

THE FINITE  
ELEMENT METHOD  
IN ENGINEERING  
SCIENCE

---

O. C. ZIENKIEWICZ

---

О. ЗЕНКЕВИЧ

МЕТОД  
КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ  
В ТЕХНИКЕ

---

Перевод с английского

Под редакцией  
Б. Е. Победри

Монография посвящена изложению основ метода конечных элементов — одного из наиболее эффективных современных методов численного решения инженерных, физических и математических задач с применением вычислительных машин.

В книге рассмотрены основные принципы метода конечных элементов и их приложение к задачам теории упругости, теории пластин и оболочек, теплопроводности, теории потенциала.

Значительное внимание удалено изопараметрическим криволинейным элементам, динамическим задачам и нелинейным проблемам, обусловленным пластичностью и большими перемещениями. Приведено много примеров решения задач строительной механики, аэронавтики и электрических систем.

Книга представляет большой интерес для инженеров-конструкторов, специалистов в области теории упругости, теплофизики, гидро- и аэrodинамики, а также аспирантов и студентов старших курсов технических вузов.

*Редакция литературы по новой технике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В связи с техническим прогрессом изменились многие инженерные задачи: они стали сложнее, и их решение требует введения новых понятий. Изменился и подход к практическим инженерным задачам. Если раньше инженер мог, исходя из рассматриваемого физического явления или технической проблемы, «поставить» задачу и предоставить ее решение математику-вычислителю, то сейчас дело обстоит иначе. Во многих инженерных задачах построение расчетной модели настолько тесно переплетается с процессом вычислений, что разделить эти процессы порой не представляется возможным. В связи с этим появились новые понятия и направления, такие, как диакоптика (исследование сложных систем по частям), теории графов и др.

В последнее время широкую известность приобрело одно из направлений диакоптики — метод конечных элементов, которому и посвящена настоящая монография. Этот метод является одним из вариационных методов и часто трактуется как метод Ритца. Область, занимаемая телом, разбивается на конечные элементы. Чаще всего это треугольники в плоском случае и тетраэдры в пространственном. Внутри каждого элемента задаются некоторые функции формы, позволяющие определить перемещения внутри элемента по перемещениям в узлах, т. е. в местах стыков конечных элементов. За координатные функции принимаются функции, тождественно равные нулю всюду, кроме одного конечного элемента, внутри которого они совпадают с функциями формы. В качестве неизвестных коэффициентов метода Ритца берутся узловые перемещения. После минимизации функционала энергии получается алгебраическая система уравнений (так называемая основная система). Таким образом, ситуация здесь такая же, как и в вариационных разностных методах, в которых для получения разностной системы уравнений применяется один из вариационных принципов.

В отличие от вариационно-разностного метода в методе конечных элементов существенную роль играют функции формы, точнее их интерполяционные свойства. В этом смысле метод

конечных элементов близок к теории сплайн-функций, интенсивно разрабатываемой в последнее время.

В настоящее время методом конечных элементов пользуются при решении самых разнообразных задач математической физики, хотя первые работы по методу конечных элементов были выполнены специалистами по строительной механике. Это обстоятельство отразилось не только на терминологии метода, но и на его первичной интерпретации, которая, видимо, и объясняет огромную популярность метода конечных элементов среди инженеров. Эта интерпретация состоит в следующем: сплошная среда заменяется некоторой эквивалентной шарнирной системой, а техника расчета статически неопределенных шарнирных систем хорошо известна каждому инженеру. Особенно популярен метод перемещений, который аналогичен методу составления основной системы уравнений конечных элементов, используемому в этой книге.

Как ни популярен метод конечных элементов в настоящее время, оц., разумеется, не является единственным эффективным численным методом. Главным недостатком этого метода, как и любого вариационного метода, является сложность получения априорных оценок. Проверку надежности метода можно осуществлять пока лишь опробированием каждой программы на точных решениях.

При чтении книги следует иметь в виду, что автор не является математиком и некоторые из его высказываний математиками могут быть приняты «в штыки». Интуитивные соображения автора относительно сходимости метода и его обоснования, разумеется, не заменяют строгих математических исследований, хотя их нельзя оставить без внимания, учитывая огромный опыт автора как вычислителя.

Читатель найдет в этой книге много интересных мыслей, идей.. Наличие программ, составленных на алгоритмическом языке ФОРТРАН, сильно облегчит ему практическое освоение метода.

Перевод гл. 16 выполнен Г. Г. Шахверди, остальные главы переведены А. М. Васильевым и В. М. Курочкиным.

В заключение мне хочется выразить благодарность автору за любезно присланный список опечаток в английском издании.

*Б. Победря*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Значительную часть предисловия первого издания этой книги, опубликованного в 1967 г.<sup>1)</sup>, пришлось посвятить объяснению того, что понимается под методом конечных элементов. В настоящее время вследствие появления большого количества работ, в которых рассматривается этот метод, в таком объяснении почти нет необходимости. Возникнув как один из приемов исследования конструкций разнообразных форм, он получил к настоящему времени всеобщее признание как общий метод изучения широкого класса задач техники и физики. Существенное развитие метода как в прикладном, так и в теоретическом аспектах привело к необходимости пересмотра первого издания книги. Однако при отборе нового материала и его представлении сразу же пришлось столкнуться с трудностями, обусловленными противоречивостью требований простоты и полноты изложения без значительного увеличения объема. В результате большая часть книги была написана заново, однако при этом основное содержание ее и направленность сохранились.

Метод конечных элементов по существу сводится к аппроксимации сплошной среды с бесконечным числом степеней свободы совокупностью подобластей (или элементов), имеющих конечное число степеней свободы. Затем между этими элементами каким-либо способом устанавливается взаимосвязь. Подобные способы хорошо известны инженерам, занимающимся исследованием дискретных конструкций или электрических цепей. Популярность метода, несомненно, объясняется простотой его физической интерпретации и математической формы. Использование ЭВМ позволяет получать решения многих сложных технических задач. Метод конечных элементов уже сейчас используется во многих конструкторских организациях в качестве обычного инженерного метода.

---

<sup>1)</sup> См. О. Зенкевич, И. Чанг «Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред», перевод с английского, изд-во «Недра», 1974. — Прим. ред.

Первая глава книги почти не касается конечных элементов. В ней кратко и в доступной форме излагаются основные принципы матричного метода расчета конструкций, чтобы избежать необходимости обращения к другим источникам. Показано, что принципы исследований различных задач строительной механики и, например, электротехники по существу одинаковы.

В гл. 2 описываются основы конечно-элементной формулировки задач теории упругости в перемещениях. Необходимость внимательного изучения этой главы обусловлена тем, что ряд последующих глав, в которых рассматриваются различные задачи теории упругости, непосредственно основывается на разработанной здесь теории. В гл. 3 возможные другие подходы на основе принципов виртуальной работы и минимума энергии распространяются на вариационные задачи и показывается существенное сходство методов конечных элементов и Релея—Ритца. Наряду с этим в гл. 3 указывается на возможность и других, не вариационных формулировок.

В гл. 4—6 рассматриваются конечные элементы только простейших форм, а в гл. 7 и 8 исследуются в общем виде функции формы элементов. В этих главах читатель познакомится с общими идеями более подробных расчетов.

В гл. 16 и 17 метод конечных элементов используется при исследовании динамических процессов, а в гл. 18 и 19 рассматриваются нелинейные задачи. В последние годы в этих областях метод получил широкое распространение. Хотя в процессе изложения основное внимание уделяется лишь общим положениям, вопросы пластичности, больших деформаций и связанные с ними задачи обсуждаются довольно подробно.

Для практического использования метода конечных элементов требуется не только овладение теорией, но и преодоление значительных трудностей программирования. К настоящему времени уже разработано много эффективных быстродействующих программ, однако их сложность может обескуражить начинающего исследователя, который, пожалуй, предпочтет получить простые решения частных задач. Ввиду этого в книгу помещена гл. 20, написанная моими коллегами докторами Кингом и Чейгом, в которой содержится ряд стандартных подпрограмм. Можно надеяться, что с их помощью читатель сумеет без особых труда составить собственную программу.

Книга предназначена для аспирантов, студентов старших курсов и инженеров. Для изложения всего материала с единых позиций иногда приходилось пренебрегать математической стройностью (но не в ущерб строгости). Объем необходимых для понимания книги знаний лишь немного выходит за рамки обычных курсов математического анализа, хотя для удобства используются матричные представления. Для тех, кто не зна-

ком с теорией матриц, необходимые сведения даются в приложении.

Использование матричных представлений в методе конечных элементов не обязательно, как это иногда ошибочно предполагается. С таким же успехом, например, можно было бы использовать и тензорные обозначения.

В первое издание была включена глава, посвященная некоторым перспективным направлениям развития метода. Большинство этих направлений уже разработано и сейчас нет смысла делать какие-либо дальнейшие предсказания, хотя, несомненно, метод будет развиваться. Следует отметить, что в книге не отражены хорошо разработанные вопросы непосредственного применения вариационной теории Хелингера — Рейсснера и смешанного метода. Это сделано не только из-за ограниченного объема книги, но и для сохранения единого подхода, дающего эффективные средства решения многих задач.

Практические примеры, включенные в книгу, относятся к различным областям техники, хотя читатель, вероятно, обнаружит, что их выбор в основном определяется личными интересами автора, занимающегося вопросами строительной механики. Распространение метода на другие отрасли техники не потребует большого труда.

О. Зенкевич



# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: МЕТОД ЖЕСТКОСТЕЙ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ

## 1.1. Введение

Инженерные конструкции можно рассматривать как некоторую совокупность конструктивных элементов, соединенных в конечном числе узловых точек. Если известны соотношения между силами и перемещениями для каждого отдельного элемента, то, используя хорошо известные приемы строительной механики [1—5], можно описать свойства и исследовать поведение конструкции в целом.

В сплошной среде число точек связи бесконечно, и именно это составляет основную трудность получения численных решений в теории упругости. Понятие конечных элементов, введенное впервые Тёрнером и др. [6], представляет собой попытку преодолеть эту трудность путем разбиения сплошного тела на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в узловых точках, в которых вводятся фиктивные силы, эквивалентные поверхности напряжениям, распределенным по границам элементов. Если такая идеализация допустима, то задача сводится к обычной задаче строительной механики, которая может быть решена численно.

На первый взгляд, этот интуитивно понятный и доступный инженерный метод выглядит не совсем убедительно — в частности, остается открытым вопрос о соотношениях между силами и перемещениями отдельных элементов. Способы получения этих соотношений будут подробно рассмотрены в гл. 2 после изложения основ метода. На данном же этапе целесообразно кратко описать общий метод расчета конструкций, который будет широко использоваться в книге после рассмотрения свойств конечных элементов.

В дальнейшем будет показано, что метод конечных элементов применим и к многим задачам иного типа, но и тогда основные свойства элемента выражаются в форме, принятой в строительной механике. Общие методы составления ансамбля и решения задач аналогичны приемам строительной механики.

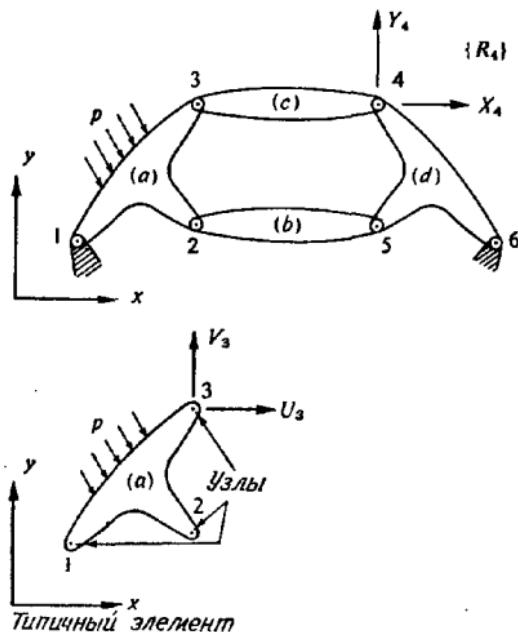
В действительности «структурная» форма уравнений присуща не только строительной механике. Уравнения в такой

форме используются при расчетах электрических цепей или потоков жидкости в трубопроводах. Подобные задачи часто называются задачами исследования сетей<sup>1)</sup>.

## 1.2. Элемент конструкции

На фиг. 1.1 изображена двумерная конструкция, состоящая из отдельных частей, соединенных между собой в точках, пронумерованных от 1 до  $n$ . Соединения в узлах предполагаются шарнирными.

Сначала допустим, что в результате расчета или на основе экспериментальных данных достоверно известны характери-



Фиг. 1.1. Типичная конструкция, состоященная из отдельных элементов.

стики каждого элемента. Силы, возникающие в узлах 1—3 элемента  $a$ , однозначно определяются перемещениями этих узлов, действующей на элемент распределенной нагрузкой  $p$  и его начальной деформацией. Начальная деформация может быть обусловлена температурным воздействием, усадкой или несовершенством сборки. Силы и соответствующие им перемещения определяются компонентами  $U$ ,  $V$  и  $u$ ,  $v$  в какой-либо системе координат.

<sup>1)</sup> Вместо понятия сети в литературе все чаще используется более общее понятие графа. — Прим. ред.

Записывая силы, действующие во всех (в трех для рассматриваемого случая) узлах элемента  $a$ , в виде матрицы<sup>1</sup>), получим

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

а для соответствующих перемещений узлов

$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.2)$$

Если предположить, что элемент упругий, то основные соотношения всегда могут быть записаны в виде

$$\{F\}^a = [k]^a \{\delta\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{e_0}^a, \quad (1.3)$$

где  $\{F\}^a$  — силы, уравновешивающие действующие на элемент распределенные нагрузки,  $\{F\}_{e_0}^a$  — силы в узлах, обусловленные начальными деформациями, которые могут возникать, например, при изменении температуры без перемещения узлов. Первый член в этой формуле представляет собой силы, вызванные перемещениями узлов.

Предварительный расчет или эксперимент позволяет однозначно определить напряжения в любой заданной точке через узловые перемещения. Записывая эти напряжения в виде матрицы  $\{\sigma\}^a$ , получаем соотношение в форме

$$\{\sigma\}^a = [S]^a \{\delta\}^a + \{\sigma\}_p^a + \{\sigma\}_{e_0}^a, \quad (1.4)$$

где последние два члена — напряжения, обусловленные распределенными нагрузками, и начальные напряжения при отсутствии узловых перемещений.

<sup>1</sup>) Для понимания материала, изложенного в книге, требуется знание основ матричной алгебры. Это необходимо для краткости и удобства изложения. Для читателей, не знакомых с матричной алгеброй, необходимые сведения приведены в небольшом по объему приложении 1.

Матрица  $[k]^a$  называется матрицей жесткости элемента, а  $[S]^a$  — матрицей напряжения элемента.

Соотношения (1.3) и (1.4) проиллюстрированы на примере элемента с тремя узлами, в каждом из которых действуют только две компоненты силы. Ясно, что все рассуждения и определения справедливы и в более общем случае. Элемент  $b$  в рассматриваемом случае связан с соседними только в двух точках, хотя другие элементы могут иметь таких точек и больше. С другой стороны, если соединения элементов считать жесткими, то требуется рассматривать по три компоненты обобщенной силы и обобщенного перемещения, причем за третью компоненту следует принять соответственно момент вращения и угол поворота. Для жесткого соединения в трехмерной конструкции число компонент в узле равняется шести. Таким образом, в общем случае

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \text{ и } \{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad (1.5)$$

где  $F_i$  и  $\delta_i$  имеют одинаковое число компонент или степеней свободы.

Ясно, что матрицы жесткости элемента всегда будут квадратными вида

$$[k]^a = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{ml} & k_{mm} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где  $k_{ii}$  и т. д. — также квадратные подматрицы размерности  $l \times l$ , а  $l$  — число компонент силы в рассматриваемых узлах.

В качестве примера рассмотрим двумерную задачу о шарнире опертой балке постоянного сечения  $A$  с модулем упругости  $E$  (фиг. 1.2). Балка нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $p$  и подвержена однородной температурной деформации

$$\varepsilon_0 = aT.$$

Если концы балки имеют координаты  $x_i, y_i$  и  $x_n, y_n$ , то ее длина может быть вычислена как

$$L = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2},$$

а ее угол наклона к горизонтальной оси

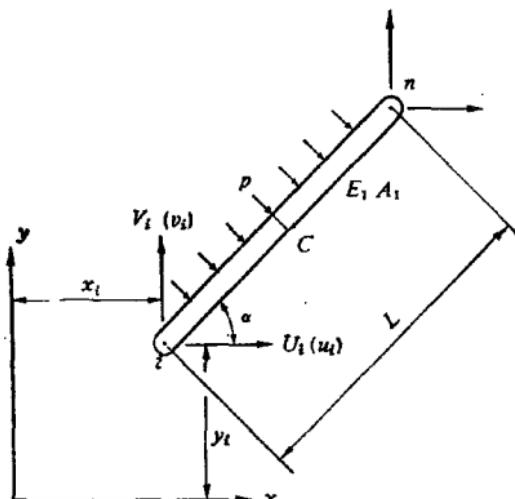
$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{y_n - y_i}{x_n - x_i} \right).$$

В каждой узловой точке необходимо рассмотреть только по две компоненты силы и перемещения.

Очевидно, что узловые силы, обусловленные поперечной нагрузкой, записываются в виде матрицы

$$\{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_I \\ F_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \frac{pL}{2}.$$

Элементы этой матрицы равны соответствующим компонентам реакций опор балки, т. е.  $pL/2$ . Для компенсации температур-



Фиг. 1.2. Шарнирно опертая балка.

ного расширения  $e_0$  нужно приложить осевую силу  $E\alpha T A$ , компоненты которой

$$\{F\}_{e_0}^a = \begin{Bmatrix} F_I \\ F_n \end{Bmatrix}_{e_0} = \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{e_0} = - \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} (E\alpha T A).$$

Наконец, перемещения узловых точек элемента

$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_I \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

вызовут его удлинение  $(u_n - u_i) \cos \alpha + (v_n - v_i) \sin \alpha$ . Величина удлинения, умноженная на  $EA/L$ , даст осевую силу, компоненты которой можно найти, подставив величину этой силы вместо  $-EaT$  в предыдущее выражение. Стандартная форма записи имеет вид

$$\begin{aligned} \{F\}_\delta^a &= \begin{Bmatrix} F_i \\ F_n \end{Bmatrix}_\delta = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_\delta = \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = [k]^a \{\delta\}^a. \end{aligned}$$

Итак, для рассматриваемого простейшего случая определены все слагаемые основного уравнения (1.3). Нетрудно записать в форме (1.4) и напряжения в любом поперечном сечении элемента. Если, например, ограничиться рассмотрением среднего сечения балки  $C$ , то напряжения, возникающие в результате осевого растяжения и изгиба элемента, можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_C = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \{\delta\}^a + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{pL^2}{8} \frac{d}{I} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} EaT,$$

где  $d$  — половина высоты сечения, а  $I$  — момент инерции. Легко заметить, что в это выражение входят все слагаемые формулы (1.4).

Для более сложных элементов требуются более тонкие приемы расчета, но все равно результаты имеют такую же форму. Инженер легко заметит, что зависимость между наклоном и прогибом, используемая при расчетах жестких рам, является частным случаем рассмотренных общих соотношений.

Следует отметить, что полная матрица жесткости для деформируемого элемента получилась симметричной (то же можно

сказать и о подматрицах). Это икоим образом не случайно, а вытекает из закона сохранения энергии и его следствия — теоремы взаимности Максвелла — Бетти.

Во всех рассуждениях предполагалось, что свойства элемента описываются простыми линейными соотношениями. В принципе можно было бы получить аналогичные соотношения и для нелинейных материалов, однако обсуждение задач такого рода выходит за рамки этой монографии.

### 1.3. Составление ансамбля и расчет конструкции

Рассмотрим снова гипотетическую конструкцию, изображенную на фиг. 1.1. Чтобы получить решение, нужно удовлетворить

- условиям совместности
- уравнениям равновесия.

Любая система  $\{\delta\}$  узловых перемещений

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}, \quad (1.7)$$

записанная для конструкции, в которую входят все элементы, автоматически удовлетворяет первому условию.

Поскольку условия равновесия *внутри* каждого элемента считаются выполнеными, необходимо удовлетворить условиям равновесия в узловых точках. Полученные уравнения будут содержать в качестве неизвестных перемещения. Как только они будут найдены, задачу расчета конструкции можно считать решенной. Внутренние усилия (напряжения) в элементе могут быть легко определены с помощью зависимостей, *a priori* установленных для каждого элемента в виде (1.4).

Предположим, что, помимо распределенной нагрузки, приложением к каждому отдельному элементу, конструкция нагружена вибрирующими силами

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}, \quad (1.8)$$

приложенными в узловых точках. Каждая из сил  $R_i$  должна иметь столько же компонент, сколько и рассматриваемые реакции элемента. В обсуждаемом примере

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

так как соединения предполагались шарнирными. Однако в общем случае будет рассматриваться произвольное число компонент.

Если теперь пожизненно удовлетворить условиям равновесия в произвольной узловой точке  $i$ , то каждая из компонент  $R_i$  должна быть приравнена сумме компонент сил от всех элементов, соединяющихся в этом узле. Таким образом, рассматривая все компоненты силы, получаем

$$\{R_i\} = \sum \{F_i\}^a = \{F_i\}^1 + \{F_i\}^2 + \dots, \quad (1.10)$$

где  $F_i^1$  — сила, приложенная к узлу со стороны элемента 1,  $F_i^2$  — сила, приложенная к узлу со стороны элемента 2, и т. д. Очевидно, что отличные от нуля силы будут давать только элементы, содержащие точку  $i$ , однако суммирование проводится по всем элементам.

Подставляя (1.3), получаем выражения для сил в узловой точке  $i$

$$\begin{aligned} \{R_i\} = & (\sum [k_{i1}]^a) \{\delta_1\} + (\sum [k_{i2}]^a) \{\delta_2\} + \dots \\ & \dots + \sum \{F_i\}_p^a + \sum \{F_i\}_{e_0}^a. \end{aligned} \quad (1.11)$$

И здесь вклад в сумму дают только элементы, соединяющиеся в узле  $i$ . Объединяя все такие уравнения, имеем

$$[K] \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{e_0}, \quad (1.12)$$

где подматрицы

$$\begin{aligned} [K_{im}] &= \sum [k_{im}]^a, \\ \{F_i\}_p &= \sum \{F_i\}_p^a, \\ \{F_i\}_{e_0} &= \sum \{F_i\}_{e_0}^a \end{aligned} \quad (1.13)$$

получены суммированием по всем элементам. Это простое правило составления ансамбля очень удобно, поскольку сразу после определения коэффициента для отдельного элемента он может быть немедленно заслан в соответствующую ячейку памяти вычислительной машины. Составление ансамбля является основной операцией метода конечных элементов, и поэтому она должна быть хорошо усвоена читателем.

Если используются разные типы элементов, то при составлении ансамбля следует помнить, что можно складывать матрицы только одинаковой размерности. Следовательно, отдельные подматрицы, которые включаются в систему, должны содержать одинаковое число компонент сил и перемещений. Так, например, если к какому-либо элементу конструкции в узловой точке, передающей моменты, присоединен шарнирно другой элемент, то

матрицу жесткости последнего необходимо дополнить, вводя соответствующие (шарнирные) значения на места углов поворота или моментов.

Систему уравнений (1.12) можно решить, как только будут подставлены перемещения опор. В примере (фиг. 1.1), где обе компоненты перемещений узлов 1 и 6 равны нулю, это будет означать подстановку

$$\{\delta_1\} = \{\delta_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

что эквивалентно уменьшению числа уравнений равновесия (в рассматриваемом случае их двенадцать) и вычеркиванию первой и последней строки и столбца. Таким образом, общее число неизвестных компонент перемещения уменьшается до восьми. Тем не менее всегда удобно составлять уравнения в соответствии с соотношением (1.12), учитывая все узловые точки.

Очевидно, что эту систему невозможно решить без задания некоторого числа перемещений, исключающих смещение конструкции как жесткого целого, так как по заданным силам нельзя однозначно определить перемещения. Этот физически очевидный факт математически выражается тем, что матрица  $[K]$  является сингулярной, т. е. не имеет обратной. Задание соответствующих перемещений по окончании формирования асамбля обеспечивает возможность получения единственного решения путем вычеркивания соответствующих строк и столбцов различных матриц.

Несмотря на то что подстановка известных перемещений, позволяющая уменьшить общее число решаемых уравнений, является относительно простой операцией при ручных вычислениях и может быть запрограммирована для вычислительных машин, часто оказывается удобным непосредственно решать первоначальную систему уравнений с тем, чтобы избежать реорганизации машинной памяти. Это осуществляется очень просто с помощью искусственного приема, предложенного Пейном и Айронсом [7].

При использовании такого приема вместо исключения уравнения равновесия, в котором некоторое перемещение считается заданным (а соответствующая компонента внешней силы остается неизвестной), и последующей подстановки этого перемещения в остальные уравнения диагональный элемент матрицы  $[K]$  в рассматриваемой точке умножается на очень большое число. Одновременно член, стоящий в правой части уравнения, заменяется тем же самым числом, умноженным на заданное значение перемещения. В результате уравнение заменяется другим, но величина перемещения в рассматриваемом случае равна определенному значению. При этом общее число уравнений в

системе остается неизменным. Подробно этот вопрос обсуждается в гл. 20.

После определения неизвестных перемещений легко вычислить напряжения и внутренние силы, применив соотношение (1.4) поочередно к каждому элементу.

#### 1.4. Преобразование координат

Часто бывает удобно определять характеристики отдельного элемента в системе координат, отличной от той, в которой задаются внешние силы и перемещения конструкции в целом. Чтобы облегчить вычисления, для каждого элемента можно использовать свою систему координат. Компоненты сил и перемещений, входящие в соотношение (1.3), нетрудно записать в любой системе координат. Очевидно, что это необходимо сделать до составления ансамбля.

Систему локальных координат, в которой определены характеристики элемента, будем помечать штрихом, чтобы отличить ее от системы координат, принятой для описания конструкции в целом. Компоненты перемещений преобразуются с помощью матрицы направляющих косинусов  $[L]$ :

$$\{\delta'\}^a = [L] \{\delta\}^a. \quad (1.14)$$

Так как в любой системе координат соответствующие компоненты сил должны совершать одинаковую работу<sup>1</sup>), то

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T \{\delta'\}^a,$$

и, используя формулу (1.14), получаем

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T [L] \{\delta\}^a$$

или

$$\{F\}^a = [L]^T \{F'\}^a. \quad (1.15)$$

Преобразования, определяемые соотношениями (1.14) и (1.15), называются контрградиентными.

Чтобы преобразовать жесткости, определенные в локальной системе координат, к глобальным координатам, отметим, что

$$\{F'\}^a = [k']^a \{\delta'\}^a \quad (1.16)$$

и в силу (1.14) и (1.15)

$$\{F\}^a = [L]^T [k']^a [L] \{\delta\}^a,$$

т. е.

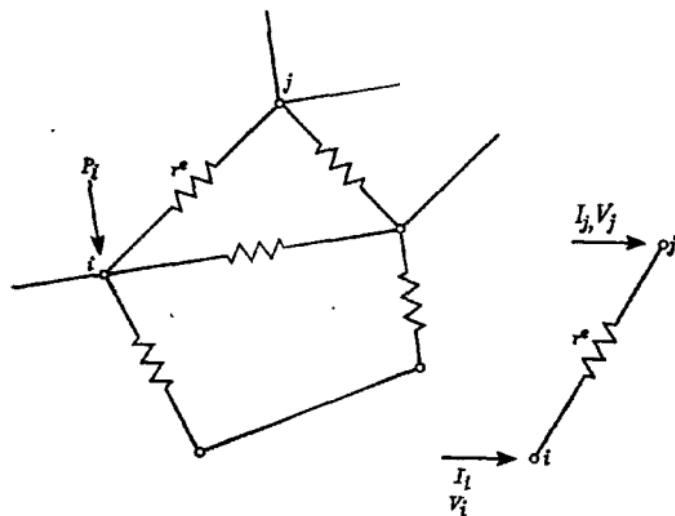
$$[k]^a = [L]^T [k']^a [L]. \quad (1.17)$$

<sup>1</sup>)  $(\cdot)^T$  означает транспонирование матрицы  $(\cdot)$ .

Читатель может убедиться в полезности вышеуказанных преобразований, применив их для рассмотренного шарнирно опертого стержня. В более сложных задачах для некоторых типов внешних связей, описываемых соотношениями вида (1.14), числа степеней свободы  $\{\delta\}$  и  $\{\delta'\}$  могут быть различными. Однако и в этих случаях соотношения (1.15) и (1.16) остаются справедливыми.

### 1.5. Электрические и гидравлические сети

Аналогичные принципы получения характеристик элемента и асамбля могут быть использованы во многих различных областях, не связанных с расчетом конструкций. Для примера рас-



Фиг. 1.3. Цепь электрических сопротивлений.

смотрим цепь электрических сопротивлений, изображенную на фиг. 1.3.

Если типичный элемент — сопротивление  $ij$  — рассмотреть изолировано от системы, то с помощью закона Ома можно записать соотношение между входящими токами и напряжениями на его концах:

$$I_i = \frac{1}{r^e} (V_i - V_j),$$

$$I_j = \frac{1}{r^e} (V_j - V_i),$$

или в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} I_i \\ I_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{r^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix},$$

что в принятой нами стандартной форме выглядит как

$$\{I\}^e = [k]^e \{V\}^e. \quad (1.18)$$

Ясно, что в такой форме это соотношение соответствует (1.3). Действительно, если бы к элементу извне подводился ток, то можно было бы найти величины «усилий» в элементе.

Для составления ансамбля следует сделать предположение о непрерывности потенциала в узловых точках и учесть баланс токов. Если теперь  $P_i$  обозначает внешний входящий ток в точке  $i$ , то придем к уравнению, аналогичному (1.11):

$$P_i = \sum_{m=1}^{m=h} \sum k_{im}^e V_m. \quad (1.19)$$

Второе суммирование проводится здесь по всем элементам. Для всей совокупности узлов имеем

$$\{P\} = [K] \{V\}, \quad (1.20)$$

где

$$k_{ij} = \sum k_{ij}^e.$$

Здесь скобки опущены, так как такие величины, как напряжение и ток, а следовательно, и коэффициенты матрицы «жесткости» являются скалярными величинами.

Если вместо сопротивлений рассмотреть ламинарное течение жидкости в трубах, то опять можно получить то же уравнение, но  $V$  будет представлять собой гидравлический напор, а  $I$  — расход жидкости.

Для встречающихся на практике систем трубопроводов линейные законы, вообще говоря, несправедливы. Как правило, соотношение между напором и расходом имеет вид

$$I_t = c (V_i - V_f)^\gamma, \quad (1.21)$$

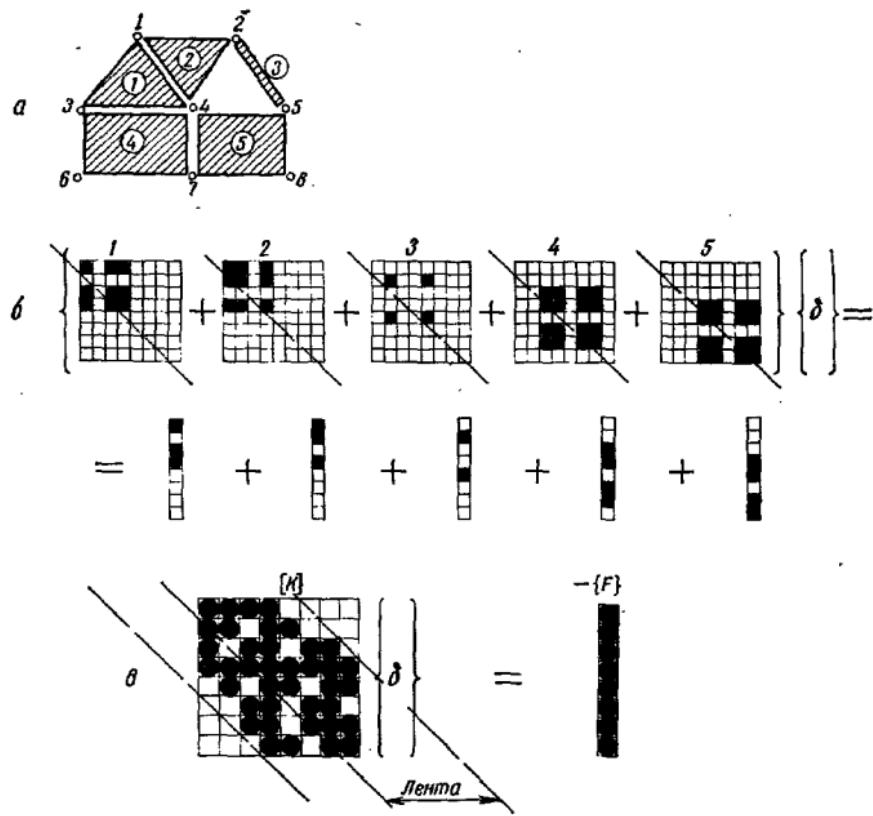
где показатель  $\gamma$  изменяется в пределах между 0,5 и 0,7. Но и в этом случае основные соотношения можно записать в форме (1.18) с той лишь разницей, что матрицы  $k^e$  представляют собой уже не массивы констант, а известные функции от  $\{V\}$ . Эти уравнения можно объединить для всего ансамбля, но они уже будут нелинейными. В общем случае их можно решить одним из итерационных методов.

Наконец, упомянем о более общей форме электрической цепи переменного тока. Зависимости между током и напряжением для таких цепей обычно записываются в комплексной форме, причем сопротивление заменяется комплексным сопротивлением. Таким образом, опять будут получены соотношения в стандартной форме (1.18) — (1.20), причем каждая величина будет иметь действительную и минимую части.

При решении такого рода задач можно использовать обычные методы, рассматривая каждое соотношение отдельно для действительных и мнимых частей. Кроме того, современные цифровые вычислительные машины позволяют использовать стандартные приемы программирования операций с комплексными числами. В одной из последующих глав, посвященной вопросам колебаний, мы коснемся некоторых задач этого класса.

### 1.6. Общая схема исследования

Для того чтобы читатель мог лучше разобраться в изложенном материале, рассмотрим следующий пример. На фиг. 1.4, а



Фиг. 1.4 Пример.

изображено пять взаимосвязанных элементов. Это могут быть элементы конструкции, электрической цепи или элементы любого другого линейного типа. Решение задачи состоит из нескольких этапов,

*Первый этап* заключается в определении свойств элемента на основании исходных данных о его геометрии, материале и нагрузке. Для каждого элемента матрица жесткости и соответствующие узловые силы находятся в виде (1.3). Каждый элемент имеет свой собственный номер и узловые точки.

Например, элемент 1 связан с другими в узлах 1, 3, 4, элемент 2 — в узлах 1, 4, 2, элемент 3 — в узлах 2, 5, элемент 4 — в узлах 3, 4, 6, 7, элемент 5 — в узлах 4, 7, 8, 5. Определяя характеристики элемента в глобальных координатах, мы можем ввести каждую компоненту жесткости или силы на соответствующее место в глобальной матрице, как это показано на фиг. 1.4, б. Каждый зачерненный квадрат соответствует одному коэффициенту или подматрице типа  $[k_{ij}]$  (если рассматривается более одной компоненты силы). Здесь же показан вклад каждого элемента, и читатель может проверить правильность расположения коэффициентов. Заметим, что использование различных типов элементов не создает дополнительных трудностей. (Для простоты все силы, включая узловые, отнесены к соответствующим элементам.)

*Второй этап* — это составление полной системы уравнений типа (1.12). Она получается непосредственно путем использования соотношений (1.13) и простого суммирования всех составляющих по элементам в глобальной матрице. Результат показан на фиг. 1.4, в, где места расположения ненулевых коэффициентов зачернены.

В силу симметрии матрицы достаточно определить только элементы, расположенные на главной диагонали и над ней.

Все ненулевые коэффициенты расположены внутри ленты, ширина которой может быть определена *aприори* для каждого вида узловых соединений. Таким образом, в оперативной памяти требуется хранить только те элементы, которые находятся в верхней части ленты. Они показаны на фиг. 1.4, в.

*Третий этап* состоит во включении в полную матрицу системы заданных граничных условий. Способ включения рассмотрен в разд. 1.3.

*Заключительный этап* — решение полученной системы уравнений. Для решения могут быть использованы различные методы, некоторые из которых обсуждаются в гл. 20. Хотя вопрос решения уравнений и является чрезвычайно важным, он выходит, вообще говоря, за рамки этой книги.

Далее вычисляются напряжения, токи и другие *выходные величины*.

Любой расчет сетей осуществляется по намеченным этапам, которые должны быть хорошо поняты читателем. Хотя, безусловно, эти этапы важны для понимания метода конечных элементов, они, однако, не составляют его сути. Эти этапы хорошо

известны и обычно используются в строительной механике. Остальная часть книги посвящена методу приближенного представления сплошной среды эквивалентной системой конечных элементов. Если такое представление возможно, то описанная схема позволит осуществить расчет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P., Young D. H., Theory of Structures, 2nd ed., McGraw-Hill, 1965.
2. Livesley R. K., Matrix Methods in Structural Analysis, Pergamon Press, 1964.
3. Przemieniecki J. S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968.
4. Martin H. C., Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGraw-Hill, 1966.
5. Jenkins W. M., Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis, McGraw-Hill, 1969.
6. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aero. Sci.*, 23, 805—823 (1956).
7. Payne N. A., Irons B., частное сообщение, 1963.

## ГЛАВА 2

# КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ УПРУГОЙ СРЕДЫ. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 2.1. Введение

Часто для различных инженерных целей требуется знание распределения напряжений и деформаций в упругой сплошной среде. Тогда предметом исследования являются двумерные задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состоянии, задачи об осесимметричных телах, об изгибе пластин и оболочек и наконец, исследование трехмерных твердых тел. Во всех случаях число связей между любым конечным элементом, ограниченным воображаемыми поверхностями, и соседними элементами бесконечно. Поэтому с первого взгляда трудно понять, каким образом такие задачи можно дискретизировать, как это было сделано в предыдущей главе для простейших конструкций. Эта трудность преодолевается следующим образом.

1. Сплошная среда разделяется воображаемыми линиями или поверхностями на некоторое количество конечных элементов.

2. Предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на их границах. Так же, как в обычных задачах строительной механики, основными неизвестными будут перемещения этих узловых точек.

3. Выбирается система функция, однозначно определяющая перемещения внутри каждого конечного элемента через перемещения узловых точек.

4. Функции перемещений однозначно определяют деформации внутри элемента через узловые перемещения. Эти деформации при известных начальных деформациях и упругих свойствах элемента позволяют определить напряжения как внутри элемента, так и на его границах.

5. Определяется система сил, сосредоточенных в узлах и уравновешивающих напряжения на границе и некоторые распределенные нагрузки, а затем записывается соотношение для жесткостей в форме (1.3).

Далее могут быть использованы обычные методы решения задач строительной механики, описанные ранее. Очевидно, что такой подход является приближенным. Во-первых, не всегда легко добиться, чтобы выбранные функции перемещений удовлетворяли требованиям непрерывности перемещений между смежными элементами. В результате на границах элементов могут

нарушаться условия совместности (хотя в пределах каждого элемента эти условия, очевидно, удовлетворяются при однозначности функций перемещений). Во-вторых, сосредоточивая эквивалентные усилия в узлах, мы только в среднем удовлетворяем уравнениям равновесия. Обычно возникает локальное нарушение уравнений равновесия внутри элементов и на их границах.

Выбор формы элемента и функций перемещений для конкретных задач зависит от изобретательности и мастерства инженера, и совершенно ясно, что именно этим определяется точность приближенного решения.

Изложенный здесь подход известен как метод перемещений [1, 2]. До сих пор обоснование метода было нестрогим, хотя, в сущности, этот метод эквивалентен минимизации полной потенциальной энергии системы, выраженной через поле перемещений. При подходящем выборе поля перемещений решение должно сходиться к точному. Этот процесс эквивалентен хорошо известному методу Ритца, что будет показано в одном из последующих разделов этой главы. Там же будут рассмотрены необходимые критерии сходимости.

Эквивалентность метода конечных элементов процессу минимизации была замечена недавно [2, 3]. Однако еще Курант в 1943 г. [4] и Праггер и Синг в 1947 г. [5] предложили, по существу, идентичный метод. Более широкое обоснование метода позволит распространить его почти на все задачи, для которых возможна вариационная постановка. В этой книге будут рассмотрены некоторые такие задачи, не имеющие отношения к строительной механике.

## 2.2. Описание свойств конечного элемента

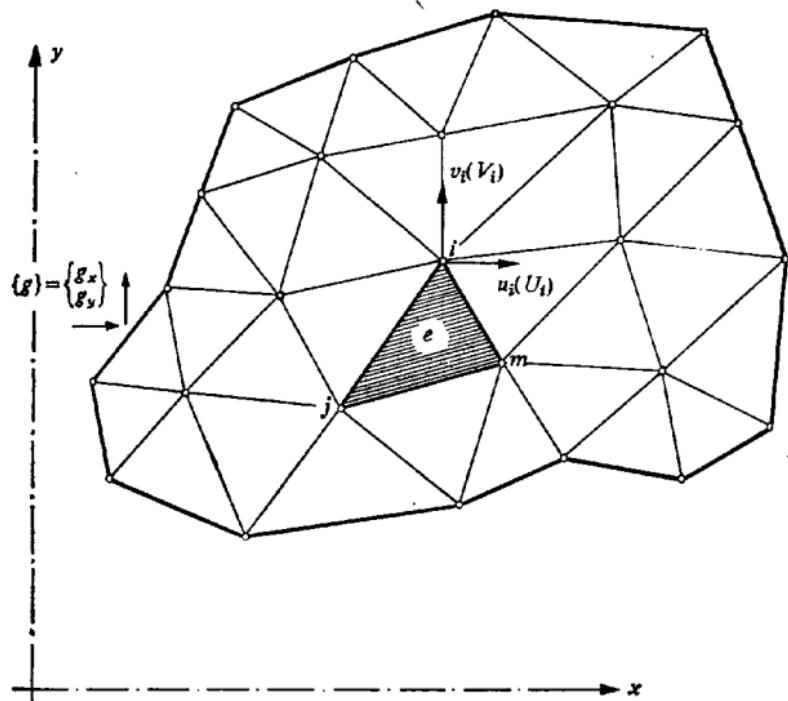
Правила получения характеристик конечного элемента сплошной среды, описанные ранее схематично, теперь будут изложены в более подробной математической форме.

Желательно получить результаты в общем виде, справедливом для любого случая. Однако чтобы облегчить понимание общих соотношений, они будут проиллюстрированы на очень простом примере плоского напряженного состояния тонкой пластины<sup>1)</sup>. В этом примере использованы элементы треугольной формы, показанные на фиг. 2.1. Соотношения общего характера напечатаны полужирным шрифтом, а выражения, соответствующие частному примеру, — нормальным. Как и ранее, используется матричная форма записи:

<sup>1)</sup> В действительности будет рассмотрено обобщенное плоское напряженное состояние. — Прим. ред.

### 2.2.1. Функция перемещений

Типичный конечный элемент  $e$  определяется узловыми точками  $i, j, m$  и т. д. и прямолинейными границами. Пусть пере-



Фиг. 2.1. Плоская область, разбитая на конечные элементы.

мешения любой точки внутри элемента задаются вектор-столбцом

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \\ \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

где компоненты  $[N]$  являются в общем случае функциями положения, а  $\{\delta\}^e$  представляют собой перемещения узловых точек рассматриваемого элемента.

В случае плоского напряженного состояния вектор-столбец

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

содержит горизонтальное и вертикальное перемещения типичной точки внутри элемента, а столбец

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

содержит соответствующие перемещения узла  $i$ .

Функции  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_m$  должны быть выбраны таким образом, чтобы при подстановке в (2.1) координат узлов получались соответствующие узловые перемещения. Очевидно, что в общем случае

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (единичная матрица),}$$

тогда как

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0 \text{ и т. д.,}$$

что, в частности, достигается соответствующим выбором линейных относительно  $x$  и  $y$  функций. Более подробно вопрос о выборе функций  $[N]$  будет рассмотрен в одной из последующих глав.

Функции  $[N]$  называются *функциями формы*. Они, как будет видно из дальнейшего, играют важную роль в методе конечных элементов.

## 2.2.2. Деформации

Если известны перемещения во всех точках элемента, то в них можно также определить и деформации<sup>1)</sup>. Они находятся с помощью соотношения, которое в матричной форме может быть записано в виде

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}] \{\delta\}^e. \quad (2.2)$$

В случае плоского напряженного состояния представляют интерес деформации в плоскости, которые определяются через перемещения с помощью хорошо известных соотношений [6]<sup>2)</sup>

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}.$$

<sup>1)</sup> Здесь под деформациями понимаются любые внутренние дисторсии, такие, например, как кривизна в плоской задаче.

<sup>2)</sup> Для того чтобы строки первого столбца образовывали ортогональный тензор, необходимо третью строку второго столбца умножить на  $\frac{1}{2}$ . — Прим. ред.

Матрица  $[B]$  легко может быть получена из соотношения (2.1), если известны функции формы  $N_i$ ,  $N_j$  и  $N_m$ . В том случае, когда эти функции линейные, деформации постоянны по всему элементу.

### 2.2.3. Напряжения

В общем случае материал, находящийся внутри элемента, может иметь начальные деформации, обусловленные температурными воздействиями, усадкой, кристаллизацией и т. п. Если обозначить эти деформации через  $\{\varepsilon_0\}$ , то напряжения будут определяться разностью между существующими и начальными деформациями.

Кроме того, удобно предположить, что в рассматриваемый момент времени в теле существуют некоторые остаточные напряжения  $\{\sigma_0\}$ , которые, например, можно замерить, но нельзя предсказать без знания полной истории нагружения материала. Эти напряжения можно просто добавить к общему выражению. Таким образом, в предположении упругого поведения соотношения между напряжениями и деформациями будут линейными:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (2.3)$$

где  $[D]$  — матрица упругости, содержащая характеристики материала.

Для частного случая плоского напряженного состояния необходимо рассмотреть три компоненты напряжений, соответствующие введенным деформациям. В принятых обозначениях они записываются в виде

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Матрица  $[D]$  легко получается из обычных соотношений между напряжениями и деформациями для изотропного материала [6]:

$$\varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y,$$

$$\varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y,$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.$$

Отсюда

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

### 2.2.4. Эквивалентные узловые силы

Пусть столбец

$$\{\mathbf{F}\}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_t \\ \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

определяет узловые силы, которые статически эквивалентны граничным напряжениям и действующим на элемент распределенным нагрузкам. Каждая из сил  $\{\mathbf{F}_i\}$  должна иметь столько же компонент, сколько и соответствующее узловое перемещение  $\{\delta_i\}$ , и действовать в соответствующем направлении.

Распределенные нагрузки  $\{\rho\}$  определяются как нагрузки, приходящиеся на единицу объема материала элемента и действующие в направлениях, соответствующих направлениям перемещений  $\{\delta\}$  в этой точке.

В частном случае плоского напряженного состояния узловые силы записываются в виде

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix},$$

где  $U$  и  $V$  — компоненты, соответствующие перемещениям  $u$  и  $v$ . Распределенная нагрузка имеет вид

$$\{\rho\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix},$$

где  $X$  и  $Y$  — компоненты «объемных сил».

Простейший способ сделать узловые силы статически эквивалентными действующим граничным напряжениям и распределенным нагрузкам состоит в задании произвольного (виртуального) узлового перемещения и приравнивании внешней и внутренней работ, совершаемых различными силами и напряжениями на этом перемещении.

Пусть  $\mathbf{d}\{\delta\}^e$  — виртуальное перемещение в узле. С помощью соотношений (2.1) и (2.2) получим соответственно перемещения и деформации элемента в виде

$$\mathbf{d}\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{N}] \mathbf{d}\{\delta\}^e \text{ и } \mathbf{d}\{\epsilon\} = [\mathbf{B}] \mathbf{d}\{\delta\}^e. \quad (2.4)$$

Работа, совершаемая узловыми силами, равна сумме произведений компонент каждой силы на соответствующие перемещения, т. е. в матричном виде

$$(\mathbf{d}\{\delta\}^e)^T \cdot \{\mathbf{F}\}^e. \quad (2.5)$$

Аналогично внутренняя работа напряжений и распределенных сил, приходящаяся на единицу объема, равна

$$\mathbf{d}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} - \mathbf{d}\{\mathbf{f}\}^T \{\mathbf{p}\} \quad (2.6)$$

или<sup>1)</sup>

$$(\mathbf{d}\{\boldsymbol{\delta}\}^e)^T ([\mathbf{B}]^T \{\sigma\} - [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\}). \quad (2.7)$$

Приравнивая работу внешних сил суммарной внутренней работе, получаемой интегрированием по объему элемента, имеем

$$(\mathbf{d}\{\boldsymbol{\delta}\}^e)^T \{\mathbf{F}\}^e = (\mathbf{d}\{\boldsymbol{\delta}\}^e)^T \left( \int [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} dV - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} dV \right). \quad (2.8)$$

Так как это соотношение справедливо для любого виртуального перемещения, коэффициенты в правой и левой частях должны быть равны. После подстановки (2.2) и (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\}^e = & \left( \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{\boldsymbol{\delta}\}^e - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV + \\ & + \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} dV. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эта зависимость является одной из основных характеристик любого элемента. В гл. 1 она приводилась в форме соотношения (1.3). Матрица жесткости принимает вид

$$[\mathbf{k}]^e = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV. \quad (2.10)$$

Узловые силы, обусловленные распределенными нагрузками, имеют вид

$$\{\mathbf{F}\}_p^e = - \int [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} dV, \quad (2.11)$$

а силы, обусловленные начальной деформацией, выражаются как

$$\{\mathbf{F}\}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}^e = - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV. \quad (2.12)$$

Узловые силы, соответствующие начальным напряжениям, записываются в виде

$$\{\mathbf{F}\}_{\boldsymbol{\sigma}_0}^e = \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV. \quad (2.13)$$

Если система начальных напряжений самоуравновешена, то после составления ансамбля силы, определяемые соотношением

<sup>1)</sup> Заметим, что в соответствии с правилами матричной алгебры транспонирование произведения матриц осуществляется по формуле  $([A][B])^T = [B]^T[A]^T$ .

(2.13), тождественно равны нулю. Поэтому обычно оценка компонент этих сил не проводится. Однако если, например, часть изучаемой конструкции выполнена из монолита, в котором существуют остаточные напряжения, или если исследуются выработки горной породы, в которой заданы тектонические напряжения, то необходимо учитывать, что удаление материала может вызвать нарушение силового баланса.

При использовании треугольного элемента в задачах о плоском напряженном состоянии основные характеристики получаются после соответствующей подстановки. Как уже было отмечено, в этом случае матрица  $[B]$  не зависит от координат и интегрирование выполняется тривиально.

Составление ансамбля и дальнейшее решение производятся с помощью простой процедуры, описанной в гл. 1. В общем случае в узлах могут быть приложены сосредоточенные внешние силы. Тогда для сохранения равновесия в узлах следует дополнительно ввести матрицу сил

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Сделаем еще замечание по поводу элементов, соприкасающихся с границей. Если на границе заданы перемещения, то никаких затруднений не возникает. Рассмотрим, однако, случай, когда на границе задана распределенная внешняя нагрузка, скажем, нагрузка  $\{g\}$  на единицу площади. Тогда в узлах граничного элемента следует приложить дополнительную нагрузку. Это просто сделать, используя принцип виртуальной работы:

$$\{F\}_b^e = - \int [N]^T \{g\} dS, \quad (2.15)$$

где интегрирование проводится по границе элемента. Заметим, что для того, чтобы записанное выше выражение было справедливо,  $\{g\}$  должно иметь такое же число компонент, как и  $\{f\}$ .

На фиг. 2.1 показан граничный элемент для случая плоского напряженного состояния. Интегрирование в (2.15) редко удается выполнить точно. Часто из физических соображений поверхностная нагрузка просто заменяется приложенными в граничных узлах сосредоточенными силами, которые определяются из условий статического равновесия. Для рассматриваемого частного случая результаты будут эквивалентны.

После того как из решения общей системы уравнений (типа встречающихся в строительной механике) определены узловые

перемещения, из соотношений (2.2) и (2.3) могут быть найдены напряжения в любой точке элемента

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\delta\}^e - [\mathbf{D}] \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}. \quad (2.16)$$

В этом выражении нетрудно узнать типичные члены соотношения (1.4), причем матрица напряжений элемента имеет вид

$$[\mathbf{S}]^e = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]. \quad (2.17)$$

К этой матрице должны быть добавлены напряжения

$$\{\sigma_{\epsilon_0}\} = -[\mathbf{D}] \{\epsilon_0\} \text{ и } \{\sigma_0\}. \quad (2.18)$$

Отсутствие составляющей напряжения, вызванного распределенной нагрузкой  $\{\sigma\}_p^e$ , объясняется тем, что рассматриваются только условия общего равновесия, а не равновесия внутри каждого элемента.

### 2.2.5. Обобщенный характер перемещений, деформаций и напряжений

Физический смысл перемещений, деформаций и напряжений в рассмотренном случае плоского напряженного состояния был очевиден. Во многих других приложениях, приведенных ниже, эта же терминология может быть применена к другим физически менее наглядным величинам. Например, в рассматриваемом плоском элементе термин «перемещение» может обозначать прогиб и наклон в данной точке. Тогда «деформациями» будут кривизны срединной поверхности, а «напряжениями» — внутренние изгибающие моменты.

Все полученные здесь выражения справедливы и в общем случае при условии, что сумма произведений перемещений на соответствующие компоненты нагрузок определяет внешнюю работу, тогда как сумма произведений деформации на соответствующие компоненты напряжений — внутреннюю работу.

## 2.3. Обобщение на всю область.

### Отказ от понятия внутренних узловых сил

В предыдущем разделе принцип виртуальной работы был применен к отдельному элементу и введено понятие эквивалентной узловой силы. Для ансамбля в целом, очевидно, можно использовать подход, основанный непосредственно на представлении о равновесии.

Идею описания взаимодействия элементов с помощью узловых сил математически трудно обосновать, хотя она очень привлекательна с точки зрения инженеров и допускает наглядную

интерпретацию. Тем не менее нет необходимости рассматривать каждый элемент в отдельности; рассуждения предыдущего разделя можно непосредственно применить ко всему сплошному телу.

Можно считать, что соотношение (2.1) относится ко всей конструкции, т. е. что

$$\{f\} = [\bar{N}] \{\delta\}, \quad (2.19)$$

где столбец  $\{\delta\}$  содержит все узловые точки, а

$$\bar{N}_i = N_i^e, \quad (2.20)$$

если рассматриваемая точка принадлежит элементу  $e$ , т. е. точка  $i$  сопряжена с этим элементом. Если точка  $i$  не принадлежит рассматриваемому элементу, то

$$\bar{N}_i = 0. \quad (2.21)$$

Аналогично определяется матрица  $[\bar{B}]$ . Затем принцип виртуальной работы может быть применен ко всей конструкции. Теперь нет необходимости рассматривать силы взаимодействия между элементами, и внешняя работа на виртуальных перемещениях  $d\{\delta\}$  всех узлов становится равной

$$d\{\delta\}^T \{R\} - \int_V d\{f\}^T \{p\} dV - \int_S d\{f\}^T \{g\} dS, \quad (2.22)$$

а внутренняя виртуальная работа принимает вид

$$\int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (2.23)$$

где интеграл берется по всей области. После учета

$$d\{f\} = [\bar{N}] d\{\delta\}, \quad d\{\varepsilon\} = [\bar{B}] d\{\delta\}, \quad (2.24)$$

а также выражения (2.3) и приравнивания внутренней и внешней работ, получаем

$$[K]\{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{e_0} + \{F\}_{\sigma_0} - \{R\} = 0. \quad (2.25)$$

Произвольный элемент матрицы жесткости имеет вид

$$[K_{ij}] = \int [\bar{B}_i] [D] [\bar{B}_j] dV, \quad (2.26)$$

где интеграл берется по всей области.

Учитывая соотношение между  $[\bar{B}]_i$  и  $[B]_i$ , имеем

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e, \quad (2.27)$$

где оценивается вклад каждого элемента, как это описано в предыдущем разделе.

Легко показать справедливость аналогичных выражений для различных компонент сил, входящих в уравнение (2.25).

Таким образом, при составлении ансамбля, как и ранее, мы не пользовались понятием межэлементных сил. В дальнейшем в этой главе индекс элемента  $e$  будем опускать, за исключением некоторых частных случаев. Кроме того, мы не будем делать различия между функциями формы для элемента и всей системы.

Необходимо обратить внимание на один важный момент. Рассматривая виртуальную работу системы в целом [выражение (2.23)] и приравнивая ее сумме работ каждого из элементов, мы тем самым предполагаем, что между элементами нет разрывов. Если такие разрывы возникают, то следует добавить работу напряжений в местах разрывов.

Таким образом, поле перемещений, определяемое функциями формы, должно быть таким, чтобы на поверхностях разрыва деформации были ограниченными. Следовательно, для того чтобы общие уравнения были справедливы, перемещения должны быть непрерывными функциями. Об этом необходимом условии будет сказано ниже.

