрона в электрическом поле волны в присутствии магнитного поля этой волны. Подобно этому, распространяющийся в полупроводнике свет действует на носители заряда, приводя к их переносу в направлении распространения света. Между контактом на лицевой стороне образца, через которую свет входит, и контактом на противоположной стороне, где свет выходит из образца, возникает разность потенциалов, которая называется светоэлектрической разностью потенциалов, или э. д. с. фотонного увлечения.

Рассмотрим поперечную электромагнитную волну, поляризованную в направлении x и распространяющуюся в направлении z:

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - qz), \qquad B_y = B_1 \cos(\omega t - qz + \psi), \tag{11.16.1}$$

где $q = N/\lambda$ — модуль волнового вектора. Уравнения движения носителей в пренебрежении диффузией и рекомбинацией имеют вид

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau_m} = \left(\frac{e}{m}\right)(E_x - v_z B_y), \tag{11.16.2}$$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau_m} = \left(\frac{e}{m}\right)(E_z + v_x B_y), \tag{11.16.3}$$

где E_z — постоянное светоэлектрическое поле [159]. Слагаемые $v_z B_y$ и $v_x B_y$ вносят нелинейность, поэтому светоэлектрический эффект принадлежит области нелинейной оптики, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе.

В первом приближении пренебрегаем нелинейным членом в первом уравнении и получаем

$$v_x = \mu E_1 \frac{\cos(\omega t - qz) + \omega\tau_m \sin(\omega t - qz)}{1 + \omega^2\tau_m^2}, \tag{11.16.4}$$

где $\mu = (e/m)\tau_m$ — подвижность. Подставляя это выражение для v_x в (11.16.3), получаем решение для v_z:

$$v_z = \mu\left\{E_z + \frac{\mu B_1 E_1}{2\left(1 + \omega^2\tau_m^2\right)}\left[\cos\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos(2\omega t - 2qz + \psi) + 2\omega\tau_m \sin(2\omega t - 2qz + \psi)}{1 + 4\omega^2\tau_m^2}\right]\right\}. \tag{11.16.5}$$

Отбрасывая члены, содержащие $2\omega t$, пренебрегая единицей в знаменателе при условии $\omega \gg \tau_m^{-1}$ и полагая $v_z = 0$, получаем

$$E_z = -\frac{1}{2}\mu E_1 B_1 (\omega\tau_m)^{-2} \cos\psi. \qquad (11.16.6)$$

Средняя интенсивность света

$$I = \overline{[\mathbf{EH}]} = \frac{1}{2\mu_0} E_1 B_1 \cos\psi. \qquad (11.16.7)$$

Окончательно из (11.16.6) получаем

$$|E_z| = \frac{\mu\mu_0 I}{(\omega\tau_m)^2}. \qquad (11.16.8)$$

Вследствие поглощения света интенсивность зависит от z, и разность потенциалов V_z получается интегрированием по z. С учетом отражений от лицевой стороны образца и внутренних отражений эта разность потенциалов

$$V_z = \frac{\mu\mu_0}{\omega^2\tau_m^2} \frac{I_0}{\alpha} \frac{(1 - r_\infty)[1 - \exp(-\alpha d)]}{1 + r_\infty \exp(-\alpha d)}, \qquad (11.16.9)$$

где I_0 — интенсивность падающего света. При значении интенсивности $I_0 \approx 10^5$ Вт/см^2, получаемой от лазера на CO_2 с модулированной добротностью на длине волны 10,6 мкм (при которой $\omega^2\tau_m^2 \sim 10^3$), и при значении подвижности $\mu \approx 10^3$ см^2/(В·с) коэффициент поглощения α составляет около 1 см$^{-1}$, коэффициент отражения $r_\infty \approx 30\%$, и при $d \gg 1/\alpha$ разность потенциалов $V_z \approx 10^{-3}$ В. Разность потенциалов такого порядка наблюдалась в германии InSb и GaAs при комнатной температуре [181, 182].

Выше не учитывалась зависимость подвижности μ от электрического поля и тем самым от координаты z. Более точная теория дана в работе [2]. Поскольку эффект имеет короткое время отклика, было предложено применить его в качестве детектора лазерного излучения большой мощности [182].

В диапазоне СВЧ подобные наблюдения [183] были объяснены как проявление эффекта Зеебека: электромагнитная волна разогревает носители у лицевой стороны образца, тогда как у противоположной стороны амплитуда волны и разогрев меньше. Термоэлектрические эффекты горячих носителей рассмотрены в книге Конуэлл [184].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lavilla R. E., Mendlowitz H.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 3297 (1969).
2. *Rhilipp H. R., Taft E. A.*, Phys. Rev., **113**, 1002 (1959).
3. *Marton L., Toots J.*, Phys. Rev., **160**, 602 (1967).
4. *Hunter W. R.* в книге Optical Properties and Electronic Structure of Metals and Alloys (ed. F. Abeles), North-Holland, Amsterdam, 1966, p. 136.

5. *Greenaway D. L., Harbeke G.*, Optical Properties and Band Structure of Semiconductors, Pergamon, New York, 1968.
6. *Brust D., Phillips J. C., Bassani G. F.*, Phys. Rev. Letters, **9**, 94 (1962).
7. *Cardona M., Pollak F. H.*, Phys. Rev., **142**, 530 (1966).
8. *Callaway J.*, Energy Band Theory, Acad. Press, New York, 1964.
9. *Madelung O.*, Grundlagen der Halbleiterphysik, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1970.
10. *Tauc J., Abraham A.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **20**, 190 (1961).
11. *Cardona M.*, Journ. Appl. Phys., **32**, 2151 (1961).
12. *Cardona M.*, Journ. Appl. Phys., **32**, 958 (1961).
13. *Cardona M.*, Zs. Phys., **161**, 99 (1961).
14. *Cardona M.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967, p. 125. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$, «Мир», М., 1970, стр. 136.)
15. *Moss T. S., Hawkins T. D.*, Infrared Physics, **1**, 111 (1962).
16. *Newman R., Tyler W. W.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 8, Acad. Press, New York, 1959, p. 49.
17. *Macfarlane G. G., McLean T. P., Quarrington J. E., Roberts V.*, Phys. Rev., **108**, 1377 (1957).
18. *Dean P. J., Thomas D. G.*, Phys. Rev., **150**, 690 (1966).
19. *Kudman J., Seidel T.*, Journ. Appl. Phys., **33**, 771 (1962).
20. *Edwards D. F., Slykhouse T. E., Drickamer H. G.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **11**, 140 (1959).
21. *Johnson E. J.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967, p. 200. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$, «Мир», М., 1970, стр. 166.)
22. *Braunstein R., Moore A. R., Herman F.*, Phys. Rev., **109**, 695 (1958).
23. *Kaiser W., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **98**, 966 (1955).
24. *Hrostowski H. J., Wheatley G. H., Flood W. F.*, Phys. Rev., **95**, 1683 (1954).
25. *Breckenridge R. G., Blunt R. F., Hosler W. R., Frederikse H. P. R., Becker J. H., Oshinsky W.*, Phys. Rev., **96**, 571 (1954).
26. *Burstein E.*, Phys. Rev., **93**, 632 (1954).
27. *Shur M. S.*, Phys. Letters, **29A**, 490 (1969).
28. *Heinrich H., Jantsch W.*, Phys. Rev., **B4**, 2504 (1971).
29. *Nikitine S., Bielman J., Deiss J. L., Grossmann M., Grun J. B., Ringeissen J., Schwab G., Siesskind M., Wurstein L.*, Proc. 6th Intern. Conf. Phys. Semicond., The Institute of Physics and The Physical Society, London, 1962.
30. *Sturge M. D.*, Phys. Rev,. **127**, 768 (1962).
31. *Hopfield J. J.*, Proc. 7th Intern. Conf. Phys. Semicond., Dunod, Paris, 1964. p. 726.
32. *Wannier G. H.*, Phys. Rev,. **52**, 191 (1937).
33. *Frenkel J.*, Phys. Rev., **37**, 17 (1931).
34. *Frenkel J.*, Phys. Rev., **37**, 1276 (1931).
35. *Thomas D. G., Hopfield J. J.*, Phys. Rev., **124**, 657 (1961).
36. *Dexter D. L., Knox R. S.*, Exitons, Wiley, New York, 1965.
37. *Knox R. S.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull), Suppl. 5, Acad. Press, New York, 1963. (Имеется перевод: *Р. Нокс*, Теория экситонов, «Мир», М., 1966.)
38. *Burstein E., Picus G. S., Gebbie H. A., Blatt F.*, Phys. Rev., **103**, 826 (1956).
39. *Zwerdling S., Keyes R. J., Foner S., Kolm H. H., Lax B.*, Phys. Rev., **104**, 1805 (1956).
40. *Zwerdling S., Lax B., Roth L. M.*, Phys. Rev., **108**, 1402 (1957).
41. *Zwerdling S., Lax B.*, Phys. Rev., **106**, 51 (1957).

42. *Roth L. M., Lax B., Zwerdling S.*, Phys. Rev., **114,** 90 (1959).
43. *Wright G. B., Lax B.*, Journ. Appl. Phys. Suppl., **32,** 2113 (1961).
44. *Zwerdling S., Lax B., Roth L. M., Button K. J.*, Phys. Rev., **114,** 80 (1957).
45. *Lax B., Zwerdling S.* в книге Progress in Semiconductors (eds. A. F. Gibson, R. E. Burgess), Vol. 5, Temple Press, London, 1960.
46. *Franz W.*, Zs. Naturforsch., **13a,** 484 (1958).
47. *Келдыш Л. В.*, ЖЭТФ. **34,** 1138 (1958).
48. *Tharmalingam K.*, Phys. Rev., **130,** 2204 (1963).
49. *Moss T. S.*, Journ. Appl. Phys. Suppl., **32,** 2136 (1961).
50. *Hamakawa Y., Germano F., Handler P.*, Proc. 8th Intern. Conf. Semicond. Physics, The Physical Soc. Japan, Tokyo, 1966, p. 111.
51. *Seraphin B. O., Hess R. B.*, Phys. Rev. Letters, **14,** 138 (1965).
52. *Johnson E. J., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **139,** A1991 (1965).
53. *Kaiser R., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **138,** A156 (1965).
54. *Owens E. B., Strauss A. J.*, Proc. Conf. Ultrapurif Semicond. Materials, Macmillan, New York, 1961, p. 340.
55. *Effer D., Etter P. J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **25,** 451 (1964).
56. *Morgan T. N.*, Proc. 10th Intern. Conf. Phys. Semicond., U. S. Atomic Energy Comission, Oak Ridge, Tenn., p. 266.
57. *Morgan T. N.*, Proc. 11th Intern. Conf. Phys. Semicond, PWN — Polish Sci. Publ., Warsaw, 1972, p. 989.
58. *Morgan T. N., Maier H.*, Phys. Rev. Letters, **27,** 1200 (1971).
59. *Hrostowski H. J.* в книге Semiconductors (ed. N. B. Hannay), Reinhold, New York, 1959. (Имеется перевод: *Полупроводники*, под ред. Н. Б. Хеннея, ИЛ, М., 1962, стр. 380.)
60. *Horn F. H.*, Phys. Rev., **97,** 1521 (1955).
61. *Бублик В. Т., Горелик С. С., Дубровина А. Н.*, ФТТ, **10,** 2846 (1968).
62. *Baker J. A., Tucker T. N., Moyer N. E., Buschert R. C.*, Journ. Appl. Phys., **39,** 4365 (1968).
63. *Hrostowski H. J., Kaiser R. H.*, Phys. Rev., **107,** 966 (1957).
64. *Boyle W. S.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8,** 321 (1959).
65. *Luttinger J. M., Kohn W.*, Phys. Rev., **97,** 869 (1955).
66. *Haering R. R.*, Can. Journ. Phys., **36,** 1161 (1958).
67. *Van Vleck J. H.*, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford University Press, London, 1932, p. 178.
68. *Geballe T. H., Morin F. J.*, Phys. Rev., **95,** 1805 (1954).
69. *Howard R. E., Hasegawa H.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **5,** 178 (1960).
70. *Boyle W. S., Howard R. E.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **19,** 181 (1961).
71. *Turner W. J., Reese W. E.*, Phys. Rev., **127,** 126 (1962).
72. *Hass M.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967, p. 7. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$, «Мир», М., 1970, стр. 13.)
73. *Mooradian A., Wright G. B.*, Solid State Commun., **4,** 431 (1966).
74. *Mooradian A.*, Festkörperprobleme (ed. O. Madelung), Vol. IX, Pergamon Press, London and Braunschweig, Vieweg, 1969, p. 74.
75. *Huang K.*, Proc. Roy. Soc., **A208,** 352 (1951).
76. *Henry C. H., Hopfield J. J.*, Phys. Rev. Letters, **15,** 964 (1965).
77. *Hopfield J. J.*, Phys. Rev., **112,** 1555 (1958).
78. *Fano U.*, Phys. Rev., **103,** 1202 (1956).
79. *Spitzer W. G.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson and A. C. Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967, p. 17. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников, «Мир», М., 1970, стр. 28.)
80. *Johnson F. A.*, Proc. Phys. Soc. (London), **B73,** 265 (1959).
81. *Brockhouse B. N.*, Phys. Rev. Letters, **2,** 256 (1959).
82. *Braunstein R.*, Phys. Rev., **130,** 879 (1963).
83. *Marshall R., Mitra S. S.*, Phys. Rev., **134,** A1019 (1964).

84. *Bassani G. F.*, Proc. Intern. School of Phys. (ed. J. Tauc), Vol. XXXIV, Acad. Press, New York, 1966, p. 33.
85. *Heitler W.*, Quantum Theory of Radiation, Clarendon, Oxford, 1954. (Имеется перевод: *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.)
86. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968. (Имеется перевод 1-го изд: *Л. Шифф*. Квантовая механика, ИЛ., М., 1959.)
87. *Wilson A. H.*, The Theory of Metals, Cambridge Univ. Press, London, 1953, p. 46.
88. *Cardona M.* в книге Problems in Solid State Physics (ed. H. J. Goldsmid), Pion Ltd., Acad. Press, London — New York, 1968, p. 425.
89. *Van Hove L.*, Phys. Rev., **89**, 1189 (1953).
90. *Phillips J. C.*, Phys. Rev., **104**, 1263 (1956).
91. *Dixon J. R.*, Proc. 5th Intern. Conf. Phys. Semicond. Czech. Acad. Sci., Prague, 1960, p. 366.
92. *Yariv A.*, Quantum Electronics, Wiley, New York, 1967.
93. *Fan H. Y., Spitzer W., Collins R. J.*, Phys., Rev. **101**, 566 (1956).
94. *Fan H. Y.*, Repts. Progr. Phys., Vol. 14, The Physical Society, London, 1956, p. 119.
95. *Meyer H. J. G.*, Phys. Rev., **112**, 298 (1958).
96. *Meyer H. J. G.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8**, 264 (1959).
97. *Rosenberg R., Lax M.*, Phys. Rev., **112**, 843 (1958).
98. *Гуревич В. Л., Ланг И. Г., Фирсов Ю. А.*, ФТТ, **4**, 1252 (1962).
99. *König W. M.*, Acta Phys. Austr., **33**, 275 (1971).
100. *Kranzer D., König W. M.*, Phys. Stat Sol. (b), **48**, K133 (1971).
101. *Wolfe R.*, Proc. Phys. Soc. (London), **A67**, 74 (1954).
102. *Visvanathan S.*, Phys. Rev., **120**, 379 (1960).
103. *Sommerfeld A.*, Ann. Phys., **11**, 257 (1931).
104. *Seeger K., Lischka K.*, Verhandl. DPG (VI), **7**, 586 (1962).
105. *Müller K. H., Nimtz G., Selders M.*, Appl. Phys. Letters, **20**, 322 (1972).
106. *Фомин Н. В.*, ФТТ, **2**, 605 (1960).
107. *Baumgardner C. A., Woodruff T. O.*, Phys. Rev., **173**, 746 (1968).
108. *Brown M. A. C. S., Paige E. G. S.*, Phys. Rev. Letters, **7**, 84 (1961).
109. *Brown M. A. C. S., Paige E. G. S., Simcox L. N.*, Proc. 6th Intern. Conf. Semicond. Phys., The Institute of Physics and the Physical Society, London, 1962, p. 111.
110. *Baynham A. C., Paige E. G. S.*, Phys. Letters, **6**, 7 (1963).
111. *Baynham A. C.*, Solid State Commun., **3**, 253 (1965).
112. *Pinson W. E., Bray R.*, Phys. Rev. Letters, **11**, 268 (1963).
113. *Pinson W. E., Bray R.*, Phys. Rev., **136**, A1449 (1964).
114. *Bray R., Pinson W. E., Brown D. M., Kumar C. S.*, 7th Intern. Conf. Semicond. Phys., Dunod, Paris, 1964, p. 467.
115. *Christensen O.*, Phys. Rev., **B7**, 763 (1973).
116. *Kaiser W., Collins R. J., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **91**, 1380 (1953).
117. *Feldman J. M., Hergenrother K. M.*, Appl. Phys. Letters, **9**, 186 (1966).
118. *Budd H. F.*, Phys. Rev., **158**, 798 (1967).
119. *Spitzer W. G., Gershenzon M., Frosch C. J., Gibbs D. F.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **11**, 339 (1959).
120. *Spitzer W. G., Whelan J. M.*, Phys. Rev., **114**, 59 (1959).
121. *Balslev I.*, Phys. Rev., **173**, 762 (1968).
122. *Turner W. J., Reese W. E.*, Phys. Rev., **117**, 1003 (1960).
123. *Braunstein R., Kane E. O.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **23**, 1423 (1962).
124. *Balslev I.*, Phys. Rev., **177**, 1173 (1969).
125. *Spitzer W. G., Fan H. Y.*, Phys. Rev., **106**, 882 (1957).
126. *Lax B.*, Proc. Intern. School of Phys. Vol. XXII, Acad. Press, New York, 1963, p. 240.
127. *Lax B., Zeiger H. J., Dexter R. N.*, Physica, **20**, 818 (1954).

128. *Rauch C. J., Stickler J. J., Zeiger H., Heller G.*, Phys. Rev. Letters, **4**, 64 (1960).
129. *Dresselhaus G., Kip A. F., Kittel C.*, Phys. Rev., **98**, 368 (1955).
130. *Shockley W.*, Phys. Rev., **79**, 191 (1950).
131. *Palik E. D., Picus G. S., Teitler S., Wallis R. F.*, Phys. Rev., **122**, 475 (1961).
132. *Palik E. D., Wright G. B.* в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C. Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967, p. 421. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$, «Мир», М., 1970, стр. 401.)
133. *Bemski G.*, Phys. Rev. Letters, **4**, 62 (1960).
134. *Palik E. D., Teitler S., Henvis B. W., Wallis R. F.*, Proc. 6th Intern. Conf. Semicond., The Institute of Physics and The Physical Society, London, 1962, p. 288.
135. *Piller H.*, Journ. Appl. Phys., **37**, 763 (1966).
136. *Fan H. Y.*, в книге Semiconductors and Semimetals (eds. R. K. Willardson, A. C Beer), Vol. 3, Acad. Press, New York, 1967. (Имеется перевод: Оптические свойства полупроводников $A^{III}B^{V}$, «Мир», М., 1970, стр. 385.)
137. *Stephen M. J., Lidiard A. B.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **9**, 43 (1959).
138. *Donovan B., Webster J.*, Proc. Phys. Soc. (London), **79**, 46 (1962).
139. *Donovan B., Webster J.*, Proc. Phys. Soc. (London), **79**, 1081 (1962).
140. *Donovan B., Webster J.*, Proc. Phys. Soc. (London), **81**, 90 (1963).
141. *Rau R. R., Caspari M. E.*, Phys. Rev., **100**, 632 (1955).
142. *Bouwknegt A.*, Thesis, Univ. Utrecht, 1965.
143. *Pidgeon C. R.*, Thesis, Univ. Reading, 1962.
144. *Palik E. D.*, Appl. Opt., **2**, 527 (1963).
145. *Heinrich H.*, Phys. Rev., **B3**, 416 (1971).
146. *Jantsch W., Heinrich H.*, Phys. Rev., **B3**, 420 (1971).
147. *Ruch J. G.*, Appl. Phys. Letters, **20**, 246 (1972).
148. *Born M., Wolf E.*, Principles of Optics, Pergamon, London, 1959, p. 26. (Имеется перевод: *М. Борн, Э. Вольф*, Основы оптики, «Наука» М., 1973.)
149. *Teitler S., Palik E. D., Wallis R. F.*, Phys. Rev., **123**, 1631 (1961).
150. *Nishina Y., Kolodziejczak J., Lax B.*, Proc. 7th Intern. Conf. Phys. Semicond., Dunod, Paris, 1964, p. 867.
151. *Halpern J., Lax B., Nishina Y.*, Phys. Rev., **134**, A140 (1964).
152. *Halpern J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **27**, 1505 (1966).
153. *Glicksman M.* в книге Solid State Physics (eds. H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 26, Acad. Press, New York, 1971, p. 275.
154. *Platzman P. M., Wolff P. A.* в книге Solid State Physics (eds. H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull), Suppl. 13, Acad. Press, New York, 1972. (Имеется перевод: *Ф. Платцман, П. Вольф*, Волны и взаимодействие в плазме твердого тела, «Мир», М., 1975.)
155. *Libchaber A., Veilex R.*, Phys. Rev., **127**, 774 (1962).
156. *Perrin N., Perrin B., Mercouroff W.* в книге Plasma Effects in Solids (ed. J. Bok), Dunod, Paris, 1964, p. 37.
157. *Bok J., Nozieres P.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **24**, 709 (1963).
158. *Rosenman I.*, Solid State Commun., **3**, 405 (1965).
159. *Bloembergen N.*, Nonlinear Optics, Benjamin, New York, 1965. (Имеется перевод: *Н. Бломбереген*, Нелинейная оптика, «Мир», М., 1966.)
160. *Yariv A.*, Quantum Electronics, Wiley, New York, 1967, p. 340.
161. *Gibson A. F.*, Sci. Progr., **56**, 479 (1968).
162. *Giordmaine J. A.*, Physics Today, **22**, No. 1, 38 (1969).
163. *Giordmaine J. A.*, Sci. Am., **210**, No. 4, 38 (1964).
164. *Schneider W., Seeger K.*, Appl. Phys. Letters, **8**, 133 (1966).
165. *Hess K., Seeger K.*, Zs. Phys., **218**, 431 (1969).
166. *Hess K., Seeger K.*, Zs. Phys., **237**, 252 (1970).

167. *McFee J. H.*, Appl. Phys. Letters, **11**, 228 (1967).
168. *Tellegan B. D. H.*, Nature, **131**, 840 (1933).
169. *Bailey V. A., Martyn D. F.*, Phil. Mag., **18**, 369 (1934).
170. *Bailey V. A., Martyn D. F.*, Phil. Mag., **23** (Suppl.), 774 (1937).
171. *Patel C. K. N., Slusher R. E., Fleury P. A.*, Phys. Rev. Letters, **17**, 1011 (1966).
172. *Stenflo L.*, Phys. Rev., **B1**, 2821 (1970).
173. *Wolff P. A., Pearson G. A.*, Phys. Rev. Letters, **17**, 1015 (1966).
174. *Kolodziejczak J.*, Proc. 9th Intern. Conf. Phys. Semicond., «Наука», Ленинград, 1968, п. 233.
175. *Lax B., Zawadski W., Weiler M. H.*, Phys. Rev. Letters, **18**, 462 (1967).
176. *Faraday M.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **121**, 299 (1831).
177. *Rayleigh*, Phil. Mag. (Ser. 5), **24**, 145 (1887).
178. *Manley J. H., Rowe H. E.*, Proc. IRE, **44**, 904 (1956).
179. *Patel G. K. N.*, Appl. Phys. Letters, **9**, 332 (1966).
180. *Smith R. G., Gensic J. E., Levinstein H. J., Rubin J. J., Singh S., Van Uitert L. G.*, Appl. Phys. Letters, **12**, 308 (1968).
181. *Валов П. М., Гринберг А. А., Данишевский А. М., Кастальский А. А., Рывкин С. М., Ярошецкий И. Д.*, Proc. 10th Intern. Conf. Phys. Semicond., U. S. Atomic Energy Comission, Oak Ridge/Tenn., 1970, p. 683.
182. *Gibson A. F., Kimmitt M. F., Walker A. C.*, Proc. 10th Intern. Conf. Phys. Semicond., U. S. Atomic Energy Commission, Oak Ridge/Tenn., 1970, p. 690.
183. *Kahlert H., Seeger K.*, Verhandl. DPG (VI), **3**, 39 (1968).
184. *Conwell E. M.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz, D. Turnbull, H. Ehrenreich), Suppl. 9, Acad. Press, New York, 1967, p. 45—48, 276—281. (Имеется перевод: *Э. Конуэлл*, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, «Мир», М., 1970.)

Глава 12. ФОТОПРОВОДИМОСТЬ

В гл. 5, § 8 и 9, мы рассмотрели диффузию носителей, генерированных поглощенным светом. В этой главе мы рассмотрим подробно фотопроводимость, причем особое внимание уделим процессам прилипания.

§ 1. Кинетика фотопроводимости

Фотопроводимость можно наблюдать при помощи устройства, схема которого показана на фиг. 12.1. Падающий на полупроводниковый кристалл свет поглощается, в результате чего возникают дополнительные носители. Если энергия фотона меньше ширины запрещенной зоны, то он генерирует носитель одного знака, например в результате примесного поглощения; в противоположном случае в основном генерируются пары электрон — дырка. Таким образом, темновая электропроводность

$$\sigma_0 = |e|(n_0\mu_n + p_0\mu_p) \tag{12.1.1}$$

возрастает на величину

$$\Delta\sigma = |e|(\mu_n \Delta n + \mu_p \Delta p).$$

Следовательно, относительное изменение электропроводности равно

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{\mu_n \Delta n + \mu_p \Delta p}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0} = \frac{b\,\Delta n + \Delta p}{b n_0 + p_0}, \tag{12.1.2}$$

где $b = \mu_n/\mu_p$ — отношение подвижностей электронов и дырок. Если в опыте ток через образец поддерживается постоянным при помощи включенного последовательно сопротивления, то напряжение V на образце уменьшается на величину $|\Delta V| = V\Delta\sigma/\sigma_0$. Чувствительность устройства можно увеличить, если освещение сделать прерывистым и использовать фазочувствительный детектор. При исследованиях переходных процессов обычно используют осциллограф и импульсную лампу или ячейку Керра в сочетании с постоянным источником света.

Если для упрощения пренебречь диффузией, то уравнение непрерывности (5.2.9) принимает вид

$$\frac{d\,\Delta n}{dt} = G - \frac{\Delta n}{\tau_n}, \tag{12.1.3}$$

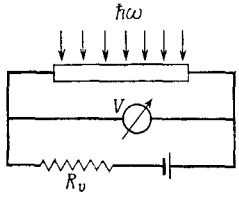
где в случае равномерного поглощения света скорость генерации G определяется выражением

$$G = \frac{\alpha\eta I}{\hbar\omega}. \qquad (12.1.4)$$

Здесь I — интенсивность освещения (в Вт/см^2), α — коэффициент поглощения и η — квантовый выход. Если свет поглощается неравномерно, то скорость генерации зависит от расстояния x до освещенной поверхности:

$$G = \frac{\alpha\eta I}{\hbar\omega} \frac{(1 - r_\infty)\,[\exp(-\alpha x) + r_\infty \exp(-2\alpha d + \alpha x)]}{1 - r_\infty^2 \exp(-2\alpha d)}, \qquad (12.1.5)$$

где r_∞ — коэффициент отражения от бесконечно толстого образца и d — толщина образца.



Фиг. 12.1. Схема исследования фотопроводимости.

При фотогенерации электронов, например из акцепторов, имеем

$$\alpha\eta = \sigma_A N_A (1 - f), \qquad (12.1.6)$$

где N_A — полная концентрация акцепторов, σ_A — сечение фотогенерации и f — вероятность заполнения акцепторных уровней электронами.

В стационарном случае из (12.1.3) следует, что $\Delta n = G\tau_n$. Если свет генерирует пары носителей, т. е. $\Delta n = \Delta p$, то из (12.1.2) получаем

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = G\tau_n \frac{b + 1}{n_0 b + p_0}. \qquad (12.1.7)$$

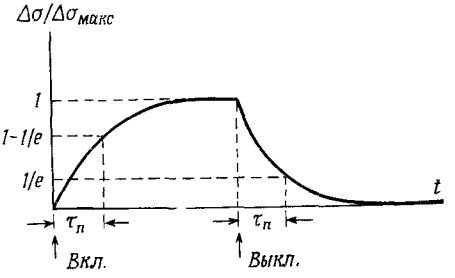
Отсюда мы видим, что фотопроводнику, обладающему высокой чувствительностью ($\Delta\sigma \gtrsim \sigma_0$), присуще большое время релаксации τ_n.

Кинетика фотопроводимости, обусловленная многократным попеременным включением и выключением света небольшой интенсивности, показана на фиг. 12.2. Время релаксации легко определить, если кривые нарастания и уменьшения фотопроводимости представляют собой экспоненциальные функции времени.

По результатам измерения τ_n и $\Delta\sigma/\sigma_0$ в стационарных условиях определяется квантовый выход. Для оценки Δn возьмем

типичные значения $\eta = 1$, $\tau_n = 10^{-4}$ с, $I = 10^{-4}$ Вт/см^2, $\alpha = 10$ см$^{-1}$ и длину волны 2 мкм, которой соответствует $\hbar\omega = 10^{-19}$ Вт·с. Следовательно, $G = 10^{17}$ см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$ и $\Delta n = 10^{13}$ см$^{-3}$.

Если энергия падающих фотонов превышает ширину запрещенной зоны ε_G, то рекомбинация фотогенерированных пар может сопровождаться излучением фотонов $\hbar\omega = \varepsilon_G$. Скорость ре-

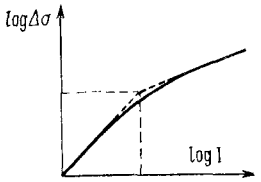


Фиг. 12.2. Зависимость фотопроводимости от времени t и определение времени релаксации τ_n.

комбинации пропорциональна произведению $np = (n_0 + \Delta n) \times (p_0 + \Delta p)$, и, следовательно,

$$\frac{\Delta n}{\tau_n} = C(np - n_0 p_0) = C(n_0 \Delta p + p_0 \Delta n + \Delta n \Delta p), \qquad (12.1.8)$$

где C — коэффициент пропорциональности. В стационарных условиях левая часть (12.1.8) равна G, и если $\Delta n = \Delta p$, то уравнение является квадратным по Δn. Только при слабом



Фиг. 12.3. Фотопроводимость в случае наличия излучательной рекомбинации.
При малой интенсивности света I имеет место пропорциональность I; при сильных — пропорциональность $\sqrt{I}$.

освещении произведение $\Delta n \Delta p$ можно считать небольшим; тогда с учетом того, что $G \sim I$, изменение концентрации носителей пропорционально освещенности: $\Delta n \sim I$. При сильном освещении можно пренебречь суммой $n_0 \Delta p + p_0 \Delta n$, и мы имеем $\Delta n \sim \sqrt{I}$. Эта зависимость показана на фиг. 12.3.

Кроме излучательной рекомбинации с испусканием фотонов с энергией $\hbar\omega = \varepsilon_G$ может происходить и рекомбинация через центры рекомбинации как с излучением фотонов с $\hbar\omega < \varepsilon_G$, так и без излучения вообще. Центрами рекомбинации могут быть примеси или несовершенства структуры. Характерные примеры приведены в § 2 данной главы.

Скорость захвата электронов центрами рекомбинации одного типа можно представить в виде

$$\frac{\Delta n}{\tau_n} = C_n n (1 - f), \tag{12.1.9}$$

где $f = N_r^{\times}/N_r$ — вероятность того, что центр нейтрален (не занят), $C_n = N_r v \sigma_r$, где N_r — полная концентрация центров данного типа и σ_r — их сечение захвата. Скорость тепловой генерации электронов из центров рекомбинации равна

$$G = C_n' f, \tag{12.1.10}$$

где C_n'/N_r — вероятность тепловой ионизации центра. Из условия равновесия в темноте $\Delta n/\tau_n = G$ следует

$$\frac{C_n'}{C_n} = \frac{n(1-f)}{f} = \frac{1}{g} N_c \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_r}{k_B T}\right), \tag{12.1.11}$$

где N_c — эффективная плотность состояний зоны в отсутствие вырождения, определяемая выражением (3.1.31), и $\Delta\varepsilon_r = |\varepsilon_r - \varepsilon_c|$; множитель g зависит от вида примеси и учитывает вырождение ее уровней. Если под n_1 понимать концентрацию электронов в зоне проводимости, когда уровень Ферми проходит через уровень рекомбинации, то правая часть уравнения (12.1.11) равна $g_D^{-1} n_1$.

В неравновесных условиях, которые создаются, например, освещением полупроводника, результирующую скорость рекомбинации электронов можно выразить в виде

$$\frac{\Delta n}{\tau_n} = C_n [n(1-f) - g_D^{-1} n_1 f]. \tag{12.1.12}$$

Подобным же образом для скорости рекомбинации дырок имеем

$$\frac{\Delta p}{\tau_p} = C_p [pf - g_A p_1 (1-f)]. \tag{12.1.13}$$

Поскольку в стационарном случае скорости рекомбинации электронов и дырок равны $\Delta n/\tau_n = \Delta p/\tau_p$, эту величину можно обозначить просто $\Delta n/\tau$:

$$\frac{\Delta n}{\tau} = \frac{C_n C_p (np - n_i^2)}{C_n (n + g_D^{-1} n_1) + C_p (p + g_A p_1)}, \tag{12.1.14}$$

где $n_i = \sqrt{n_1 p_1}$ — концентрация собственных носителей. Такое же выражение $n_i = \sqrt{n_0 p_0}$ справедливо и для равновесных концентраций электронов n_0 и дырок p_0 в темноте; поэтому из

(12.1.14) получаем

$$\frac{\Delta n}{\tau} = \frac{n_0 \Delta p + p_0 \Delta n + \Delta p \Delta n}{C_p^{-1}\left(n_0 + g_D^{-1} n_1 + \Delta n\right) + C_n^{-1}\left(p_0 + g_A p_1 + \Delta p\right)}, \qquad (12.1.15)$$

где $\Delta n = n - n_0$, $\Delta p = p - p_0$. Для сокращения записи введем также обозначения $\tau_{p0} = C_p^{-1}$, $\tau_{n0} = C_n^{-1}$, $n_1' = g_D^{-1} n_1$, $p_1' = g_A p_1$; тогда, полагая $\Delta n = \Delta p \ll n_0$, p_0, имеем

$$\tau = \tau_{p0} \frac{n_0 + n_1'}{n_0 + p_0} + \tau_{n0} \frac{p_0 + p_1'}{p_0 + n_0}. \qquad (12.1.16)$$

Если $p_0 \gg n_0$, p_1', то $\tau = \tau_{n0}$ и не зависит от p_0; если $n_0 \gg p_0$, n_1', то $\tau = \tau_{p0}$ и не зависит от n_0. Необходимо отметить, что данный результат не распространяется на случай излучательной рекомбинации, когда, согласно (12.1.8), рекомбинационное время жизни зависит от концентрации электронов и дырок. Из (12.1.16) следует, что время релаксации τ максимально, когда p_0 и n_0 незначительно отличаются от n_i. Если концентрации Δn и Δp нельзя считать малыми и они равны между собой ($\Delta n = \Delta p$), то уравнение (12.1.15) становится квадратным уравнением относительно Δn; выводы, которые были сделаны в связи с обсуждением уравнения (12.1.8), применимы и в данном случае. Если $\Delta n \neq \Delta p$, то заполнение центров f меняется на величину

$$\Delta f = \frac{\Delta p - \Delta n}{N_r}. \qquad (12.1.17)$$

Ее можно вычислить из уравнения $\Delta n/\tau_n = \Delta p/\tau_p$, обе стороны которого представлены в виде выражений (12.1.12) и (12.1.13):

$$C_n[\Delta n(1 - f) - n\Delta f - n_1' \Delta f] = C_p[f \Delta p + p \Delta f + p_1' \Delta f]. \qquad (12.1.18)$$

Для приближенной численной оценки заменим f, n и p их равновесными значениями $n_0/(n_0 + n_1')$, n_0 и p_0 соответственно. Из вычислений зависимости времени релаксации τ от концентрации n_0 следует, что τ максимально при концентрации, которая в рассматриваемом случае, как правило, значительно отличается от концентрации носителей в собственном полупроводнике.