#### 2.4. Метод перемещений как минимизация полной потенциальной энергии

Принцип виртуальных перемещений, использованный в предыдущих разделах, обеспечивает выполнение условий равновесия в определенных пределах, зависящих от выбранной формы перемещений. Равновесие будет полным только тогда, когда виртуальные работы равны при произвольных вариациях перемещений (удовлетворяющих только граничным условиям)<sup>1)</sup>.

Если количество параметров  $\{\delta\}$ , описывающих перемещение, неограниченно возрастает, то условия равновесия могут быть удовлетворены.

Принцип виртуальной работы может быть сформулирован в различной форме. Приравнивая выражения (2.22) и (2.23), можно записать

$$\int d\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \left[ d\{\delta\}^T R + \int d\{f\}^T \{p\} dV + \int d\{f\}^T \{g\} dS \right] = 0. \quad (2.28)$$

<sup>1)</sup> Такие перемещения называются кинематически допустимыми. — Прим. ред.

Первый член в этом уравнении соответствует вариации энергии деформации  $U$  конструкции, а второй — вариации потенциальной энергии  $W$  внешней нагрузки<sup>1)</sup>. Тогда вместо уравнения (2.28) имеем

$$d(U + W) = d(\chi) = 0, \quad (2.29)$$

где величина  $\chi$  называется *полной потенциальной энергией*. Это означает, что для обеспечения равновесия полная потенциальная энергия должна принимать стационарное значение. Система уравнений метода конечных элементов (2.25), полученная выше, является, по существу, отражением того, что варьирование перемещений осуществляется по конечному числу параметров  $\{\delta\}$ . Эта система может быть записана в виде

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \delta_2} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.30)$$

Можно показать, что для упругого материала полная потенциальная энергия не только стационарна, но и минимальна [7]. Таким образом, при использовании метода конечных элементов отыскивается минимум полной потенциальной энергии среди возможных перемещений заданной формы.

Чем больше степеней свободы имеет система, тем точнее будет приближенное решение, которое в пределе стремится к точному, соответствующему истинному равновесию. Таким образом, теперь можно сформулировать необходимые условия сходимости метода конечных элементов. Обсуждение этих условий перенесем, однако, в следующий раздел.

Интересно отметить, что если истинное равновесие требует абсолютного минимума полной потенциальной энергии  $\chi$ , то приближенное решение, полученное методом конечных элементов, будет давать всегда завышенное значение  $\chi$ . Таким образом, предельное значение полной потенциальной энергии всегда может быть оценено.

Если бы функция  $\chi$  была известна *a priori*, то уравнения метода конечных элементов можно было бы получить непосредственным дифференцированием в соответствии с (2.30).

Подставляя в (2.28) определяющее уравнение теории упругости (2.3) и полагая, что нагрузки не зависят от перемещений,

<sup>1)</sup> Если внешняя нагрузка обладает потенциалом, эти выражения могут рассматриваться как полные дифференциалы.

после интегрирования получаем

$$\left[ \frac{1}{2} \int \{\mathbf{e}\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{e}\} dV - \int \{\mathbf{e}\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{e}_0\} dV + \int \{\mathbf{e}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV \right] - \left[ \{\delta\}^T \{\mathbf{R}\} + \int \{\mathbf{f}\}^T \{\mathbf{p}\} dV + \int \{\mathbf{f}\}^T \{\mathbf{g}\} dS \right] = \chi. \quad (2.31)$$

В этом соотношении выражение в первых квадратных скобках соответствует величине  $U$ , а во вторых —  $W$ . На практике выражение для полной потенциальной энергии обычно записывается сразу, что часто более удобно для метода конечных элементов. Читатель может убедиться в этом, если в качестве упражнения получит точные соотношения метода конечных элементов предыдущего раздела, исходя из уравнения (2.31) и дифференцируя по перемещениям, определяемым в соответствии с (2.19).

В хорошо известном приближенном методе Релея — Ритца [8, 9], часто применяемом для решения задач теории упругости, используется именно этот подход. Записывается выражение полной энергии и полагается, что форма перемещений зависит от конечного числа неизвестных параметров. Далее выводится система уравнений из условия минимума полной потенциальной энергии по этим параметрам. Таким образом, метод конечных элементов в изложенной постановке эквивалентен методу Релея — Ритца. Разница состоит только в способе задания перемещений. В методе Ритца они обычно задаются функциями, определенными на всей области и приводящими, следовательно, к системе уравнений, которая имеет заполненную, а не ленточную матрицу коэффициентов. В методе конечных элементов перемещения задаются поэлементно. Каждый узловой параметр связан только с примыкающими к этому узлу элементами, и в результате получается малозаполненная, обычно ленточная матрица коэффициентов.

Применения обычного метода Ритца ограничиваются относительно простыми геометрическими формами области, тогда как в методе конечных элементов простую форму должны иметь только элементы.

Еще одно различие состоит в том, что в методе конечных элементов неизвестными обычно являются узловые перемещения. Это допускает простую физическую интерпретацию. Своей популярностью метод конечных элементов в значительной степени, несомненно, обязан именно этому факту.

## 2.5. Критерий сходимости

Действительный минимум энергии никогда не может быть достигнут ни при каком числе разбиений, так как задание функций формы ограничивает число степеней свободы системы.

Чтобы гарантировать сходимость процесса к точному решению, необходимо удовлетворить некоторым простым требованиям. Например, очевидно, что функция перемещений должна как можно точнее описывать истинные перемещения. Нельзя выбирать функции, которые допускают деформацию элемента при перемещении его только как жесткого тела. Таким образом, первый критерий, которому должна удовлетворять функция перемещений, формулируется следующим образом:

**Критерий 1.** Функция перемещений должна быть выбрана таким образом, чтобы не возникала деформация элемента при узловых перемещениях, вызванных его смещением как жесткого тела.

Это очевидное условие может быть легко нарушено при использовании некоторых типов функций. Поэтому при выборе функций перемещений следует соблюдать осторожность.

Второй критерий основывается на аналогичных требованиях. Ясно, что при уменьшении размеров элементов деформация в них будет стремиться к постоянной. Если в теле возникает однородная деформация, то желательно, чтобы она была такой и при достаточно больших размерах элементов. Можно подобрать функции, которые удовлетворяют первому критерию, но дают переменные по элементу деформации при узловых перемещениях, соответствующих условию постоянной деформации. Такие функции в общем случае не дадут хорошей сходимости и не смогут даже в пределе описать истинное распределение напряжений. Итак, второй критерий может быть сформулирован следующим образом:

**Критерий 2.** Функция перемещений должна быть такой, чтобы в случае, когда узловые перемещения соответствуют условию постоянной деформации, это состояние действительно реализовывалось в элементе (здесь опять подразумевается обобщенная деформация).

Следует отметить, что критерий 2 согласуется с требованием критерия 1, так как перемещение элемента как жесткого тела есть частный случай постоянной (нулевой) деформации. Этот критерий впервые был предложен Базелем и др. [10] в 1965 г.

Наконец, как уже было упомянуто в разд. 2.3, неявно подразумевается, что границы раздела между элементами не дают никакого вклада в виртуальную работу. Как следствие появляется необходимость ввести следующий критерий:

**Критерий 3.** Функции перемещений должны быть выбраны так, чтобы деформации на границах между элементами были конечными (даже если они там не определены).

Этот критерий означает непрерывность перемещений на границе между элементами. В случае когда деформации определяются через первые производные, как в приведенной здесь

в качестве примера плоской задаче, непрерывными должны быть только перемещения. Если же, однако, деформации определяются вторыми производными, как в задачах о пластинках и оболочках, то должны быть непрерывными также и первые производные от перемещений [2].

Последний критерий математически означает требование «полноты функций», с которым читатель может более глубоко познакомиться, например, по работам [11—15]. Эвристическое доказательство условий сходимости, данное здесь, вполне достаточно для практических целей, за исключением самых необычных случаев.

## **2.6. Функции перемещений с разрывами между элементами**

В некоторых случаях возникают существенные трудности при выборе функций перемещений элемента, которые были бы непрерывными по всей его границе со смежными элементами.

Как уже указывалось, разрывность перемещений приведет к бесконечным деформациям на границах между элементами. Этот факт не учитывался ранее, поскольку предполагалось, что вклад в энергию вносят только сами элементы.

Однако если в пределе при уменьшении размеров элементов непрерывность восстанавливается, то мы все же придем к правильному результату. Это условие практически выполняется, если:

- условие постоянной деформации автоматически гарантирует непрерывность перемещений;
- выполняется критерий предыдущего раздела о постоянной деформации.

В некоторых задачах, рассмотренных в этой книге, с успехом будут использоваться разрывные функции перемещений такого типа. Однако при этом нельзя уже оценить значения функционала энергии.

## **2.7. Предельное значение энергии деформации при использовании метода перемещений**

Хотя приближенное решение, полученное методом перемещений, всегда дает завышенное значение полной потенциальной энергии  $\chi$  (абсолютный минимум которой соответствует точному решению), знания этого иногда бывает недостаточно для практики. В некоторых случаях, однако, можно получить более удобную оценку.

Рассмотрим, в частности, задачу, в которой отсутствуют начальные деформации или начальные напряжения. В соответ-

ствии с принципом сохранения энергии энергия деформации должна быть равна работе внешних сил, равномерно возрастающих от нуля [16]. Эта работа равна  $-1/2W$ , где  $W$  — потенциальная энергия нагрузок.

Таким образом,

$$U + \frac{1}{2} W = 0 \quad (2.32)$$

или

$$\chi = U + W = -U \quad (2.33)$$

на истинном или приближенном поле перемещений.

Следовательно, в данном случае приближенное решение всегда *занижает* значение  $U$  и получение перемещение часто рассматривается как *нижняя граница решения*.

В случае когда задана только внешняя сосредоточенная нагрузка  $R$ , можно сделать вывод, что величина смещения при действии этой нагрузки будет занижена (так как  $U = -1/2W = -1/2R\delta$ ). При сложном нагружении эта оценка не всегда применима, поскольку для величин, представляющих практический интерес, т. е. смещений и напряжений, не удается установить определенных пределов.

Важно помнить, что оценка энергии деформации справедлива только при условии отсутствия начальных напряжений или деформаций.

Выражение для  $U$  в этом случае может быть получено из соотношения (2.31) в виде

$$U = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV,$$

а с помощью формулы (2.2) оно преобразуется в

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \left[ \int [B]^T [D] [B] dV \right] \{\delta\} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\},$$

где квадратная матрица  $[K]$  — ранее рассматривавшаяся матрица жесткости.

Приведенное выражение для энергии всегда положительно, что следует из физического смысла этой величины. Поэтому матрица  $[K]$ , вводимая при применении метода конечных элементов, является не только симметричной, но и положительно определенной (т. е. квадратичная форма, связанная с этой матрицей, всегда больше нуля или равна нулю).

Это свойство особенно важно при использовании численных методов решения систем уравнений, так как при этом возможны некоторые упрощения.

## 2.8. Прямая минимизация

Тот факт, что метод конечных элементов сводится к минимизации полной потенциальной энергии  $\chi$ , выраженной через конечное число узловых параметров, позволяет получить систему уравнений, символически записанную в виде (2.30). Это наиболее часто применяемый подход, особенно в линейных задачах. Однако для оценки нижней границы значения  $\chi$  могут быть использованы и другие, хорошо разработанные к настоящему времени методы исследования в области оптимизации процессов. В этой книге мы будем придерживаться первого способа минимизации, хотя можно использовать и другие методы [17, 18].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Clough R. W., The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd A. S. C. E. Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 1960.
2. Clough R. W., The Finite Element Method in Structural Mechanics, Ch. 7 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
3. Szmelter J., The Energy Method of Networks of Arbitrary Shape in Problems of the Theory of Elasticity, Proc. IUTAM. Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Olszak W., ed., Pergamon Press, 1959.
4. Courant R., Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration, *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, 1—23 (1943).
5. Prager W., Synge J. L., Approximation in Elasticity Based on the Concept of Function Space, *Quart. Appl. Math.*, 5, 241—269 (1947).
6. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
7. Washizu K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
8. Strutt J. W. (Lord Rayleigh), On the Theory of Resonance, *Trans. Roy. Soc. (London)*, A181, 77—118 (1870).
9. Ritz W., Über eine Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik, *J. Reine und Angew. Math.*, 135, 1—61 (1909).
10. Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Triangular Elements in Bending—Conforming and Non-Conforming Solutions, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base Ohio, 1965.
11. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратного функционала, ГИТЛ, М.-Л., 1952.
12. Johnson W. M., McLay R. W., Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity, *J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 274—278 (1968); есть русский перевод: Джонсон, Маклей, Сходимость метода конечных элементов в теории упругости, Труды Американского общества инженеров-механиков, *Прикладная механика*, 35, сер. Е, № 2, стр. 68—72 (1968).
13. Key S. W., A Convergence Investigation of the Direct Stiffness Method, Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, 1966.
14. Pian T. H. H., Tong P., The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems, *Int. J. Solids Struct.*, 3, 865—880 (1967).

15. De Arrantes Oliveira E. R., Theoretical Foundations of the Finite Element Method, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 929—952 (1968).
16. De Veubeke B. F., Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, Ch. 9 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
17. Fox R. L., Stanton E. L., Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization, *JAIIA*, 6, 1036—1044 (1968); есть русский перевод: Фокс, Стэнтоу, Достижения в области расчетов на прочность прямыми методами минимизации энергии, *Ракетная техника и космонавтика*, 6, № 6, стр. 55—63 (1968).
18. Bogner F. K., Mallett R. H., Minich M. D., Schmit L. A., Development and Evaluation of Energy Search Methods in Non-Linear Structural Analysis, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.

---

## ГЛАВА 3

# ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 3.1. Вариационные задачи

К решению встречающихся в технике задач прикладной механики существуют два подхода [1]. При одном из них используются дифференциальные уравнения, описывающие поведение некоторой произвольной бесконечно малой области. Другой подход состоит в том, что постулируется вариационный экстремальный принцип, справедливый для всей области. При этом решение минимизирует некоторую величину  $\chi$ , которая определяется как некоторый интеграл от неизвестных величин по всей области. Интегральную величину  $\chi$ , представляющую собой функцию от неизвестных функций, называют функционалом.

С математической точки зрения оба эти подхода эквивалентны, и решение, полученное при одном подходе, является решением при другом подходе. Каждый из этих подходов может быть принят в качестве основного, хотя чаще используется первый. От одного подхода можно перейти к другому с помощью математических преобразований, что является предметом многочисленных книг по вариационным методам [2—4].

Различие между этими подходами состоит в способах получения приближенного решения. Конечно-разностные [5, 6] методы аппроксимируют дифференциальные уравнения разностными; метод Ритпа и его вариант — метод конечных элементов — связаны с приближенной минимизацией функционала.

В предыдущей главе было показано, что задача определения поля перемещений в конструкции сводится к задаче минимизации полной потенциальной энергии, определенной в виде функционала от перемещений. Была установлена эквивалентность метода конечных элементов методу приближенной минимизации функционала энергии по узловым перемещениям. В настоящем разделе этот вопрос будет рассмотрен в общем виде.

Пусть физическая (или чисто математическая) постановка задачи требует минимизации функционала  $\chi$  в некоторой области. Величина  $\chi$  определяется в виде интеграла по области  $V$  и части границы  $S$ , на которой неизвестны функция  $\{\phi\}$  или ее производные, т. е. она имеет вид

$$\chi = \int_V f(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\phi\}, \dots) dV + \int_S g(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\phi\}, \dots) dS. \quad (3.1)$$

Пусть рассматриваемая область разделена на более мелкие части, подобласти, которые будем далее называть элементами, и пусть функции, которые мы хотим определить, для каждого элемента записываются в виде

$$\{\phi\} = [N]\{\Phi\}^e. \quad (3.2)$$

Здесь  $\{\Phi\}^e$  может содержать узловые значения функции, соответствующие такому элементу, или некоторые характеризующие его параметры. Неизвестная функция взята в фигурные скобки, чтобы показать, что она может быть вектором, как в примере гл. 2, а  $[N]$  — матрица, определяющая зависимость функции формы от координат.

Для минимизации функционала  $\chi$  по всем параметрам  $\{\Phi\}$  полной области следует записать систему уравнений

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_2} \\ \vdots \\ \end{array} \right\} = 0. \quad (3.3)$$

Если справедливо утверждение, что функционал равен сумме вкладов отдельных элементов, т. е. что

$$\chi = \sum \chi^e, \quad (3.4)$$

то символическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_n} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial \Phi_n} = 0, \quad (3.5)$$

где суммирование производится по всем элементам. Таким образом, получено правило составления системы уравнений, минимизирующих функционал, для всего ансамбля.

В частном случае, когда  $\chi$  является квадратичным функционалом от  $\{\phi\}$  и ее производных, производную для элемента  $e$  можно записать в виде

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\Phi\}^e} = [k]^e \{\Phi\}^e + \{F\}^e, \quad (3.6)$$

где  $[k]^e$  и  $\{F\}^e$  — постоянные матрицы. Теперь систему уравнений (3.3), минимизирующую функционал, можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (3.7)$$

где

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e, \quad (3.8)$$

$$\{F_i\} = \sum \{F_i\}^e. \quad (3.9)$$

Суммирование производится по всем элементам, как и в задачах строительной механики и расчета сетей, рассмотренных в гл. 1 и 2.

### 3.2. Критерии сходимости

Для того чтобы уменьшение размеров элементов приводило к сходимости, функции, входящие в выражение (3.1), должны удовлетворять определенным требованиям полноты.

Во-первых, при уменьшении размеров элемента функции  $f$  и  $g$  в интеграле (3.1) должны оставаться однозначными и хорошо отражать физическую сущность задачи. Таким образом, необходимо удовлетворить следующему критерию:

**Критерий 1.** Функции формы элемента  $[N]$  должны быть таковы, чтобы при соответствующем выборе  $\{\Phi\}^e$  и стремлении размеров элемента к нулю можно было получить любые постоянные значения  $\{\phi\}$  или ее производных, входящих в функционал  $\chi$ .

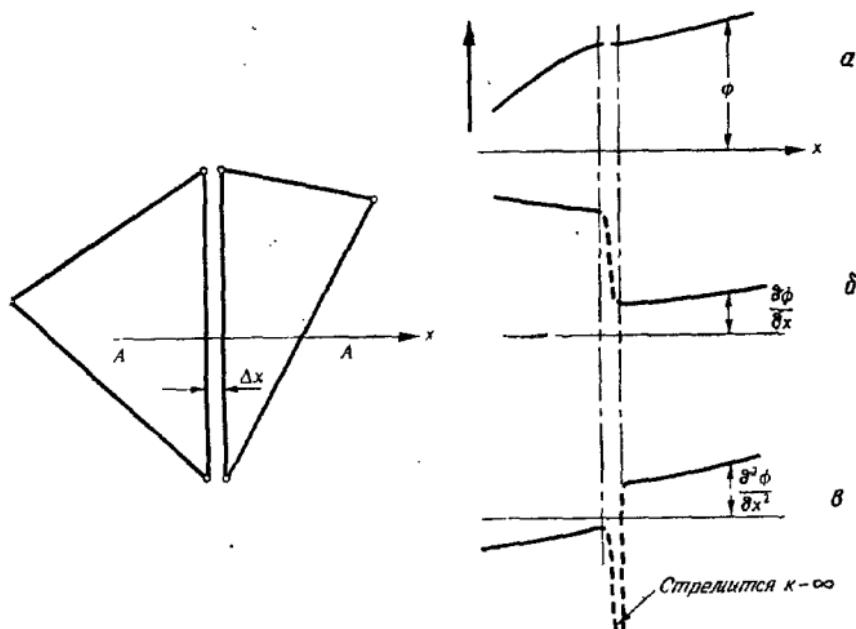
Во-вторых, должно оставаться справедливым суммирование (3.4) и, если не добавлены поверхностные интегралы по границе между элементами [7], мы должны быть уверены, что величины, подобные  $f$  и  $g$ , остаются на них ограниченными. Это возможно, если производные наивысшего порядка от  $\phi$ , входящие в выражения для функций  $f$  и  $g$ , конечны. Таким образом, можно сформулировать второй критерий.

**Критерий 2.** Функции формы элемента  $[N]$  должны быть выбраны так, чтобы  $\{\phi\}$  и ее производные, на порядок более низкие, чем производные, входящие в выражения для  $f$  и  $g$ , были непрерывны на границе между элементами.

Этот критерий несложно объяснить, если представить себе, что элементы разделяются между собой очень тонким слоем, который должен быть учтен в определяющих величину  $\chi$  интегралах и в котором происходит плавный переход между значениями неизвестных функций в смежных элементах. Если в пределе при стремлении толщины этого переходного слоя к нулю его вклад в  $\chi$  исчезает, то равенство (3.4) справедливо.

На фиг. 3.1 показана такая воображаемая переходная зона между двумя элементами. Представим себе, что скалярная функция  $\phi$  определена так, что на границе раздела между элементами ее значения, полученные для каждого из элементов, равны. На фиг. 3.1, а приведен график функции, угол наклона которой принимает в переходной зоне конечное значение, хотя и претерпевает разрыв (фиг. 3.1, б). Вторая производная в этой зоне имеет очень большое значение (фиг. 3.1, в) и стремится к бесконечности при уменьшении ширины зоны.

Следовательно, если в выражение для  $\chi$  входит только первая производная, то, для того чтобы гарантировать отсутствие вклада в  $\chi$  от переходной зоны, достаточно обеспечить непрерывность только функции  $\phi$ . Однако если в функционал входит вторая производная, то справедливость равенства (3.4) не может быть гарантирована, поскольку (из-за умножения бесконечной величины на нулевую площадь) величина вклада в энергию этой зоны становится неопределенной.



Фиг. 3.1. Межэлементная зона, в которой вторая производная непрерывной функции  $\phi$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  становится неограниченной.

Эти два критерия являются обобщением более частных критериев разд. 2.5.

Здесь под сходимостью мы понимаем следующее: при бесконечном уменьшении размеров элементов ошибки в определении величины  $\chi$  стремятся к нулю. Это иногда позволяет сказать, что решение, полученное при одном разбиении, заведомо лучше решения, полученного при другом. Очевидно, что в смысле определения величины  $\chi$  [формула (3.2)] это утверждение справедливо, если функция формы первого типа разбиения включает все функции формы второго типа разбиения. Именно такой случай возникает, когда новое разбиение получается последующим делением более крупных элементов. Сходимость по  $\chi$  при этом будет монотонной. Это обстоятельство впервые было установлено Мелошем в 1963 г. [8].

### 3.3. Переменные, не связанные с узлами<sup>1)</sup>

Важно напомнить читателю, что при определении функции формы [равенство (3.2)] указывалось, что  $\{\Phi\}^e$  содержит либо узловые значения неизвестных функций, либо некоторые параметры, характеризующие этот элемент.

Для обеспечения непрерывности функции между элементами в соответствии с требованием критерия 2 (разд. 3.2) и описания физической сущности задачи обычно рассматриваются значения величин в узловых точках. Однако всегда можно ввести дополнительные функции, принимающие нулевые значения на границах элемента и не вызывающие нарушения непрерывности, и умножить их на некоторые параметры, по которым будет минимизироваться функционал. Введение таких переменных, не связанных с узлами, может увеличить точность и иногда оказывается полезным [9].

Поскольку в общем случае эти параметры связаны только с одним элементом, минимизация по ним может быть выполнена перед составлением ансамбля, а сами параметры исключаются из матриц элемента.

Частным случаем неузловой переменной является хорошо известный множитель Лагранжа [3].

Он вводится в том случае, когда на функцию  $\phi$  наложено дополнительное условие, не вытекающее ни из краевых условий, ни из ограничений на функции формы. Пусть дополнительное условие имеет вид

$$G(\{\phi\}) = 0. \quad (3.10)$$

В этом случае для решения задачи требуется минимизировать<sup>1)</sup> величину

$$\chi^* = \chi + \lambda G, \quad (3.11)$$

где  $\lambda$  — типичный дополнительный параметр. Если наложено несколько таких условий, то минимизируется величина

$$\chi^* = \chi + \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i G_i. \quad (3.12)$$

Теперь дополнительными параметрами задачи являются величины  $\lambda_i$ , которые опять можно связать с элементами или границами между элементами. Примеры использования таких множителей Лагранжа будут приведены ниже.

<sup>1)</sup> С доказательством этого положения можно ознакомиться в книгах по вариационному исчислению. Очевидно, что  $\partial \chi^*/\partial \lambda = G$ , и, следовательно, ограничение является условием минимизации. В точке экстремума  $\chi^* = \chi$ , так как  $G = 0$  (физический смысл  $\lambda$  становится ясным из соотношения  $\lambda = \partial \chi^*/\partial G$ ).

Интересно рассмотреть случай, когда функционал (3.1) представляет собой квадратичную форму и для ряда линейных ограничений на функцию  $\Phi$  используются множители Лагранжа.

В общем случае можно выразить  $\chi$  через величины узловых параметров в виде

$$\chi = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} + \{F\}^T \{\Phi\}, \quad (3.13)$$

где  $[K]$  — симметричная матрица.

Вместо (3.10) линейные ограничения можно записать в матричной форме:

$$[G] \{\Phi\} = 0, \quad (3.14)$$

где  $[G]$  — постоянная матрица. Записывая множители Лагранжа в виде вектора  $\{\lambda\}$  размерности, равной числу столбцов матрицы  $[G]$  (т. е. числу ограничений), имеем

$$\chi = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} + \{F\}^T \{\Phi\} + ([G] \{\Phi\})^T \{\lambda\}. \quad (3.15)$$

Составляя систему уравнений, аналогичную (3.6), но уже для двух множеств неизвестных, получаем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \{\lambda\}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Здесь нужно отметить два обстоятельства. Во-первых, система уравнений остается симметричной — факт, облегчающий применение обычных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (гл. 20). Во-вторых, на диагонали матрицы появляются нули, что иногда затрудняет получение решения.

В настоящей книге множители Лагранжа используются редко, исключение составляют случаи, когда приходится вводить некоторые ограничения. Типичным примером этого может служить ситуация, когда при применении метода конечных элементов нарушаются условия непрерывности. В результате введения дополнительных условий в виде ограничений на параметры получается корректное решение. Однако в связи с тем, что такие ограничения приводят к увеличению общего числа неизвестных, появляются дополнительные трудности.

### 3.4. Другие подходы к методу конечных элементов

Несмотря на то что приближенная минимизация функционала — самый распространенный способ подхода к методу конечных элементов, это никоим образом не означает, что такой

подход является единственным возможным. Например, в первых работах по строительной механике строились чисто физические модели, и, хотя приходилось делать некоторые математические оговорки, касающиеся обоснования и сходимости использованных методов, зачастую получались неплохие инженерные решения.

Существуют и другие возможности, позволяющие математически получить основные соотношения метода конечных элементов непосредственно из *дифференциальных уравнений задачи*. Они будут здесь кратко описаны. Возможные преимущества таких методов состоят в том, что:

а) исчезает необходимость искать функциональный эквивалент известным дифференциальным уравнениям;

б) эти методы могут быть распространены на задачи, для которых функционал либо вообще не существует, либо пока еще не получен [10].

Рассмотрим задачу приближенного решения системы дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять неизвестная функция  $\{\phi\}$  в области  $V$ . Запишем основное уравнение в виде

$$A(\{\phi\}) = 0, \quad (3.17)$$

а граничное условие на границе  $S$  как

$$C(\{\phi\}) = 0. \quad (3.18)$$

Если пробная функция, удовлетворяющая граничным условиям, записана в общей форме

$$\{\phi\}_a = [N] \{\Phi\}, \quad (3.19)$$

где, как и прежде,  $[N]$  является функцией координат, а  $\{\Phi\}$  — система  $n$  параметров, то в общем случае

$$A(\{\phi\}_a) = R \neq 0. \quad (3.20)$$

Наилучшим решением будет то, которое дает во всех точках области  $V$  наименьшую невязку  $R$  [1].

Очевидно, это решение можно получить, использовав то обстоятельство, что если невязка  $R$  тождественно равна нулю всюду в области, то

$$\int_V W R dV = 0, \quad (3.21)$$

где  $W$  — любая функция координат. Если число неизвестных параметров  $\{\Phi\}$  равно  $n$ , то, выбрав  $n$  линейно независимых функций  $W_i$ , запишем соответствующую систему уравнений

$$\int_V W_i R dV = \int_V W_i A([N]\{\Phi\}) dV = 0, \quad (3.22)$$

из которой может быть найдена функция  $\{\Phi\}$ . Этот процесс называется *методом взвешенных невязок*, а  $W_i$  — *весовой функцией*. Выбор различных весовых функций приводит к различным классическим методам.

**Коллокация в точке.** В этом случае полагается, что  $W_i = 1$  в некоторой точке  $i$  и равна нулю во всех остальных. При этом фактически основное дифференциальное уравнение удовлетворяется в  $n$  отдельных точках.

**Коллокация в подобласти.** В этом методе считается, что  $W_i = 1$  в некоторой подобласти и  $W_i = 0$  в остальной части области. Это эквивалентно тому, что интеграл обращается в нуль в некоторых подобластях, число которых достаточно для того, чтобы получить необходимое число уравнений.

**Метод Галеркина.** В этом случае  $W_i = N_i$ , т. е. в качестве весовой функции выбирается функция формы, с помощью которой аппроксимируется решение. Этот метод обычно приводит к *наилучшим результатам*.

При использовании в любом из упомянутых методов соотношения (3.19), определяющего принятую аппроксимацию, можно выявить основные особенности метода конечных элементов.

Во-первых, результирующая система уравнений будет иметь ленточный вид, так как влияние каждого параметра распространяется только на элементы, примыкающие к рассматриваемой узловой точке.

Во-вторых (в предположении, что, как и ранее, границы между элементами не дают никакого вклада), интегралы вычисляются для каждого элемента независимо, а затем полученные результаты суммируются.

Очевидно, что правила получения коэффициентов для ансамблей будут такими же, как и в задачах строительной механики, если оператор  $A$  линеен [см. уравнение (1.13)].

Здесь следует отметить один недостаток метода взвешенных невязок. В этом методе дифференциальный оператор  $A$  содержит производные более высоких порядков, чем вариационный функционал  $\chi$ . Таким образом, чтобы избежать вкладов от межэлементных зон (см. разд. 3.2), необходимо обеспечить выполнение условий непрерывности функции формы более высокого порядка. Это обстоятельство имеет важное значение, так как оно сильно ограничивает выбор функции формы и тем самым может вызвать непреодолимые трудности<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ниже будет показано, как сужается выбор функций, обеспечивающих непрерывность переменных, если дополнительно задается условие непрерывности угла наклона. В большинстве случаев можно подобрать функцию, обеспечивающую непрерывность только вторых производных.

Эту трудность иногда можно обойти, преобразовывая интегралы в выражении (3.22) с помощью интегрирования по частям (или преобразования Грина — Стокса). Если это преобразование удается выполнить в общем виде и если в результате порядок производных, входящих в полученные интегралы, понижается, то условиям непрерывности должны удовлетворять только эти производные.

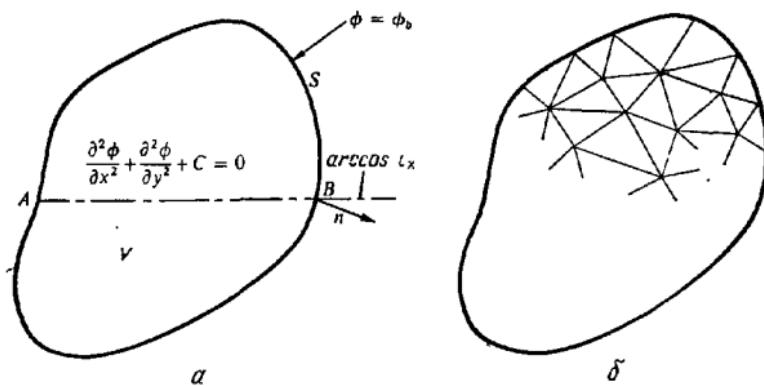
Ранее полагалось, что выбранная аппроксимация неизвестной функции [соотношение (3.19)] автоматически удовлетворяет краевым условиям. Однако удобнее записывать уравнения в общей форме, требуя выполнения краевых условий на заключительной стадии, подобно тому, как, например, в строительной механике заданные перемещения и граничные нагрузки учитываются после составления матрицы жесткости аисамбля.

### 3.5. Пример. Уравнение Пуассона

Для пояснения основных идей, изложенных в предыдущих разделах, рассмотрим чисто математическую задачу решения уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C = 0 \quad (3.23)$$

в некоторой области  $V$  при заданных значениях функции  $\phi = \phi_b$  на границе (фиг. 3.2, a).



Фиг. 3.2. Метод взвешенных певязок.

Можно показать, что решение этой задачи эквивалентно нахождению функции  $\phi$ , удовлетворяющей краевым условиям и минимизирующей функционал

$$\chi = \iint_V \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - C\phi \right] dx dy. \quad (3.24)$$

Для приближенного решения этого уравнения разобьем область на элементы (фиг. 3.2, б), для каждого из которых

$$\phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \{\phi\}^e, \quad (3.25)$$

где  $\{\phi\}^e$  — набор параметров, представляющих собой в данном случае значения функции  $\phi$  в узловых точках элемента.

### 3.5.1. Минимизация функционала

Равенство (3.4) выполняется, если матрицу  $[N]$  определить так, что функция  $\phi$  непрерывна между элементами, и, таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением типичного элемента.

Подставляя (3.25) в (3.24) и интегрируя по площади элемента, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_i} &= \int \int_{V^e} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - C \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right] dx dy = \\ &= \int \int_{V^e} \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - CN_i \right] dx dy, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e, \quad (3.26)$$

где

$$k_{ij} = \int \int_{V^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.27)$$

$$F_i = - \int \int_{V^e} CN_i dx dy. \quad (3.28)$$

При заданных форме элемента и функциях формы все эти величины могут быть вычислены и система уравнений для ансамбля будет определяться соотношениями (3.7) — (3.9).

Задача будет полностью сформулирована после учета граничных условий, а ее решение находится из решения системы линейных уравнений.

### 3.5.2. Метод взвешенных невязок

С помощью уравнений (3.22) и (3.23) можно получить типичное уравнение:

$$\iint_V W_i \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \right] dx dy = 0, \quad (3.29)$$

в котором функция  $\phi$  определяется соотношением (3.25). От подынтегральной функции требуется непрерывный переход по границам между элементами с тем, чтобы второй дифференциал был ограниченным. Если мы хотим избежать этого ограничения, можно использовать интегрирование по частям. Так, например,

$$\begin{aligned} \iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy &= \int_S \left| W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_A^B dy - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \\ &= \oint_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $l_x$  — косинус угла между внешней нормалью к поверхности (фиг. 3.2) и направлением  $x$ , а контурный интеграл по  $S$  берется по всей границе.

Проинтегрировав таким же образом и второй член уравнения (3.29), можно записать

$$\begin{aligned} \iint_V \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - W_i C \right] dx dy - \\ - \oint_S W_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Первый интеграл не содержит вкладов от границ между элементами, если функция  $\phi$  непрерывна. Теперь необходимо наложить ограничение на весовую функцию  $W_i$ . Она должна быть непрерывной, поэтому метод коллокаций в точке или подобласти неприменим. Однако можно использовать метод Галеркина или любой другой метод, в котором функция  $W_i$  непрерывна.

Для примера используем метод Галеркина, в котором функция веса

$$W_i = N_i. \quad (3.32)$$

Используя соотношение (3.25), вклад каждого элемента в интеграл (3.31) можно записать в виде

$$\sum_{I=0}^n k_{II}^e \phi_I + \{F_I\} - \int_S N_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS = 0. \quad (3.33)$$

В соотношении (3.33) выражения для  $k_{ij}^e$  и  $F_i$ , по-видимому, не случайно идентичны соответствующим выражениям (3.27) и (3.28), полученным вариационным методом. После суммирования вкладов всех элементов получим систему уравнений, аналогичную прежней, за исключением того, что добавляется поверхностный интеграл. Ясно, что этот интеграл не дает вклада в уравнения для внутренних точек (т. е. когда точка  $i$  не лежит на границе). Если же точка  $i$  лежит на границе, где заданы значения  $\phi$ , то становится не ясно, как вычислять этот интеграл; учет же краевых условий делает задачу разрешимой.

Для рассмотренного примера при использовании метода взвешенных и невязок и вариационного метода [1] получаются одинаковые результаты. Однако если бы использовались другие весовые функции, то совпадения можно было бы и не получить. Тот факт, что прямой метод решения, не требующий знания вариационного исчисления, приводит к тем же самым окончательным результатам, может быть сам по себе интересен читателям и указывает на возможность выбора различных методов решения.

Кроме того, интересно отметить, что поверхностный интеграл в (3.31) имеет определенный физический смысл. Фактически он представляет собой взвешенный интеграл от потока  $\partial\phi/\partial n$  через границу, так как

$$\int W_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y \right) dS = \int W_i \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (3.34)$$

Иногда на границе бывают известны не значения функции  $\phi$ , а значения  $\partial\phi/\partial n$ . В таких случаях правильное решение мог бы дать прямой метод Галеркина, но при этом функционал должен быть модифицирован введением некоторых граничных величин (как это будет сделано в гл. 15).

### 3.6. Следующий пример. Уравнения вязкого течения

Оператор основного дифференциального уравнения (3.17) может зависеть не только от одной переменной. Можно также рассмотреть систему дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, уравнения, описывающие плоское установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости без учета инерционных членов. Неизвестные — давление  $p$  и компоненты скорости  $u$  и  $v$  в направлениях  $x$  и  $y$  — связаны между собой двумя уравнениями равновесия (уравнения Стокса, полученные

из более общего уравнения Навье — Стокса) [12]:

$$\begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $X$  и  $Y$  — объемные силы на единицу объема жидкости. Уравнение неразрывности дает третье соотношение между этими тремя величинами

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.36)$$

Запишем выражения для  $p$ ,  $u$ ,  $v$  через узловые значения:

$$p = [N] \{p\}, \quad u = [N] \{u\}, \quad v = [N] \{v\}, \quad (3.37)$$

где  $[N]$  — функции формы, обеспечивающие только непрерывность переменных. Используя метод Галеркина, можно записать для точки  $i$  систему трех уравнений. Первое из них имеет вид

$$\int_V N_i \left[ X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dV = 0. \quad (3.38)$$

Интегрируя по частям два последних члена в соответствии с соотношением (3.30) и выполняя некоторые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \int_V \left[ N_i \left( X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dV + \\ + \int_S \mu N_i \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

После подстановки выражений (3.37) в первое слагаемое имеем

$$\int_V \left[ N_i X - N_i \frac{\partial [N]}{\partial x} \{p\} - \left( \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{u\} \right] dV. \quad (3.40)$$

Второе уравнение имеет аналогичный вид и получается из предыдущего путем замены  $x$  и  $u$  на  $y$  и  $v$  соответственно. Последнее уравнение, получающееся из уравнения неразрывности

(3.36), имеет вид

$$\int_V N_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_V \left[ N_i \left( \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} + \frac{\partial [N]}{\partial y} \{v\} \right) \right] dV = 0. \quad (3.41)$$

Группируя все переменные, относящиеся к рассматриваемой точке, в виде

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

получаем уравнение ансамбля в стандартной форме:

$$[K]\{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (3.43)$$

где, опять выделяя вклады каждого элемента, имеем

$[k_{ij}]^e =$

$$= - \int_V \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} dV. \quad (3.44)$$

Поверхностный интеграл в (3.39) исчезает на той части границы, где задано  $u$ , ибо в этом случае  $N_i = 0$ . Там, где задано  $\partial u / \partial n$ , он дает дополнительный член в векторе  $\{F\}$  в уравнении (3.43). Таким образом,

$$\{F_i\}^e = \int_V N_i \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} dV + \int_S N_i u \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \\ 0 \end{Bmatrix} dS. \quad (3.45)$$

В приведенных уравнениях поверхностный интеграл берется только по внешним границам, на которых заданы  $\partial u / \partial n$  или  $\partial v / \partial n$ . Если же на границе заданы величины  $u$  и  $v$ , то в граничных точках уравнения не составляются.

Задача о течении жидкости в более простой постановке рассматривалась Докторсом [13].

При другом подходе к решению задачи вводится понятие функции тока. Если положить, что

$$u = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (3.46)$$

то уравнение неразрывности (3.36) тождественно удовлетворяется и остаются два уравнения

$$\begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( -\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0, \\ Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Дифференцируя первое уравнение по  $y$ , а второе по  $x$  и вычитая одно из другого, исключаем  $p$ , в результате чего остается только одно уравнение

$$\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \quad (3.48)$$

Это уравнение можно решить описанным выше приближенным методом. Читатель может проделать это в качестве упражнения. При решении матрица жесткости получится симметричной и основные соотношения, по существу, будут идентичны соотношениям, рассматриваемым в главе, посвященной изгибу пластин. Однако в этом случае функция формы должна удовлетворять условию неразрывности первых производных между элементами, так как в интегралы будут входить производные второго порядка. Осесимметричные задачи такого рода рассматривались в работе [14].

Примеры были приведены для того, чтобы проиллюстрировать общность метода. Однако рассмотренная здесь задача представляет значительный практический интерес, так как в настоящее время большое внимание уделяется разработке методов решения уравнений Навье—Стокса. С целью линеаризации уравнений (3.35) были опущены динамические члены

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Их можно было и оставить, но тогда уравнение (3.43) получилось бы нелинейным, причем матрица  $[K]$  зависела бы от скоростей. Решение таких уравнений слишком сложно, чтобы его подробно рассматривать здесь, однако можно использовать обобщения рассмотренных в гл. 18 методов решения нелинейных задач.

### 3.7. Заключительные замечания

В этой главе понятие конечных элементов используется для приближенного решения вариационных задач и рассматривается возможность непосредственного приближенного решения дифференциальных уравнений. Области применения обоих подходов еще недостаточно изучены. Некоторые общие идеи, изложенные в этой главе, рассматривались Оденом [15].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Crandall S. H., *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956.
2. Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1968.
3. Weinstock R., *Calculus of Variations*, McGraw-Hill, 1952.
4. Berg P. N., *Calculus of Variations*, Ch. 16 in: *Handbook of Engineering Mechanics*, Flügge W., ed., McGraw-Hill, 1962.
5. Southwell R. V., *Relaxation Methods in Theoretic Physics*, Oxford Univ. Press, 1946.
6. Forsythe G. E., Wasow W. R., *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*, Wiley, 1960; есть русский перевод: Вазов В., Форсайт Дж., *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*, ИЛ, 1963.
7. Pian T. H. H. and Tong P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 1, 3—28 (1969).
8. Melosh R. J., Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, *JAIAA*, 1, 1631—1637 (1963); русский перевод: Мелош, Основы получения матриц для прямого метода жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, 1, № 7, стр. 169—176 (1963).
9. Pian T. H. H., Derivation of Element Stiffness Matrices, *JAIAA*, 2, 576—577 (1964); есть русский перевод: Пиан, Получение матриц жесткости элементов, *Ракетная техника и космонавтика*, 2, № 9, стр. 20 (1964).
10. Stakgold I., *Boundary Value Problems in Mathematics and Physics*, Macmillan, N. Y., 1966.
11. Szabo B. A., Lee G. C., Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin Method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 301—310 (1969).
12. Lagerstrom P. A., Chang I. D., Flow at Low Reynolds Numbers, Ch. 81 in: *Handbook of Eng. Mech.*, Flügge W., ed., McGraw-Hill, 1962.
13. Doctors L. J., An Application of the Finite Element Technique for Boundary Value Problems of Potential Flow, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 243—252 (1970).
14. Atkinson B., Brocklebank M. P., Card C. C. M., Smith J. M., Low Reynolds Number Developing Flows, *A. I. Ch. Eng. J.*, 15, 548—553 (1969).
15. Oden J. T., A General Theory of Finite Elements: I, Topological Considerations, pp. 205—221; II, Applications, pp. 247—260; *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1 (1969).

## ГЛАВА 4

# ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ И ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ

### 4.1. Введение

Решения двумерных задач теории упругости были первыми удачными примерами применения метода конечных элементов [1, 2]. В гл. 2, где были получены основные соотношения метода, такие задачи уже рассматривались для иллюстрации его основ. Эти основные соотношения [(2.1)–(2.3), (2.9), (2.10) и (2.16)] для удобства собраны в приложении II.

В настоящей главе будут более подробно рассмотрены и проиллюстрированы на примерах, имеющих практическое значение, основные зависимости для указанных задач. В дальнейшем мы будем придерживаться именно такого подхода к изложению материала.

Подробно рассмотрен только простейший треугольный элемент, хотя аналогичным образом можно получить основные соотношения и для более сложных элементов, которые описываются в последующих главах.

Читатель, мало знакомый с основными понятиями теории упругости, может найти их в элементарных курсах по этому предмету, в частности в книге Тимошенко и Гудьера [3], обозначения которой будут здесь широко использоваться.

В обеих задачах — о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях — поле перемещений однозначно определяется перемещениями  $u$  и  $v$  в направлениях осей  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат. В обоих случаях рассматриваются только три компоненты напряжения и деформации в плоскости  $x, y$ . В случае *плоского напряженного состояния* все остальные компоненты напряжения равны нулю по определению и, следовательно, не совершают внутренней работы. В случае *плоской деформации* напряжение в направлении, перпендикулярном плоскости  $x, y$ , не равно нулю. Но поскольку в этом направлении деформация равна нулю по определению, это напряжение также не дает вклада во внутреннюю работу. При желании его можно определить через значения главных компонент напряжения.

## 4.2. Характеристики элементов

### 4.2.1. Функции перемещений

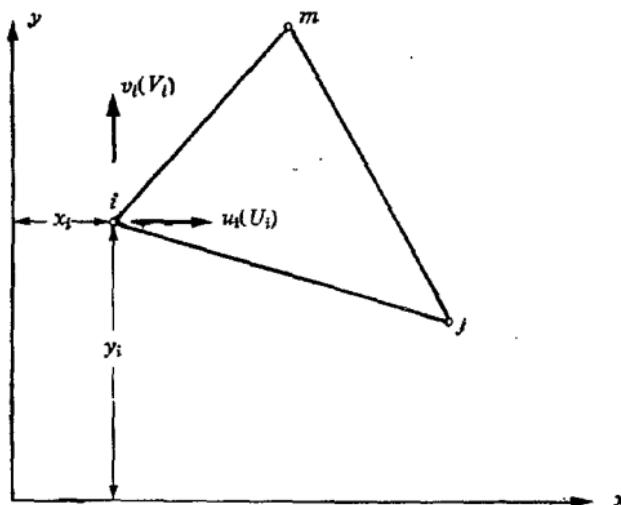
На фиг. 4.1 показан типичный треугольный элемент с узлами  $i$ ,  $j$ ,  $m$ , пронумерованными против часовой стрелки. Перемещения каждого узла имеют две компоненты

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

а шесть компонент перемещений элемента образуют вектор

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Перемещения внутри элемента должны однозначно определяться этими шестью величинами. Ясно, что простейшим пред-



Фиг. 4.1. Элемент сплошной среды для расчета плоского напряженного или плоского деформированного состояния.

ставлением являются линейные полиномы

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y, \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Значения шести постоянных  $a_i$  легко найти из двух систем, состоящих из трех уравнений, которые получаются в результате подстановки в (4.3) узловых координат и приравнивания

перемещений соответствующим перемещениям узловых точек. Записав, например,

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i, \\ u_j &= a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j, \\ u_m &= a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m, \end{aligned} \quad (4.4)$$

выразим  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  через величины узловых перемещений  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $u_m$  и окончательно получим

$$u = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m\}, \quad (4.5a)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i &= y_i - y_m = y_{jm}, \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj}; \end{aligned} \quad (4.5b)$$

остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов  $i$ ,  $j$ ,  $m$ , а величина  $2\Delta$  определяется соотношением

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \cdot (\text{площадь треугольника } ijm). \quad (4.5v)$$

Аналогично можно представить перемещение  $v$  в вертикальном направлении:

$$v = \frac{1}{2\Delta} \{(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m\}. \quad (4.6)$$

Хотя на данном этапе в этом нет особой необходимости, можно записать соотношения (4.5a) и (4.6) в стандартной форме (2.1):

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e, \quad (4.7)$$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ , а

$$N'_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad \text{и т. д.} \quad (4.8)$$

*Примечание:* если за начало координат принять центр тяжести элемента, то

$$x_i + x_m + x_j = y_i + y_m + y_j = 0 \quad \text{и} \quad a_i = \frac{2\Delta}{3} = a_j = a_m.$$

Выбранная функция перемещений автоматически гарантирует непрерывность перемещений между смежными элементами, так как вдоль любой стороны треугольника они изменяются линейно, и, следовательно, из равенства перемещений в узлах следует их равенство по всей границе.

#### 4.2.2. Деформация (полная)

Полную деформацию в любой точке внутри элемента можно охарактеризовать тремя составляющими, которые дают вклад во внутреннюю работу:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Используя равенства (4.7) или (4.5а) и (4.6), имеем

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N'_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & \frac{\partial N'_j}{\partial y} & \frac{\partial N'_j}{\partial x} & \frac{\partial N'_m}{\partial y} & \frac{\partial N'_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e, \quad (4.10) \end{aligned}$$

что явным образом определяет матрицу  $[B]$  из равенства (2.2).

Следует заметить, что в этом случае матрица  $[B]$  не зависит от координат точки внутри элемента, и, следовательно, деформации в нем постоянны. Очевидно, что эти функции формы удовлетворяют критерию постоянства деформаций, приведенному в гл. 2.

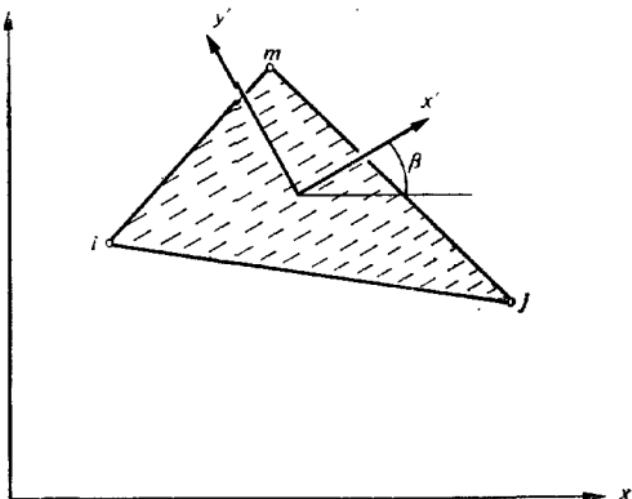
#### 4.2.3. Начальная деформация (температурная деформация)

Начальные деформации, т. е. деформации, не зависящие от напряжений, могут возникать по разным причинам. Усадка, рост кристаллов или чаще всего колебания температуры будут

приводить в общем случае к начальным деформациям, характеризуемым вектором

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Хотя величина этой начальной деформации, вообще говоря, может зависеть от координат точки внутри элемента, обычно



Фиг. 4.2. Элемент для расчета слоистого (трансверсально-изотропного) материала.

она считается постоянной и равной некоторому среднему по элементу значению. Это согласуется с условием постоянства деформаций, которому отвечает принятая функция перемещений.

Таким образом, в случае *плоского напряженного состояния* изотропного материала для нагретого до температуры  $\theta^e$  элемента при коэффициенте линейного расширения  $\alpha$  будем иметь

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.12)$$

поскольку при тепловом расширении деформации сдвига отсутствуют.

*Сложнее случай плоской деформации.* Предположение о плоской деформации означает, что при тепловом расширении возникают напряжения в плоскости, перпендикулярной к плоскости  $x, y$ , даже если отсутствуют остальные компоненты напряжения,

Следовательно, величина начальной деформации будет зависеть от упругих постоянных.

Можно показать, что в этом случае

$$\{\varepsilon_0\} = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Особого рассмотрения требуют анизотропные материалы, для которых коэффициенты линейного расширения могут быть различными в разных направлениях. Пусть  $x'$  и  $y'$  на фиг. 4.2 соответствуют главным направлениям материала. Начальная температурная деформация для случая плоского напряженного состояния в этих координатах будет

$$\{\varepsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'0} \\ \varepsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \theta^e \\ \alpha_2 \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.14)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты линейного расширения в направлениях  $x'$  и  $y'$  соответственно.

Чтобы получить компоненты деформаций в координатах  $x$  и  $y$ , необходимо использовать соответствующую матрицу  $[T]$  преобразования деформаций:

$$\{\varepsilon_0\}' = [T]^T \{\varepsilon_0\}. \quad (4.15)$$

Легко проверить, что

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix},$$

где  $\beta$  — угол, определенный на фиг. 4.2. Таким образом,  $\{\varepsilon_0\}$  легко вычисляется. Следует заметить, что в координатах  $x$ ,  $y$  компоненты деформаций сдвига отличны от нуля.

#### 4.2.4. Матрица упругости

Матрица  $[D]$ , входящая в соотношение (2.3), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \{\varepsilon_0\} \right), \quad (4.16)$$

может быть записана в явном виде для любого материала (в это соотношение не включен аддитивный член  $\{\sigma_0\}$ ).

**Плоское напряженное состояние в изотропном материале.** Для плоского напряженного состояния изотропного материала имеем по определению

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v\sigma_y}{E} + \varepsilon_{x0}, \\ \varepsilon_y &= -\frac{v\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon_{y0}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+v)\tau_{xy}}{E} + \gamma_{xy0}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Разрешая эти соотношения относительно напряжений, получаем матрицу  $[D]$  в виде

$$[D] = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

где  $E$  — модуль упругости, а  $v$  — коэффициент Пуассона.

**Плоское деформированное состояние в изотропном материале.** В этом случае, кроме трех компонент напряжения, существует нормальное напряжение  $\sigma_z$ . Для частного случая изотропного теплового расширения имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v\sigma_y}{E} - \frac{v\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e, \\ \varepsilon_y &= -\frac{v\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+v)\tau_{xy}}{E}\end{aligned}\quad (4.19)$$

и, кроме того,

$$\varepsilon_z = 0 = -\frac{v\sigma_x}{E} - \frac{v\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e.$$

Исключая  $\sigma_z$ , определим три остальные компоненты напряжения. Полагая начальную деформацию в (4.13) равной нулю и сравнивая с соотношением (4.16), получаем матрицу  $[D]$  в виде

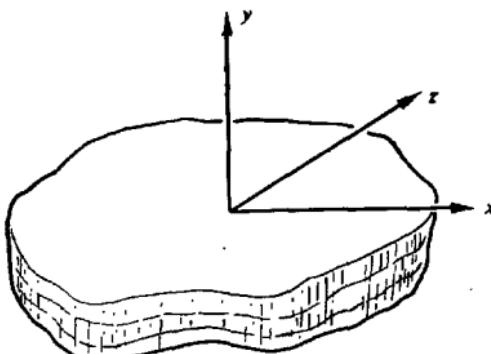
$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

**Анизотропные материалы.** Для описания зависимости между напряжениями и деформациями в случае общей анизотропии в трехмерном состоянии необходима 21 независимая упругая постоянная [4, 5].

Для двумерного состояния число независимых постоянных в матрице  $[D]$  не превышает шести. Поэтому в самом общем двумерном случае можно написать

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ \text{Симметрично} & & d_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

(Необходимость симметрии матрицы  $[D]$  следует из теоремы взаимности Максвелла — Бетти и является следствием инва-



Фиг. 4.3. Слоистый (трансверсально-изотропный) материал. Плоскость слоев параллельна плоскости  $x, z$ .

риантности энергии относительно пути достижения заданного деформированного состояния.)

Особый практический интерес представляет «слоистый» или трансверсально-изотропный материал, в слоях которого существует круговая симметрия свойств. Свойства такого материала характеризуются пятью независимыми упругими постоянными.

Общие соотношения между напряжениями и деформациями в этом случае в обозначениях, введенных Лехницким [4], при направлении оси  $y$  (фиг. 4.3), перпендикулярном плоскости слоев, и отсутствии начальных деформаций имеют вид

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2 \sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1 \sigma_z}{E_1},$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_2 \sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_2 \sigma_z}{E_2},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -\frac{v_1 \sigma_x}{E_1} - \frac{v_2 \sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_1}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+v_1)}{E_1} \tau_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2} \tau_{yz}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Здесь постоянные  $E_1, v_1$  ( $G_1$  — зависимая величина) характеризуют поведение материала в плоскости слоев, а  $E_2, G_2, v_2$  — в перпендикулярном к ним направлении.

В двумерном случае матрица  $[D]$  после введения обозначений

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{и} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

принимает для плоского напряженного состояния вид

$$[D] = \frac{E_2}{(1-nv_2^2)} \begin{bmatrix} n & nv_2 & 0 \\ nv_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-nv_2^2) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

а для плоской деформации

$$\begin{aligned}[D] &= \frac{E_2}{(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2)} \times \\ &\times \begin{bmatrix} n(1-nv_2^2) & nv_2(1+v_1) & 0 \\ nv_2(1+v_1) & (1-v_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2) \end{bmatrix}. \quad (4.24)\end{aligned}$$

Если же слои расположены под некоторым углом к оси  $x$ , как показано на фиг. 4.2, то для получения матрицы  $[D]$  в произвольной системе координат необходимо выполнить преобразование. Обозначая через  $[D']$  матрицу, связывающую напряжения и деформации в системе координат  $x', y'$ , легко показать, что

$$[D] = [T][D'][T]^T, \quad (4.25)$$

где  $[T]$  — матрица, введенная в (4.15).

Если напряжения  $\{\sigma'\}$  и  $\{\sigma\}$  соответствуют деформациям  $\{\epsilon'\}$  и  $\{\epsilon\}$ , то из условия равенства работ

$$\{\sigma'\}^T \{\epsilon'\} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

или,

$$\{\epsilon'\}^T [D'] \{\epsilon'\} = \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\}$$

после подстановки (4.15) следует равенство (4.25) (см. гл. 1).

#### 4.2.5. Матрица жесткости

Матрица жесткости элемента  $ijm$  определяется с помощью общего соотношения (2.10), в соответствии с которым

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t dx dy, \quad (4.26)$$

где  $t$  — толщина элемента, а интегрирование производится по площади треугольника. Если предположить, что толщина элемента постоянна, что тем ближе к истине, чем меньше размеры элемента, то, поскольку ни одна из матриц не содержит  $x$  или  $y$ , имеем простое выражение

$$[k] = [B]^T [D] [B] t \Delta, \quad (4.27)$$

где  $\Delta$  — площадь треугольника [введенная соотношением (3.5)]. Такая форма записи позволяет вычислить матрицу с помощью ЭВМ. Матрицу  $[B]$ , определенную соотношением (4.10), можно записать в виде

$$[B] = [B_i, B_j, B_m], \quad \text{где} \quad [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta \quad \text{и т. д.} \quad (4.28)$$

Матрица жесткости может быть записана в виде

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

где подматрицы размерности  $2 \times 2$  строятся следующим образом:

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta. \quad (4.30)$$

Такая форма часто бывает удобной для вычислений.

#### 4.2.6. Узловые силы, обусловленные начальной деформацией

Эти силы определяются в явном виде выражением (2.12), которое после интегрирования принимает вид

$$\{F\}_e^e = -[B]^T [D] [\epsilon_0] t \Delta \quad \text{и т. д.} \quad (4.31)$$

Расчленяя это соотношение, можно записать

$$\{F_i\}_{e_0}^e = -[B_i]^T [D] [e_0] t \Delta \quad \text{и т. д.} \quad (4.32)$$

Силы, обусловленные начальной деформацией, распределяются по узлам элемента неравномерно и должны быть вычислены точно. Аналогичные выражения получаются для сил, обусловленных начальными напряжениями.

#### 4.2.7. Распределенные объемные силы

В общем случае плоского напряженного или деформированного состояния на каждый элемент единичной площади в плоскости  $x, y$  действуют силы

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

в направлениях соответствующих осей.

В соответствии с (2.11) вклад этих сил в узловые силы определяется выражением

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy,$$

или, на основании (4.7),

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i dx dy \quad \text{и т. д.,} \quad (4.33)$$

при условии, что объемные силы  $X$  и  $Y$  постоянны. Так как  $N_i$  не является постоянной, должно быть выполнено интегрирование. Некоторые общие формулы интегрирования для треугольника приведены в приложении III.

Если за начало координат выбран центр тяжести элемента, вычисления упрощаются. В этом случае

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0,$$

и, используя (4.8), получаем

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i dx dy / 2\Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2,$$

или, учитывая примечание на стр. 62, имеем

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 = \{F_i\}_p = \{F_m\}_p. \quad (4.34)$$

Ясно, что для всякого элемента

$$\{F\}_p^e = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3. \quad (4.35)$$

Это означает, что все объемные силы, действующие в направлениях  $x$  и  $y$ , распределены между тремя узлами поровну. Этот факт не противоречит физическому смыслу и часто неявно использовался.

#### 4.2.8. Потенциал объемных сил

Во многих случаях объемные силы определяются через потенциал объемных сил  $\phi$  в виде

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4.36)$$

и чаще не значения  $X$  и  $Y$ , а именно этот потенциал известен повсюду в области и считается заданным в узловых точках. Если  $\{\phi\}^e$  содержит три значения потенциала в узлах элемента, т. е. имеет вид столбца

$$\{\phi\}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix}, \quad (4.37)$$

то в случае постоянных  $X$  и  $Y$  потенциал  $\phi$  должен изменяться внутри элемента по линейному закону. Функция формы для него, очевидно, может быть построена, как и ранее [см. (4.4) — (4.6)], в виде

$$\phi = [N'_i, N'_j, N'_m] \{\phi\}^e. \quad (4.38)$$

Следовательно,

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{[b_i, b_j, b_m] \{\phi\}^e}{2\Delta}$$

и

$$Y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{[c_i, c_j, c_m] \{\phi\}^e}{2\Delta}. \quad (4.39)$$

Вектор узловых сил, обусловленных потенциалом объемных сил, будет описываться соотношением

$$\{F\}_e^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_l & b_l & b_m \\ c_l & c_l & c_m \\ b_l & b_l & b_m \\ c_l & c_l & c_m \\ b_l & b_l & b_m \\ c_l & c_l & c_m \end{bmatrix} \{\phi\}^e, \quad (4.40)$$

замениющим (4.35).

#### 4.2.9. Вычисление напряжений

Полученные формулы дают возможность составить полную матрицу жесткости конструкции и получить решение для перемещений.

Матрица напряжений, определяемая в общем виде равенством (2.15), получается для каждого элемента после соответствующих подстановок.

По предположению напряжения постоянны внутри элемента. Обычно их приводят к центру тяжести; это будет сделано и в большинстве примеров этой главы. Иногда значения напряжений в узлах получают усреднением напряжений в смежных элементах. Кроме того, имея некоторый опыт, можно использовать и метод усреднения «с весом», но он не намного лучше.

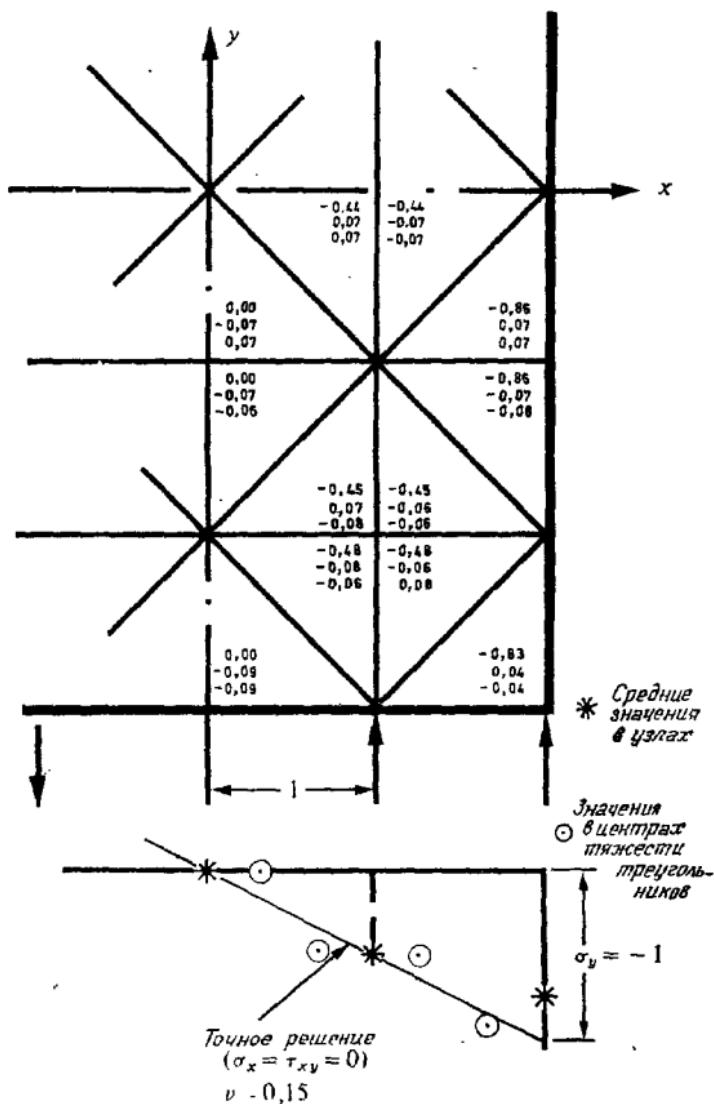
Обычно с помощью ЭВМ определяются главные напряжения и их направления в каждом элементе.

### 4.3. Примеры. Оценка точности

Не вызывает сомнения, что решение плоских задач теории упругости методом, изложенным в разд. 4.2, при неограниченном уменьшении размеров элементов стремится к точному. Однако при любом конечном числе разбиений это решение будет приближенным, как, скажем, решение в виде ряда Фурье с ограниченным числом членов.

Как уже объяснялось в гл. 2, приближенное значение полной энергии деформации всегда будет ниже истинного значения, соответствующего точному решению. Практически это означает, что полученные перемещения, а следовательно, и напряжения будут в целом заниженными. Однако следует подчеркнуть, что все это не всегда справедливо для каждой отдельной точки сплошной среды. Поэтому практическое значение такой оценки невелико.

Инженеру весьма важно знать, какая точность может быть достигнута в рассматриваемых задачах при уменьшении размеров элементов. В каждом частном случае ошибку можно оценивать путем сравнения решения с известным точным решением или путем изучения сходимости по результатам, полученным при разном числе разбиений.

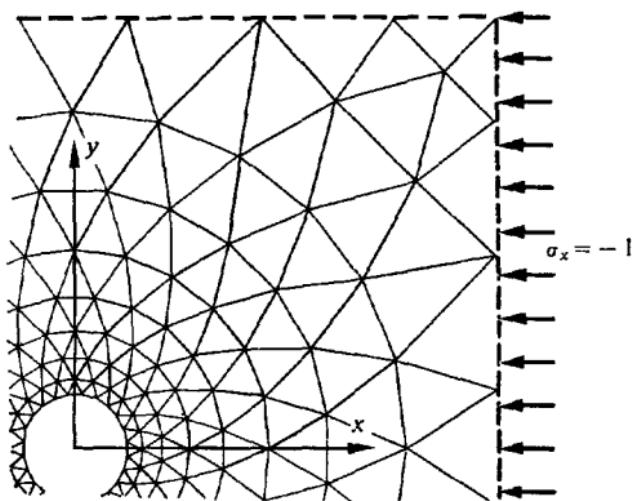


Фиг. 4.4. Результаты решения задачи о чистом изгибе балки при достаточно грубом разбиении на треугольные элементы. (Значения напряжений  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  приведены в указанном порядке.)

При наличии опыта инженер может заранее оценить порядок точности результатов для данной конкретной задачи при заданном числе разбиений. Некоторый такой опыт, вероятно, можно приобрести, изучая примеры, приведенные в этой книге.

Сначала рассмотрим некоторые простые задачи, для которых известны точные решения.

**Одиородное поле напряжений.** В этом случае решение, полученное методом конечных элементов, будет полностью совпадать с точным решением независимо от числа разбиений.



Фиг. 4.5. Круглое отверстие в области одиородного напряженного состояния.

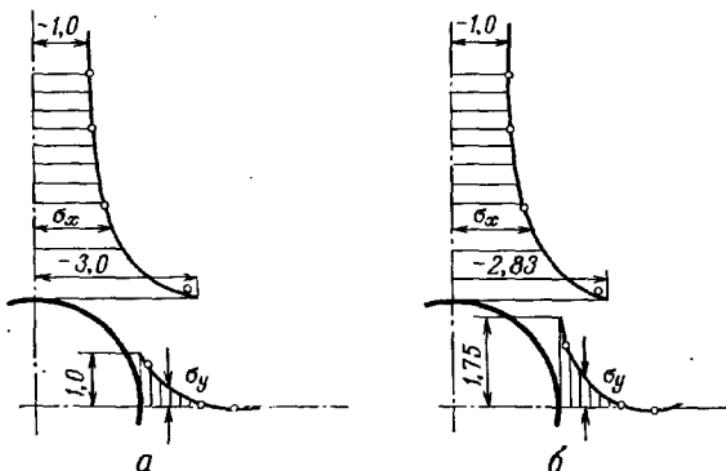
Очевидно, что этот результат следует из постановки задачи, но тем не менее он полезен для первоначальной проверки вычислительных программ.

**Линейно изменяющееся поле напряжений.** В этом случае предположение о постоянстве напряжений внутри элементов означает, что решение всегда будет приближенным. На фиг. 4.4 в качестве примера представлены результаты расчета при довольно грубом разбиении балки, работающей в условиях чистого изгиба. Видно, что осевые напряжения  $\sigma_y$ , полученные методом конечных элементов, берут в «силку» точное решение. Если постоянные по элементам значения напряжений отнести к центрам тяжести элементов и нанести их на график, то прямая, наименее отклоняющаяся от этих точек, фактически является точным решением.

Компонента напряжения в горизонтальном направлении и напряжение сдвига отличаются от точных (нулевых) значений — они колеблются около них с небольшой амплитудой.

Можно убедиться, что если напряжения во внутренних узлах вычисляются как средние по примыкающим к ним элементам, то они очень мало отличаются от точных. Однако на внешних поверхностях усреднение дает несколько худшие результаты. Усреднение напряжений в узловых точках часто применяется для уточнения приближенного решения (фиг. 4.4).

Для уточнения решения в узловых точках, расположенных вблизи поверхности конструкции, можно использовать усреднение с весом. Нам, однако, кажется, что для получения большей



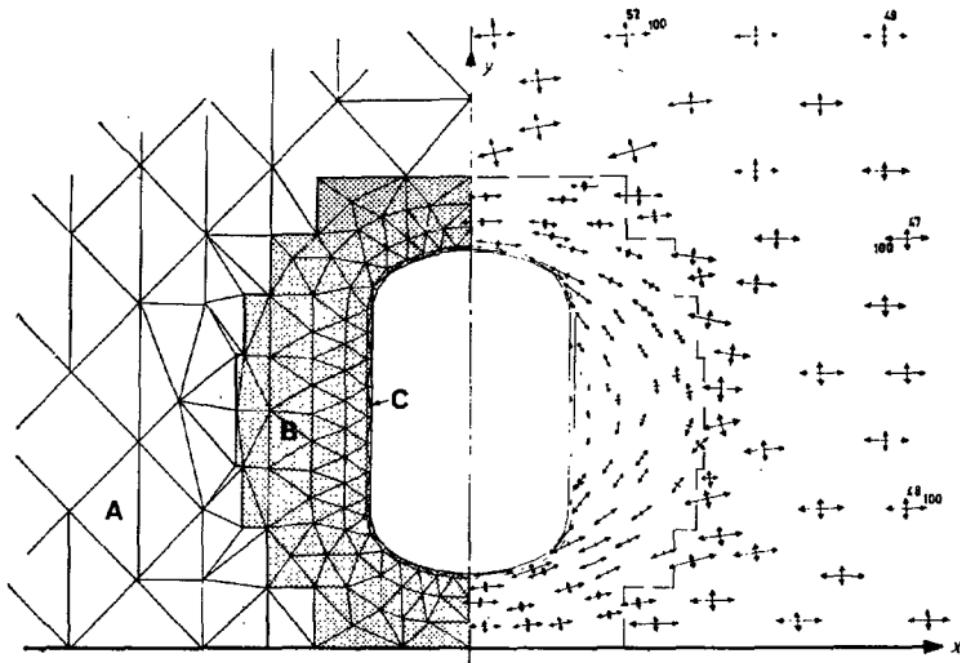
Фиг. 4.6. Сравнение теоретических результатов с результатами решения методом конечных элементов задачи, иллюстрированной на фиг. 4.5.  
а — изотропный материал; б — ортотропный материал.  $E_x = E_1 = 1$ ,  $E_y = E_2 = 3$ ,  $v_1 = 0.1$ ,  
 $v_2 = 0$ ,  $G_{xy} = 0.42$ . — точное решение для бесконечной пластины; О — решение, полученное методом конечных элементов.

точности целесообразнее производить разбиение на более мелкие элементы.

**Концентрация напряжений.** На фиг. 4.5. и 4.6. иллюстрируется тестовая задача о концентрации напряжений. Исследуется распределение напряжений вокруг круглого отверстия в изотропном и слоисто-анизотропном материалах в условиях однородного напряженного состояния вдали от отверстия [6]. Чтобы можно было лучше изучить область, в которой ожидаются большие градиенты напряжений, используется неравномерное разбиение. Сравнение некоторых результатов расчета с точными решениями [3, 7] (фиг. 4.6) позволяет сделать вывод о высокой точности метода.

#### 4.4. Некоторые практические приложения

Очевидно, что возможности применения метода конечных элементов практически безграничны. В настоящее время при исследовании плоских задач этот метод благодаря своей высокой точности, низкой стоимости и универсальности часто заменяет эксперимент. Преимуществами метода являются простота



Фиг. 4.7. Подкрепленное отверстие в пластине.

Вдали от отверстия однородное напряженное состояние  $\sigma_x = 100$ ,  $\sigma_y = 50$ . Толщины областей пластины А, В и С относятся как 1 : 3 : 23. (Перемещение в направлении  $y$  на оси  $x$  равно нулю.)

учета анизотропии свойств материала, а также легкость решения задач о температурных напряжениях и задач о действии объемных сил.

Ниже будет приведено несколько примеров применения метода к решению сложных инженерных задач.

**Распределение напряжений около подкрепленного отверстия** (фиг. 4.7). В стальных сосудах высокого давления или на несущих поверхностях самолетных конструкций часто приходится делать различные отверстия. Входящий трубопровод сам несколько подкрепляет отверстие, и, кроме того, для уменьшения напряжений, возникающих из-за эффектов концентрации, степка вблизи отверстий обычно утолщается.

Исследование таких задач в плоской постановке не вызывает затруднений. Выбор размеров элементов и их расположение определяются характером изменения толщины.

Узкий утолщенный слой материала вблизи края отверстия можно аппроксимировать специальными элементами балочного типа или просто обычными треугольными (сильно вытянутыми) элементами. В задаче, иллюстрированной на фиг. 4.7, использовался последний способ, позволивший изучить распределение напряжений вблизи отверстия. Отметим, что исследовалась область сравнительно больших размеров и при решении применялось неравномерное разбиение.

**Тектонические напряжения в анизотропной долине [6]** (фиг. 4.8). Рассматривается симметричная долина, находящаяся под действием однородных напряжений в горизонтальном направлении. Порода состоит из различных слоев; следовательно, материал трансверсально изотропен с изменяющимися от точки к точке направлениями слоев.

Анализ полученных напряжений указывает на существование области растяжения. Это явление представляет интерес для геологов и инженеров, занимающихся механикой горных пород.

**Плотина под действием внешнего и внутреннего давлений воды [8, 9]** (фиг. 4.9). Исследуется опорная плотина на сложном скалистом основании. Неоднородное основание находится в условиях плоской деформации, а сама плотина рассматривается как пластина переменной толщины (плоское напряженное состояние).

Исследование нагружения внешними силами и собственным весом не ставит новых проблем, хотя, возможно, следует отметить, что оказалась полезной автоматизация расчета узловых нагрузок, вызванных силой тяжести.

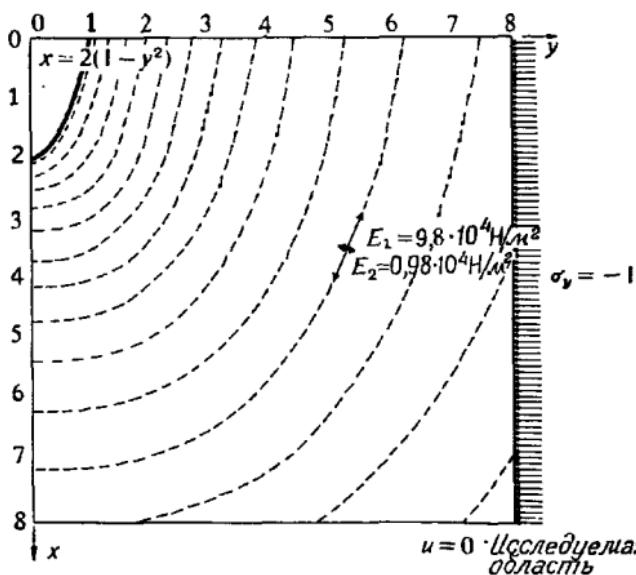
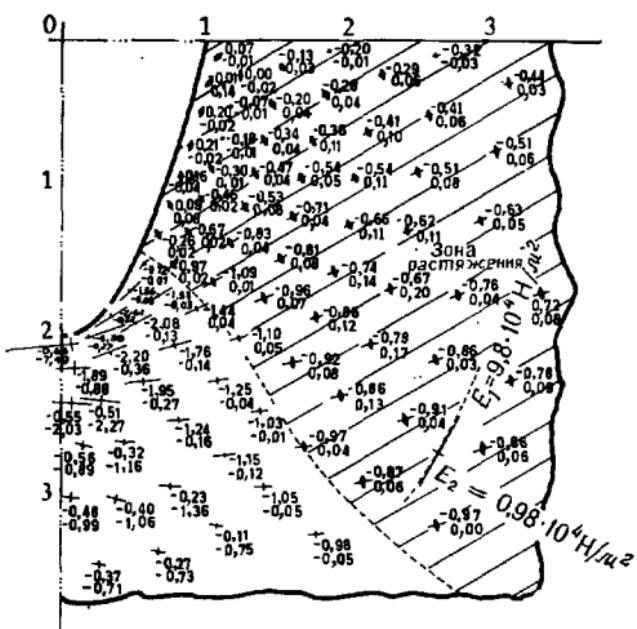
Некоторого разъяснения требует случай действия внутреннего давления в порах.

Хорошо известно, что в пористом материале давление воды действует на конструкцию в виде *объемной силы* величиной

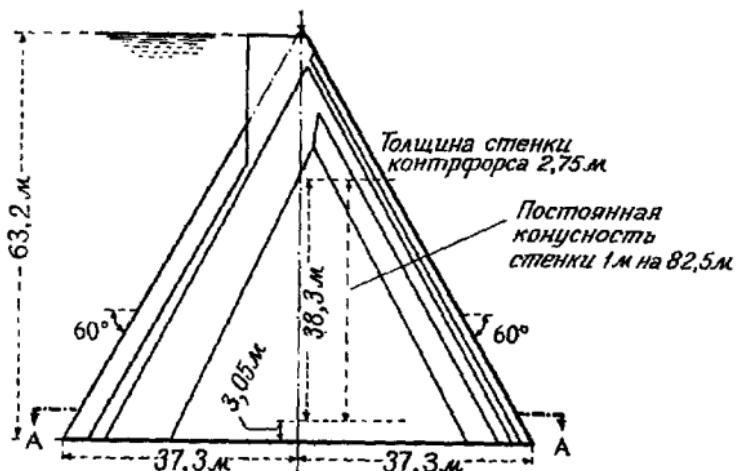
$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

и что в этом случае нет необходимости рассматривать внешнее давление.

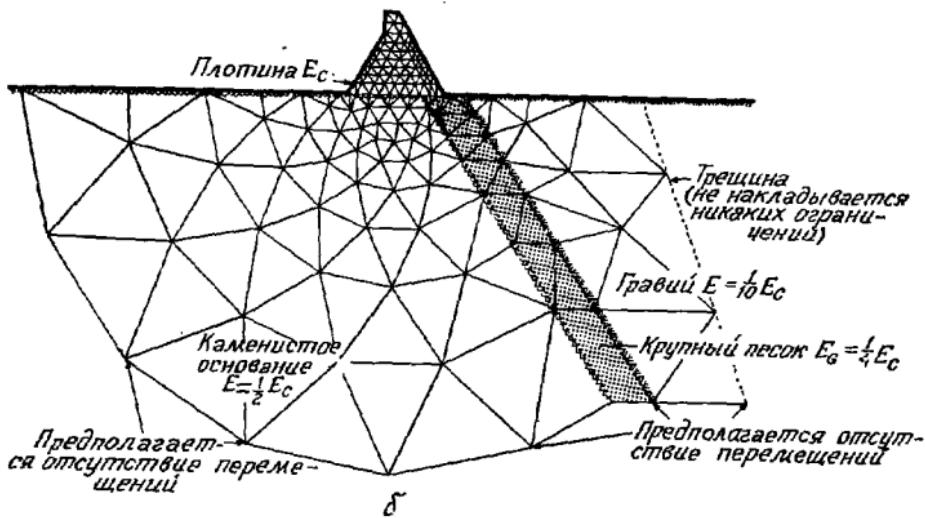
Давление в порах  $p$ , как это следует из формулы (4.36), является потенциалом объемных сил. Разбиение рассматриваемой области и тела плотины на элементы показано на фиг. 4.9. На фиг. 4.10, а и б приведены значения напряжений, возникающих под действием силы тяжести (учтывается только собственный вес плотины) и давления воды, которое рассматривается либо как внешняя нагрузка, либо как внутреннее давление в порах.



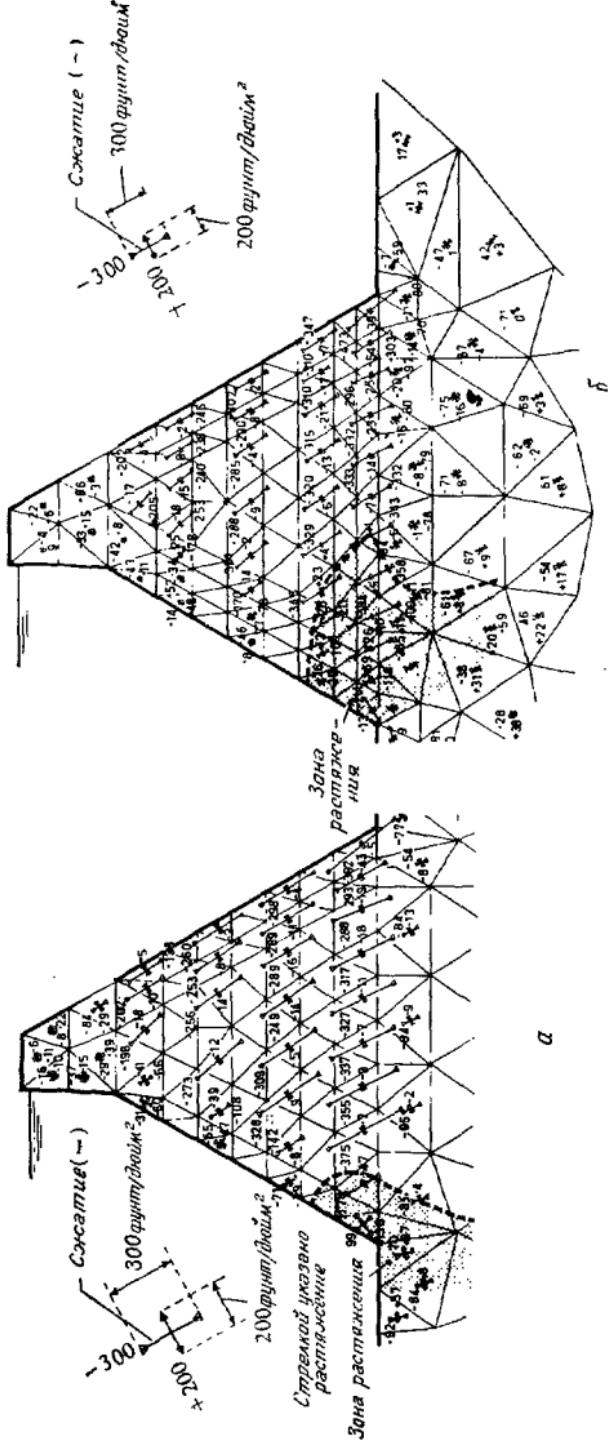
Фиг. 4.8. Долина с искривленными слоями под действием тектонического пружения в горизонтальном направлении (плоская деформация, 170 узлов, 298 элементов).



*a*



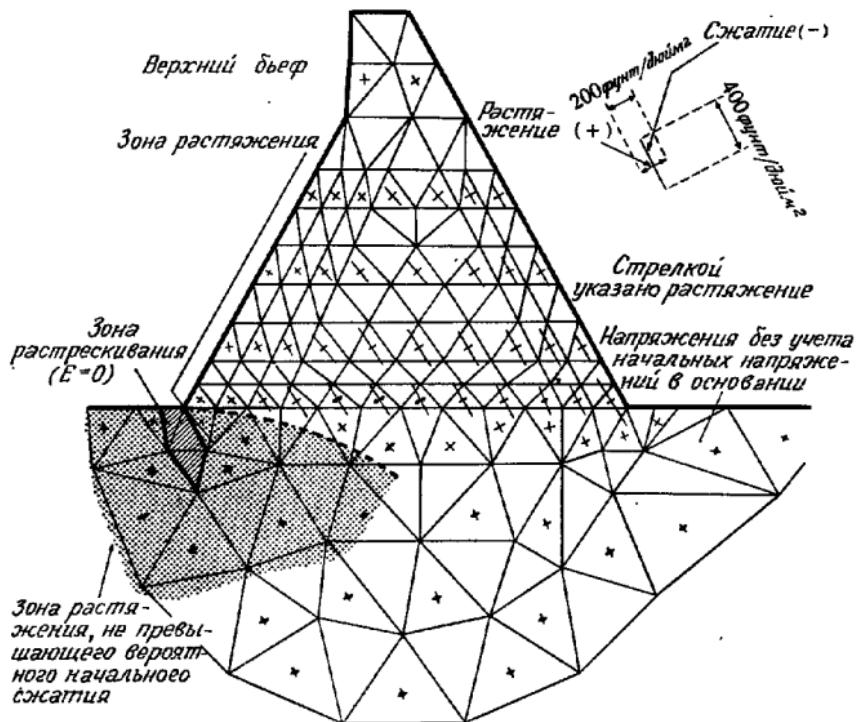
Фиг. 4.9. Расчет напряжений в контрфорсной плотине. Предполагаются плоское напряженное состояние плотины и плоская деформация основания.  
*а* — сечение рассчитываемого контрфорса; *б* — рассчитываемый участок основания и конечные элементы.



Фиг. 4.10. Расчет напряжений в показанной на фиг. 4.9 контрфорсной плотине. Главные напряжения при действии силы тяжести и давления воды, которое учитывается как внешние нагрузки (а) и объемные силы (давление в порах) (б).  
(Ниже фундамента надо прибавить начальные напряжения в камне.)

Оба решения указывают на наличие больших областей растяжения, но очень важно отметить, что во втором случае уровень напряжений выше.

**Растягивание.** В приведенном примере растягивающие напряжения, без сомнения, вызовут образование трещин в породе. Если процесс распространения трещины устойчив, то можно считать, что плотина в безопасности. Наличие трещин

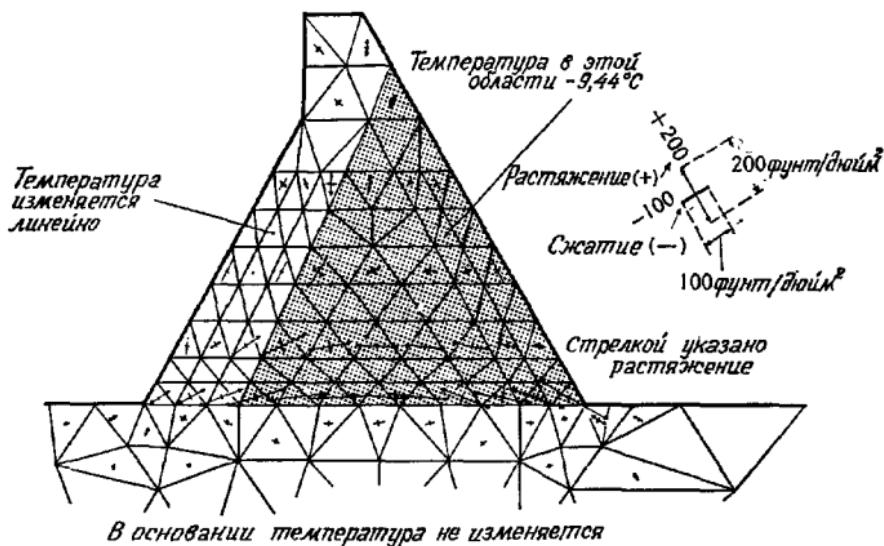


Фиг. 4.11. Напряжения в контрфорсной плотине. Введение в расчет «трещины» меняет распределение напряжений (нагружение такое же, как на фиг. 4.10, б).

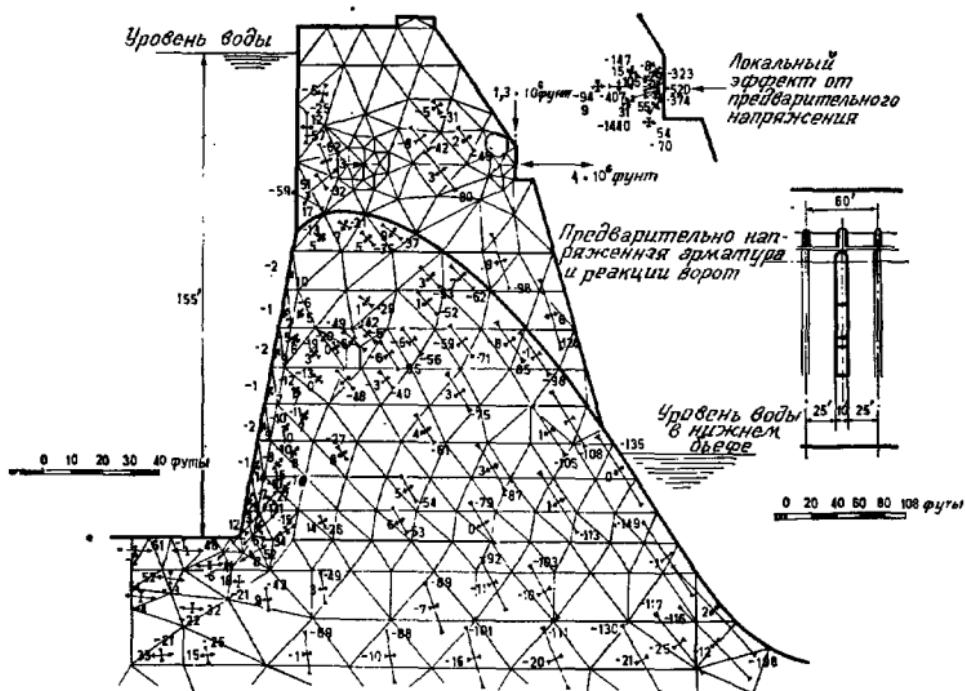
легко учесть в расчете, если приравнять нулю упругие постоянные соответствующих элементов. На фиг. 4.11 показана расчетная схема и результаты расчета при наличии клинообразной трещины у края плотины. Видно, что при таком размере трещины в теле плотины не возникает никаких растягивающих напряжений.

Более подробно исследование распространения трещин и связанного с ним перераспределения напряжений будет описано ниже (см. гл. 18).

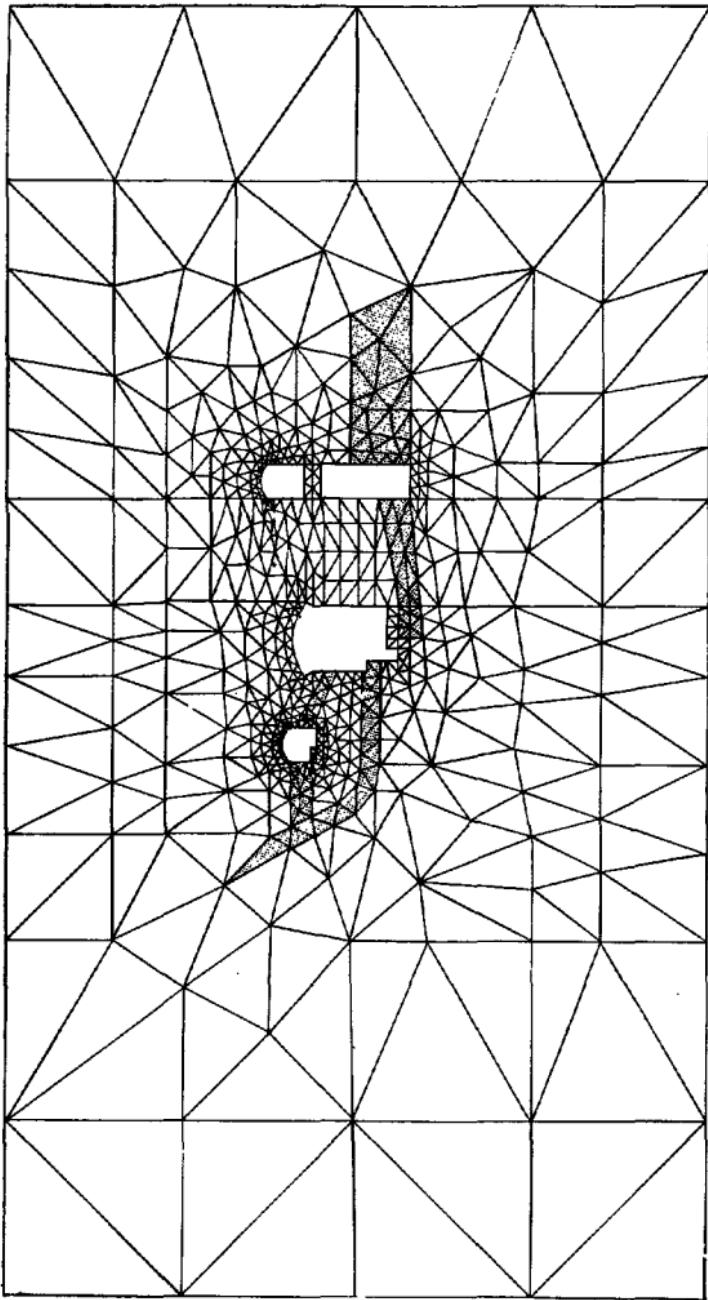
**Температурные напряжения.** В качестве примера расчета температурных напряжений рассматривается та же плотина при



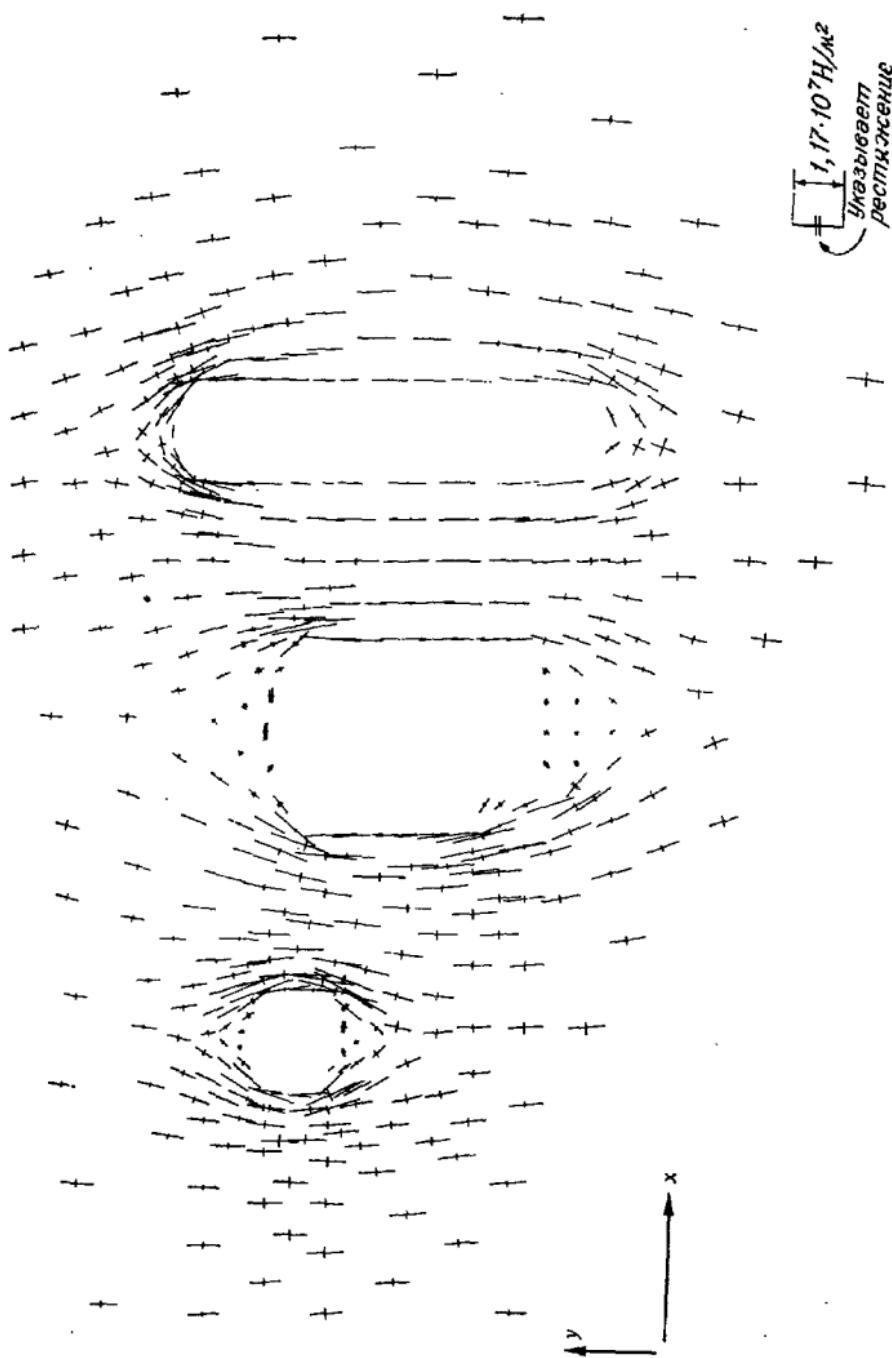
Фиг. 4.12. Расчет напряжений в контрфорсной плотине. Температурные напряжения при охлаждении заштрихованной области до  $-9,44^{\circ}\text{C}$  ( $E = 2,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\alpha = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}$ ).



Фиг. 4.13. Большая водоподъемная плотина с быками и предварительно напряженной арматурой.



Фиг. 4.14. Гидроэлектростанция. Использованные при расчете элементы.



Фиг. 4.15. Подземная электростанция. Распределение главных напряжений.

довольно простом распределении температур. Результаты расчета приведены на фиг. 4.12.

**Гравитационные плотины.** Расчет опорной плотины является характерным примером применения метода конечных элементов. Несложно рассмотреть и другой тип плотины — гравитационную плотину с быками или без них. На фиг. 4.13 приведены результаты расчета большой плотины с быками и подъемными затворами.

Ясно, что в этом случае аппроксимация напряженно-деформированного состояния в окрестности резкого изменения геометрии сечения, т. е. в области, где быки соединяются с телом плотины, двумерным состоянием сомнительна. Однако она приводит лишь к локальным ошибкам.

Здесь важно отметить, что для одновременного изучения концентрации напряжений в местах крепления тросов и распределения напряжений в плотине и в основании используются элементы разных размеров. Линейные размеры элементов относятся как 30:1 (самые большие элементы, использовавшиеся для исследования основания, на рисунке не показаны).

**Подземная электростанция.** Этот пример, иллюстрированный на фиг. 4.14 и 4.15, демонстрирует возможности метода. Главные напряжения вычерчиваются ЭВМ автоматически. Расчеты проводились при различных начальных напряжениях  $\{\sigma_0\}$ , что связано с неточностью знаний геологических условий. Возможность быстрого решения задачи и представление результатов в виде графиков позволили оценить границы изменения напряжений и принять техническое решение.

#### 4.5. Особенности исследования плоского деформированного состояния в искажимом материале

Следует отметить, что соотношение (4.20), определяющее матрицу упругости  $[D]$  для изотропного материала, теряет смысл, если коэффициент Пуассона становится равным 0,5, так как при этом знаменатель обращается в бесконечность. Эту трудность можно просто обойти, если в расчете использовать значения коэффициента Пуассона, близкие к 0,5, но не равные этой величине. Однако опыт показывает, что такой прием ухудшает решение. Геррмани [10] предложил другой метод, связанный с использованием нового вариационного принципа. Подробно этот метод изложен в упомянутой работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aero. Sci.*, 23, 805—823 (1956).
2. Clough R. W., The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.

3. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. Лехницкий С. Г., Теория упругости анизотропного тела, ГИТЛ, М.—Л., 1950.
5. Hearmon R. F. S., An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford Univ. Press, 1961.
6. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Slagg K. G., Stresses in Anisotropic Media with Particular Reference to Problems of Rock Mechanics, *J. Strain Analysis*, 1, 172—182 (1966).
7. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, ГИТЛ, М.—Л., 1951.
8. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Buttress Dams on Complex Rock Foundations, *Water Power*, 16, 193 (1964).
9. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Stresses in Buttress Dams, *Water Power*, 17, 69 (1965).
10. Herrmann L. R., Elasticity Equations for Incompressible, or Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem, *JAIAA*, 3, 1896 (1965); есть русский перевод: Геррманн, Вариационный принцип для уравнений упругости несжимаемых и почти несжимаемых материалов, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 10, стр. 139—144 (1965).

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

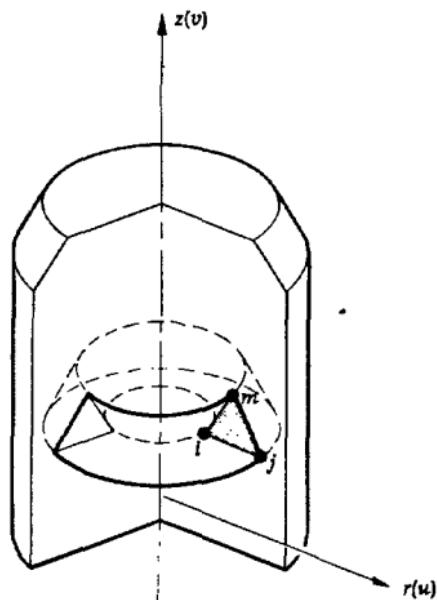
## 5.1. Введение

Исследование распределения напряжений в телах вращения (осесимметричных телах) при осесимметричном нагружении представляет большой практический интерес. Поскольку эти задачи тоже двумерные [1, 2], с математической точки зрения они аналогичны задачам о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях. Вследствие симметрии деформированное, а следовательно, и напряженное состояния в любом сечении по оси симметрии тела полностью определяются двумя компонентами перемещений. Такое сечение показано на фиг. 5.1. Если  $r$  и  $z$  — радиальная и осевая координаты точки, а  $u$  и  $v$  — соответствующие перемещения, легко заметить, что перемещения внутри показанного на рисунке треугольного элемента  $ijm$  могут быть описаны с помощью тех же самых функций перемещения, которые использовались в гл. 4.

Соответствующий рассматриваемому элементу объем, по которому должны браться все интегралы, представляет собой тело вращения, показанное на фиг. 5.1.

Как и прежде, треугольный элемент рассматривается главным образом с иллюстративной целью, хотя все основные выводы имеют общий характер.

Для плоской задачи было показано, что в выражение для внутренней работы входят только три компоненты деформации в координатной плоскости, а компоненты напряжения, нормальные к координатной плоскости, не дают вклада в энергию, ибо равны нулю либо напряжения, либо соответствующие деформации.



Фиг. 5.1. Элемент осесимметричного тела.

В осесимметричном случае любое радиальное перемещение вызывает деформацию в окружном направлении, и, так как напряжения в этом направлении не равны нулю, в рассмотрение должны быть введены четвертая компонента деформации и соответствующее напряжение. В этом состоит отличительная особенность осесимметричного случая.

Читателю может показаться, что математические выкладки этой главы несколько сложнее использованных в предыдущей, но, по существу, они тоже основываются на общих соображениях, изложенных в гл. 2.

## 5.2. Характеристики элемента

### 5.2.1. Функция перемещений

Используя треугольный элемент (фиг. 5.1) с узлами  $i, j, m$ , пронумерованными против часовой стрелки, определим узловое перемещение через две его компоненты

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

а перемещения элемента — вектором

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

Очевидно, что, как и в подразд. 4.2.1, для однозначного определения перемещений внутри элемента можно использовать линейный полином. Поскольку в этом случае алгебраические выкладки идентичны проделанным в гл. 4, мы не будем их повторять.

Поле перемещений снова определяется соотношением (4.7)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e,$$

где

$$N'_i = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta} \text{ и т. д.,} \quad (5.3)$$

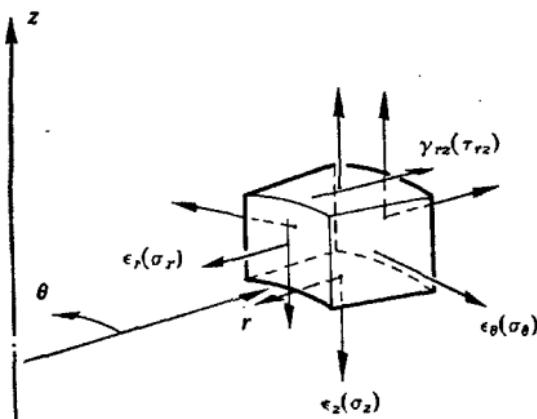
а  $I$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ . В этих соотношениях

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j, \\ b_i &= z_j - z_m = z_{jm}, \\ c_i &= r_m - r_j = r_{mj}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов. Величина  $\Delta$ , как и раньше, представляет собой площадь треугольника.

### 5.2.2. Деформация (полная)

Как уже упоминалось, в осьсимметричном случае необходимо рассматривать четыре компоненты деформации. Это фактически все компоненты, которые могут быть отличны от нуля при осьсимметричной деформации. Они и соответствующие им напряжения схематически изображены на фиг. 5.2.



Фиг. 5.2. Деформации и напряжения, определяемые при расчете осьсимметричных тел.

Все рассматриваемые компоненты вектора деформации можно выразить через перемещения с помощью приведенного ниже соотношения. Использованные выражения очевидны, и они здесь выводиться не будут. Читатель, интересующийся подробным выводом, может обратиться к любому учебнику по теории упругости [3]. Таким образом, имеем

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{array} \right\}. \quad (5.5)$$

Используя функции перемещений, определенные соотношениями (5.3) и (5.4), получаем

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m] \{\delta\}^e,$$

где

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} N'_i & 0 \\ \frac{\partial N'_i}{\partial z} & \frac{\partial N'_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \text{ и т. д. (5.6)}$$

Поскольку матрица  $B$  содержит теперь координаты  $r$  и  $z$ , деформации в элементе не будут постоянными, как в случаях плоского напряженного и плоского деформированного состояний. Это различие обусловлено членом  $\epsilon_0$ . Если заданные узловые перемещения таковы, что  $u$  пропорционально  $r$ , то все деформации будут постоянны. Очевидно, что, поскольку только такие перемещения соответствуют постоянным деформациям, используемая функция перемещений удовлетворяет основному критерию гл. 2.

### 5.2.3. Начальная деформация (температурная деформация)

В общем случае должны быть рассмотрены четыре независимые компоненты вектора начальной деформации

$$\{\epsilon_0\} = \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{z0} \\ \epsilon_{r0} \\ \epsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{rz0} \end{array} \right\}. \quad (5.7)$$

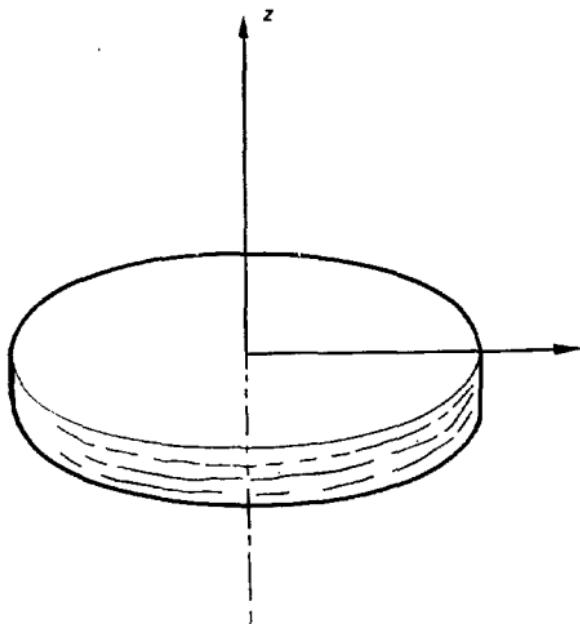
Хотя, вообще говоря, начальная деформация может изменяться внутри элемента, удобно считать ее постоянной.

Возникновение начальной деформации чаще всего обусловлено тепловым расширением. Для изотропного материала в этом случае будем иметь

$$\{\epsilon_0\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{array} \right\}, \quad (5.8)$$

где  $\theta^e$  — средняя по элементу температура, а  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Общий случай анизотропии материала необходиомости рассматривать, так как при этом осевая симметрия невозможна. Некоторый практический интерес представляет «слоистый» материал, аналогичный рассмотренному в гл. 4, плоскость изотропии которого перпендикулярна оси симметрии (фиг. 5.3). У та-



Фиг. 5.3. Слоистый материал в случае осевой симметрии.

ких материалов возможны два различных коэффициента линейного расширения:  $\alpha_z$  в осевом направлении и  $\alpha_r$  в плоскости, перпендикулярной этому направлению.

В этом случае начальная температурная деформация имеет вид

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_z \theta^e \\ \alpha_r \theta^e \\ \alpha_r \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

Такая анизотропия часто встречается при исследовании деталей машин из слоистых или стекловолокнистых материалов.

### 5.2.4. Матрица упругости

Теперь надо получить матрицу упругости  $[D]$ , связывающую деформации  $\{\epsilon\}$  и напряжения  $\{\sigma\}$  стандартным соотношением

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}).$$

Рассмотрим сначала слоистый анизотропный материал, так как матрица упругости для изотропного материала может быть получена как частный случай.

**Слоистый анизотропный материал** (фиг. 5.3). Полагая, что ось  $z$  направлена по нормали к плоскостям слоев, перепишем соотношения (4.22) (пренебрегая для удобства, как и ранее, начальными деформациями) в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{v_2 \sigma_r}{E_2} - \frac{v_2 \sigma_\theta}{E_2}, \\ \epsilon_r &= -\frac{v_2 \sigma_z}{E_2} + \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{v_1 \sigma_\theta}{E_1}, \\ \epsilon_\theta &= -\frac{v_2 \sigma_z}{E_2} - \frac{v_1 \sigma_r}{E_1} + \frac{\sigma_\theta}{E_1}, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G_2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Вводя опять обозначения

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{и} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

и разрешая систему относительно напряжений, находим

$$D = \frac{E_2}{(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2)} \times \times \begin{bmatrix} 1-v_1^2 & nv_2(1+v_1) & nv_2(1+v_1) & 0 \\ n(1-nv_2^2) & (v_1+nv_2^2)n & n(1-nv_2^2) & 0 \\ & & & m(1+v_1)(1-v_1-2nv_2^2) \end{bmatrix}.$$

Симметрично

**Изотропный материал.** Для изотропного материала матрицу  $[D]$  получаем, полагая

$$E_1 = E_2 = E \quad \text{или} \quad n = 1$$

и

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu,$$

а также используя известную зависимость между упругими постоянными

$$\frac{G_2}{E_2} = \frac{G}{E} = m = \frac{1}{2(1+\nu)}.$$

Подстановка приведенных выше выражений в (5.11) дает

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{Симметрично} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

### 5.2.5. Матрица жесткости

Матрицу жесткости элемента  $ijm$  можно составить, используя соотношение (2.10). Так как объемный интеграл берется по всей кольцевой области, получим

$$[k]^e = 2\pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz, \quad (5.13)$$

где матрица  $[B]$  определяется равенством (5.6), а матрица  $[D]$  — соотношениями (5.11) или (5.12) в зависимости от свойств материала.

Интегрирование теперь не удается выполнить так же просто, как в случае плоского напряженного состояния, поскольку матрица  $[B]$  зависит от координат. Существуют две возможности: первая — интегрировать численно и вторая — перемножить входящие в интеграл матрицы и затем почленно проинтегрировать.

Простейший приближенный метод состоит в определении матрицы  $[\bar{B}]$  для центра тяжести сечения элемента с координатами

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_f + r_m}{3}$$

и

$$\bar{z} = \frac{z_i + z_f + z_m}{3}.$$

В этом случае первое приближение имеет вид

$$[k] = 2\pi [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \bar{r} \Delta, \quad (5.14)$$

где  $\Delta$  — площадь треугольника.

Можно было бы использовать более точные методы, требующие вычисления подынтегрального выражения в нескольких точках треугольника. Такие методы будут подробно рассмотрены в гл. 8. Однако можно показать, что если используемый метод численного интегрирования позволяет точно вычислить объем элемента, то при неограниченном возрастании числа разбиений решение будет сходиться к точному [4]. Предложенное здесь «одноточечное» интегрирование является методом численного интегрирования именно такого типа, поскольку известно, что объем тела вращения равен произведению площади сечения на длину пути, пройденного центром тяжести. Для получения достаточной точности при использовании простых треугольных элементов обычно требуется довольно мелкое разбиение, поэтому большинство созданных программ использует этот простейший метод интегрирования, который, возможно несколько неожиданно, иногда оказывается лучше точного. Причина этого состоит в том, что при точном интегрировании появляются члены, содержащие логарифмы. Под знак логарифма входят отношения типа  $r_i/r_m$ . Когда элемент находится на большом расстоянии от оси, величина этого отношения близка к единице и логарифм вычисляется неточно.

Если возникает необходимость в точном интегрировании, то удобно поступить следующим образом.