Уровни рекомбинации обычно являются глубокими уровнями. Неглубокие уровни, как правило, играют роль уровней прилипания. Например, неглубокий акцептор с вероятностью $1/\tau_1$ может захватить дырку и удерживать ее в среднем в течение времени τ_2. Средняя концентрация ΔP дырок на уровнях прилипания может быть определена из условия электронейтральности:

$$\Delta P = \Delta n - \Delta p. \qquad (12.1.19)$$

Если $1/\tau_p$ — вероятность того, что в единицу времени произойдет рекомбинация дырки с электроном, то

$$\frac{d\Delta p}{dt} = G - \frac{\Delta p}{\tau_p} - \frac{\Delta p}{\tau_1} + \frac{\Delta P}{\tau_2}. \qquad (12.1.20)$$

В равновесии (на что указывает индекс 0) скорости захвата на уровни прилипания и тепловой генерации дырок обратно в валентную зону равны

$$\frac{\Delta p_0}{\tau_1} = \frac{\Delta P_0}{\tau_2}. \qquad (12.1.21)$$

В процессе тепловой генерации участвуют фононы, поэтому τ_2 сильно зависит от температуры. Пусть скорость генерации дырок

$$G = \frac{\Delta p_0}{\tau_p}. \qquad (12.1.22)$$

Тогда из (12.1.19)—(12.1.22) следует

$$\Delta n_0 = G\tau_p\left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right). \qquad (12.1.23)$$

Относительное изменение электропроводности можно определить из выражения (12.1.7), если в нем τ_n заменить временем релаксации

$$\tau_p' = \tau_p \frac{1 + b\,[1 + \tau_2/\tau_1]}{1 + b}, \qquad (12.1.24)$$

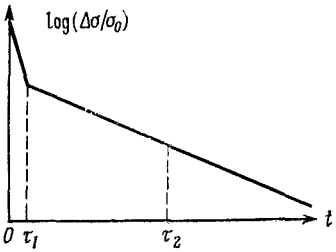
которое при $\tau_2 \gg \tau_1$ приближенно равно

$$\tau_p' \approx \tau_p \frac{b}{1 + b} \frac{\tau_2}{\tau_1}. \qquad (12.1.25)$$

Время релаксации τ_p' существенно превышает время релаксации в отсутствие прилипания, равное τ_p. Таким образом, уровни прилипания существенно увеличивают чувствительность фотопроводника, увеличивая также время отклика. Причина такого поведения ясна: чем больше дырок захвачено на уровни прилипания, тем больше электронов, как это следует из условия электронейтральности (12.1.19), остаются свободными в зоне проводимости, что обеспечивает бóльшую электропроводность. Количество дырок на уровнях прилипания тем больше, чем больше среднее время τ_2 пребывания дырки на уровне прилипания; то же самое справедливо и для электронов в полупроводнике p-типа.

Характер релаксации проводимости после выключения освещения для случая $\tau_2 \gg \tau_1$, τ_p иллюстрирует фиг. 12.4. В течение некоторого короткого времени, сравнимого с τ_1, уровни

прилипания остаются заполненными, а фотопроводимость уменьшается экспоненциально с малым временем релаксации τ_p. Однако в дальнейшем процесс определяется временем релаксации τ_2. В первом приближении релаксация фотопроводимости достаточно хорошо описывается суммой двух экспонент с постоянными времени τ_p и τ_2. Конечно, на экспериментальной установке, не отличающейся таким быстродействием, какое необходимо для измерения τ_p, наблюдается лишь медленное уменьшение $\Delta\sigma$, которое при низких температурах может длиться часами.



Фиг. 12.4. Релаксация фотопроводимости после экспозиции в случае тепловой генерации носителей из уровней прилипания.

Освещение образца длинноволновым излучением может опустошить уровни прилипания без генерации электронно-дырочных пар. Это значительно уменьшает τ_2 и приводит к «гашению» высокой фоточувствительности. Для белого излучения, которое кроме фотонов, генерирующих пары, включает также «гасящее» инфракрасное излучение, фоточувствительность существенно меньше, чем для монохроматического излучения.

Поверхностная рекомбинация была определена выражением (5.8.1). В образце толщиной d неосновной носитель должен пройти путь меньше $d/2$, чтобы попасть на поверхность. Следовательно, скорость рекомбинации равна

$$\frac{d\,\Delta p}{dt} = -\frac{2s\,\Delta p}{d}, \tag{12.1.26}$$

откуда определяется время релаксации

$$\tau_p' = \frac{d}{2s}. \tag{12.1.27}$$

Скорость поверхностной рекомбинации на травленой поверхности равна $s = 10^2$ см/с; таким образом, при $d/2 = 1$ мм $\tau_p' = 1$ мс. Поверхности, обработанной пескоструйным способом, соответствует $s = 10^6$ см/с и при тех же размерах образца $\tau_p' = 100$ нс. Результирующее время релаксации при наличии объемной и поверхностной рекомбинации определяется выражением

$$\frac{1}{\tau_p'} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{2s}{d}. \tag{12.1.28}$$

Ясно, что состояние поверхности фотопроводника в значительной мере определяет его свойства.

В заключение отметим, что отношение сигнал/шум для фотопроводников может определяться генерационно-рекомбинационным шумом. Эти процессы (включая прилипание) являются статистическими. Поэтому уменьшить шум данного типа можно лишь путем исключения центров рекомбинации и прилипания, что, однако, как было показано, приводит к уменьшению фоточувствительности. О практических применениях см., например, работу [1][1]).

§ 2. Глубокие уровни в германии

Процессы рекомбинации и прилипания удобно исследовать на примере глубоких уровней в германии, которые являются либо дважды акцепторными, либо дважды донорными. Мы увидим, что один и тот же атом примеси, обладающий глубокими уровнями, может в зависимости от типа проводимости, которая в свою очередь определяется легированием неглубокими примесями, играть роль либо центра рекомбинации, либо центра прилипания. Таким образом, на германии можно промоделировать разнообразные явления, связанные с рассматриваемыми процессами [3].

Многозарядные акцепторные уровни в германии и коэффициенты распределения (указывающие отношение концентрации примеси в твердой фазе Ge к концентрации примеси в жидкой фазе Ge, находящейся в термодинамическом равновесии с твердой фазой [4]) приведены на фиг. 3.7. Рассмотрим, например, примесь Fe в p-Ge. В результате тепловой ионизации возникают дырка и ион Fe^-:

$$Fe + 0{,}35\ эВ \rightleftarrows e^+ + Fe^-. \qquad (12.2.1)$$

В n-Ge при низких температурах Fe присутствует в форме ионов Fe^{--}, при тепловой ионизации которых высвобождается электрон и образуется ион Fe^-:

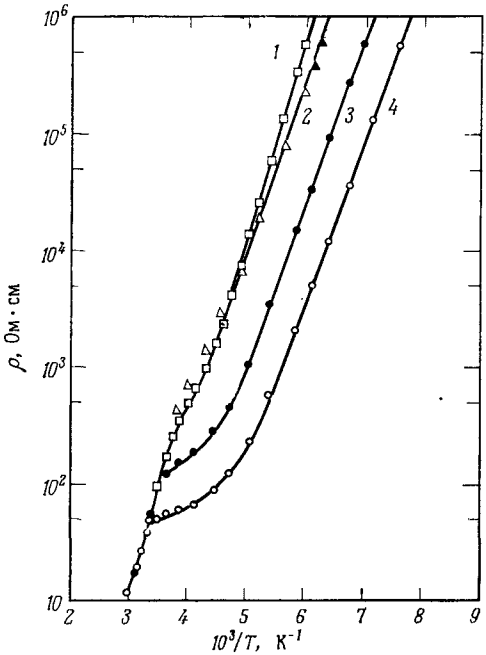
$$Fe^{--} + 0{,}27\ эВ \rightleftarrows e^- + Fe^-. \qquad (12.2.2)$$

Таким образом, Fe играет роль акцептора, а Fe^{--} — донора, и обычно в n-Ge не бывает Fe, а в p-Ge не бывает Fe^{--}. Тип проводимости определяется типом примеси (обычно бора или фосфора), содержащейся в железе в концентрации порядка нескольких миллионных долей, в зависимости от характера очистки железа. Так как при росте кристалла из жидкой фазы бор и фосфор внедряются значительно легче, чем железо, вы-

[1]) Обзор работ по глубоким примесям имеется в работе [2].

ращенный кристалл содержит значительно меньше железа, чем этих неглубоких примесей.

На фиг. 12.5 приведена температурная зависимость темнового сопротивления n-Ge и p-Ge, легированных железом. Из наклона прямых линий определяется энергия активации, равная 0,28 эВ в n-Ge и 0,34 эВ в p-Ge. С учетом поправки на зави-



Фиг. 12.5. Зависимость удельного сопротивления от обратной температуры для ряда образцов с различной концентрацией доноров, изготовленных из одного кристалла Ge, легированного Fe [5].

1 — p-Ge, наклон 0,34 эВ; *2* — n-Ge, 0,29 эВ; *3* — n-Ge, 0,28 эВ; *4* — n-Ge, 0,28 эВ. В направлении от *1* к *4* концентрация доноров, фоточувствительность и время релаксации увеличиваются (фиг. 12.6).

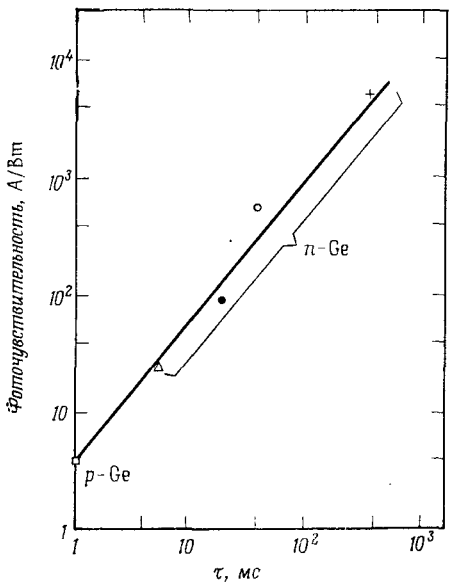
симость подвижности от температуры из температурной зависимости концентрации дырок и электронов следуют значения 0,27 и 0,35 эВ, которые и приведены в выражениях (12.2.1) и (12.2.2). Согласно данным фиг. 12.5, вымораживание носителей наступает при температуре около 150 К. Освещение образцов фотонами, для которых $\hbar\omega \gtrsim \varepsilon_G$, приводит к генерации электронно-дырочных пар. После прекращения освещения сопротивление возрастает неэкспоненциально. Определим τ как время, за которое сопротивление увеличивается на три порядка. На фиг. 12.6 показана связь между чувствительностью и временем τ

для образцов p- и n-типа. Очевидно, образцы n-типа содержат уровни прилипания, которые проявляются при низких температурах, а образцы p-типа таких уровней не содержат.

Из (12.2.2) следует, что при низких температурах образцы n-типа содержат ионы Fe^{--}. Неосновными носителями являются дырки, которые притягиваются отрицательными ионами:

$$Fe^{--} + e^{+} \rightleftarrows Fe^{-}. \qquad (12.2.3)$$

Так как отрицательно заряженные электроны отталкиваются ионами Fe^{-}, рекомбинации электрона и захваченной дырки не происходит; поэтому ионы Fe^{--} играют роль центров прилипания для дырок. Тот факт, что освещенные образцы содержат ионы Fe^{-}, которые рассеивают электроны меньше, чем ионы Fe^{--}, содержащиеся в темноте, подтверждается температурной зависимостью подвижности (фиг. 12.8; приведенные данные относятся к глубоким уровням Mn, которые, однако, играют такую же роль, как и уровни Fe).



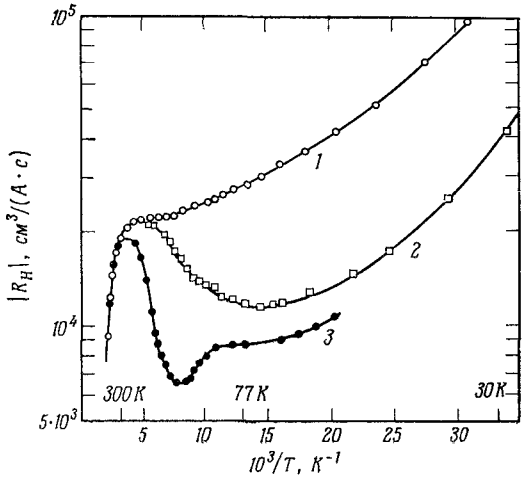
Фиг. 12.6. Взаимосвязь фоточувствительности при энергии фотонов 0,83 эВ и времени релаксации фотопроводимости для тех же образцов, что и на фиг. 12.5, и образца из другого кристалла (+).

При сильной освещенности образцов n-типа происходит реакция

$$Fe^{-} + e^{+} \rightleftarrows Fe \qquad (12.2.4)$$

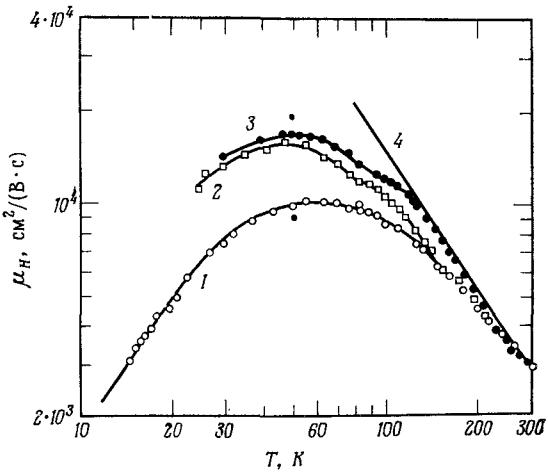
с образованием нейтральных атомов, которые не отталкивают электроны и играют роль центров рекомбинации. Время жизни становится малым, а чувствительность — небольшой. На фиг. 12.7 показана зависимость коэффициента Холла от температуры при различных уровнях освещенности.

В образцах p-типа центры рекомбинации (нейтральные атомы Fe) содержатся уже при низкой освещенности [см. (12.2.1)]. Как время жизни, так и чувствительность в этом случае малы.



Фиг. 12.7. Зависимость коэффициента Холла от температуры в *n*-Ge, легированном Mn, при различной освещенности [3].

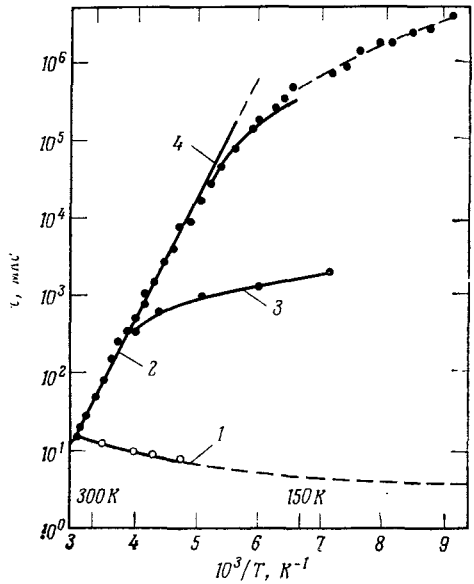
1 — при термодинамическом равновесии; *2* — при освещении излучением с длиной волны 1,8 мкм; *3* — при сильном освещении излучением вольфрамовой лампы (3000 К) через германиевый фильтр толщиной 1 мм.



Фиг. 12.8. Температурная зависимость холловской подвижности, соответствующая данным, приведенным на фиг. 12.7 [3].

1 — при термодинамическом равновесии; *2* — при освещении излучением с длиной волны 1,8 мкм; *3* — при сильном освещении излучением вольфрамовой лампы (3000 К) через германиевый фильтр толщиной 1 мм; *4* — прямая с наклоном −1,5.

Зависимость времени релаксации τ от температуры в n-Ge и p-Ge, легированных глубокими уровнями (Mn), приведена на фиг. 12.9. Удельное сопротивление образцов необходимо было выбрать достаточно низким для того, чтобы время максвелловской релаксации (5.2.23) было существенно меньше, чем τ [1]).



Фиг. 12.9. Температурная зависимость времени релаксации фотопроводимости в Ge, легированном Mn [3].

1 — низкоомный p-Ge; *2* — низкоомный n-Ge; *3* — то же, что и *2*, при высоком уровне подсветки; *4* — прямая с наклоном 0,31 эВ.

В области высоких температур наклон кривых в случае Mn в n-Ge соответствует энергии 0,31 эВ. Она рассматривается как энергия активации либо процесса захвата электронов через отталкивающий барьер, либо тепловой генерации дырок с уровней прилипания. Пелл [6] предложил метод обратного тока и показал, что в случае Mn в n-Ge имеет место тепловая генерация дырок.

Теллур в Ge является дважды донором с уровнями на 0,1 и 0,28 эВ ниже зоны проводимости:

$$\mathrm{Te} + 0{,}10\ \text{эВ} \rightleftarrows e^- + \mathrm{Te}^+, \qquad (12.2.5)$$

$$\mathrm{Te}^+ + 0{,}28\ \text{эВ} \rightleftarrows e^- + \mathrm{Te}^{++}. \qquad (12.2.6)$$

[1]) В противном случае мы имеем дело с высокоомным полупроводником. — *Прим. ред.*

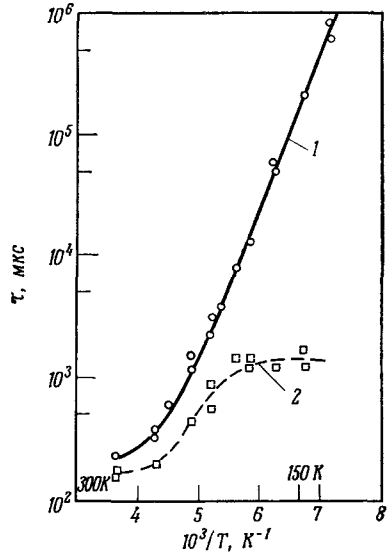
Образцы p-типа при низких температурах содержат ионы Te^{++}. Неосновные носители (электроны) после фотогенерации пар захватываются этими ионами и создают ионы Te^{+}. Эти ионы не притягивают положительных дырок и, таким образом, играют роль уровней прилипания для электронов. Образцы n-типа при низких температурах, по-видимому, содержат атомы Te, которые захватывают положительные дырки:

$$Te + e^{+} \rightleftarrows Te^{+}. \quad (12.2.7)$$

Однако образовавшиеся ионы Te^{+} быстро захватывают отрицательно заряженные электроны:

$$Te^{+} + e^{-} \rightleftarrows Te \quad (12.2.8)$$

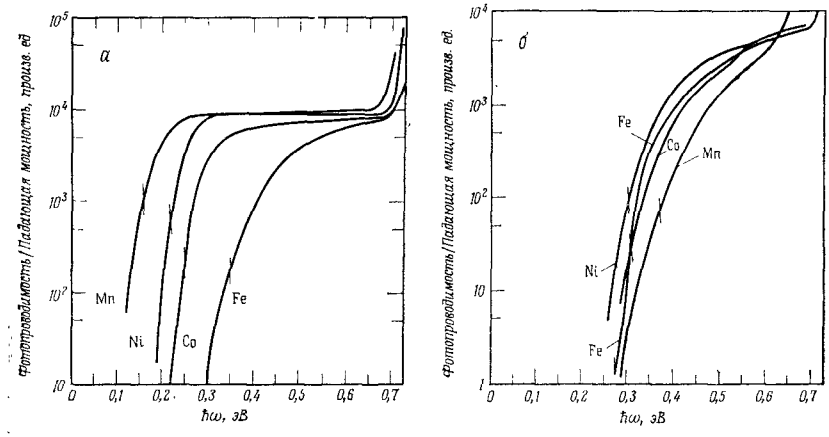
и, следовательно, играют роль центров рекомбинации. На фиг. 12.10 приведена температурная зависимость времени релаксации фотопроводимости p-Ge, легированного Te.



Фиг. 12.10. Температурная зависимость времени релаксации фотопроводимости в p-Ge, легированном Te [3].
1 — без подсветки (наклон прямой 0,26 эВ); *2* — при высоком уровне подсветки.

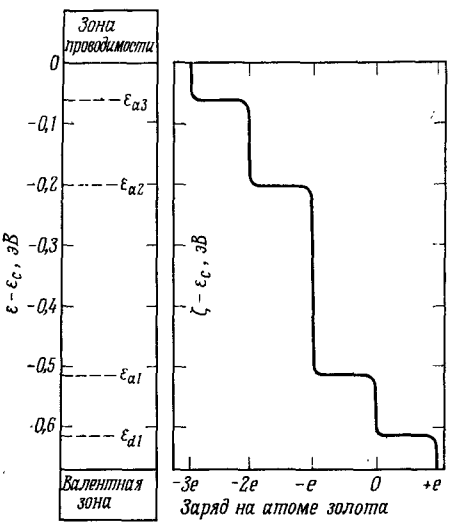
Спектральная чувствительность кристаллов n-Ge и p-Ge, легированных различными переходными металлами, при 77 K приведена на фиг. 12.11. Наибольшее различие между n-Ge и p-Ge установлено для образцов, легированных Mn, что находится в соответствии с энергетическими положениями уровней, указанных на фиг. 3.7.

Весьма своеобразными свойствами обладает примесь золота в германии. Из фиг. 3.7 ясно, что золото может быть донором, расположенным на 0,05 эВ выше потолка валентной зоны, или акцептором с тремя различными уровнями. Как и в рассмотренном выше случае дважды акцепторов, роль данной примеси определяется сортом примесей с неглубокими уровнями, которые неизбежно существуют вместе с примесью, создающей глубокие уровни. С точки зрения статистики можно утверждать, что все определяется положением уровня Ферми (который, как показано в гл. 3, находится вблизи зоны проводимости в полупроводнике n-типа или вблизи валентной зоны в полупроводнике



Фиг. 12.11. Спектры фотопроводимости при 77 К для Ge, легированного примесями с глубокими уровнями [3].
а — *p*-Ge; *б* — *n*-Ge (в случае Mn температура равна 196 К). Вертикальные штрихи на кривых указывают энергию термической ионизации

p-типа). На фиг. 12.12 слева приведены энергетические положения четырех уровней Au в Ge, а справа — зависимость заряда на этом примесном центре от положения уровня Ферми. Поскольку донор расположен наиболее низко (на 0,05 эВ выше потолка валентной зоны), а следующий уровень является акцептором и расположен на 0,15 эВ выше потолка валентной зоны, переходы между этими двумя уровнями возможны при условии, что уровень Ферми расположен между ними, а энергия фотона равна разности энергий уровней золота.



Фиг. 12.12. Уровни Au в Ge и зависимость заряда на атом примеси при низких температурах от положения уровня Ферми [7, 8].

В табл. 12.1 приведены некоторые параметры фотодетекторов из германия.

Таблица 12.1

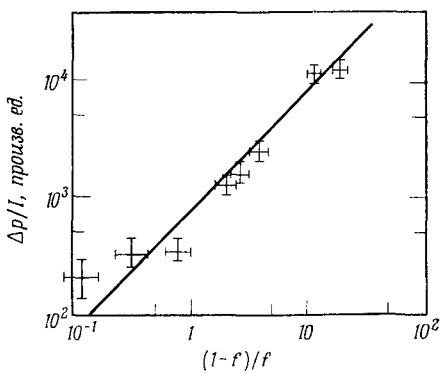
Фотодетекторы из германия [3]

(з. п. — зона проводимости, в. з. — валентная зона)

Примесь	Уровень	Рабочая температура, К	Длинноволиовая граница, мкм
Zn	0,03 эВ выше в. з.	< 15	> 40
Zn	0,09 эВ выше в. з.	60	18
Te	0,10 эВ ниже з. п.	60	15
Au	0,05 эВ ниже з. п.	20	12
Au	0,05 эВ выше в. з.	20	25
Au	0,15 эВ выше в. з.	77	12
Cu	0,04 эВ выше в. з.	20	27
Mn	0,16 эВ выше в. з.	65	8,5

§ 3. Сечение захвата акцепторного уровня прилипания

Для определения сечения захвата σ_p отрицательно заряженного акцептора необходимо знать концентрации как глубоких примесных уровней, так и неглубоких доноров. Вместо того чтобы выращивать кристалл из расплава, легированного дважды акцептором, легирование осуществляется продолжительной диффузией, например Ni при 1123 К в кристалл Ge, содержащий заданную концентрацию неглубокого донора, например As. Когда концентрация Ni выравнивается, вероятность заполнения f уровней Ni вычисляется по известным концентрациям As и Ni: $f = N_{As}/N_{Ni}$. Первый акцепторный уровень Ni находится на 0,22 эВ выше валентной зоны (фиг. 3.7). Когда $f < 1$, образцы имеют проводимость p-типа. Произведение fN_{Ni} равно концентрации отрицательно заряженных акцепторов Ni. Если тепловую скорость дырок обозначить через v, то их время жизни равно



Фиг. 12.13. Зависимость приведенной концентрации фотогенерированных носителей $\Delta p/I$ от $(1-f)/f$ для p-Ge, легированного Ni, при энергии фотонов 0,3 эВ и $T = 77$ К [3].

$$\tau_p = (\sigma_p v f N_{Ni})^{-1}. \qquad (12.3.1)$$

Пусть σ_A — сечение фотоионизации нейтрального акцептора, определяемое соотношением

$$G = \sigma_A (1 - f) N_{\text{Ni}} \frac{I}{\hbar\omega}. \tag{12.3.2}$$

Тогда из (12.1.3) при стационарных условиях получаем

$$\frac{\Delta p}{I} = \frac{\sigma_A}{\sigma_p} \frac{1}{\hbar\omega v} \frac{1-f}{f}. \tag{12.3.3}$$

На фиг. 12.13 показана приведенная концентрация фотогенерированных носителей $\Delta p/I$ в зависимости от $(1-f)/f$ [3]. Согласно измерениям поглощения, сечение $\sigma_A \approx 10^{-16}$ см^2 для Ni в p-Ge при 77 К и энергии фотона 0,3 эВ. Среднюю тепловую скорость дырок можно считать равной 10^7 см/с, тогда сечение захвата дырки σ_p однократно заряженным отрицательным ионом Ni при 77 К равно 10^{-13} см^2. Это соответствует значению радиуса $\sqrt{\sigma_p/\pi} = 18$ Å.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sze S. M.*, Physics of Semiconductor Devices, Wiley, New York, 1969. (Имеется перевод: *С. М. Зи*, Физика полупроводниковых приборов, «Энергия», М., 1973.)
2. *Queisser H. J.* в книге Festkörperprobleme XI (Hrg. O. Madelung), Vieweg, Braunschweig, 1971.
3. *Newman R., Tyler W. W.* в книге Solid State Physics (eds. F. Seitz and D. Turnbull), Vol. 8, Acad. Press, New York, 1957, p. 49.
4. *Thurmond C. D.*, Semiconductors (ed. N. B. Hannay), Reinhold, New York, 1960, p. 145.
5. *Tyler W. W., Woodbury H. H.*, Phys. Rev., **96**, 874 (1954).
6. *Pell E. M.*, Journ. Appl. Phys., **26**, 658 (1955).
7. *Dunlap W. C.* в книге Progress in Semiconductors (ed. A. F. Gibson), Vol. 2, Temple Press, London, 1957.
8. *Blakemore J. S.*, Semiconductor Statistics, Pergamon, London, 1962. (Имеется перевод: *Дж. Блекмор*, Статистика электронов в полупроводниках, «Мир», М., 1964.)

Глава 13. ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Электролюминесцентные приборы испускают видимый свет или инфракрасное излучение с шириной линии около 100 Å, а когерентное излучение полупроводниковых лазеров может иметь ширину линии, не превышающую 0,1 Å. Эти приборы вместе с фотодиодами и фотоэлементами (гл. 5, § 8 и 9, и гл. 12) называются приборами оптоэлектроники. Первые преобразуют электрическую энергию в свет, а фотоэлектрические приборы предназначаются для обратного преобразования.

Разнообразие люминесцентных эффектов обусловлено способами возбуждения: фотолюминесценция возбуждается излучением оптической области спектра; катодолюминесценция — катодными лучами, т. е. потоком электронов; рентгенолюминесценция — рентгеновскими лучами; некоторые виды люминесценции возбуждаются γ-лучами и быстрыми частицами; электролюминесценция — постоянным или переменным электрическим полем. Если процессу излучения предшествует прилипание носителей, времена релаксации могут быть весьма продолжительными — порядка секунд и даже часов, тогда вместо термина «люминесценция» используется термин «фосфоресценция». При постепенном повышении температуры интенсивность излучения меняется; зависимость интенсивности излучения от времени называется кривой высвечивания. Типичными фосфо́рами являются сульфиды, селениды и теллуриды кадмия и цинка [1]); явления в этих веществах столь сложны, что мы не можем их здесь рассматривать. Мы также лишь упомянем эффект Дестрио [2], суть которого состоит в том, что микрокристаллики, как правило непроводящих твердых тел, взвешенные в диэлектрической среде, излучают свет при воздействии на них переменного поля частоты порядка 100 Гц. Электролюминесценция при инжекции неосновных носителей в p—n-переход, смещенный в прямом направлении, в результате излучательной рекомбинации инжектированных носителей иногда называется эффектом Лосева [3].

§ 1. Светодиоды

Возможны следующие излучательные переходы возбужденных носителей: 1) межзонные с $\hbar\omega \geqslant \varepsilon_G$; 2) из зоны проводимости

---

[1]) Более подробные сведения о соединениях $A^{II}B^{VI}$ и их люминесценции см., например, в работе [1].

на акцепторный уровень, с донорного уровня в валентную зону или с донорного уровня на акцепторный уровень; 3) внутризонные, включающие явления, обусловленные горячими носителями (тормозное излучение). Примером безызлучательного перехода служит эффект Оже: энергия перехода отдается другому электрону, который при этом возбуждается высоко в зону и потом теряет полученную энергию в результате каскадного перехода с излучением фотонов низкой энергии или фононов (см. обзор [4]).

Для расчета выхода люминесценции рассмотрим следующие уравнения скорости переходов. Скорость изменения концентрации электронов в зоне проводимости равна

$$\frac{dn}{dt} = G - \sigma_t v_n n N_t (1 - f_t) + A N_t f_t - \sigma_l v_n n p_l, \qquad (13.1.1)$$

где первые три члена в правой части уравнения по существу те же, что и в уравнении (12.1.3), в котором Δn задано (12.1.12), с тем отличием, что теперь они относятся к уровням прилипания (индекс t), а последний член описывает излучательную рекомбинацию посредством захвата электрона центром люминесценции (p — концентрация дырок на центрах люминесценции). Величины σ_t и σ_l представляют собой сечения захвата электронов уровнями прилипания и центрами люминесценции, A — постоянный коэффициент. Вероятность найти электрон на уровне прилипания f_t можно определить из дифференциального уравнения

$$\frac{df_t}{dt} = \sigma_t v_n n (1 - f_t) - \sigma_r v_p p f_t - A f_t, \qquad (13.1.2)$$

где второй член в правой части соответствует безызлучательной рекомбинации в результате захвата дырки из валентной зоны, v_n и v_p — скорости электронов и дырок. В стационарных условиях производные по времени в (13.1.1) и (13.1.2) равны нулю. После исключения сечения захвата электрона на уровни прилипания σ_t, решая относительно G в стационарных условиях ($dn/dt = df_t/dt = 0$), получаем

$$G = \sigma_l v_n n p_l + \sigma_r v_p N_t f_t p. \qquad (13.1.3)$$

Выход люминесценции η определим как отношение скорости излучательной рекомбинации к полной скорости рекомбинации:

$$\eta = \frac{\sigma_l v_n n p_l}{G} = \left(1 + \frac{\sigma_r v_p N_t f_t p}{\sigma_l v_n n p_l}\right)^{-1}. \qquad (13.1.4)$$

Если уровень Ферми расположен между уровнем прилипания электронов с энергией ε_t и уровнем люминесценции с энергией ε_l, отношение концентрации электронов на уровнях прилипания

к концентрации дырок в центрах люминесценции равно

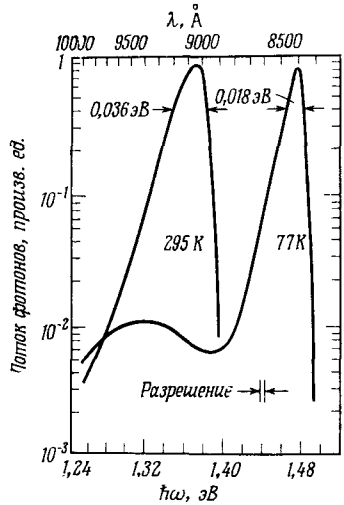
$$\frac{N_t f_t}{p_l} = \frac{N_t}{N_l} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t - \varepsilon_l}{k_B T}\right), \qquad (13.1.5)$$

где N_l — концентрация центров люминесценции. Окончательно для выхода люминесценции имеем

$$\eta = \left[1 + \frac{N_t}{N_l}\frac{\sigma_r}{\sigma_l}\frac{v_p}{v_n}\frac{p}{n}\exp\left(-\frac{\varepsilon_t - \varepsilon_l}{k_B T}\right)\right]^{-1}. \qquad (13.1.6)$$

Выход оказывается большим, если $N_l \gg N_t$ и $\varepsilon_t - \varepsilon_l \gg k_B T$, т. е. при низких температурах.

Наибольший известный выход люминесценции получен в GaAs при 20 К: $\eta = 40\%$ [5] (GaAs является «прямым» полупроводником, гл. 11, § 2). При комнатных температурах η не превышает 7%. Время отклика, как правило, порядка 1 нс или меньше. Спектры излучения при 295 и 77 К приведены на фиг. 13.1. Прямому полупроводнику соответствует большая вероятность излучательных переходов из зоны проводимости в валентную зону. Излучение соответствует инфракрасной области спектра даже при низких температурах [1]).

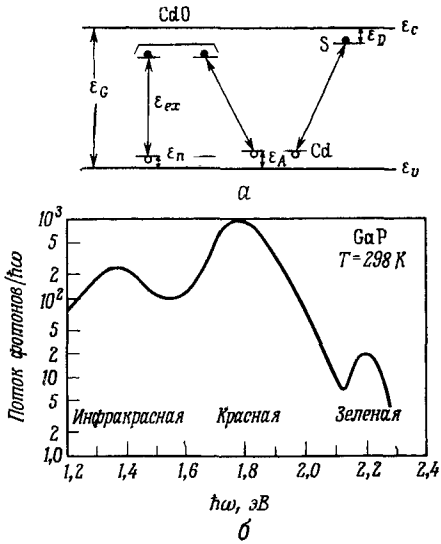


Фиг. 13.1. Спектры излучения светодиода GaAs, включенного в прямом направлении при температурах 77 и 295 К [5].

Диод, спектры излучения которого приведены на фиг. 13.1, изготовлен методом диффузии Zn, играющего роль акцептора; следовательно, в нем имеется p^+—n-переход. Из-за наличия хвоста состояний зоны в сильно легированной p^+-области поглощение излучения в ней больше, и поэтому больше излучения выходит через n-область. Недавно развит метод амфотерного легирования: кремний играет роль акцептора, если он замещает атом As, а в случае замещения атома Ga — роль донора. Путем тщательной термической обработки изготовляются почти компенсированные структуры, которые весьма эффективны в качестве излучателей.

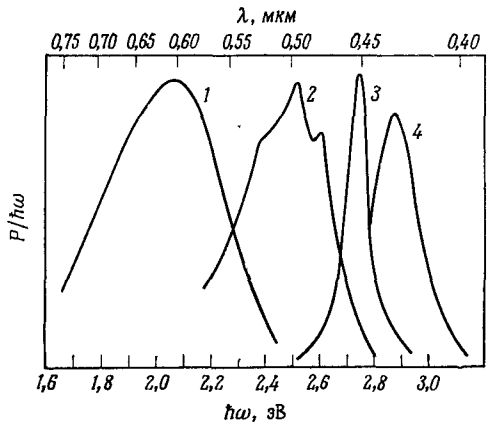
[1]) В оптоэлектронике для развязки цепей светодиод из GaAs применяется в сочетании с детектором из Si.

Полупроводники с широкой запрещенной зоной, например GaN, GaP, SiC, излучают видимый свет. Полупроводник GaN прямой; ширина запрещенной зоны ε_G в нем составляет 3,7 эВ при комнатной температуре. В нем пока не удается создать переходы типа p—n; барьеры Шоттки излучают в синей и ультрафиолетовой областях спектра, но при слишком высоких напряжениях. Спектры излучения GaP и SiC приведены на фиг. 13.2 и 13.3. Оба вещества непрямые, и этим объясняется низкий выход. Излучающие p—n-переходы в GaP создаются легированием атомами Cd и O и содержат комплексы Cd—O. Красный свет излучается в результате перехода с уров-



Фиг. 13.2. Излучение светодиодов из GaP [6, 7].

а — зонная модель, включающая акцептор Cd, донор S и комплекс Cd—O. Переход в середине диаграммы соответствует излучению в красной полосе, а переход из S на Cd — в зеленой полосе; *б* — инфракрасная, красная и зеленая полосы излучения.



Фиг. 13.3. Спектры излучения светодиодов из SiC при 300 K [10].

Кристаллическая структура политип 6H. Области n-типа содержат примеси: *1* — N, B; *2* — N, Al; *3* — N. Полосе *4* соответствует излучение при рекомбинации свободных носителей.