Как и в предыдущей главе, разобьем матрицу жесткости на отдельные подматрицы размерности  $2 \times 2$  [см. соотношения (4.28)–(4.30)] вида

$$[k_{rs}] = 2\pi \int \int [B_r]^T [D] [B_s] r dr dz. \quad (5.15)$$

Целесообразно выделить в подматрицах  $[B]$  постоянную и переменную части. Так, например, можно написать

$$[B_i] = [\bar{B}_i] + [B'_i], \quad (5.16)$$

где  $[\bar{B}_i]$  — матрица  $[B_i]$  для центра тяжести элемента [использованная в (5.14)], а второе слагаемое — отклонение от этой величины. Легко показать, что это слагаемое можно записать в виде

$$[B'_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{(a_i + c_i z)/r - (a_i + c_i \bar{z})/\bar{r}}{2\Delta}. \quad (5.17)$$

Подставляя эти выражения в (5.15) и замечая, что

$$\int [B'_i] r dr dz = [0],$$

получаем

$$[k_{rs}] = [\bar{k}_{rs}] + [k'_{rs}], \quad (5.18)$$

где первое слагаемое в точности совпадает с (5.14), а второе — поправочный член, определяемый выражением

$$[k'_{rs}] = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \int \{(a_r + c_r z)/r - (a_r + c_r z)/\bar{r}\} \{(a_s + c_s z)/r - (a_s + c_s \bar{z})/\bar{r}\} r dr dz. \quad (5.19)$$

Если для интегралов использовать сокращенные обозначения

$$\int \frac{1}{r} dr dz = \Delta \cdot I_1, \\ \int \frac{z}{r} dr dz = \Delta \cdot I_2, \\ \int \frac{z^2}{r} dr dz = \Delta \cdot I_3, \quad (5.20)$$

то окончательно поправочный член можно записать в виде

$$[k'_{rs}] = \frac{\pi}{2\Delta} \begin{bmatrix} D_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \{a_r a_s (I_1 - 1/\bar{r}) + (a_r c_s + a_s c_r) (I_2 - \bar{z}/\bar{r}) + c_r c_s (I_3 - \bar{z}^2/\bar{r})\}. \quad (5.21)$$

Интегралы  $I_1 - I_3$  вычисляются в явном виде через узловые координаты.

### 5.2.6. Внешние узловые силы

В двумерных задачах, рассмотренных в предыдущей главе, вопрос определения узловых сил, обусловленных внешней нагрузкой, был настолько ясен, что не нуждался в комментариях. В рассматриваемом случае, однако, следует иметь в виду, что узловые силы изображают совокупность сил, действующих по всей длине окружности, образующей «узел» элемента. Это обстоятельство уже учитывалось при составлении матрицы жесткости элемента, когда интегрирование проводилось по всей кольцевой области элемента.

Следовательно, если  $\bar{R}$  представляет собой радиальную составляющую силы на единицу длины окружности узла радиуса  $r$ , то в расчетах должна использоваться внешняя «сила»  $2\pi r \bar{R}$ . Аналогично сила в осевом направлении  $2\pi r \bar{Z}$  характеризует совокупность осевых сил.

**5.2.7. Узловые силы, обусловленные начальной деформацией**  
Снова используя (2.9), получаем

$$\{F\}_{e_0}^e = -2\pi \int [B]^T [D] \{e_0\} r dr dz. \quad (5.22)$$

Учитывая, что деформация  $\{e_0\}$  постоянна, для каждого узла можно записать

$$\{F_i\}_{e_0}^e = -2\pi \left( \int [B_i]^T r dr dz \right) [D] \{e_0\}. \quad (5.23)$$

Интегрирование осуществляется тем же способом, что и при определении жесткости. Ясно, что опять можно использовать приближенное выражение

$$\{\bar{F}_i\}_{e_0}^e = -2\pi [\bar{B}_i]^T [D] \{e_0\} \bar{r}\Delta \quad (5.24)$$

с поправочным членом. Таким образом, имеем

$$\{F_i\}_{e_0}^e = \{\bar{F}_i\} + \{F'_i\}. \quad (5.25)$$

Однако можно показать, что в этом случае поправочный член равен нулю, так как

$$\{F'_i\}_{e_0}^e = 2\pi \left( \int [B'_i]^T r dr dz \right) [D] \{e_0\} = 0,$$

поэтому представление

$$\{F_i\}_{e_0}^e = -2\pi [\bar{B}]^T [D] \{e_0\} \bar{r}\Delta \quad (5.26)$$

является точным. Силы, обусловленные начальными напряжениями, определяются таким же образом.

### 5.2.8. Распределенные объемные силы

При решении осесимметричных задач часто возникает необходимость рассматривать распределенные объемные силы, такие, как сила тяжести (если она действует вдоль оси  $z$ ), центробежная сила во вращающихся механизмах, внутреннее давление в пористом материале.

Запишем такие силы в виде вектора

$$p = \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix}, \quad (5.27)$$

где  $R$ ,  $Z$  — компоненты силы в направлениях  $r$  и  $z$  соответственно на единицу объема материала. В соответствии с (2.11) имеем

$$\{F\}_p^e = -2\pi \int [N]^T \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} r dr dz,$$

или для  $i$ -го узла

$$\{F_i\}_p^e = -2\pi \int \left\{ \begin{matrix} R \\ Z \end{matrix} \right\} N'_i r dr dz. \quad (5.28)$$

Если в первом приближении допустить, что объемные силы постоянны, то с помощью переноса начала координат, так же как в подразд. 4.2.7, легко получить

$$\{\bar{F}_i\}_p^e = \{\bar{F}_j\}_p^e = \{\bar{F}_m\}_p^e = -2\pi \left\{ \begin{matrix} R \\ Z \end{matrix} \right\} \frac{\tilde{r}\Delta}{3}. \quad (5.29)$$

Хотя это выражение не совсем точно, можно показать, что величина поправочного члена уменьшается с уменьшением размеров элемента и вследствие самоуравновешенности он не приведет к заметной ошибке. Ясно, что в случае необходимости интегрирование в (5.28) можно произвести точно.

Если объемные силы заданы потенциалом, аналогичным введенному в подразд. 4.2.8, т. е.

$$R = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad Z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (5.30)$$

и если этот потенциал линеен относительно своих узловых значений, то можно использовать выражение, эквивалентное (4.40).

Во многих задачах объемные силы пропорциональны расстоянию  $r$  от оси симметрии. Например, во вращающемся теле

$$R = \omega^2 r \rho, \quad (5.31)$$

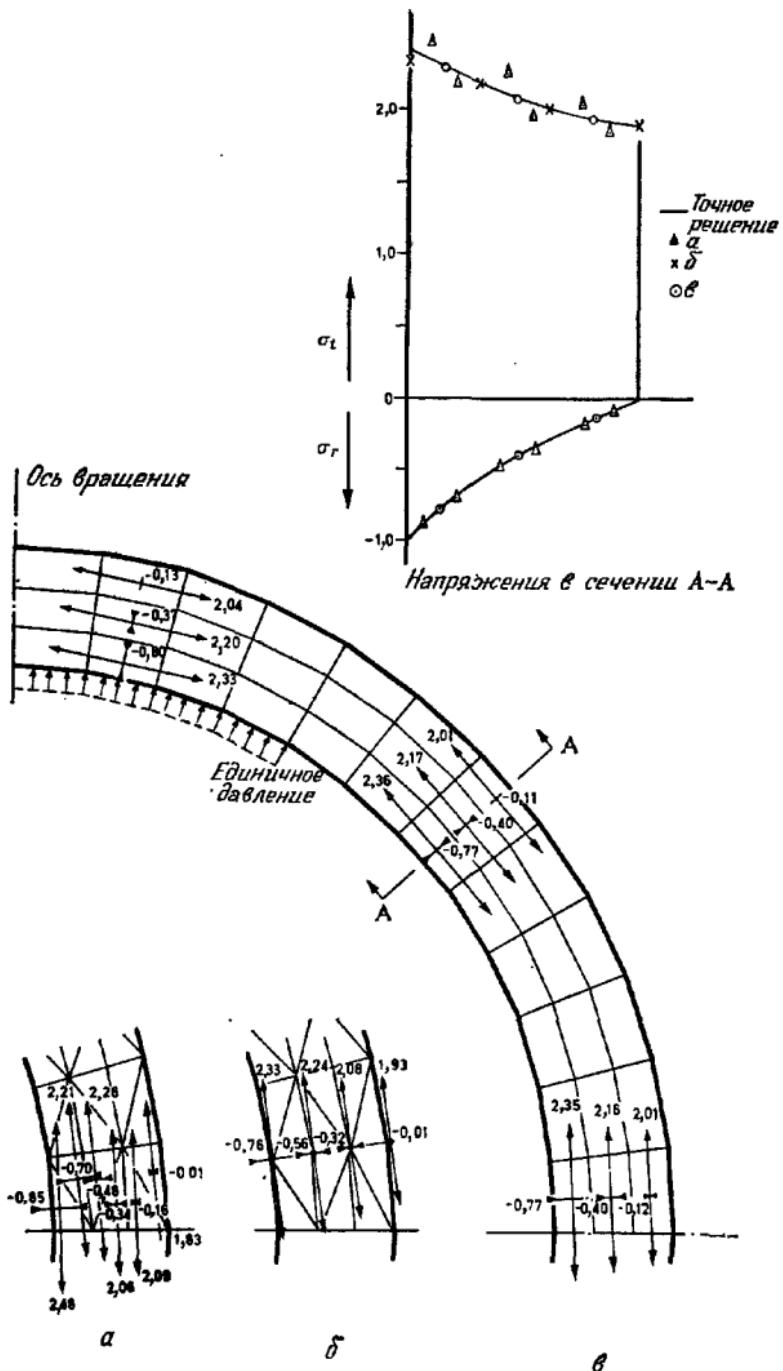
где  $\omega$  — угловая скорость, а  $\rho$  — плотность материала. Очевидно, что аппроксимация (5.29) в этом случае будет очень грубой, и для получения хорошего результата необходимо точное интегрирование.

### 5.2.9. Вычисление напряжений

Как следует из формул (5.5) и (5.6), напряжения не постоянны внутри элемента. В этом случае удобно усреднять напряжения и относить их к центру тяжести элемента. Матрица напряжений, получающаяся из формул (5.6) и (2.3), имеет, как обычно, вид

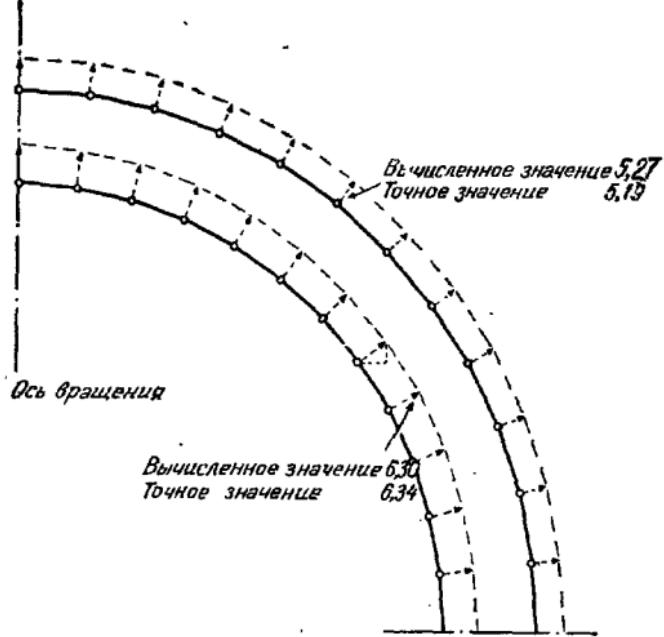
$$\{\bar{\sigma}\}^e = [D][\bar{B}] \{\delta\}^e - [D] \{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\}.$$

Можно показать, что значения напряжений несколько колеблются от элемента к элементу и усреднение узловых напряжений позволяет улучшить результат.

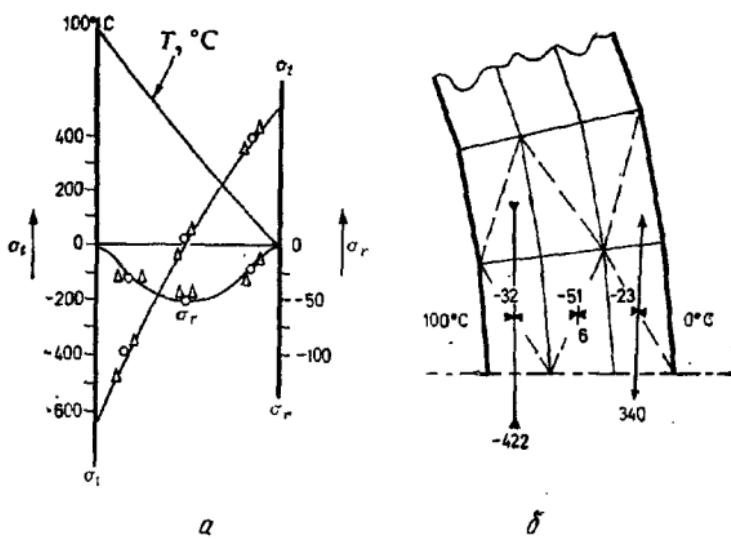


Фиг. 5.4. Напряжения в сфере при действии внутреннего давления (коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ).

а — треугольные элементы — значения в центрах тяжести; б — треугольные элементы — усреднение по узлам; в — четырехугольные элементы — усреднение по смежным треугольникам.



Фиг. 5.5. Перемещения внутренней и внешней поверхностей сферы при показанном на фиг. 5.4 нагружении.

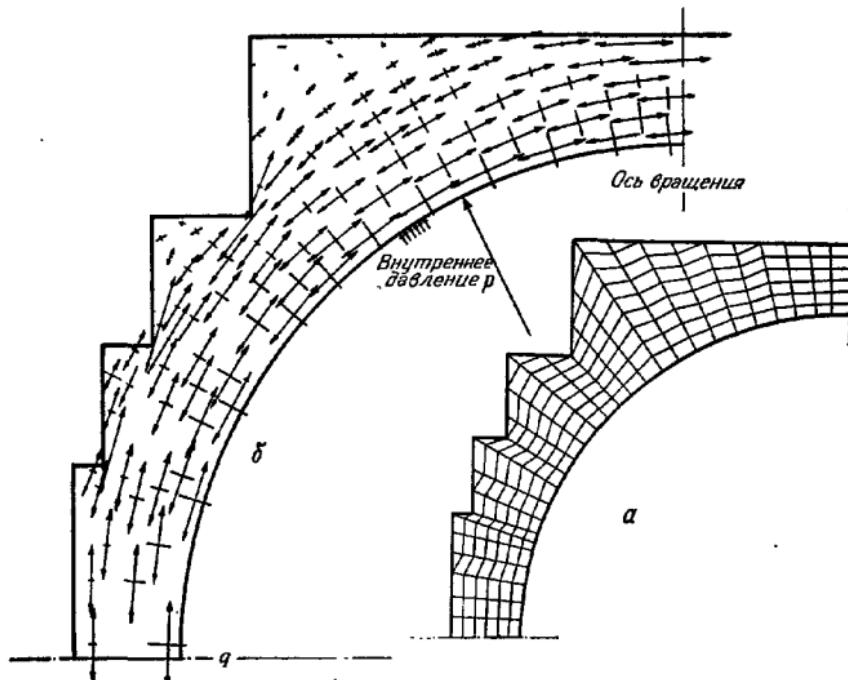


Фиг. 5.6. Сфера при установившемся распределении температур ( $100^{\circ}\text{C}$  на внутренней поверхности и  $0^{\circ}$  на внешней).  
 а — распределение температуры и напряжения по радиусу; б — усреднение по четырехугольникам. — точное решение;  $\Delta$  усреднение по треугольникам,  $\circ$  усреднение по четырехугольникам.

### 5.3. Некоторые примеры

Решения тестовых задач, таких, например, как задачи о цилиндре с постоянными осевыми или радиальными напряжениями, как и следовало ожидать, совпадают с точными. Это очевидное следствие того, что функция перемещений может описывать однородные деформации.

Задача о сфере под действием внутреннего давления, для которой характерно почти линейное изменение напряжений, имеет точное решение. На фиг. 5.4, а показаны отнесенные к центрам тяжести элементов напряжения, полученные при использовании достаточно крупной сетки. Следует отметить, что полученные напряжения несколько колеблются около точного решения. (Эти колебания становятся еще более заметными при больших значениях коэффициента Пуассона, хотя точное реше-



Фиг. 5.7. Сосуд реактора высокого давления.

*а*—использованные при расчете четырехугольные элементы, разбиение на элементы осуществлялось ЭВМ автоматически; *б*—напряжения при равномерно распределенном давлении  $p$  (чертеж, выполненный ЭВМ). При решении определялись средние по четырехугольникам значения. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,15$ .

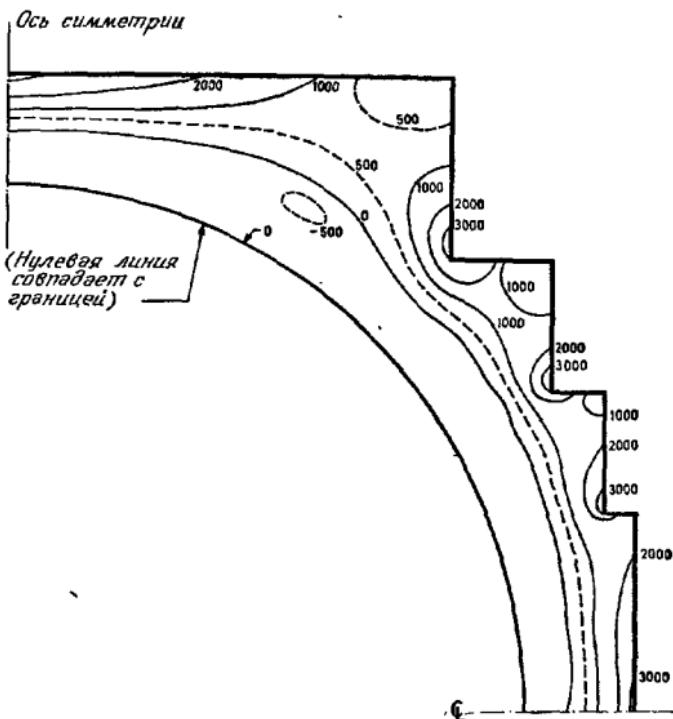
ние не зависит от него.) На фиг. 5.4, б приведено гораздо лучшее приближенное решение, полученное усреднением значений напряжений в узловых точках; с помощью усреднения, результаты которого приведены на фиг. 5.4, в, решение можно еще

улучшить. Хорошее совпадение с точным решением даже при использовании весьма грубого разбиения свидетельствует о высокой точности метода. На фиг. 5.5 с точным решением сравниваются перемещения узловых точек.

На фиг. 5.6 показаны температурные напряжения в той же самой сфере, вычисленные для установившегося температурного поля. Сравнение с точным решением снова показывает высокую точность метода.

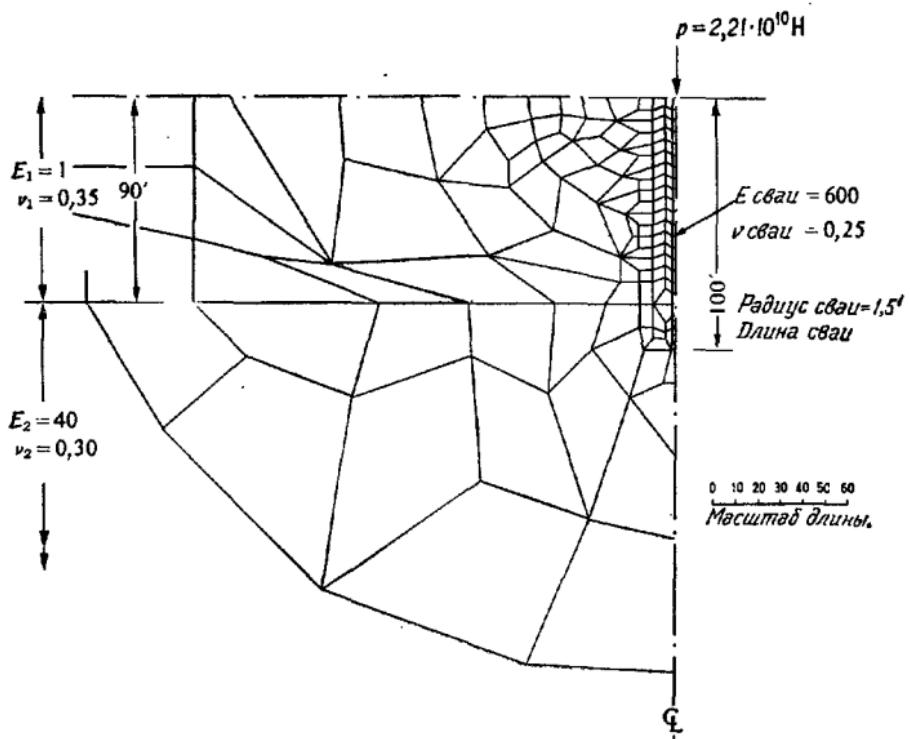
#### 5.4. Практические приложения метода

В этом разделе приводятся два примера практического применения метода к исследованию осесимметрического нагружения.

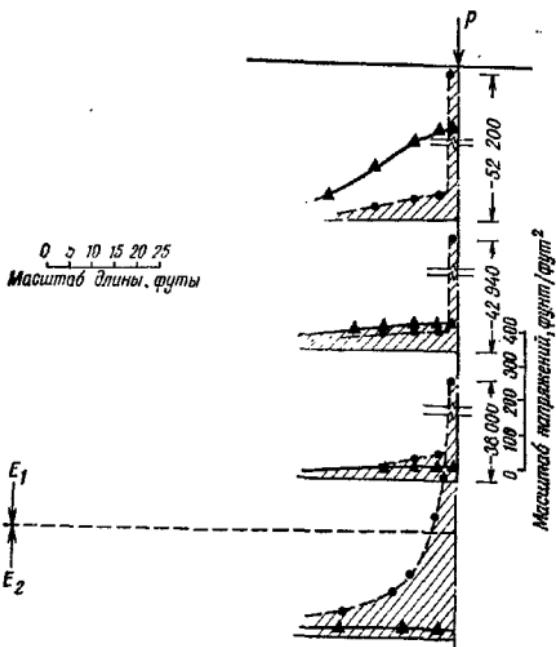


Фиг. 5.8. Сосуд реактора высокого давления. Температурные напряжения в установившемся состоянии. Линии максимальных главных напряжений (фунт/дюйм<sup>2</sup>). (Температура внутри 400 °C, снаружи 0 °C,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-6}$  1/°C,  $E = 2,58 \cdot 10^6$  фунт/дюйм<sup>2</sup>,  $v = 0,15$ .)

**Реактор из предварительно напряженного железобетона под давлением.** На фиг. 5.7 показано распределение напряжений в упрощенном варианте такого реактора. Вследствие симметрии рассматривается только одна его половина. Приведены



Фиг. 5.9а. Свая в слоистом грунте. Нерегулярное разбиение и исходные данные.



Фиг. 5.9б. Свая в слоистом грунте. График вертикальных напряжений в горизонтальных сечениях. Показано также решение задачи Буссинеска при  $E_1 = E_2 = E_{\text{свай}}$  и проведено сравнение с точным решением.

— точное решение задачи Буссинеска; ▲ решение задачи Буссинеска методом конечных элементов; ■ решение задачи Буссинеска методом конечных разностей

напряжения, возникающие при действии внутреннего давления. Аналогичные результаты легко получить для случая предварительно напряженной арматуры, если в узловых силах учесть нагрузку от арматуры.

На фиг. 5.8 приведены линии равных максимальных главных температурных напряжений. Температурные напряжения и само температурное поле в установившихся условиях определены с помощью метода конечных элементов, как описано в гл. 15.

**Свая фундамента.** На фиг. 5.9а и 5.9б показано распределение напряжений вокруг сваи фундамента, проходящей через два различных пласта грунта. Решение этой неоднородной задачи не представляет трудностей и получается с помощью стандартной программы.

## 5.5. Несимметричное нагружение

Метод, изложенный в настоящей главе, может быть распространен на случай несимметричного нагружения. Если изменение нагрузки по окружности описывается с помощью круговых гармоник, то можно рассматривать только одно осевое сечение, хотя число степеней свободы при этом увеличивается до трех.

Некоторые детали метода описаны в гл. 13. В работе [5] можно найти полное его изложение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Clough R. W., Ch. 7 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
2. Clough R. W., Rashid Y., Finite Element Analysis of Axi-Symmetric Solids, *Proc. ASCE*, 91, EM.1, 71 (1965).
3. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. Irons B. M., Comment on «Stiffness Matrices for Sector Element», Raju I. R., Rao A. K., *JAIAA*, 7, 156—157 (1969); есть русский перевод: Айронс, Замечание к статье «Матрицы жесткости элементов в форме сектора», *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 3, стр. 271 (1970).
5. Wilson E. L., Structural Analysis of Axi-Symmetric Solids, *JAIAA*, 3, 2269—2274 (1965); есть русский перевод: Вильсон, Расчет на прочность осесимметричных тел, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 12, стр. 124—132 (1965).

## ГЛАВА 6

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

### 6.1. Введение

Метод конечных элементов применяется и для решения трехмерных задач. Такие задачи охватывают почти все практические случаи, хотя иногда предположение о том, что напряженное или деформированное состояние двумерно, дает вполне приемлемую и более экономичную «модель».

Простейшим элементом для двумерных задач был треугольник. В трехмерном случае его аналогом является тетраэдр — элемент с четырьмя узлами. В настоящей главе будут рассмотрены основные характеристики этого элемента. Трудность, не встречавшаяся ранее, состоит в порядке индексации узлов, т. е. в построении конечно-элементной модели тела.

Впервые тетраэдральный элемент предложили использовать Галлагер и др. [1] и Мелош [2]. Позднее Аргирис [3, 4] подробно разработал этот вопрос, а Рашид [5] показал, что с помощью больших современных ЭВМ могут быть решены поставленные таким образом практические задачи. Очевидно, однако, что для получения заданной степени точности количество простых тетраэдральных элементов должно быть очень большим. Это приводит к огромному числу уравнений, что несколько ограничивает на практике применение метода. Кроме того, ширина ленты матрицы основной системы уравнений становится большой и в результате увеличивается необходимый объем памяти вычислительной машины.

Чтобы представить себе степень сложности такого рода задач, предположим, что точность аппроксимации двумерных задач треугольными элементами сравнима с точностью аппроксимации трехмерных задач тетраэдрами. Если, например, для достижения заданной точности при определении напряжений в квадратной двумерной области требуется сетка размерности  $20 \times 20$ , т. е. надо рассмотреть 400 узловых точек, то число уравнений для определения двух компонент перемещений каждого узла будет около 800. (Это вполне приемлемая цифра.) Лента матрицы системы содержит 20 узлов (см. главу, посвященную методам вычислений), т. е. около 40 переменных.

Эквивалентная трехмерная область представляет собой куб с  $20 \times 20 \times 20 = 8000$  узловых точек. Так как теперь должны

быть определены три компоненты перемещений в каждой узловой точке, общее число уравнений достигает 24 000, а лента матрицы содержит  $20 \times 20 = 400$  взаимосвязанных узлов, т. е. 1200 переменных.

Если учесть, что вычислительные трудности при использовании обычных методов решения, грубо говоря, пропорциональны количеству уравнений и квадрату ширины ленты матрицы, то нетрудно представить себе сложность решения таких задач. Не удивительно поэтому, что попытки уточнить решение трехмерных задач связаны в основном с использованием сложных элементов, обладающих большим числом степеней свободы [6—10]. В последних главах будут приведены примеры практического применения таких элементов. Эта глава содержит все необходимые сведения для постановки трехмерных задач теории упругости. Обобщение на случай более сложных элементов не вызовет затруднений.

## 6.2. Характеристики тетраэдрального элемента

### 6.2.1. Функции перемещений

На фиг. 6.1 изображен тетраэдральный элемент  $ijpm$  в системе координат  $x, y$  и  $z$ .

Перемещение любой точки определяется тремя компонентами  $u, v$  и  $w$  в направлениях координат  $x, y$  и  $z$ . Таким образом, вектор перемещений имеет вид

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

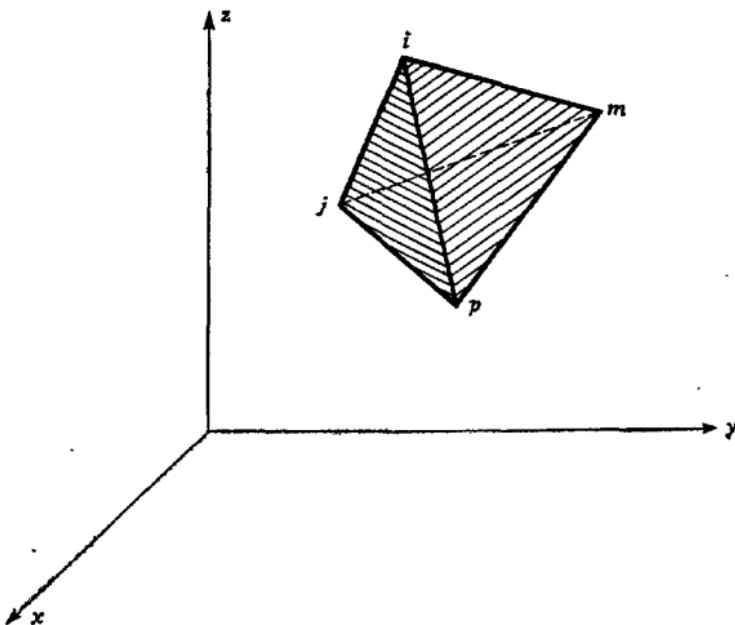
Если для задания линейного закона изменения какой-либо величины в плоском треугольном элементе требовалось три узловых значения, то в трехмерном случае необходимо задать четыре узловых значения. По аналогии с представлением (4.3) можно записать, например,

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z. \quad (6.2)$$

Приравнивая эти выражения перемещениям узловых точек, получаем четыре уравнения типа

$$u_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4z_i \text{ и т. д.,} \quad (6.3)$$

из которых определяются коэффициенты  $a_1 — a_4$ .



Фиг. 6.1. Тетраэдральный элемент. (При нумерации узлов следует придерживаться определенного порядка, начиная, например, с точки  $p$ , остальные узлы нумеруются в направлении против часовой стрелки по отношению к ней —  $pljm$  или  $mipj$  и т. д.)

Запишем теперь соотношение (6.2) в форме, аналогичной (4.5), с использованием определителя

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i + \\
 & + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + \\
 & + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m + \\
 & + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \}, \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

где

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}. \quad (6.5a)$$

Величина  $V$  в данном случае представляет собой объем тетраэдра. Коэффициентами  $a_i, b_i, c_i, d_i$  обозначены определители

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad (6.56)$$

$$c_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}.$$

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов  $p, i, j, m$ .

Как видно из фиг. 6.1, узлы  $p, i, j, m$  пронумерованы в соответствии с правилом правой руки, причем первые три узла пронумерованы по часовой стрелке, если смотреть со стороны последнего узла.

Перемещение элемента определяется двенадцатью компонентами перемещений его узлов:

$$\{\delta\}^e = \left\{ \begin{array}{l} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{array} \right\}, \quad (6.6)$$

где

$$\{\delta_i\} = \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ v_i \\ w_i \end{array} \right\} \text{ и т. д.}$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\{f\} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m, IN'_p] \{\sigma\}^e, \quad (6.7)$$

где скалярные величины определяются соотношениями

$$N'_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \text{ и т. д.,} \quad (6.8)$$

а  $I$  — единичная матрица размерности  $3 \times 3$ .

Ясно, что эти функции перемещений будут удовлетворять требованиям непрерывности на границах между элементами. Этот результат является прямым следствием линейного закона изменения перемещений.

### 6.2.2. Матрица деформаций

В трехмерном случае учитываются все шесть компонент деформации. Используя известные обозначения Тимошенко, запишем матрицу деформаций в виде

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

С помощью соотношений (6.4) — (6.7) легко убедиться, что

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m, B_p] \{\delta\}^e, \quad (6.10)$$

где

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial y} & \frac{\partial N'_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} & \frac{\partial N'_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Остальные подматрицы получаются простой перестановкой индексов.

Начальные деформации, такие, как обусловленные тепловым расширением, можно записать обычным образом в виде шестикомпонентного вектора, имеющего, например, для изотропного

теплового расширения простой вид:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.12)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения, а  $\theta^e$  — средняя по элементу температура.

### 6.2.3. Матрица упругости

В случае материала с анизотропией свойств матрица  $[D]$ , связывающая шесть компонент напряжения с компонентами деформации, может содержать не более чем 21 независимую постоянную (см. подразд. 4.2.4).

В общем случае

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}. \quad (6.13)$$

Так как такое умножение никогда не выполняется в явном виде, запишем здесь матрицу  $[D]$  только для изотропного материала, хотя это нетрудно сделать и для случая произвольной анизотропии. При использовании обычных упругих постоянных: модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  — матрица имеет вид

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Симметрично

### 6.2.4. Матрицы жесткости, напряжений и нагрузок

Выражение для матрицы жесткости, определяемой в общем случае соотношением (2.10), можно проинтегрировать точно, так как компоненты деформации и напряжения постоянны внутри элемента.

Подматрица с индексами  $rs$  матрицы жесткости имеет размерность  $3 \times 3$  и определяется соотношением

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] V, \quad (6.15)$$

где  $V$  — объем тетраэдра.

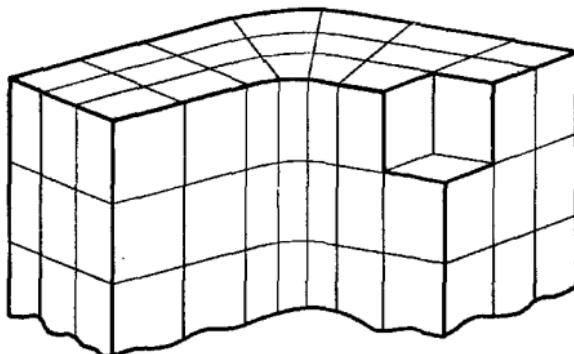
Узловые силы, обусловленные начальной деформацией, записываются в виде, аналогичном (4.31):

$$\{F\}_{e_0}^e = -[B]^T [D] \{\epsilon_0\} V, \quad (6.16)$$

или для  $i$ -й компоненты

$$\{F_i\}_{e_0}^e = -[B_i]^T [D] \{\epsilon_0\} V.$$

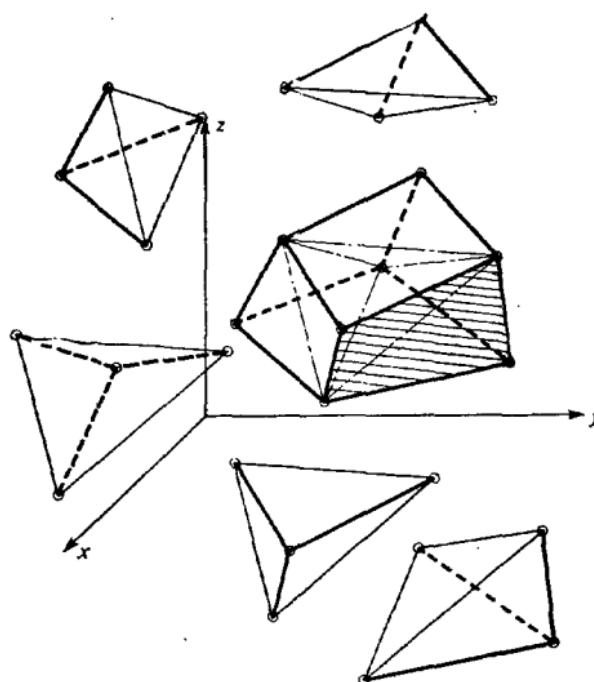
Аналогичные выражения получаются для сил, обусловленных начальными напряжениями.



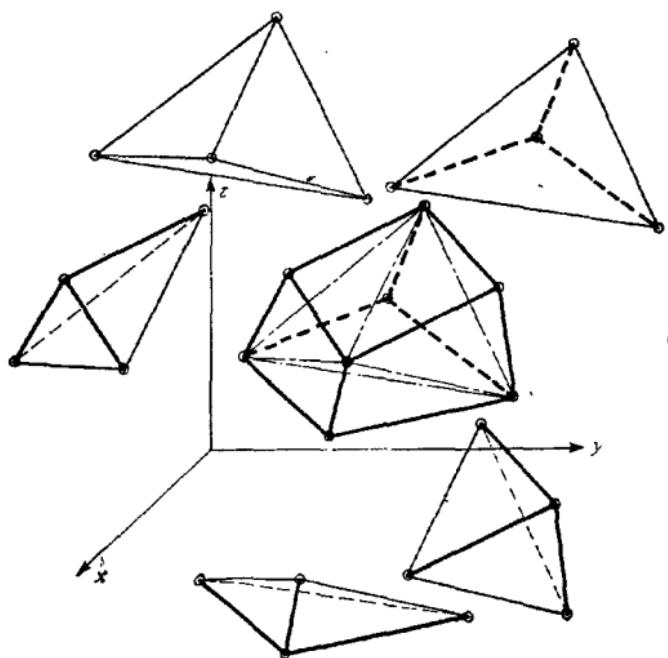
Фиг. 6.2. Способ разбиения трехмерного тела на элементы типа «кирпичиков».

Сходство с результатами гл. 4 очевидно, так что необходимость в дальнейших выводах отпадает. Читатель не встретит никаких трудностей при составлении вычислительной программы.

Распределенные объемные силы снова могут быть заданы их составляющими  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  или потенциалом объемных сил. Как и раньше, можно показать, что если объемные силы постоянны, то компоненты их результирующей распределяются по узлам элемента равномерно [см. (4.34)].



*a*



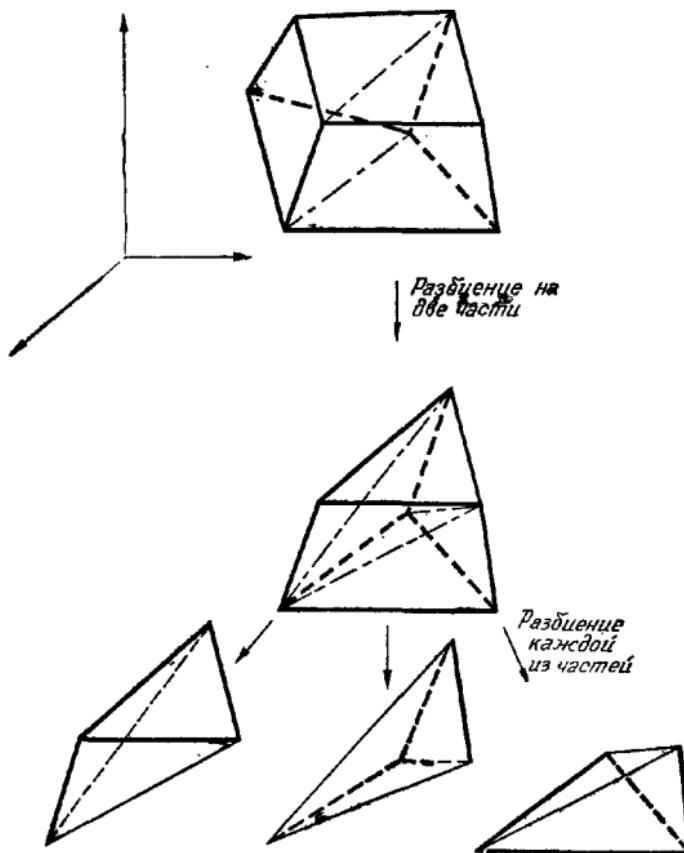
*b*

Фиг. 6.3. Составной элемент с восемью узлами и два способа разбиения на пять тетраэдров (*a* и *б*).

### 6.3. Составные элементы с восемью узлами

Иногда при аппроксимации объема отдельными тетраэдрами теряется наглядность, что может легко привести к ошибкам в нумерации узлов и т. д. Удобнее разбивать пространство на восьмиугольные «кирпичики». Это осуществляется, как показано на фиг. 6.2, рассечением трехмерного тела параллельными плоскостями и разбиением полученных сечений на четырехугольники.

Элементы такого типа можно считать состоящими из нескольких тетраэдров, построение которых осуществляется с помощью простой логической программы. Например, как показано на фиг. 6.3, любой кирпичик можно разделить на пять тетраэдров двумя (и только двумя) различными способами. Усреднение результатов этих двух типов разбиения приводит к незначительному увеличению точности. Напряжения хорошо представлять усредненными по всему кирпичику.



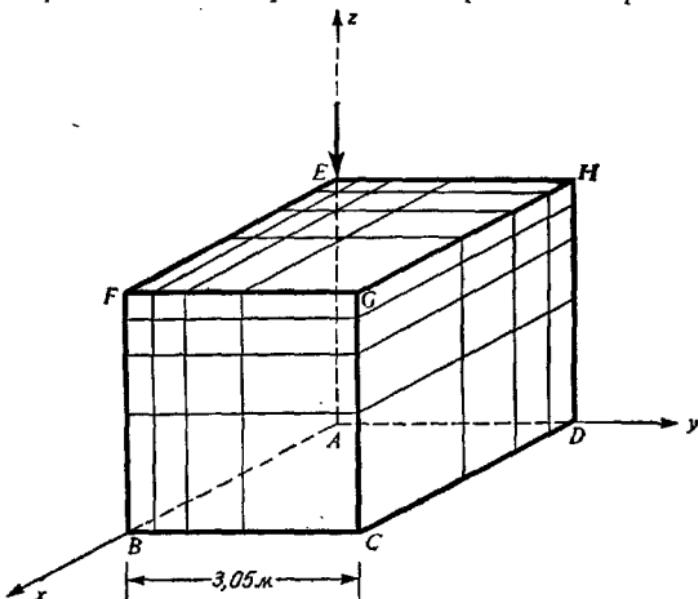
Фиг. 6.4. Способ разбиения восьмивугольного «кирпичика» на шесть тетраэдров.

Разбиение кирпичика на шесть тетраэдров показано на фиг. 6.4. Очевидно, что существует много других возможностей.

В последующих главах мы увидим, что такое разбиение может быть полезным для построения и более сложных типов элементов.

#### 6.4. Примеры и заключительные замечания

Простой пример применения тетраэдральных элементов показан на фиг. 6.5 и 6.6. Приближенное решение хорошо извест-

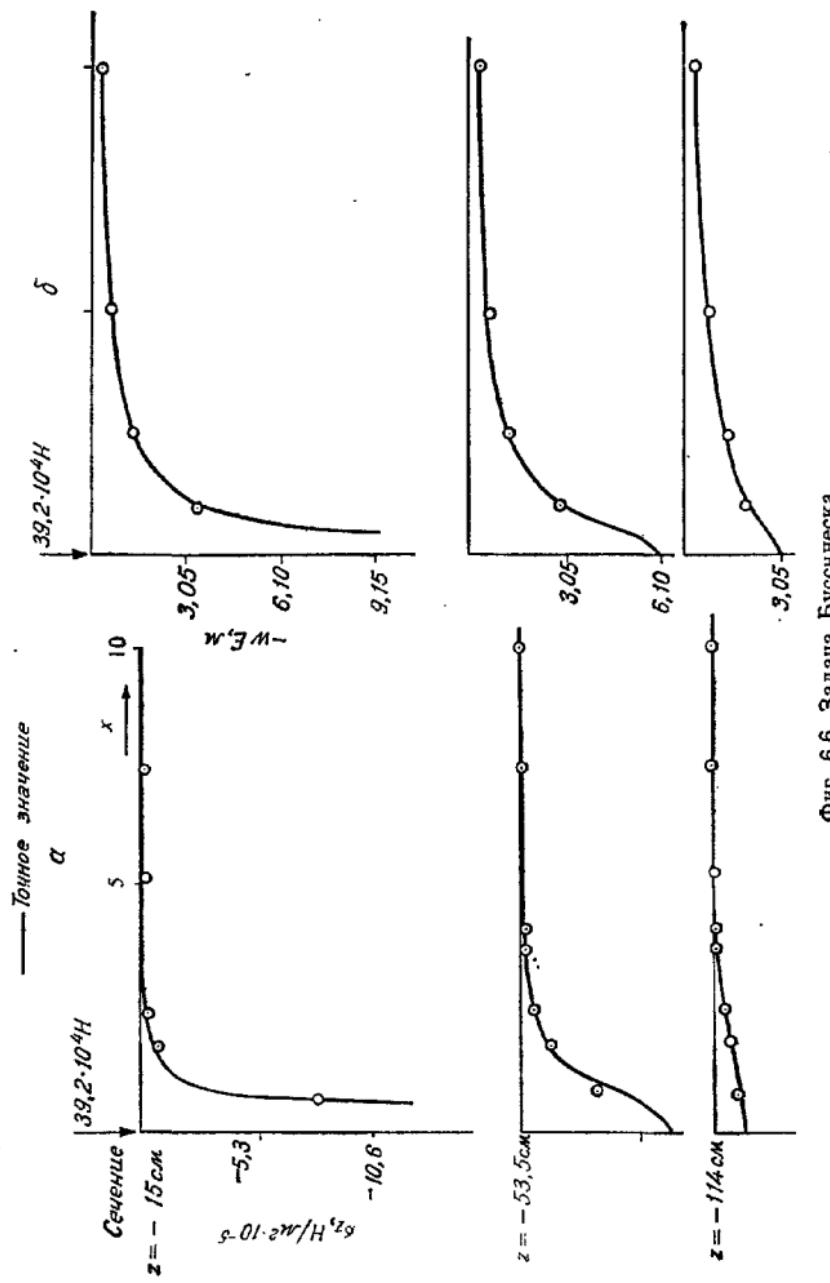


Фиг. 6.5. Задача Буссинеска как пример исследования трехмерного напряженного состояния.

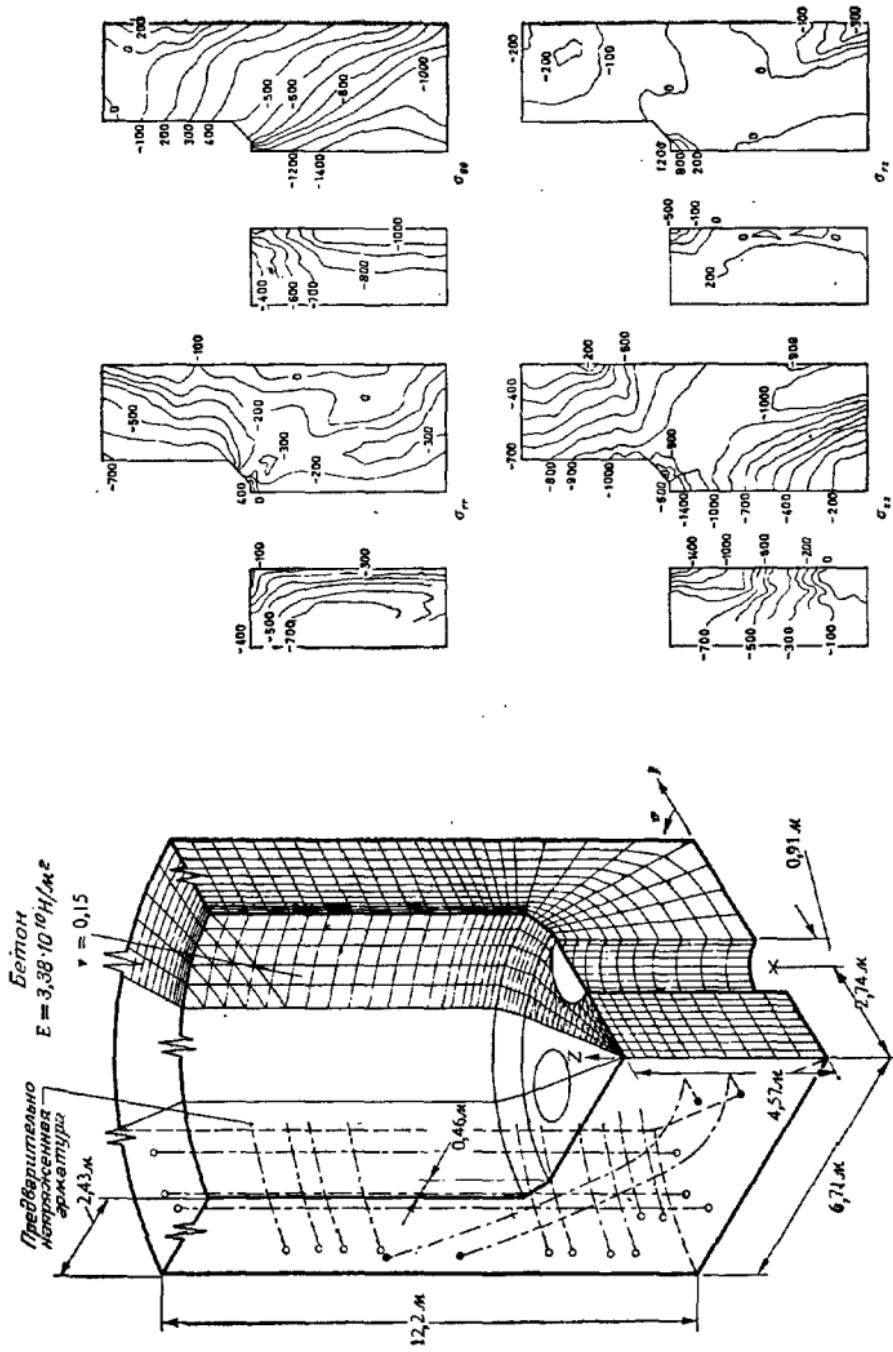
Границные условия:  $u=v=w=0$  на  $ABCD$ ,  $\frac{u}{v}=0$  на  $AEHD$  } из условия симметрии, все другие границы свободные.

ной задачи Буссинеска о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство получено в результате исследования конечного объема кубической формы. Использование симметрии позволяет сократить число неизвестных и записать краевые условия для перемещений в указанном на фиг. 6.5 виде [11]. Так как нулевые перемещения заданы на конечном расстоянии от места приложения нагрузки, перед построением представленных на фиг. 6.6 графиков результаты корректировались по точному решению. Значения полученных напряжений и перемещений оказались довольно точными, хотя следует отметить, что разбиение было достаточно грубым. Однако даже для такой

◎ Вычисленное значение



Фиг. 6.6. Задача Буссненса.  
 $a$  — напряжения в меридианном направлении  $\sigma_z$ ;  $b$  — вертикальные перемещения  $w$ .



**Фиг. 6.7.** Расчет сосуда высокого давления реактора с использованием простых тетраэдрических элементов. Геометрия, некоторые результаты расчета напряжений.

простой задачи пришлось решать систему из 375 уравнений. В работах [5—11] с помощью тетраэдральных элементов рассмотрены более сложные задачи. На фиг. 6.7, взятой из работы [5], приведены результаты расчета сосуда высокого давления сложной формы. В этой задаче рассматривалось около 10 000 степеней свободы. В гл. 9 будет показано, что использование более сложных элементов позволяет провести достаточно точный расчет аналогичной задачи с гораздо меньшим общим числом степеней свободы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gallagher R. H., Padlog J., Bijlaard P. P., Stress Analysis of Heated Complex Shapes, *ARS J.*, 32, № 5, стр. 52—61 (1962).
2. Melosh R. J., Structural Analysis of Solids, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, S. T. 4, 205—223 (Aug. 1963).
3. Argyris J. H., Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media—Small and Large Displacements, *JAIIAA*, 3, 45—51 (Jan. 1965); есть русский перевод: Аргирис, Матричный анализ малых и больших перемещений в трехмерных упругих средах, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 1, стр. 177—186 (1965).
4. Argyris J. H., Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Media—Matrix Analysis for Small and Large Displacements, *Ingenieur Archiv.*, 34, 33—55 (1965).
5. Rashid Y. R., Rockenhauser W., Pressure Vessel Analysis by Finite Element Techniques, *Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels*, Inst. Civ. Eng., 1968.
6. Argyris J. H., Continua and Discontinua, *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
7. frons B. M., Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods, *JAIAA*, 4, 2035—2037 (1966); есть русский перевод: Айронс, Инженерные приложения численного интегрирования в методе жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, 4, № 11, стр. 213—216 (1966).
8. Ergatoudis J., frons B. M., Zienkiewicz O. C., Three Dimensional Analysis of Arch Dams and Their Foundations, *Proc. Symp. Arch Dams*, Inst. Civ. Eng., 1968.
9. Argyris J. H., Redshaw J. C., Three Dimensional Analysis of Two Arch Dams by a Finite Element Method, *Proc. Symp. Arch Dams*, Inst. Civ. Eng., 1968.
10. Fjeld S., «Three Dimensional Theory of Elastics», *Finite Element Methods in Stress Analysis*, Holand I., Bell K., eds., Tech. Univ. of Norway, Tapir Press, Trondheim, 1969.
11. Pedro J. O., Thesis 1967, Laboaratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon.

---

## ГЛАВА 7

# ФУНКЦИИ ФОРМЫ ЭЛЕМЕНТА. НЕКОТОРЫЕ СЕМЕЙСТВА ЭТИХ ФУНКЦИЙ

### 7.1. Введение

В предыдущих трех главах дано довольно подробное описание, как могут быть поставлены и решены задачи линейной теории упругости с помощью конечных элементов простейших форм. Хотя подробные выкладки проведены только для функций формы, относящихся к треугольным и тетраэдральным элементам, очевидно, что точно так же можно было бы рассмотреть и другие элементы. Фактически если выбран тип элемента и определены соответствующие функции формы, то все дальнейшие действия просты, порядок их ясен и они могут быть выполнены вычислителем, не знакомым с физическим содержанием задачи. Из последующего станет ясно, что вполне возможно составить программу, позволяющую решать на машине широкие классы задач только при задании определенных функций формы. Однако выбор функций представляет собой вопрос, требующий разумного решения, в принятии которого роль человека пока является определяющей. В настоящей главе излагаются правила построения некоторых семейств одномерных, двумерных и трехмерных элементов.

В задачах теории упругости, рассмотренных в гл. 4—6, перемещения представляли собой двух- или трехкомпонентный вектор, а функции формы записывались в матричном виде. Однако функции формы строились для каждой компоненты в отдельности, и матричные выражения, по существу, получались путем умножения некоторой скалярной функции на единичную матрицу [см., например, (4.7), (5.3) и (6.7)]. Поэтому в этой главе ограничимся рассмотрением только скалярных функций формы  $N_i$  (штрихи в обозначениях опущены).

Функции формы, использованные при решении задач теории упругости в перемещениях, удовлетворяли критериям сходимости глав 2 и 3:

а) непрерывность только неизвестных должна иметь место между элементами (т. е. непрерывность угла наклона не требуется);

б) функция должна допускать выбор произвольной линейной формы, обеспечивающей постоянство деформаций (постоянство первой производной функции).

От функций формы, которые рассматриваются в этой главе, требуется только, чтобы они удовлетворяли этим двум критериям. Поэтому их можно использовать во всех задачах предыдущих глав и в других задачах, в которых требуется выполнение только этих условий. Например, введенные здесь элементы и функции можно использовать во всех задачах гл. 15. Фактически они применимы всегда, когда в функционал  $\chi$  (см. гл. 3) входят производные только первого порядка.

Семейства элементов отличаются друг от друга числом степеней свободы. Возникает вопрос: можно ли получить преимущества экономического или какого-либо другого характера, усложнив элемент путем увеличения числа степеней свободы? Ответить на него нелегко, хотя можно сказать, что, как правило, при заданной степени точности усложнение элемента приводит к уменьшению общего числа неизвестных. Однако экономичность алгоритма определяется как временем счета, так и степенью сложности подготовки входных данных. При уменьшении числа переменных может заметно увеличиться время, необходимое для получения основных соотношений, хотя время решения уравнений при этом уменьшается.

В предыдущей главе уже упоминалось, что повышение эффективности алгоритма особенно важно при решении трехмерных задач.

Это важно и при решении других задач, поэтому в каждом конкретном случае должна быть найдена оптимальная форма элемента.

## ДВУМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### 7.2. Прямоугольные элементы.

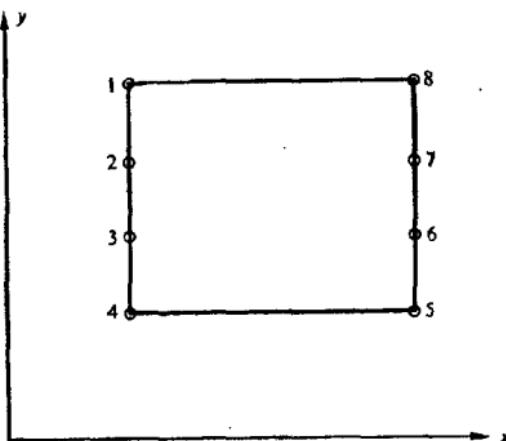
#### Некоторые предварительные соображения

Очевидно, что (особенно, если читатель привык использовать декартову систему координат) простейшим плоским элементом является прямоугольник со сторонами, параллельными осям  $x$  и  $y$ . Рассмотрим, например, прямоугольник, изображенный на фиг. 7.1. Здесь узловые точки пронумерованы от 1 до 8. Значения неизвестной функции  $\phi$  в них представляют собой параметры элемента. Как определить функции формы для элемента такого типа?