ня экситона, связанного с этим комплексом, на акцепторный уровень Cd, а зеленому свету соответствует переход с донорного уровня S на акцепторный уровень Cd [6]. Экситоны, связанные с изоэлектрической примесью N (замещающей P в GaP), тоже способствуют излучению зеленого света, который воспринимается глазом таким же ярким, как и красный, ввиду того что человеческий глаз обладает большей чувствительностью к зеленому свету [1]).

Спектр излучения SiC также зависит от типа примеси (N, Al, B; фиг. 13.3) [10]. Интенсивность излучаемого света пропорциональна току, который зависит от напряжения в пропускном направлении. Время отклика составляет 0,5 мкс. При комнатной температуре выход люминесценции составляет около 10^{-3}%, однако сообщалось о значениях выхода до 1%. Диоды отличаются исключительной стабильностью: испытания диодов площадью 1 мм^2 в течение двух лет при температуре от комнатной до 400 °C и при токах в пропускном направлении до 50—100 мА не выявили сколько-нибудь заметного ухудшения качества (другие светодиоды стареют из-за механических напряжений, наведенных фотонами). Уровень яркости соответствует 1000 лм/м^2 [2]). Диоды из SiC применяются для вывода численных и буквенно-численных данных. В связи с этим можно отметить, что выращиваются кристаллы диаметром более 1 см. В зависимости от кристаллографической модификации (кубическая или одна из политипных) ширина запрещенной зоны имеет значения от 2,2 до 3,1 эВ. Для изготовления p—n-переходов используется эпитаксиальное выращивание из жидкого Si, насыщенного углеродом, на подложке из p-SiC при температурах 1500—1850 °C и скорости роста 0,5 мкм/мин. Легирование донорами осуществляется выращиванием в атмосфере азота. Контакты изготовляются вплавлением сплава Au—Ta. Так как на поверхности SiC можно получить двуокись SiO_2, то можно воспользоваться методами фотолитографии, разработанными для Si (гл. 5, § 7).

Для изготовления индикаторных лампочек и устройств вывода информации в настоящее время наиболее часто используется полупроводник $GaAs_xP_{1-x}$, который при $x \leqslant 0{,}55$ является прямозонным с $\hbar\omega = 1{,}98$ эВ (красный свет). Обычно применяется процесс эпитаксиального наращивания слоя на подложку из GaAs.

Электролюминесцентные диоды видимого света (светодиоды) в будущем, возможно, найдут применение как компоненты

---

[1]) Об относительной чувствительности глаза см. [8, 9].

[2]) Сопоставление фотометрических и радиометрических величин имеется в обзоре по светодиодам [11].

плоского телевизионного экрана. Однако пока не решена задача разрешающей способности экрана: для квадрата с 500 точками вдоль каждой из сторон (как в кинескопе) потребуется 250 000 диодов, что связано с трудностями изготовления и сбыта.

§ 2. Полупроводниковый лазер

Слово «лазер» образовано из первых букв слов английского названия «усиление света посредством стимулированной эмиссии излучения». Прежде чем выяснять, чем лазер отличается от светодиода, рассмотрим сначала кратко общие принципы действия двухуровневого атомного или молекулярного лазера [1]).

Пусть ε_1 и ε_2 — энергии двух уровней атома или молекулы с концентрациями электронов n_1 и n_2. Излучательному переходу соответствует испускание фотона с энергией

$$h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \qquad (13.2.1)$$

Вероятность перехода равна n_2/τ_r, где τ_r — время жизни относительно излучательного перехода для электрона на верхнем уровне 2. Такой переход называется спонтанным. Поглощение излучения, точнее плотности энергии поля излучения $\rho(\nu)\Delta\nu$ на частотах от ν до $\nu + \Delta\nu$, равно $B_{12}n_1\rho(\nu)\Delta\nu$, где $\Delta\nu$ — ширина линии, а B_{12} — коэффициент, который будет определен ниже. Согласно Эйнштейну [15] [2]), возможно также стимулированное излучение $B_{21}n_2\rho(\nu)\Delta\nu$, аналогом которого в механике можно считать вынужденные колебания классического осциллятора при возбуждении в противофазе. Осциллятор затухает и передает энергию системе возбуждения. Скорость изменения плотности фотонов $\rho(\nu)$ определяется выражением

$$\frac{d(\rho\,\Delta\nu)}{dt} = \frac{h\nu n_2}{\tau_r} + (B_{21}n_2 - B_{12}n_1)\,\rho\,\Delta\nu; \qquad (13.2.2)$$

она равна нулю, когда концентрация электронов соответствует равновесию:

$$n_i \sim g_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}\right), \qquad i = 1,\ 2, \qquad (13.2.3)$$

где g_i — степень вырождения i-го уровня. Плотность фотонов при равновесии определяется плотностью энергии излучения

---

[1]) Подробный обзор газовых и твердотельных лазеров см. в [12], а полупроводниковых лазеров — в [13, 14].

[2]) Стимулированное испускание фотонов принималось во внимание в случае поглощения света свободными носителями (гл. II, § 10).

черного тела

$$\rho(\nu)\,\Delta\nu = \frac{8\pi\nu^2\,\Delta\nu}{c^3}\,\frac{h\nu}{\exp\left[(h\nu/k_BT)-1\right]}. \qquad (13.2.4)$$

При равновесии левая часть (13.2.2) равна нулю. Если разделить (13.2.2) на ρ и рассмотреть случай $T\to\infty$, когда, согласно (13.2.4), плотность излучения $\rho\to\infty$, то мы получим

$$B_{21}n_2 = B_{12}n_1. \qquad (13.2.5)$$

При $T\to\infty$ из (13.2.3) следует, что $n_2/n_1 = g_2/g_1$; следовательно,

$$B_{21}g_2 = B_{12}g_1. \qquad (13.2.6)$$

Согласно Эйнштейну, это равенство выполняется при любой температуре. Таким образом, из (13.2.1), (13.2.4) и (13.2.6) следует

$$B_{21} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2\tau_r\,\Delta\nu}. \qquad (13.2.7)$$

Зависимость распределения ρ фотонов от времени определяется из (13.2.2) в виде линейной функции от $\exp(-\alpha L)$, где время t заменено на L/c (L — оптическая длина пути). В кристалле следует учесть оптическую диэлектрическую проницаемость $\varkappa_{\text{опт}}$, и, считая длину кристалла равной L, для коэффициента поглощения из (13.2.2) получаем

$$\alpha = -2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\,\frac{c^2}{8\pi\nu^2\tau_r\,\Delta\nu\varkappa_{\text{опт}}}\left(n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1\right). \qquad (13.2.8)$$

Множитель $2\sqrt{(\ln 2)/\pi} \approx 0{,}94$ введен как поправка в случае гауссовой линии [16].

Отрицательные α соответствуют усилению волны. Если $g_2 = g_1$, то коэффициент усиления $-\alpha$ (обычно обозначаемый g) пропорционален n_2—n_1. В термодинамическом равновесии $n_2 < n_1$; следовательно, для усиления необходимо поддерживать инверсию заселенности.

Основное отличие лазера от светодиода состоит в том, что он испускает *когерентное* излучение. Важную роль в работе лазера играет резонатор Фабри — Перо. Роль резонатора выполняют две поверхности кристалла, получаемые сколом (фиг. 13.4). Если коэффициент отражения от поверхности скола при $L \gg \lambda$ (λ — длина волны) обозначить r_∞, то условие регенерации имеет вид

$$r_\infty \exp\int_0^L (g-\alpha')\,dz = 1, \qquad (13.2.9)$$

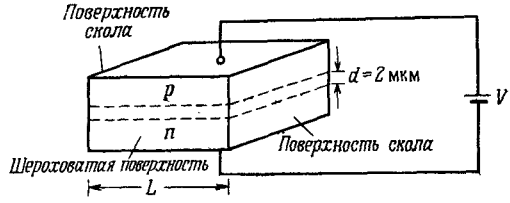
где α' — коэффициент поглощения, соответствующий безызлучательной рекомбинации; коэффициент усиления g зависит от потока фотонов, а следовательно, от координаты z. Пренебрегая для упрощения этой зависимостью, после интегрирования получаем

$$g = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{r_\infty}\right) + \alpha'. \qquad (13.2.10)$$

При $n_1 = 0$ пороговая накачка для стимулированного излучения определяется из (13.2.8) и (13.2.10):

$$\frac{n_2}{\tau_r} = \frac{\varkappa_{\text{опт}} 4\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^2 \sqrt{(\ln 2)/\pi}} \left[\frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{r_\infty}\right) + \alpha'\right]. \qquad (13.2.11)$$

Это выражение определяет концентрацию электронов, которую следует накачивать в единицу времени на уровень ε_2 для под-



Фиг. 13.4. Структура лазера с p — n-переходом.

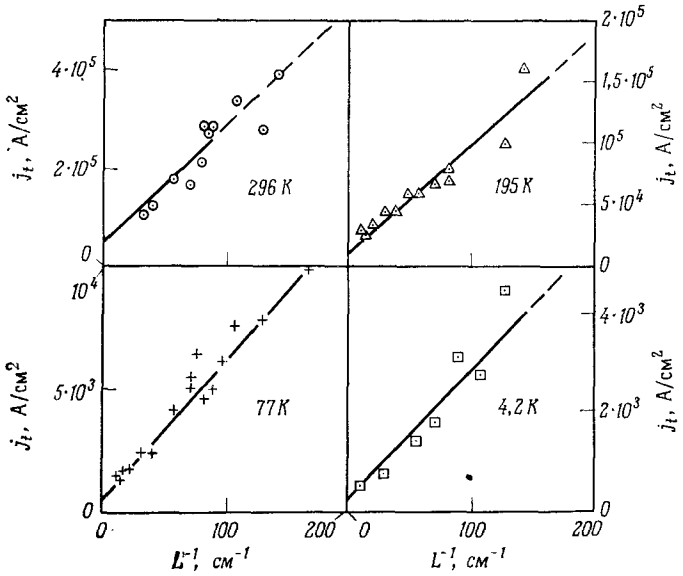
держания стимулированного излучения, при условии, что уровень ε_1 остается пустым.

Перейдем к рассмотрению распределения потенциала в p—n-переходе. Его схематическая упрощенная диаграмма с уровнем Ферми ζ, расположенным в зоне проводимости в области n-типа и в валентной зоне в области p-типа, приведена на фиг. 9.2, *а*. При смещении в прямом направлении инжектируются неосновные носители, и уровень Ферми разделяется на квазиуровни Ферми ζ_n^* и ζ_p^*, которые введены в гл. 5, § 4. На фиг. 9.2, *б* приведено распределение потенциала, соответствующее этому случаю. Важно отметить, что на некотором участке перехода состояния валентной зоны заполнены дырками, а состояния зоны проводимости заполнены электронами. Частота фотонов излучательной рекомбинации ν соответствует межзонным переходам и определяется из условия $\varepsilon_G = h\nu < (\zeta_n^* - \zeta_p^*)$. Напряжение на переходе составляет около ε_G/e. Плотность тока через переход j задана выражением (5.3.28), где ток насыщения j_s определяется формулой (5.3.40) с тем лишь различием, что в случае вырождения n_i следует заменить на n и можно считать, что подвижность дырок существенно меньше подвижности

электронов; тогда

$$j_s = \frac{|e|nd}{\tau}, \qquad (13.2.12)$$

где d — толщина перехода, составляющая около 2 мкм, а τ — полное время жизни, которое равно $\eta\tau_r$ (η — внутренний квантовый выход генерации фотона из электронно-дырочной пары).



Фиг. 13.5. Зависимость пороговой плотности тока от обратной длины диода GaAs при различной температуре [20].

Здесь мы имеем пример условий, которые предполагались при выводе (13.2.11): верхнему уровню 2 соответствует зона проводимости с полностью заполненными уровнями у дна зоны ($n_2 = n$), а уровню 1 соответствует потолок валентной зоны, где состояния не заняты. (Они полностью заполнены дырками, что, конечно, означает то же самое.) Так как (13.2.11) определяет пороговую накачку для стимулированного излучения, пороговую плотность тока j_t определяем из (13.2.11) и (13.2.12) [17]:

$$j_t = \frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{L}\ln\left(\frac{1}{r_\infty}\right) + \alpha'\right], \qquad (13.2.13)$$

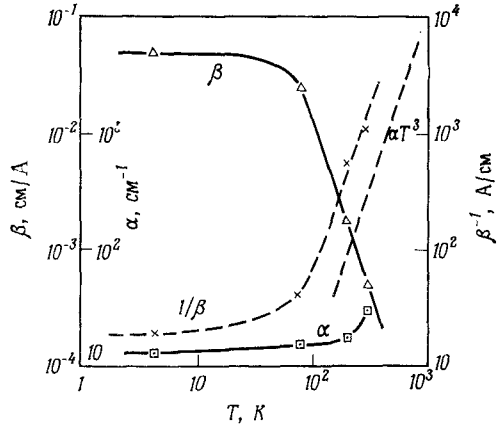
где коэффициент усиления β определяется выражением

$$\beta = \frac{\eta}{|e|d}\,\frac{c^2\sqrt{(\ln 2)/\pi}}{\varkappa_{\text{опт}} 4\pi\nu^2\,\Delta\nu}. \qquad (13.2.14)$$

Для длинных кристаллов $j_t \approx \alpha'/\beta$. Полная мощность, излучаемая через обе поверхности прибора, равна

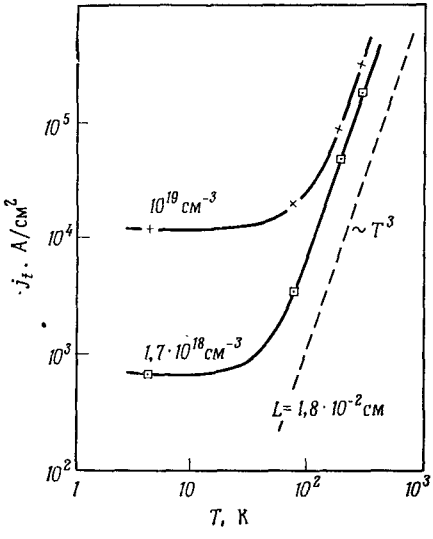
$$P = \frac{\eta \varepsilon_0 L W (j - j_t) \ln (1/r_\infty)}{|e| [\ln (1/r_\infty) + L\alpha']}, \qquad (13.2.15)$$

где W — ширина прибора [18, 19]. Линейная зависимость пороговой плотности тока от обратной длины кристалла $1/L$ имеет



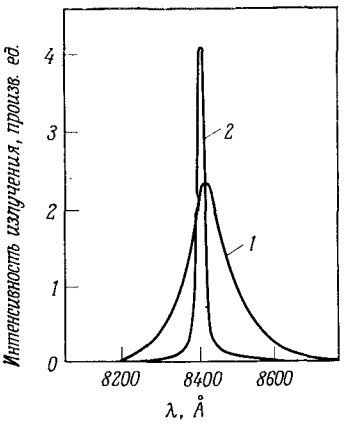
Фиг. 13.6. Температурные зависимости коэффициентов поглощения и усиления диодного лазера из GaAs [21].

место в GaAs при различных температурах от 4,2 К до комнатной. Экспериментальные результаты приведены на фиг. 13.5 [20]. Температурные зависимости коэффициентов поглощения и усиления приведены на фиг. 13.6 [21]. Быстрое увеличение $1/\beta$ с температурой, почти как T^3, наступает при $T > 100$ К. Подобные температурные зависимости характерны и для пороговых плотностей тока, приведенных на фиг. 13.7 для двух образцов с различным уровнем легирова-

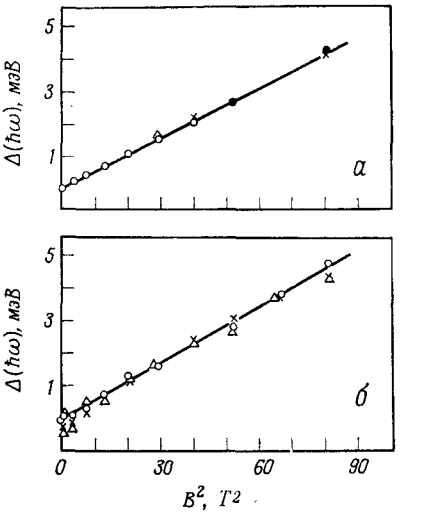


Фиг. 13.7. Температурная зависимость пороговой плотности тока для двух лазеров из GaAs с различным уровнем легирования подложки ($L = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ см) [21].

ния подложек [21] (подложки легированы Sn и имеют проводимость n-типа; область p-типа создается трехчасовой диффузией Zn при 850 °C и покрывается затем слоем Au—Ni).

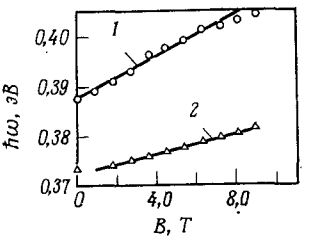


Фиг. 13.8. Спектры излучения лазера из GaAs при 77 К [22].
1 — ниже порога лазерного действия; *2* — выше порога.



Фиг. 13.9. Эффект Зеемана в случае излучения из GaAs при 4,2 К для лазера (*а*) и светодиода (*б*) [23].

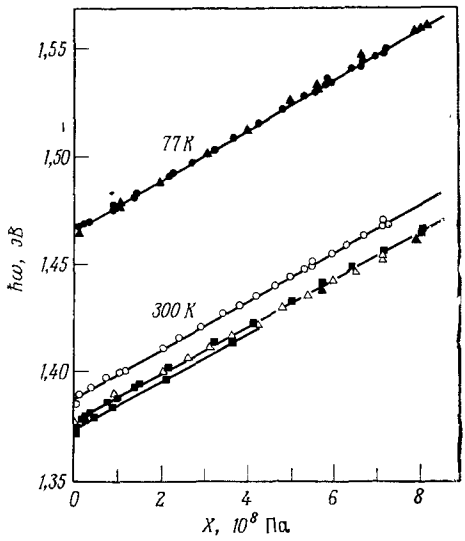
Спектры при токах меньше и больше порогового значения приведены на фиг. 13.8 [22]. Линия шириной около 125 Å сужается до нескольких ангстремов при 77 К и до менее чем 1 Å при 4,2 К.



Фиг. 13.10. Эффект Зеемана в случае излучения лазера из InAs при 77 К [22, 24].
1 — концентрация электронов $n=2\cdot10^{16}$ см$^{-3}$, $m/m_0=0{,}027$; *2* — $n\sim10^{19}$ см$^{-3}$, $m/m_0=0{,}057$.

Магнитное поле сдвигает линию испускания, как показано на фиг. 13.9 и 13.10 для GaAs и InAs [22]. Сдвиг в GaAs пропорционален B^2 и может быть объяснен квадратичным эффектом Зеемана в исходном состоянии, которым может оказаться основное состояние неглубокого донора или экситона. Согласно

оценке, проведенной на основании этого предположения, эффективная масса электрона m/m_0 равна 0,074 в случае фиг. 13.9, *а*

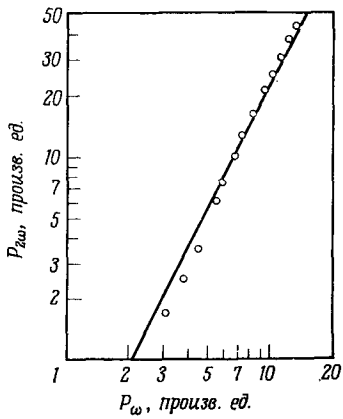


Фиг. 13.11. Зависимость частоты излучения лазера из GaAs от гидростатического давления при 77 и 300 К для различных образцов [25].

и 0,071 в случае фиг. 13.9, *б*; эти значения не противоречат данным по циклотронному резонансу. Линейный сдвиг в диодах из InAs согласуется с предположением о межзонном переходе.

На фиг. 13.11 показан сдвиг линии испускания лазера из GaAs в зависимости от гидростатического давления [25]. По величине сдвига определена константа деформационного потенциала.

Когда инжекционный лазер испускает мощность порядка 100 Вт из активного объема толщиной

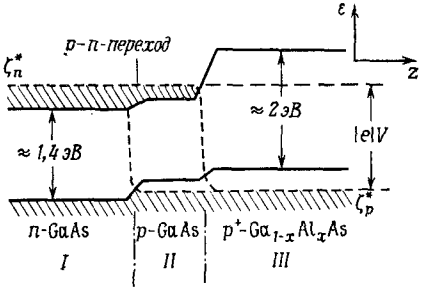


Фиг. 13.12. Излучение второй гармоники лазера из GaAs [26].

1 мкм и шириной 100 мкм, амплитуда поля в нем составляет около 10^5 В/см. В гл. 10, § 15, было показано, что при таких амплитудах может иметь место генерация второй гармоники.

На фиг. 13.12 приведена зависимость мощности излучения на второй гармонике $P_{2\omega}$ от мощности излучения на основной частоте для лазера из GaAs [26]. Как и следует из теории нелинейной оптики, $P_{2\omega} \sim P_{\omega}^2$.

По сравнению с другими лазерами инжекционные лазеры пока используются редко. Типичный импульсный лазер из GaAs, работающий при комнатной температуре (ток 150 А), излучает мощность 800 Вт на волне 0,916 мкм [27]; лазер непрерывной генерации из GaAs при температуре жидкого азота (ток 2,2 А) излучает 0,1 Вт на волне 0,84 мкм [28]. Типичные значения плотности порогового тока составляют 10^2 А/см^2 при температуре ниже 77 К и $5 \cdot 10^4$ А/см^2 при комнатной температуре.



Фиг. 13.13. Зависимость энергии от координаты в случае гетероперехода GaAs — $Ga_{1-x}Al_xAs$ с ограниченным активным объемом *II* [31—35].

Для непрерывной генерации (при мощности излучения более 20 мВт) при комнатной температуре используется немного видоизмененный лазер на основе GaAs. Создается гетеропереход [1]) GaAs/*p*-$Ga_{1-x}Al_xAs$ с шириной запрещенной зоны 2 эВ в области твердого раствора; разность значений ширины запрещенной зоны в переходе (для GaAs $\varepsilon_G = 1{,}4$ эВ) действует как барьер в основном для электронов зоны проводимости и задерживает (накапливает) инжектированные электроны в тонкой области *p*-GaAs (фиг. 13.13). Это накопление электронов обеспечивает высокую скорость стимулированного испускания фотонов даже при комнатной температуре. Коэффициент преломления в области GaAs гетероперехода несколько больше; это приводит к эффекту световода и дополнительному уменьшению потерь. Другой гетеропереход *n*-$Ga_{1-x}Al_xAs$/GaAs используется при создании области *n*-типа. Так как постоянные решеток GaAs и AlAs почти одинаковы, электронные состояния границы раздела не возникают, и, таким образом, нет дополнительного канала безызлучательной рекомбинации. Вследствие небольшой площади поперечного сечения активного объема (0,5

[1]) Несомненные преимущества гетеролазеров [50] стимулировали серию работ по их усовершенствованию. — *Прим. ред.*

на 100 мкм) имеет место дифракция излучения на выходе (как в случае щели). Два гетероперехода создаются методом жидкостной эпитаксии [29, 30][1]). Теплоотвод осуществляется алмазом, покрытым оловом и укрепленным на медной подложке. Пороговая плотность тока составляет 10^3 А/см^2 при комнатной температуре; излучаемая мощность порядка 10^{-4} Вт при напряжении около 2 В. Полный коэффициент полезного действия порядка 10% [31—35].

Лазер на основе диода из $ZnSe_xTe_{1-x}$ ($0{,}4 \leqslant x \leqslant 0{,}5$) излучал видимый свет ($\lambda = 0{,}627$ мкм) при 77 К с к. п. д. 18% [36]. Выпрямляющий контакт металла и полупроводника имел бы ряд преимуществ при использовании в качестве лазера, если бы не содержал слишком много центров рекомбинации, которые делают лазерное излучение невозможным. В полупроводниках с широкой запрещенной зоной до сих пор не удалось создать также p—n-переходы, чтобы обе стороны были вырожденными [37][2]).

Диодные лазеры были изготовлены и из узкозонных полупроводников $Pb_{1-x}Sn_xTe$ и $Pb_{1-x}Sn_xSe$ [39]; диоды из первого полупроводника создавались также методом бомбардировки протонами [40]. Они работают только при низких температурах. Небольшая ширина запрещенной зоны обусловливает длинноволновое излучение: из твердого раствора теллуридов с $x = 0{,}315$ получено излучение на волне 31,8 мкм (при 40 К и пороговой плотности тока 640 А/см^2). Путем изменения состава можно создать лазер, излучающий мощность в одномодовом непрерывном режиме на любой длине волны в диапазоне от 6,5 до 31,8 мкм [39]. На фиг. 2.21 приведена зависимость ширины запрещенной зоны от состава. Подобная зависимость присуща и твердым растворам селенидов, у которых при $x = 0{,}15$ ширина запрещенной зоны обращается в нуль. При $\lambda \approx 80$ мкм ($h\nu = 16$ мэВ) весьма интересным может оказаться взаимодействие оптических фононов и фотонов, однако оно до сих пор не исследовано. При создании лазеров для далекой инфракрасной области возникает серьезная проблема, связанная с поглощением фотонов свободными носителями излучающего кристалла (гл. 11, § 10).

Вследствие очень большой ширины полосы пропускания перспективным кажется применение инжекционных лазеров в сочетании с кабелями из стекловолокна в системе импульсно-кодовой связи будущего. Обзор методов изготовления светодиодов и диодных лазеров дали Кейси и Трамбор [41]. Моды излучения

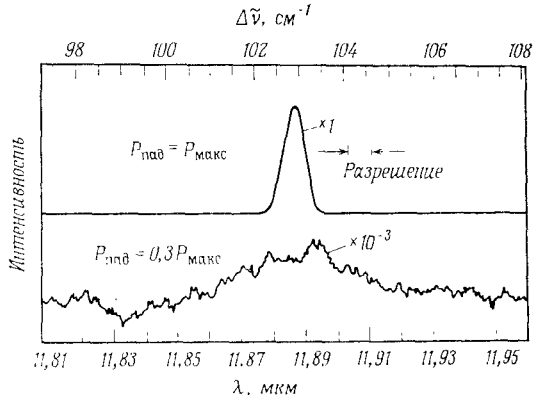
---

[1]) Подобные гетеропереходы используются в фотоэлементах (гл. 5, § 9).

[2]) Имплантация ионов представляет одно из интересных направлений поиска решения; этим способом изготовлялись диоды из SiC [38].

лазеров рассмотрел Лэкс [42], а нестабильности лазеров — Риппер [43, 44].

Интересной модификацией полупроводникового лазера является лазер с перестраиваемой частотой, основанный на эффекте комбинационного рассеяния с переворотом спина. В отличие от инжекционных лазеров он накачивается другим лазером, например газовым лазером на CO_2 ($\lambda = 10{,}6$ мкм, $P = 3$ кВт). Излучение накачки направляется на образец n-InSb ($n = 3 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$), находящийся при температуре 25—30 К в



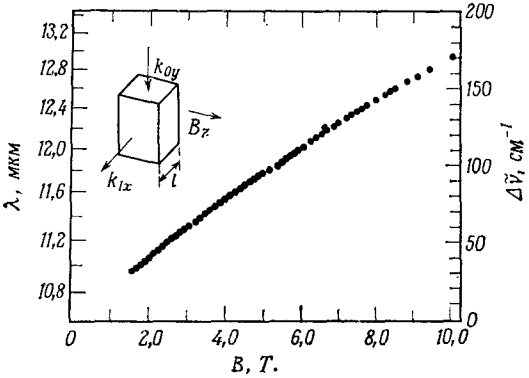
Фиг. 13.14. Спектр рассеянного излучения с переворотом спина [45].
Верхняя кривая — выше порога стимулированного излучения; нижняя кривая — ниже порога. Нижняя кривая приведена с увеличением в 10^3 раз

магнитном поле от 3 до 10 Т. Уровни Ландау зоны проводимости, согласно (9.2.13), расщеплены на спиновые подуровни; расстояние между подуровнями $g\mu_B B$ пропорционально B. Угловая частота рассеянного света ω_s отличается от ω_0 как раз на эту величину (деленную на $\hbar$):

$$\omega_s = \omega_0 - \frac{g\mu_B B}{\hbar}. \qquad (13.2.16)$$

В этом случае в противоположность комбинационному рассеянию с участием фононов частоту рассеянного излучения можно перестраивать изменением индукции магнитного поля. Лазерное излучение рассеянных фотонов возникает, когда мощность накачки превышает некоторое пороговое значение. На фиг. 13.14 приведены спектры рассеянного излучения в допороговых условиях (нижняя кривая) и при мощности накачки, превышающей пороговую (верхняя кривая) [45]. При стимулированном излучении линия узка (по оценкам ширина менее 0,03 см$^{-1}$). На фиг. 13.15 показана зависимость длины волны стимулированного

рассеянного излучения от индукции магнитного поля [46]. Перестройка осуществлена в диапазоне от 10,9 до 13,0 мкм. При импульсной мощности накачки 1,5 кВт выходная импульсная мощность 30—100 Вт получена при частоте повторения 120 Гц



Фиг. 13.15. Зависимость стимулированного рассеянного излучения с переворотом спина от магнитной индукции [46].
Показана геометрия лазера. Излучение накачки поступает вдоль оси k_{0y}; стимулированное рассеянное излучение выходит в направлении k_{1x}

и длительности импульса ~ 100 нс (около одной трети импульса накачки). Данный эффект предсказал Яфет [47], продолживший работы Вольфа [48, 49] по лазерам комбинационного рассеяния на основе переходов Ландау.

ЛИТЕРАТУРА

1. Physics and Chemistry of II—VI Compounds (eds. M. Aven, J. S. Prener), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, Willey, New York, 1967. [Имеется перевод: Физика и химия соединений $A^{II}B^{VI}$ (под ред. проф. С. А. Медведева), «Мир», М., 1970.]
2. *Destriau G.*, Journ. Chem. Phys., **33**, 587 (1936).
3. *Лосев О. В.*, Телеграфия и телефония, **18**, 61 (1923).
4. *Dean P. J.*, Trans. Metallurg. Soc. AIME, **242**, 384 (1968).
5. *Carr W. N.*, IEEE Trans. Electron Devices, **ED-12**, 531 (1965).
6. *Gershenzon M.*, Bell Syst. Techn. Journ., **45**, 1599 (1966).
7. *Henry C. H., Dean P. J., Cuthbert J. D.*, Phys. Rev., **166**, 754 (1968).
8. *Grey D. E.* (ed.), Am. Inst. of Phys. Handbook, McGraw-Hill, New York, 1963, p. 6.
9. *Wright W. D.*, The Measurement of Color, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.
10. *Brander R. W.*, Proc. Inter. Conf. on Silicon Carbide, University Park, Pa., 1968; Mat. Res. Bull. (eds. H. K. Henisch, R. Roy), Vol. 4, Pergamon, London, 1969, p. 187.
11. *Bergh A. A., Dean P. J.*, Proc. IEEE, **60**, 156 (1972).
12. *Lengyel B. A.*, Introduction to Laser Physics, Wiley, New York, 1966.
13. *Gooch C. H.* (ed.), Gallium Arsenide Lasers, Wiley, New York, 1969.

14. *Pilkuhn M. H.*, Phys. Stat. Sol., **25**, 9 (1968).
15. *Einstein A.*, Phys. Zs., **18**, 121 (1917).
16. *Schawlow A. L.*, Proc. Inter. School of Physics (ed. P. A. Miles), Vol. XXXI, Acad. Press, New York, 1964, p. 1.
17. *Lasher G., Stern F.*, Phys. Rev., **133**, A553 (1964).
18. *Sommers H. S., Jr.*, Solid State Electronics, **11**, 909 (1968).
19. *Biard J. R., Carr W. N., Reed B. S.*, Trans. AIME, **230**, (1964).
20. *Pilkuhn M., Rupprecht H., Blum S.*, Solid State Electronics, **7**, 905 (1964).
21. *Pilkuhn M. H., Rupprecht H.* в книге Radiative Recombination in Semiconductors (ed. C. Benoit a la Guillaume), Dunod, Paris, 1964, p. 195. [Имеется перевод: Излучательная рекомбинация в полупроводниковых криталлах (отв. ред. Д. В. Скобельцын), «Наука», М., 1973.]
22. *Lax B.*, Proc. Inter. School of Physics (ed. P. A. Miles), Vol. XXXI, Acad. Press, New York, 1964, p. 17.
23. *Galeener F. L., Wright G. B., Krag W. E., Quist T. M., Zeiger H. J.*, Phys. Rev. Letters, **10**, 472 (1962).
24. *Melngailis I.*, Bull. Am. Phys. Soc., **8**, 202 (1963).
25. *Feinleib J., Groves S., Paul W., Zallen R.*, Phys. Rev., **131**, 2070 (1963).
26. *Armstrong J. A., Nathan M. I., Smith A. W.*, Appl. Phys. Letters, **3**, 68 (1963).
27. Sperry LA 0800-1, Sperry Gyroscope Division, electro-optics group, Sperry-Rand Corp., Great Neck, N. Y., USA.
28. Compagnie Générale de Télégraphie Sans Fil, Boite Postale 10-91, Orsay, France.
29. *Woodall J. M., Rupprecht H., Reuter W.*, Journ. Electrochem. Soc., **116**, 899 (1969).
30. *Panish M. B., Sumski S., Hayashi I.*, Metallurgical Transactions, **2**, 795 (1971).
31. *Hayashi I., Panish M. B.*, Journ. Appl. Phys., **41**, 150 (1970).
32. *Hayashi I., Panish M. B.*, Journ. Appl. Phys., **41**, 3195 (1970).
33. *Hayashi I., Panish M. B.*, Sci. Am., **225**, 32 (July 1971)
34. *Hayashi I., Panish M. B., Foy P. W., Sumski S.*, Appl. Phys. Letters, **17**, 109 (1970).
35. *Hayashi I., Panish M. B., Foy P. W., Sumski S.*, IEEE-Trans. Quantum Electronics, **QE-6**, 4 (1970).
36. *Aven M.*, Appl. Phys. Letters, **7**, 146 (1965).
37. *Morehead F. F., Jr.*, Sci. Am., 216. No. 5, 109 (1967).
38. *Dunlap H. L., Marsh P. J.*, Appl. Phys. Letters, **15**, 311 (1969).
39. *Harman T. C.* в книге The Physics of Semimetals and Narrow-Gap Semiconductors (eds. D. L. Carter, R. T. Bate), Pergamon, Oxford, 1971, p. 363.
40. *Donnelly J. P., Calawa A. R., Harman T. C., Foyt A. G., Lindley W. T.*, Solid State Electronics, **15**, 403 (1972).
41. *Casey H. C., Jr., Trumbore F. A.*, Mater. Sci. Eng., **6**, 69 (1970).
42. *Lax B.*, Proc. Int. School of Physics (ed. P. A. Miles), Vol. XXXI, Acad. Press, New York, 1964, p. 39.
43. *Ripper J. E.*, IEEE-Trans. Quantum Electronics, **QE-5**, 391 (1969).
44. *Ripper J. E., Dyment J. C.*, IEEE-Trans. Quantum Electronics, **QE-5**, 396 (1969).
45. *Patel C. K. N., Shaw E. D.*, Phys. Rev. Letters, **24**, 451 (1970).
46. *Patel C. K. N., Shaw E. D., Kerl R. J.*, Phys. Rev. Letters, **25**, 8 (1970).
47. *Yafet Y.*, Phys. Rev., **152**, 858 (1966).
48. *Wolff P. A.*, Phys. Rev. Letters, **16**, 225 (1966).
49. *Wolff P. A.*, Journ. Quantum Electronics, **2**, 659 (1966).
50*. *Алферов Ж. И., Казаринов Г. Ф.*, Авт. свид. № 181737 по заявке № 950840 с приоритетом от 30 марта 1963 г.

Глава 14. СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТИ

До сих пор мы рассматривали объемные свойства полупроводников и неявно предполагали, что кристалл имеет бесконечную протяженность. Рассмотрим теперь кратко влияние поверхности кристалла на явления переноса в полупроводниках.

§ 1. Поверхностные состояния

Успех модели энергетических зон Кронига — Пенни (гл. 2, § 1) в объяснении объемных свойств кристалла вдохновил И. Е. Тамма [1—3][1]) на исследование энергетических уровней атомной цепочки *конечной* длины. На фиг. 14.1 показано распределение потенциала у одного конца цепочки в модели Тамма. Пусть на поверхности кристалла $x = 0$. В вакууме при $x < 0$ потенциал постоянен: $V = \varphi$; этот потенциал можно приравнять работе выхода электрона из твердого тела.

Заменяя в уравнении Шредингера (2.1.3) величину β^2 на

$$\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\varphi - \varepsilon) \tag{14.1.1}$$

и полагая, что $\varepsilon < \varphi$, ищем решение в виде

$$\psi = A' e^{\gamma x} \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{14.1.2}$$

которое удовлетворяет граничному условию $\psi = 0$ при $x \to -\infty$. При $x > 0$ в качестве решения берем (2.1.21) и решаем (2.1.23) и (2.1.24) относительно постоянной B в (2.1.21):

$$B = -A\frac{\beta e^{i(\alpha-k)b} + [i\alpha \operatorname{sh}(\beta c) - \beta \operatorname{ch}(\beta c)]\, e^{ikc}}{\beta e^{-i(\alpha+k)b} - [i\alpha \operatorname{sh}(\beta c) + \beta \operatorname{ch}(\beta c)]\, e^{ikc}}. \tag{14.1.3}$$

В упрощенном варианте модели Кронига — Пенни имеем $c \to 0$, а $V_0 \to \infty$, так что произведение $V_0 c$ остается конечным. Поскольку $b \to a$ при $c \to 0$, выражение (14.1.3) в этой модели имеет простой вид

$$B = -A\frac{e^{i(\alpha-k)a} - 1}{e^{-i(\alpha+k)a} - 1}. \tag{14.1.4}$$

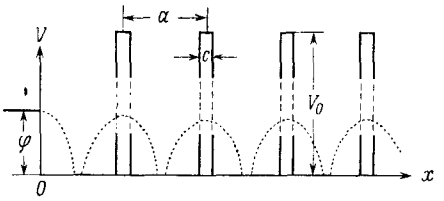
---

[1]) Расчет поверхностных состояний см. также в работе [4]. Общий обзор свойств поверхности полупроводников дан в монографиях [5, 6], а также в статьях [7—9].

Из условий непрерывности ψ и $d\psi/dx$ при $x = 0$ получаем

$$\begin{aligned} A + B &= A', \\ i\alpha(A - B) &= \gamma A', \end{aligned} \tag{14.1.5}$$

так как в первой потенциальной яме кристалла, т. е. при $0 < x < a$, $\psi = A\exp(i\alpha x) + B\exp(-i\alpha x)$. Подставляя в (14.1.5) вместо величины B ее выражение (14.1.4), получаем



Фиг. 14.1. Упрощенная модель распределения потенциала одномерного «кристалла», имеющего «поверхность» при $x = 0$ [1].

Пунктирной кривой показано распределение потенциала, более близкое к действительному.

систему однородных уравнений для A и A', которая имеет решение, если ее определитель равен нулю. Из этого условия получаем

$$e^{ika} = \frac{\gamma}{\alpha}\sin(\alpha a) + \cos(\alpha a). \tag{14.1.6}$$

В приближении, когда $c \to 0$ и $V_0 \to \infty$, величина $p = m\hbar^{-2}aV_0c$ имеет конечное значение, и уравнение (2.1.27) принимает вид

$$\frac{1}{2}(e^{ika} + e^{-ika}) = \cos(ka) = \frac{p}{\alpha a}\sin(\alpha a) + \cos(\alpha a). \tag{14.1.7}$$

Исключив из последних двух уравнений множитель $\exp(ika)$, приняв во внимание (2.1.1) и (14.1.1) и введя обозначение

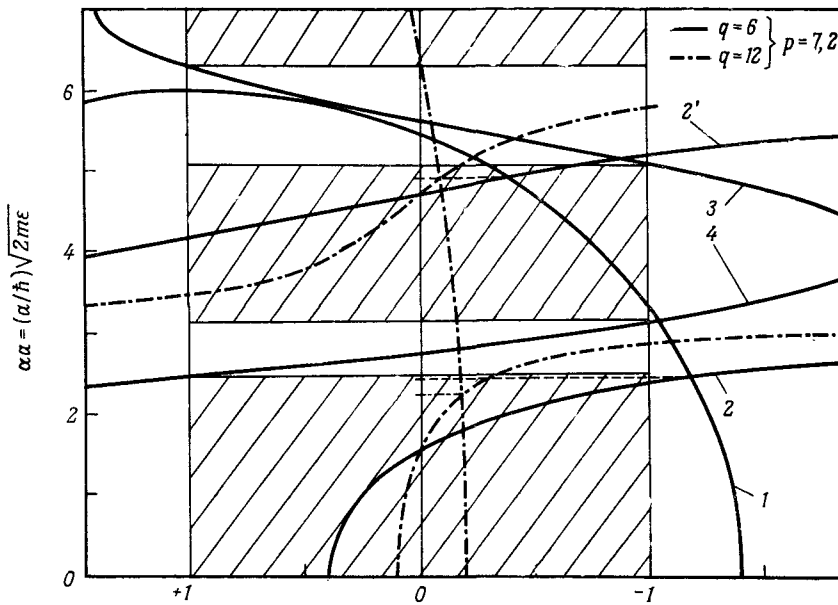
$$q = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m\varphi} = \alpha a\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2}, \tag{14.1.8}$$

после алгебраических преобразований получаем

$$\left(\frac{2p}{q^2}\right)(\alpha a)\operatorname{ctg}(\alpha a) = 1 - \left(\frac{2p}{q^2}\right)\sqrt{q^2 - (\alpha a)^2}, \tag{14.1.9}$$

где $\alpha a = (a/\hbar)\sqrt{2m\varepsilon}$ и $2p/q^2 = V_0c/\varphi a$. В области $\varepsilon < \varphi$, т. е. когда $\alpha a < q$, это уравнение имеет решение вида (14.1.7), полученное с применением модели Кронига — Пенни. Это показано на фиг. 14.2 для $p = 7{,}2$ и $q = 6$ и 12. Для сравнения с фиг. 2.4 постоянные p и q выбраны равными $2m\hbar^{-2}V_0(b/2)^2(2c/b)$ и $2\sqrt{2m\hbar^{-2}V_0(b/2)^2(\varphi/V_0)}$ соответственно. Для значений, указанных в тексте после уравнения (2.1.27), находим $p = 7{,}2$ и при условии $\varphi/V_0 = 1/4$ получаем $q = 6$.

Эти энергетические уровни в запрещенных зонах называются поверхностными состояниями. Можно показать, что волновые функции локализованы у поверхности. Внутри кристалла волновая функция испытывает затухающие колебания при удалении от поверхности, тогда как вне кристалла она уменьшается экспоненциально. Однако состояния не локализованы на поверхно-



Фиг. 14.2. Расширенная диаграмма Кронига — Пенни (подобная фиг. 2.4, за исключением того, что шкала ординат $\sim\varepsilon^{1/2}$), включающая поверхностные состояния Тамма.

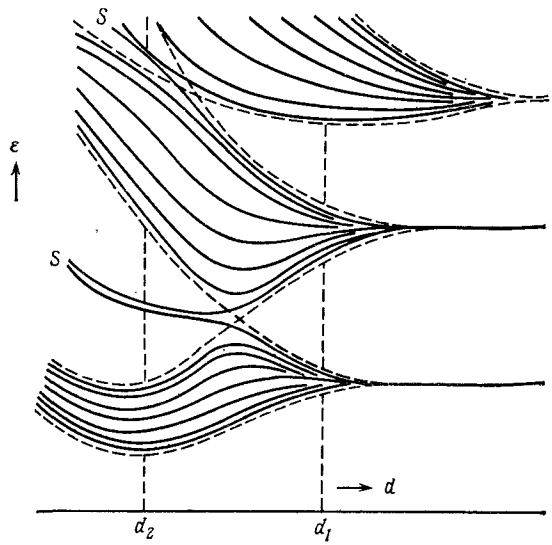
1 — правая часть уравнения (14.1.9); *2*, *2'* — левая часть того же уравнения; *3*, *4* — правая часть уравнения (14.1.7). Запрещенные зоны заштрихованы; промежутки между ними — разрешенные зоны. Горизонтальные штриховые и штрихпунктирные прямые обозначают поверхностные состояния, которые имеются только в запрещенных зонах при $\alpha a < q$.

сти, а образуют зону. Проводимость в этой зоне слишком мала для того, чтобы ее можно было обнаружить в каких-либо из проведенных до сих пор экспериментов, кроме проводимости, обусловленной приповерхностным пространственным зарядом внутри кристалла. Примесные атомы, адсорбированные на поверхности, могут привести к образованию локализованных состояний подобно тому, как это происходит с примесями в объеме кристалла.

Шокли [10] рассчитал энергетические уровни линейной цепочки из восьми атомов при различных значениях расстояния между соседними атомами (фиг. 14.3). При межатомных рас-

стояниях меньше критического значения имеются запрещенные зоны, а также два состояния (одно на каждый поверхностный атом) внутри каждой зоны; эти состояния возникают вследствие наличия поверхности. В каждой из соседних зон исчезает по одному объемному состоянию.

В трехмерном кристалле можно ожидать возникновения одного поверхностного состояния на каждый поверхностный атом. Возникновение поверхностных состояний можно объяснить



Фиг. 14.3. Расщепление энергетических уровней атомов в энергетические зоны и поверхностные состояния (обозначенные символом S) в одномерном «кристалле», содержащем восемь атомов, при уменьшении межатомного расстояния d (согласно теории Шокли [10]).

также неспаренной связью поверхностных атомов. Концентрация атомов на поверхности по порядку величины равна 10^{15} см$^{-2}$. На поверхности имеются ступеньки, и на них локализовано от 1 до 20% поверхностных атомов. Тщательным отжигом можно уменьшить число ступенек. Если не приняты специальные меры, поверхность обычно покрыта примесными атомами. Чистую поверхность можно получить путем раскалывания кристалла в сверхвысоком вакууме (например, при давлении $3 \cdot 10^{-10}$ мм рт. ст.), хотя после раскалывания наблюдается всплеск давления до 10^{-7} мм рт. ст. Через несколько часов на чистой поверхности в сверхвысоком вакууме образуется моноатомный слой, состоящий в основном из атомов кислорода. Какую поверхность можно считать чистой, зависит в сильной

степени от рода измерений. Часто поверхность считается чистой для данного эксперимента, если результаты не изменяются при дальнейшей очистке поверхности.

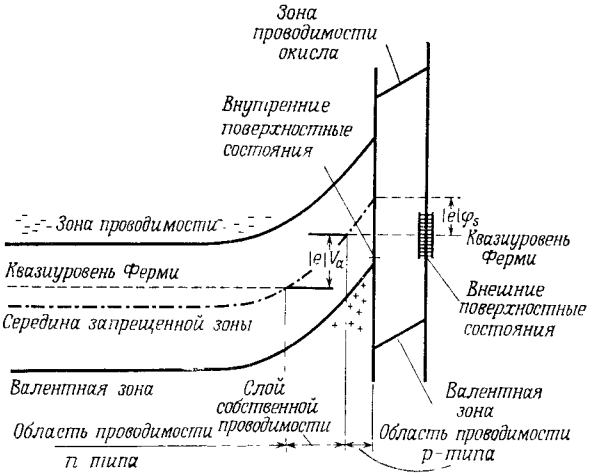
Если рассматриваемая поверхность образована кончиком иглы диаметра 10^{-4} мм, то можно создать напряженность электрического поля порядка 10^8 В/см. Такое поле может отрывать атомы от поверхности, в том числе атомы примеси, если игла заряжена положительно. Это используется в эмиссионном электронном микроскопе [11]. Другой метод очистки состоит в применении бомбардировки аргоном и последующего отжига в сверхвысоком вакууме. Чувствительным методом обнаружения поверхностных загрязнений и дислокаций является дифракция медленных электронов [12][1]).

Атомы примеси на поверхности полупроводника могут быть ионизованными. Если все атомы примеси ионизованы, то в моноатомном слое должно содержаться около 10^{15} элементарных зарядов на 1 см^2. Однако получить такой огромный заряд на поверхности невозможно. Даже если концентрация зарядов составляет только $5 \cdot 10^{13}$ см$^{-2}$, энергия электростатического поля уже равна поверхностной энергии кристалла. Обычно наблюдаемая концентрация лежит в пределах от 10^{11} до 10^{13} см$^{-2}$.

Экспериментальное подтверждение наличия поверхностных состояний впервые было получено на основе исследования выпрямляющих свойств контакта металла с кремнием. Мейергоф [14] обнаружил, что эти свойства практически не зависят от разности работ выхода металла и кремния. Бардин [15] объяснил этот экспериментальный результат, предположив наличие поверхностных состояний, возникших вследствие наличия примесей на поверхности раздела металл — полупроводник. Эмпирическим путем установлено, что влияние состояний на границе раздела выражается тем сильнее, чем меньше ширина запрещенной зоны полупроводника. На границе раздела часто образуется пленка окисла, особенно если перед изготовлением металлического контакта полупроводник подвергался травлению в окисляющем реагенте (например, в смеси $HF + HNO_3$). Схема энергетических зон для этого случая представлена на фиг. 14.4. Здесь имеются состояния на внутренней поверхности раздела, называемые быстрыми состояниями, и состояния на наружной поверхности, называемые медленными состояниями в соответствии со временем их отклика на воздействие сильного электрического поля, перпендикулярного поверхности кристалла. В случае, представленном на фиг. 14.4, полупроводник обладает

[1]) См. также обзор [13] и краткое описание метода контроля поверхности, основанного на дифракции медленных электронов, в работе [4], стр. 110.

проводимостью n-типа, а поверхность заряжена отрицательно. Электроны проводимости отталкиваются от отрицательного поверхностного заряда, что приводит к образованию либо обедненного слоя, либо инверсионного слоя p-типа, если валентная зона загибается выше квазиуровня Фермии в объеме, как показано на фиг. 14.4. Если поверхностные состояния заряжены положительно, то образуется слой накопления. На фиг. 14.5 показано, как изгиб зон, обусловленный заряженными поверхностными состояниями, приводит к выравниванию работ выхода



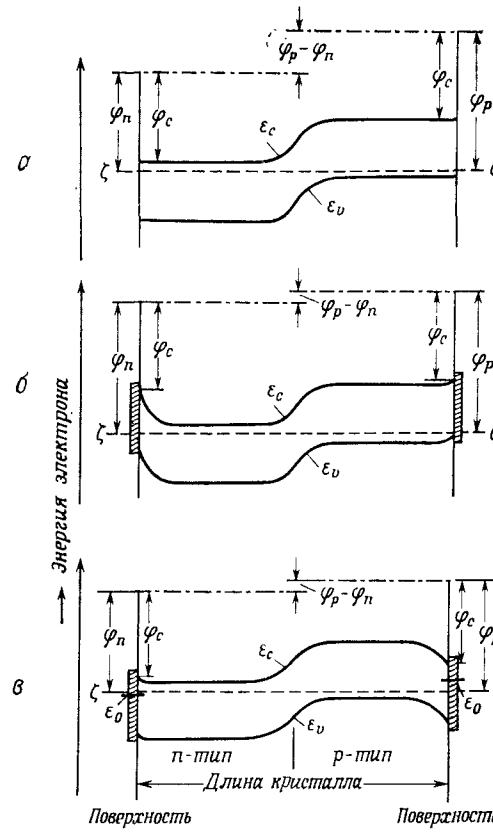
Фиг. 14.4. Структура энергетических зон у поверхности полупроводника и его поверхностных состояний.

с обеих сторон германиевого p—n-перехода. Несмотря на наличие внутреннего диффузионного потенциала [1]), равного 0,34 В, разность работ выхода, измеренная методом Кельвина (см., например, [18]), составляет всего лишь $0{,}002 \pm 0{,}004$ эВ [17], что можно объяснить изгибом зон (фиг. 14.5).

Главная проблема во всех исследованиях поверхности полупроводников состоит в определении распределения поверхностных состояний по энергиям. Несмотря на многочисленные эксперименты, спор об этом распределении продолжается в основном из-за того, что 1) не удается изменять в широких пределах уровень легирования и тем самым положение уровня Ферми и 2) трудно получить воспроизводимые свойства поверхности, не зависящие от технологии. Для исследования поверхности

[1]) См. гл. 5, § 4. — *Прим. ред.*

использовались следующие явления: поверхностная электропроводность, эффект поля, фотоэффект, поверхностная рекомбинация, автоэлектронная эмиссия, поверхностная фотопроводи-



Фиг. 14.5. Структура энергетических зон в p — n-переходе [9].
а — без поверхностных состояний; *б* — при наличии поверхностных состояний (заштрихованы), распределенных в запрещенной зоне; *в* — при наличии дополнительного дискретного уровня ε_0.

мость, поглощение и отражение света. Здесь мы ограничимся только рассмотрением явлений переноса.

§ 2. Явления переноса на поверхности

Поверхностное сопротивление измеряется стандартным четырехзондовым методом, описанным в приложении 3. Поскольку толщина d слоя накопления заряда или инверсионного слоя не известна, измеренная величина является не истинной удельной

электропроводностью σ, а электропроводностью на единицу площади $\sigma_\square = d/\rho$.

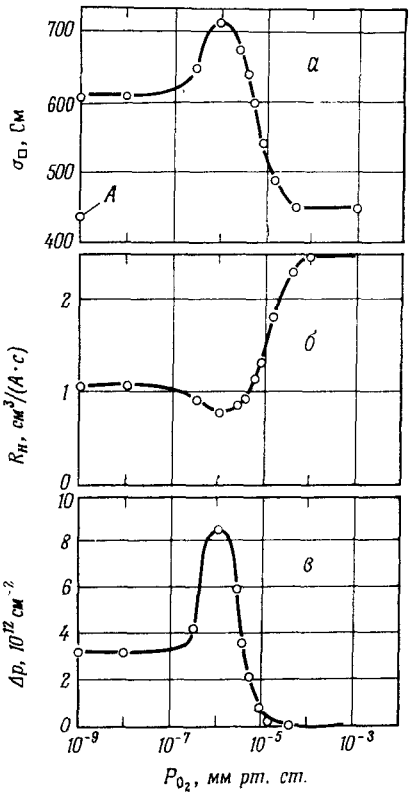
На фиг. 14.6 показано изменение поверхностной электропроводности, коэффициента Холла, а также концентрации поверхностных носителей заряда, вызванное оседанием кислорода на поверхность кристалла (фактически давлением кислорода), после того как поверхность была очищена ионной бомбардировкой и последующей термической обработкой [19][1]). По измеренным значениям коэффициента Холла R_H и поверхностной электропроводности $\sigma_\square$ можно рассчитать холловскую подвижность μ_H:

$$\mu_H = \frac{R_H\sigma_\square^2 - (R_H\sigma_\square^2)_0}{\sigma_\square - \sigma_{\square 0}} \quad (14.2.1)$$

и найти избыточную концентрацию Δp носителей на поверхности:

$$\Delta p = \frac{(\sigma_\square - \sigma_{\square 0})\, d}{2e\mu_H}, \quad (14.2.2)$$

где индекс нуль указывает на условие плоских зон. Экспери-



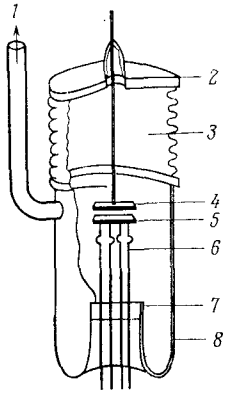
Фиг. 14.6. Зависимость поверхностной проводимости (*а*) коэффициента Холла (*б*) и поверхностной концентрации носителей (*в*) в германии от давления атмосферы кислорода [20].

Перед впуском кислорода поверхность кристалла очищена путем аргонной бомбардировки, а затем кристалл подвергнут отжигу; *А* — проводимость до очистки

ментальное определение поверхностной проводимости возможно только в том случае, когда объемная проводимость пренебрежимо мала. Например, результаты, представленные на фиг. 14.6, получены на германии с объемной проводимостью *n*-типа $\rho = 20$ Ом·см. Согласно представлению о неспаренной связи, чистая поверхность должна обладать проводимостью *p*-типа. Поэтому можно ожидать, что объем *n*-типа будет покрыт

[1]) Предполагается, что в процессе обезгаживания в германий проникал бор, содержавшийся в стекле колбы.

инверсионным слоем. Это положение не изменяется при возрастании давления кислорода до 10^{-7} мм рт. ст. При большем давлении происходит поглощение кислорода поверхностью, в результате чего поверхностный заряд возрастает, достигая максимума при давлении 10^{-6} мм рт. ст. При давлении, превышающем 10^{-4} мм рт. ст., поверхностный заряд пренебрежимо мал («условие плоских зон»). Изгиб зон в максимуме соответствует изменению поверхностного потенциала, равному примерно 0,25 эВ.



Фиг. 14.7. Схема лампы, используемой для измерений поверхностной проводимости и подвижности по эффекту поля [22].

1 — откачка; *2* — ковар; *3* — сильфон из монеля; *4* — полевой зонд; *5* — кристалл германия; *6* — молибденовые проводники; *7* — сборник; *8* — стеклянная колба

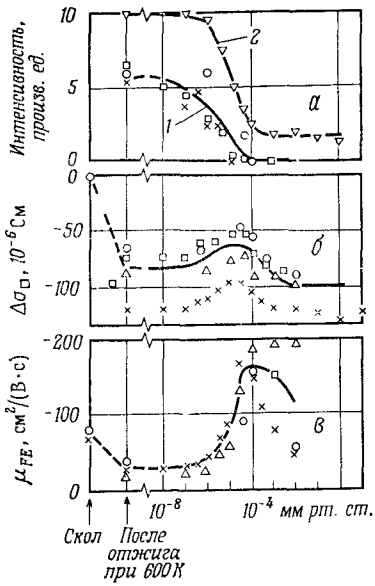
Эффект поля позволяет в ходе эксперимента изменять поверхностный потенциал, не изменяя окружающей среды. Поверхностная проводимость изменяется перпендикулярным поверхности электрическим полем, которое создано емкостным методом [20]. В этом состоит принцип работы полевого транзистора (фиг. 5.16). При данном значении напряженности электрического поля E заряд, индуцированный на единице площади поверхности полупроводника, равен $q = \varkappa\varkappa_0 E$. Он состоит из объемного заряда q_{sc} и заряда поверхностных состояний q_{ss}; последний, по предположению, подвижен, и поэтому изменение проводимости почти полностью обусловлено изменением объемного заряда. Подвижность по эффекту поля определим как

$$\mu_{FE} = \frac{\delta \Delta\sigma_\square}{\delta q} = \frac{\delta \Delta\sigma_\square}{\delta q_{sc} + \delta q_{ss}} \approx \frac{\delta \Delta\sigma_\square}{\delta q_{sc}}, \qquad (14.2.3)$$

где $\Delta\sigma_\square = \sigma_\square - \sigma_{\square_0}$ — избыточная поверхностная проводимость по сравнению с поверхностной проводимостью при условии плоских зон. На фиг. 14.7 показана лампа для измерения величин μ_{FE} и $\Delta\sigma_\square$ [21], а на фиг. 14.8 — зависимость подвижности μ_{FE} от времени после введения в лампу кислорода при давлении 10^{-6}—10^{-7} мм рт. ст. [22]. Подвижность μ_{FE} отрицательна и по порядку величины составляет 100 см^2/(В·с); она не связана с подвижностью носителей в объеме кристалла.

Между объемным зарядом и поверхностным потенциалом имеется однозначная зависимость, которая следует из уравнения Пуассона. На фиг. 14.9 показана зависимость избыточной проводимости от (рассчитанного) объемного заряда, а также

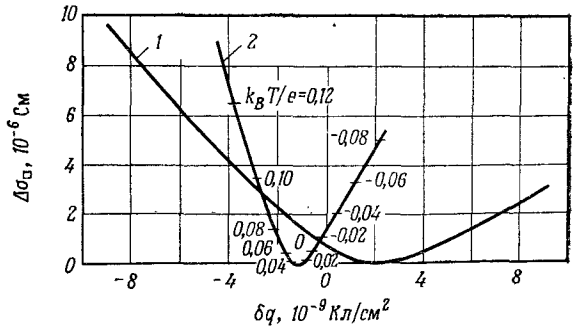
от (измеренного) полного индуцированного заряда; на расчетной кривой указаны значения поверхностного потенциала в единицах $k_BT/|e|$ [23]. При значениях параметров, соответствующих правой ветви графика, поверхность имеет проводимость *p*-типа, и положительное приращение объемного заряда приводит к возрастанию проводимости; для левой ветви поверхность имеет проводимость *n*-типа, и положительное приращение объемного заряда приводит к уменьшению числа электронов, т. е.



Фиг. 14.8. Зависимость интенсивности пятна дифракции медленных электронов (*а*), поверхностной проводимости (*б*) и подвижности по эффекту поля (*в*) от давления атмосферы кислорода над чистой поверхностью (111) кристалла германия [23].

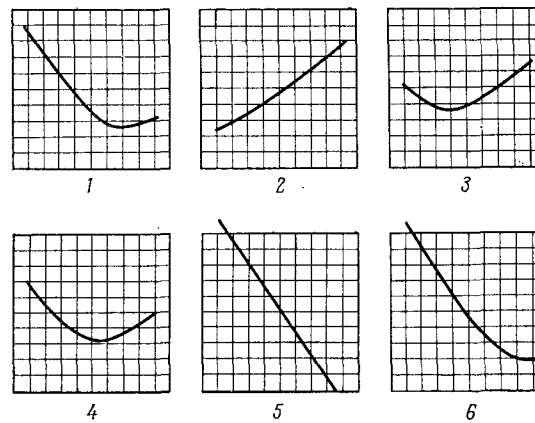
Все зависимости получены одновременно. Справа давление приблизительно соответствует моноатомному слою. *1*—отблеск полуцелого порядка; *2*—отблеск целого порядка.

к уменьшению проводимости. Вследствие различной подвижности электронов и дырок минимум избыточной проводимости смещен относительно нуля объемного заряда. На основе измерений этого минимума проводимости можно определить поверхностный потенциал для всех значений полного индуцированного заряда.



Фиг. 14.9. Зависимость изменения поверхностной проводимости от полного индуцированного заряда δq (кривая *1*, эксперимент) и от объемного заряда δq_{sc} (кривая *2*, теория) [24].

В одном из экспериментов по эффекту поля [23] кроме постоянного электрического поля прикладывалось переменное поле, например частоты 30 Гц; была получена зависимость переменной составляющей проводимости от переменного напряжения при различных условиях (фиг. 14.10). Экспериментальная кривая на фиг. 14.9 в действительности оказалась состоящей из частей, показанных на фиг. 14.10. Кислород создает поверхность n-типа, а водяной пар — поверхность p-типа, что может быть следствием дипольных свойств молекул воды.



Фиг. 14.10. Осциллограммы изменения проводимости, вызванного изменением индуцированного заряда для различных видов газового окружения кристалла германия p-типа [24].

1 — атмосфера сухого кислорода; *2* — озон; *3* — через 1 мин после удаления озона (восстанавливается атмосфера кислорода); *4* — через 4 мин после удаления озона; *5* — влажный воздух; *6* — через 3 мин после удаления влажного воздуха.

Измерения эффекта поля проводились также с целью определения скорости поверхностной рекомбинации s [24]. Расчеты зависимости скорости s от поверхностного заряда выполнили Мэни и Герлих [25]. Поверхностную подвижность как функцию высоты барьера рассчитал Шриффер [26]. В других экспериментах изменение поверхностного потенциала производилось путем освещения [27]. С технической точки зрения представляют интерес также поверхностные шумы [28]. При измерениях фотоэлектронной эмиссии одним из главных вопросов является вопрос о том, как отличить вклад поверхностных состояний от вклада различных объемных состояний[1]). Интересен также вопрос

[1]) См. работу [4] (стр. 106) и указанную там литературу; связь фотоэлектронной эмиссии из объема с зонной структурой кристалла рассматривается в работе [29].

о запаздывающей эмиссии электронов из поверхности, вокруг которого все еще продолжается полемика [30]. После электронной бомбардировки (~ 1 кэВ) или ультрафиолетового облучения германий испускает электроны. Эмиссия уменьшается со временем, прошедшим после прекращения возбуждения. При возрастании температуры в эмиссии электронов можно зарегистрировать максимумы, аналогичные кривым свечения фосфора. Полагают, что эмиссия происходит с заполненных поверхностных состояний, в которых энергия близка энергии свободного электрона в вакууме. Так как ток эмиссии настолько мал, что с помощью фотоумножителя и счетчика импульсов детектируется каждый отдельный электрон, установить корреляцию этих результатов с другими поверхностными явлениями не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tamm I.*, Zs. Phys., **76**, 849 (1932).
2. *Tamm I.*, Phys. Zs. Sowjetunion, **1**, 733 (1932).
3. *Тамм И. Е.*, ЖЭТФ, **3**, 34 (1933).
4. *Davison S. G., Levine J. D.* в книге Solid State Physics (eds. H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 25, Acad. Press, New York, 1970, p. 1.
5. *Frankl D. R.*, Electrical Properties of Semiconductor Surfaces, Pergamon, Oxford, 1967.
6. *Many A., Goldstein Y., Grover N. B.*, Semiconductor Surfaces, North-Holland Publ., Amsterdam, 1965.
7. *Lifschitz I. M., Pekar S. I.*, Fortschr. Phys., **4**, 81 (1956).
8. *Koutecký J.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **14**, 233 (1960).
9. *Heiland G.*, Forschr. Phys., **9**, 393 (1961).
10. *Shockley W.*, Phys., Rev., **56**, 317 (1939).
11. *Müller E. W.* в книге Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. XXVII, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953, Kap. III, 8, S. 290.
12. *Schlier R. E., Farnsworth H. E.* в книге Semiconductor Surface Science (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 3.
13. Proceedings of the Symposium on the Structure of Surfaces, Surface Sci., **8**, 1 (1967).
14. *Meyerhof W. E.*, Phys. Rev., **71**, 727 (1947).
15. *Bardeen J.*, Phys. Rev., **71**, 711 (1947).
16. *Statz H., de Mars G. A., Davis L., Jr., Adams A., Jr.* в книге Semiconductor Surface Physics (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 139.
17. *Fowler A. B.*, Journ. Appl. Phys., **30**, 556 (1959).
18. *Eberhagen A.*, Fortschr. Phys., **8**, 245 (1960).
19. *Missman R., Handler P.*, Journ. Phys. Chem. Solids, **8**, 109 (1959).
20. *Shockley W., Pearson G. L.*, Phys. Rev., **74**, 232 (1948).
21. *Handler P.* в книге Semiconductor Surface Physics (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 23.
22. *Henzler M.* в книге Festkörperprobleme, Bd. XI, (Hrg. O. Madelung), Vieweg, Braunschweig, Pergamon, Oxford, 1971, S. 187.
23. *Brown W. L., Brattain W. H., Garrett C. G. B., Montgomery H. C.* в книге Semiconductor Surface Physics (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 111.

24. *Dousmanis G. C.*, Phys. Rev., **112**, 369 (1958).
25. *Many A., Gerlich D.*, Phys. Rev., **107**, 404 (1957).
26. *Schrieffer J. R.*, Phys. Rev., **97**, 641 (1955).
27. *Garrett C. G. B., Brattain W. H., Brown W. L., Montgomery H. C.*, Semiconductor Surface Physics (ed. R. H. Kingston), Univ. of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, p. 126.
28. *Kingston R. H., McWhorter A. L.*, Phys. Rev., **103**, 534 (1956).
29. *Gebhardt U.* в книге Festkörperprobleme, Bd. X (Hrg. O. Madelung), Vieweg, Braunschweig, Pergamon, Oxford, 1970, S. 175.
30. *Seeger K.*, Zs. Phys., **149**, 453 (1957).

Глава 15. РАЗНЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ

§ 1. Сверхпроводящие полупроводники

Сверхпроводимость, обычно наблюдаемая в металлах при температурах ниже температуры перехода $T_c \lesssim 21$ К, может также возникать в вырожденных полупроводниках. Температура перехода в последних не превышает 0,5 К. В 1962 г. это явление предсказали Гуревич, Ларкин и Фирсов [1], а в 1964 г. — Коэн [2, 3]. В 1964 г. было получено экспериментальное подтверждение этого явления в полупроводниках GeTe [4], SnTe [5], $SrTiO_3$ [6].

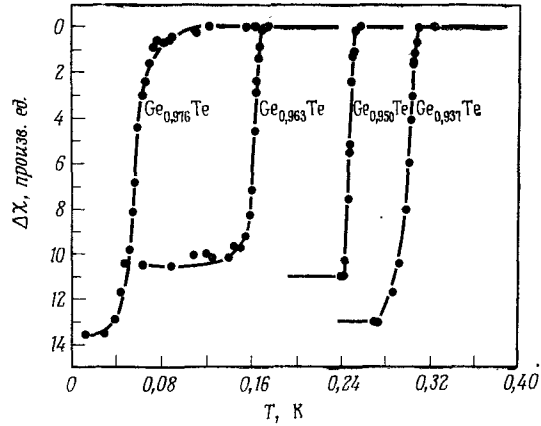
Из теории сверхпроводимости Бардина, Купера и Шриффера [7] следует, что температура перехода в сверхпроводящее состояние равна

$$T_c = 1{,}14\,\Theta \exp\left[-\frac{1}{N(0)V}\right], \qquad (15.1.1)$$

где Θ — температура Дебая, $N(0)$ — плотность состояний вблизи уровня Ферми и V — среднее значение матричного элемента взаимодействия двух электронов [8]. В вырожденном электронном газе $N(0) \sim mn^{1/3}$, где n — концентрация электронов, а m — эффективная масса. Чтобы температура перехода была высокой, произведение $N(0)V$ должно быть большим. Многодолинные полупроводники имеют то преимущество по сравнению с однодолинными, что обладают большей плотностью состояний и большей эффективной массой. Считается, что упомянутые выше полупроводники принадлежат к многодолинным (например, в GeTe и SnTe имеется 12 долин $\langle 110 \rangle$).

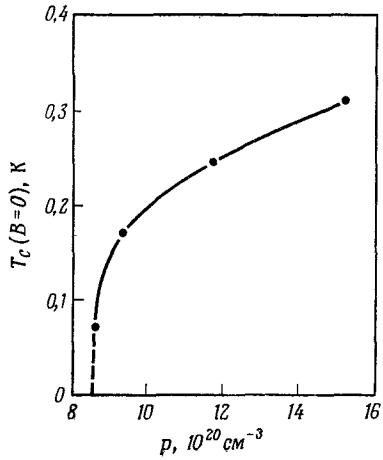
При обычных температурах GeTe обладает проводимостью p-типа; подвижность его носителей приближенно равна 100 $см^2/(В \cdot с)$, а их эффективная масса примерно равна массе свободного электрона. Вследствие свойственной этому соединению нестехиометричности состава концентрация носителей приближенно равна $0{,}9 \cdot 10^{21}$ $см^{-3}$; из-за такой большой концентрации носителей ширину запрещенной зоны можно лишь оценить как лежащую в пределах от 0,5 до 1 эВ. На фиг. 15.1 представлено наблюдаемое изменение магнитной восприимчивости образцов различного состава при уменьшении температуры, а на фиг. 15.2 показана зависимость температуры перехода от концентрации дырок. Концентрация дырок в образце с наименьшей температурой перехода согласуется с предположением,

что на одну вакансию германия приходятся две дырки. Образцы были спрессованы и спечены. По-видимому, в этом материале



Фиг. 15.1. Температурная зависимость начальной восприимчивости GeTe [4]. Значительные расхождения значений восприимчивости в сверхпроводящем состоянии обусловлены тем, что использовались разные цепи взаимоиндукции.

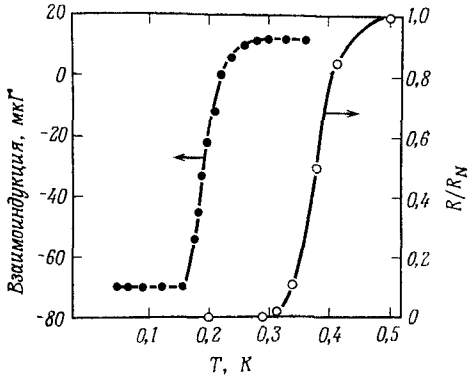
для возникновения сверхпроводимости концентрация носителей должна быть не меньше $8{,}5 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$ (фиг. 15.2). Сверхпроводящие полупроводники можно отнести к сверхпроводникам второго рода.



Фиг. 15.2. Зависимость температуры перехода при нулевом магнитном поле от концентрации носителей p для тех же образцов, что и на фиг. 15.1 (p определялось из эффекта Холла) [4].

Сверхпроводящие переходы в образце $SrTiO_3$ с концентрацией электронов $2{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ показаны на фиг. 15.3 [9]. Темные кружки соответствуют значениям магнитной восприимчивости; светлые — значениям электрического сопротивления, нормированного на единицу при 0,5 К. По сравнению со сверхпроводимостью в металлах переходы довольно широкие, что, возможно, связано с механическими напряжениями, возникшими при охлаждении. На фиг. 15.4 приведена зависимость эксперименталь-

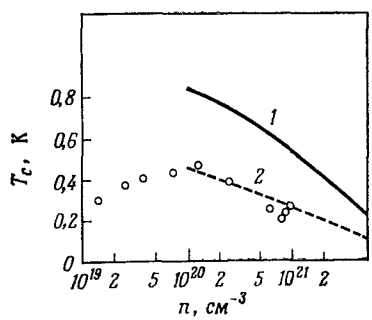
ных значений T_c от концентрации электронов. Максимум T_c соответствует концентрации 10^{20} см$^{-3}$. Расчетные кривые [1, 10] приведены для двух значений подгоночного параметра; нижняя кривая довольно хорошо описывает результаты при $n > > 10^{20}$ см$^{-3}$. Уменьшение T_c с увеличением n характерно для



Фиг. 15.3. Сверхпроводящие переходы в образце восстановленного $SrTiO_3$ с концентрацией носителей $2{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ [9].