Предположим сначала, что они являются полиномами по  $x$  и  $y$ . Для того чтобы функция  $\phi$  была непрерывна между элементами, она должна изменяться вдоль верхней и нижней границ по линейному закону. Для каждого из элементов, расположенных выше или ниже рассматриваемого прямоугольника, существуют две точки, в которых функции принимают заданные зна-

чения, и, так как два значения единственным образом определяют линейную функцию, условие непрерывности выполняется во всех точках этих сторон. Это обстоятельство уже использовалось при выборе линейной функции формы для треугольника.

Аналогично если вдоль вертикальных сторон принят кубический закон изменения функции формы, то условия непрерывности на них выполняются, так как четыре значения единственным образом определяют кубическое разложение. Первый критерий при этом удовлетворяется.



Фиг. 7.1. Прямоугольный элемент.

Для того чтобы производная могла принимать любые наперед заданные значения, в разложении необходимо учитывать все линейные члены.

Так как для определения функции имеется восемь точек, в разложении можно оставить только восемь членов, т. е. можно положить

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5y^2 + a_6xy^2 + a_7y^3 + a_8xy^3. \quad (7.1)$$

Вопрос о том, какие именно члены следует сохранить в полиноме, можно решить единственным образом, если оставить члены возможно более низкого порядка, хотя мы поступили по-другому<sup>1)</sup>. Читатель может легко убедиться, что теперь выполнены все необходимые требования.

Подставляя координаты различных узловых точек, получим систему уравнений для определения коэффициентов. Она запи-

<sup>1)</sup> Сохранение в разложении члена высшего порядка, а не более низкого приводит обычно к несколько худшей аппроксимации, хотя сходимость при этом сохраняется [1].

сывается, как и (4.4) для треугольника, в виде

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_8 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccccc} 1, & x_1, & y_1, & x_1y_1, & y_1^2, & x_1y_1^2, & y_1^3, & x_1y_1^3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_8 \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

или

$$\{\phi\}^e = [C]\{\alpha\}. \quad (7.3)$$

Отсюда получаем

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\phi\}^e, \quad (7.4)$$

и формулу (7.1) можно записать в виде

$$\phi = [P]\{\alpha\} = [P][C]^{-1}\{\phi\}^e, \quad (7.5)$$

где

$$[P] = [1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3]. \quad (7.6)$$

Таким образом, функция формы для этого элемента, определяемая равенством

$$\phi = [N]\{\phi\}^e = [N_1, N_2, \dots, N_8]\{\phi\}^e, \quad (7.7)$$

находится из соотношения

$$[N] = [P][C]^{-1}. \quad (7.8)$$

Этот метод, не требующий большой изобретательности, часто используется на практике, однако он имеет существенные недостатки. Иногда матрица  $[C]$  может не иметь обратной [2], и, кроме того, всегда нахождение обратной матрицы в общем виде, пригодном для элементов всех конфигураций, сопряжено с преодолением значительных алгебраических трудностей. Поэтому целесообразно выяснить, нельзя ли прямо записать функции формы  $N_i(x, y)$ . Прежде чем сделать это, рассмотрим некоторые общие свойства этих функций.

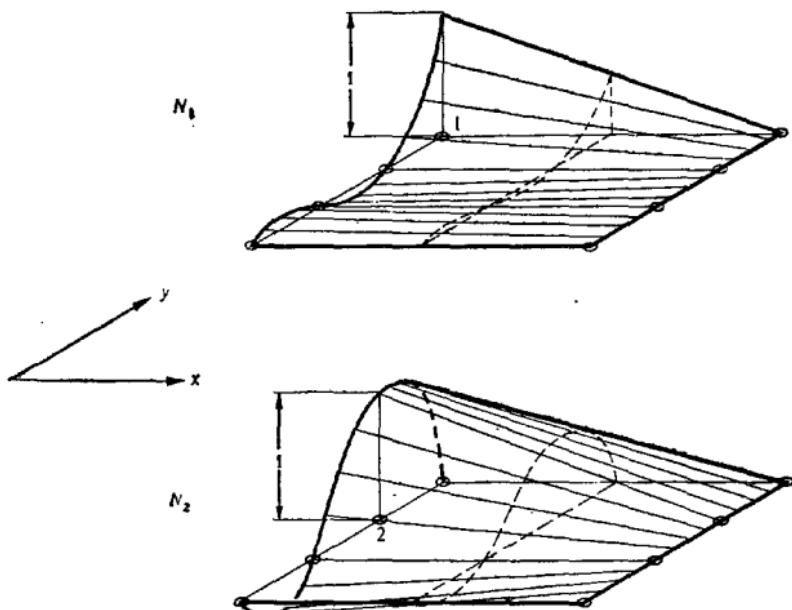
Некоторые важные свойства можно выявить, анализируя соотношение (7.7). Во-первых, так как это равенство справедливо для всех  $\{\phi\}^e$ , то

$$N_i = 1$$

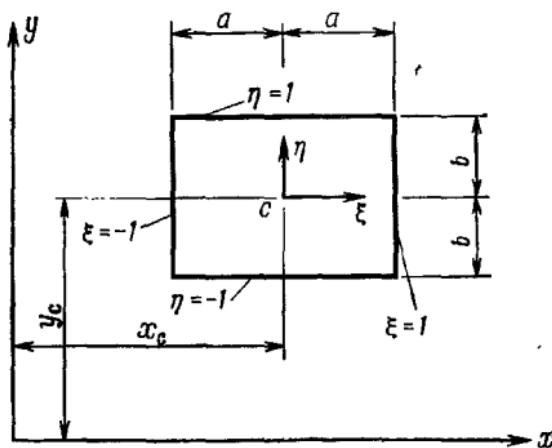
в узле  $i$  и обращается в нуль во всех остальных узлах. Кроме того, должны соблюдаться законы изменения функции вдоль границ, обусловленные требованиями непрерывности (в приведенном примере — линейный закон по  $x$  и кубический по  $y$ ). На фиг. 7.2 в изометрии изображены функции формы для рассматриваемых элементов, соответствующие двум типичным узлам. Ясно, что их можно записать в виде произведений соответствующих функций, линейных по  $x$  и кубических по  $y$ . Очевидно, что

такое простое решение, как в этом примере, возможно не всегда, однако вообще рекомендуется записывать функции формы в явном виде.

В дальнейшем удобно использовать нормализованные координаты. Такие координаты показаны на фиг. 7.3; они выбираются так, чтобы стороны прямоугольника совпадали с координатными



Фиг. 7.2. Функции формы для элемента, показанного на фиг. 7.1.



Фиг. 7.3. Нормализованные координаты для прямоугольника.

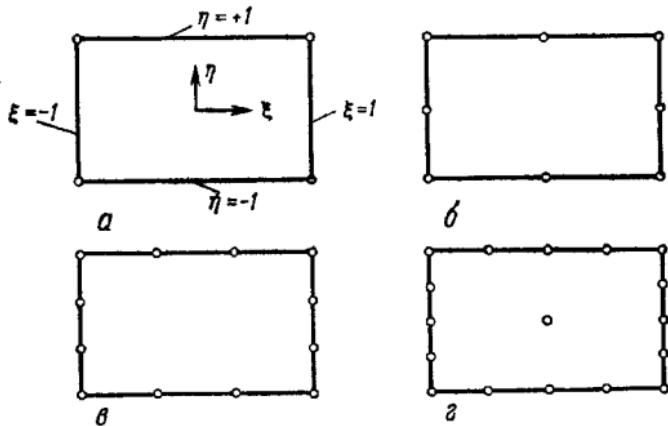
линиями  $\pm 1$ . Эти координаты связаны с координатами  $x$  и  $y$  соотношениями

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x - x_c}{a}, & d\xi &= \frac{dx}{a}, \\ \eta &= \frac{y - y_c}{b}, & d\eta &= \frac{dy}{b}.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Если функции формы известны в нормализованных координатах, то переход к первоначальной системе координат и преобразование различных выражений, встречающихся, например, при определении жесткости, тривиальны и их можно осуществить с помощью соотношений (7.9).

### 7.3. Прямоугольные элементы. Сирендиево семейство [3, 4]

Удобнее всего выразить функции через координаты узлов на границе элемента. Рассмотрим, например, первые три элемента, изображенные на фиг. 7.4. Количество узловых точек



Фиг. 7.4. Прямоугольники с узлами на границе (сирендиево семейство).  
а — элемент первого порядка; б — элемент второго порядка; в — элемент третьего порядка  
г — элемент четвертого порядка.

на сторонах этих элементов увеличивается, причем их число на каждой стороне одинаково. Для обеспечения непрерывности функция формы должна изменяться вдоль границ элементов а — в по линейному, параболическому и кубическому законам соответственно.

Чтобы построить функцию формы для первого элемента, отметим, что произведение

$$\frac{1}{4} (\xi + 1)(\eta + 1) \quad (7.10)$$

равно единице в верхнем правом углу, где  $\xi = \eta = 1$ , и нулю в остальных углах. Эта функция изменяется вдоль всех сторон линейно, и, следовательно, условие непрерывности выполняется.

Введение новых переменных

$$\xi_0 = \xi\xi_t, \quad \eta_0 = \eta\eta_t \quad (7.11)$$

позволяет записать все функции формы в виде одного выражения

$$N_t = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0). \quad (7.12)$$

Так как линейная комбинация этих функций формы позволяет описать произвольный линейный закон изменений  $\phi$ , второй критерий сходимости тоже удовлетворяется.

Читатель легко может убедиться, что приведенные ниже функции для элементов второго и третьего порядков удовлетворяют всем необходимым критериям.

Элемент второго порядка:

угловые узлы

$$N_t = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1), \quad (7.13)$$

узлы на сторонах

$$\xi_t = 0, \quad N_t = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0),$$

$$\eta_t = 0, \quad N_t = \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2).$$

Элемент третьего порядка:

угловые узлы

$$N_t = \frac{1}{32}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)], \quad (7.14)$$

узлы на сторонах

$$\xi_t = \pm 1 \quad \text{и} \quad \eta_t = \pm \frac{1}{3},$$

$$N_t = \frac{9}{32}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0).$$

Выражения для узлов на других сторонах получаются заменой переменных.

В следующем элементе этого семейства — элементе четвертого порядка [5] — добавляется центральная узловая точка, так что следует рассматривать все члены полного полинома четвертого порядка. Благодаря наличию центрального узла добавляется функция формы  $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ , которая обращается в нуль на всех сторонах.

Приведенные функции были найдены путем подбора. Получить функции формы для элементов этого семейства более

высокого порядка достаточно трудно, и требуется некоторая изобретательность. Своим названием это семейство обязано принципам Сирендицким, прославившимся своими неожиданными открытиями (Гораций Уолпол, 1754).

Для многих практических целей могут потребоваться элементы с различным числом степеней свободы в направлениях  $\xi$  и  $\eta$ . В частности, такие элементы могут использоваться, когда в каком-то определенном направлении напряжения изменяются по заданному закону, а в другом — произвольно (как, например, в балке). Некоторые функции формы таких элементов, а также элементов с различным числом степеней свободы на противоположных сторонах рассматриваются в работе [2], но читатель может и сам испробовать свое мастерство для их построения.

#### 7.4. Прямоугольные элементы. Лагранжево семейство [3, 6, 7]

Простой и универсальный способ получения функции формы любого порядка состоит в перемножении соответствующих полиномов по каждой из двух координат. Рассмотрим элемент, показанный на фиг. 7.5, в котором внутренние и внешние узлы располагаются на правильной сетке. Пусть требуется определить функцию формы для точки, обведенной кружочком. Очевидно, что произведение полинома пятой степени по  $\xi$ , равного единице в точках второго столбца и нулю во всех остальных узлах, на полином четвертой степени по  $\eta$ , равный единице при значениях координат, соответствующих верхней строке узлов, и нулю в остальных узлах, удовлетворяет условиям непрерывности между элементами.

Полиномы от одной переменной, обладающие таким свойством, называются полиномами Лагранжа. Они записываются в виде

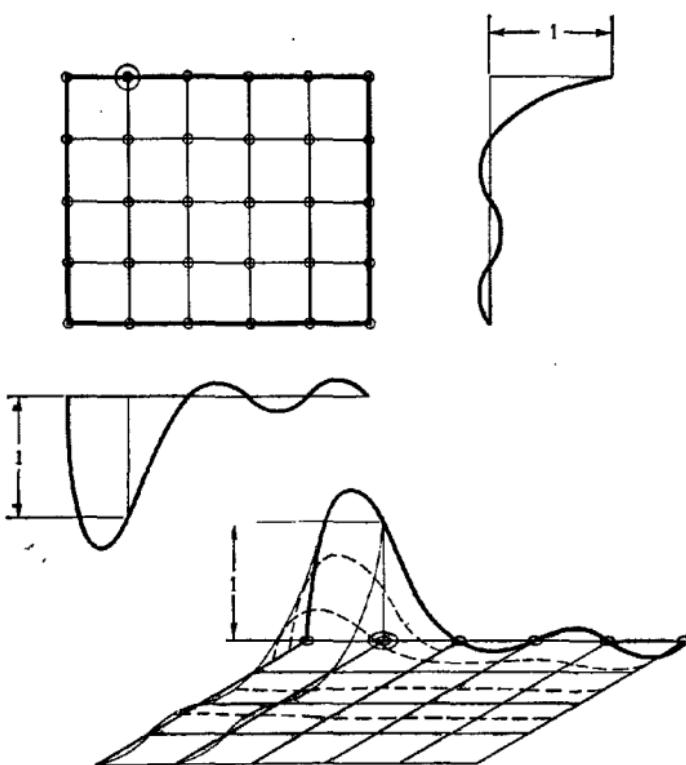
$$L_i^n = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)}. \quad (7.15)$$

Таким образом, если пометить узел номером столбца и номером строки, на пересечении которых он расположен, то получим

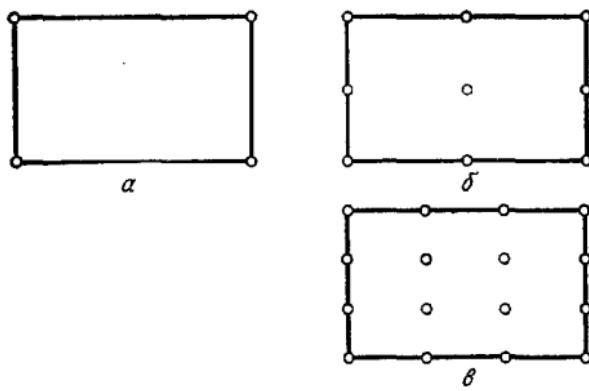
$$N_{ij} = L_i^n(\xi) L_j^m(\eta), \quad (7.16)$$

где  $n$  и  $m$  — количество разбиений в каждом направлении.

На фиг. 7.6 показано несколько элементов этого бесконечного семейства. Несмотря на то что такие элементы просто получить, применение их не всегда полезно не только вследствие введения большого числа внутренних узлов, но и из-за плохой аппроксимации кривых полиномами высоких порядков. Следует



Фиг. 7.5. Типичная функция формы для элемента лагранжева семейства.



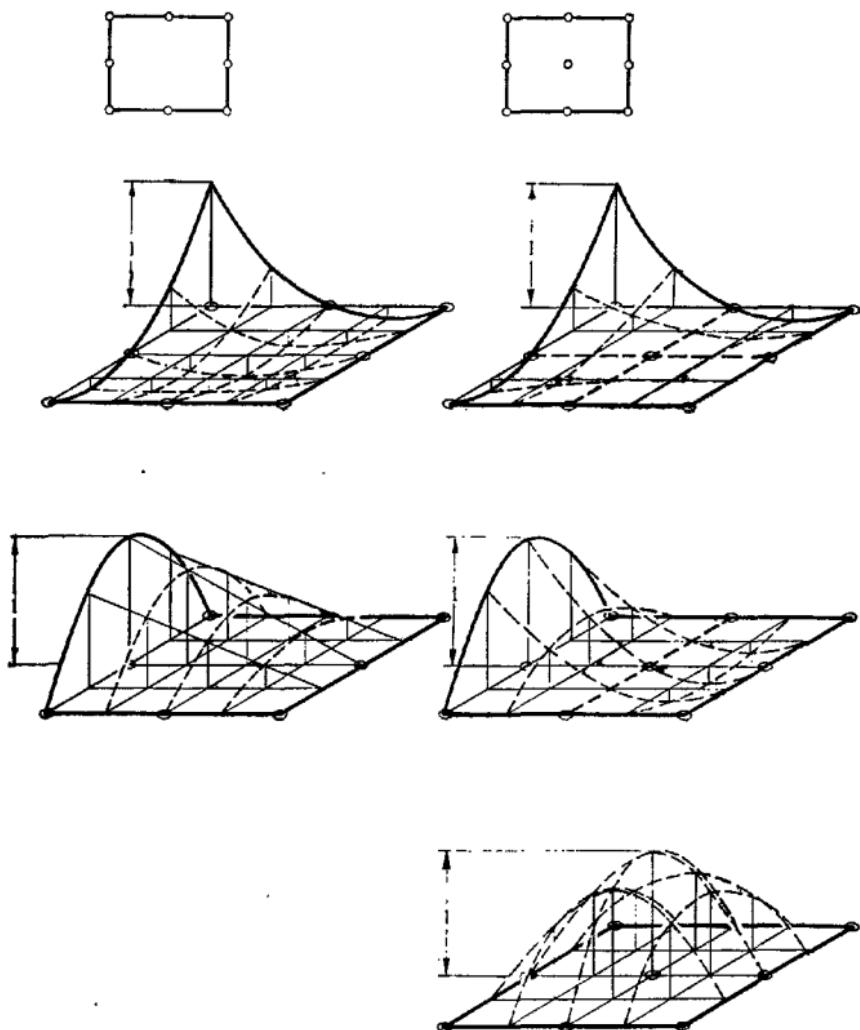
Фиг. 7.6. Три элемента лагранжева семейства.

*α* — элемент первого порядка; *β* — элемент второго порядка; *γ* — элемент третьего порядка.

отметить, что выражения для функций формы содержат члены высоких порядков, тогда как некоторые члены более низкого порядка в них отсутствуют.

### 7.5. Внутренние узловые точки и неузловые переменные

На фиг. 7.4 и 7.6 элементы первого порядка одноковы, а элементы второго порядка отличаются наличием центральной точки. Функции формы для двух типов элементов второго порядка приведены на фиг. 7.7.



Фиг. 7.7. Функции формы для элементов второго порядка спринглова и лагранжева семейств.

На границах элементов эти функции однозначно определяются значениями в граничных узлах, и, следовательно, на границах они совпадают (хотя внутри элементов и существуют различия). Дополнительная степень свободы элемента лагранжева семейства описывается дополнительной функцией, умноженной на некоторый параметр и равной нулю на границах. Этот параметр представляет собой значение функции  $\phi$  в центральном узле.

Ясно, что можно построить элемент семейства Сирендиша с таким же числом степеней свободы, вводя дополнительную функцию формы, обращающуюся на границах в нуль, и умножая ее на некоторый параметр элемента  $\phi^*$ . Все функции формы для элементов Лагранжа можно использовать и для элементов Сирендиша, но при этом множители не соответствуют никаким узловым значениям функции  $\phi$ . Множитель  $\phi^*$  можно назвать *неузловым параметром* элемента.

Минимизация функционала по такому параметру осуществляется так же, как и для внутреннего узла, ио физический смысл таких величин, как узловые силы и т. д., теперь уже не ясен. При желании каждому элементу можно поставить в соответствие несколько неузловых параметров.

Этот прием обычно не имеет больших преимуществ, так как введение неузловых параметров не изменяет функцию формы на границах.

До сих пор функции формы строились только в виде полиномов. Это имеет много преимуществ. В частности, в полином входят линейные члены, необходимые для выполнения требования постоянства производной. Однако при наличии дополнительных степеней свободы нет необходимости ограничиваться полиномами. С таким же успехом в предыдущем примере можно было бы использовать, например, функцию

$$\cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta, \quad (7.17)$$

тождественно равную нулю на границах.

## 7.6. Исключение внутренних переменных при составлении ансамбля. Подконструкции

При использовании внутренних узлов и неузловых параметров обычным путем выводятся соотношения (см. гл. 2 и 3):

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e. \quad (7.18)$$

Поскольку каждую из функций  $\{\phi\}^e$  можно разделить на две части, одна из которых  $\{\bar{\phi}\}^e$  связана с соседними элементами,

а другая  $\{\bar{\phi}\}^e$  характерна только для данного элемента, можно записать

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} = \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} = 0$$

и исключить  $\{\bar{\phi}\}^e$  из дальнейшего рассмотрения. Запишем (7.18) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} \\ \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\bar{\phi}\}^e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [\bar{k}]^e & [\hat{k}]^e \\ [\hat{k}]^{eT} & [\bar{k}]^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}^e \\ \{\phi\}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{\bar{F}\}^e \\ \{F\}^e \end{Bmatrix}. \quad (7.19) \end{aligned}$$

Из второй строки (7.19) находим

$$\{\bar{\phi}\}^e = -[\bar{k}]^{e-1} ([\hat{k}]^{eT} \{\bar{\phi}\}^e + \{\bar{F}\}^e) \quad (7.20)$$

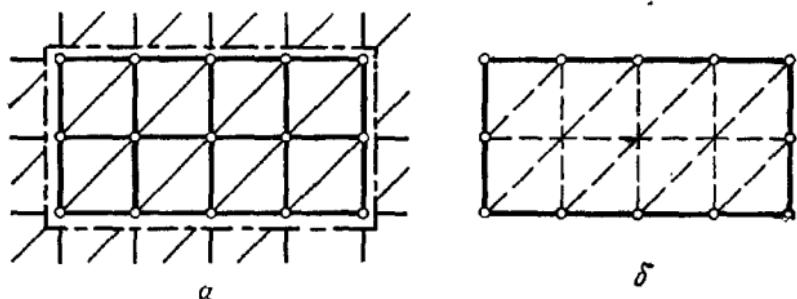
и после подстановки этого выражения в первую строку (7.19) получаем

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [k^*]^e \{\bar{\phi}\}^e + \{F^*\}^e, \quad (7.21)$$

где

$$\begin{aligned} [k^*]^e &= [\bar{k}]^e - [\hat{k}]^e [\bar{k}]^{e-1} [\hat{k}]^{eT}, \\ \{F^*\}^e &= \{\bar{F}\}^e - [\hat{k}]^e [\bar{k}]^{e-1} \{\bar{F}\}^e. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Далее составляется система уравнений, содержащая лишь переменные, связанные с границами элементов, для всей области. Такой прием позволяет за счет некоторых преобразований



Фиг. 7.8. Сложный элемент.

на начальной стадии рассмотрения отдельного элемента существенно упростить решение системы уравнений.

Уместно дать интерпретацию такому способу исключения неузловых переменных и провести аналогию со строительной механикой. Описанный прием, по существу, сводится к выделе-

нию части конструкции и нахождению решения для этой части при заданных произвольных перемещениях на границах. Матрица  $\{k^*\}^e$  представляет полную жесткость выделенной части, а  $\{F^*\}^e$  — эквивалентную систему узловых сил.

Если разбиение на треугольные элементы, показанное на фиг. 7.8, интерпретировать как совокупность шарнирно соединенных стержней, читатель без труда узнает хорошо известный прием выделения подконструкций, часто используемый в строительной механике.

Такая подконструкция, по существу, представляет собой сложный элемент, внутренние степени свободы которого исключены.

Описанный прием позволяет строить сложные элементы, которые обеспечивают получение более точного решения.

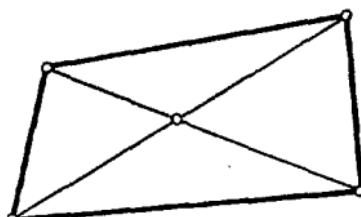
На фиг. 7.8, а изображена разделенная на треугольные элементы часть сплошной среды. Подконструкцией в этом случае является один сложный элемент с несколькими гравилическими узлами (фиг. 7.8, б).

Единственное отличие таких элементов от элементов, построенных в предыдущем разделе, состоит в том, что неизвестная функция  $\phi$  аппроксимируется не гладкими функциями формы, а набором кусочно-гладких функций. Это, по-видимому, приводит к несколько худшей аппроксимации, но зато может позволить сократить общее время расчета всей конструкции. Выделение подконструкций удобно при решении сложных задач, особенно если рассматриваемая область составлена из повторяющихся элементов.

Результаты решения простейших задач методом конечных элементов показывают, что использование сложных элементов, составленных из треугольников (или тетраэдров), приводит к лучшим результатам, чем применение простых треугольных элементов. Например, использование четырехугольника, составленного из четырех треугольников, с исключенной центральной точкой (фиг. 7.9) выгоднее использования простых треугольников. Этот и другие виды составленных из треугольников элементов подробно рассмотрены Уилсоном [8].

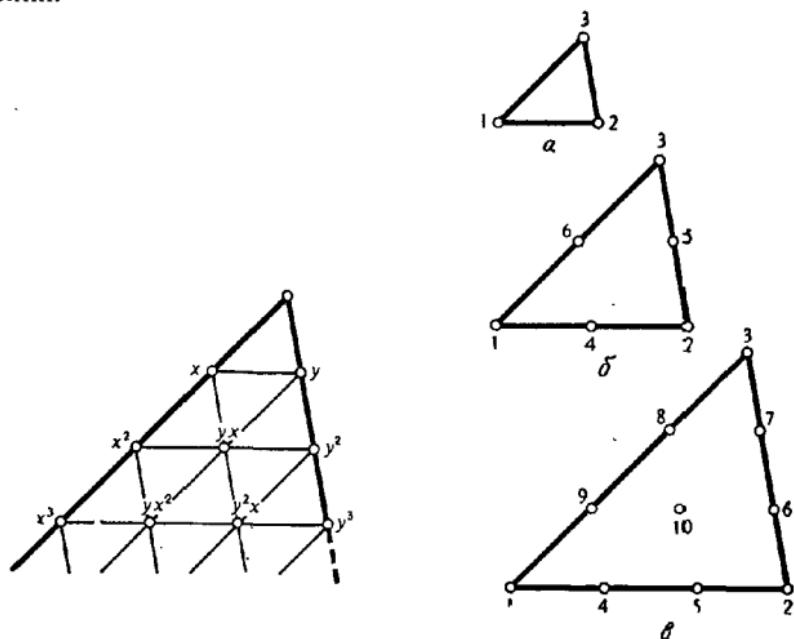
## 7.7. Семейство треугольных элементов

В предыдущих главах в достаточной мере продемонстрированы преимущества произвольного треугольника при аппроксимации любой формы контура. Превосходство его перед



Фиг. 7.9. Четырехугольник, составленный из четырех простых треугольников.

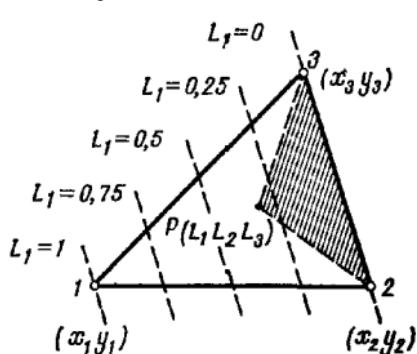
прямоугольником очевидно и не нуждается в дальнейшем обсуждении.



Фиг. 7.10. Семейство треугольных элементов.  
а—элемент первого порядка; б—элемент второго порядка; в—элемент третьего порядка.

Рассмотрим ряд треугольников, изображенных на фиг. 7.10. Число узлов в каждом элементе этого семейства таково, что

позволяет построить полный полином порядка, необходимого для обеспечения совместности между элементами. Это характерное свойство ставит семейство треугольников в привилегированное положение, так как обращение матрицы  $[C]$  всегда будет существовать [2] (см. (7.3)). Однако, как и ранее, предпочтительнее прямой путь получения функций формы, и, как будет показано, он достаточно прост.



Фиг. 7.11.  $L$ -координаты.

Удобно ввести для треугольника специальную систему нормализованных координат.

### 7.7.1. L-координаты<sup>1)</sup>

При рассмотрении прямоугольных элементов выбор декартовой системы координат с осями, параллельными сторонам прямоугольника, был естественным. Однако для треугольника такая система неудобна.

Для треугольника с узлами 1, 2, 3 (фиг. 7.11) удобно ввести систему координат  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , связанную с декартовой следующими линейными соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3, \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3, \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Каждой совокупности координат  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  (которые не являются независимыми и связаны между собой третьим соотношением) соответствует единственная пара декартовых координат. Узел 1 имеет координаты  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = L_3 = 0$  и т. д. Линейная связь между новыми и декартовыми координатами означает, что линии  $L_i = \text{const}$  представляют собой прямые, параллельные стороне  $i$ — $j$ , на которой  $L_i = 0$ .

Легко видеть, что координату  $L_1$  точки  $P$  можно определить как отношение площади заштрихованного треугольника к площади всего треугольника:

$$L_1 = \frac{\text{площадь } P23}{\text{площадь } 123}. \quad (7.24)$$

Разрешая соотношения (7.23), получаем

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta}, \\ L_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta}, \\ L_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{площадь } 123 \quad (7.26)$$

и

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2.$$

Отметим, что эти выражения тождественны полученным в гл. 4 [соотношения (4.5б), (4.5в)].

<sup>1)</sup> В оригинале Area coordinates, т. е. координаты, связанные с площадью. — Прим. ред.

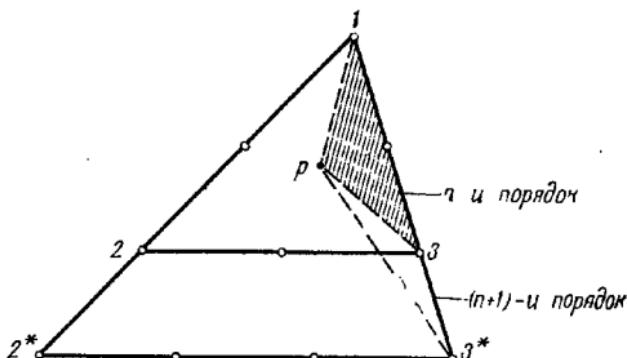
### 7.7.2. Функции формы

Для первого элемента семейства, изображенного на фиг. 7.10, *a*, функции формы — просто *L*-координаты. Таким образом,

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad (7.27)$$

поскольку каждая из этих координат равна единице в одном узле и нулю — в остальных узлах и изменяется линейно.

Для построения функций формы остальных элементов можно получить простое рекуррентное соотношение [2]. Предполо-



Фиг. 7.12. Рекуррентное правило построения функций формы для треугольников.

жим, что функции формы для треугольника *n*-го порядка известны. Построим функции формы для треугольника (*n*+1)-го порядка. На фиг. 7.12 показаны два таких треугольника с равноотстоящими друг от друга узлами. Для типичного узла *i* известная функция формы *n*-го порядка

$$N_i^n(L_1^n, L_2^n, L_3^n) \quad (7.28)$$

выражается через *L*-координаты треугольника 123. Эта функция формы может быть выражена через *L*-координаты большего треугольника 12\*3\* после установления связи между координатами. Она будет принимать единичное значение в точке *i* и нулевое во всех остальных узлах нового треугольника, кроме узлов, расположенных на основании 2\*3\* треугольника.

Легко показать, что

$$N_i^{n+1} = c L_1^{n+1} N_i^n \quad (7.29)$$

будет искомой функцией формы, если *c* — масштабный множитель, обеспечивающий единичное значение в точке *i* при равенстве  $L_1^{n+1}$  нулю на основании большого треугольника. Масштаб-

ный множитель задается соотношением

$$c = \frac{n+1}{l}, \quad (7.30)$$

где  $l$  — число слоев, для которых номера узлов меньше  $i$ . Функции формы для узлов, расположенных на основании треугольника, могут быть получены простой перестановкой индексов.

Связь между этими двумя координатами ясна из фиг. 7.12, откуда видно, что

$$L_2^n = \frac{\text{площадь } P13}{\text{площадь } 123}, \quad L_2^{n+1} = \frac{\text{площадь } P13^*}{\text{площадь } 12^*3^*}.$$

Следовательно,

$$L_2^n = \frac{\text{площадь } P13}{\text{площадь } P13^*} \cdot \frac{\text{площадь } 12^*3^*}{\text{площадь } 123} L_2^{n+1} = \\ = \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 L_2^{n+1} = \frac{n+1}{n} L_2^{n+1}. \quad (7.31a)$$

Аналогично

$$L_3^n = \frac{n+1}{n} L_3^{n+1}, \quad (7.31b)$$

и, учитывая, что  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ , получаем

$$L_1^n = \frac{1}{n} [(n+1)L_1^{n+1} - 1]. \quad (7.31b)$$

Читатель может легко проверить, что приведенные ниже функции являются функциями формы для элементов второго и третьего порядков, и получить аналогичные функции для элементов более высоких порядков,

### Треугольник второго порядка (фиг. 7.10, б).

Для угловых узлов

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \text{ и т. д.,}$$

для узлов на сторонах

$$N_4 = 4L_1 L_2 \text{ и т. д.} \quad (7.32)$$

### Треугольник третьего порядка (фиг. 7.10, в).

Для угловых узлов

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 \text{ и т. д.,}$$

для узлов на сторонах

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) \text{ и т. д.,} \quad (7.33)$$

и, наконец, для внутреннего узла

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3.$$

Последняя функция обращается в нуль на границе. В гл. 10 она используется в другом смысле.

Треугольник второго порядка впервые был построен Вебеке [9] и применен Аргирисом [10] для исследования плоского напряженного состояния.

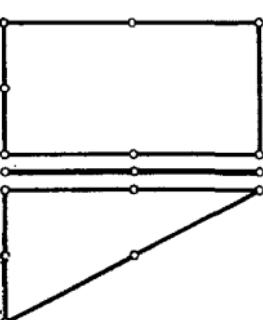
При получении матриц элемента возникает проблема интегрирования по площади треугольника величин, зависящих от  $L$ -координат. Поэтому полезно иметь в виду следующее соотношение:

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta. \quad (7.34)$$

## ОДНОМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### 7.8. Линейные элементы

До сих пор рассматривались только двумерные и трехмерные задачи. Для одномерных задач метод конечных элементов не применялся, поскольку для них, как правило, можно получить точное решение. Однако во многих встречающихся на практике случаях могут потребоваться и такие элементы, поэтому желательно рассмотреть их с тех же позиций, что и остальные. При решении задач упругости одномерными элементами можно аппроксимировать армирующие волокна (в двумерных и трехмерных задачах) или тонкие листовые обшивки в осесимметричных и трехмерных телах. При исследовании задач теории поля, типа рассматриваемых в гл. 15, они могут аппроксимировать дренаж в пористой среде меньшей проводимости.



Фиг. 7.13. Линейный элемент, расположенный между двумя двумерными элементами.

как деформация и т. д., должны рассматриваться только в одном направлении.

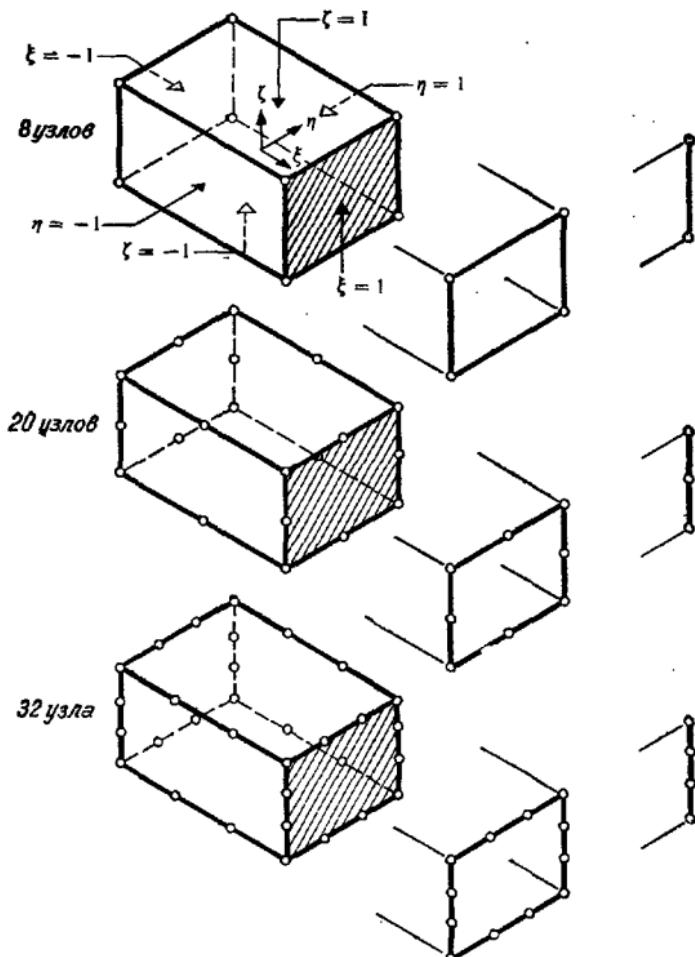
На фиг. 7.13 показан такой элемент, расположенный между двумя соседними элементами третьего порядка. Ясно, что для выполнения условий совместности необходимо, чтобы функция формы была полиномом третьего порядка относительно единственной переменной  $\xi$ . Такими функциями формы являются полиномы Лагранжа, определяемые формулой (7.15).

## ТРЕХМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

## 7.9. Прямоугольные призмы. Сиреидипово семейство [11, 12]

По аналогии с предыдущими разделами можно построить трехмерные элементы с дополнительными узлами. Однако теперь описанные ранее простые правила обеспечения непрерывности между элементами нужно изменить. Необходимо, чтобы изменение функции формы на грани элемента единственным образом определялось узловыми значениями. Для некоторых полиномов это можно обеспечить только подбором.

Семейство элементов, показанное на фиг. 7.14, эквивалентно семейству, изображенному на фиг. 7.4. Используя трехмерные



Фиг. 7.14. Правильные призмы с узлами на границе (сиреидипово семейство) и соответствующие плоские и линейные элементы.

нормализованные координаты и следуя терминологии разд. 7.3, получим следующие функции формы:

Элемент первого порядка (8 узлов):

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0). \quad (7.35)$$

Элемент второго порядка (20 узлов): угловые узлы

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) (\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2); \quad (7.36)$$

типовичный узел на ребре

$$\xi_i = 0, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1,$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0).$$

Элемент третьего порядка (32 узла): угловой узел

$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19]; \quad (7.37)$$

типовичный узел на ребре

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1,$$

$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \xi^2) (1 + 9\xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0).$$

При  $\xi = 1 = \zeta_0$  приведенные выражения сводятся к (7.12) — (7.14). Такие трехмерные элементы могут соединяться с плоскими или одномерными элементами соответствующего типа, как показано на фиг. 7.14.

## 7.10. Прямоугольные призмы. Лагранжево семейство

Функция формы для элементов показанного на фиг. 7.15 типа может быть построена в виде полинома Лагранжа. Обобщая обозначения, использованные в (7.16), запишем

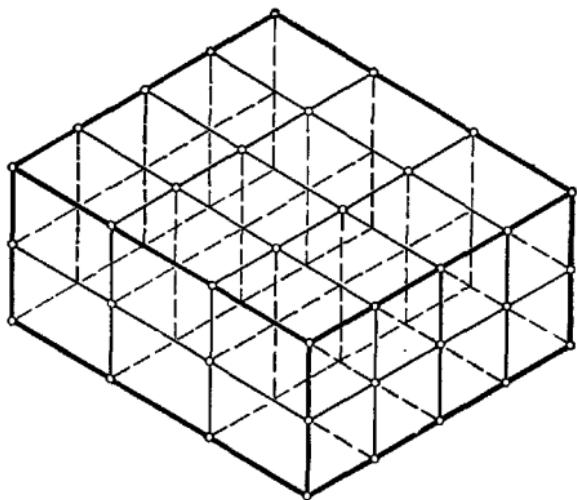
$$N_{i\mu} = L_i^n(\xi) L_i^m(\eta) L_i^k(\zeta). \quad (7.38)$$

Элемент такого типа предложен Эргатудисом [6] и подробно изучен Аргирисом [7]. Все замечания относительно внутренних узлов и пределов применимости, сделанные в разд. 7.4, справедливы и здесь.

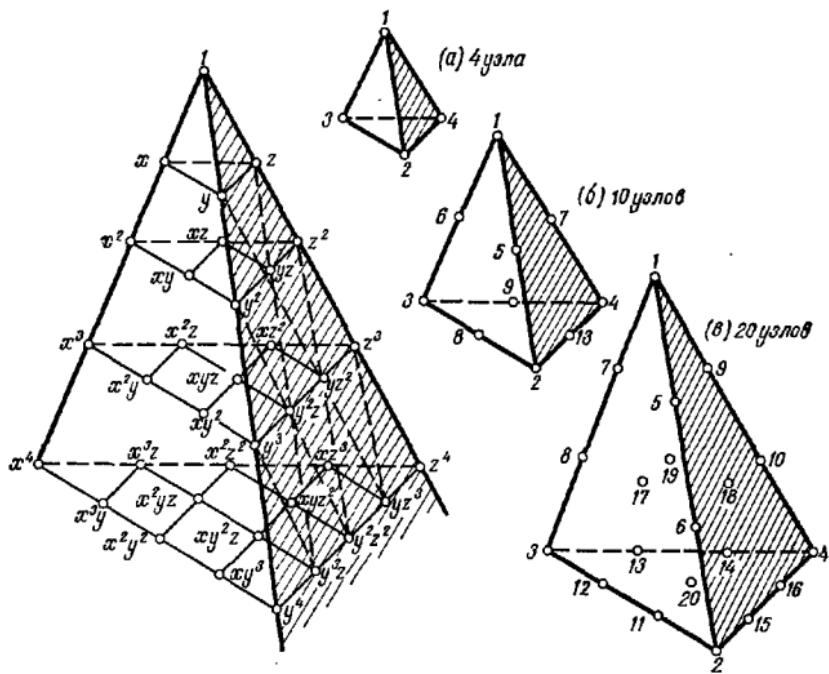
## 7.11. Тетраэдральные элементы

Не удивительно, что семейство тетраэдров, показанное на фиг. 7.16, обладает свойствами, сходными со свойствами семейства треугольников.

Во-первых, снова на каждом этапе используются полные полиномы от трех координат. Во-вторых, поскольку грани раз-



Фиг. 7.15. Правильная призма из лагранжева семейства.



Фиг. 7.16. Семейство тетраэдров.

— элемент первого порядка; б — элемент второго порядка; в — элемент третьего порядка;

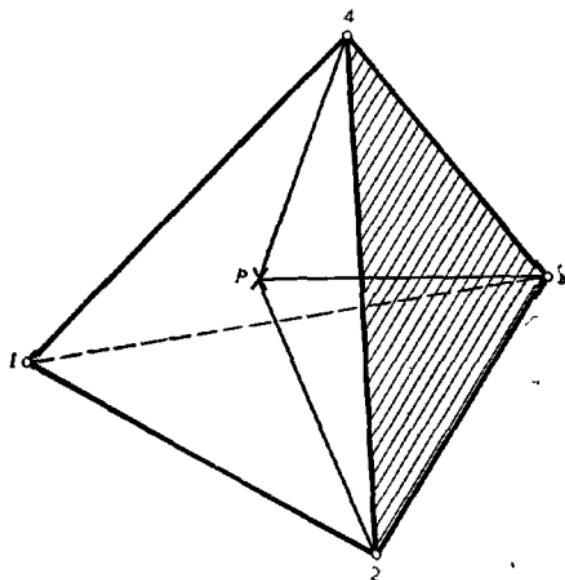
деляются, как и соответствующие треугольники, то в плоскости грани получается полином одинакового порядка по двум координатам и, таким образом, совместность элементов обеспечивается.

### 7.11.1. Пространственные L-координаты<sup>1)</sup>

Введем специальные координаты (фиг. 7.17) с помощью соотношений

$$\begin{aligned}x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4, \\y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4, \\z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4, \\1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4.\end{aligned}\quad (7.39)$$

Разрешая эти соотношения относительно  $L_i$ , получаем выражения типа (7.25) и (7.26), коэффициенты которых определяются соотношениями, тождественными (6.5). Координаты



Фиг. 7.17. Пространственные L-координаты.

точки  $P$  представляют собой отношения объемов тетраэдров с вершиной в этой точке к объему всего тетраэдра (см., например, фиг. 7.17):

$$L_1 = \frac{\text{объем } P234}{\text{объем } 1234} \text{ и т. д.} \quad (7.40)$$

<sup>1)</sup> В оригинале Volume coordinates, т. е. координаты, связанные с объемом. — Прим. ред.

### 7.11.2. Функция формы

Поскольку пространственные  $L$ -координаты связаны с декартовыми линейно и принимают значения от единицы в какой-либо вершине до нуля на противоположной грани, то функции формы элемента первого порядка (фиг. 7.16) имеют вид

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2 \text{ и т. д.} \quad (7.41)$$

Выражения для функций формы тетраэдров более высоких порядков получаются, как и для треугольников, с помощью соответствующего рекуррентного соотношения. Оставляя его получение в качестве упражнения, приведем ряд примеров.

#### Тетраэдр второго порядка (фиг. 7.16, б):

для угловых узлов

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \text{ и т. д.,} \quad (7.42)$$

для узлов на ребрах

$$N_5 = 4L_1L_2 \text{ и т. д.}$$

#### Тетраэдр третьего порядка:

для угловых узлов

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 \text{ и т. д.,} \quad (7.43)$$

для узлов на ребрах

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \text{ и т. д.,}$$

для узлов на гранях

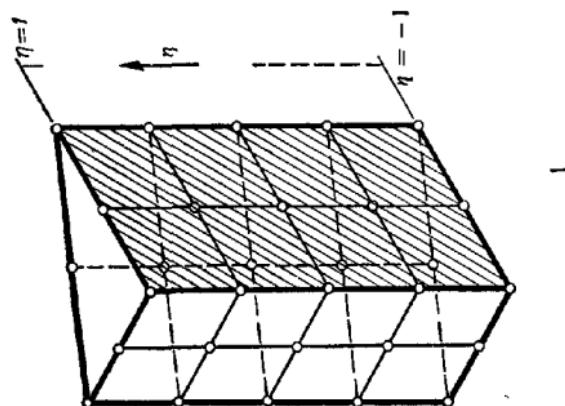
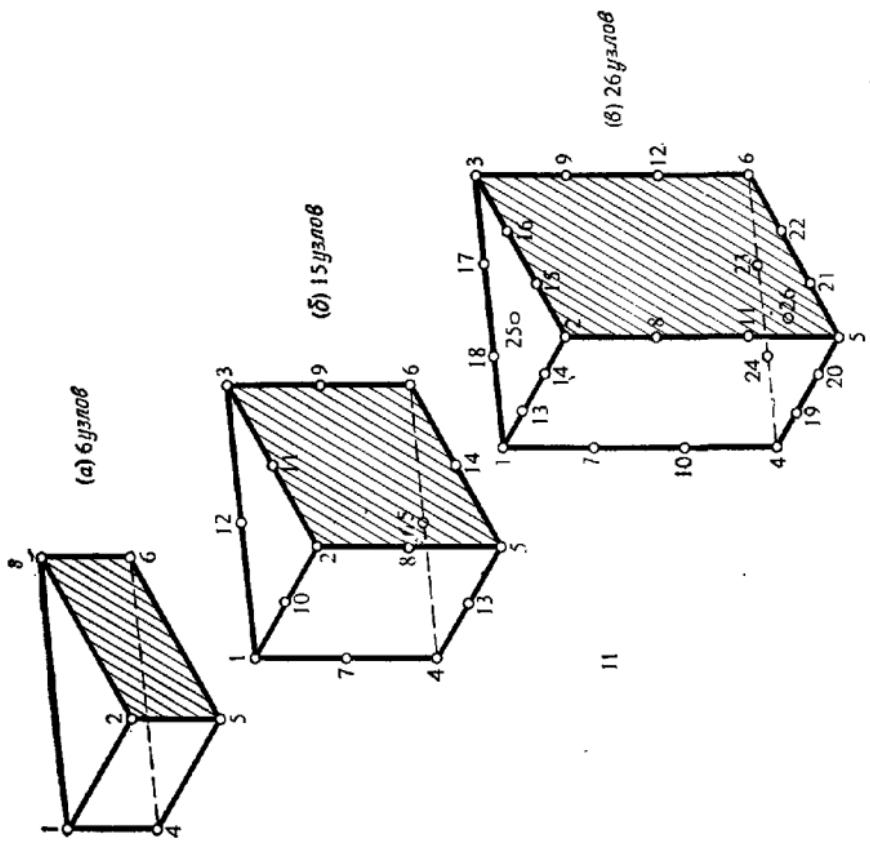
$$N_{18} = 27L_1L_2L_3 \text{ и т. д.}$$

Приведем формулу интегрирования

$$\iiint_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dx dy dz = \frac{a! b! c! d!}{(a + b + c + d + 3)!} 6V. \quad (7.44)$$

### 7.12. Некоторые другие простые трехмерные элементы

Ясно, что возможности построения элементов простых форм в трехмерном случае гораздо шире, чем в двумерном. Например, ряд элементов можно построить, исходя из трехгранной призмы (фиг. 7.18). При этом опять можно использовать лагранжев и сиреидипов подходы. Первые элементы обоих семейств одинаковы, и функции формы для них столь очевидны, что приводить их здесь нет необходимости.



Фиг. 7.18. Семейство элементов в форме трехмерной призмы.  
а—элемент первого порядка; б—элемент второго порядка; в—элемент третьего порядка.

Для элемента второго порядка, изображенного на фиг. 7:18, б, функции формы имеют вид:

для угловых узлов ( $L_1 = \xi_1 = 1$ )

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1 (2L_1 - 1)(1 + \xi) - \frac{1}{2} L_1 (1 - \xi^2), \quad (7.45)$$

для узлов на сторонах треугольников

$$N_{10} = 2L_1 L_2 (1 + \xi) \text{ и т. д.,} \quad (7.46)$$

для узлов на сторонах прямоугольников

$$N_7 = L_1 (1 - \xi^2) \text{ и т. д.}$$

Сами такие элементы используются мало, но иногда находят практическое применение как составляющие сложного элемента в виде параллелепипеда с двадцатью узлами.

### 7.13. Заключительные замечания

В настоящей главе было описано множество различных типов элементов, причем возможности построения элементов этим не исчерпываются [4, 12]. Что же можно сказать о применении сложных элементов? За исключением треугольников и тетраэдров, все остальные рассмотренные элементы применяются только в тех случаях, когда исследуемая область может быть представлена в виде некоторой совокупности правильных призм. Это очень сильное ограничение, и построение функций формы для таких элементов было бы практически бесполезным, если бы не существовало возможности деформирования элементов в соответствии с границами области. Методы деформирования в настоящее время существуют, и они будут описаны в следующей главе.

### ЛИТЕРАТУРА

- Dunne P. C., Complete Polynomial Displacement Fields for Finite Element Methods, *Trans. Roy. Aero. Soc.*, 72, 245 (1968).
- Irons B. M., Ergatoudis J. G., Zienkiewicz O. C., Comment on ref. 1, *Trans. Roy. Aero. Soc.*, 72, 709—711 (1968).
- Ergatoudis J. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 31—42 (1968).
- Zienkiewicz O. C. et al., Isoparametric and Associate Elements Families for Two and Three Dimensional Analysis, Ch. 13, in: *Finite Element Methods in Stress Analysis*, Holand I., Bell K. eds., Techn. Univ. of Norway, Tapir Press, Norway, Trondheim, 1969.
- Scott F., A Quartic, Two Dimensional Isoparametric Element, Undergraduate Project, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
- Ergatoudis J. G., Quadrilateral Elements in Plane Analysis: Introduction to Solid Analysis, M. Sc. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1966.

7. Argyris J. H., Buck K. E., Fried I., Mareczek G., Scharpf D. W., Some New Elements for Matrix Displacement Methods, 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson Base, Ohio, Oct. 1968.
8. Doherty W. P., Wilson E., Taylor R. L., Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher-Order Quadrilateral Finite Elements, Rept. 69-3, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, Jan. 1969.
9. De Veubeke B. F., Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, Ch. 9 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
10. Argyris J. H., Triangular Elements with Linearly Varying Strain for the Matrix Displacement Method, *J. Roy. Aero. Soc. Tech. Note*, 69, 711-713 (Oct. 1965).
11. Ergatoudis J. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Three Dimensional Analysis of Arch Dams and Their Foundations, Symposium on Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
12. Zienkiewicz O. C., Irons B. M., Campbell J., Scott F., Three Dimensional Stress Analysis, Int. Un. Th. Appl. Mech. Symp. on High Speed Computing in Elasticity, Liège, 1970.

## ГЛАВА 8

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

### 8.1. Введение

В предыдущей главе было показано, как можно построить некоторые семейства элементов. Каждый новый элемент этого семейства характеризуется увеличением числа узлов и повышением точности; число таких элементов, необходимых для получения достаточно точного решения, по-видимому, будет быстро уменьшаться. На практике часто приходится рассматривать тела гораздо более сложной формы, чем в академических задачах, поэтому для аппроксимации тела относительно сложной формы небольшим числом элементов нельзя довольствоваться только простыми прямоугольниками и треугольниками. В этой главе рассматривается вопрос преобразования этих простых элементов в элементы произвольной формы.

На фиг. 8.1 и 8.2 изображены одномерные, двумерные и трехмерные элементы и соответствующие криволинейные элементы.

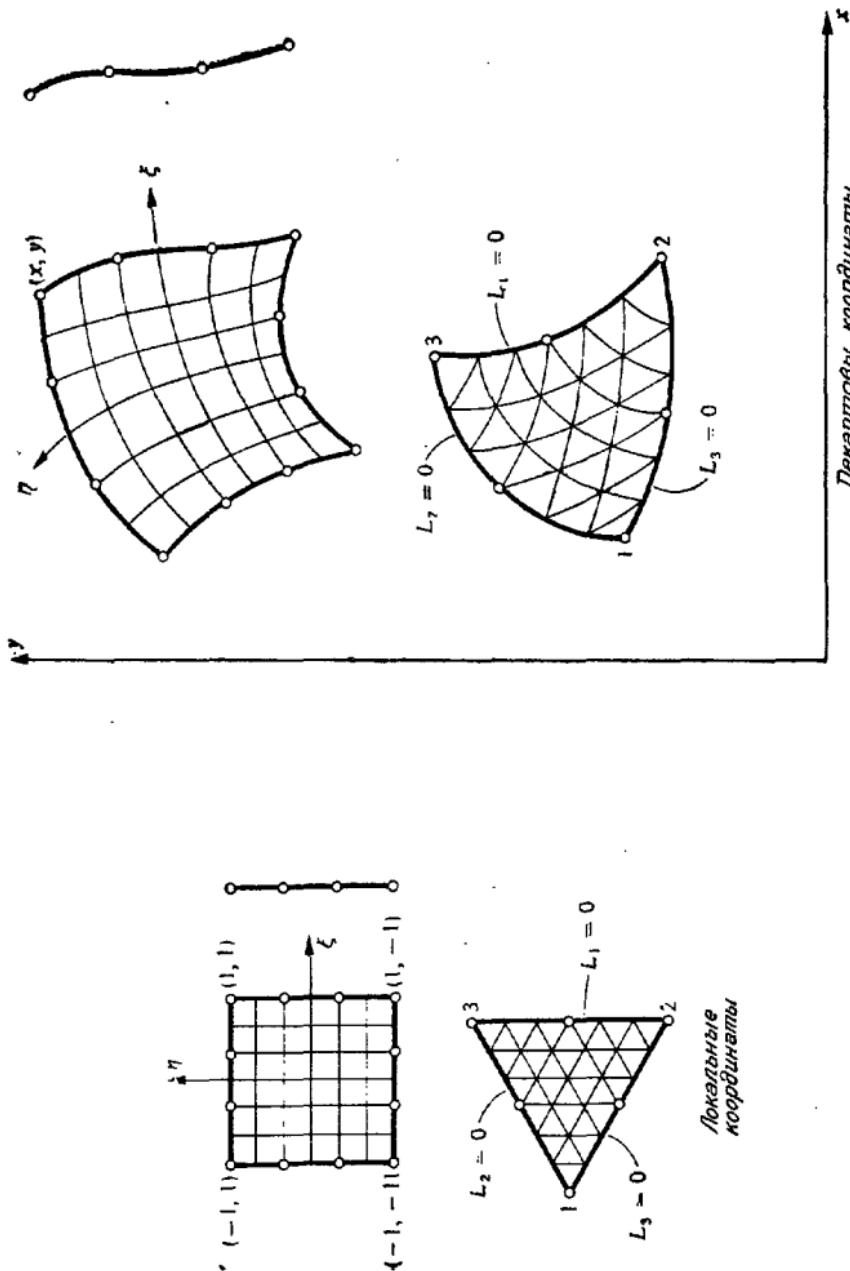
Здесь показано, что координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  или  $L_1, L_2, L_3, L_4$  могут быть преобразованы в новые криволинейные координаты.

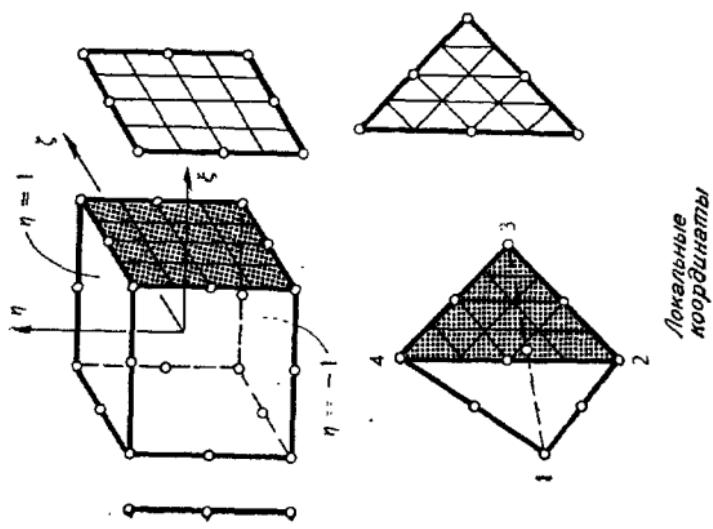
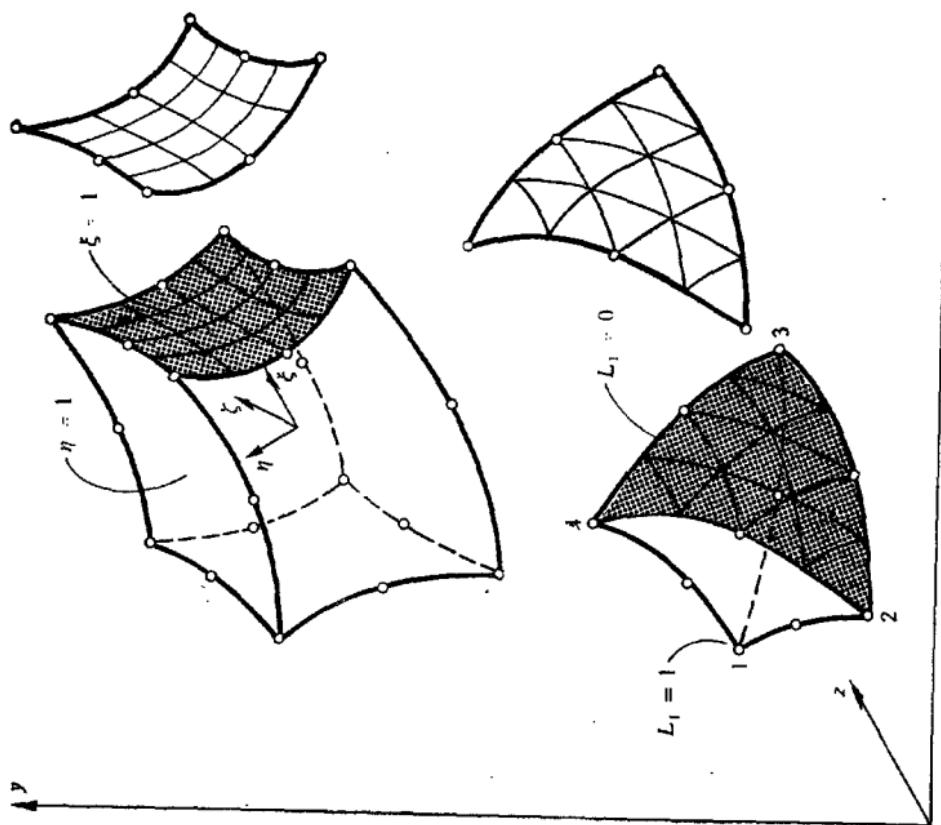
Двумерные элементы можно деформировать не только в двумерные, но и в трехмерные элементы, как показано на фиг. 8.2. При деформировании должно иметь место взаимно однозначное соответствие между декартовыми и криволинейными координатами, т. е. должны существовать соотношения типа

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}. \quad (8.1)$$

Если связь между координатами известна, то, построив функции формы в локальной системе координат, после соответствующих преобразований можно определить характеристики элементов. Однако необходимо исследовать, удовлетворяют ли функции формы критериям сходимости. Можно показать, что при определенном виде преобразований координат эти критерии выполняются.

Фиг. 8.1. Преобразование некоторых элементов в двумерном пространстве.





## 8.2. Использование функций формы для установления связи между координатами

Наиболее удобно для установления связи между координатами использовать функции формы, введенные ранее для аппроксимации неизвестной функции.

Если записать, например,

$$\begin{aligned} x &= N'_1 x_1 + N'_2 x_2 + \dots = [N'] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \\ y &= N'_1 y_1 + N'_2 y_2 + \dots = [N'] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \\ z &= N'_1 z_1 + N'_2 z_2 + \dots = [N'] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

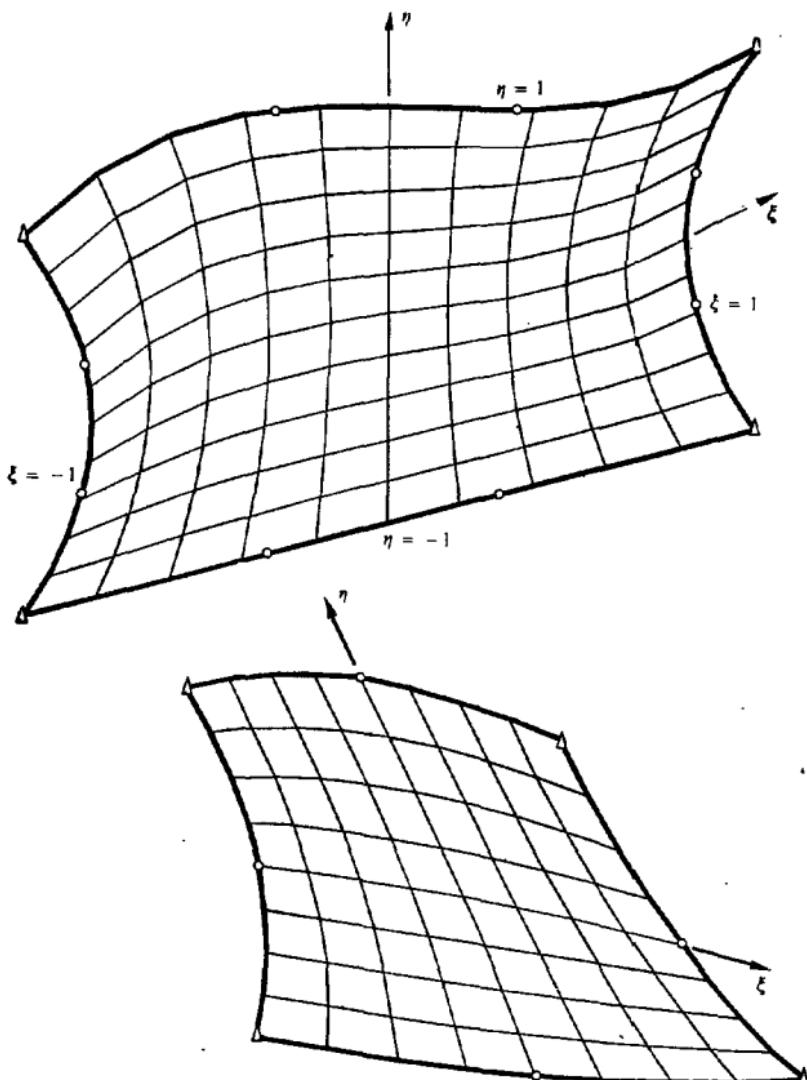
где  $[N']$  — функции формы в локальных координатах, то сразу же получим искомое соотношение. Точки с координатами  $x_1, y_1, z_1$  и т. д. совпадают с соответствующими точками границы элемента (так как по определению функции формы равны единице в рассматриваемой точке и нулю в остальных).

Каждой совокупности локальных координат будет соответствовать одна и, как правило, только одна совокупность глобальных декартовых координат. Однако далее мы увидим, что иногда при значительном деформировании взаимно однозначное соответствие может нарушиться.

Идея использования функций формы для введения криволинейных координат впервые упоминается Тайгом [1]. Он применил ее при деформировании прямоугольника в произвольный четырехугольник. Айронс [2, 3] обобщил эту идею на другие элементы.

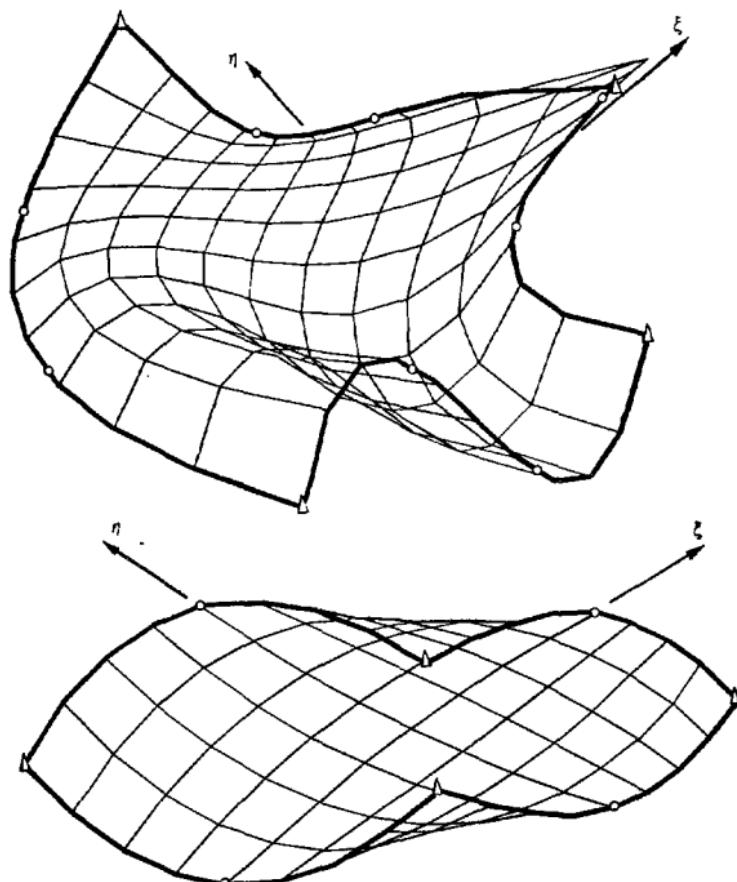
Разрабатывая методы получения кривых поверхностей для нужд техники, к аналогичным соотношениям совершенно независимо пришел Кун [4, 5]. В настоящее время вопросы теории метода конечных элементов и исследования поверхностей становятся взаимосвязанными.

На фиг. 8.3 изображены деформированные элементы, полученные из элементов второго и третьего порядков сирендиева



Фиг. 8.3. Построенные ЭВМ криволинейные координатные линии для элементов второго и третьего порядков (небольшое искривление).

семейства. Очевидно, что между локальными ( $\xi, \eta$ ) и глобальными ( $x, y$ ) координатами существует взаимно однозначное соответствие. Если искривление элемента в некоторых точках велико, то может появиться неоднозначность, как, например, в двух случаях, показанных на фиг. 8.4. Здесь некоторые внутренние точки отображаются за пределы криволинейного элемента. Кроме того, существуют внутренние точки, которым



Фиг. 8.4. Чрезмерное искривление элемента, приводящее к неоднозначности преобразования и «перегибу». Даны элементы второго и третьего порядков.

соответствуют разные локальные координаты. На практике следует избегать такого сильного искривления.

На фиг. 8.5 приведены два примера искривления двумерного ( $\xi$ ,  $\eta$ ) элемента в трехмерном пространстве ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Далее в этой главе часто будем называть основной элемент в недеформированных локальных координатах первичным элементом.

### 8.3. Геометрическое соответствие элементов

Хотя было показано, что при использовании функции формы для преобразования координат каждый первичный элемент единственным образом отображает некоторую часть реального объекта, важно, чтобы разбиение на новые криволинейные эле-

менты не оставляло щелей между ними. Возможность возникновения таких щелей показана на фиг. 8.6.

**Теорема 1.** *Если два смежных криволинейных элемента образуются из первичных, функции формы которых удовлетворяют условиям непрерывности, то они будут соприкасаться по всей границе.*

Эта теорема очевидна, ибо однозначность любой функции  $\phi$ , вытекающая из условия непрерывности, означает однозначность преобразования координат  $x, y, z$ . Так как координаты узлов одни и те же, непрерывность имеет место. Узлы новых искривленных элементов не обязательно располагать только в точках, для которых определены функции формы. Внутри элемента или на его границах можно ввести дополнительные узлы.

#### 8.4. Изменение неизвестной функции в криволинейных элементах. Условия непрерывности

После построения элемента с помощью функций формы  $[N']$  для исследования его характеристик необходимо задать вид неизвестной функции  $\phi$ . Удобнее всего использовать в криволинейных координатах обычное представление

$$\phi = [N] \{\phi\}^e, \quad (8.3)$$

где  $\{\phi\}^e$  — набор узловых значений.

**Теорема 2.** *Если функции формы  $[N]$ , входящие в (8.3), в первичных координатах удовлетворяют условиям непрерывности  $\phi$ , то и в криволинейных элементах условия непрерывности будут выполняться.*

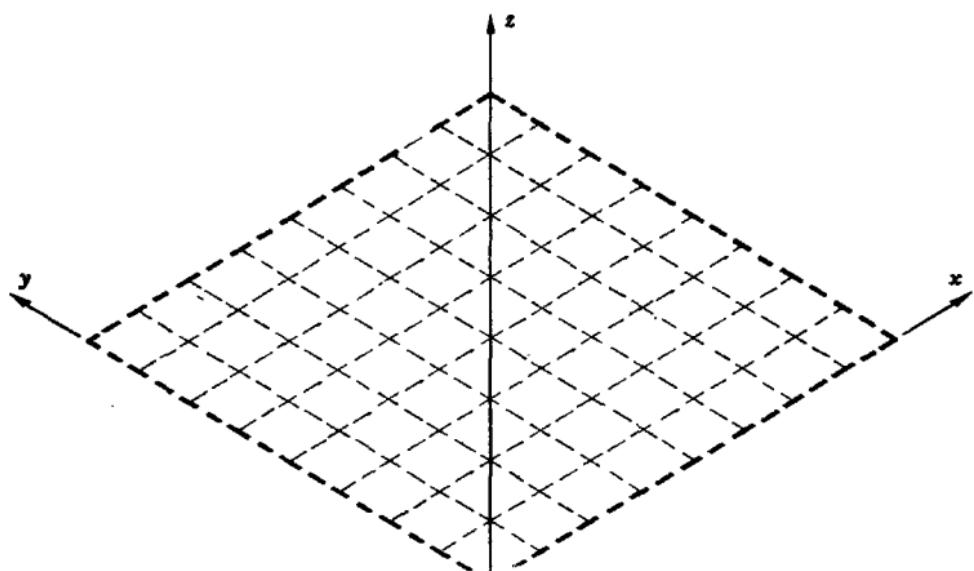
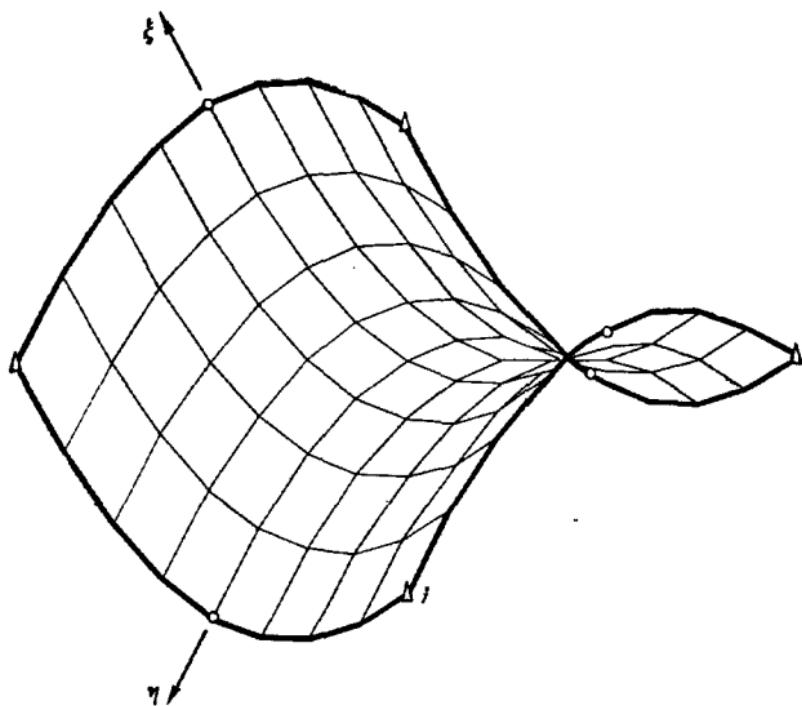
Эта теорема доказывается так же, как и теорема предыдущего раздела.

Узловые значения могут соответствовать узлам, используемым для задания геометрии элемента. Например, обозначенные кружочками на фиг. 8.7 точки используются для определения геометрии элемента. Для установления характера изменения неизвестной функции можно было использовать ее значение в точках, обозначенных квадратиками.

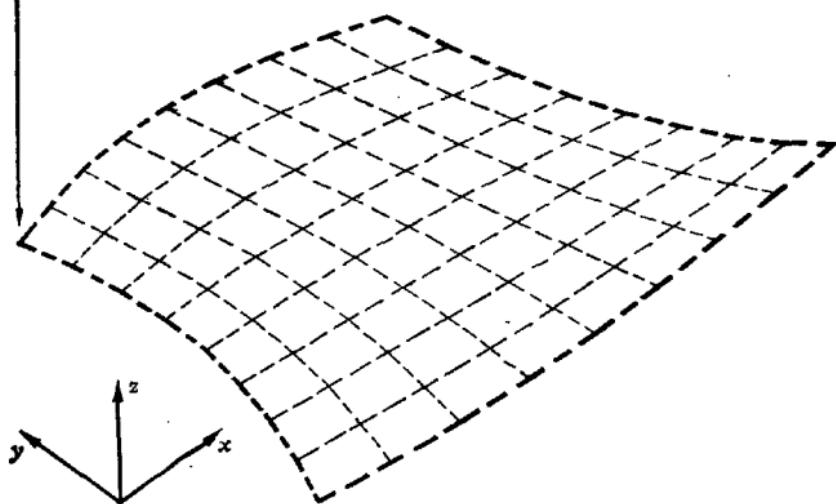
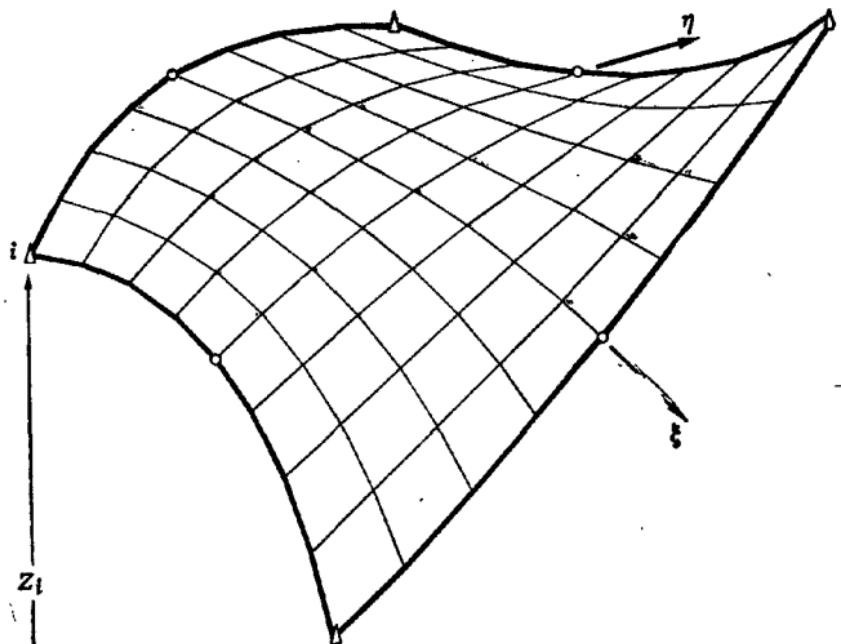
На фиг. 8.7, а для задания геометрии и конечно-элементной аппроксимации используются одни и те же точки. Итак, если

$$[N] = [N'], \quad (8.4)$$

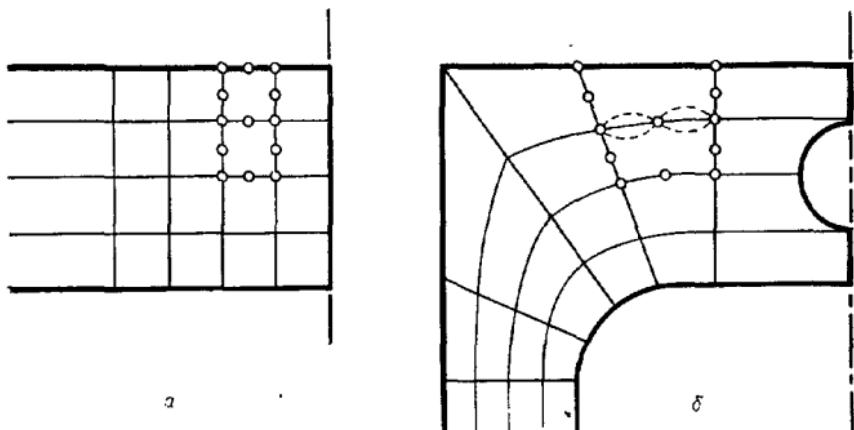
т. е. функции формы, определяющие геометрию элемента и неизвестную функцию, одинаковы, то элемент называется *изопараметрическим*.



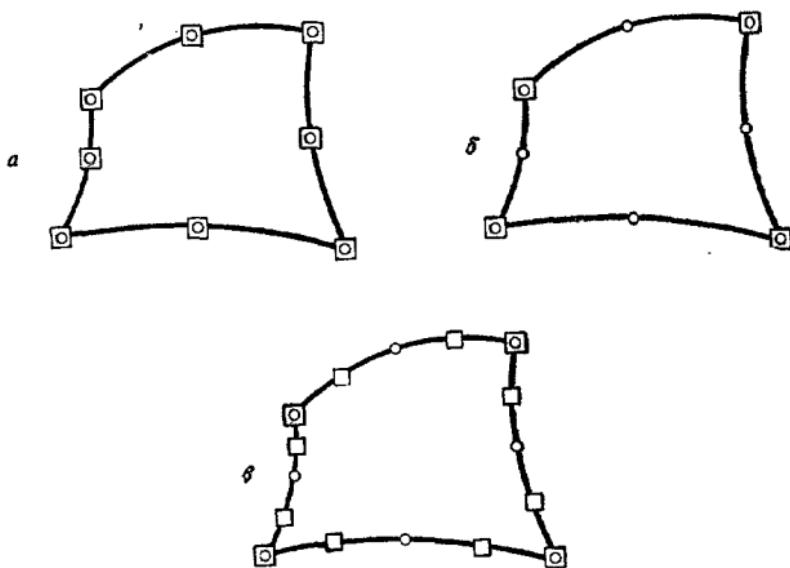
Фиг. 8.5. Преобразование плоских (или параболических) элементов в трехмерном пространстве.



Фиг. 8.5. (продолжение).



Фиг. 8.6. Требование совместности при разбиении области.



Фиг. 8.7. Различные типы элементов.

◊ точка, в которой заданы координаты; □ точка, в которых заданы параметры функции.  
 а — изопараметрический элемент; б — суперпараметрический элемент; в — субпараметрический элемент.

Однако для определения  $\phi$  можно было бы использовать только четыре угловые точки (фиг. 8.7, б). Такие элементы называются *суперпараметрическими*, так как для них изменение геометрии описывается более полно, чем изменение неизвестных.

Аналогично если для определения  $\phi$  вводится больше узлов, чем для задания геометрии, то элементы называются *субпараметрическими* (фиг. 8.7, в). Такие элементы на практике используются чаще, чем суперпараметрические.

## 8.5. Удовлетворение критерию постоянства производной

Выбор удовлетворяющих условию непрерывности функций, которые определяют геометрию элемента и закон изменения  $\phi$ , достаточно широк, причем эти функции не обязательно должны быть одинаковыми. Однако критерий постоянства деформаций (гл. 2), или критерий постоянства производной (гл. 3), накладывает некоторое ограничение.

Напомним, что для сходимости необходимо, чтобы в каждой точке элемента путем подбора соответствующих узловых значений  $\phi$  можно было получить любое произвольное постоянное значение первых производных (это справедливо для функционалов, содержащих только производные первого порядка). При этом соотношение

$$\phi = [N]\{\phi\}^e = \sum N_i \phi_i = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z, \text{ где } (8.5)$$

$$[N] = [N(\xi, \eta, \zeta)],$$

должно быть справедливо для любых постоянных  $a_{1-4}$  и соответствующих значений  $\{\phi\}^e$ . В самом деле, в узловых точках должно выполняться равенство

$$\phi_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i, \quad (8.6)$$

так что первое соотношение можно переписать в виде

$$[N]\{\phi\}^e = a_1 \sum N_i + a_2 \sum N_i x_i + a_3 \sum N_i y_i + a_4 \sum N_i z_i =$$

$$= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z. \quad (8.7)$$

Оно всегда будет удовлетворяться, если

$$\begin{aligned} \sum N_i &= 1, \\ \sum N_i x_i &= x, \\ \sum N_i y_i &= y, \\ \sum N_i z_i &= z. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Из формул преобразования координат [соотношение (8.2)] следует, что

$$\begin{aligned} \sum N'_i x_i &= x, \\ \sum N'_i y_i &= y, \\ \sum N'_i z_i &= z, \end{aligned} \quad (8.9)$$

и, следовательно, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. Все изопараметрические элементы, для которых  $\sum N_i = 1$ ), удовлетворяют условию постоянства производной.

Можно показать, что это условие является необходимым и что теорема справедлива для субпараметрического преобразования в случае, если  $[N]$  можно представить в виде линейной комбинации  $[N]$ , т. е. если

$$N'_i = \sum C_{ij} N_j. \quad (8.10)$$

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### 8.6. Вычисление матриц элемента (преобразование координат $\xi, \eta, \zeta$ )

Для применения метода конечных элементов должны быть найдены матрицы, определяющие свойства элемента, такие, как жесткость и др. Эти матрицы будут иметь вид

$$\int_V [G] dV, \quad (8.11)$$

где  $[G]$  зависит от функций  $N$  или их производных по глобальным координатам. В качестве примера рассмотрим матрицу жесткости

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (8.12)$$

и соответствующие векторы нагрузки

$$\int_V [N]^T \{p\} dV. \quad (8.13)$$

Для некоторого класса задач теории упругости матрицы  $[B]$  были выписаны в явном виде [см. равенства (4.10), (5.6) и (6.11)]. Первое из них, равенство (4.10), относящееся к плоским задачам, дает

$$[B_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

<sup>1)</sup> При определении напряжений это условие просто означает, что перемещение тела как жесткого целого не должно вызывать никаких деформаций — требование менее ограничительное, чем условие постоянства производных.

Здесь штрих, использованный в гл. 4 для обозначения функций формы, опущен, ибо теперь эти функции являются скалярными и относятся ко всем компонентам перемещения. Заметим, что такая форма записи носит достаточно общий характер и справедлива для всех двумерных элементов, используемых при решении плоских задач теории упругости, независимо от числа узлов (или неузловых параметров) в элементе. Это замечание относится ко всем рассматриваемым в книге задачам.

Для вычисления матриц необходимо сделать два преобразования. Во-первых, поскольку  $N_i$  заданы в локальных (криволинейных) координатах, необходимо каким-либо образом выразить глобальные производные, входящие в (8.14), через локальные производные.

Во-вторых, элементарный объем (или поверхность), по которому должно проводиться интегрирование, нужно представить в локальных координатах и соответствующим образом изменить пределы интегрирования.

Рассмотрим, например, систему локальных координат  $\xi, \eta, \zeta$  и соответствующую систему глобальных координат  $x, y, z$ . Используя правило частного дифференцирования, можно записать, например, производную по  $\xi$  в виде

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}. \quad (8.15)$$

Дифференцируя аналогично по остальным двум координатам и используя матричную форму записи, получаем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (8.16)$$

Левая часть этого выражения легко вычисляется, так как функции  $N_i$  заданы в локальных координатах. Кроме того, поскольку координаты  $x, y, z$  связаны с криволинейными координатами [соотношение (8.2)], матрица  $[J]$  выражается через локальные координаты. Эта матрица называется матрицей Якоби.

Чтобы найти глобальные производные, обратим матрицу  $[J]$  и запишем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (8.17)$$

Выражая  $[J]$  через функции формы  $[N']$ , определяющие преобразование координат (которые, как мы видели, только для изопараметрических элементов совпадают с функциями формы  $[N]$ ), получаем

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N'_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_2}{\partial \xi} & \cdots \\ \frac{\partial N'_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_2}{\partial \eta} & \cdots \\ \frac{\partial N'_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N'_2}{\partial \zeta} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (8.18) \end{aligned}$$

Для преобразования переменных и области интегрирования применим стандартный прием, использующий определитель матрицы  $[J]$ . Так, например, элементарный объем преобразуется следующим образом:

$$dx dy dz = \det [J] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.19)$$

Преобразование такого типа справедливо при любом числе координат. Доказательство читатель может найти в обычных учебниках по математике. Особенно хорошо изложен этот вопрос в книге Муриагана [6]<sup>1)</sup> (см. также приложение 5).

Если предположить, что матрица  $[J]$  имеет обратную, то определение характеристик элемента сводится к вычислению интегралов типа (8.11).

Если криволинейные координаты являются нормализованными координатами, соответствующими прямой правильной призме, то интеграл (8.11) можно записать в виде

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.20)$$

<sup>1)</sup> Определитель матрицы Якоби в литературе называется «якобианом» и часто записывается в виде

$$\det [J] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}.$$

Интегрирование производится по объему именно такой, а не искривленной призмы, поэтому пределы интегрирования записываются просто. Для одномерных и двумерных задач получаются интегралы соответственно по одной и двум переменным с простыми пределами интегрирования.

Хотя пределы интегрирования простые, выражение для  $[G]$  в явном виде, к сожалению, очень сложное. Поэтому, за исключением некоторых простейших элементов, точно интегрирование провести не удается и приходится прибегать к численному интегрированию. Впрочем, это, как мы увидим далее, не так уж плохо и имеет то преимущество, что позволяет избежать алгебраических ошибок и составить типовые программы для различных классов задач независимо от вида элемента. При использовании численных методов обращение матрицы  $[J]$  никогда не производится явно.

## 8.7. Матрицы элемента. L-координаты

Соотношения (8.2) преобразования координат и все последующие теоремы в равной степени справедливы для любой системы локальных координат. В частности, с их помощью координаты  $L_1, L_2, \dots$ , введенные в предыдущей главе для треугольников и тетраэдров, можно связать с глобальными декартовыми координатами.

Большая часть рассуждений предыдущей главы остается в силе, если соответствующим образом переименовать локальные координаты. Однако появляются два существенных отличия.

Во-первых, локальные координаты не являются независимыми и число их на единицу больше, чем декартовых. Матрица  $[J]$ , следовательно, становится прямоугольной и не допускает обращения. Во-вторых, меняются пределы интегрирования, которые теперь должны соответствовать треугольным или тетраэдральным первичным элементам.

Простейший, хотя, возможно, и не самый изящный, способ избавиться от первого затруднения — это считать последнюю переменную зависимой. Так, например, для тетраэдра (используя обозначения предыдущей главы) введем формально

$$\begin{aligned}\xi &= L_1, \\ \eta &= L_2, \\ \zeta &= L_3, \\ 1 - \xi - \eta - \zeta &= L_4.\end{aligned}\tag{8.21}$$

Таким образом, равенство (8.16) и все соотношения вплоть до (8.19) сохраняются без изменений.

Поскольку функции  $N_i$  выражаются через координаты  $L_1, L_2$  и т. д., то

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial \xi}. \quad (8.22)$$

Учитывая (8.21), приходим к равенству

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4}.$$

Остальные производные получаются аналогично.

Пределы интегрирования в (8.20) заменяются на пределы, соответствующие тетраэдру, т. е.

$$\int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} \int_0^1 [G(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.23)$$

Аналогичная процедура справедлива и для треугольника.

Заметим, что сложность выражения для  $[G]$  опять вызывает необходимость численного интегрирования, которое должно производиться по простой, неискривленной, первичной области, т. е. по треугольнику или тетраэдру.

Отметим, наконец, что каждый из элементов, рассмотренных в предыдущей главе, может быть деформирован в криволинейный. Иногда, как, например, для треугольной призмы, одновременно используются и прямоугольные и  $L$ -координаты (фиг. 8.8). Сделанные ранее замечания относительно зависимости координат остаются в силе.

Фиг. 8.8. Криволинейная трехгранная призма.

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

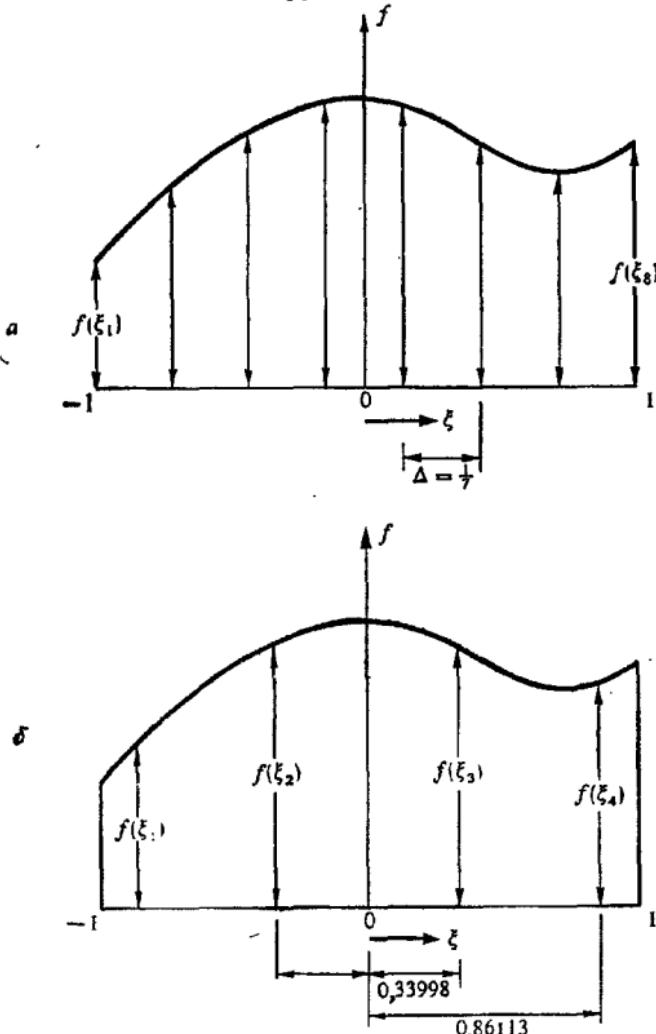
### 8.8. Одна переменная

Еще в гл. 5, где рассматривалась относительно простая задача об осесимметричном напряженном состоянии и использовались простые треугольные элементы, отмечалось, что точное интегрирование выражений, входящих в матрицы элемента, связано с большими трудностями. В таких задачах, как и при использовании сложных криволинейных элементов, возникает необходимость численного интегрирования.

Здесь мы изложим основные принципы численного интегрирования и приведем таблицы квадратурных коэффициентов.

Интеграл от функции одной переменной можно вычислить двумя основными методами [7, 8].

**Квадратура Ньютона — Котеса<sup>1)</sup>.** Сначала *aприори* выбираются точки, обычно равноотстоящие друг от друга, в которых вычисляются значения функций. Затем строится полином,



Фиг. 8.9. Интегрирование методами Ньютона — Котеса (а) и Гаусса (б). Оба метода позволяют точно проинтегрировать полином седьмой степени (т. е. погрешность имеет порядок  $O(\Delta^8)$ ).

1) Термин «квадратура» используется вместо термина «численное интегрирование».

значения которого совпадают со значениями функции в этих точках, и точно интегрируется (фиг. 8.9).

Так как  $n$  значений функции определяют полином степени  $n - 1$ , ошибка имеет порядок  $O(\Delta)^n$ , где  $\Delta$  — расстояние между точками. В результате получаем известные квадратурные формулы Ньютона — Котеса, в соответствии с которыми интеграл можно записать в виде

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (8.24)$$

при интегрировании в пределах от  $-1$  до  $+1$  (фиг. 8.9, а). Например, если  $n = 2$ , то

$$I = f(-1) + f(1). \quad (8.25)$$

При  $n = 3$  получается известная формула трапеций

$$I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)], \quad (8.26)$$

при  $n = 4$  — формула одной трети Симпсона

$$I = \frac{1}{4} [f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)]. \quad (8.27)$$

Формулы интегрирования для различных  $n$  (до  $n = 20$  включительно) приведены у Копаля [8].

**Квадратура Гаусса.** Если значения функции вычисляются не в априорно заданных точках, а так, чтобы достигалась наилучшая возможная для данного количества точек точность, интегрирование выполняется точнее. Если положить, что

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i), \quad (8.28)$$

и снова представить подынтегральную функцию в виде полинома, то нетрудно увидеть, что для  $n$  точек интегрирования получим  $2n$  неизвестных ( $f_i$  и  $\xi_i$ ), и, следовательно, можно построить и точно проинтегрировать полином степени  $2n - 1$  (фиг. 8.9, б). В результате ошибка будет иметь порядок  $O(\Delta)^{2n}$ .

Решить полученную систему уравнений трудно, но с помощью некоторых математических приемов [7] решение можно получить в полиномах Лежандра. Поэтому этот метод часто называется квадратурой Гаусса — Лежандра.

В табл. 8.1 приведены координаты точек и весовые коэффициенты для интегрирования по Гауссу.

Таблица 8.1

## Абсциссы и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$$

$\pm a$					$H$
			$n = 2$		
0,57735	02 691	89 626	1,00000	00 000	00 000
			$n = 3$		
0,77459	66 692	41 483	0,55555	55 555	55 556
0,00000	00 000	00 000	0,88888	88 888	88 889
			$n = 4$		
0,86113	63 115	94 053	0,34785	48 451	37 454
0,33998	10 435	84 856	0,65214	51 548	62 546
			$n = 5$		
0,90617	98 459	38 664	0,23692	68 850	56 189
0,53846	93 101	05 683	0,47862	86 704	99 366
0,00000	00 000	00 000	0,56888	88 888	88 889
			$n = 6$		
0,93246	95 142	03 152	0,17132	44 923	79 170
0,66120	93 864	66 265	0,36076	15 730	48 139
0,23861	91 860	83 197	0,46791	39 345	72 691
			$n = 7$		
0,94910	79 123	42 759	0,12948	49 661	68 870
0,74153	11 855	99 394	0,27970	53 914	89 277
0,40584	51 513	77 397	0,38183	00 505	05 119
0,00000	00 000	00 000	0,41795	91 836	73 469
			$n = 8$		
0,96028	98 564	97 536	0,10122	85 362	90 376
0,79666	64 774	13 627	0,22238	10 344	53 374
0,52553	24 099	16 329	0,31370	66 458	77 887
0,18343	46 424	95 650	0,36268	37 833	78 362
			$n = 9$		
0,96816	02 395	07 626	0,08127	43 883	61 574
0,83603	11 073	26 636	0,18064	81 606	94 857
0,61337	14 327	00 590	0,26061	06 964	02 935
0,32425	34 234	03 809	0,31234	70 770	40 003
0,00000	00 000	00 000	0,33023	93 550	01 260
			$n = 10$		
0,97390	65 285	17 172	0,06667	13 443	08 688
0,86506	33 666	88 985	0,14945	13 491	50 581
0,67940	95 682	99 024	0,21908	63 625	15 982
0,43339	53 941	29 247	0,26926	67 193	09 996
0,14887	43 389	81 631	0,29552	42 247	14 753

В методе конечных элементов сложность вычислений заключается в определении значений интегрируемой функции  $f$ , поэтому в дальнейшем будет применяться только формула Гаусса, использующая минимальное число значений функции.

Можно получить формулы для интегрирования с заданной степенью точности выражений вида

$$I = \int_{-1}^1 w(\xi) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (8.29)$$

при известной функции  $w(\xi)$ , если опять заменить  $f(\xi)$  полиномом [7].

### 8.9. Прямоугольник или прямая призма

Проще всего взять интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8.30)$$

вычисляя сначала значение внутреннего интеграла в предположении, что  $\eta$  — постоянная, т. е. используя формулу

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta) = \Psi(\eta). \quad (8.31)$$

Вычисляя затем внешний интеграл, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \Psi(\eta) d\eta = \sum_{l=1}^n H_l \Psi(\eta_l) = \sum_{l=1}^n H_l \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta_l) = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n H_l H_j f(\xi_j, \eta_l). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Аналогично для прямой призмы имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Здесь предполагалось, что число точек интегрирования в каждом направлении одинаково.

Интересно отметить, что двойное суммирование легко заменить простым по  $(n \times n)$  точкам для прямоугольника (или по  $n^3$  точкам для куба). На фиг. 8.10 показано девять точек, необходимых для точного интегрирования полинома пятого порядка по каждой из переменных.

Однако к решению этой задачи можно было бы подойти с другой стороны и интегрировать точно полином пятого порядка по двум переменным. В этом случае в каждой точке пришлось бы определить две координаты и значение подынтегральной функции  $f$ , входящей в весовую формулу типа

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_1^m \omega_i f(\xi_i, \eta_i). \quad (8.34)$$

Оказывается, что при этом для достижения той же точности достаточно было бы использовать только семь точек. Формула такого типа для трехмерного «кирпичика» получена и с успехом использована Айронсом [9].

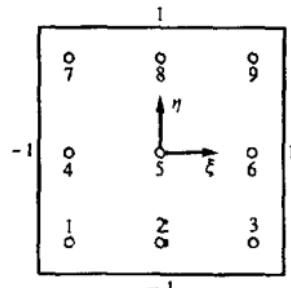
## 8.10. Треугольник или тетраэдр

Для треугольника интегралы по  $L$ -координатам имеют вид

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_1. \quad (8.35)$$

Онить можно было бы использовать  $n$  гауссовых точек и получить сумму типа, рассмотренного в предыдущем разделе. Однако теперь пределы интегрирования сами содержат переменные, поэтому для второго интегрирования удобно использовать выражения вида (8.29) квадратуры Гаусса, где  $\omega$  — линейная функция. Это было сделано Радо [10, 11]. В табл. 8.2 приведены весовые коэффициенты, входящие в выражение

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W f(L_1, L_2, L_3),$$



Фиг. 8.10. Точки интегрирования для  $n = 3$  в квадратной области. (Точко интегрируется полином пятой степени по каждой переменной.)

Таблица 8.2

## Коэффициенты для интегрирования по формулам Гаусса и Радо

Количество точек интегрирования в каждом направлении	$AJ [I]$	$H [J]$	$AI [I]$	$AS [I]$
$n = 1$	0,5	1,0	0,3333333333 (1,0)	0,75 (0,25)
$n = 2$	0,2113248654 0,7886751346	0,5 0,5	0,1550510257 0,6449489743 (1,0)	0,3764030627 0,5124858262 (0,1111111111)
$n = 3$	0,1127016654 0,5 0,8872983346	0,2777777778 0,4444444444 0,2777777778	0,0885879595 0,4094668644 0,7876594618 (1,0)	0,2204622112 0,3881934688 0,3288443200 (0,0625)
$n = 4$	0,0694318442 0,3300094782 0,6699905218 0,9305681558	0,1739274226 0,3260725774 0,3260725774 0,1739274226	0,0571041961 0,2768430136 0,5835904324 0,8602401357 (1,0)	0,1437135608 0,2813560151 0,3118265230 0,2231039011 (0,04)
$n = 5$	0,0469100770 0,2307653449 0,5 0,7692346551 0,9530899230	0,1184634425 0,2393143353 0,2844444444 0,2393143353 0,1184634425	0,0398098571 0,1980134179 0,4379748102 0,6954642734 0,9014649142 (1,0)	0,1007941926 0,2084506672 0,2604633916 0,2426935942 0,1598203766 (0,277777778)

где

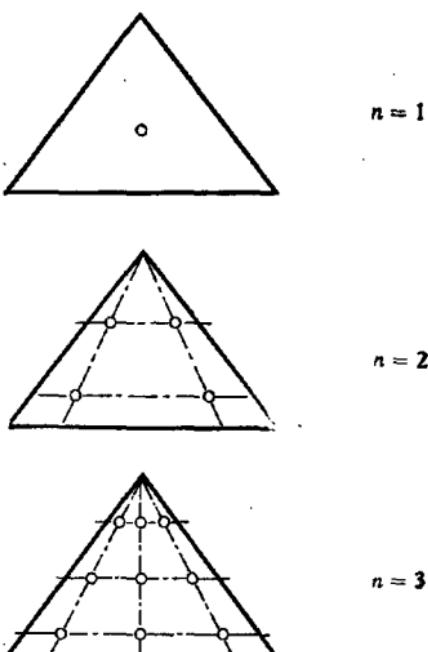
$$L_1 = AJ(i),$$

$$L_2 = AJ(j)(1 - L_1), \\ L_3 = I - L_1 - L_2, \quad (8.36)$$

$$W = AS(i) H(j)(1 - L_1).$$

Аналогичные соотношения можно получить и для тетраэдра.

На фиг. 8.11 показано расположение точек интегрирования в треугольниках при  $n = 1, 2, 3$ . Видно, что они расположены неравномерно и несимметрично. Кроме того, в направлениях  $L_1, L_2, L_3$  точность интегрирования различна. Другое (более изящное) расположение точек, предложенное Хаммером и др. [12], позволяет существенно упростить расчет; весовые коэффи-



Фиг. 8.11. Точки интегрирования для треугольника при использовании метода Гаусса — Радо.

циенты для выражений, аналогичных (8.34), приведены в табл. 8.3 [13].

Можно убедиться, что точек всегда столько или немногого больше, чем требуется для получения полных полиномов заданного порядка.

Очевидно, что эти результаты можно обобщить и на тетраэдры. В табл. 8.4 представлены некоторые формулы из работы [12].

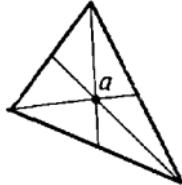
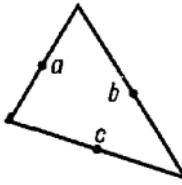
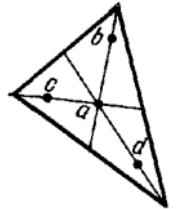
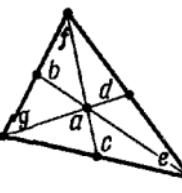
### 8.11. Заключительные замечания

В этой главе показано, каким образом можно построить большое количество криволинейных элементов. Необходимость использования методов численного интегрирования потребовала описания некоторых из них. Дальнейшие подробности можно найти в различных учебниках по численному анализу.

Очевидно, что численное интегрирование является приближенным. Вопрос о том, какая степень точности необходима в практических задачах, будет рассмотрен в следующей главе. Там же будут приведены основные принципы организации программ при использовании численного интегрирования.

Таблица 8.3

## Формулы численного интегрирования для треугольников

Порядок элемента	Рисунок	Ошибка	Точки	L-координаты	Весовые коэффициенты $2W_k$
Первый		$R = O(h^2)$	$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Второй		$R = O(h^3)$	$a$ $b$ $c$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Третий		$R = O(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{11}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}$ $\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}$ $\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
Третий		$R = O(h^4)$	$a$ $b$ $c$ $d$ $e$ $f$ $g$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ $1, 0, 0$ $0, 1, 0$ $0, 0, 1$	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{3}{60}$

Эта формула не рекомендуется из-за отрицательного весового коэффициента и ошибок округления

Порядок элемента	Рисунок	Ошибка	Го- ки	L-координаты	Весовые коэффициенты $2W_k$																					
Пятый		$R = O(h^6)$		<table> <tr><td><math>a</math></td><td><math>\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>b</math></td><td><math>\alpha_1, \beta_1, \beta_1</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>c</math></td><td><math>\beta_1, \alpha_1, \beta_1</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>d</math></td><td><math>\beta_1, \beta_1, \alpha_1</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>e</math></td><td><math>\alpha_2, \beta_2, \beta_2</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>f</math></td><td><math>\beta_2, \alpha_2, \beta_2</math></td><td></td></tr> <tr><td><math>g</math></td><td><math>\beta_2, \beta_2, \alpha_2</math></td><td></td></tr> </table> $\alpha_1 = 0,05971587$ $\beta_1 = 0,47014206$ $\alpha_2 = 0,79742699$ $\beta_2 = 0,10128651$	$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$		$b$	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$		$c$	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$		$d$	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$		$e$	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$		$f$	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$		$g$	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$		0,225 0,13239415 0,12593918
$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$																									
$b$	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$																									
$c$	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$																									
$d$	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$																									
$e$	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$																									
$f$	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$																									
$g$	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$																									

Таблица 8.4

## Формулы численного интегрирования для тетраэдра

Порядок элемента	Рисунок	Ошибка	Точ- ки	Пространственные L-координаты	Весовые коэффициенты
Первый		$R = O(h^2)$	$a$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
Второй		$R = O(h^3)$	$a$ $b$ $c$ $d$	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
				$\alpha = 0,58541020$ $\beta = 0,13819660$	

Продолжение табл. 8.4

Порядок элемента	Рисунок	Ошибка	Точки	Пространственные L-координаты	Весовые коэффициенты
Третий		$R = O(h^4)$	$a$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$
			$b$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			$c$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			$d$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			$e$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Taig I. C., Structural Analysis by the Matrix Displacement Method, Engl. Electric Aviation Rept. № SO17, 1961.
2. Irons B. M., Numerical Integration Applied to Finite Element Methods, Conf. Use of Digital Computers in Struct. Eng., Univ. of Newcastle, 1966.
3. Irons B. M., Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method, *JAIAA*, **14**, 2035—2037 (1966); есть русский перевод: Айронс, Инженерные приложения численного интегрирования в методе жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, **4**, № 11, стр. 213—216 (1966).
4. Coons S. A., Surfaces for Computer Aided Design of Space Form, MIT Project MAC, MAC-TR-41, 1967.
5. Forrest A. R., Curves and Surfaces for Computer Aided Design, Comp. Aided Design Group, Cambridge, England, 1968.
6. Murnaghan F. D., Finite Deformation of an Elastic Solid, Wiley, 1951.
7. Schied F., Numerical Analysis, Schaum Series, McGraw-Hill, 1968.
8. Kopal Z., Numerical Analysis, 2nd ed., Chapman and Hall, 1961.
9. Irons B. M., Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3** (1971).
10. Radau, *Journ. de. Math.*, **3**, 283 (1880).
11. Anderson R. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 1031—1055 (1968).
12. Hammer P. C., Marlowe O. P., Stroud A. H., Numerical Integration Over Simplexes and Cones, *Math. Tables Aids Comp.*, **10**, 130—137 (1956).
13. Felippa C. A., Refined Finite Element Analysis of Linear and Non-Linear Two Dimensional Structures, Structures Materials Research Rept. № 66-22, Univ. of California, Berkeley, Oct. 1966.

# НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДВУМЕРНОГО И ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

## 9.1. Введение

Применение элементов высоких порядков, рассмотренных в двух предыдущих главах, требует некоторого обоснования. Усложнение элементов приводит к дополнительным затратам машинного времени. Поэтому необходимо рассмотреть вопрос экономичности их использования.

На фиг. 9.1 представлены результаты расчета консольной балки с помощью различных элементов. Сравнение результатов показывает, что *при одном и том же числе степеней свободы использование сложных элементов значительно повышает точность*. Однако их применение не обязательно сопровождается пропорциональным уменьшением времени решения, так как ширина ленты матрицы для сложных элементов увеличивается, тем не менее, вообще говоря, оно существенно сокращается.

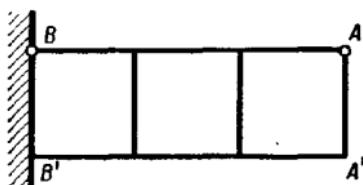
При использовании сложных элементов значительно сокращается время подготовки исходных данных. В приведенном примере три сложных элемента заменяют соответственно шесть и восемнадцать простых треугольников, поэтому в итоге приходится иметь дело с меньшим количеством элементов. Кроме того, если стороны элементов представляют собой прямые линии, координаты дополнительных узлов легко определить путем введения подпрограммы интерполяции. В результате значительно сокращается число задаваемых координат.

Использование сложных элементов не будет иметь указанных преимуществ, если процесс разбиения области на элементы автоматизирован, однако программно осуществить это трудно.

С другой стороны, значительное сокращение количества элементов может привести к ухудшению аппроксимации реальной геометрии. В таких случаях бывает лучше использовать простые элементы.

По-видимому, самой серьезной проблемой при использовании сложных криволинейных элементов являются затраты машинного

времени на численное интегрирование. Поэтому точность интегрирования следует ограничивать, руководствуясь соображениями экономии времени.



Тип элемента	Вертикальная нагрузка в точке А		Момент в АА'	
	максимальный прогиб в АА'	максимальное напряжение в ВВ'	максимальный прогиб в АА'	максимальное напряжение в ВВ'
	0,26	0,19	0,22	0,22
	0,65	0,56	0,67	0,67
	0,53	0,51	0,52	0,55
	0,99	0,99	1,00	1,00
	1,00	1,00	1,00	1,00
Точное решение	1,00	1,00	1,00	1,00

Фиг. 9.1. Расчет плоского напряженного состояния консоли с помощью различных элементов. При увеличении порядка элементов точность возрастает.

## 9.2. Требуемая точность численного интегрирования

В предыдущей главе указывалось, что матрицы элемента могут быть составлены с использованием численного интегрирования методом Гаусса по  $n$  точкам. Объем вычислений при та-

ком интегрировании по плоским областям пропорционален  $n^2$  — числу точек, в которых должна быть определена подынтегральная функция, а в трехмерных задачах он пропорционален  $n^3$ . Поэтому весьма важно установить *минимальное достаточное число гауссовых точек*.

В настоящей главе рассматриваются задачи теории упругости, требующие вычисления матрицы жесткости элемента. Сформулируем следующее утверждение:

*Если при решении задач теории упругости в перемещениях методом конечных элементов точность численного интегрирования достаточна для того, чтобы точно вычислить объем элемента, то процесс сходится [1, 2].*

Это утверждение легко доказывается. В пределе при уменьшении размеров элемента функции формы дают постоянные значения деформаций и напряжений. Тогда выражения для «узловых сил» принимают вид

$$\{F_i\}^{eT} = \int_{V^e} \{\sigma\}^T [B] dV = \{\sigma\}^T \int_{V^e} [B] dV. \quad (9.1)$$

Так как

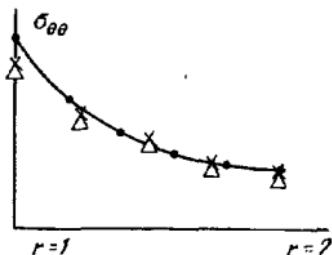
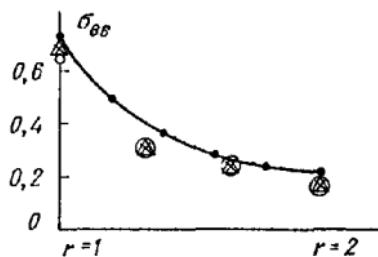
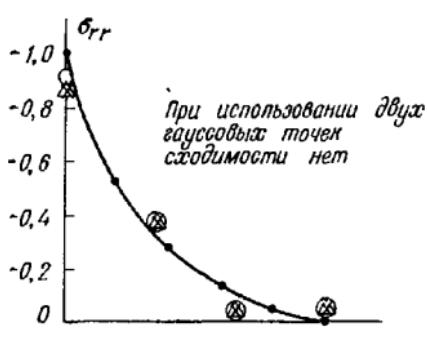
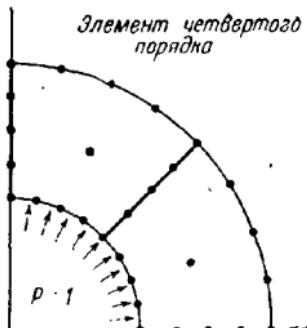
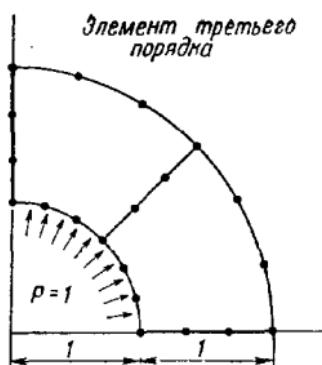
$$dV = \det[J] d\xi d\eta d\xi \quad (9.2)$$

и матрица  $[B]$  получена умножением первых производных от  $N_i$  на матрицу  $[J]^{-1}$ , приходим к выводу, что точное интегрирование соотношения (9.2) обеспечивает точное вычисление интеграла (9.1). Якобиан выражается через первые производные функции формы [см. выражение (8.18)], поэтому всегда можно определить его порядок, а следовательно, и число гауссовых точек, необходимое для точного интегрирования [3].

Например, для случая двумерного четырехугольного элемента второго порядка детерминант представляет собой квадратичное выражение, для интегрирования которого требуются как минимум две точки. Случаю трехмерной призмы второго порядка соответствует кубическое выражение, для точного интегрирования которого тоже требуется по две точки в каждом направлении.

Этот минимум точек, необходимых для сходимости, не всегда является оптимальным с точки зрения затрат машинного времени. Если для представления области используется небольшое число элементов, интегрирование можно производить с большей точностью, и, наоборот, при использовании большого количества элементов более экономичным может оказаться интегрирование с меньшей точностью.