Темные кружки — магнитная восприимчивость (левая шкала ординат); светлые кружки — отношение электросопротивления к его нормальному значению, которое постоянно в диапазоне температур жидкого гелия

полярных полупроводников, таких, как $SrTiO_3$. Этот полупроводник в отличие от $BaTiO_3$ не является сегнетоэлектриком, од-



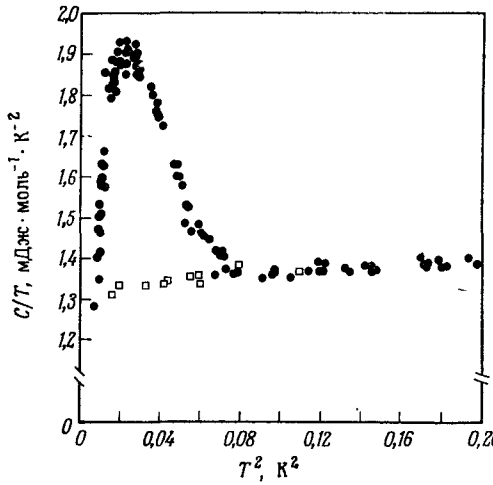
Фиг. 15.4. Сравнение экспериментальных [6. 9] и теоретических [10] значений температуры перехода в $SrTiO_3$.

Теоретические кривые: *1* — для $\lambda_{ак} = 0{,}5\, a^2/(a^2+1)$; *2* — для $\lambda_{ак} = 0{,}4\, a^2/(a^2+1)$.

нако его фононный спектр тоже имеет низкую оптическую ветвь, которая считается ответственной за сверхпроводящие свойства [10] (мягкая мода).

Можно подумать, что сверхпроводящими свойствами обладают лишь инородные включения. На фиг. 15.5 приведена экспериментальная зависимость отношения теплоемкости к температуре от T^2 для GeTe [11]. Когда сверхпроводимость

отсутствует (например, в сильном магнитном поле), наблюдается прямая линия. Наличие максимума указывает на то, что значительная часть образца является сверхпроводящей, т. е.



Фиг. 15.5. Зависимость теплоемкости GeTe от квадрата температуры в отсутствие магнитного поля (кружки) и в поле 500 Гс (квадратики) [11].

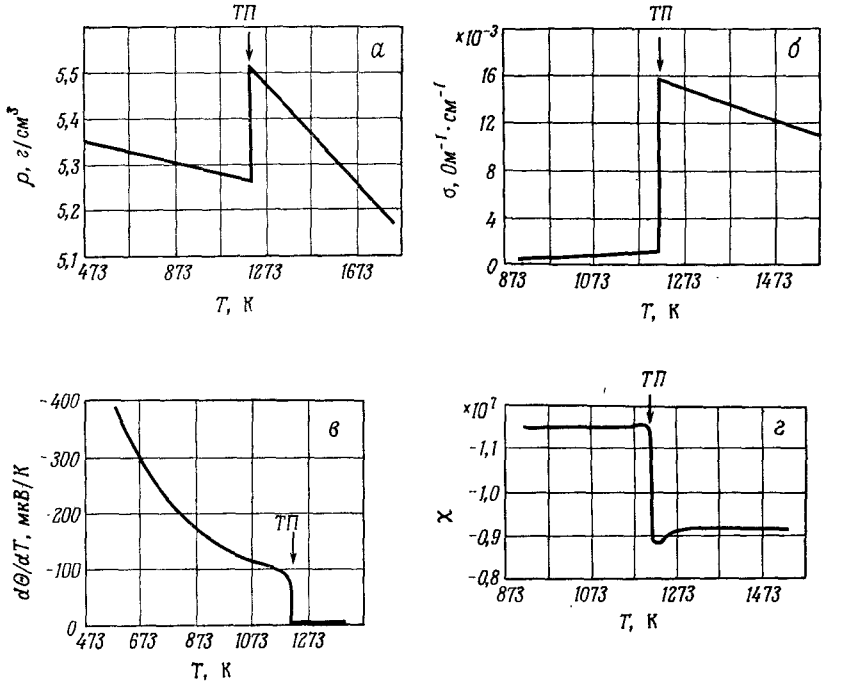
сверхпроводимость действительно оказывается объемным эффектом в полупроводниках.

§ 2. Жидкие, стеклообразные и аморфные полупроводники

Расплавленные полупроводники либо сохраняют полупроводниковые свойства (Se, Te, ZnTe, PbTe), либо приобретают металлические свойства (Ge, Si, AlSb, GaSb, InAs, InSb), причем эти металлические свойства такие же, как, например, у жидкой ртути [12]. При плавлении резко изменяются плотность ρ, электропроводность σ, термо-э. д. с. $d\Theta/dT$, магнитная восприимчивость χ. Изменение плотности составляет несколько процентов, и оно отрицательно (в Se, Te и в теллуридах) или положительно (в Ge, Si и в соединениях $A^{III}B^{V}$). В первой группе веществ плавление сопровождается образованием молекул или структур в виде цепочек, а во второй — разрушением ковалентных связей и образованием структуры с более плотной упаковкой. Дифракция рентгеновских лучей в расплавленном Ge показывает, что остатки кристаллической структуры имеются даже при температуре, превышающей точку плавления на 70 К;

они исчезают, когда температура повышается приблизительно на 300 К.

На фиг. 15.6, *а—г* приведены температурные зависимости ρ, σ, $d\Theta/dT$ и χ для германия, а на фиг. 15.7, *а* и *б* — температурные зависимости ρ и σ для теллура. Металлические свойства

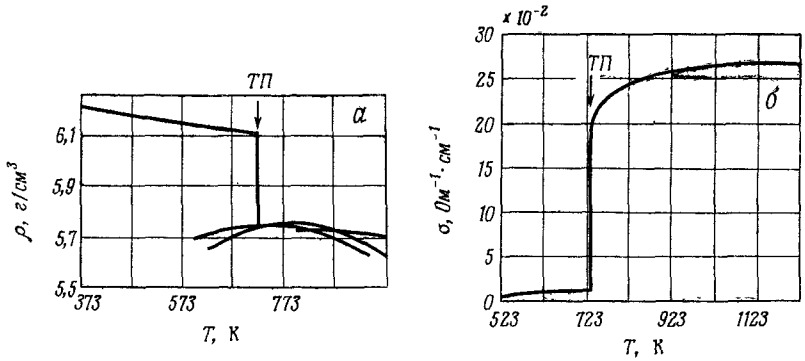


Фиг. 15.6. Температурная зависимость плотности (*а*), электропроводности (*б*), термо-э. д. с. (*в*) и магнитной восприимчивости (*г*) германия в окрестности точки плавления (ТП) [12].

германия выше точки плавления проявляются в том, что электропроводность уменьшается с температурой, значения термо-э. д. с. становятся совсем малыми, а полная магнитная восприимчивость принимает меньшие значения, которые обусловлены увеличением парамагнетизма спинов электронов проводимости в результате увеличения числа носителей. Согласно измерениям эффекта Холла, в германии подвижность электронов уменьшается при плавлении почти на три порядка и принимает значение 0,5 см^2/(В·с), а концентрация электронов увеличивается почти на четыре порядка до значения $1{,}2 \cdot 10^{23}$ см$^{-3}$, что соответствует примерно трем электронам на каждый атом. Полупроводниковые свойства жидкого теллура подтверждаются

положительным температурным коэффициентом электропроводности. Согласно данным по эффекту Холла, концентрация дырок увеличивается приблизительно в 10 раз при плавлении, и, так как электропроводность увеличивается примерно во столько же раз, изменения подвижности незначительны (30—40 $см^2/(В \cdot с)$. Из оптических измерений следует, что концентрация дырок в жидком теллуре составляет только 0,17 на один атом [13].

Селен, как и теллур, находится в шестой группе периодической системы Менделеева и при плавлении сохраняет полупроводниковые свойства. Если его переохладить, он может быть

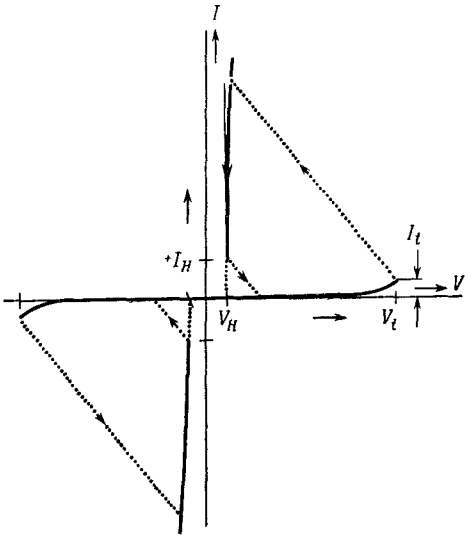


Фиг. 15.7. Температурная зависимость плотности (*а*) и электропроводности (*б*) теллура в окрестности точки плавления (ТП) [12].

получен в стеклообразной форме. Стеклообразный селен состоит из колец Se_8. При постепенном переходе из стеклообразной формы в жидкую электропроводность практически не меняется, поэтому предполагается, что кольца содержатся и в жидком селене.

В последнее время возник значительный интерес к стеклообразным полупроводникам в связи с перспективой их использования в технике в качестве элементов памяти и переключателей. В гл. 10, § 1, обсуждались характеристики пробоя компенсированного Ge. Для ряда стеклообразных полупроводников, в том числе для халькогенидных стекол As_2Se_3, $Ge_{16}As_{35}$, $Te_{28}S_{21}$, $Si_6Te_{24}As_{15}Ge_5$ (STAG) и т. д. Овшински [14] и другие наблюдали при комнатной температуре характеристику, подобную приведенной на фиг. 10.9. Вольтамперная характеристика схематически изображена на фиг. 15.8. Сначала, при напряжении ниже V_t, течет слабый ток. При V_t за время меньше 1 нс происходит пробой вдоль пунктирной линии, определяемой сопротивлением, включенным последовательно с исследуемым об-

разцом. При пробое, который не разрушает образца, создается нить тока (гл. 10, § 1). Напряжение поддержки V_H составляет от 1 до 10 В и не зависит от длины образца. Это наводит на мысль, что напряжение падает в основном вблизи одного или обоих электродов. Если ток уменьшается до значений ниже I_H, рассматриваемая система переходит в первоначальное высокоомное состояние (нижняя пунктирная линия на фиг. 15.8). Характеристика не зависит от полярности напряжения. Прибор такого типа называется пороговым переключателем.

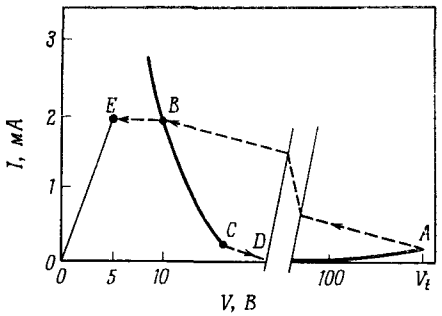


Фиг. 15.8. Схематическая вольтамперная характеристика стеклообразного халкогенидного полупроводника: пороговый переключатель [14, 15].

Если в некоторых стеклообразных соединениях поддерживать сильный ток в течение времени от 10^{-6} до 10^{-1} с, напряжение на образце уменьшается еще на некоторую величину (от точки B до точки E на фиг. 15.9). В этом процессе, называемом запоминанием [16], из анода к катоду со скоростью 10^{-2}—10^{2} см/с, зависящей от полупроводника [17, 18], вырастает кристаллический дендрит толщиной 15 мкм, что схематически изображено на фиг. 15.10. Это явление можно использовать в переключателе с памятью. Если на образец, находящийся в низкоомном состоянии с памятью, подать короткий импульс тока, достаточный для быстрого джоулева разогрева кристаллического канала до температуры выше точки плавления, то в результате последующего быстрого охлаждения расплавленная

область затвердевает в исходном стеклообразном состоянии; этим процессом память «стирается».

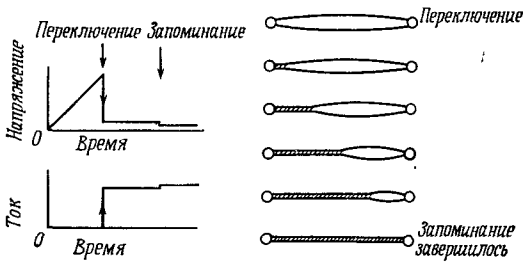
Исследования стеклообразных и аморфных полупроводников стимулировались перспективами их технического применения. В аморфных материалах так же, как в стеклах и жидкостях,



Фиг. 15.9. Процесс запоминания в аморфных полупроводниках: переключатель с памятью [16].

AB — процесс переключения без памяти; CD — обратный процесс; BC — характеристика в низкоомном состоянии без памяти; OA — характеристика в высокоомном состоянии; BE — запоминание; OE — характеристика в низкоомном состоянии с памятью

нет дальнего кристаллического порядка. Эти материалы получают испарением, напылением, электролитическим осаждением или химическим осаждением из газовой фазы. Они отличаются от стекол тем, что их расплав при затвердевании кристаллизуется. Как идеальное стеклообразное состояние, так и аморф-



Фиг. 15.10. Процесс запоминания в аморфных полупроводниках [18].

После пробоя (переключения в низкоомное состояние) вдоль проводящей нити от анода к катоду растет дендрит. Когда он достигает катода, процесс запоминания завершается.

ное состояние (последнее в большей степени) метастабильны: в результате длительного выдерживания при достаточно высокой температуре, которая существенно ниже точки плавления, вещество переходит в поликристаллическую фазу, причем в случае тонких пленок возникают специфические скопления (сферолиты).

Вопрос о механизме столь быстрого электрического пробоя остается открытым, и в настоящее время существуют только догадки. Предлагались различные модели зонной структуры

стеклообразных и аморфных полупроводников. Чтобы учесть существование ближнего порядка в этих полупроводниках, необходимы лишь некоторые видоизменения зонной модели идеального кристалла[1]). Губанов [19] выдвинул идею случайного расстояния между потенциальными ямами одинаковой глубины, а Мотт и др. [20] оставили периодическое расположение потенциальных ям в модели Кронига — Пенни и постулировали случайную их глубину. Наконец, Коэн, Фритче и Овшински [21] развили модель сильно легированных кристаллических полупроводников, в которых с увеличением уровня легирования в зоне запрещенных энергий образуются примесная зона, сливающаяся впоследствии с зоной разрешенных энергий, и хвосты состояний, обусловленные сильными локальными электрическими полями (гл. 9, § 1). Хвосты локализованных состояний, возникающие из зоны проводимости и из валентной зоны, могут даже перекрываться, заполняя разрешенными состояниями всю ширину запрещенной зоны. Состояния хвоста валентной зоны, расположенные выше уровня Ферми, играют роль уровней прилипания для электронов, а локализованные состояния зоны проводимости, которые располагаются ниже уровня Ферми, могут захватывать дырки. Подвижность в хвостах состояний определяется механизмами перескоков (гл. 6, § 14), поэтому она существенно ниже, нежели в зонах. Резкое изменение подвижности при значениях энергии, которым ранее соответствовали края зон, оправдывает замену термина «ширина запрещенной зоны между зонами плотности состояний» в чисто кристаллических полупроводниках термином «ширина запрещенной зоны по подвижности».

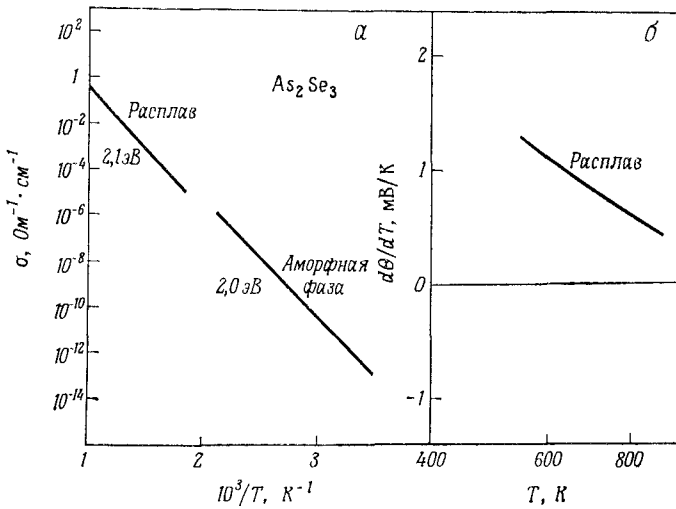
Это представление подтверждается температурными зависимостями электропроводности и термо-э. д. с., приведенными на фиг. 15.11 в случае жидкого и аморфного As_2Se_3 [22—25]. Для электропроводности имеет место зависимость

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{2k_BT}\right), \qquad (15.2.1)$$

где σ_0 и $\Delta\varepsilon$ — некоторые постоянные. Подобная зависимость описывается формулой (4.2.59) с n_i в виде (3.2.20) и соответствует случаю собственной проводимости кристаллического полупроводника. В противоположность этому зависимость (15.2.1) не переходит в зависимость, соответствующую примесной проводимости при низких температурах, когда σ увеличивается с увеличением $1/T$, а остается неизменной до таких значений электропроводности, при которых полупроводник уже можно считать изолятором. Термо-э. д. с. в жидком состоянии

[1]) Этот вопрос подробно рассмотрен в работе [51]. — *Прим. перев.*

имеет положительный знак, и ее зависимость от температуры такая же, как в собственном полупроводнике, в котором подвижность дырок больше подвижности электронов (фиг. 4.19). Приведенные закономерности относительно нечувствительны к степени легирования примесями. Отсутствует и проблема создания невыпрямляющих контактов, характерная для полупроводников, содержащих большую плотность локализованных состояний (10^{18}—10^{19} $см^{-3}$). Из измерений эффекта Холла, если их



Фиг. 15.11. Температурная зависимость электропроводности (*а*) и термо-э. д. с (*б*) жидкого и аморфного As_2Se_3 [22].

возможно провести, получаются очень малые значения холловской подвижности. Непонятно, почему знак коэффициента Холла оказывается отрицательным даже в том случае, когда из измерений термо-э. д. с. следует, что проводимость обусловлена дырками.

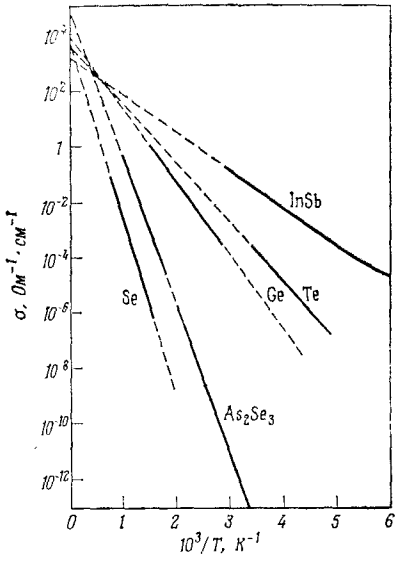
На фиг. 15.12 приведена экстраполяция температурной зависимости электропроводности к $1/T = 0$ для различных полупроводников в аморфном состоянии. Из всех результатов следуют примерно одинаковые значения σ_0, лежащие между 10^3 и 10^5 $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$.

При низких температурах имеются отклонения от зависимости (15.2.1). На фиг. 15.13 приведена температурная зависимость логарифма электропроводности аморфного германия, которая имеет вид прямой линии, если на шкале абсцисс отло-

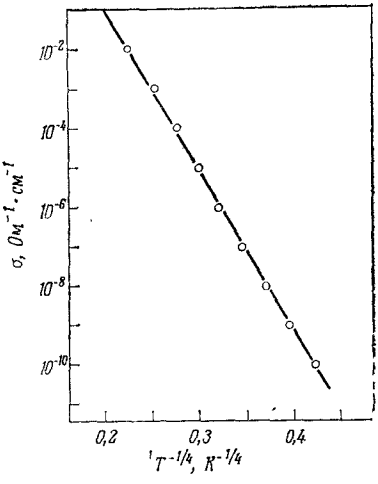
жена величина $T^{-1/4}$ [26]:

$$\sigma = \sigma_0' \exp\left[-\left(\frac{\Delta}{T}\right)^{1/4}\right], \qquad (15.2.2)$$

где σ_0' и Δ — некоторые постоянные. Эта зависимость может быть объяснена, исходя из трехмерной модели перескоков [27].



Фиг. 15.12. Температурная зависимость электропроводности ряда аморфных полупроводников и ее экстраполяция к $1/T = 0$ [25].



Фиг. 15.13. Температурная зависимость электропроводности аморфного германия при низких температурах [26].

Двумерная модель перескоков дает зависимость

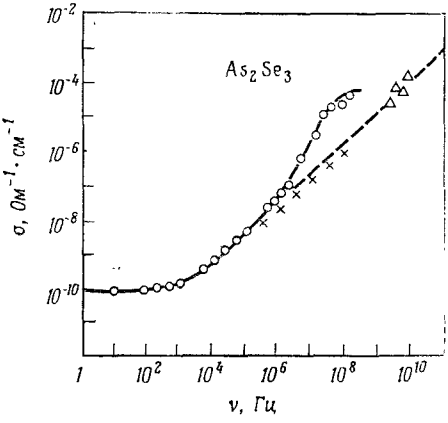
$$\sigma = \sigma_0' \exp\left[-\left(\frac{\Delta}{T}\right)^{1/3}\right], \qquad (15.2.3)$$

которая наблюдается в некоторых органических полупроводниках (гл. 15, § 3).

На фиг. 15.14 приведена частотная зависимость электропроводности на переменном токе частоты до 10 ГГц для аморфного As_2Se_3 при комнатной температуре. Увеличение электропроводности с частотой считается серьезным аргументом в пользу механизма перескоков. Согласно расчетам, в случае перескоков ожидается увеличение, пропорциональное $\omega^{0,8}$ (гл. 6, § 14), в то время как для чисто кристаллических полупроводников

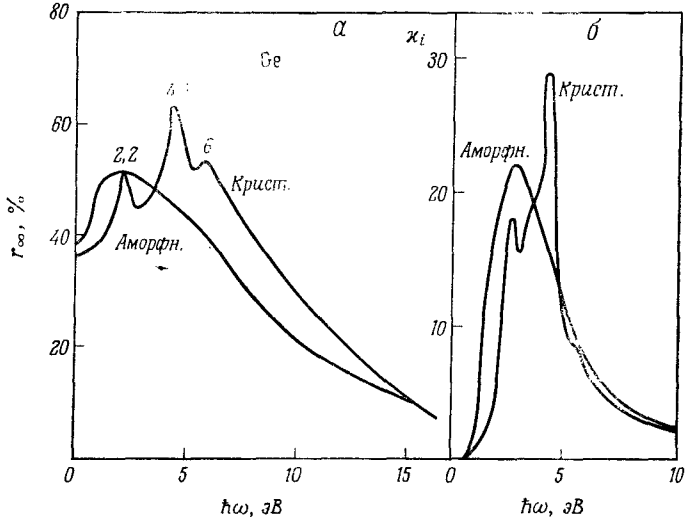
наблюдалось уменьшение (гл. 4, § 14). Применение модели перескоков к аморфным полупроводникам приводит к частотной зависимости электропроводности вида $\omega(\ln(\omega_p/\omega)]^4$, т. е. отличающейся от упомянутой зависимости $\omega^{0,8}$ (ω_p — частота фононов) [31].

Измерение спектров в области собственного поглощения является одним из основных методов исследования зонной структуры. На фиг. 15.15, *а* сравниваются



Фиг. 15.14. Частотная зависимость электропроводности As_2Se_3 в аморфном состоянии [28—30].

коэффициенты отражения, а на 15.15, *б* — мнимые части диэлектрической проницаемости аморфного и кристаллического гер-

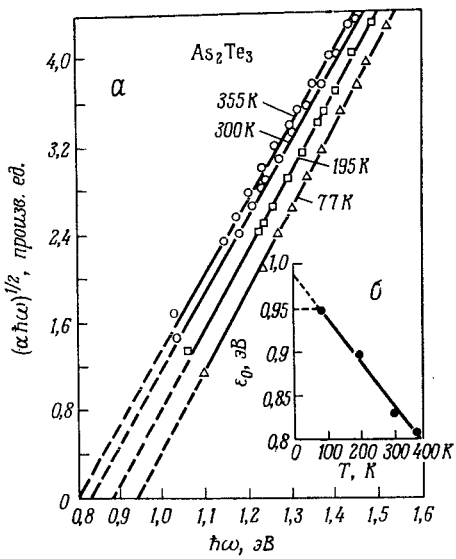


Фиг. 15.15. Коэффициент отражения (*а*) и мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varkappa_i = 2nk$ (*б*) кристаллического и аморфного германия [32].

мания. В аморфном состоянии исчезает острый максимум при 4,5 эВ, а максимум при 2 эВ значительно расширяется. Поскольку максимуму при 4,5 эВ соответствуют переходы на оси

⟨100⟩ зоны Бриллюэна, а ближайшие соседи в алмазоподобной решетке располагаются в направлениях ⟨111⟩, из этого следует, что дальний порядок (в направлении ⟨100⟩ и в близких к нему направлениях) сильно нарушен, тогда как изменения ближнего порядка (в направлении ⟨111⟩) не столь значительны.

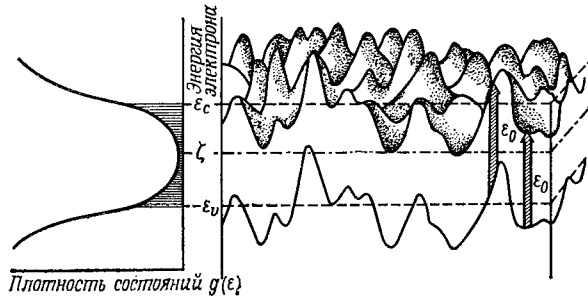
Оптическая ширина запрещенной зоны ε_0 может быть определена по краю полосы собственного поглощения. На фиг. 15.16, *а* приведены зависимости $(\alpha\hbar\omega)^{1/2}$ от $\hbar\omega$ для As_2Te_3, из которых удобно определить ε_0 согласно (11.2.12) и (11.2.2) [33]. В качестве параметра выбрана температура решетки T. На фиг. 15.16, *б* приведена температурная зависимость ε_0. Из экстраполяции температурной зависимости к $T = 0$ следует значение 0,98 эВ. Ширина запрещенной зоны по подвижности $\Delta\varepsilon$ в этих образцах составляет $0{,}80 \pm \pm 0{,}04$ эВ, и, хотя экстраполированное значение оптической ширины запрещенной зоны несколько больше, это свидетельствует в пользу утверждения, что зонная модель кристаллических тел после некоторых небольших видоизменений пригодна и для аморфных полупроводников.



Фиг. 15.16. Край полосы поглощения As_2Te_3 при различной температуре (*а*) и зависимость оптической ширины запрещенной зоны от температуры (*б*) [33].

Остается еще объяснить, почему большое количество локализованных состояний не проявляется в экспериментах по оптическому поглощению. Фритче [34] предложил модель (фиг. 15.17), согласно которой неупорядоченные флуктуации потенциала одинаково меняют положение зоны проводимости и валентной зоны, но не оказывают влияния на оптические свойства; это соответствует наблюдениям, что p—n-переход не проявляется оптически, если не считать вторичных эффектов, связанных с внутренним полем в переходе, которые чрезвычайно малы. Края зон определяются как локальные величины, усредненные по небольшому объему, имеющему размеры порядка длины когерентности волны электрона или дырки, участвующих

в оптическом переходе. Если исходить из такого же представления, некоторые состояния обеих зон становятся состояниями хвостов и имеют энергии, соответствующие зоне запрещенных энергий, как показано на фиг. 15.17, слева. Заштрихованные области суть локализованные состояния в том смысле, что электрону в потенциальной яме необходимо сообщить энергию активации, чтобы он мог участвовать в переносе заряда в экспериментах по электропроводности, как это имеет место для



Фиг. 15.17. Флуктуация потенциала исходного и конечного состояний электрона при оптических переходах, соответствующих оптической ширине запрещенной зоны ε_0 [34].

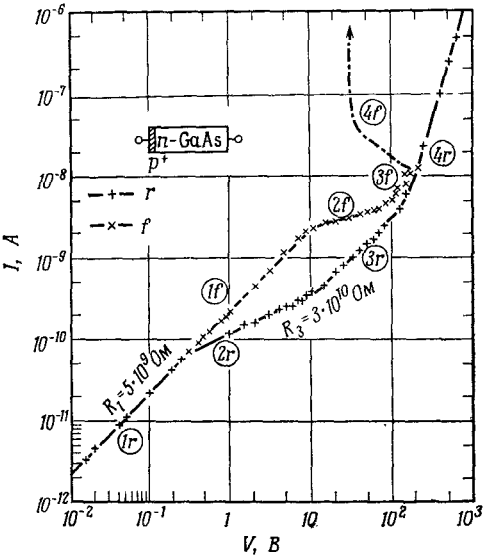
Слева приведена плотность состояний. Между ε_c и ε_v расположены локализованные состояния. Потенциальные ямы ближнего порядка и их флуктуации не показаны. Приведены только те флуктуации дальнодействующего потенциала, которые приводят к параллельному сдвигу зоны проводимости и валентной зоны. Та часть потенциала, которая приводит к зависимости ε_0 от положения, не показана.

электрона, захваченного на уровень прилипания в кристаллическом полупроводнике. В этом смысле величина $\Delta\varepsilon$ в (15.2.1) может быть названа шириной запрещенной зоны по подвижности, и она не обязательно совпадает с оптической шириной зоны ε_0. Внутреннее поле приводит к эффекту Франца — Келдыша (гл. 11, § 5) и обусловливает хвосты оптического поглощения. Однако эти хвосты не проявляются на фиг. 15.16.

Интересную мысль относительно электрических свойств аморфных полупроводников высказали Росбрек и др. (см. обзор [35]). В полупроводнике, содержащем большое число центров рекомбинации, время жизни τ для инжектированных носителей мало. С другой стороны, удельное сопротивление очень велико, и, следовательно, время максвелловской релаксации τ_d также необычно велико: $\tau_d \gg \tau$. Этот случай можно назвать случаем релаксации; такие полупроводники называются высокоомными [1]). Специфические свойства высокоомных полупровод-

[1]) Исследования высокоомных полупроводников проводились в связи с проблемами электрофотографии (см., например, [52]). — *Прим. ред.*

ников исследовались, исходя из уравнения Пуассона и уравнений для скорости рекомбинации и непрерывности, причем плотность тока определялась, как обычно (включая диффузионную часть). В результате инжекции неосновных носителей концентрация основных носителей может уменьшаться, а удельное сопротивление увеличиваться [36—38]. Независимо от уровня легирования при всех температурах полупроводник подобен собственному. Этот эффект был отчетливо продемонстрирован в



Фиг. 15.18. Вольтамперная характеристика высокоомного полупроводника (n-GaAs с p^+ — n-переходом) при комнатной температуре в темноте в обратном (r) и в прямом (f) направлениях [35].

случае монокристалла GaAs, легированного глубокими уровнями (кислородом), концентрация электронов в котором составляла всего $3 \cdot 10^7$ см$^{-3}$ при комнатной температуре, а подвижность была весьма высокой [4500 см^2/(В·с)]. Диффузией Zn на одном из концов образца был создан p_+—n-переход. Время максвелловской релаксации составляло 10^{-4} с и было продолжительным по сравнению с временем жизни, не превышающим 10^{-8} с. Характеристики в прямом и обратном направлениях приведены на фиг. 15.18.

Характеристика в обратном направлении в области 1r линейна, а сопротивление примерно в три раза больше, чем можно было бы ожидать, судя только по области n-типа. Основной

вклад в сопротивление вносит область объемного заряда (~70 мкм), расположенная по соседству с p—n-переходом. Удельное сопротивление в ней максимально:

$$\rho_{\text{макс}} = \frac{(\mu_n/\mu_p)^{1/2}}{2en_i\mu_n}, \qquad (15.2.4)$$

где $n_i = 9 \cdot 10^5$ см$^{-3}$ — концентрация собственных носителей, а $\mu_n/\mu_p \approx 20$ — отношение подвижностей. Чем больше напряжение, тем шире область объемного заряда с пониженной концентрацией основных носителей, а ток пропорционален квадратному корню из напряжения. Когда область объемного заряда расширяется на всю область n-типа, сопротивление образца определяется удельным сопротивлением $\rho_{\text{макс}}$. При еще больших напряжениях наступает режим токов, ограниченных объемным зарядом движущихся носителей, для которого характерна сверхлинейная вольт-амперная характеристика.

Сопротивление в прямом направлении равно сопротивлению в обратном направлении при слабом поле до тех пор, пока в результате рекомбинации более подвижных электронов с дырками, инжектированными через область объемного заряда, не уменьшается концентрация первых в области n-типа. Наконец (в области 4f), возникает двойная инжекция, и дифференциальное сопротивление становится отрицательным.

Из этого эксперимента следует, что в электрическом поле умеренной напряженности сопротивление высокоомного полупроводника характеризуется собственной концентрацией носителей в области объемного заряда, которая может расшириться на весь образец независимо от уровня легирования. Температурная зависимость сопротивления при этом экспоненциальна и определяется шириной запрещенной зоны, тогда как оптические свойства у края полосы собственного поглощения не зависят от наличия объемного заряда.

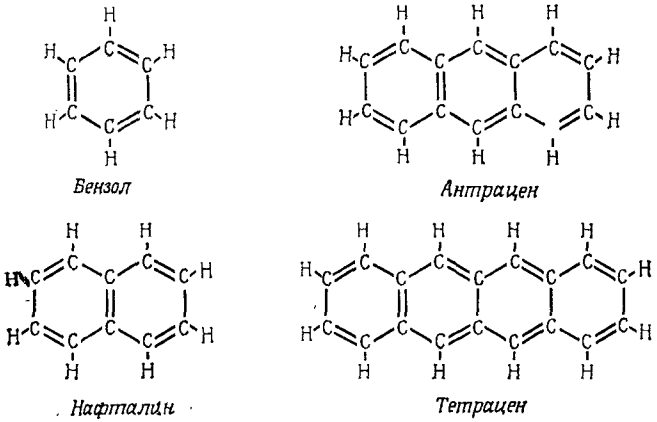
Свойствами типичных высокоомных полупроводников обладают не только аморфные полупроводники, но также почти все органические полупроводники, которые рассматриваются ниже.

§ 3. Органические полупроводники

Интерес к исследованию электронной проводимости в органических веществах обусловлен как использованием органических красителей для очувствления фотографических эмульсий, так и предположением, что она может играть важную роль в основных физических процессах в живых организмах [39] [1]).

[1]) Обзор ранних работ по органическим полупроводникам см. в работе [40].

Ароматические углеводороды, такие, как нафталин, антрацен, тетрацен (фенацен), являются наиболее исследованными органическими полупроводниками. Они представляют собой производные бензола. Их структурные формулы приведены на фиг. 15.19. Указанные в формулах двойные связи на самом деле представляют простые связи; в облакообразных областях выше и ниже центральной плоскости молекулы содержится эквивалентное количество π-электронов. Предполагается, что электрический ток от одной молекулы к другой переносится



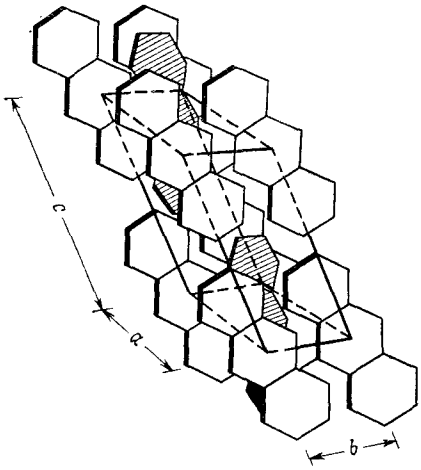
Фиг. 15.19. Структурные формулы четырех ароматических углеводородов с сопряженными связями (одной связи соответствует пара электронов, двойной — две пары).

исключительно π-электронами; этот перенос рассматривается как медленный шаг в процессе проводимости.

Исследовались полупроводниковые свойства монокристаллов нафталина, антрацена и многих других. Эти кристаллы относятся к моноклинной модификации (пространственная группа C_{2h}^5). В качестве примера на фиг. 15.20 приведена структура антрацена [41]. Оси a и b перпендикулярны, а ось c наклонная. В плоскости ab, которая является плоскостью скола, электропроводность антрацена изотропна, тогда как в направлении, перпендикулярном этой плоскости, электропроводность по крайней мере на порядок меньше.