Ясно, что вычислительные программы должны составляться так, чтобы можно было производить интегрирование с любым количеством точек. Этих точек должно быть не меньше, чем это



○ 3 гауссовых точки  
× 4 гауссовых точки  
△ 5 гауссовых точек

Фиг. 9.2. Влияние порядка численного интегрирования на результаты расчета сферы, нагруженной внутренним давлением (элементы третьего и четвертого порядков). Сплошной линией показаны точные результаты.

необходимо для сходимости, но и не больше, чем требуется для численного интегрирования.

На фиг. 9.2 в качестве примера иллюстрируется осесимметрическая задача о сфере, нагруженной внутренним давлением. При ее решении использовались элементы двух порядков и различное число точек интегрирования. Результаты не требуют комментариев.

Последние работы показывают, что, применяя минимальное число точек интегрирования, в некоторых случаях можно существенно улучшить характеристики элемента. Это объясняется двумя обстоятельствами.

Во-первых, задание формы перемещений всегда увеличивает жесткость (как показано в гл. 2), а снижение точности интегрирования уменьшает ее.

Во-вторых, при малом числе точек интегрирования из рассмотрения исключаются области, в которых для обеспечения непрерывности между элементами на перемещения накладываются чрезмерные ограничения. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 14.

### 9.3. Преимущество применения численного интегрирования в методе конечных элементов [3]

Существенным преимуществом применения в методе конечных элементов численного интегрирования является возможность составления универсальной вычислительной программы. Можно заметить, что для *заданного класса задач* матрицы всегда одинаково выражаются через функцию формы и ее производные [см., например, (8.14)].

Для вычисления характеристик элемента необходимо, во-первых, задать функцию формы и ее производные, а во-вторых, установить порядок интегрирования.

Таким образом, вычисление характеристик элемента состоит из трех различных частей, схематически показанных на фиг. 9.3. Чтобы использовать для *заданного класса задач* различные элементы, необходимо только изменить функции формы, и, наоборот, подпрограммы задания *одной функции формы* могут применяться в различных классах задач.



Фиг. 9.3. Схема расчета при численном интегрировании по элементам.

Такая схема вычислений позволяет без труда использовать различные элементы для проверки эффективности новых элементов в исследуемой задаче или же применить программу для расчета новых задач без громоздких преобразований (с неизбежными ошибками).

Вычислительная машина при этом используется по назначению, т. е. для проведения расчетов по экономию составленной программы.

Самым большим практическим преимуществом универсальных подпрограмм вычисления функции формы является возможность их проверки с помощью простой программы. Обычно достаточно проверить, правильно ли вычисляются узловые значения и производные. Проверка осуществляется по простым конечно-разностным формулам после вычисления по подпрограмме значений функций в двух близлежащих точках. Иногда используются и другие тесты. Самый интересный из них связан с вычислением собственных значений, но использование его неэкономично [4].

Включение в систему простых точно интегрируемых элементов не должно вызывать опасения, так как время точного и время численного интегрирования при этом почти одинаковы.

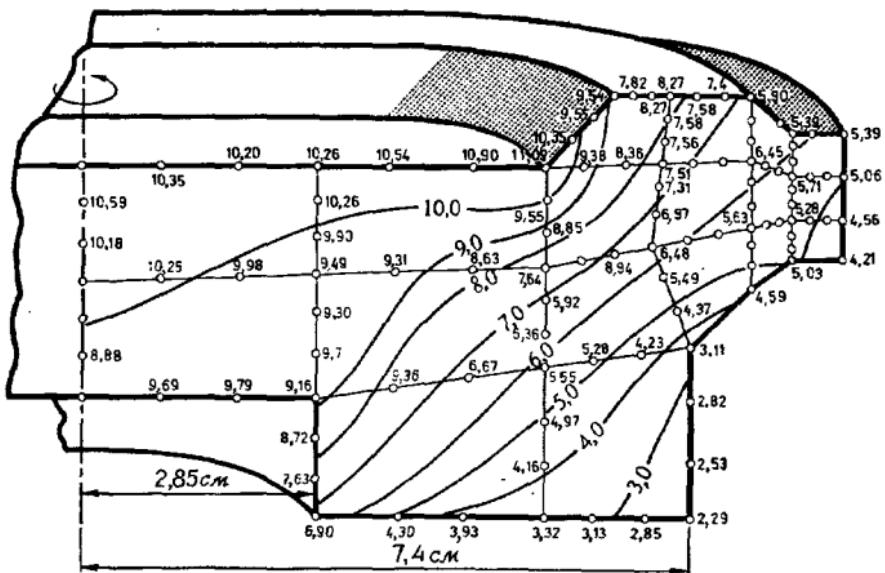
#### 9.4. Некоторые практические примеры решения двумерных задач [5—10]

Возможности использования криволинейных элементов для исследования двумерного напряженного состояния иллюстрируются примерами решения осесимметричных задач.

**Вращающийся диск** (фиг. 9.4). В этом случае для получения решения с достаточной степенью точности необходимо всего восемнадцать элементов. Интересно заметить, что координаты узлов на сторонах элементов третьего порядка задавать не требуется, так как их вычисление предусмотрено программой.

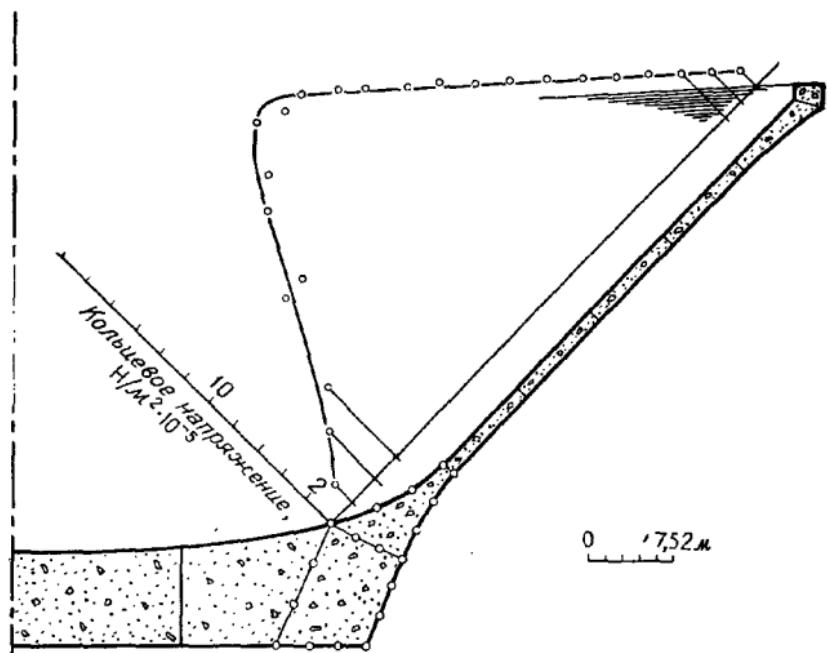
**Конический резервуар** (фиг. 9.5). Для решения этой задачи используются элементы третьего порядка. Следует отметить, что для описания влияния изгиба как в тонкой, так и в толстой частях резервуара достаточно только одного элемента по толщине стенки. Для получения приемлемого решения при использовании простых треугольных элементов, как мы видели, требовалось несколько слоев элементов.

**Полусферический купол** (фиг. 9.6). Это еще один пример исследования оболочек, который показывает, как с помощью программы расчета конического резервуара при малом числе элементов можно получить решение задачи для тонкой оболочки. Применяя хорошо известную в теории оболочек гипотезу

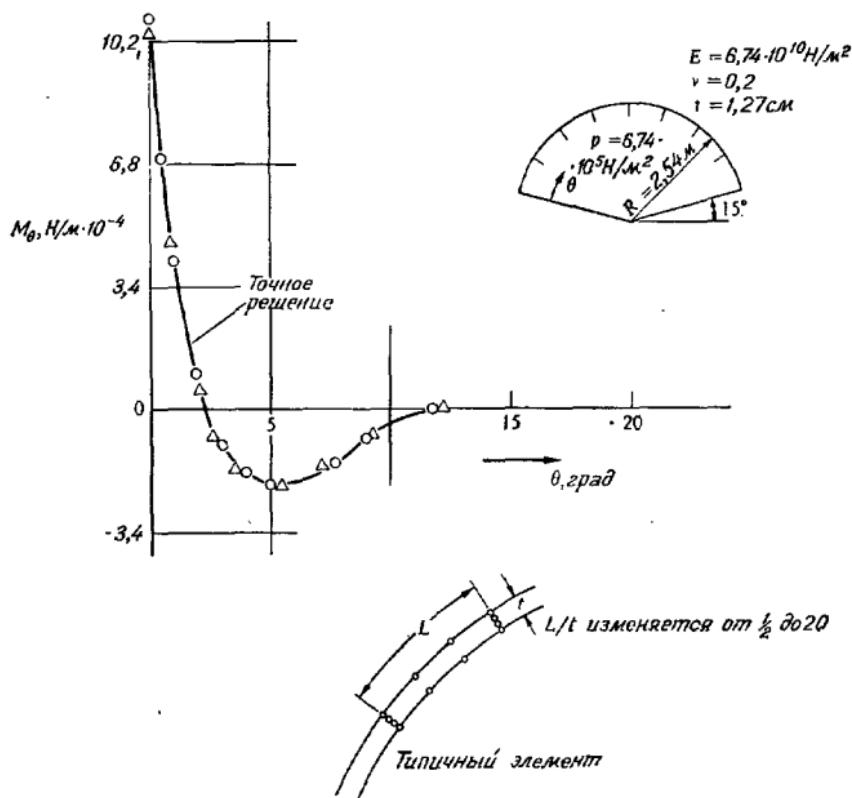


Фиг. 9.4. Расчет вращающегося диска при использовании элементов третьего порядка (18 элементов, 119 узлов, 238 степеней свободы).

Плотность  $7,85 \text{ г/см}^3$ ;  $E = 1,57 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ; 22500 об/мин.



Фиг. 9.5. Конический резервуар.



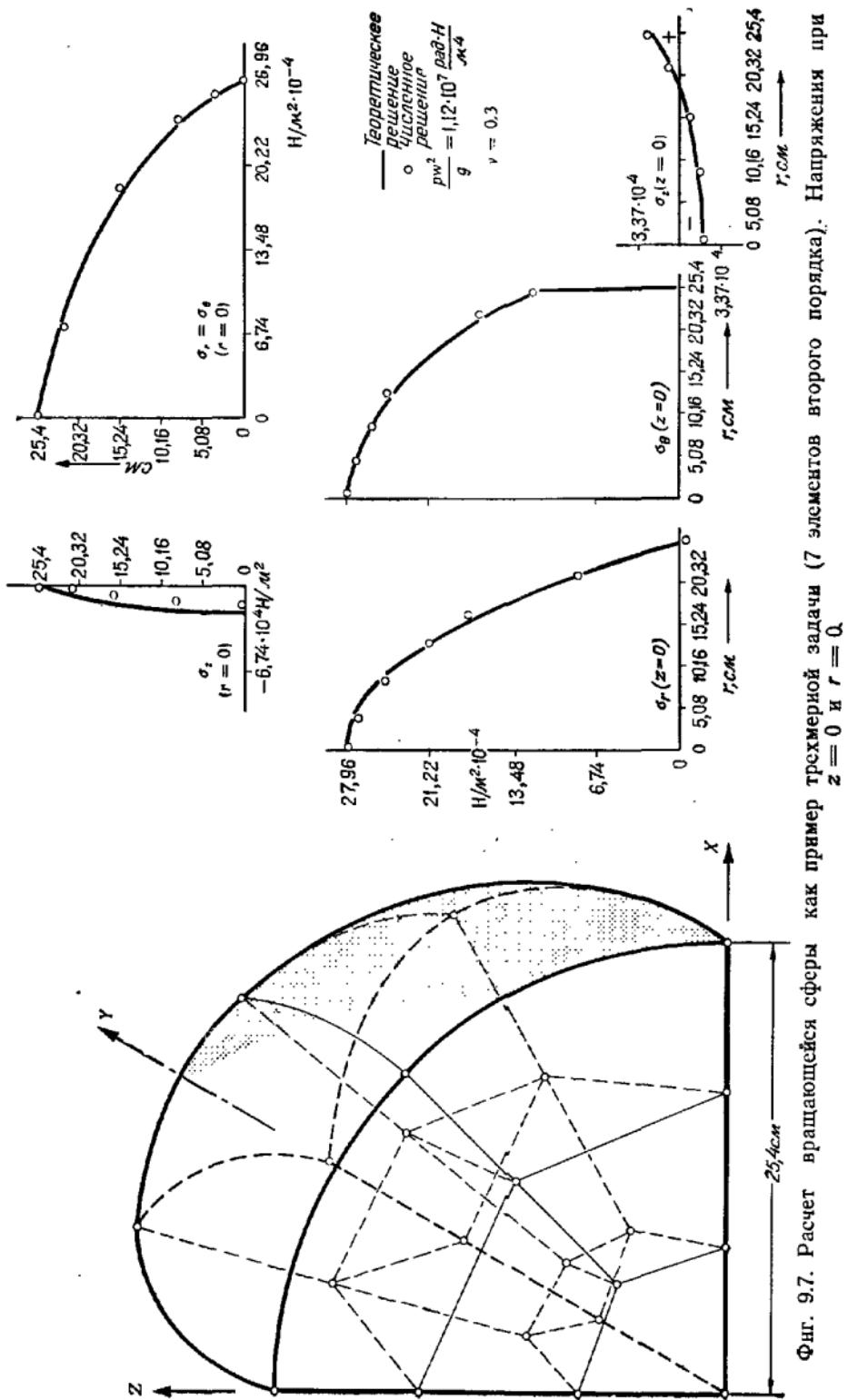
Фиг. 9.6. Тонкая полусферическая оболочка. Решение с использованием 15 и 24 элементов третьего порядка.

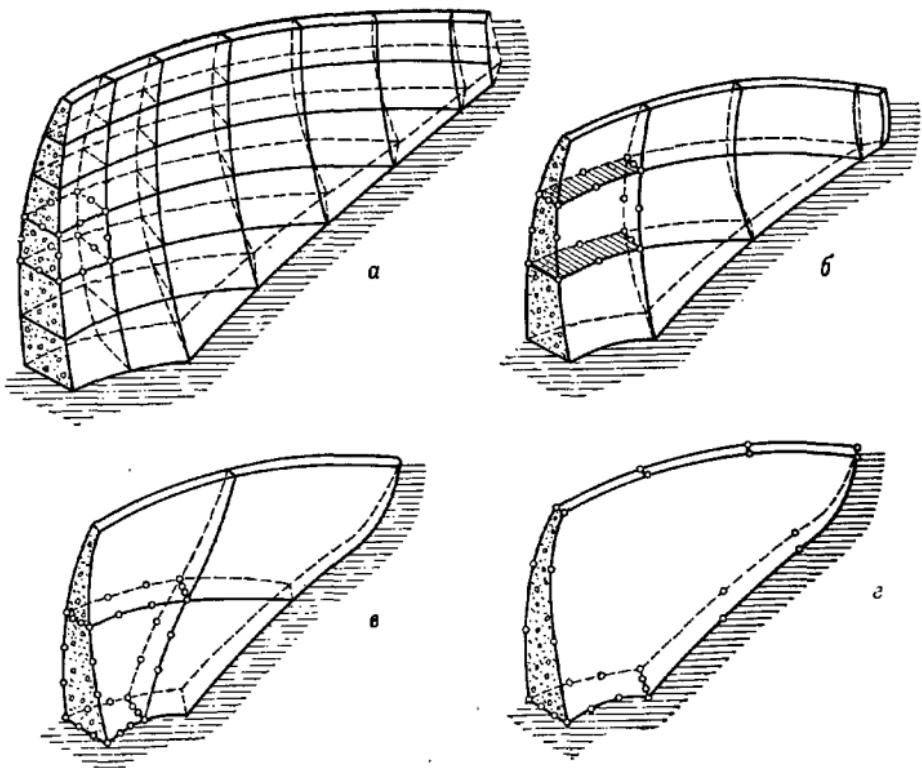
о линейности перемещений по толщине, можно уменьшить число степеней свободы и сделать программу более экономичной. Методы такого рода подробно рассматриваются в гл. 14.

## 9.5. Исследование трехмерного напряженного состояния

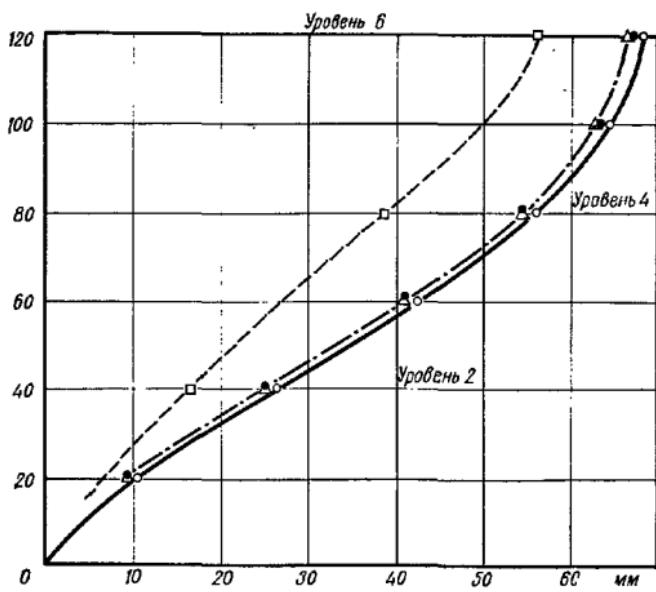
При решении трехмерных задач, как указывалось в гл. 6, использование сложных элементов позволяет значительно сэкономить время. В этом разделе приведены типичные примеры, в которых используются элементы второго порядка сирендиева типа. Во всех задачах численное интегрирование в каждом направлении производится по *трем* гауссовым точкам.

**Вращающаяся сфера** (фиг. 9.7) [6]. Этот пример, в котором сравниваются рассчитанные и точные значения напряжений, вызванных центробежной силой, позволяет оценить эффективность сильно искривленных элементов. Полученные при исполь-





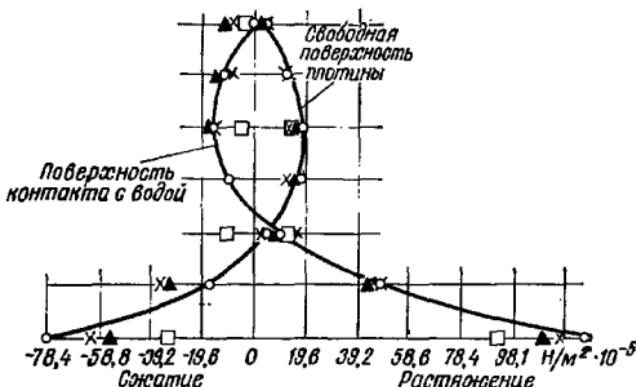
Фиг. 9.8. Арочная плотина на жестком грунте. Различные разбиения на элементы.



Фиг. 9.9. Арочная плотина на жестком грунте. Перемещения центральной линии.

зовании семи элементов результаты хорошо совпадают с точным решением.

**Арочная плотина на жестком грунте.** Эта задача, возможно, несколько нереальная с инженерной точки зрения, исследовалась комитетом института гражданского строительства и явилась хорошей проверкой сходимости решения трехмерных задач. На фиг. 9.8 показаны два варианта разбиения плотины на элементы второго порядка и два — на элементы третьего порядка. Фиг. 9.9 иллюстрирует сходимость перемещений в среднем сечении. Видно, что даже в случае одного элемента достигается вполне приемлемая точность.



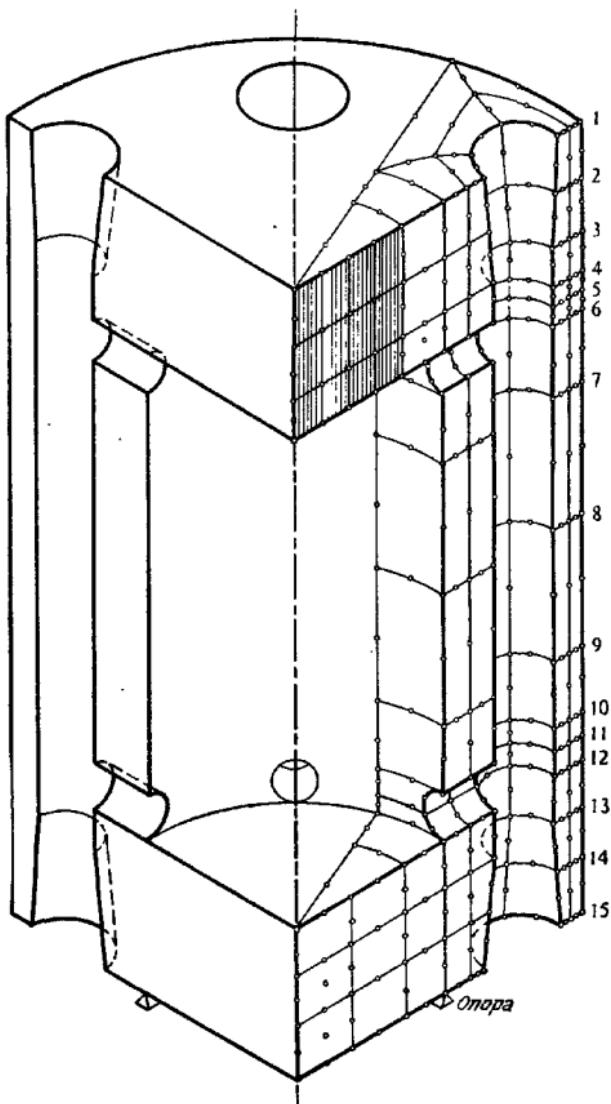
Фиг. 9.10. Арочная плотина на жестком грунте Напряжения в вертикальном направлении на центральной линии.  
○ 32 элемента; ▲ 9 элементов (A); × 9 элементов (B); □ 1 элемент (96 степеней свободы).

Сравнение напряжений (фиг. 9.10) также дает удовлетворительные результаты, хотя при разбиении на крупные элементы заметна значительная «осцилляция» результатов. Решение, полученное при самом мелком разбиении, можно считать «точным», так как оно совпадает с результатами модельного эксперимента и с результатами другими методами [9].

Приведенные тестовые задачи иллюстрируют универсальность и точность метода. Два следующих примера типичны для практических приложений.

**Сосуд высокого давления** (фиг. 9.11). **Арочная плотина и ее основание** (фиг. 9.12а). Оба показанных разбиения дают достаточную для практики точность. Первый из этих примеров, в некоторой степени подобный рассмотренному в гл. 6 (фиг. 6.7), демонстрирует возможность значительного уменьшения степеней свободы при использовании сложных элементов.

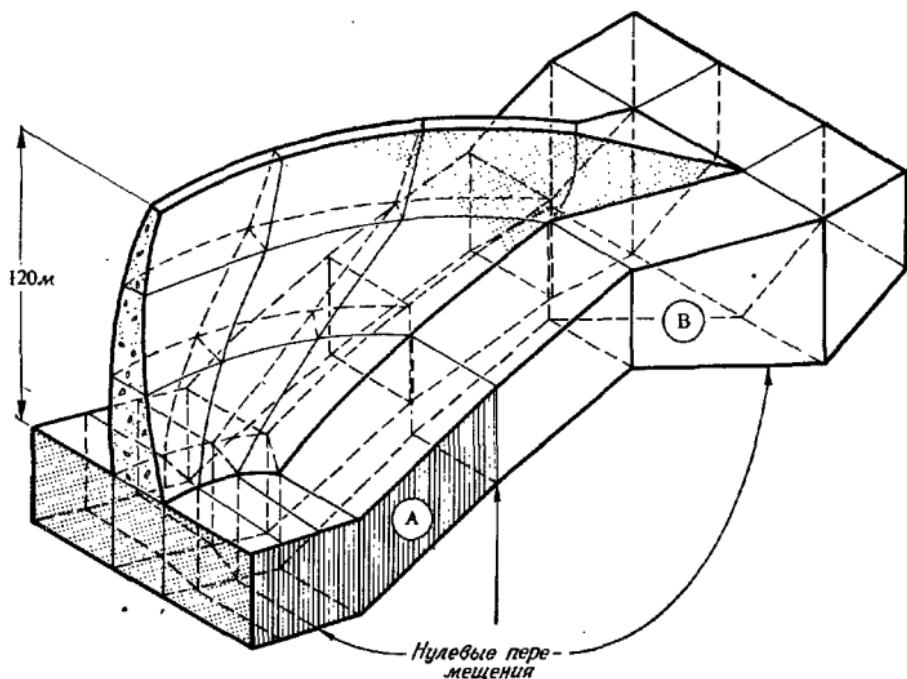
На фиг. 9.12б изображена в изометрии арочная плотина, разбитая на конечные элементы. Чертеж сделан непосредственно



Фиг. 9.11. Трехмерная задача о сосуде высокого давления (96 элементов, 707 узлов, 2121 степень свободы).

по данным координатного самописца. Такие схемы полезны не только с точки зрения наглядности изображения. Они помогают проверить правильность исходных данных, так как позволяют без труда обнаружить любую грубую ошибку в геометрии. Проверка «связанности» всех заданных точек также осуществляется автоматически.

Вследствие больших затрат машинного времени при решении сложных трехмерных задач очень важно своевременно исключить ошибки в исходных данных. Поэтому этот и некоторые другие методы проверки [10] должны составлять неотъемлемую часть любой программы.

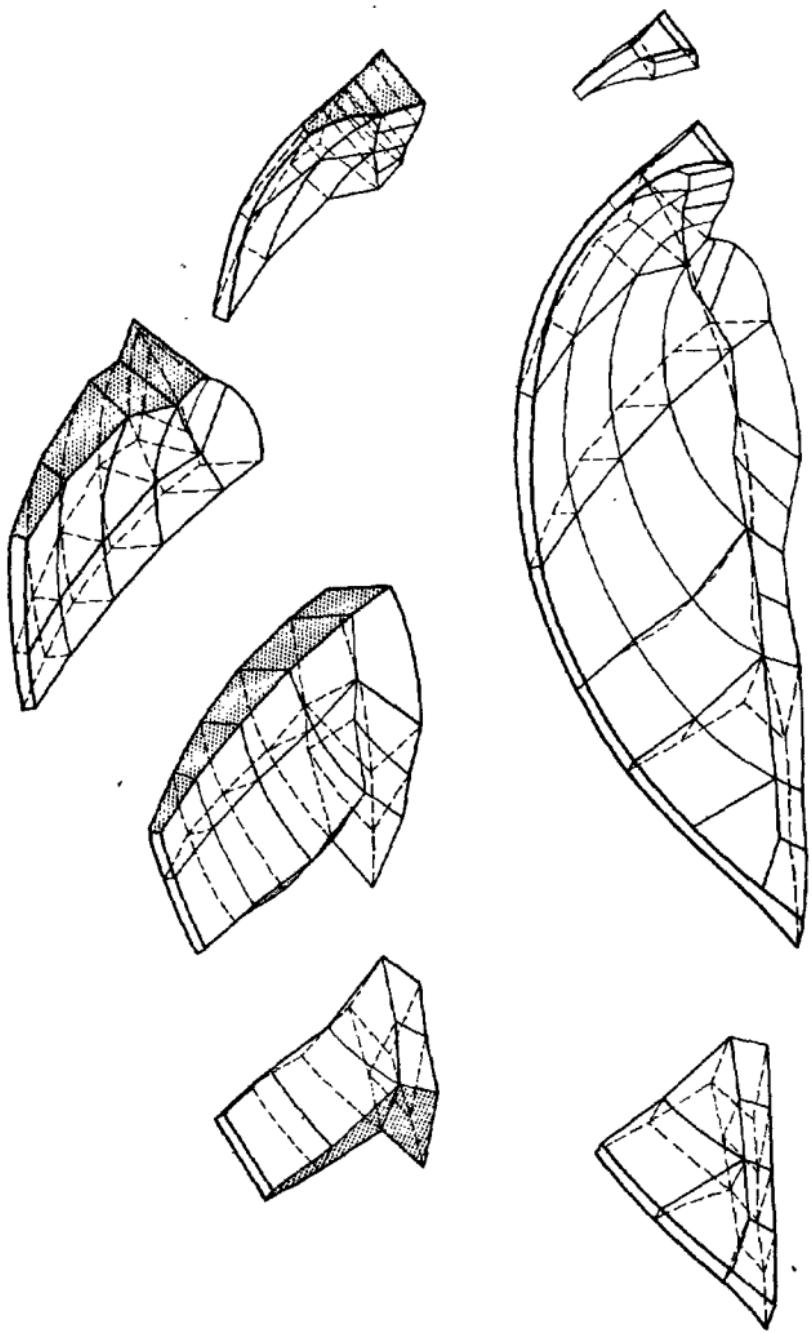


Фиг. 9.12а. Расчет арочной плотины с основанием.

## 9.6. Некоторые общие замечания об элементах высокого порядка

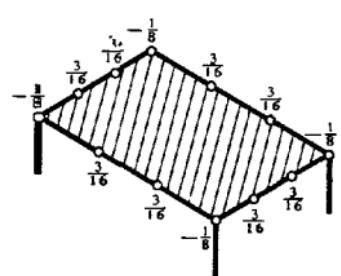
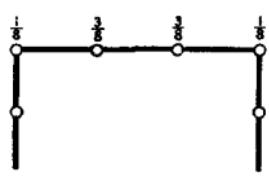
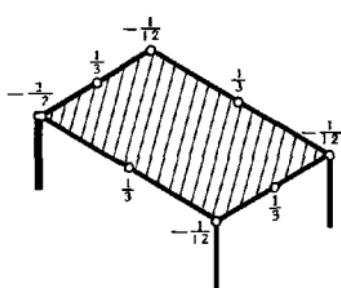
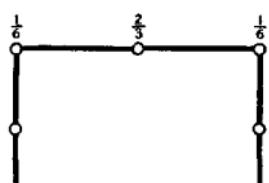
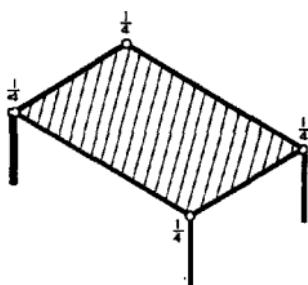
Чем выше порядок элемента, тем труднее становится физическая интерпретация. Это не столь уж существенно, если в результате получается лучшая аппроксимация, однако в практических приложениях могут возникать дополнительные трудности. Например, при использовании элементов высокого порядка было бы неправильно локализовать распределенные нагрузки, основываясь на интуиции.

В гл. 4 было показано, что в треугольном элементе нагрузка, вызванная силой тяжести, локализуется в виде трех равных узловых усилий (подразд. 4.2.7). Этот результат совпадает с тем, что мы называем очевидным. Соответствующая локализация для двумерных элементов сирендиева типа (фиг. 7.4, гл. 7) приводит к распределению нагрузки по узлам, показанному на фиг. 9.13. Только для первого, простейшего из этого семейства

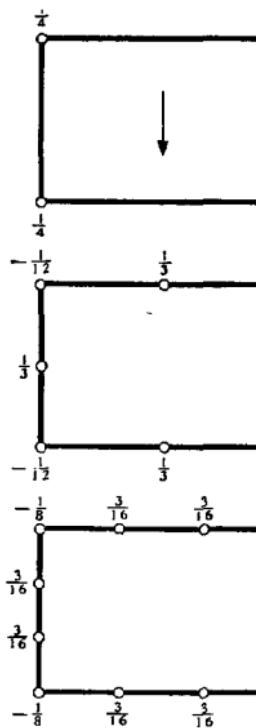


Фиг. 9.126. Изометрическое изображение арочной плотины, полученное с помощью ЭВМ. Отдельные части и ансамбль элементов.

элемента результат соответствует здравому смыслу. Во всех остальных случаях в угловых точках получается отрицательная нагрузка — факт совсем не очевидный.



Фиг. 9.13. Распределение равномерной массовой силы по узлам. Семейство прямоугольных элементов. Показаны доли общего веса.



Фиг. 9.14. Распределение по узлам равномерной поверхности нагрузки действующей на грани двумерных и трехмерных элементов.

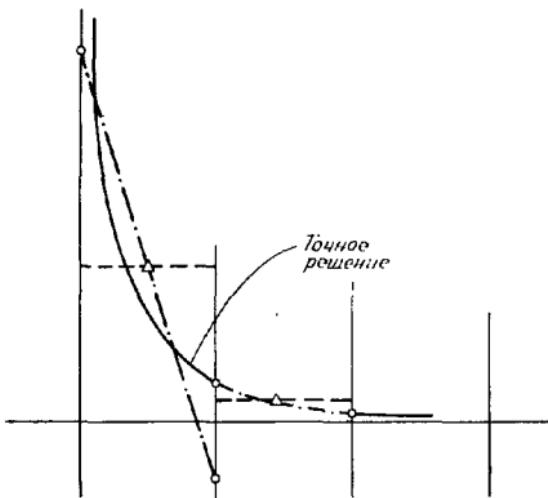
Если элементы к тому же искривлены, то нагрузка распределяется еще более сложным образом и в этом случае нужна особая осторожность.

Здесь инженер может сказать, что с физической точки зрения в пределе результат должен быть таким же, как и при распределении нагрузки по узлам поровну. Конечно, это должно быть именно так, но при разбиении на конечные элементы такое противовесственное, но согласующееся с теорией распределение нагрузки гарантирует большую точность.

Как следует из фиг. 9.14, распределение поверхностной нагрузки также нельзя предсказать.

Следует иметь в виду, что все эти рассуждения относятся и к представлениям сил между элементами обычными инженерными способами.

И наоборот, в областях, близких к месту приложения сосредоточенных нагрузок, распределение напряжений описывается неверно, и в окрестности таких нагрузок иногда можно получить несколько неожиданные значения напряжений. Это вовсе не



Фиг. 9.15. Аномалии, которые могут появляться в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки при использовании сложных элементов.  
— элемент с постоянной деформацией; - - - элемент с линейно изменяющейся деформацией.

говорит об уменьшении точности, а указывает на то, что усреднение по элементу позволяет лучше представить действительную картину напряжений.

На фиг. 9.15 проводится качественное сравнение напряжений вблизи такой особой точки, определенных при постоянных деформациях и линейном законе изменения деформаций в элементах. Попытка улучшить аппроксимацию напряжений с помощью использования более сложных элементов иногда дает возможность получить более точное значение напряжения в особой точке. Однако при этом вблизи такой точки может произойти противостоящая смена знака напряжения, чего не бывает при использовании простых элементов. Ясно, что в таких случаях следует применить сглаживание и внимательно подойти к оценке результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Irons B. M., Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method, *JAIAA*, 4, 2035—2037 (1966); есть русский перевод: Айронс, Инженерные приложения численного интегрирования в методе жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, 4, № 11, стр. 213—216 (1966).
2. Irons B. M., Comment on «Stiffness Matrices for Sector Element» by Raju I. R., Rao A. K., *JAIAA*, 7, 156—157 (1969); есть русский перевод: Айронс, Замечание к статье «Матрицы жесткости элементов в форме сектора», *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 3, стр. 271 (1970).
3. Irons B. M., Discussion, p. 328—331, of Finite Element Techniques in Structural Mechanics, Tottingham H., Brebbia C., eds., Southampton Univ. Press, 1970.
4. Irons B. M., Testing and Assessing Finite Elements by an Eigenvalue Technique, Proc. Conf. on Recent Developments in Stress Analysis, *J. Br. Soc. St. An.*, Royal Aero Soc. (1968).
5. Zienkiewicz O. C., Irons B. M., Ergatoudis J., Ahmad S., Scott F. C., Isoparametric and Associated Element Families for Two and Three Dimensional Analysis, Proc. Course on Finite Element Methods in Stress Analysis, Holand I., Bell K., eds., Trondheim Tech. Univ., 1969.
6. Irons B. M., Zienkiewicz O. C., The Isoparametric Finite Element System—a New Concept in Finite Element Analysis, Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aero Soc., 1968.
7. Ergatoudis J. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Curved, Isoparametric, «Quadrilateral» Elements for Finite Element Analysis, *Int. J. Solids and Struct.*, 4, 31—42, (1968).
8. Ergatoudis J. G., Isoparametric Elements in Two and Three Dimensional Analysis, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
9. Ergatoudis J. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Three Dimensional Analysis of Arch Dams and Their Foundations, Symp. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
10. Zienkiewicz O. C., Irons B. M., Campbell J., Scott F., Three Dimensional Stress Analysis, Int. Un. Th. Appl. Mech. Symp. on High Speed Computing in Elasticity, Liège, 1970.

## ИЗГИБ ПЛАСТИН

## 10.1. Введение

Во всех задачах предыдущих глав основные зависимости между напряжениями и деформациями приведены в точной форме, хотя окончательное решение находилось приближенно. В классической теории пластин [1], чтобы упростить задачу и свести ее к двумерной, с самого начала вводятся некоторые гипотезы, а именно делаются предположения о линейном изменении деформаций и напряжений по нормали к плоскости пластины. Так называемые точные решения теории пластин справедливы только тогда, когда справедливы эти допущения, т. е. если пластины тонкие и прогибы малы.

При решении представленных здесь задач использовались допущения классической теории пластин, и, следовательно, точность приближенных решений должна проверяться на известных задачах теории пластин. Пределы их применимости будут такими же, как и теории пластин.

Деформированное состояние пластины полностью описывается одной величиной — прогибом  $w$  срединной поверхности пластины. Однако теперь условие непрерывности между элементами должно быть наложено не только на эту величину, но и на ее производные. Это необходимо для того, чтобы пластина оставалась сплошной и не появлялись изломы<sup>1)</sup>. Поэтому в каждой узловой точке обычно приходится удовлетворять условиям равновесия и непрерывности.

Выбрать подходящую функцию формы гораздо сложнее. В самом деле, если на границе между элементами требуется выполнение условия непрерывности угла наклона, то непропорционально возрастают математические и вычислительные трудности. Однако относительно просто получить функции формы, которые, сохранив непрерывность  $w$  между элементами, допускают нарушение непрерывности угла наклона, хотя, конечно, не в узловых точках, где условия непрерывности заданы. Если такие функции удовлетворяют критерию «постоянства деформаций», то решение может сходиться (см. гл. 2). В первой части этой главы рассматриваются именно такие несогласован-

<sup>1)</sup> Если появляется излом, то вторая производная (кривизна) становится бесконечной и в выражении для энергии появляются бесконечные члены.

ные функции формы. Во второй части вводятся новые функции, которые позволяют удовлетворить условиям непрерывности. С помощью этих согласованных функций можно получить более корректное, но, как правило, менее точное решение. Для практического применения рекомендуются функции, описанные в первой части этой главы.

Элементом простейшей формы является прямоугольник. Использование треугольных и четырехугольных элементов связано с некоторыми трудностями, и они будут рассмотрены позднее; для расчета пластин произвольной формы и оболочек именно такие элементы являются основными.

## 10.2. Формулировка задачи об изгибе пластин в перемещениях

В соответствии с обычной теорией тонких пластин перемещение пластины однозначно определяется известным во всех точках прогибом  $w$ .

Запишем его в общем виде:

$$w = [N]\{\delta\}^e, \quad (10.1)$$

где функции формы зависят от декартовых координат  $x, y$ , а столбец  $\{\delta\}^e$  содержит все (узловые) параметры элемента.

Обобщенные деформации и напряжения должны быть теперь определены так, чтобы их скалярное произведение, как и в гл. 2, давало внутреннюю работу. Таким образом, определим деформации (фиг. 10.1) как

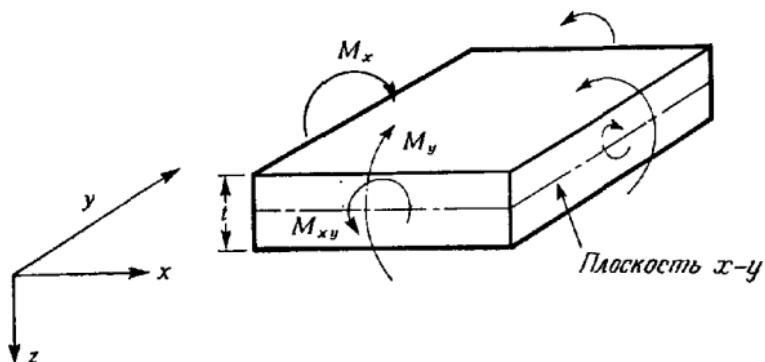
$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (10.2)$$

Соответствующими напряжениями являются обычные изгибающие и крутящие моменты на единицу длины в направлениях  $x$  и  $y$ :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (10.3)$$

Так как истинные деформации и напряжения изменяются линейно по толщине пластины [1], то их можно найти из соотношений

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{t^2} z \text{ и т. д.},$$



Фиг. 10.1. Результирующие напряжения или просто напряжения при изгибе пластины.

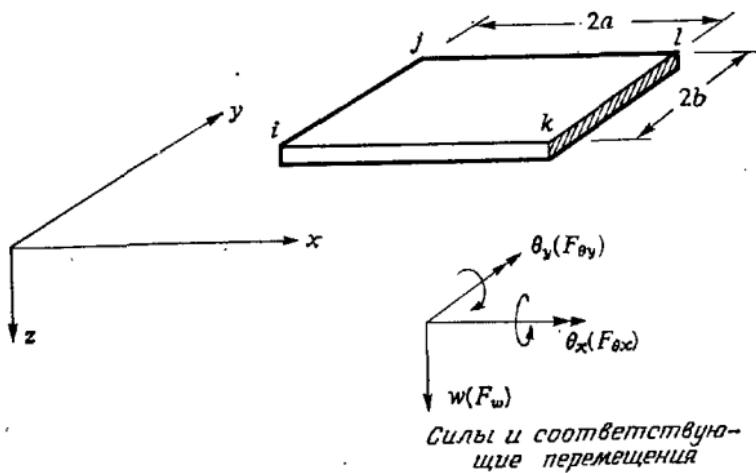
где  $z$  отсчитывается от срединной плоскости пластины, а  $t$  — толщина пластины.

Можно показать, что произведение выражений (10.2) и (10.3) соответствует внутренней работе.

Так как теперь в выражение для деформаций входят вторые производные, то, согласно критерию непрерывности, функции формы должны обеспечивать непрерывность как  $w$ , так и угла наклона нормали к границе между элементами.

Критерий постоянства деформации требует, чтобы внутри элемента можно было воспроизвести любое постоянное значение второй производной.

Чтобы по крайней мере приблизенно удовлетворить условию непрерывности угла наклона, в качестве узловых параметров рассматриваются три компоненты перемещений: во-первых, пе-



Фиг. 10.2. Прямоугольный элемент пластины.

перемещение  $w_i$  в направлении  $z$ , во-вторых, угол поворота  $(\theta_y)_i$  вокруг оси  $y$  и, в-третьих, угол поворота  $(\theta_x)_i$  вокруг оси  $x$ . На фиг. 10.2 показаны положительные направления поворотов, определяемые по правилу правой руки. Их величины задаются векторами, направленными по соответствующим осям.

Ясно, что углы наклона  $\omega$  и углы поворота совпадают с точностью до знака, поэтому можно записать

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}, \quad (10.4)$$

Как показано на фиг. 10.2, узловыми силами, соответствующими этим перемещениям, являются сила и два момента:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{wi} \\ F_{\theta xi} \\ F_{\theta yi} \end{Bmatrix}. \quad (10.5)$$

Если известна матрица  $[B]$ , то матрица жесткости и все остальные матрицы строятся обычным образом с помощью соотношений гл. 2.

Из определений (10.1) и (10.2) следует, что

$$[B_i] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_i] \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_i] \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N_i] \end{Bmatrix}. \quad (10.6)$$

Запись функций формы в квадратных скобках подчеркивает, что они являются матричными величинами, состоящими из трех элементов.

Матрица упругости  $[D]$  входит в обычное соотношение:

$$\{\sigma\} \equiv \{M\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}. \quad (10.7)$$

Для изотропной пластины имеем (см. [1])

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Чтобы описать поведение ортотропной плиты, главные направления упругости которой совпадают с осями  $x$  и  $y$ ,

необходимо использовать четыре постоянные, т. е. матрица  $[D]$  в этом случае имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}. \quad (10.9)$$

Как показали Тимошенко и Войновский-Кригер [1], эти величины можно связать с соответствующими упругими постоянными материала, но удобнее оставить их именно в такой форме, так как теория пластин часто используется для расчета ростверков<sup>1</sup>). В таких случаях эти постоянные должны отражать свойства ростверков. Ясно, что если материал обладает анизотропией общего вида, то в матрицу входит самое большое шесть постоянных, так как она всегда симметрична.

### 10.3. Условие непрерывности функций формы

Для обеспечения непрерывности функции  $\omega$  и угла наклона нормали на границе между элементами необходимо, чтобы  $\omega$  и  $d\omega/dy$  единственным образом определялись через заданные значения на этой границе.

Рассмотрим фиг. 10.3, где изображена сторона 1—2 прямоугольного элемента. Направление нормали  $n$  фактически совпадает с направлением  $y$ , и, следовательно, необходимо, чтобы  $\omega$  и  $d\omega/dy$  единственным образом определялись значениями  $\omega$ ,  $d\omega/dx$ ,  $d\omega/dy$  в узлах, лежащих на этой стороне.

Следуя принципам гл. 7, можно записать, что вдоль стороны 1—2 прямоугольного элемента

$$\omega = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \dots \quad (10.10)$$

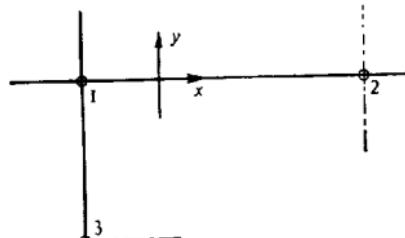
и

$$\frac{d\omega}{dy} = B_1 + B_2x + B_3x^2 + \dots. \quad (10.11)$$

Число констант в каждом выражении должно быть достаточным для того, чтобы выразить эти величины через параметры узлов на линии 1—2.

Так, например, если на стороне имеются только два узла, можно допустить кубический закон изменения  $\omega$ , так как в ка-

<sup>1</sup>) Ростверком называется система балок, оси которых расположены в одной плоскости и пересекаются под прямыми углами. — Прим. ред.



Фиг. 10.3. Требование непрерывности углов наклона.

ждом из узлов заданы значения  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $w$ . Для величины  $\frac{\partial w}{\partial y}$  можно принять лишь линейный, т. е. двучленный, закон изменения.

Для того чтобы гарантировать непрерывность производной  $\frac{\partial w}{\partial x}$  в направлении  $y$ , нужно поступить аналогично.

Таким образом, вдоль стороны 1—2  $\frac{\partial w}{\partial y}$  зависит только от параметров узлов линии 1—2, а вдоль стороны 1—3  $\frac{\partial w}{\partial x}$  зависит только от параметров узлов 1—3.

Дифференцируя первую из этих величин по  $x$ , получаем, что на линии 1—2  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  зависит только от параметров узлов линии 1—2. Аналогично находим, что на линии 1—3  $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$  зависит только от параметров узлов линии 1—3.

В общей точке I возникает противоречие, так как в ней нельзя обеспечить выполнение равенства

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

при произвольных значениях параметров в узлах 2 и 3.

Таким образом, если в узловых точках заданы только значения функции  $w$  и ее производных, то функции формы, удовлетворяющие всем условиям согласованности, нельзя представить в виде полиномов [2].

Произвольные функции, удовлетворяющие всем условиям согласованности, которые построены по трем узловым параметрам, в угловых точках не будут непрерывно дифференцируемы, а их смешанные производные не будут совпадать. Некоторые виды таких функций рассматриваются во второй части этой главы [3—7].

Приведенные рассуждения относятся только к прямоугольному элементу. Ясно, что их можно распространить на случай, когда в точке I стороны смежных элементов пересекаются под произвольными углами.

Путь преодоления этого затруднения очевиден. Можно считать смешанную производную одним из узловых параметров. Для ансамбля прямоугольных элементов это удобно и вполне допустимо. Богнером и др. [8] были предложены и с успехом использованы простые функции такого типа.

К сожалению, не всегда возможно использовать их для узловых точек, в которых пересекаются под разными углами границы нескольких элементов (фиг. 10.4). Здесь условие непрерывности смешанной производной в нескольких ортогональных направлениях фактически требует задания *всех вторых производных в такой узловой точке*.

Это, однако, приводит к нарушению физических требований при скачкообразном изменении жесткости пластины от элемента к элементу, так как невозможно удовлетворить условию

равенства моментов, нормальных к границам между элементами. Тем не менее при расчете однородных пластин такой метод довольно успешно использовался [9—11].

Смит [9] исследовал эффект наложения таких условий сверхнепрерывности на несколько производных высших порядков.

Трудности отыскания функций перемещений, удовлетворяющих условиям согласованности, привели к попыткам игнорировать условие полной непрерывности угла наклона при выполнении других необходимых критериев. Исходя из нескольких наивного интуитивного представления, что выполнение условия непрерывности угла наклона в узловых точках в пределе приводит к полной непрерывности, было построено несколько очень удачных элементов [12—15]. Отличными от использованных в гл. 2 и 3 средствами можно показать и доказать сходимость методов, основанных на применении некоторых таких элементов [4, 16].

Более того, можно показать, что при определенных условиях решение будет мало отличаться от точного [4].

Фиг. 10.4. Узлы, в которых стороны смежных элементов имеют произвольные направления.

Простота и широкое использование таких элементов объясняют, почему они ниже рассматриваются так подробно.

## НЕСОГЛАСОВАННЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ

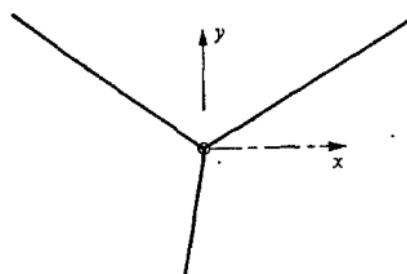
### 10.4. Прямоугольный элемент с узлами в угловых точках [12, 17, 18]

#### 10.4.1. Функции формы

Рассмотрим прямоугольный элемент  $ijkl$  пластины, лежащей в плоскости  $x, y$  (фиг. 10.2). В каждой узловой точке вводятся перемещения  $\{\delta_n\}$ , которые имеют по три компоненты: перемещение  $w_n$  в направлении  $z$ , угол поворота  $(\theta_x)_n$  вокруг оси  $x$  и угол поворота  $(\theta_y)_n$  вокруг оси  $y$ .

Перемещения узловой точки определяются соотношением (10.4), а перемещение элемента записывается, как обычно, в виде вектора, содержащего все (в нашем случае четыре) узловые перемещения:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_l \\ \delta_k \end{Bmatrix} \quad (10.12)$$



Для определения функций формы по двенадцати параметрам удобно использовать полиномы. При этом в полном полиноме четвертой степени необходимо опустить часть членов. Выражение

$$\begin{aligned} w = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \\ & + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \end{aligned} \quad (10.13)$$

имеет определенные преимущества. В частности, вдоль любой линии  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  перемещение  $w$  будет изменяться по кубическому закону. Все внешние границы и границы между элементами состоят именно из таких линий. Поскольку полином третьей степени единственным образом определяется четырьмя постоянными, перемещения вдоль границы однозначно определяются значениями перемещений и углов наклона в узловых точках на концах этой границы. А так как для смежных элементов значения на концах границы одинаковы, вдоль любой границы между элементами функция  $w$  будет непрерывной.

Можно заметить, что градиент  $w$  по нормали к любой границе изменяется вдоль нее по кубическому закону (например,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  вдоль линии  $x = \text{const}$ ). Так как на таких линиях заданы только два значения угла наклона, то полином третьей степени определяется неоднозначно и в общем случае угол наклона может оказаться разрывным. Таким образом, эта функция является несогласованной.

Постоянные  $\alpha_1 - \alpha_{12}$  определяются из системы двенадцати уравнений, связывающих значения  $w$  и углов наклона в узловых точках, которые получаются в результате подстановки координат этих точек. Например,

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \quad \text{и т. д.,} \\ \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i &= \theta_{xi} = -\alpha_3 + \quad \text{и т. д.,} \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i &= \theta_{yi} = \alpha_2 + \quad \text{и т. д.,} \\ &\dots \end{aligned}$$

Эти двенадцать уравнений можно записать в матричной форме:

$$\{\delta\}^e = [C]\{\alpha\}, \quad (10.14)$$

где  $[C]$  — матрица размерности  $12 \times 12$ , зависящая от узловых координат, а  $\{\alpha\}$  — вектор, содержащий 12 неизвестных постоянных. Обращая систему (10.14), получаем

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\delta\}^e. \quad (10.15)$$

Это обращение можно выполнить с помощью ЭВМ или алгебраически, если желательно получить матрицу жесткости или другие матрицы в явном виде. Так было сделано Зенкевичем и Ченгом [12].

Выражение для перемещений внутри элемента теперь можно записать в стандартной форме:

$$\{f\} = w = [N] \{\delta\}^e = [P][C]^{-1} \{\delta\}^e, \quad (10.16)$$

где

$$[P] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3).$$

В явном виде это выражение получено Мелошем [17]. Приведенные выше соотношения просто записать в нормализованных координатах, введенных в гл. 7. В результате для любой узловой точки имеем

$$\begin{aligned} [N_i] &= \frac{1}{2} [(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2), \\ &a\xi_i (\xi_0 + 1)^2 (\xi_0 - 1) (\eta_0 + 1), \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$b\eta_i (\xi_0 + 1) (\eta_0 + 1)^2 (\eta_0 - 1)],$$

где

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_c}{b},$$

$$\xi_0 = \xi \cdot \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \cdot \eta_i.$$

Выражение для матрицы  $[B]$  получается непосредственно из соотношения (10.13) или (10.17) с использованием (10.6). Поскольку

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} -2a_4 & -6a_7x & -2a_8y & -6a_{11}xy \\ -2a_6 & -2a_9x & -6a_{10}y & -6a_{12}xy \\ 2a_5 & +4a_8x & +4a_9y & +6a_{11}x^2 + 6a_{12}y^2 \end{array} \right\}, \quad (10.18)$$

можно записать  $\{\epsilon\} = [Q]\{\alpha\} = [Q][C]^{-1}\{\delta\}^e$  и, следовательно,  $[B] = [Q][C]^{-1}$ , где

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

Интересно отметить, что выбранная функция перемещений допускает существование состояния постоянной деформации (кривизны)<sup>1)</sup> и тем самым удовлетворяет критерию сходимости, сформулированному в гл. 2.

#### 10.4.2. Матрицы жесткости и нагрузок

Процесс построения этих матриц стандартен, поэтому излишне излагать его подробно.

Из соотношения (2.10) можно получить матрицу жесткости, связывающую узловые силы (поперечная сила и два момента в каждом узле) с соответствующими узловыми перемещениями:

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy. \quad (10.20)$$

Подставляя сюда (10.18) и считая толщину  $t$  постоянной внутри элемента, получаем

$$[k] = \{[C]^{-1}\}^T \left( \iint [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1}. \quad (10.21)$$

Члены, не содержащие  $x$  и  $y$ , вынесены из-под интеграла. Если толщина  $t$  постоянна, то интеграл легко вычисляется точно после выполнения умножения под знаком интеграла.

Для ортотропного материала явное выражение для матрицы жесткости  $[k]$  приведено в табл. 10.1.

Соответствующая матрица напряжений для внутренних моментов приведена в табл. 10.2.

Внешние силы, обусловленные распределенной нагрузкой, можно распределить по узлам в зависимости от расположения участков приложения нагрузки. Однако более логично и точно для распределения по узлам внешних сил использовать снова соотношение (2.9).

Если в направлении  $\omega$  действует распределенная нагрузка  $q$  на единицу площади элемента, то из соотношения (2.11) следует, что вклад этих сил в каждый из узлов выражается в виде

$$\{F\}_p^e = - \iint [N]^T q dx dy, \quad (10.22)$$

или вследствие (10.15)

$$\{F\}_p^e = \{-[C]^{-1}\}^T \iint [P]^T q dx dy. \quad (10.23)$$

<sup>1)</sup> Если постоянные  $\alpha_7 - \alpha_{12}$  равны нулю, то деформации постоянны. С помощью формулы (10.13) можно найти соответствующие  $\{\delta\}^e$ . Так как между  $\{\delta\}^e$  и  $\{\alpha\}$  существует однозначное соответствие, то такое состояние является единственным возможным. При этом предполагается, что матрица  $[C]^{-1}$  существует. Обращение алгебраическим путем доказывает, что матрица  $[C]$  никогда не бывает сингулярной.