Во многих отношениях имеется поразительное сходство между аморфными неорганическими и кристаллическими органическими полупроводниками. Прежде всего температурная зависимость электропроводности последних также подчиняется зависимости (15.2.1). Ширина запрещенной зоны по подвижности $\Delta\varepsilon$ принимает значения от 0,2 эВ (в порошкообразном цианантроне [42]) до более чем 3 эВ (в монокристаллах антрацена

[43]). Закон Ома выполняется до полей порядка 10^3 В/см. В более сильных полях наблюдается сверхлинейная зависимость; при полях 10^6 В/см происходит неразрушающий обратимый пробой. Согласно измерениям на переменном токе частоты 10^5—10^7 Гц, электропроводность как по величине, так и по температурной зависимости сравнима с электропроводностью на постоянном токе, несмотря на то что время максвелловской релаксации может достигать 100 с (например, во фталоцианине). Измерения эффекта Холла встречают серьезные трудности; можно предположить, что холловская подвижность очень мала. В случае фталоцианина сообщалось, что коэффициент Зеебека очень мал ($5 \cdot 10^{-5}$ В/К); его знак соответствует дырочной проводимости. В этом же полупроводнике выпрямление в точечном контакте имеет направление, которое показывает, что основные носители — дырки. Как и в случае аморфных полупроводников, проблемы хорошего контакта для измерения очень малых электропроводностей не существует: используются металлическая фольга, серебряная паста или напыленные металлические электроды. Иногда применяются защитные кольца, что позволяет разделить поверхностную и объемную проводимости. Примеси (с концентрацией 0,1%), по-видимому, лишь добавляют вторую энергию активации $\Delta\varepsilon'$, характерную для примеси, так что



Фиг. 15.20. Кристаллическая структура антрацена (выделена моноклинная элементарная ячейка) [41].

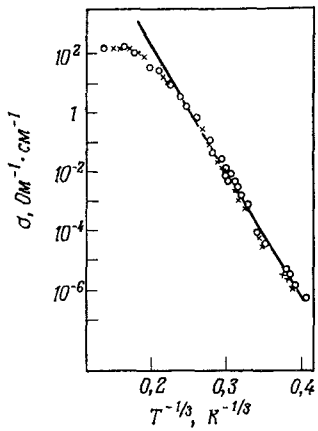
$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{2k_BT}\right) + \sigma_0' \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon'}{2k_BT}\right). \qquad (15.3.1)$$

Однако $\Delta\varepsilon'$ составляет только примерно $^3/_4$ собственной энергии активации вещества самой примеси в чистом виде.

Край полосы оптического поглощения и порог фотопроводимости, которые обычно ненамного различаются, по-видимому, не связаны с энергией $\Delta\varepsilon$, определяющей электропроводность. Фотопроводимость зависит от окружающей среды и от состояния поверхности. Перенос энергии посредством экситонов, по-видимому, играет важную роль в опытах по фотопроводимости. Хотя

время жизни экситона в синглетном состоянии составляет всего 10^{-8} с, он быстро перемещается и успевает пройти за это время 10^4 молекул. Энергии синглетного экситона в антрацене и в тетрацене равны 3,15 и 2,4 эВ [44], триплетного — только 1,8 и 1,4 эВ соответственно.

Как и в случае аморфных полупроводников, механизм перескоков привлекался для объяснения электропроводности органических полупроводников. Однако в противоположность аморфным полупроводникам многие органические полупроводники имеют слоистую структуру, и можно ожидать перескоков в двух измерениях, описываемых формулой (15.2.3). На фиг. 15.21 приведена температурная зависимость электропроводности монокристалла *н*-метилфеназин-тетрацианхинодиметана в полулогарифмическом масштабе ($\ln\sigma$ в зависимости от $T^{-1/3}$) [45]. Прямая линия в широком диапазоне температур свидетельствует в пользу применимости (15.2.3). Выбор одной из солей тетрацианхинодиметана объясняется тем, что эти вещества имеют высокую электропроводность.

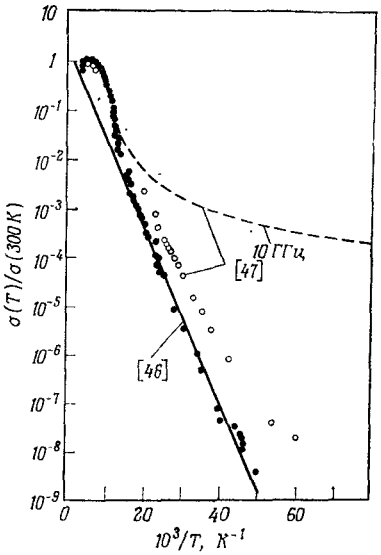


Фиг. 15.21. Зависимость электропроводности *н*-метилфеназин-тетрацианхинодиметана от $1/T^{1/3}$ [45].

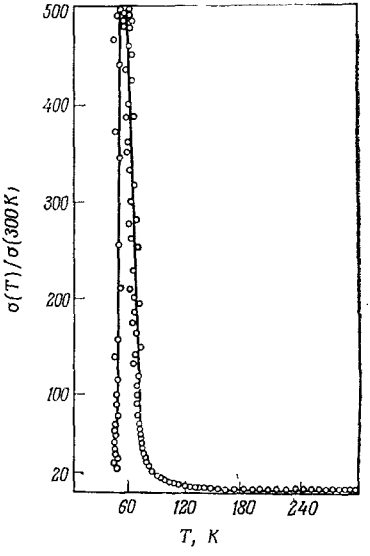
Как и в случае аморфных полупроводников увеличение электропроводности на переменном токе с частотой является сильным аргументом в пользу механизма перескоков. На фиг. 15.22 сравниваются электропроводности на постоянном токе и на сверхвысоких частотах (10 ГГц) [46, 47]. При комнатной температуре обе электропроводности практически одинаковы. При наиболее низкой температуре (~ 10 К) электропроводность на сверхвысоких частотах на несколько порядков больше. Интересно также, что диэлектрическая проницаемость имеет большое значение — около 350 для данного соединения и 800 для акридин-тетрацианхинодиметана при 4,2 К и 10 ГГц. Как и в сегнетоэлектриках, наличие мягкой воды в спектре фононов, по-видимому, коррелирует с большой диэлектрической проницаемостью.

В другом соединении тетрацианхинодиметана, называемом диметилтетратиофульвален-тетрацианхинодиметаном, при 58 К обнаружена металлическая электропроводность ($\sigma >$

$> 10^6$ $Ом^{-1} \cdot см^{-1}$). Ввиду экспериментальных трудностей пока установлен только нижний предел σ. Электропроводность при комнатной температуре тоже исключительно высока для органического соединения: $\sigma(300\ К) = 1837\ Ом^{-1} \cdot см^{-1}$. В узком диапазоне температур, который, видимо, соответствует фазовому переходу, электропроводность резко возрастает (фиг. 15.23)



Фиг. 15.22. Температурная зависимость электропроводности *н*-метилфенацин-тетрацианхинодиметана, приведенная к ее значению при комнатной температуре, равному 380 $Ом^{-1} \cdot см^{-1}$ (штриховая кривая — результаты измерений при 10 ГГц) [46, 47].



Фиг. 15.23. Температурная зависимость электропроводности диметилтетратиофульвален-тетрацианхинодиметана [48].

[48]. Эти результаты объясняются сверхпроводящими флуктуациями, связанными с тенденцией к возникновению высокотемпературной сверхпроводимости. Как указал Бардин [50], в 1954 г. Фрёлих [49] выдвинул гипотезу о возможности возникновения сверхпроводимости, связанной с нестабильностью одномерной кристаллической структуры. Согласно некоторым теоретическим соображениям, должны существовать сегнетоэлектрические фазовые переходы с участием «мягкой моды фононов», коррелирующие с наблюдаемой сверхпроводимостью (§ 1 данной главы).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич В. Л., Ларкин А. И., Фирсов Ю. А.*, ФТТ, **4**, 185 (1962).
2. *Cohen M. L.*, Phys. Rev., **134**, A511 (1964).
3. *Cohen M. L., Koonce C. S.*, Proc. 8th Intern. Conf., Semicond. Physics, Physical Soc. Japan, Tokyo, 1966, p. 633 (Journ. Phys. Soc. Japan., **21** Suppl. (1966)).
4. *Hein R. A., Gibson J. W., Mazelsky R., Miller R. C., Hulm J. K.*, Phys. Rev. Letters, **12**, 320 (1964).
5. *Hein R. A., Gibson J. W., Allgaier R. S., Houston B. B., Jr., Mazelsky R. L., Miller R. C.* в книге Proc. 9th Intern. Conf. Low-Temp. Phys. (ed. J. A. Daunt), Plenum, New York, 1965, p. 604.
6. *Schooley J. F., Hosler W. R., Cohen M. L.*, Phys. Rev. Letters, **12**, 474 (1964).
7. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.*, Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
8. *de Gennes P. G.*, Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York, 1966.
9. *Schooley J. F., Hosler W. R., Ambler E., Becker J. H., Cohen M. L., Koonce C. S.*, Phys. Rev. Letters, **14**, 305 (1965).
10. *Appel J.*, Phys. Rev. Letters, **17**, 1045 (1966).
11. *Finegold L.*, Phys. Rev. Letters, **13**, 233 (1964).
12. *Glazov V. M., Chizhevskaya S. N., Glagoleva N. N.*, Liquid Semiconductors, Plenum, New York, 1969.
13. *Hodgson J. N.*, Phil. Mag., **8**, 735 (1963).
14. *Ovshinsky S. R.*, Phys. Rev. Letters, **21**, 1450 (1968).
15. *Csillag A., Jäger H.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **2**, 133 (1970).
16. *Kikuchi M., Iizima S.*, Appl. Phys. Letters, **15**, 323 (1969).
17. *Uttrecht R., Stevenson H., Sie C. H., Griener J. D., Raghavan K. S.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **2**, 358 (1970).
18. *Fritzsche H., Ovshinsky S. R.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **4**, 464 (1970).
19. *Губанов А. И.*, Квантово-электронная теория аморфных полупроводников, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1963.
20. *Mott N. F., Davis E. A.*, Electronic Processes in Non-Crystalline Materials, Clarendon, Oxford, 1971. (Имеется перевод: *Н. Ф. Мотт, Э. Дэвис*, Электронные процессы в некристаллических веществах, «Мир», М., 1974.)
21. *Cohen M. H., Fritzsche H., Ovshinsky S. R.*, Phys. Rev. Letters, **22**, 1065 (1969).
22. *Drews R. E., Zallen R., Keezer R. C.*, Bull. Am. Phys. Soc., **13**, 454 (1968).
23. *Edmond J. T.*, Brit. Journ. Appl. Phys., **17**, 979 (1966).
24. *Kolomiets B. T., Mazarova T. F., Shylo V. P.*, Proc. 6th Intern. Conf. Semicond. Physics, Exeter, 1962, The Institute of Physics and the Physical Society, 1962, p. 159.
25. *Stuke J.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **4**, 1 (1970).
26. *Clark A. H.*, Phys. Rev., **154**, 750 (1967).
27. *Mott N. F.*, Phil. Mag., **19**, 835 (1969).
28. *Owen A. E., Robertson J. M.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **2**, 40 (1970).
29. *Ivkin E. B., Kolomiets B. T.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **3**, 41 (1971).
30. *Taylor P. C., Bishop S. C., Mitchell D. L.*, Solid State Commun., **8**, 1783 (1970).
31. *Austin I. G., Mott N. F.*, Advan. Phys., **18**, 14 (1969).
32. *Tauc J., Abraham A., Pajasova L., Grigorovici R., Vancu A.* в книге Proc. Conf. Physics of Non-Crystalline Solids, Delft, 1964 (ed. J. A. Prins), North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 606.
33. *Weiser K., Brodsky M. H.*, Phys. Rev., **B1**, 791 (1970).
34. *Fritzsche H.*, Journ. Non-Cryst. Solids, **6**, 49 (1971).
35. *Queisser H. J.* в книге European Solid State Device Res. Conf., Lancaster 1972 (ed. P. N. Robson), The Institute of Physics and the Physical Society, London, 1973.

36. *Van Roosbroeck W.*, Phys. Rev., **123**, 474 (1961).
37. *Van Roosbroeck W., Casey H. C., Jr.*, Phys. Rev., **B5**, 2154 (1972).
38. *Queisser H. J., Casey H. C., Jr., van Roosbroeck W.*, Phys. Rev. Letters, **26**, 551 (1971).
39. *Szent-Györgyi A.*, Nature, **157**, 875 (1946).
40. *Garrett C. G. B.* в книге Semiconductors (ed. N. B. Hannay), Reinhold, New York, 1959, Ch. 15. [Имеется перевод: Полупроводники (под ред. Н. Б. Хеннея, перевод под ред. Б. Ф. Ормонта), ИЛ, М. 1962.]
41. *Pope M.*, Sci. Am., **216**, No. 1, 86 (1967).
42. *Inokuchi H.*, Bull. Chem. Soc. Japan, **25**, 28 (1952).
43. *Inokuchi H.*, Bull. Chem. Soc. Japan, **29**, 131 (1956).
44. *Fielding P. E., Gutman F.*, Journ. Chem. Phys., **26**, 411 (1957).
45. *Brenig W., Döhler G. H., Heyszenau H.*, Phys. Letters, **39A**, 175 (1972).
46. *Coleman L., Cohen J. A., Garito A. F., Heeger A. J.*, Phys. Rev., **B7**, 2122 (1970).
47. *Буравов Л. И., Хидекель М. Л., Щеглов И. Ф., Ягубский Э. Б.*, Письма ЖЭТФ, **12**, 142 (1970).
48. *Coleman L. B., Cohen M. J., Sandman D. J., Yamagishi F. G., Garito A. F., Heeger A. J.*, Solid State Commun., **12**, 1125 (1973).
49. *Fröhlich H.*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **223**, 296 (1954).
50. *Bardeen J.*, Handbuch der Physik (Hrg. S. Flugge), Bd. 15, S. 366/7, Springer, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956.
51*. *Иоффе А. Ф., Регель А.* в книге Progress in Semiconductors (ed. A. F. Gibson), Vol. 4, 237, 1960.
52*. *Гайделис В. И., Маркевич Н. Н., Монтримас Э. А.*, Физические процессы в электрофотографических слоях ZnO, «Минтис», Вильнюс, 1968.

Приложение 1. ТЕНЗОРЫ ЭЛЕКТРО- И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В случае простой модели зонной структуры вклад электронов и дырок в плотность электрического тока $\mathbf{j}$ при наличии электрического поля напряженности $\mathbf{E}$, магнитной индукции $\mathbf{B} = (B_x B_y B_z)$ и градиента температуры $\nabla_r T$ можно записать в виде

$$\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \sigma - \beta B_x^2 & \gamma B_z - \beta B_x B_y & -\gamma B_y - \beta B_x B_z \\ -\gamma B_z - \beta B_x B_y & \sigma - \beta B_y^2 & \gamma B_x - \beta B_y B_z \\ \gamma B_y - \beta B_x B_z & -\gamma B_x - \beta B_y B_z & \sigma - \beta B_z^2 \end{vmatrix} \left(E + \frac{\nabla\zeta}{|e|}\right) +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sigma' - \beta' B_x^2 & \gamma' B_z - \beta' B_x B_y & -\gamma' B_y - \beta' B_x B_z \\ -\gamma' B_z - \beta' B_x B_y & \sigma' - \beta' B_y^2 & \gamma' B_x - \beta' B_y B_z \\ \gamma' B_y - \beta' B_x B_z & -\gamma' B_x - \beta' B_y B_z & \sigma' - \beta' B_z^2 \end{vmatrix} \frac{\nabla T}{T}. \quad (1.1)$$

Такое же выражение можно записать для плотности теплового потока $-\mathbf{w}$ с той лишь разницей, что σ, β и γ следует заменить на σ', β' и γ', а σ', β' и γ' заменить на σ'', β'' и γ'':

$$-\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sigma' - \beta' B_x^2 \cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} \left(\mathbf{E} + \frac{\Delta\zeta}{|e|}\right) + \begin{pmatrix} \sigma'' - \beta'' B_x^2 \cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} \frac{\nabla T}{T}. \quad (1.2)$$

Коэффициенты σ, β, γ, σ', ... имеют следующий вид:

$$\sigma = e^2 \left(\frac{n}{m_n} \langle Z\tau_m \rangle_n + \frac{p}{m_p} \langle Z\tau_m \rangle_p\right), \quad (1.3)$$

$$\sigma' = -|e| \left[\frac{n}{m_n} \langle Z\tau_m (\varepsilon - \zeta) \rangle_n - \frac{p}{m_p} \langle Z\tau_m (\varepsilon - \zeta) \rangle_p\right], \quad (1.4)$$

$$\sigma'' = \frac{n}{m_n} \langle Z\tau_m (\varepsilon + \zeta)^2 \rangle_n + \frac{p}{m_p} \langle Z\tau_m (\varepsilon - \zeta)^2 \rangle_p, \quad (1.5)$$

$$\gamma = -|e|^3 \left(\frac{n}{m_n^2} \langle Z\tau_m^2 \rangle_n - \frac{p}{m_p^2} \langle Z\tau_m^2 \rangle_p\right), \quad (1.6)$$

$$\gamma' = e^2 \left[\frac{n}{m_n^2} \langle Z\tau_m^2 (\varepsilon - \zeta) \rangle_n + \frac{p}{m_p^2} \langle Z\tau_m^2 (\varepsilon - \zeta) \rangle_p\right], \quad (1.7)$$

$$\gamma'' = -|e| \left[\frac{n}{m_n^2} \langle Z\tau_m^2 (\varepsilon - \zeta)^2 \rangle_n - \frac{p}{m_p^2} \langle Z\tau_m^2 (\varepsilon - \zeta)^2 \rangle_p\right], \quad (1.8)$$

$$\beta = -e^4\left[\frac{n}{m_n^3}\langle Z\tau_m^3\rangle_n + \frac{p}{m_p^3}\langle Z\tau_m^3\rangle_p\right], \tag{1.9}$$

$$\beta' = |e^3|\left[\frac{n}{m_n^3}\langle Z\tau_m^3(\varepsilon-\zeta)\rangle_n - \frac{p}{m_p^3}\langle Z\tau_m^3(\varepsilon-\zeta)\rangle_p\right], \tag{1.10}$$

$$\beta'' = -e^2\left[\frac{n}{m_n^3}\langle Z\tau_m^3(\varepsilon-\zeta)^2\rangle_n + \frac{p}{m_p^3}\langle Z\tau_m^3(\varepsilon-\zeta)^2\rangle_p\right], \tag{1.11}$$

где величина Z, согласно (4.5.3), имеет вид

$$Z = \left(1 + \frac{\tau_m^2 e^2 B^2}{m^2}\right)^{-1}. \tag{1.12}$$

Напомним, что время релаксации импульса τ_m может зависеть от энергии носителей ε. Среднее значение произвольной функции $h(\varepsilon)$ определяется выражением

$$\langle h(\varepsilon)\rangle = \frac{-\frac{2}{3}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^{3/2} h(\varepsilon)\frac{\partial f_0}{\partial(\varepsilon/k_BT)}\,d\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)}{\int\limits_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^{1/2} f_0\,d\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)}, \tag{1.13}$$

где f_0 — равновесная функция распределения носителей. В последующих приближениях мы предполагаем, что функция распределения максвелловская. Среднее значение $\langle\tau_m\rangle$ определяется только согласно (4.3.41). Предполагаем также, что $\tau_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^r$, где r — произвольная постоянная. Кроме электропроводностей электронов и дырок

$$\sigma_n = \frac{ne^2}{m_n}\langle\tau_m\rangle_n \quad \text{и} \quad \sigma_p = \frac{pe^2}{m_p}\langle\tau_m\rangle_p \tag{1.14}$$

введем хорошо известные холловские подвижности

$$\mu_{Hn} = \frac{|e|}{m_n}\left(\frac{\langle\tau_m^2\rangle}{\langle\tau_m\rangle}\right)_n, \quad \mu_{Hp} = \frac{|e|}{m_p}\left(\frac{\langle\tau_m^2\rangle}{\langle\tau_m\rangle}\right)_p, \tag{1.15}$$

а также новый тип подвижности, встречающийся в магниторезистивных явлениях:

$$\mu_{Mn}^2 = \left(\frac{e}{m_n}\right)^2\left(\frac{\langle\tau_m^3\rangle}{\langle\tau_m\rangle}\right)_n, \quad \mu_{Mp}^2 = \left(\frac{e}{m_p}\right)^2\left(\frac{\langle\tau_m^3\rangle}{\langle\tau_m\rangle}\right)_p. \tag{1.16}$$

В приближении которое справедливо в *слабых* магнитных полях, в выражениях для **j** и **w** мы пренебрегаем членами, содержащими магнитную индукцию **B** в степени, большей, чем

вторая, и для коэффициентов σ, β, γ, ... получаем

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p - (\sigma_n \mu_{Mn}^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2) B^2, \tag{1.17}$$

$$\sigma' = -\frac{1}{|e|}\Big[(\sigma_n - \sigma_p) k_B T \left(r + \frac{5}{2}\right) - (\sigma_n \zeta_n - \sigma_p \zeta_p) -$$

$$-(\sigma_n \mu_{Mn}^2 - \sigma_p \mu_{Mp}^2) k_B T \left(3r + \frac{5}{2}\right) B^2 + (\sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n - \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p) B^2\Big], \tag{1.18}$$

$$\sigma'' = \frac{1}{e^2}\Big[(\sigma_n + \sigma_p)(k_B T)^2 \left(r + \frac{7}{2}\right)\left(r + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- (\sigma_n \zeta_n + \sigma_p \zeta_p) k_B T (2r + 5) + \sigma_n \zeta_n^2 + \sigma_p \zeta_p^2 -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Mn}^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2)(k_B T)^2 \left(3r + \frac{7}{2}\right)\left(3r + \frac{5}{2}\right) B^2 +$$

$$+ (\sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n + \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p) k_B T (6r + 5) B^2 -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p^2) B^2\Big], \tag{1.19}$$

$$\gamma = -\sigma_n \mu_{Hn} - \sigma_p \mu_{Hp}, \tag{1.20}$$

$$\gamma' = \frac{1}{|e|}\Big[(\sigma_n \mu_{Hn} + \sigma_p \mu_{Hp}) k_B T \left(2r + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Hn} \zeta_n + \sigma_p \mu_{Hp} \zeta_p)\Big], \tag{1.21}$$

$$\gamma'' = -\frac{1}{e^2}\Big[(\sigma_n \mu_{Hn} - \sigma_p \mu_{Hp})(k_B T)^2 \left(2r + \frac{7}{2}\right)\left(2r + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Hn} \zeta_n - \sigma_p \mu_{Hp} \zeta_p) k_B T (4r + 5) + \sigma_n \mu_{Hn} \zeta_n^2 - \sigma_p \mu_{Hp} \zeta_p^2\Big], \tag{1.22}$$

$$\beta = -(\sigma_n \mu_{Mn}^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2), \tag{1.23}$$

$$\beta' = \frac{1}{|e|}\Big[(\sigma_n \mu_{Mn}^2 - \sigma_p \mu_{Mp}^2) k_B T \left(3r + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n - \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p)\Big], \tag{1.24}$$

$$\beta'' = -\frac{1}{e^2}\Big[(\sigma_n \mu_{Mn}^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2)(k_B T)^2 \left(3r + \frac{7}{2}\right)\left(3r + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- (\sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n + \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p) k_B T (6r + 5) + \sigma_n \mu_{Mn}^2 \zeta_n^2 + \sigma_p \mu_{Mp}^2 \zeta_p^2\Big]. \tag{1.25}$$

Довольно часто значения энергии Ферми ζ_n и ζ_p таковы, что ширина запрещенной зоны оказывается отрицательной:

$$\zeta_n + \zeta_p = -\varepsilon_G. \tag{1.26}$$

При $\mathbf{B} = 0$ в уравнениях (4.3.40), (4.3.51) и (4.3.43) члены σ, β и γ, относящиеся к электронам, обозначены символами

σ_0, β_0 и γ_0. В приближении, справедливом в *сильных* магнитных полях, для этих коэффициентов получаем

$$\sigma = B^{-2}\left(\frac{\sigma_n}{\mu_{Hn}^2}+\frac{\sigma_p}{\mu_{Hp}^2}\right)\left[\left(2r+\frac{3}{2}\right)!\right]^2\frac{(^3/_2-r)!}{[(^3/_2+r)!]^3}, \quad (1.27)$$

$$\sigma' = -\frac{B^{-2}}{|e|}\left[\left(\frac{\sigma_n}{\mu_{Hn}^2}-\frac{\sigma_p}{\mu_{Hp}^2}\right)k_BT\left(\frac{5}{2}-r\right)! - \right.$$
$$\left. -\frac{\sigma_n\zeta_n}{\mu_{Hn}^2}-\frac{\sigma_p\zeta_p}{\mu_{Hp}^2}\left(\frac{3}{2}-r\right)!\right]\left[\frac{(^3/_2+2r)!}{(^3/_2+r)!}\right]^2, \quad (1.28)$$

$$\sigma'' = \frac{B^{-2}}{e^2}\left[\left(\frac{\sigma_n}{\mu_{Hn}^2}+\frac{\sigma_p}{\mu_{Hp}^2}\right)(k_BT)^2\left(\frac{7}{2}-r\right)! - \right.$$
$$\left. -2\left(\frac{\sigma_n\zeta_n}{\mu_{Hn}^2}+\frac{\sigma_p\zeta_p}{\mu_{Hp}^2}\right)k_BT\left(\frac{5}{2}-r\right)!\right]\frac{[(^3/_2+2r)!]^2}{[(^3/_2+r)!]^3}, \quad (1.29)$$

$$\gamma = -|e|B^{-2}(n-p), \quad (1.30)$$

$$\gamma' = B^{-2}\left[(n+p)\,k_BT\cdot\frac{5}{2}-(n\zeta_n+p\zeta_p)\right], \quad (1.31)$$

$$\gamma'' = -\frac{B^{-2}}{|e|}\left[(n-p)(k_BT)^2\frac{35}{4}-(n\zeta_n-p\zeta_p)\,5k_BT+n\zeta_n^2-p\zeta_p^2\right], \quad (1.32)$$

$$\beta = -B^{-2}(\sigma_n+\sigma_p), \quad (1.33)$$

$$\beta' = -\frac{B^{-2}}{|e|}\left[(\sigma_n-\sigma_p)\,k_BT\left(r+\frac{5}{2}\right)-(\sigma_n\zeta_n-\sigma_p\zeta_p)\right], \quad (1.34)$$

$$\beta'' = -\frac{B^{-2}}{e^2}\left[(\sigma_n+\sigma_p)(k_BT)^2\left(r+\frac{7}{2}\right)\left(r+\frac{5}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-(\sigma_n\zeta_n+\sigma_p\zeta_p)\,k_BT(2r+5)+\sigma_n\zeta_n^2+\sigma_p\zeta_p^2\right]. \quad (1.35)$$

Приложение 2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

При вычислениях средних значений с использованием функции распределения Максвелла — Больцмана результат часто принимает вид одной из модифицированных функций Бесселя $K_n(t)$, $n = 0$, 1 или 2 [1, 2]. Это решения, обращающиеся в нуль при $t \to \infty$, модифицированного дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{t^2 d^2 K_n}{dt^2} + \frac{t\, dK_n}{dt} - (t^2 + n^2) K_n = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{2.1}$$

Если аргумент t отрицателен, то в этой книге используются значения функций $K_n(|t|)$.

Рекуррентное соотношение

$$K_{n+1}(t) = \left(\frac{2n}{t}\right) K_n(t) + K_{n-1}(t), \qquad t > 0 \tag{2.2}$$

можно легко проверить. Таким образом, мы можем ограничиться функциями $K_0(t)$ и $K_1(t)$. Однако функция $K_2(t)$ тоже приведена, так как она часто встречается.

Важны следующие интегральные представления, справедливые при $t > 0$:

$$K_0(t) = \int_1^\infty \frac{e^{-t\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\, d\xi = e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\sqrt{\xi(\xi + 2t)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{t^2}{\xi}\right)\right] d\xi, \tag{2.3}$$

$$K_1(t) = t \int_1^\infty \sqrt{\xi^2 - 1}\, e^{-t\xi}\, d\xi = \frac{e^{-t}}{t} \int_0^\infty \sqrt{\xi(\xi + 2t)}\, e^{-\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2t} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{t^2}{\xi}\right)\right] d\xi, \tag{2.4}$$

$$K_2(t) = \frac{t^2}{3} \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{3/2} e^{-t\xi}\, d\xi = \frac{1}{2t^2} \int_0^\infty \xi \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{t^2}{\xi}\right)\right] d\xi, \tag{2.5}$$

$$K_0(t)+K_1(t)=\int_1^\infty \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}}\,e^{-t\xi}\,d\xi=\frac{e^{-t}}{t}\int_0^\infty \sqrt{1+\frac{2t}{\xi}}\,e^{-\xi}\,d\xi, \quad (2.6)$$

$$K_2(t)-K_1(t)=t\int_1^\infty (\xi-1)^{3/2}(\xi+1)^{1/2}e^{-t\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{e^{-t}}{t^2}\int_0^\infty \xi^{3/2}(\xi+2t)^{1/2}e^{-\xi}\,d\xi. \quad (2.7)$$

Из (2.2) при $n=1$ следует

$$K_2(t)=\frac{2}{t}K_1(t)+K_0(t). \quad (2.8)$$

Для производных от функций выполняются соотношения

$$K_0'(t)=-K_1(t), \quad (2.9)$$

$$K_1'(t)=-K_0(t)-\frac{1}{t}K_1(t)=\frac{1}{t}K_1(t)-K_2(t), \quad (2.10)$$

$$K_2'(t)=-K_1(t)-\frac{2}{t}K_2(t). \quad (2.11)$$

При больших значениях аргумента $t\gg 1$ возможны аппроксимации

$$K_0(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\,e^{-t}\left(1-\frac{1}{8t}+-\ldots\right), \quad (2.12)$$

$$K_1(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\,e^{-t}\left(1+\frac{3}{8t}+-\ldots\right), \quad (2.13)$$

$$K_2(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\,e^{-t}\left(1+\frac{15}{8t}+-\ldots\right). \quad (2.14)$$

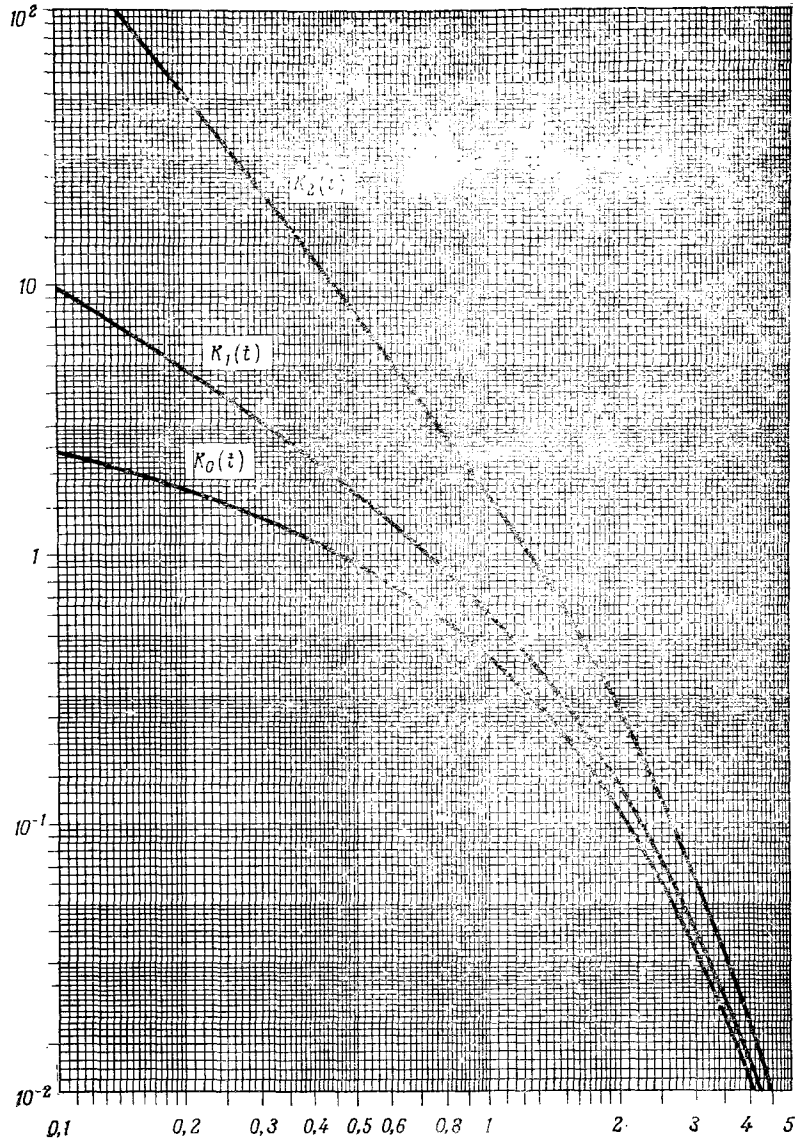
При малых значениях аргумента $t\ll 1$ возможны аппроксимации

$$K_0(t)=\left(\ln\frac{2}{t}-0{,}5772\ldots\right)\left(1+\frac{t^2}{4}+-\ldots\right)+\frac{t^2}{4}+-\ldots, \quad (2.15)$$

$$K_1(t)=\frac{1}{t}-\left(\frac{t}{2}\ln\frac{2}{t}\right)\left(1+\frac{t^2}{8}+-\ldots\right)+\frac{t}{2}0{,}072\ldots+-\ldots, \quad (2.16)$$

$$K_2(t)=\frac{2}{t^2}-\frac{1}{2}+-\ldots. \quad (2.17)$$

Графики функций $K_0(t)$, $K_1(t)$ и $K_2(t)$ приведены на фиг. П2.1. При вычислениях на ЭВМ функции K_0 и K_1 можно представить



Фиг. П2.1. Модифицированные функции Бесселя.

в следующем виде: $(x = 2/t)$.

При $0 < t \leqslant 2$ (т. е. $x \geqslant 1$)

$$K_0(t) = -k_{00} + \ln x + \sum_{n=1}^{6} \frac{k_{0n} + i_{0n} \ln x}{x^{2n}}, \tag{2.18}$$

$$K_1(t) = \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{6} \frac{k_{1n} + i_{1n} \ln x}{x^{2n-1}}. \tag{2.19}$$

При $2 \leqslant t < \infty$ (т. е. $0 \leqslant x \leqslant 1$)

$$K_0(t) = \frac{e^{-2/x}}{\sqrt{2/x}} \sum_{n=0}^{6} K_{0n} x^n, \tag{2.20}$$

$$K_1(t) = \frac{e^{-2/x}}{\sqrt{2/x}} \sum_{n=0}^{6} K_{1n} x^n; \tag{2.21}$$

постоянные $k_{00}, \ldots, K_{1n}$ приведены в таблице [2].

Таблица

n	k_{0n}	i_{0n}	k_{1n}	i_{1n}	K_{0n}	K_{1n}
0	0,577 215 66	—	—	—	+ 1,253 314 14	+ 1,253 314 14
1	0,422 784 20	0,999 999 41	$-7{,}721\,572 \cdot 10^{-2}$	1,000 000 00	− 0,078 323 58	+ 0,234 986 19
2	0,230 697 56	$2{,}500\,030\,43 \cdot 10^{-1}$	$+3{,}363\,929 \cdot 10^{-1}$	$4{,}999\,998\,24 \cdot 10^{-1}$	+ 0,021 895 68	− 0,036 556 20
3	0,034 885 90	$2{,}777\,214\,27 \cdot 10^{-2}$	$+9{,}078\,448\,5 \cdot 10^{-2}$	$8{,}333\,407\,11 \cdot 10^{-2}$	− 0,010 624 46	+ 0,015 042 68
4	0,002 626 98	$1{,}741\,115\,98 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}959\,701 \cdot 10^{-2}$	$6{,}943\,297\,56 \cdot 10^{-3}$	+ 0,005 878 72	− 0,007 803 53
5	0,000 107 50	$6{,}717\,617\,76 \cdot 10^{-5}$	$+5{,}520\,2 \cdot 10^{-4}$	$3{,}480\,924\,03 \cdot 10^{-4}$	− 0,002 515 40	+ 0,003 256 14
6	0,000 007 40	$2{,}426\,461\,85 \cdot 10^{-6}$	$+2{,}343 \cdot 10^{-5}$	$1{,}122\,924\,83 \cdot 10^{-5}$	+ 0,000 532 08	− 0,000 682 45

Погрешности

Выражение (2.18): $|\varepsilon| < 1 \cdot 10^{-8} + 1{,}6 \cdot 10^{-7} \ln(2/t)$.
Выражение (2.19): $|\varepsilon| < 8 \cdot 10^{-9} [1 + t^2 \ln(2/t)]$
Выражение (2.20): $|\varepsilon| < 1{,}9 \cdot 10^{-7}\, t^{-1/2} e^{-t}$.
Выражение (2.21): $|\varepsilon| < 2{,}2 \cdot 10^{-7}\, t^{-1/2} e^{-t}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Watson G. N.*, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, London, 1944. (Имеется перевод: *Г. Н. Ватсон*. Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
2. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1968.

Приложение 3. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ЭФФЕКТА ХОЛЛА

Падение напряжения на полупроводниковом образце, по которому течет электрический ток, всегда содержит неизвестную величину контактного потенциала металл — полупроводник. От этой величины можно избавиться, если измерять падение напряжения между электрическими зондами, как показано на фиг. П3.1. На практике для измерения малых значений удельного сопротивления можно использовать упрощенный четырехзондовый метод: четыре металлических зонда, отстоящих друг от друга на равном расстоянии D, прижимаются пружинами к поверхности полупроводника. Через наружные зонды течет ток I, а на внутренних зондах измеряется падение напряжения V. Если толщина полупроводникового образца много больше расстояния D между зондами, то для удельного сопротивления ρ образца имеем [1]

$$\rho = \frac{2\pi DV}{I}. \tag{3.1}$$

Докажем последнее равенство, предполагая, что ток I, текущий в нижнем полупространстве, целиком заполненном полупроводником, вызывает такое же падение напряжения, как ток $2I$, текущий во всем пространстве, которое также предполагается целиком заполненным полупроводником. Тогда плотность тока j на расстоянии r от токового электрода равна $2I/(4\pi r^2)$, и для напряженности электрического поля получаем

$$E(r) = \rho j = \rho \frac{2I}{4\pi r^2}. \tag{3.2}$$

Следовательно, падение напряжения между внутренними зондами на фиг. П3.2 определяется выражением

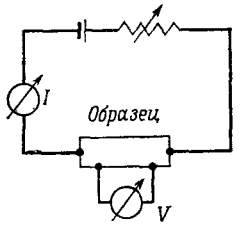
$$V' = -\int_{2D}^{D} E\,dr = \frac{\rho I}{4\pi D}. \tag{3.3}$$

Поскольку ток вытекает через крайний правый электрод, как показано на фиг. П3.2, имеется дополнительное падение напряжения

$$V'' = \frac{\rho(-I)}{4\pi(-D)}, \tag{3.4}$$

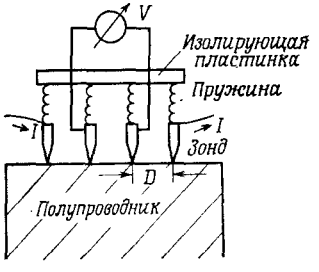
которое, очевидно, равно падению напряжения V'. Полное падение напряжения $V = V' + V''$ определяет величину ρ согласно (3.1).

В этом расчете предполагается, что ток уходит из первого электрода на бесконечность, приводя тем самым к падению напряжения V'; затем ток из бесконечности течет ко второму элек-



Фиг. П3.1. Измерение удельного сопротивления с помощью электрических зондов.

троду, в результате чего создается падение напряжения V''. В теории потенциала доказывается (см., например, [2]), что это эквивалентно реальному процессу протекания тока.



Фиг. П3.2. Четырехзондовый метод измерения удельного сопротивления.

Если образец представляет собой плоскопараллельную пластину толщиной $d \ll D$, то плотность тока $j = I/(2\pi rd)$, откуда следует

$$V' = \int_{2D}^{D} E\,dr = -\frac{dI}{2\pi d}\int_{2D}^{D}\frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi d}\ln 2 = V'' = \frac{V}{2} \qquad (3.5)$$

и

$$\rho = \frac{\pi\,dV}{I\ln 2}. \qquad (3.6)$$

Из соображений удобства на практике часто зонды размещаются не на одной линии, а по углам квадрата. Расстояние по диагонали между двумя зондами равно $D\sqrt{2}$, откуда в случае

толстого образца имеем

$$V = -2\int_{D\sqrt{2}}^{D} E\,dr = \frac{\rho I}{\pi}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D\sqrt{2}}\right) = \frac{\rho I}{\pi D}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (3.7)$$

и

$$\rho = \frac{\pi D V}{I(1 - 1/\sqrt{2})}. \qquad (3.8)$$

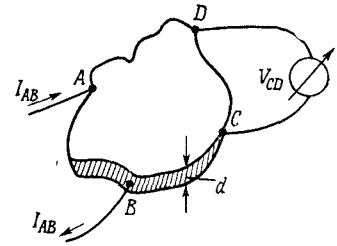
В случае же тонкого образца имеем

$$V = 2\frac{\rho I}{2\pi d}\ln\left(\frac{D\sqrt{2}}{D}\right) = \frac{\rho I \ln 2}{2\pi d} \qquad (3.9)$$

и

$$\rho = \frac{2\pi d V}{I \ln 2}. \qquad (3.10)$$

Кейуэлл [3] учел влияние на величины V и ρ расстояния между зондами и краев образца. Обобщение уравнений на случай анизотропных полупроводников было сделано в работе Уосшера [4].



Фиг. П3.3. Устройство ван дер Пау.

Большое практическое значение имеет метод, предложенный ван дер Пау [5]. На периферии плоскопараллельного диска толщиной d укрепляются четыре точечных контакта, которые на фиг. П3.3 обозначены $A - B - C - D$. От контакта A к контакту B течет ток I_{AB}. Между контактами C и D имеется падение напряжения V_{CD}. Определим для такой ситуации сопротивление

$$R_{AB,\,CD} = \frac{|V_{CD}|}{I_{AB}}. \qquad (3.11)$$

В другом эксперименте от контакта B к контакту C течет ток I_{BC}, а между A и D измеряется падение напряжения V_{AD}. Для этой ситуации сопротивление

$$R_{BC,\,DA} = \frac{|V_{DA}|}{I_{BC}}. \qquad (3.12)$$

Ван дер Пау доказал, что удельное сопротивление образца ρ определяется соотношением

$$\exp\left(-\pi\frac{d}{\rho}R_{AB,\,CD}\right) + \exp\left(-\pi\frac{d}{\rho}R_{BC,\,DA}\right) = 1. \qquad (3.13)$$

Аналитически решить это уравнение относительно ρ невозможно. Однако если ввести множитель f, определяемый соотношением

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R_{AB,\,CD} + R_{BC,\,DA}}{2} f, \tag{3.14}$$

то из (3.13) мы получим

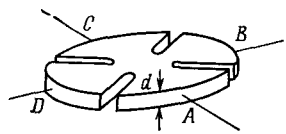
$$\operatorname{ch}\left[\frac{\ln 2}{f} \frac{(R_{AB,\,CD}/R_{BC,\,DA}) - 1}{(R_{AB,\,CD}/R_{BC,\,DA}) + 1}\right] = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln 2}{f}\right). \tag{3.15}$$

Из этого уравнения можно получить отношение $R_{AB,\,CD}/R_{BC,\,DA}$. Если задать произвольные значения f в интервале между 0 и 1, то из (3.15) следуют значения этого отношения, приведенные в таблице.

Таблица

f	1	0,95	0,81	0,69	0,59	0,46	0,40	0,34	0,29	0,25
$\frac{R_{AB,\,CD}}{R_{BC,\,DA}}$	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1000

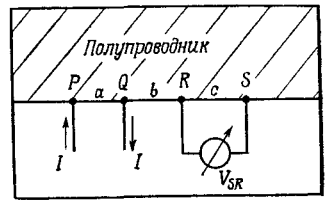
Измеряя сопротивление одного образца двумя способами, можно из (3.14) найти удельное сопротивление. Влияние контактов можно ослабить, если образец выбрать в форме клеверного листа, как показано на фиг. П3.4. Вследствие четырехкратной симметрии образца отношение $R_{AB,\,CD}/R_{BC,\,DA}$ должно быть равно единице. Если в условиях эксперимента это отношение оказывается большим двух, то обычно заменяют контакты. Если и это не помогает, то есть все основания думать, что образец не является однородно легированным и может даже содержать локальные p — n-переходы.



Фиг. П3.4. Образец в форме клеверного листа, используемый в измерениях методом ван дер Пау.

Докажем соотношение (3.13). Рассмотрим сначала простой образец, показанный на фиг. П3.5. Предполагается, что плоскопараллельная пластина толщиной d полностью заполняет верх-

нюю полуплоскость. Токовые точечные контакты обозначены через P и Q. Между электрическими зондами R и S измеряется падение напряжения V_{SR}. Линии тока и потенциалы остаются неизменными, если, дополняя верхнюю полуплоскость нижней, одновременно вдвое увеличить значение тока. Тогда для плот-



Фиг. П3.5. Форма образца, используемая для доказательства соотношения (3.13).

ности тока на расстоянии r от контакта P имеем $j = 2I/(2\pi rd)$, а для электрического поля $E = \rho j$. Отсюда получаем падение напряжения между точками R и S:

$$V'_{SR} = \int_S^R E\,dr = \frac{\rho I}{\pi d}\int_S^R \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{\pi d}\ln\frac{\overline{PR}}{\overline{PS}} = \frac{\rho I}{\pi d}\ln\frac{a+b}{a+b+c}, \qquad (3.16)$$

где расстояния a, b и c указаны на фиг. П3.5. Поскольку ток $2I$ выходит из полупроводника в точке Q, имеется дополнительное падение напряжения

$$V''_{SR} = -\frac{\rho I}{\pi d}\ln\frac{\overline{QR}}{\overline{QS}} = -\frac{\rho I}{\pi d}\ln\frac{b}{b+c}. \qquad (3.17)$$

Полное падение напряжения $V_{SR} = V'_{SR} + V''_{SR}$ определяется выражением

$$V_{SR} = -\frac{\rho I}{\pi d}\ln\frac{(a+b+c)\,b}{(a+b)\,(b+c)}. \qquad (3.18)$$

Разделив обе части на ток I, получаем величину $R_{PQ,\,RS}$. Потенциируя, находим

$$\exp\left(-\frac{\pi d}{\rho}R_{PQ,\,RS}\right) = \frac{(a+b+c)\,b}{(a+b)\,(b+c)}. \qquad (3.19)$$

В другом эксперименте токовыми являются контакты Q и R, а S и P — электрические зонды. С помощью циклической перестановки, когда, например, $\overline{PQ} = a$ заменяется на $\overline{QR} = b$ и $\overline{QS} = b + c$ на $\overline{RP} = \overline{PR} = a + b$, получаем

$$\exp\left(-\frac{\pi d}{\rho}R_{QR,\,SP}\right) = \frac{ac}{(b+c)\,(a+b)}. \qquad (3.20)$$

Правые части последних двух выражений в сумме дают единицу, что и доказывает справедливость соотношения ван дер

Пау (3.13) для простого образца, показанного на фиг. П3.5. Для образца произвольной формы введем комплексную функцию

$$w = f(x + iy) = u + iv, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{3.21}$$

такую, что $u(x, y)$ есть поле потенциала в верхней полуплоскости. Напряженность электрического поля определяется функцией $u(x, y)$:

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{3.22}$$

Для тока I, который пересекает линию, соединяющую две произвольные точки T_1 и T_2, имеем

$$I = \frac{d}{\rho} \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{E}\, d\mathbf{n}) = \frac{d}{\rho} \int_{T_1}^{T_2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right), \tag{3.23}$$

где $d\mathbf{n} = (-dy, dx)$ — нормаль к $d\mathbf{s} = (dx, dy)$. Этот интеграл легко вычисляется с помощью соотношений Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.24}$$

Тогда

$$I = \frac{d}{\rho} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{d}{\rho} [v(T_2) - v(T_1)]. \tag{3.25}$$

Вектор, являющийся произведением удельного сопротивления ρ на плотность тока j, имеет компоненты

$$\rho \mathbf{j} = \left(-\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{3.26}$$

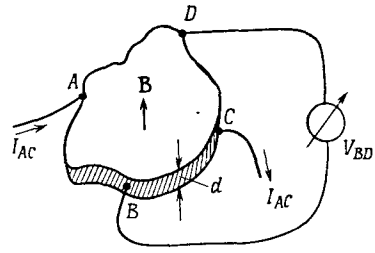
Величина v не меняется, если на фиг. П3.5 двигаться вдоль вещественной оси x от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. вдоль границы образца вплоть до точки P, где ток втекает в образец. Здесь, согласно (3.25), v увеличивается на $I\rho/d$. В точке Q v уменьшается на эту же величину.

Верхнюю полуплоскость можно конформно отобразить на поверхность, показанную на фиг. П3.4, если ввести аналитическую функцию $t(z)$:

$$w = f(z) = f(z(t)) = h(t) = l + im, \tag{3.27}$$

где l и m — вещественная и мнимая части функции $h(t)$. Мнимая часть m остается неизменной вдоль края образца, за исключением точек A и B, где расположены токовые контакты. В точке A m возрастает на величину $I\rho/d$, а в точке B на ту же величину уменьшается. Следовательно, в t-плоскости l можно

трактовать как потенциал, аналогично u в z-плоскости; $V_{DC} = V_{SR}$. Из теории конформных преобразований следует, что $(d/\rho)R_{AB,\,CD}$ — инвариантная величина [5]. То же утверждение справедливо и в отношении $(d/\rho)R_{BC,\,DA}$. Таким образом, доказана справедливость соотношения (3.13) для образца любой формы.



Фиг. П3.6. Устройство для измерения эффекта Холла предложенное ван дер Пау

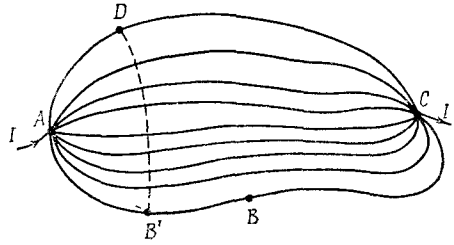
Для измерений эффекта Холла устройство, показанное на фиг. П3.3, слегка видоизменяется (фиг. П3.6). Ток выходит наружу из образца в точке C, и напряжение V_{BD} снимается с точек B и D. Сопротивление, которое определяется выражением

$$R_{AC,\,BD} = \frac{V_{BD}}{I_{AC}}, \tag{3.28}$$

изменяется на величину $\Delta R_{AC,\,BD}$, если перпендикулярно плоскопараллельному образцу прикладывается однородное магнитное поле. Для коэффициента Холла R_H имеем

$$R_H = \frac{d}{|\mathbf{B}|}\Delta R_{AC,\,BD}. \tag{3.29}$$

Это на первый взгляд несколько удивительное соотношение легко доказать. Из-за отклонения носителей заряда в магнитном



Фиг. П3.7. Линии тока в дискообразном образце, находящемся в поперечном магнитном поле.

поле противоположные грани образца заряжаются так, что линии тока остаются такими же, как до включения магнитного поля. Потенциалы точек B и D изменяются под действием поля Холла $\mathbf{E}_t$, перпендикулярного плотности тока j, в то время как линии тока остаются неизменными. На фиг. П3.7 точки B' и D

расположены на одной эквипотенциальной линии (показанной пунктиром), а точки B' и B — на одной линии тока, проходящей вдоль границы образца. Интеграл по участку контура $d\mathbf{s}$ вдоль линии тока, где поле $\mathbf{E}_t$ перпендикулярно $d\mathbf{s}$, равен нулю:

$$\int_{B'}^{B} (\mathbf{E}_t, d\mathbf{s}) = 0. \tag{3.30}$$

Следовательно, интеграл от D до B равен интегралу от D до B'. Поскольку напряжение Холла между противоположными точками D и B' равно $R_H I |\mathbf{B}|/d$, для изменения сопротивления имеем

$$\Delta R_{AC,\,BD} = \frac{\Delta V_{BD}}{I_{AC}} = \frac{R_H |\mathbf{B}|}{d}, \tag{3.31}$$

где ток I_{AC} определяется выражением

$$I_{AC} = d \int_{D}^{B'} |\mathbf{j}|\, d\mathbf{s}. \tag{3.32}$$

Решая (3.31) относительно R_H, получаем (3.29).

Ван дер Пау [6, 7] обобщил уравнения (3.13) и (3.29) на случай анизотропных сред. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 главные оси тензора удельного сопротивления ρ; тогда этот тензор является диагональным с элементами ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Если толщина образца в направлении x_i равна d и если ρ заменить на $\sqrt{\rho_j \rho_k}$ с циклической перестановкой индексов $(i, j, k) = (1, 2, 3)$, то соотношение (3.13) остается справедливым. С помощью трех измерений в трех направлениях, используя три различным образом ориентированных образца из того же монокристалла, можно определить ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Полное определение тензора Холла достигается с помощью холловских измерений на тех же образцах с тремя направлениями магнитного поля для каждого случая, т. е. всего с помощью девяти измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Valdes L.*, Proc. IRE, **42**, 420 (1954).
2. *Stratton J. A.*, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941. (Имеется перевод: *Дж. А. Стрэттон*, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М. — Л., 1948.)
3. *Keywell F.*, Rev. Sci. Instr., **31**, 833 (1960).
4. *Wasscher J. D.*, Philips Res. Reports, **16**, 301 (1961).
5. *Van der Pauw L. J.*, Philips Techn. Rdsch., **20**, 230 (1958/59).
6. *Van der Pauw L. J.*, Philips Res. Reports, **16**, 187 (1961).
7. *Hornstra J.*, *van der Pauw L. J.*, Journ. Electronics and Control, **7**, 169 (1959).

Приложение 4. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОЗРАЧНОСТИ И ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА; СООТНОШЕНИЯ КРАМЕРСА—КРОНИГА

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в *немагнитном и оптически изотропном* полупроводнике [1]). Выберем ось z прямоугольной системы координат в направлении распространения волны. Зависимость напряженности электрического и магнитного полей от времени t и координаты z запишем в комплексной форме:

$$\mathbf{E} \text{ и } \mathbf{H} \sim e^{i(\omega t - Nz/\lambda)},$$

где ω — угловая частота, $\lambda = \lambda/(2\pi)$, λ — длина волны в вакууме, $N = n - ik$ (n — показатель преломления, k — показатель поглощения). Электрическое поле волны, падающей на поверхность под углом φ к нормали, разложим на две составляющие — перпендикулярную и параллельную плоскости падения. Для перпендикулярной составляющей при отражении от «бесконечно толстой» пластинки коэффициент отражения (отношение отраженного потока энергии к падающему) имеет вид

$$r_n = \frac{(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \cos^2\varphi - 2\bar{\alpha}\cos\varphi}{(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \cos^2\varphi + 2\bar{\alpha}\cos\varphi}, \tag{4.1}$$

где

$$\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = \sqrt{(n^2 - k^2 - \sin^2\varphi)^2 + (2nk)^2}, \tag{4.2}$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}[n^2 - k^2 - \sin^2\varphi + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)]}. \tag{4.3}$$

Для параллельной составляющей (**E** параллельно плоскости падения) коэффициент отражения имеет вид

$$r_p = r_n \frac{(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \sin^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi - 2\bar{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \sin^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi + 2\bar{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{4.4}$$

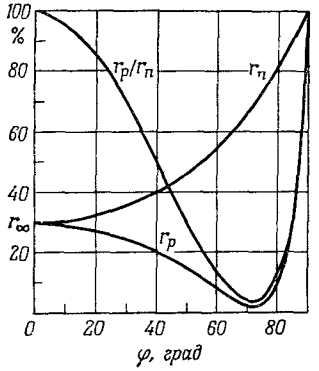
Если $\varphi = 45^0$, то $r_p = r_n^2$, и измерения в неполяризованном свете дают коэффициент отражения $r = {}^1/_2(r_n + r_n^2)$.

Функция $r_p = r_p(\varphi)$ имеет минимум при $\varphi = \varphi_B$, где φ_B — угол Брюстера. При $k = 0$ в этом минимуме $r_p = 0$, и угол

---

[1]) Вывод приведенных здесь формул см. в книгах [1—3].

Брюстера можно определить по формуле $\operatorname{tg}\varphi_B = n$. В этом случае отраженный луч перпендикулярен преломленному лучу. На фиг. П4.1 показана зависимость коэффициентов r_p, r_n и r_p/r_n от угла φ для случая произвольно выбранных значений $n = 3$ и $k = 1$. Приближенное выражение для коэффициента r_n имеет вид



Фиг. П4.1. Теоретические зависимости коэффициентов отражения от угла падения при $n = 3$ и $k = 1$ [3].

$$r_n = \frac{(n - \cos\varphi)^2 + k^2}{(n + \cos\varphi)^2 + k^2}. \qquad (4.5)$$

При нормальном падении, когда $\varphi = 0$, перпендикулярная и параллельная составляющие ничем не отличаются; в этом случае коэффициент отражения от бесконечно толстой пластинки обозначается r_∞. Из (4.1) получаем точное выражение для этого коэффициента при любых значениях n и k:

$$r_\infty = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}. \qquad (4.6)$$

Для пластинки конечной толщины d введем коэффициент поглощения [1]) $\alpha = 2k/\lambda\!\!\!^{-} = 4\pi k/\lambda$, сдвиг фаз $\delta = nd/\lambda\!\!\!^{-}$, а также

$$\gamma = \ln\sqrt{\frac{1}{r_\infty}} \qquad (4.7)$$

и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}. \qquad (4.8)$$

Рассмотрим далее только случай нормального падения. Коэффициент отражения приводится к виду

$$R = \frac{\operatorname{sh}^2(1/2\alpha d) + \sin^2\delta}{\operatorname{sh}^2(1/2\alpha d + \gamma) + \sin^2(\delta + \psi)}, \qquad (4.9)$$

а коэффициент прозрачности

$$T = \frac{\operatorname{sh}^2\gamma + \sin^2\psi}{\operatorname{sh}^2(1/2\alpha d + \gamma) + \sin^2(\delta + \psi)}. \qquad (4.10)$$

Если поглощения нет ($k = 0$), то $T + R = 1$. Зависимость коэффициентов T и R от длины волны λ приводит к интерференцион-

[1]) Величина $2/\alpha$ в металлах носит название «скин-слой».

ным эффектам. Если поглощением можно пренебречь, то

$$\frac{T_{\text{макс}}}{T_{\text{мин}}} = \frac{(n^2+1)^2}{4n^2}. \tag{4.11}$$

Это соотношение полезно при определении показателя преломления n.

Если поверхность не полирована или свет полихроматический, то для определения коэффициента поглощения можно использовать формулы средних значений коэффициента отражения

$$\langle R\rangle = r_\infty [1 + \langle T\rangle \exp(-\alpha d)] \tag{4.12}$$

и коэффициента прозрачности

$$\langle T\rangle = 2\frac{\operatorname{sh}^2\gamma + \sin^2\psi}{\operatorname{sh}(\alpha d + 2\gamma)}. \tag{4.13}$$

При условии $k \ll n$ можно пренебречь величиной ψ; тогда для коэффициента α получаем формулу

$$2\operatorname{sh}(\alpha d) = \frac{(1-\langle R\rangle)^2}{\langle T\rangle} - \langle T\rangle. \tag{4.14}$$

На фиг. П4.2 показаны графики зависимости между величинами $\langle T\rangle$ и $\langle R\rangle$ при различных значениях параметров r_∞ и $\exp(-\alpha d)$ [4]. Определив r_∞ и α, можно найти показатель преломления n и показатель поглощения k.

Пренебрегая величиной ψ в (4.13), получаем выражение

$$\langle T\rangle = \frac{(1-r_\infty)^2 e^{-\alpha d}}{1 - r_\infty^2 e^{-2\alpha d}}, \tag{4.15}$$

которое еще более упрощается при $[r_\infty \exp(-\alpha d)]^2 \ll 1$ и принимает вид

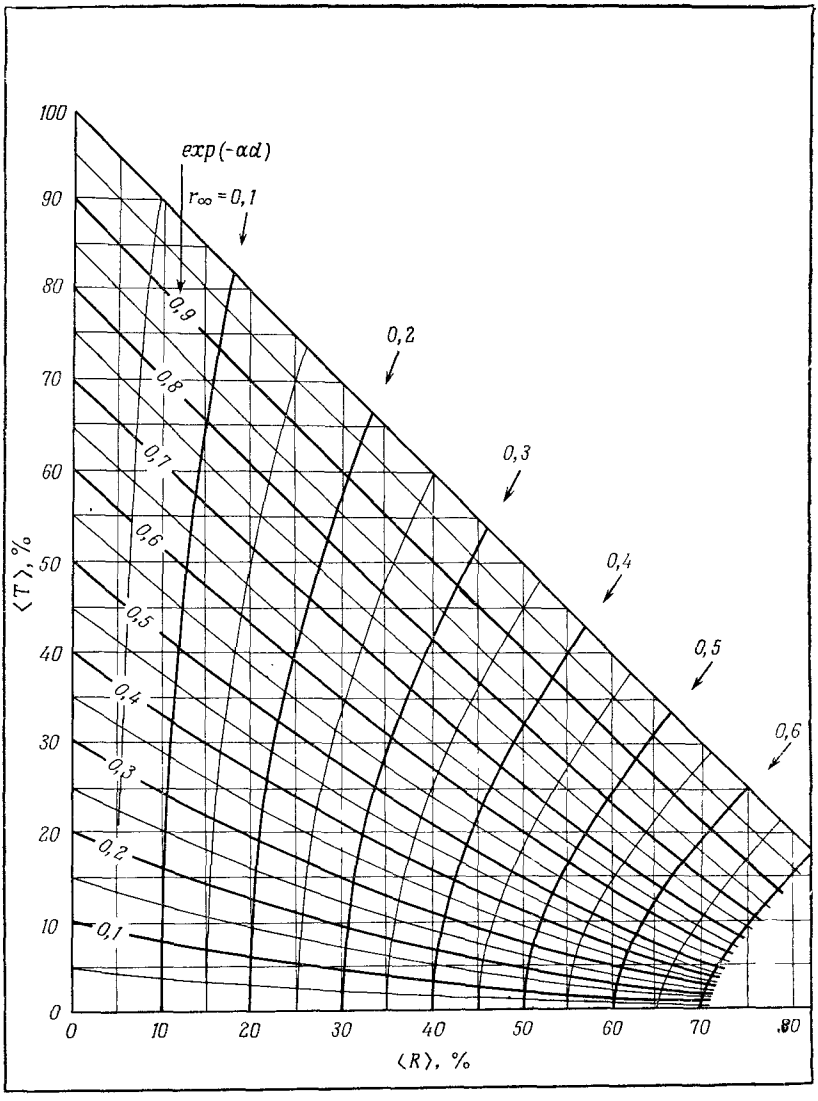
$$\langle T\rangle = (1-r_\infty)^2 e^{-\alpha d}. \tag{4.16}$$

В этом приближении $\langle R\rangle = r_\infty$.

В случае сильного поглощения, когда $k \approx n$, в тонкой пластинке, толщина которой намного меньше так называемой толщины Вольтерсдорфа [4] [$d \ll \lambda/(2\pi n)$], дисперсия отражения и пропускания не наблюдается.

В гл. 11, § 1, в расчетах спектров поглощения в широком диапазоне частот использованы соотношения Крамерса — Кронига [6]. Интересно, что эти соотношения применяются также, например, в теории электрических цепей, т. е. являются весьма общими [7]. Этот вопрос рассмотрел Штерн [8].

Связь комплексного коэффициента преломления $N = n - ik$ с диэлектрической проницаемостью $\varkappa$ можно найти из уравнений



Фиг. П4.2. Номограмма для определения коэффициентов поглощения α и отражения r_∞ по измеренным средним значениям коэффициентов прозрачности ⟨T⟩ и отражения ⟨R⟩ [4].

Например, при ⟨T⟩ = 31% и ⟨R⟩ = 35,6% получаем $\exp(-\alpha d) = 0{,}6$ и $r_\infty = 0{,}3$.

Максвелла. Для последующего полезно ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\varkappa}(\omega)$, которая выражается через показатель преломления n и показатель поглощения k:

$$\tilde{\varkappa}(\omega) = \varkappa_r - i\varkappa_i, \tag{4.17}$$

где

$$\varkappa_r = n^2 - k^2, \quad \varkappa_i = 2nk. \tag{4.18}$$

Следовательно, вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \tilde{\varkappa}\varkappa_0\mathbf{E}$ является тоже комплексным и зависит от частоты: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\omega)$. Путем преобразования Фурье этой функции

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \int_0^{\infty} [D(\omega)\, e^{-i\omega t} + D(-\omega)\, e^{i\omega t}]\, d\omega \tag{4.19}$$

получаем зависимость электрической индукции D от времени t. Поскольку функция $D(t)$ должна быть действительной, существует функция $D(-\omega)$, комплексно сопряженная функции $D(\omega)$:

$$D(-\omega) = D^*(\omega); \tag{4.20}$$

следовательно,

$$\tilde{\varkappa}(-\omega) = \tilde{\varkappa}^*(\omega), \tag{4.21}$$

откуда для действительной и мнимой частей получаем

$$\varkappa_r(-\omega) = \varkappa_r(\omega), \quad \varkappa_i(-\omega) = -\varkappa_i(\omega). \tag{4.22}$$

Можно показать, что между $\varkappa_r$ и $\varkappa_i$ существует связь, определяемая соотношениями Крамерса — Кронига, а именно

$$\varkappa_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varkappa_i(\omega') - \omega \varkappa_i(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega' \tag{4.23}$$

и

$$\varkappa_i(\omega) = -\frac{2}{\pi}\omega \int_0^{\infty} \frac{\varkappa_r(\omega') - \varkappa_r(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega'. \tag{4.24}$$

Поскольку $\varkappa_r$ и $\varkappa_i$, согласно (4.18), являются функциями величин n и k, из соотношений Крамерса — Кронига следует неожиданный результат: показатели поглощения и преломления зависят друг от друга. В частном случае диэлектрического вещества, которое на низких частотах является изолятором ($k = 0$), показатель преломления $n(0) = n_0$ определяется выражением

$$n_0^2 - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2nk}{\omega'}\, d\omega' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2nk}{\lambda}\, d\lambda. \tag{4.25}$$

Статическая диэлектрическая проницаемость $\varkappa = n_0^2$ больше единицы только в том случае, если в какой-то области электромагнитного спектра имеется поглощение.

Соотношения Крамерса — Кронига (4.23) и (4.24) строго выполняются только в непроводящих средах. Толл [9] показал, что в случае отличной от нуля проводимости уравнения дисперсии необходимо видоизменить.

Запишем уравнение, более пригодное для практических применений:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| \frac{\omega' - \omega}{\omega' + \omega} \right| \frac{d\gamma(\omega')}{d\omega'} d\omega', \tag{4.26}$$

где ψ и γ заданы выражениями (4.8) и (4.7). Поскольку при слабом поглощении $\psi \approx 2k/(n^2 - 1)$ и поскольку вследствие наличия логарифмического множителя существенный вклад в этот интеграл дает только узкая область частот ω, показатель поглощения можно найти по экспериментальной частотной зависимости коэффициента отражения света от «толстой» пластинки $r_\infty = e^{-2\gamma}$. В приближении $r_\infty \approx (n-1)^2/(n+1)^2$ отсюда получается также значение знаменателя в выражении для ψ, соответствующем частоте ω, а именно $n^2 - 1$.

Весслер [10] дал обобщение анализа Крамерса — Кронига на случай наклонного падения. Методы практического применения этого анализа можно найти, например, в книге [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Born M.*, Optik, Springer, Berlin, 1933.
2. *Born M., Wolf E.*, Principles of Optics, 2nd ed., Pergamon, Oxford, 1959. (Имеется перевод: *М. Борн, Э. Вольф*, Основы оптики, «Наука» М., 1973.)
3. *Moss T. S.*, Optical Properties of Semiconductors, Butterworth, London, 1959. (Имеется перевод: *Т. Мосс*, Оптические свойства полупроводников, ИЛ, 1961.)
4. *Nazarewicz W., Rolland P., da Silva E., Balkanski M.*, Appl. Optics, **1**, 369 (1962).
5. *Woltersdorff W.*, Zs. Phys., **91**, 230 (1934).
6. *Kronig R. de L.*, Journ. Opt. Soc. Am., **12**, 547 (1926).
7. *Bode H. W.*, Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, New York, 1945.
8. *Stern F.* в книге Solid State Physics (ed. F. Seitz, D. Turnbull), Vol. 15, Acad. Press, New York, 1963, p. 328.
9. *Toll J. S.*, Phys. Rev., **104**, 1760 (1956).
10. *Roessler D. M.*, Brit. Journ. Appl. Phys., **16**, 1359 (1965).
11. *Greenaway D. L., Harbeke G.*, Optical Properties and Band Structure of Semiconductors, Pergamon, Oxford, 1968, p. 12, 13.

Приложение 5. ИЗМЕРЕНИЕ ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Тип проводимости. Знак эффекта Холла, эффекты Зеебека или Риги — Ледюка. Прямое направление барьера Шоттки или p — n-перехода. Внутризонный эффект Фарадея. (Проблемы интерпретации возникают в случае почти собственной проводимости, если подвижности электронов и дырок существенно различаются.)

Ширина запрещенной зоны. Температурная зависимость электропроводности или эффекта Холла в случае собственной проводимости. Край собственного поглощения света или фотопроводимости. Межзонные переходы в магнитном поле.

Зонная структура. Межзонное поглощение света. Вблизи экстремума зоны: магниторезистивный эффект, эффект Фойгта, гальваномагнитные эффекты горячих электронов.

Концентрация носителей. Эффект Холла и электропроводность в области примесной проводимости. (В области собственной проводимости следует знать отношение подвижностей; оно иногда может быть установлено путем экстраполяции из области примесной проводимости.) Внутризонные эффекты Фарадея и Фойгта.

Уровень Ферми. Эффект Зеебека и эффекты, перечисленные под заголовком «Концентрация носителей».

Подвижность носителей. Эффект Холла и электропроводность. (См. также «Диффузия носителей» с учетом соотношения Эйнштейна.)

Эффективная масса. Циклотронный резонанс. Внутризонный эффект Фарадея. Плазменное отражение. Эффект Шубникова — де Гааза. Магнитофононный эффект. Межзонные переходы в магнитном поле. Сдвиг Бурштейна. Эффект Керра в магнитном поле.

Время релаксации импульса. Поглощение электромагнитных волн диапазонов СВЧ и ИК. Ширина линии циклотронного резонанса. Эффект Фарадея в диапазоне СВЧ.

Время релаксации энергии. Смещение гармоник в диапазонах СВЧ и ИК (нелинейная оптика). Преобразование частоты. Частотная зависимость СВЧ фотопроводимости.

Время жизни неосновных носителей и их диффузионная длина. Эксперимент Хейнса — Шокли. Фотопроводимость и эффект Кикоина — Носкова. Вентильный фотоэффект.

Скорость поверхностной рекомбинации. Вентильный фотоэффект. Эффект Дембера.

Примеси. Влияние рассеяния на ионизованных и нейтральных примесях на температурную зависимость подвижности и ширины линии циклотронного резонанса. Низкотемпературный электрический пробой. Поглощение ультразвука при низких температурах. Оптическое поглощение.

Плотность дислокаций. Подсчет ямок травления, рентгеновская топография.

Визуализация *p—n*-перехода. Гальваническое покрытие поверхности металлом или электрофорез (порошок титаната бария в CCl_4) при обратном смещении. Травление.

Диэлектрическая проницаемость. Отражение СВЧ волн. Распространение геликонных волн в предельно сильных магнитных полях.

Кристаллографическая ориентация. Диаграммы Лауэ. Метод световых фигур.

ЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВАЖНЫХ ПОСТОЯННЫХ

$h = 4{,}135708\,(\pm 14)\cdot 10^{-15}$ эВ · с

$\hbar = 1{,}05459193\,(\pm 123)\cdot 10^{-34}$ Вт · $с^2$ = $= 6{,}58218292\cdot 10^{-16}$ эВ · с (постоянная Планка, деленная на 2π)

$k_B = 8{,}61573\cdot 10^{-5}$ эВ/К $= 1{,}38046\cdot 10^{-23}$ Вт · с/К (постоянная Больцмана)

$|e| = 1{,}60219177\ (\pm 44)\cdot 10^{-19}$ Кл (заряд электрона)

$m_0 = 9{,}10955854\,(\pm 600)\cdot 10^{-35}$ Вт · $с^3/см^2$ (масса свободного электрона)

$|e|/m_0 = 1{,}758834\cdot 10^{15}$ $см^2/(В\cdot с^2) = 175{,}8834\times$ $\times 10^9$ $с^{-1}\cdot Т^{-3}$ (удельный заряд электрона)

$N = 6{,}0247\cdot 10^{23}$ $моль^{-1}$ (число Авогадро)

$c = 2{,}997925010(\pm 330)\cdot 10^{10}$ см/с (скорость света)

$4\pi\varkappa_0\hbar c/e^2 = 137{,}0360221\ \ (\pm 15)$ (величина, обратная постоянной тонкой структуры)

$\varkappa_0 = 8{,}859\cdot 10^{-14}$Ф/см $= 1/\mu_0\ c^2$ (электрическая постоянная)

$\mu_0 = 1{,}25602\cdot 10^{-8}$ В · с/(А · см) (магнитная постоянная)

$1/(\varkappa_0 c) = \mu_0 c = 376{,}732$ Ом (импеданс вакуума)

$a_B = 4\pi\varkappa_0\hbar^2/(m_0 e^2) = 0{,}5291$ А (радиус Бора)

$\mu_B = e\hbar/(2m_0) = 5{,}788\cdot 10^{-5}$ эВ/Т (магнетон Бора)

$Ry = m_0 e^4/2(4\pi\varkappa_0\hbar)^2 = 13{,}607$ эВ (энергия Ридберга)

(Погрешность в последних знаках)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акустоэлектрический домен 339
— эффект 331
Аморфные полупроводники 560
Анизотропии фактор 288, 296

Барафа кривая (зависимость) 391, 392
Барьер потенциальный 166
— Шоттки 183, 364
Бесселя функция модифицированная 579
Блоха функция 32, 54
Больцмана множитель 158
— уравнение 73
Бора магнетон 371
Борна приближение 211
Боровский радиус примесного атома 200, 424
— — экситона 412
Бриджмена соотношение 130
Бриллюэна зона 41
— — в пространстве импульсов фононов 233
Бриллюэновское рассеяние 339, 340
Брукса — Херринга формула 208, 353
Бурштейна сдвиг 408

Валентные зоны, влияние давления 348
Ван дер Пау метод 585
Ван Хова сингулярности 355
Ванье экситон 413
Варикап 168
Вб/м^2 (единица магнитной индукции) 83
Верде постоянная 479
Вероятность заполнения в тепловом равновесии 59
— рассеяния 203
— термодинамическая 57
Взаимодействие электронов со звуковой волной 491, 492
Вигнера — Зейтца ячейка 42
Видемана — Франца закон 108
Виртуальные состояния 447
Волна акустическая 211
Волна альфвеновская 493
— геликонная, взаимодействие со звуковой волной 492
— магнитоплазменная 489
— температурная 112
Вольтерсдорфа толщина 593
Время восстановления после пробоя 385
— жизни неосновных носителей 157, 189, 511
— максвелловской релаксации 160
— — — дифференциальное 323
— релаксации импульса 71, 199, 205
— — — анизотропное 296
— — энергии 79
— — — для рассеяния на акустическом деформационном потенциале 220
— — — — — — оптическом деформационном потенциале 253, 254
— — — — — — полярном оптическом потенциале 264
— — — экспериментальное значение 149
— свободного пробега 198
Вымораживание носителей 67, 209
— — магнитное 371
Вырождение 59, 123, 144, 218, 220

Ганна эффект 321
Гармоники, смешивание 495
Гашение фотопроводимости 513
Гейзенберга принцип неопределенности 35
Геликон 490
Генерации скорость 159, 172, 387, 508
Гетеропереход 535
Глубокие уровни 68, 514
Горячие носители 142, 370, 382, 391, 410, 451, 455, 457, 460, 461

Давление, влияние на валентные зоны 348
— — на зону проводимости 283
Дебаевская длина 160
Дебая температура 235, 250

Де Гааза — ван Альфена эффект 371
Дембера эффект 188
Дестрио эффект 523
Деформации тензор 138
Деформационного потенциала постоянные 281, 282, 348
Дингля температура 369
Диод Ганна 322
— Есаки 360
— ЛПД 392
— обращенный 364,
— Овшински 558
— плотность тока насыщения 172, 174
— Рида 392
— туннельный 360
Дислокации, рассеяние 273
Дифракция медленных электронов 544
Дифференциальное сечение рассеяния 198, 205
Диффузии уравнение 190, 374, 507
Диффузионная длина 159
— частота 336
Диффузионное приближение 74
Диффузионный потенциал 166—168
Диффузия амбиполярная 159
— горячих носителей 194
— ионов лития 27
— коэффициент 123, 157, 195
Диэлектрическая проницаемость, вклад свободных носителей 148
Длина дебаевская 160
— диффузионная 159
— свободного пробега при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 214
Долины дополнительные 318
— эквивалентные 298
Домен акустоэлектрический 339
— Ганна 321
Дрейфа скорость 71
— — насыщение при рассеянии на оптическом деформационном потенциале 258, 275
Дрейфовая амбиполярная подвижность 161
Дырка 21

Есаки диод 360

Жидкие полупроводники 556

Закон Видемана — Франца 108
Закон Ома, отклонения 142
Запоминание 559
Заряд эффективный Калена 241
— — Сигети 241, 437
Затвор 187
Зеебека эффект 115
— — в СВЧ диапазоне 501
— — горячих носителей 501
Зеемановское расщепление 415, 429
Зейтца уравнение 294
Зинера эффект 365
Зона Бриллюэна 41
— — в пространстве импульсов фононов 233
Зона валентная, влияние давления 348
— запрещенная 34, 40
— — отрицательная 48
— — температурная зависимость 24
— непараболичность 38, 51, 354
— проводимости, влияние давления 283
— хвосты 364, 426
Зонная структура 29, 37, 47, 50—52, 280, 343, 398

Излучение когерентное 529
Измерение типичных свойств полупроводников 597
Импульса время релаксации 71, 199, 205
Инверсия заселенности 529
Индуцированное испускание 447, 528
Инжекция 155
Интеграл Ферми 60
Интегральные схемы 186
Ионизации скорость 389
Ионизация лавинная 389
Испускание света, индуцированное 447, 528

Калена эффективный заряд 241
Квазиимпульс 36
Квазиуровень Ферми 174
Квантовый выход 508
— предел 368
Кейна формулы 37
Кельвина соотношения 124, 123
Керра эффект в магнитном поле 355, 356
Когерентное излучение 529
Коллектор 162, 176
— сопротивление 179
Комбинационное рассеяние 340, 435
Компенсация 27, 384, 387

Константы деформационного потенциала 281, 282, 348
— — — акустического 212
— — — оптического 250, 454, 455
Контакт металл — полупроводник 182
Конуэлл — Вайскопфа формула 209
Концентрация примесей 66, 227
Корбино диск 100
Коэффициент магниторезистивный, зависящий от механизма рассеяния 96
— распределения 68
— Риги — Ледюка 134
— Холла 82
— — в сильном магнитном поле 96, 353
— — в слабом магнитном поле 90
— усиления по току 178
Край собственного поглощения 395, 439
— — — зависимость от давления 406
— — — — от концентрации носителей 407
— — — — от состава 406
— — — — от температуры 399
Крамерса — Кронига соотношения 396, 593
Кронига — Пенни модель 29

Лавинное размножение 389
Лавинный пробой в p — n-переходах 389
Лазер, коэффициент усиления 531
— на эффекте комбинационного рассеяния с переворотом спина 537
— полупроводниковый 528
Ландау уровни 366
— — связанные 432
Ланде g-множитель 65, 369, 371, 415, 510, 537
Лидана — Закса — Теллера соотношение 237, 435
Лоренца число 107
— — в почти собственном полупроводнике 111
Лосева эффект 523
ЛПД приборы 392
Луноход 191
Люксембург-горьковский эффект 498
Люминесценция 523
— к. п. д. 524

Магнетон Бора 371
Магнитный момент в квантовом пределе 371
Магнитоплазменные волны 489
Магниторезистивный коэффициент, зависящий от механизма рассеяния 96
— эффект в многодолинной модели 291
— — в модели гофрированных сфер 351, 352
— — в неоднородных образцах 103
— — в полуметаллах 98
— — в полупроводниках с двумя сортами дырок 98
— — в почти собственных полупроводниках 98
— — в сильном магнитном поле 97
— — в слабом магнитном поле 96
— — влияние контактов 103
— — зависящий от полярности 314
— — осцилляции 368
— — отрицательный 311
Магнитофононный эффект 374
— — на теплых носителях 378
Максвелла — Больцмана функция распределения 59
Маска 186
Масса, единица 71
— эффективная 29, 35
— — плотности состояний 287, 347
— — приведенная 442
— — холловская 290
— — электропроводности 286, 347, 349
Междолинное рассеяние 298
— — влияние на поглощение света 464
— — неэквивалентное 317
Междолинные фононы 298, 437
Межзонная плотность состояний 442
Межзонные переходы 395, 413, 440, 488
Межэлектронное рассеяние 270
Метод зонной плавки 186
— фотолитографии 185
Микроплазмы 392
Многозарядные уровни, акцепторные 514
— — донорные 514
Множитель Больцмана 158
— Ланде 65, 369, 371, 415, 510, 537
Модель Кронига — Пенни 29

Найквиста формула 150
Напряжение Нернста 129
— — учет несоосности боковых отростков 130
— холловское 92

Напряжение холловское, учет несоосности боковых отростков 93
Нейтральные примеси, рассеяние 199
Нейтронная спектроскопия 235, 437
Нелинейная оптика 493
Непараболичность закона дисперсии в подзонах 38, 51, 354
Нернста эффект 127, 132
Неустойчивости двухпучковые 491
Нити тока 387
Носители неосновные 26, 155
— — время жизни 157, 510
— основные 155

Овшински диод 558
Оже рекомбинация (эффект) 384, 524
Ома закон, отклонения 142
Онзагера соотношение 123
ОНОЗ режим 326
Оптические фононы 231
Оптическое выпрямление 495
Органические полупроводники 568
Осциллятора сила 441
Отражение света 396, 592
— — в магнитном поле 416
— — решеточное 432
Отражения коэффициент 395

Памяти эффект 559
Параметрическое усиление 498
Парциальных волн метод 199
Пельтье эффект 124
Переброса процесс 213
Перезаселение в магнитном поле 311
— долин 304
Перескоков механизм (модель) 272, 563, 564, 571
Переход $p-n$ 164
— — емкость 168
— — плавный 164, 168
Переходы прямые оптические 400
Перрена барометрическая формула 158
Пинч-эффект 389
Плазменная частота 433, 467
— — при отражении 467
Планка формула 213
Плотность состояний 60
— — межзонная 442
— — эффективная 60, 76
Поверхностная электропроводность 547
— скорость рекомбинации 189, 513, 550
Поверхностные состояния 542
Поверхность, условие плоских зон 548
Поглощение инфракрасных лучей 374, 446
— света осциллирующее 414
— — показатель 395
— — примесное 424
— — решеточное 436
— — свободными носителями 445
— — — — в магнитном поле 476
— — собственное 395
Подвижность 71
— амбиполярная дрейфовая 161
— высокочастотная 149
— в *Ge, Si,* температурная зависимость 164
— магниторезистивная 292, 576
— при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 214
— — — — — — — — зависимость от электрического поля 219
— — — на ионизованных примесях 208
— — — на нейтральных примесях 200
— — — на оптическом деформационном потенциале 251, 257
— — — на полярном оптическом потенциале 262
— — — на пьезоэлектрическом потенциале 230
— — — совместное на ионизованных примесях и акустическом деформационном потенциале 222
— холловская 91
— ширина запрещенной зоны 569
Подзоны 347
Показатель поглощения 395
— преломления 395
Поле термоэлектрическое 108
— электротермическое 85
Полуметалл 19, 48, 98, 370, 492
— измерение электронной температуры 370
— магниторезистивный эффект 98
Полупроводник 20
— n-типа 22
— p-типа 22
— прямой (непрямой) 401
— собственный, концентрация электроиов 24, 68
Поля эффект 454
— эффективная напряженность 261 285, 302
Поляризация 237
Поляритоны 435

Полярная константа 261
Полярное оптическое рассеяние 260
— — — влияние на поглощение света 456
Полярон 269
Порог ганновских осцилляций 325, 326
Правило *f*-сумм 442
Преломления показатель 395
Прилипания уровни (центры) 511, 516
Примесей концентрация 66, 227
— энергия связи 428
Принцип неопределенности Гейзенберга 35
Прицельное расстояние 205
Пробой, анизотропия 385
— в стеклообразных полупроводниках 558
— диэлектрический 267
— лавинный 389
— при низких температурах 382
Проводимость 26
— определение типа термоэлектрическим способом 117
— поверхностная 547
— собственная 26
Прозрачности коэффициент 592
Произведение nL 324
Пьезосопротивление 136
Пьезоэлектрическое рассеяние 228
— — влияние на поглощение света 453

Работа выхода 540
Радиолокационного обнаружения установки 182
Размножения коэффициент 389
Распределение Планка 213
Рассеяние комбинационное 340, 435
— межэлектронное 270
— на акустическом деформационном потенциале 211
— на дислокациях 273
— на ионизованных примесях 205
— — — — влияние на поглощение света 458
— на нейтральных примесях 199
— на оптическом деформационном потенциале 250
— — — — — влияние на поглощение света 454
— полярное оптическое 260
— — — влияние на поглощение света 456
— пьезоэлектрическое 228
Рассеяние пьезоэлектрическое, влияние на поглощение света 453
— совместное на акустическом деформационном потенциале и на ионизованных примесях 221
Рассеяния вероятность 203
— — второе золотое правило Ферми 203
Распределение Планка 213
Расщепленный германий *p*-типа 348
Рекомбинация 156, 509, 516
— безызлучательная 512
— излучательная 511
— поверхностная, скорость 189
— центр 516
Риги — Ледюка фактор 134
— — эффект 128
Рида диод 392

Самокомпенсация 28
Сасаки — Шибуи эффект 305, 356, 357
Сверхпроводимость 553, 572
Светодиоды 523
Светоэлектрический эффект 500
Сдвиг Бурштейна 408
Сечение захвата 521
Сигети эффективный заряд 241, 437
Сингулярности ван Хова 423
Скин-слой 592
Скорость дрейфа 71
— генерации 159, 172, 387, 508
— рекомбинации 173, 156
— — поверхностная 189, 513, 550
Смешивание гармоник 495
Солнечная батарея 193
Соотношение Бриджмена 130
— Кельвина первое (второе) 124, 123
— Крамерса — Кронига 396, 593
— Лидана — Закса — Теллера 237, 435
— Онзагера 123
— Эйнштейна 123, 195
Сопротивление диска Корбино 100
— отрицательное дифференциальное 387
Состояния виртуальные 447
— поверхностные 542
— — быстрые 544
— — медленные 544
— — Тамма 540
— — Шокли 542
Спектроскопия нейтронная 235, 437
— туннельная 365
Спиновый резонанс электронов 417, 475

Спин-орбитальное взаимодействие 344
Стеклообразные полупроводники 358
Стимулированное излучение 528
Структура зонная 29, 37, 47, 50—52, 280, 343, 398
— кристаллическая вюрцита 45
— — цинковой обманки 44
Счетчик частиц 168
— — с поверхностным барьером 182

Температура Дебая 235, 250
— Дингля 369
— электронная 142
Температурная волна 112
Тензор деформации 138
— напряжения 138
— обратной эффективной массы 284
— пьезосопротивления 137, 138
— упругости 138
— эластосопротивления 138
Тепла плотность потока 100, 107
Теплопроводность удельная 107
— — методика измерения 109
— тензор 476
Теплые носители 142, 150, 224, 258, 268, 306, 358, 378
Термо-э.д.с. абсолютная 115
— — в условиях магнитофононного эффекта 379, 380
— диска Корбино 130
— дифференциальная 115
— — влияние магнитного поля 130
— — в почти собственном полупроводнике 118
— — в сильном магнитном поле 136
Термоэлектрический параметр эффективности 126
— эффект (Зеебека) 113
— — на сверхвысоких частотах 501
Томсона эффект 124
Транзистор 176
— база 176
— затвор, исток, сток 187
— коллектор 176
— — импеданс 179
— планарный 185
— полевой (МОП) 187
— сплавной 185
— точечно-контактный 184
— характеристики 180
Туннельный диод 360

Увлечение фононами 119
— фотонами 500
Угол Фойгта 485
— Холла 92
Ударная ионизация в $p-n$-переходах 389
— — при низких температурах 382
Удельное сопротивление 71
— — метод измерения четырехзондовый 583
Ультразвуковая волна, поглощение 201
Упругая постоянная продольная 213
Упругости тензор 138
Уравнение Аппletона — Хартри 490
— баланса энергии 80
— Больцмана 73
— — для фононов 119
— — — электронов 119
— диффузии 112
— Зейтца 294
— непрерывности числа носителей 77
— — для плотности потока энергии 112
Уровни глубокие 68, 514
— Ландау 366
— — связанные 432
— прилипания 511, 516
— Тамма 540
— Шокли 542

Фаз, согласование 497
Фактор анизотропии 288, 296
Фарадея эффект 478
Ферми — Дирака функция распределения 59
Ферми интеграл 60
— квазиуровень 174
— энергия 58, 116
— — в собственном полупроводнике 61
— — приведенная 61
Фойгта эффект 483
Фонон 119
— волновой вектор 212
— время релаксации 120
— оптический 231
— спектр 231
— спектроскопия комбинационного рассеяния 235
— — нейронная 235
— уравнение Больцмана 119
— эффект увлечения 119
Формула Брукса — Херринга 208, 353
— Кейна 37
Формула Конуэлл — Вайскопфа 209
— Найквиста 150
— Перрена 158

Фосфоресценция 523
Фотогальваномагнитный эффект 190
Фотодетекторы 521
Фотодиффузия 188
Фотолитографический процесс 185
Фотопроводимость 190, 374, 507
Фотоэлектромагнитный эффект 190
Фотоэлемент 170, 193, 194
Фотоэффект вентильный 191
Франца — Келдыша эффект 351
Френкеля экситон 413
Функция Бесселя 579
— Блоха 32, 54
— распределения в магнитном поле 87
— — Максвелла — Больцмана 59
— — Ферми — Дирака 59

Хейнса — Шокли эксперимент 162, 182
Холла коэффициент 82
— — в сильном магнитном поле 96, 353
— — в слабом магнитном поле 90
— угол 92
— эффект в модели двухзонной проводимости 313
— — зависящий от полярности 313, 314
— — магнитофононные осцилляции 380
— — метод измерения ван дер Пау 585
— — — — — в анизотропных полупроводниках 590
— —планарный 106
— — поверхностный 547
Холловский массовый множитель 291
Холловское напряжение 92
Холл-фактор 90
— горячих носителей 314

Циклотронный резонанс 468
— — в инфракрасном диапазоне 474, 475, 487
— — — многодолинных полупроводниках 471
— — — модели гофрированных сфер 474
— — ширина линии 200

Число Лоренца 107
— — в почти собственном полупроводнике 111

Шнурование тока 331, 389
Шокли уровни 542
Шоттки барьер 183, 364
Шубникова — де Гааза эффект 368, 369
Шум 150, 392, 514, 550
генерационно-рекомбинационный 514
— дробовой 151
— тепловой 150

Эйнштейна коэффициенты 528
— соотношение 123, 195
Экситон 410, 416, 473
— Ванье 413
— непрямой 346, 349, 412, 416
— прямой 412, 418
— связанный 412, 417
— Френкеля 413
Экситонов подавление 423
Эксперимент Хейнса — Шокли 162, 182
Эластосопротивления тензор 138
Электромеханической связи коэффициент 229, 336
Электронная температура 142
— — влияние на подвижность 218, 219
— — при рассеянии на акустическом деформационном потенциале 218
Электроотражение 423
Электропроводность 70, 76
— в сильном электрическом поле 144
— высокочастотная 148
— отрицательная дифференциальная 319, 387
— смешанная 81
— тензор 575
Электротермическое поле 85
Эллипсоиды постоянной энергии 295
Эмиссия электронная 196, 550
Эмиттер 162, 176
— импеданс 179
Энергии релаксация в вырожденных полупроводниках 218
— — при пьезоэлектрическом рассеянии 230
— уравнение баланса 80
Энтропии перенос 113
Энтропия, плотность 63
Эттингсгаузена эффект 128
Эффект увлечения фононами 119, 120
— — электронами 122
Эффективная масса 29, 35
— напряженность электрического поля 261, 285, 302
Эффективный заряд 241

Ячейка Вигнера — Зейтца 42

Антимонид алюминия
— — магниторезистивный эффект 295
— — решеточное отражение света 432
— — спектр рекомбинационного рассеяния света 435
Антимонид галлия
— — ширина запрещенной зоны 37
— — *n*-типа
— — — зонная структура 61, 319
— — — концентрация электронов (Γ- и *L*-зоны) 61
— — — подвижность 482
— — — фарадеевское вращение 483
— — *p*-типа
— — — поглощение света 425—427
Антимонид индия
— — край поглощения в магнитном поле 414
— — отношение подвижностей 94
— — ширина запрещенной зоны 36, 37, 474, 475
— — *n*-типа
— — — геликоны 490
— — — дифференциальная термо-э. д. с. в сильном магнитном поле 379, 380
— — — коэффициент Нернста 130
— — — — Холла 94
— — — коэффициенты теплых носителей 310, 311
— — — магнитоплазменное отражение 477, 478, 484, 485
— — — магнитосопротивление диска Корбино 102, 103
— — — межэлектронное взаимодействие 270, 271
— — — множитель Ланде (*g*-фактор) 371
— — — плазменное отражение 467
— — — примесное поглощение 425
— — — удельная теплопроводность 88
— — — холловская подвижность 102
Антимонид индия *n*-типа циклотронный резонанс 474, 475
— — — электропроводность 110
— — — энергетический зазор $\Delta\varepsilon_{\Gamma L}$ 319
— — — эффект Ганна 319, 320, 327
— — — — Фарадея 481, 482
— — — Фойгта 484, 485
— — — эффективная масса 36, 475
— — *p*-типа
— — — коэффициент Холла 94
— — — удельная теплопроводность 110
— — — электропроводность 110
Антрацен 569
Арсенид галлия
— — коэффициент поглощения 400
— — к. п. д. люминесценции 525
— — край поглощения, влияние давления 406
— — лазер 532
— — — влияние гидростатического давления 534
— — — — магнитного поля 533
— — — генерация второй гармоники 534
— — — гетероструктура 535
— — — пороговая плотность тока 531, 532
— — скорость лавинной ионизации 390
— — спектр излучения 392, 533
— — — колебаний решетки 235, 236, 376
— — туннельная спектроскопия 365
— — ширина запрещенной зоны 37
— — экситоны 411
— — эффект Франца — Келдыша 422
— — *n*-типа
— — — время релаксации
— — — — — междолинное 325
— — — — — энергии 265
— — — зонная структура 318
— — — — — влияние гидростатического давления 325, 326

Арсенид галлия n-типа время релаксации, влияние одноосного давления 325, 326
— — — константа полярного взаимодействия 261, 266, 376
— — — магнитофононный эффект 378
— — — множитель Ланде (g-фактор) 371
— — — подвижность 262, 318
— — — — в долинах (100) 318
— — — пьезосопротивление 140, 141
— — — энергетический зазор $\Delta\varepsilon_{\Gamma X}$ 318
— — — эффект Ганна 320
— — — — — домены 321
— — — — — произведение nL 324
— — — эффективная масса 37, 318, 377
— — — эффективный заряд 241
— — p-типа
— — — коэффициент Нерста 109, 132, 133
— — — поглощение света свободными дырками 465, 466
Арсенид индия
— — ширина запрещенной зоны 37
— — n-типа
— — — время релаксации энергии 265
— — — нелинейная оптика 498
— — — осцилляция магнитосопротивления 368
— — — поглощение света свободными носителями 446
— — — скорость генерации 386
— — — температура Дингля 370
— — — эффект Ганна 327
— — — эффективная масса 37
Арсенид-фосфид галлия
— — люминесценция 527
— — эффект Ганна 320
— — — — пороговое поле 326

Бромид серебра
— — константа полярного взаимодействия 269

Висмут
— магниторезистивный эффект 99
Висмут — сурьма
— — термомагнитное охлаждение 129
— — ширина запрещенной зоны 47

Германий
— аморфный, отражение 564
— вольтамперная характеристика p—n-перехода 171, 172
— диэлектрическая проницаемость 160
— жидкий, электропроводность, термо-э. д. с., магнитная восприимчивость 556
— зонная структура 50, 317, 347
— коэффициент отражения 423
— край собственного поглощения 399
— межзонный эффект Фарадея 488
— поверхностная проводимость 345
— примесные уровни 68, 386, 514
— скорость звука 334
— собственная проводимость 24, 25
— спектр колебаний решетки 235, 236
— температура Дебая 235, 298
— — междолинных фононов 298
— фотодетекторы 521
— фотопроводимость 515
— — спектральная чувствительность 519
— — ширина запрещенной зоны 24
— — — — изменение с температурой 24, 399
— экситоны 415, 416
— n-типа
— — акустоэлектрический эффект 332
— — время жизни носителей 171
— — — релаксации импульса 71, 72, 201, 215
— — — — — анизотропия 296, 297
— — — — междолинное 334
— — — — энергии 254, 255
— — в сильных электрических полях, время рекомбинации 385
— — — — — — — релаксации энергии 144, 145, 254, 255
— — — — — — коэффициент неомичности 225, 259, 308
— — — — — — — Холла 313
— — — — — — — — температурная зависимость 146, 147
— — — — — — — — частотная зависимость 147, 148
— — — — — — магниторезистивный эффект 293
— — — — — — отрицательная дифференциальная проводимость 387, 388
— — — — — — перезаселение 305, 313

Германий *n*-типа в сильных электрических полях, ударная ионизация 382, 383, 386, 387
— — — — — — электропроводность 145—147
— — — — — — эффект Ганна 327, 329
— — — — — — — Сасаки — Шибуя 305, 308
— — константы взаимодействия для акустоэлектрических фононов 283, 334
— — — — для L—X-переходов 328
— — — оптические 254, 255
— — коэффициент диффузии 171
— — лавинное размножение 390, 391
— — междолинные фононы, энергия 298
— — подвижность 72, 163, 227, 275, 276
— — — в X-долинах (оценки) 327
— — примесная проводимость 271, 272
— — пьезосопротивление 139
— — температура шума 151
— — термо-э. д. с., дифференциальная 116, 117
— — фактор анизотропии эффективной массы 292
— — эффективная масса 376, 377, 429, 473
— *p*-типа
— — время жизни носителей 179
— — — релаксации импульса 353
— — — — энергии 255
— — зонная структура 354, 355
— — константы деформационного потенциала 348
— — коэффициент диффузии 171
— — коэффициенты для теплых электронов 358
— — магниторезистивный эффект 99, 100, 353, 354
— — подвижность 352
— — — температурная зависимость 163
— — соотношение констант взаимодействия 352
— — термо-э. д. с. дифференциальная 116, 117
— — эффект Холла 353
— — эффективная масса 347, 352, 473
— — явления в сильных электрических полях 356, 357

Карбид кремния
— — константа полярного взаимодействия 241
— — спектр излучения 527
— — эффективный заряд 241
Кремний
— время релаксации фононов 121
— зонная структура 50
— коэффициент ионизации 390
— планарная технология 185
— собственная проводимость 24, 25
— удельная теплопроводность 110
— ширина запрещенной зоны 24
— — — — температурная зависимость 24, 25
— *n*-типа
— — время релаксации энергии 255
— — в сильных электрических полях, коэффициент неомичности 146, 147
— — — — — — — перезаселения 309
— — — — — — — — при одноосном давлении 330
— — — — — — магниторезистивный эффект отрицательный 315
— — — — — — — — поперечный 311, 312
— — деформационный потенциал 284
— — коэффициент диффузии горячих носителей 196
— — лавинное размножение 390
— — магниторезистивный эффект 293
— — подвижность 164
— — пьезосопротивление 136, 137, 139
— — — температурная зависимость 140
— — *f*- и *g*-рассеяние 298
— — циклотронный резонанс 472, 473
— — эффективная масса 472, 473
— — — — плотности состояний 287
— — — — электропроводности 287, 347
— *p*-типа
— — время релаксации энергии 255
— — зонная структура 354
— — константы взаимодействия для акустоэлектрического деформационного потенциала 348

Кремний *n*-типа константы взаимодействия отношение 348
— — коэффициент диффузии 162
— — — неомичности 358
— — подвижность 164
— — — вдоль канала 187
— — — неосновных носителей 164
— — пьезосопротивление 139
— — термо-э. д. с. дифференциальная 95
— — эффективная масса 347, 355, 356

Окись цинка
— — дрейфовый параметр акустоэлектрической активности 338
— — коэффициент усиления звука 338
Олово, серое
— — горячие электроны 370
— — ширина запрещенной зоны 48, 49
Органические соли 571, 572

Селен, жидкий 558
Селенид мышьяка
— — ширина запрещенной зоны по подвижности 561
Селенид свинца
— — кристаллическая структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — — изменение с температурой 400
Селенид-теллурид цинка 47
— — лазер 536
Сульфид кадмия
— — действие вакансии кристаллической решетки 27
— — дрейфовый параметр акустоэлектрической активности 338
— — коэффициент усиления звука 338
— — кристаллическая структура 45
— — ширина запрещенной зоны 45
Сульфид свинца
— — кристаллическая структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — изменение с температурой 400

Теллур
— время релаксации энергии 148
— жидкий, плотность 557, 558
Теллур жидкий электропроводность 557, 558
— зона Бриллюэна 46
— кристаллическая структура 45, 46
— отрицательное дифференциальное сопротивление 387
— ширина запрещенной зоны 46, 386
Теллурид висмута
— — зона Бриллюэна 46, 47
— — кристаллическая структура 46
— — термо-э. д. с., дифференциальная 127
— — термоэлектрический параметр эффективности 127
— — удельная теплопроводность 110, 127
— — число Лоренца 111
— — ширина запрещенной зоны 46
— — электропроводность 127
Теллурид германия
— — зонная структура 553
— — концентрация носителей 553
— — проводимость *p*-типа 553
— — сверхпроводимость 554
— — теплоемкость 555, 556
Теллурид кадмия
— — магнитофононный эффект 378, 379
— — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид кадмия — ртути
— — — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид олова
— — зонная структура 553
— — сверхпроводимость 553
Теллурид ртути
— — ширина запрещенной зоны 48
Теллурид свинца
— — зонная структура 47
— — ширина запрещенной зоны 47
— — — — — изменение с температурой 400
Теллурид свинца — олова
— — — ИК лазер 536
— — — ширина запрещенной зоны 47
Тетрацен 569
Титанат стронция
— — магнитная восприимчивость 554
— — сверхпроводимость 554, 555
— — температура перехода 554, 555

Фосфид галлия
— — коэффициент ионизации 390
— — край собственного поглощения 403
— — поглощение света свободными носителями 465, 466
— — спектр излучения 526
— — ширина запрещенной зоны, изменение с температурой 400
— — экситоны 403, 412, 526, 527
— — *n*-типа
— — — зонная структура 318
— — — поглощение света свободными носителями 465, 466
— — — подвижность 318
Фосфид индия *n*-типа
— — — зонная структура 326
— — — пьезосопротивление 140
Фосфид индия *n*-типа ширина запрещенной зоны 37
— — — эффект Ганна 320, 327
— — — эффективная масса 36, 37
Фталоцианин
— коэффициент Зеебека 570

Халькогенидные стекла
— — коэффициент поглощения света 565
— — локализованные состояния 561
— — подвижность, зависящая от частоты 563
— — поле пробоя 560
— — электропроводность 561

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

Предисловие автора 9

Основные обозначения 11

Глава 1. **Элементарные свойства полупроводников** 19

§ 1. Диэлектрик — полупроводник — полуметалл — металл . . . 19
§ 2. Положительно заряженная дырка 21
§ 3. Процессы проводимости, компенсация, закон действующих масс 23
Литература 28

Глава 2. **Энергетическая зонная структура** 29

§ 1. Одиночная и периодически повторяющиеся потенциальные ямы 29
§ 2. Энергетические зоны в приближении сильной связи 39
§ 3. Зона Бриллюэна 41
§ 4. Изоэнергетические поверхности 50
Литература 53

Глава 3. **Статистика полупроводников** 54

§ 1. Статистика Ферми 54
§ 2. Степени заполнения для примесных уровней 63
Литература 69

Глава 4. **Перенос заряда и энергии в невырожденном полупроводнике** . 70

§ 1. Кинетическая теория электронного газа 70
§ 2. Электропроводность и ее зависимость от температуры . . . 70
§ 3. Эффект Холла в поперечном магнитном поле 82
§ 4. Магниторезистивный эффект 96
§ 5. Диск Корбино 100
§ 6. Магниторезистивный эффект в неоднородных образцах . . . 103
§ 7. Планарный эффект Холла 106
§ 8. Теплопроводность, число Лоренца, сравнение с металлами . . 107
§ 9. Термоэлектрический эффект (явление Зеебека) 113
§ 10. Эффекты Томсона и Пельтье 121
§ 11. Термомагнитные эффекты 127
§ 12. Пьезосопротивление 136
§ 13. Горячие электроны и время релаксации энергии 141
§ 14. Высокочастотная электропроводность 148
§ 15. Шум 150
Литература 152

Глава 5. **Диффузия носителей заряда** 155

§ 1. Инжекция и рекомбинация 155
§ 2. Диффузия и соотношение Эйнштейна 157
§ 3. $p-n$-переход 164

§ 4. Квазиуровни Ферми 174
§ 5. Транзистор 176
§ 6. Контакт металл — полупроводник 182
§ 7. Различные типы транзисторов 184
§ 8. Эффект Дембера и фотоэлектромагнитный эффект 188
§ 9. Вентильный фотоэффект 191
§ 10. Диффузия горячих носителей 194
Литература 197

Глава 6. **Механизмы рассеяния в сферической однодолинной модели** . . 198

§ 1. Рассеяние на нейтральных примесях 198
§ 2. Упругое рассеяние 202
§ 3. Рассеяние на ионизованных примесях 205
§ 4. Рассеяние равновесных носителей на акустическом деформационном потенциале 211
§ 5. Рассеяние горячих носителей на акустическом деформационном потенциале 215
§ 6. Совместное действие рассеяния на ионизованных примесях и на акустическом деформационном потенциале 221
§ 7. Пьезоэлектрическое рассеяние 229
§ 8. Спектр фононов в кристалле 231
§ 9. Механизмы неупругого рассеяния 241
§ 10. Уравнение баланса импульса и смещенное максвелловское распределение 246
§ 11. Рассеяние на оптическом деформационном потенциале . . . 250
§ 12. Полярное оптическое рассеяние 260
§ 13. Межэлектронное рассеяние 270
§ 14. Проводимость по примесной зоне и механизм перескоков . . 271
§ 15. Рассеяние на дислокациях 273
Литература 277

Глава 7. **Перенос заряда и процессы рассеяния в многодолинной модели** 280

§ 1. Тензор деформационного потенциала 280
§ 2. Электропроводность 284
§ 3. Эффект Холла в слабом магнитном поле 289
§ 4. Магниторезистивный эффект в слабом магнитном поле . . . 291
§ 5. Рассеяние между эквивалентными долинами и эффект перезаселения долин 298
§ 6. Гальваномагнитные эффекты, обусловленные теплыми и горячими носителями заряда 310
§ 7. Неэквивалентное междолинное рассеяние. Отрицательная дифференциальная проводимость и осцилляции Ганна 317
§ 8. Акустоэлектрический эффект 331
Литература 340

Глава 8. **Явления переноса в модели гофрированных сфер** 343

§ 1. Энергетические зоны и плотность состояний 343
§ 2. Электропроводность 348
§ 3. Эффект Холла и магниторезистивный эффект 349
§ 4. Теплые и горячие дырки 356
Литература 359

Глава 9. **Квантовые эффекты в явлениях переноса** 361

§ 1. Туннельный диод 361
§ 2. Магнитные квантовые эффекты 366
§ 3. Магнитное вымораживание носителей 371

§ 4. Магнитофононный эффект 374
Литература 380

Глава 10. **Ударная ионизация и лавинный пробой** 382

§ 1. Ударная ионизация в однородно легированных полупроводниках при низких температурах 382
§ 2. Лавинный пробой в $p-n$-переходах 389
Литература 393

Глава 11. **Поглощение и отражение света** 395

§ 1. Собственное поглощение и зонная структура 395
§ 2. Край собственного поглощения: зависимость от температуры, давления, состава твердого раствора и вырождения 399
§ 3. Экситонное поглощение 410
§ 4. Межзонные переходы в магнитном поле 413
§ 5. Эффект Франца — Келдыша (электропоглощение и электроотражение) 419
§ 6. Примесное поглощение 424
§ 7. Решеточное отражение в полярных полупроводниках 432
§ 8. Многофононное решеточное поглощение 436
§ 9. Квантовомеханическая трактовка края собственного поглощения света 439
§ 10. Поглощение и отражение света свободными носителями заряда 445
§ 11. Циклотронный резонанс 468
§ 12. Магнитооптические эффекты, обусловленные свободными носителями 476
§ 13. Межзонные магнитооптические эффекты 488
§ 14. Магнитоплазменные волны 489
§ 15. Нелинейная оптика 493
§ 16. Светоэлектрический эффект (увлечение фотонами) 500
Литература 501

Глава 12. **Фотопроводимость** 507

§ 1. Кинетика фотопроводимости 507
§ 2. Глубокие уровни в германии 514
§ 3. Сечение захвата акцепторного уровня прилипания 521
Литература 522

Глава 13. **Генерация света в полупроводниках** 523

§ 1. Светодиоды 523
§ 2. Полупроводниковый лазер 528
Литература 538

Глава 14. **Свойства поверхности** 540

§ 1. Поверхностные состояния 540
§ 2. Явления переноса на поверхности 546
Литература 551

Глава 15. **Разные полупроводники** 553

§ 1. Сверхпроводящие полупроводники 553
§ 2. Жидкие, стеклообразные и аморфные полупроводники 556
§ 3. Органические полупроводники 568
Литература 573

Приложение 1. **Тензоры электро- и теплопроводности** 575
Приложение 2. **Модифицированные функции Бесселя** 579
Литература 582
Приложение 3. **Методы измерения удельного сопротивления и эффекта Холла** 583
Литература 590
Приложение 4. **Коэффициенты прозрачности и отражения света; соотношения Крамерса — Кронига** 591
Литература 596
Приложение 5. **Измерение типичных свойств полупроводников** 597
Численные значения важных постоянных 599
Предметный указатель 600
Указатель материалов 607