Таблица 10.1

**Матрица жесткости для прямоугольного элемента (фиг. 10.2,  
материал ортотропный)**

**Матрица жесткости**

$$[k] = \frac{1}{60ab} [L] \{D_x [K_1] + D_y [K_2] + D_z [K_3] + D_{xy} [K_4]\} [L],$$

где

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix}$$

$$K_1 = p^{-2} \left[ \begin{array}{ccccccccc} 60 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 30 & 0 & 20 & & & & & & \\ 30 & 0 & 15 & 60 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 15 & 0 & 10 & 30 & 0 & 20 & & & \\ -60 & 0 & -30 & -30 & 0 & -15 & 60 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 30 & 0 & 10 & 15 & 0 & 5 & -30 & 0 & 20 \\ -30 & 0 & -15 & -60 & 0 & -30 & 30 & 0 & -15 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 5 & 80 & 0 & 10 & -15 & 0 & 10 & -30 & 0 & 20 \end{array} \right],$$

$p^{-2} = \frac{b^2}{a^2}$   
Симметрично

$$K_2 = p^2 \left[ \begin{array}{ccccccccc} 60 & & & & & & & & \\ -30 & 20 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ -60 & 30 & 0 & 60 & & & & & \\ -30 & 10 & 0 & 30 & 20 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 30 & -15 & 0 & -30 & -15 & 0 & 60 & & \\ -15 & 10 & 0 & 15 & 5 & 0 & -30 & 20 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -30 & 15 & 0 & 30 & 15 & 0 & -60 & 30 & 0 & 60 \\ -15 & 5 & 0 & 15 & 10 & 0 & -30 & 10 & 0 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$p^2 = \frac{a^2}{b^2}$   
Симметрично

Продолжение табл. 10.1

$$K_3 = \begin{bmatrix} 30 & & & & & \\ -15 & 0 & & & & \\ 15 & -15 & 0 & & & \\ -30 & 0 & -15 & 30 & & \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & \\ -15 & 0 & 0 & 15 & 15 & 0 \\ -30 & 15 & 0 & 30 & 0 & 0 & 30 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & -30 & -15 & 0 & -30 & 0 & 15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Симметрично}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 84 & & & & & \\ -6 & 8 & & & & \\ 6 & 0 & 8 & & & \\ -84 & 6 & -6 & 84 & & \\ -6 & -2 & 0 & 6 & 8 & \\ -6 & 0 & -8 & 6 & 0 & 8 \\ -84 & 6 & -6 & 84 & 6 & 6 & 84 \\ 6 & -8 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 & 8 \\ 6 & 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 8 \\ 84 & -6 & 6 & -84 & -6 & -6 & -84 & 6 & 6 & 84 \\ 6 & 2 & 0 & -6 & -8 & 0 & -6 & -2 & 0 & 6 & 8 \\ -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 & 0 & -8 & -6 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \text{ Симметрично}$$

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}, \text{ где } l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

Интеграл (10.23) тоже легко вычисляется. Заметим, что в общем случае все три компоненты внешней силы в каждом узле отличны от нуля. При простом распределении внешней нагрузки между узлами этого бы не было. Вектор узловых сил при действии равномерно распределенной нагрузки приведен в табл. 10.3.

Если в пластине существуют начальные деформации, то вектор узловых сил, обусловленных начальными деформациями и начальными напряжениями, находится аналогично. В этой связи необходимо заметить, что начальные деформации, например вызванные нагревом, редко влияют на кривизну. Обычно

Таблица 10.2

**Матрица напряжений ( $P = \sigma/b$ ) для прямоугольного элемента, изображенного на фиг. 10.2  
(материал ортотропный)**

$+6p^{-1}D_x - 8aD_1$	$8bD_x$	$-6pD_1 - 4aD_1$	$0$	$-6p^{-1}D_x$	$0$	$4bD_x$	$0$	$0$	$0$
$+6pD_y$	$-8aD_y$	$8bD_1$	$-6pD_y - 4aD_y$	$0$	$-6p^{-1}D_1$	$0$	$4bD_1$	$0$	$0$
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy} - 4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$0$	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$0$	$-2D_{xy}$	$0$
$-6pD_1$	$4aD_1$	$0$	$+6p^{-1}D_x$	$8aD_1$	$8bD_x$	$0$	$0$	$-6p^{-1}D_x$	$0$
$-6pD_y$	$4aD_y$	$0$	$+6pD_y$	$8aD_y$	$8bD_1$	$0$	$0$	$-6p^{-1}D_1$	$0$
$-2D_{xy}$	$0$	$-4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$4aD_{xy}$	$2D_{xy}$	$0$	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$
$-6p^{-1}D_x$	$0$	$-4bD_x$	$0$	$0$	$0$	$+6p^{-1}D_x$	$-8aD_1$	$-8bD_x$	$-6pD_1$
$-6p^{-1}D_1$	$0$	$-4bD_1$	$0$	$0$	$0$	$+6pD_y$	$-8aD_y$	$-8bD_1$	$-4aD_y$
$-2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$0$	$2D_{xy}$	$0$	$0$	$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$-4aD_y$	$0$
$0$	$0$	$0$	$-6p^{-1}D_x$	$0$	$-4bD_x$	$-6pD_1$	$4aD_1$	$0$	$4aD_{xy}$
$\mathbf{0}$	$0$	$0$	$-6p^{-1}D_1$	$0$	$-4bD_1$	$-6pD_y$	$4aD_y$	$0$	$6pD_y$
$-2D_{xy}$	$0$	$0$	$2D_{xy}$	$4bD_{xy}$	$0$	$2D_{xy}$	$0$	$-4aD_{xy} - 2D_{xy}$	$-4bD_{xy} 4aD_{xy} -$

Таблица 10.3

Матрица сил для прямоугольного элемента, изображенного на фиг. 10.2, при действии равномерно распределенной нагрузки  $q$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_t \\ F_I \\ F_k \\ F_l \end{array} \right\} = 4qab \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ -\frac{b}{12} \\ \frac{a}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{b}{12} \\ \frac{a}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{b}{12} \\ -\frac{a}{12} \end{array} \right\}, \quad F_i = \left\{ \begin{array}{l} F_{wt} \\ F_{\theta xt} \\ F_{\theta yt} \end{array} \right\}$$

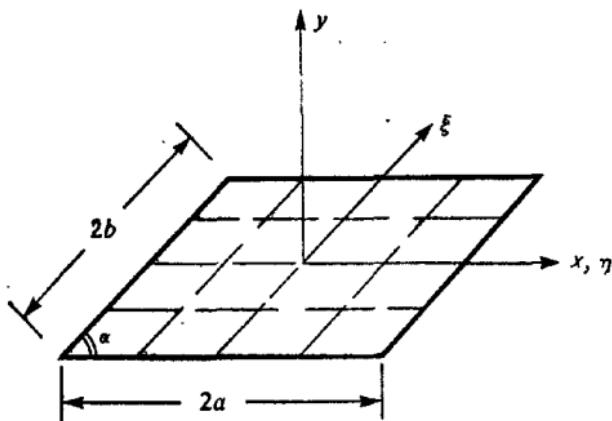
в пластине дополнительно возникают деформации в ее плоскости, и в целом поведение пластины можно изучить, решая паряду с задачей изгиба задачу о плоском напряжении состоянии.

### 10.5. Четырехугольные и параллелограммные элементы

Четырехугольный элемент нельзя просто получить из прямоугольника. Можно было бы использовать преобразование координат описанного в гл. 8 типа, но, к сожалению, в этом случае нарушается критерий постоянства кривизны. По-видимому, такие элементы обладают плохими свойствами. Используя только функции от  $\xi$  и  $\eta$ , лишь для параллелограмма можно удовлетворить критерий постоянства кривизны.

Такой элемент предложен в работе [12], а матрицы жесткости построены Дэйвом [14].

Несколько другая система функций формы предложена Аргенрисом [15].



Фиг. 10.5. Элемент в форме параллелограмма и косоугольные координаты.

Для параллелограмма (фиг. 10.5) локальные координаты можно в явной форме связать с глобальными:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x - y \cos \alpha}{a}, \\ \eta &= \frac{y \operatorname{cosec} \alpha}{b},\end{aligned}\quad (10.24)$$

что позволяет получить все характеристики элемента.

## 10.6. Треугольный элемент с узлами в углах

### 10.6.1. Функции формы

На первый взгляд может показаться, что совершенно так же, как и в предыдущем разделе, в качестве функции формы можно использовать полином. Поскольку в этом случае задается только девять независимых перемещений, в полиномиальном разложении необходимо оставить девять членов. Однако полный полином третьей степени содержит десять членов [выражение (10.13)], и вопрос о том, какой именно член следует опустить, приходится решать произвольно. Для сохранения некоторой симметрии полинома можно, например, оставить все десять членов, а чтобы свести количество неизвестных к девяти, привязать два коэффициента (например, положить  $\alpha_8 = \alpha_9$ ). Было рассмотрено несколько различных вариантов. Однако при этом появляется другая, более серьезная проблема. При определенной ориентации сторон треугольника матрица, соответствующая матрице  $[C]$  системы уравнений (10.14), становится сингулярной. Это, например, происходит, когда две стороны треугольника параллельны осям  $x$  и  $y$ .

Указанные трудности можно обойти, если воспользоваться описанными в гл. 8  $L$ -координатами. Для треугольников это вполне естественно.

Как и раньше, будем использовать члены полиномиального представления. Отметим, что в  $L$ -координатах они имеют несколько необычный вид. Например, выражение

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

представляет собой *полный* линейный полином, а выражение

$$a_1 L_1 L_2 + a_2 L_2 L_3 + a_3 L_3 L_1 + a_4 L_1^2 + a_5 L_2^2 + a_6 L_3^2$$

содержит все шесть членов полного квадратичного полинома (включая линейные члены).

Кубический полином содержит десять членов, представляющих собой различные произведения третьей степени по координатам

$$L_1^3, L_2^3, L_3^3, L_1^2 L_2, L_2^2 L_3, L_3^2 L_1, L_1 L_2^2, L_2 L_3^2, L_3 L_1^2, L_1 L_2 L_3.$$

Для элемента с девятью степенями свободы можно использовать любую комбинацию из перечисленных членов, содержащую только девять независимых функций и удовлетворяющую критерию постоянства кривизны. На фиг. 10.6 показаны некоторые важные функции этого класса. Первая из них (фиг. 10.6, а) является одной из трех функций, описывающих перемещение пластины как жесткого тела.

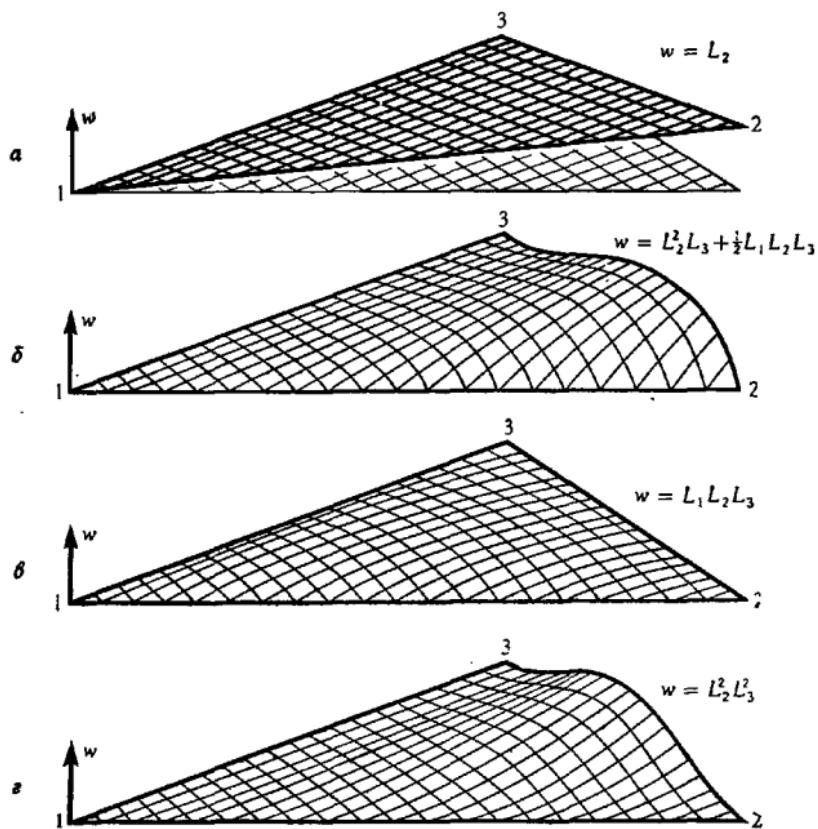
Функции типа  $L_1^2 L_2$  (в кубическом разложении их шесть) сходны (но не совпадают) с функцией, изображенной на фиг. 10.6, б.

Наконец, показанная на фиг. 10.6, в функция  $L_1 L_2 L_3$  является чисто внутренней формой: во всех трех узлах значения функции и углов наклона равняются нулю. Такая функция оказывается полезной для «неузловых» параметров, но не может использоваться самостоятельно, так как она не выражается через значения переменных в узлах. Ее можно с любым множителем добавить к другой основной функции формы.

Таким образом, особый интерес представляют функции второго рода. Они соответствуют нулевым значениям  $\omega$  во всех угловых точках и, кроме того, нулевому значению угла наклона вдоль одной из сторон. С помощью линейной комбинации двух из них (например,  $L_2^2 L_3$  и  $L_2^2 L_1$ ) можно присвоить любые значения углам наклона в направлениях  $x$  и  $y$  в одной узловой точке при нулевых значениях остальных углов наклона.

Однако для большей общности будем рассматривать формы типа

$$L_2^2 L_3 + c L_1 L_2 L_8$$



Фиг. 10.6. Некоторые основные полиномиальные относительно  $L$ -координат функции.

(так как последнее слагаемое не изменяет углов наклона в узлах).

Поскольку кривизна описывается только этими формами, необходимо, чтобы с помощью линейной комбинации шести таких функций можно было получить любые произвольные значения кривизны во всех точках элемента при нулевых значениях  $w$  в узлах. Алгебраически это означает, что выражение

$$A_1 L_1 L_2 + A_2 L_2 L_3 + \dots + A_6 L_3^2$$

при любых значениях коэффициентов  $A$  должно иметь вид

$$B_1 (L_2^2 L_1 + c L_1 L_2 L_3) + B_2 (L_1^2 L_2 + c L_1 L_2 L_3) + \dots$$

при соответствующих значениях шести постоянных  $B$ . С помощью некоторых алгебраических преобразований можно показать, что это возможно только при  $c = 1/2$ . Следовательно, при

построении функций формы функция, изображенная на фиг. 10.6, б, является одной из основных.

Таким образом, перемещения пластины можно представить в виде

$$\begin{aligned} w = & \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \beta_4 \left( L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) + \\ & + \dots + \beta_9 \left( L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \quad (10.25)$$

и после подстановки узловых значений

$$w_t, \theta_{xt} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_t \quad \text{и} \quad \theta_{yt} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_t$$

определить постоянные, а следовательно, и функции формы.

Окончательно функцию формы для первого узла с помощью определений, введенных в гл. 7, можно записать в виде

$$[N_1]^T = \begin{cases} L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ b_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ c_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - c_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{cases}, \quad (10.26)$$

где

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \text{ и т. д.}$$

Остальные две функции для узлов 2 и 3 получаются циклической перестановкой индексов  $\overrightarrow{1-2-3}$ . Элемент, характеризуемый такими функциями, впервые был рассмотрен в работе [4].

### 10.6.2. Матрицы жесткости и нагрузки

Для определения деформаций [равенство (10.2)] и матрицы  $[B_i]$  из (10.6) необходимо определить вторую производную от  $[N]$ .

При этом появляется необходимость дифференцирования по декартовым координатам. Это нетрудно осуществить, имея в виду, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = & \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} = \\ = & \frac{1}{2\Delta} \left( b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (10.27)$$

В  $L$ -координатах все выражения остаются полиномами, и поэтому их легко проинтегрировать с помощью общей формулы (7.34) гл. 7. Окончательные выражения для матриц жесткости и нагрузки довольно громоздкие; они приведены в работе [19].

Однако, как подчеркивалось в гл. 8, проще предусмотреть в программе численное интегрирование. Так как в матрицу жесткости входят только квадратичные члены, интегрирование по треугольнику будет точным при использовании всего лишь трех точек (см. табл. 8.3, гл. 8) и время численного интегрирования почти не отличается от времени расчета выражений при точном интегрировании.

В матрицу напряжений входят моменты, которые изменяются линейно. Однако, так как не все кубичные члены входят в функцию формы, они аппроксимируются плохо. Обычно моменты вычисляются только в центрах тяжести и результаты сглаживаются усреднением узловых значений.

### 10.7. Сходимость при использовании несогласованных элементов

При использовании двух типов элементов, описанных в предыдущем разделе, нарушаются условия непрерывности угла наклона и, следовательно, удовлетворяется только приближенно принцип минимума полной потенциальной энергии. Однако в следующем разделе будут приведены некоторые результаты, демонстрирующие практическую точность результатов, полученных при использовании этих элементов. Может возникнуть вопрос, всегда ли при уменьшении размеров элемента решение будет сходиться к точному? Хотя этот вопрос чисто теоретический, он нуждается в ответе.

Для прямоугольных элементов Вальц и др. [16], рассчитывая методом конечных элементов однородную пластину и сравнивая алгоритм с приближенным решением дифференциальных уравнений, установили, что сходимость гарантирована всегда. Однако распространять эти выводы на другие случаи нет никаких оснований.

Айронс [4] также показал, что использование простого треугольного элемента позволяет получить решение, сходящееся к точному, если сетка элементов образована тремя системами эквидистантных параллельных линий.

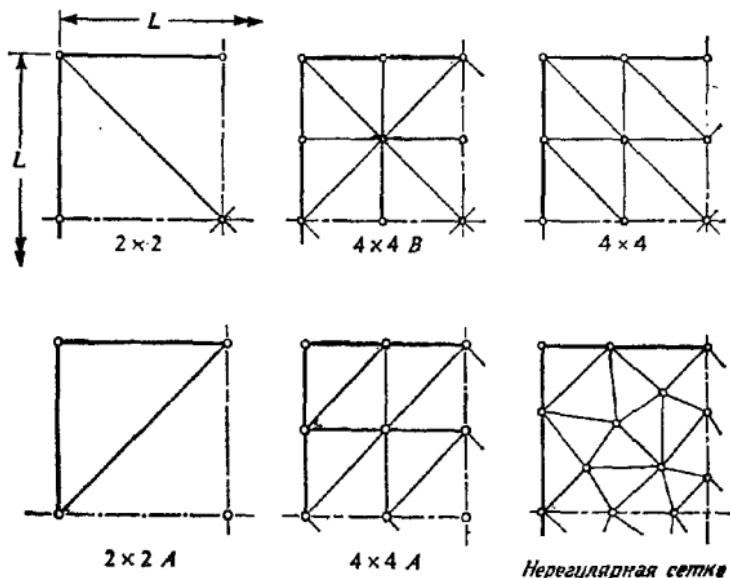
Использованный критерий проверки весьма прост. Если при помощи большого числа элементов можно точно воспроизвести любые состояния постоянной кривизны, то при предельном разбиении пластина ведет себя в соответствии с физическими законами для бесконечно малого элемента. В *противном* случае сходимости не будет.

Применение этого критерия показало, что если для получения треугольников используются две диагонали параллелограмма [фиг. 10.7 ( $4 \times 4B$ )], то ошибка в перемещениях составляет около 1,5%. Таким образом, несогласованный треугольник позволяет получить решение, сходящееся не к точному, а к неко-

торому другому, отличающемуся от него в пределах указанной ошибки.

Аналогичный критерий был применен к несогласованному прямоугольному элементу, что позволило впервые доказать сходимость для такого элемента [4].

В большинстве практических инженерных расчетов точность, достигаемая при использовании несогласованного треугольного элемента, оказывается вполне приемлемой. Чаще всего такие



Фиг. 10.7. Квадратная пластина. Разбиение на треугольные элементы.

треугольники дают лучшие результаты, чем эквивалентные согласованные элементы [4]. Это объясняется, по-видимому, тем, что решение в этом случае не обязательно удовлетворяет полученным в гл. 2 энергетическим ограничениям и большее число степеней свободы позволяет найти наилучшую форму.

При построении несогласованных элементов требовались непрерывность прогиба  $w$  во всех точках на границе между элементами и совпадение углов наклона в общих узлах. Это всегда приводило по крайней мере к кубическому закону изменения  $w$ . Если несколько ослабить какое-либо из этих требований, то появляются интересные возможности. Например, можно показать, что для треугольника с шестью узлами, в качестве шести степеней свободы которого приняты значения  $w$  в угловых узлах и значения нормальной производной  $\partial w / \partial n$  в дополнительных узлах, определяется полный квадратичный полином. В результате получается простейший возможный элемент для

задач об изгибе с постоянными моментами и кривизной, эквивалентный треугольнику с постоянной деформацией.

Такой элемент недавно был построен Морли [29]. Он показал, что, несмотря на достаточно очевидное нарушение непрерывности, полученное при использовании этого элемента, решение сходится и сопоставимо по точности с решением, полученным при использовании рассмотренных здесь более сложных треугольников.

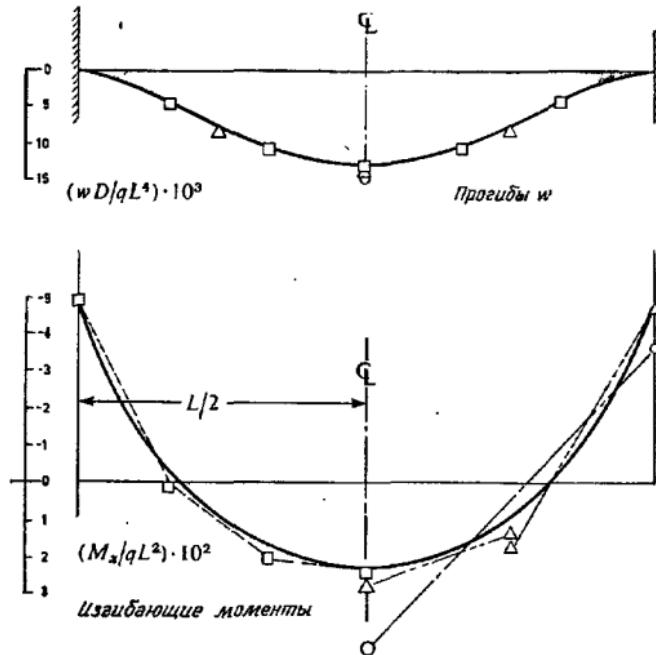
В качестве упражнения читатель может получить матрицу жесткости для этого элемента.

## 10.8. Примеры

### 10.8.1. Прямоугольные элементы

Для иллюстрации точности и ожидаемой скорости сходимости была составлена программа расчета с использованием функций перемещений, определяемых выражением (10.13), и по ней просчитано несколько простых тестовых задач.

**Квадратная изотропная пластина.** На фиг. 10.8 в виде графиков представлены результаты расчета квадратной пластины



Фиг. 10.8. Квадратная пластина с защемленными краями. Равномерно распределенная нагрузка  $q$ . Квадратные элементы.

— решение методом конечных разностей при сетке  $16 \times 16$  (Сауваль, 1959);  $\circ$  метод конечных элементов, сетка  $6 \times 6$ ;  $\triangle$  метод конечных элементов, сетка  $4 \times 4$ ;  $\square$  метод конечных элементов, сетка  $2 \times 2$ .

с защемленными краями, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки.

Результаты соответствуют разбиениям всего лишь на  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  и  $6 \times 6$  элементов, но точность и сходимость убедительны.

При любом количестве элементов линейное распределение моментов, как и ранее, близко к точному.

Еще более удивительные сходимость и точность демонстрируются в табл. 10.4. В этой таблице сравниваются перемещения центра пластины при действии сосредоточенной и распределенной нагрузок для различных условий закреплений сторон. При разбиении  $8 \times 8$  элементов максимальная ошибка составляет  $\sim 3\%$ . Для всех случаев разбиения решение сходится.

Таблица 10.4

Перемещения центра квадратной пластины, подсчитанные при различном числе разбиений (прямоугольные элементы)

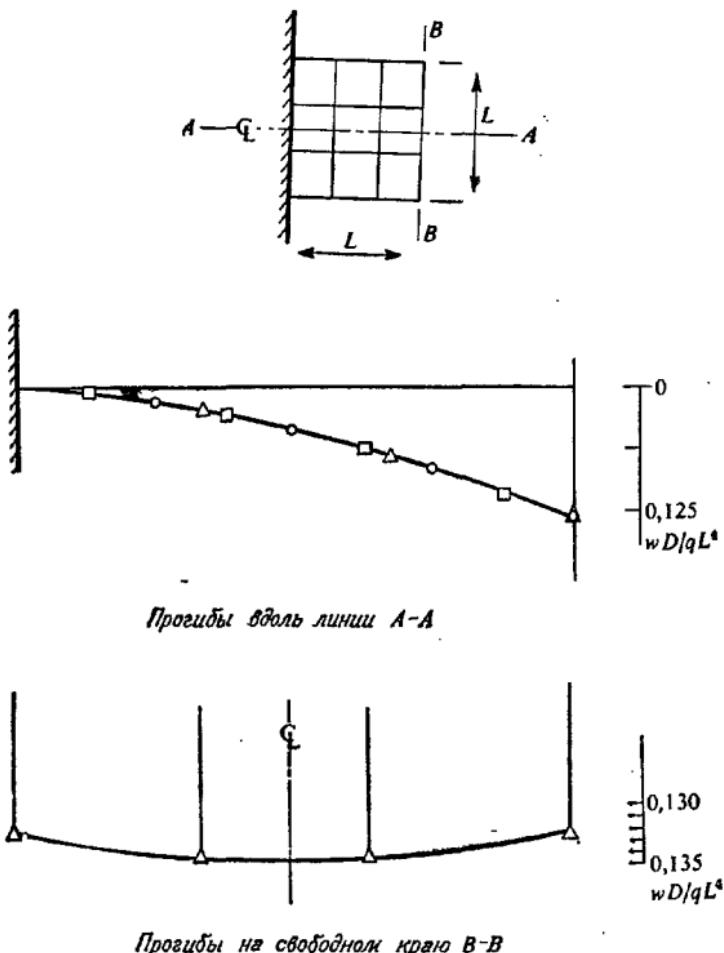
Разбиение	Общее количество узлов	Свободно опертая пластина		Зашемленная пластина	
		равномерно распределенная нагрузка $a$	сосредоточенная нагрузка $b$	равномерно распределенная нагрузка $a$	сосредоточенная нагрузка $b$
$2 \times 2$	9	0,003446	0,013784	0,001480	0,005919
$4 \times 4$	25	0,003939	0,012327	0,001403	0,006134
$8 \times 8$	81	0,004033	0,011829	0,001304	0,005803
$12 \times 12$	169	0,004050	0,011715	0,001283	0,005710
$16 \times 16$	289	0,004056	0,011671	0,001275	0,005672
Точное реше- ние (Тимо- шенко)		0,004062	0,01160	0,00126	0,00560

$$w_{\max} = \frac{aqL^4}{D} \text{ для равномерно распределенной нагрузки } q;$$

$$w_{\max} = \frac{bP^2L}{D} \text{ для сосредоточенной нагрузки } P, \text{ приложенной в центре пластины [20].}$$

**Консольная пластина.** На фиг. 10.9 показаны перемещения в такой же пластине, но закрепленной консольно. Сравнение с другими численными решениями и экспериментальными данными снова демонстрирует высокую точность метода.

**Опертая по углам пластина [12].** Квадратная пластина, опертая по углам, исследовалась различными экспериментальными и приближенными аналитическими методами. В табл. 10.5 результаты решения методом конечных элементов сравниваются с некоторыми другими приближенными решениями. Даже в том



Фиг. 10.9. Нагружение равномерно распределенной нагрузкой  $q$  квадратной консольной пластины.

Δ метод конечных элементов, сетка  $3 \times 3$ ; □ метод конечных разностей, сетка  $5 \times 5$  (Ливси и Бирчелл, 1956); ● экспериментальные результаты (Дэлли, 1948).

случае, когда наличие концентрации напряжений в узлах создает определенные трудности, ясно видно достаточно хорошее совпадение результатов как по перемещениям, так и по напряжениям.

#### 10.8.2. Треугольные элементы. Квадратная изотропная пластина

Для иллюстрации сходимости снова рассмотрена квадратная пластина. Теперь она различным образом аппроксимируется треугольными элементами. В одних случаях они получены на

Таблица 10.5

**Опертая по углам квадратная пластина (точка 1 — середина стороны пластины; точка 2 — центр пластины)**

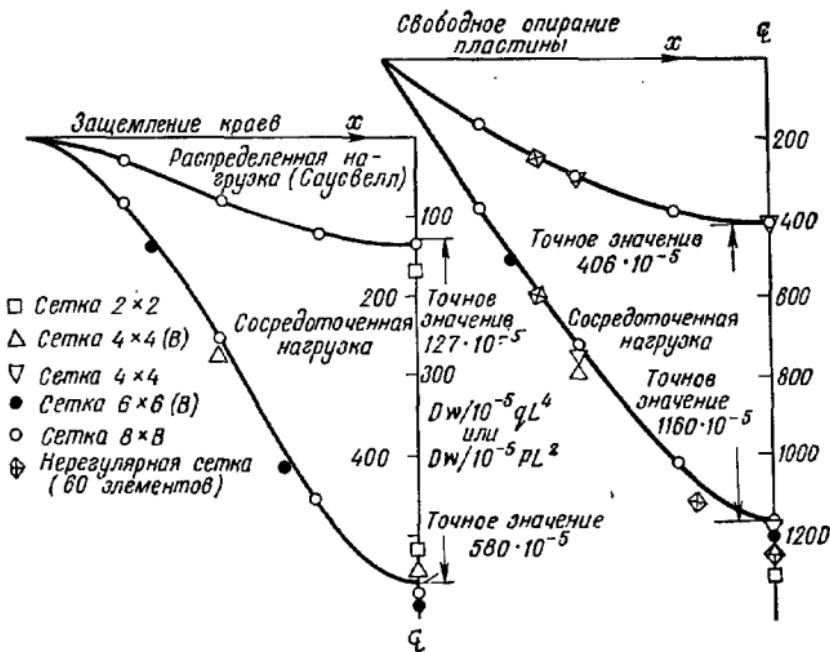
	Точка 1		Точка 2	
	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$
Метод конечных элементов				
$2 \times 2$	0,0126	0,139	0,0176	0,095
$4 \times 4$	0,0165	0,149	0,0232	0,108
$6 \times 6$	0,0173	0,150	0,0244	0,109
Маркус	0,0180	0,154	0,0281	0,110
Ли и Баллестероз	0,0170	0,140	0,0265	0,109
Множитель	$qL^4/D$	$qL^2$	$qL^4/D$	$qL^2$

основе прямоугольной сетки, в других — совершенно нерегулярно. На фиг. 10.7 показано несколько способов разбиения, а на фиг. 10.10 представлены перемещения, определенные при различных краевых условиях и нагрузках. Как и ранее, точность и сходимость по перемещениям оказываются хорошими (хотя, возможно, и несколько хуже, чем при использовании прямоугольных элементов).

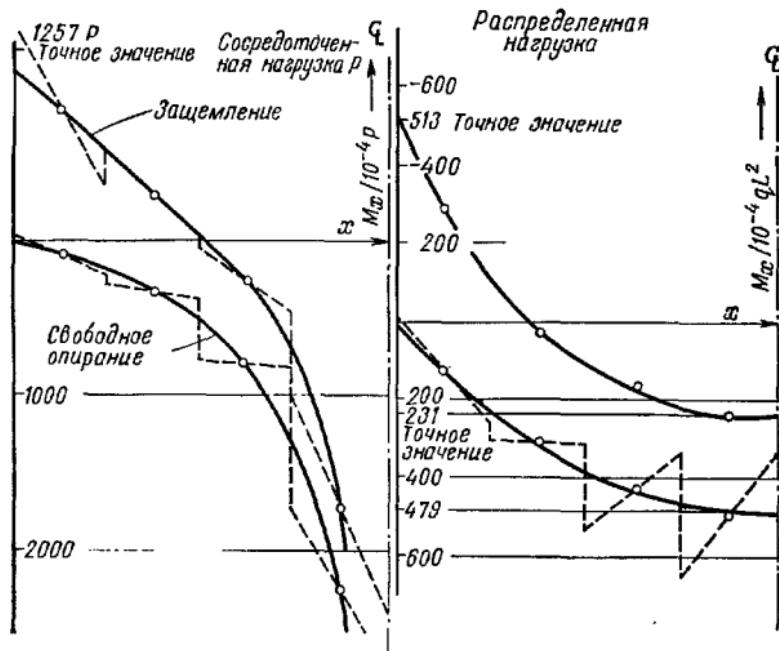
На фиг. 10.11 показано изменение изгибающих моментов вдоль оси симметрии пластины. Средние величины моментов хорошо согласуются с точными. Однако в этом случае уже нельзя сказать, что линейный закон распределения напряжения наилучшим образом согласуется с реальным. Поэтому в практических целях рекомендуется вычислять напряжения (моменты) в центре тяжести элементов.

**Пластина с центральным круглым отверстием.** Хотя эта задача и не имеет точного решения, она приведена для того, чтобы продемонстрировать, как с помощью треугольных элементов легко рассчитывать пластины произвольной формы с любыми отверстиями.

На фиг. 10.12 показана использованная сетка и нанесены линии равных прогибов  $w$ . На фиг. 10.13 линии равных углов наклона сравниваются с экспериментальными результатами, полученными методом Муара. Расхождение не превышает ошибки эксперимента.

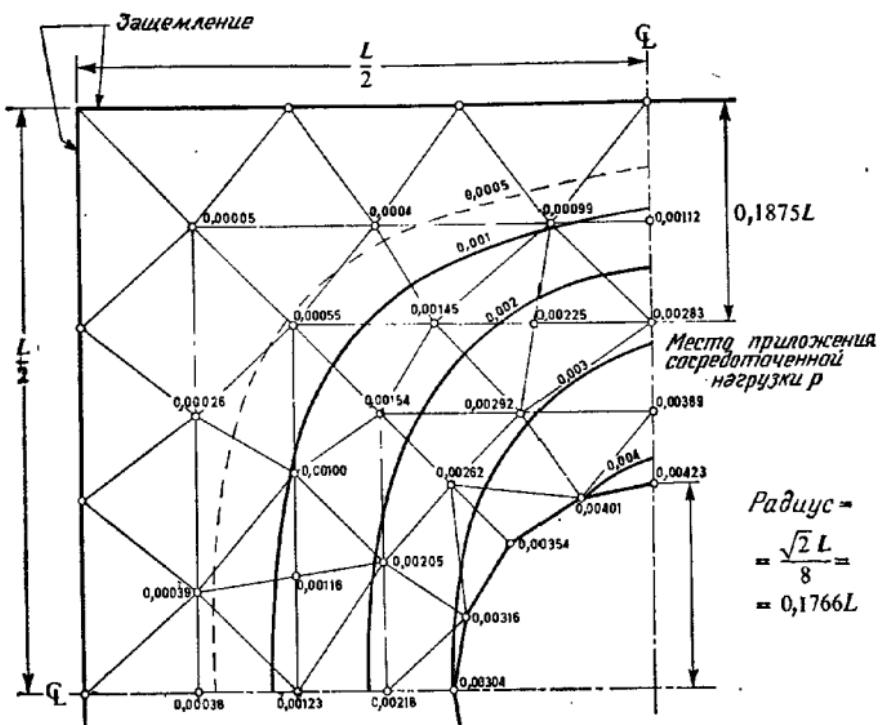


Фиг. 10.10. Прогибы вдоль центральной линии квадратной пластины (треугольные элементы).



Фиг. 10.11. Квадратная пластина. Распределение  $M_x$  вдоль центральной линии (треугольные элементы).

— средние значения (при линейном законе изменения); — — действительное распределение в элементах.



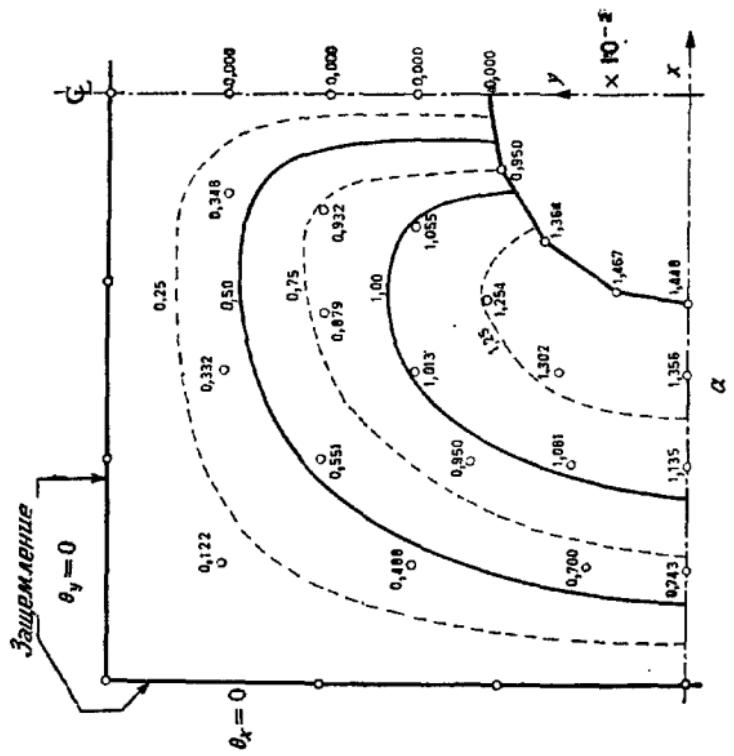
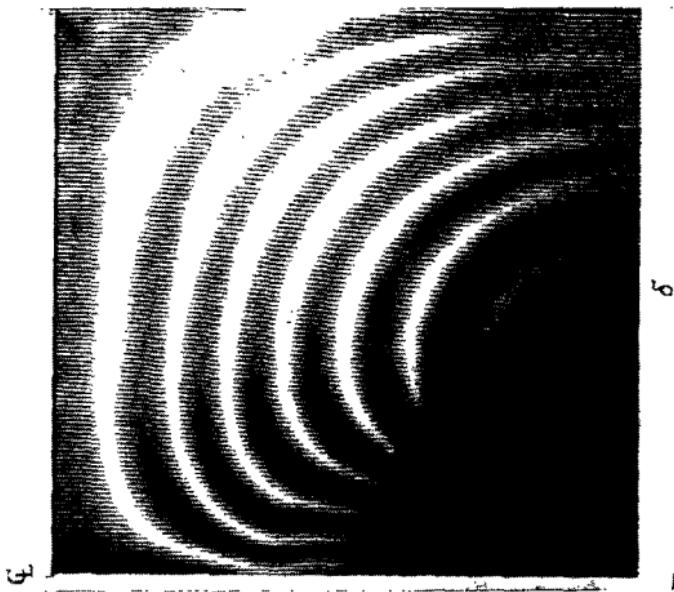
Фиг. 10.12. Квадратная пластина с отверстием Линии равных безразмерных прогибов  $\omega D/pL^2$ . Треугольные элементы

### 10.8.3. Некоторые практические приложения

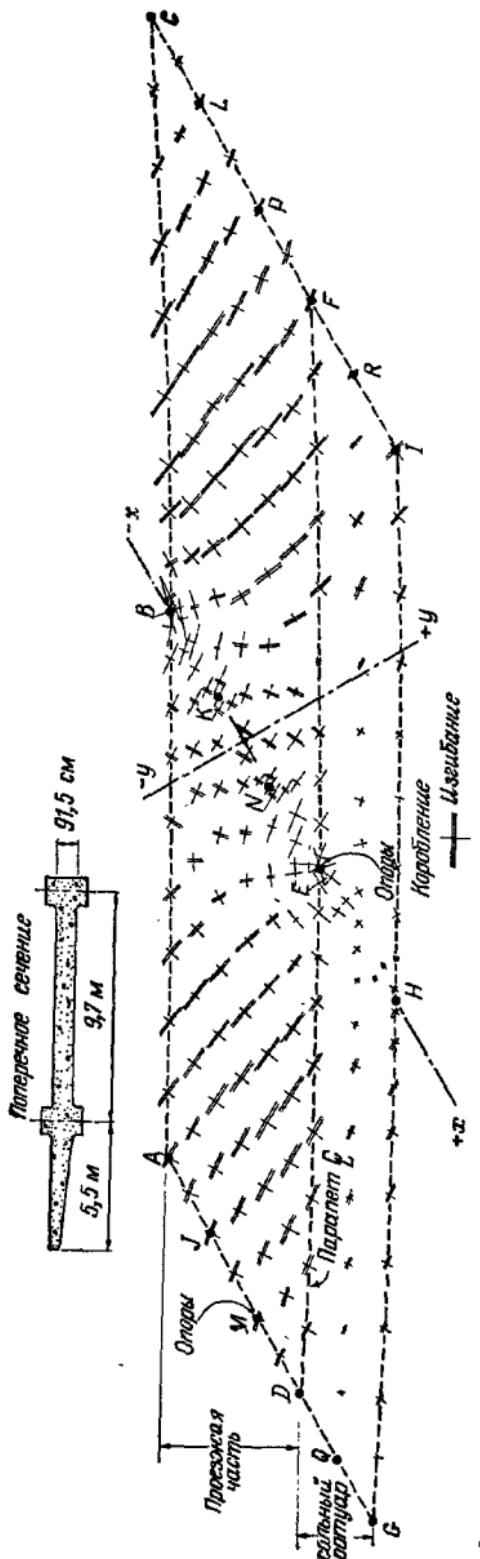
Вычислительная программа расчета, особенно основанная на использовании треугольных элементов, широко применяется на практике. С ее помощью легко можно рассчитывать плиты фундамента, настилы мостов или обшивки кораблей.

Одной из широко распространенных на практике задач является задача расчета мостовых конструкций, для решения которой очень часто применяется метод конечных элементов. На фиг. 10.14 приведена автоматически вычерченная схема распределений напряжений многопролетного моста.

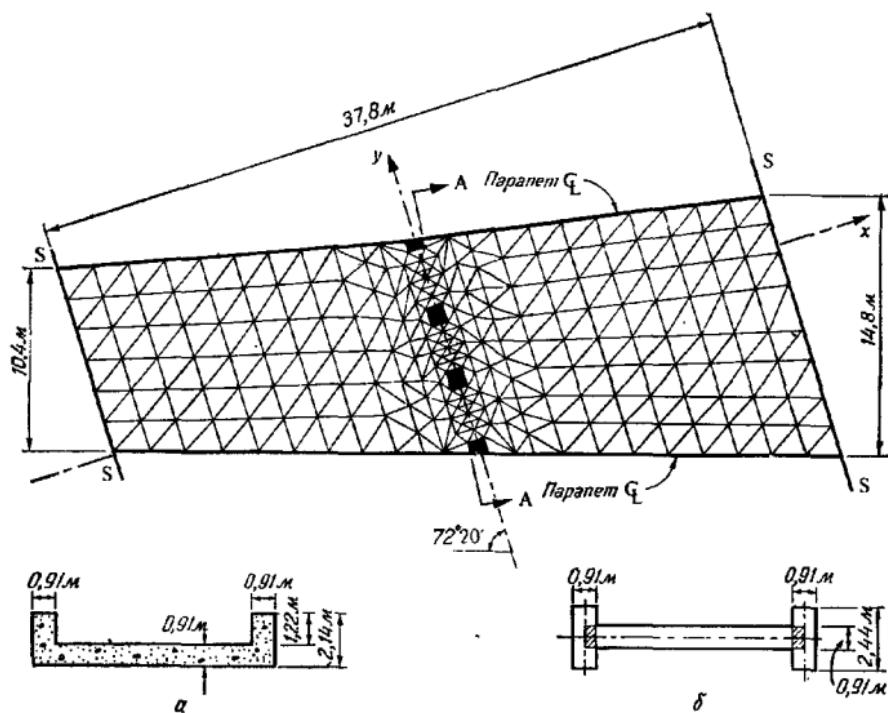
Мост более сложной формы показан на фиг. 10.15 и 10.16. Результаты расчета представлены в виде автоматически вычерченных изостат. При расчете предполагалось, что нейтральные оси парапета совпадают с пейтранльной осью пастила. Балочные элементы для расчета парапета без труда соединяются с плоскими, и результирующая система уравнений для всего ансамбля получается обычным путем, описанным в гл. 1.



Фиг. 10.13. Квадратная пластина. Линии равных углов наклона  $\theta_y = \partial w / \partial x \cdot D / PL$ .  
 а—вычисленные значения  $\theta_y \cdot 10^2$ ; б—результаты исследований методом мазаровых полос (1 полоса  $= 0,213 \cdot 10^{-2}$ ).



Фиг. 10.14. Двухпролетный косой мост переменной толщины. Построенный ЭВМ картина распределения главных моментов под действием собственного веса.



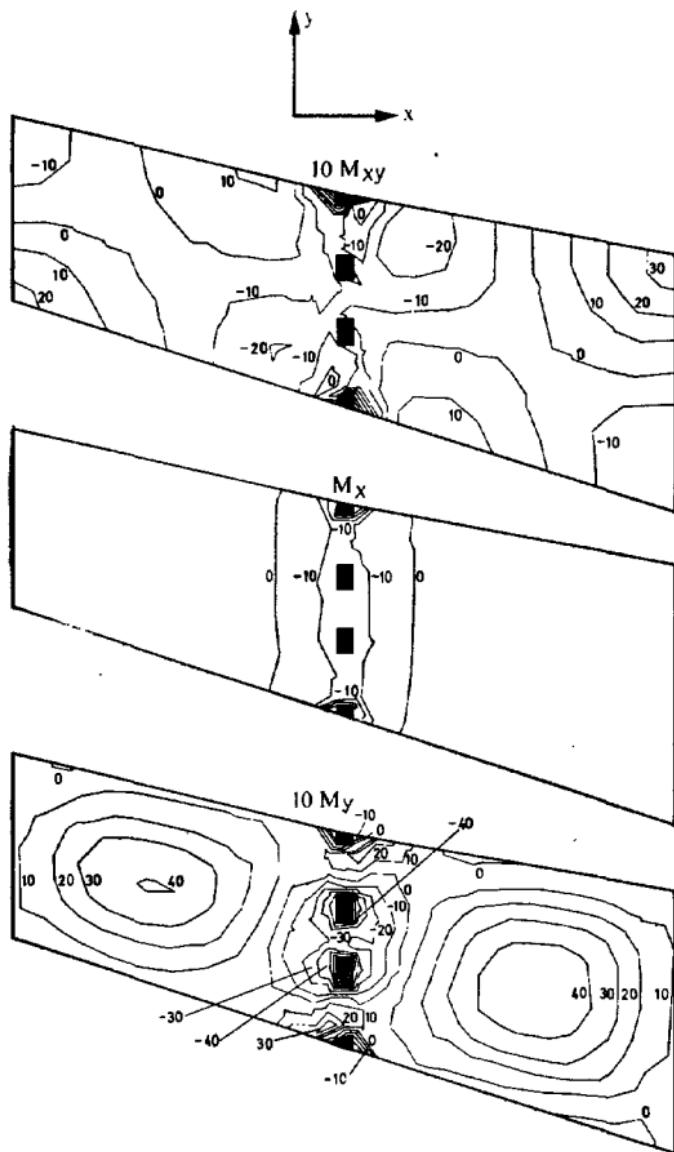
Фиг. 10.15. Кастрлтонский мост. Общая геометрия и схема разбивки на конечные элементы. Края моста свободно оперты без стеснения поворотов. Опоры учитываются как искусственные утолщения затененных участков, прогиб которых ограничен величиной  $\nu = 0,17$ .

*а* — типичное реальное сечение; *б* — использование идеализации.

#### «СОГЛАСОВАННЫЕ» ФУНКЦИИ ФОРМЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ В УЗЛОВЫХ ТОЧКАХ

#### 10.9. Общие замечания

В разд. 10.5 было показано, что для элемента с тремя степенями свободы в узлах невозможно построить функцию формы в виде простого полинома, которая удовлетворяла бы требованиям непрерывности угла наклона. Введение в узлах параметров кривизны имеет, однако, тот недостаток, что накладывает на функции чрезмерные требования непрерывности. Более того, по многим причинам желательно, чтобы общее число узловых переменных не превышало трех. В этом случае, основываясь на простой физической интерпретации, от плоских элементов для расчета пластин легко перейти к элементам для расчета оболочек. Кроме того, при трех узловых переменных упрощаются вычисления.



Фиг. 10.16. Компоненты моментов ( $\text{т}\cdot\text{м}/\text{м}$ ) для изображенного на фиг. 10.15 моста при действии равномерно распределенной нагрузки  $7,16 \cdot 10^3 \text{ Н}/\text{м}^2$ . Вычерченные ЭВМ линии равных моментов. Видно, что в рассмотренном примере мост в основном работает на изгиб.

Еще один простой способ состоит во введении дополнительных функций формы, производные второго порядка которых в узлах неоднозначны. При условии, что они не обращаются в бесконечность, сходимость гарантируется.

Рассмотрим функции формы для треугольных и четырехугольных элементов. Простой прямоугольный элемент исследоваться не будет.

### 10.10. Сингулярные функции формы для простого треугольного элемента

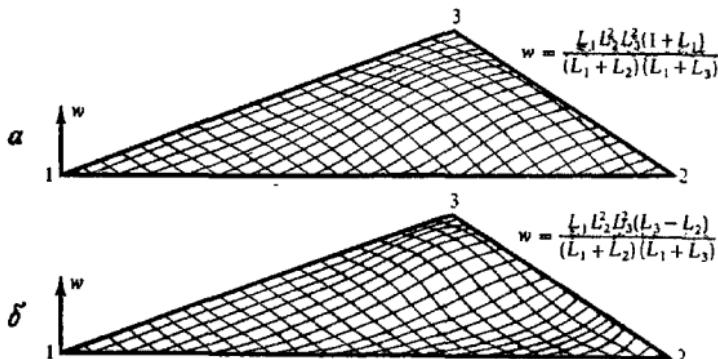
Рассмотрим, например, любую из двух систем функций

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)} \text{ и т. д.,} \quad (10.28)$$

или

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)} \text{ и т. д.} \quad (10.29)$$

Эти функции и их производные по нормали вдоль двух сторон треугольника 1—2 и 1—3 (фиг. 10.17) обращаются в нуль. На третьей стороне 2—3 эти функции также принимают пулевые



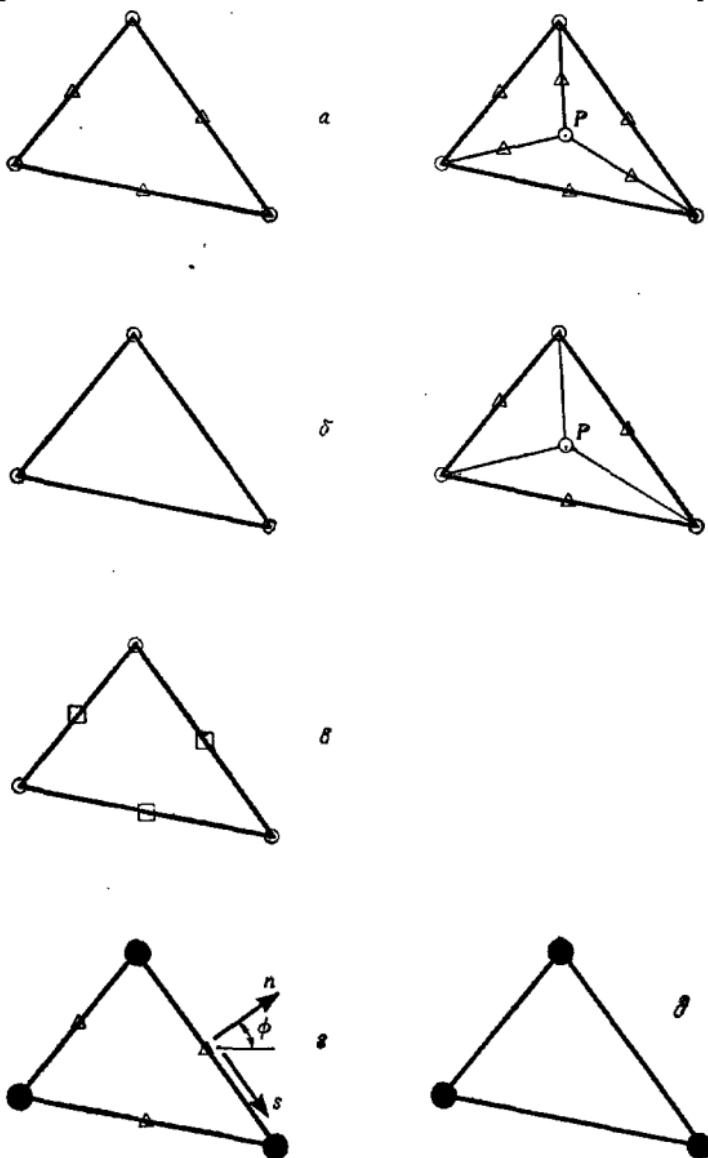
Фиг. 10.17. Некоторые особые функции  $L$ -координат.

значения, но нормальные производные отличны от пуля и изменяются по параболическому закону. Вторая из этих функций показана на фиг. 10.17, а.

Все функции, использованные для задания несогласованного треугольника [см. выражение (10.25)], имеют третий порядок и, следовательно, допускают параболический закон изменения нормальной производной, который неоднозначно определяется двумя краевыми узловыми значениями (результатом чего и является несогласованность). Однако если в качестве еще одной переменной задать значение нормальной производной  $w$  в середине каждой из сторон, то, комбинируя новую функцию  $\varepsilon$  с введенными ранее функциями, можно получить однозначный параболический закон изменения нормальной производной на гра-

ницах между элементами, т. е. построить согласованный элемент.

Очевидно, что для достижения согласованности нужно добавить три такие дополнительные степени свободы в выражение



Фиг. 10.18. Различные согласованные треугольные элементы.

Степени свободы  $\circ (w, -\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x})_i; \Delta (\frac{\partial w}{\partial n})_i; \square (w, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s})_i; \bullet (w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})_i$ .

(10.25) и выполнить все описанные ранее операции. В результате получается показанный на фиг. 10.18, а элемент с шестью узлами, три из которых — обычные угловые узлы, а три — дополнительные узлы, в которых заданы только значения нормальных производных.

Такие элементы несколько затрудняют составление ансамбля, так как число степеней свободы в каждом узле различно.

Чтобы избежать этого затруднения, можно устраниć степень свободы дополнительных узлов. Например, можно положить, что величина нормальной производной в середине стороны равна среднему арифметическому значений этой производной на концах стороны. В результате получим согласованный элемент с таким же числом степеней свободы, как и у описанного в предыдущих разделах элемента (фиг. 10.18, б).

Построение соответствующей функции формы довольно громоздко, поэтому оно здесь не приводится. Проще поступить следующим образом.

Во-первых, нормальные производные в середине сторон определяются из основных функций формы элемента [соотношение (10.26)] в виде

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_4, \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_5, \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_6 \right\} = [Z] \{ \delta \}^e. \quad (10.30)$$

Средние арифметические значения нормальных производных в углах тоже вычисляются по этим функциям и записываются как

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_4^a, \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_5^a, \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \end{pmatrix}_6^a \right\} = [Y] \{ \delta \}^e. \quad (10.31)$$

Вклад функций  $\epsilon$  в значения этих производных пропорционален величине  $\epsilon_{23}\gamma_1$  и т. д., т. е. (так как сами они имеют единичную нормальную производную) просто равен

$$\{ \gamma \} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.32)$$

Определяя из соотношения

$$[Y] \{ \delta \}^e = [Z] \{ \delta \}^e + \{ \gamma \} \quad (10.33)$$

величину  $\gamma$  и учитывая (10.26), получаем

$$\psi = [N^0] \{\delta\}^e + [\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, -\varepsilon_{12}] ([Y] - [Z]) \{\delta\}^e. \quad (10.34)$$

Здесь  $[N^0]$  — определенные ранее несогласованные функции формы.

Таким образом, соотношение (10.34) определяет искомые функции формы.

Другой способ получения согласованных треугольников был разработан Клухом и Точером [3]. Как показано на фиг. 10.18, *a*, сначала каждый треугольник разделяется на три треугольника с общей вершиной во внутренней точке  $P$ . Для каждого из новых треугольников записывается полный полином третьей степени, содержащий десять членов. Окончательное представление должно быть выражено через девять обычных степеней свободы в точках 1, 2, 3 и три нормальные производные в точках 4, 5, 6. Так как в каждой угловой точке исходного треугольника функции формы смежных треугольников должны принимать одинаковые значения, получаются две системы уравнений а в итоге  $9 \times 2 + 3 = 21$  уравнение. Кроме того, условия непрерывности перемещений и производных в центральной точке  $P$  дают еще шесть дополнительных уравнений, а условия непрерывности производных в середине внутренних сторон — еще три уравнения.

В результате получаем тридцать уравнений для определения тридцати неизвестных, что достаточно для определения функций формы и, следовательно, построения элемента с двенадцатью степенями свободы, аналогичного описанному ранее.

Наложение ограничений на нормальные производные в середине внешних сторон позволит сократить число степеней свободы до девяти.

Эти же элементы можно получить, если задать в углах два значения вторых производных. Введенные ранее функции формы семейства  $e$  фактически имеют различные производные в углах по разным направлениям.

В работе [4] треугольники Клуха и Точера построены с помощью другой системы функций  $e$ .

Оба рассмотренных типа треугольников дают почти одинаковые числовые результаты, поэтому предпочтение нужно отдавать элементам, приводящим к более простым вычислениям. При использовании численного интегрирования (что настоятельно рекомендуется для таких элементов) выгоднее применять непрерывные по всему треугольнику функции формы, определяемые соотношениями (10.28) и (10.29).

### 10.11. Треугольный элемент с восемнадцатью степенями свободы и согласованными функциями формы

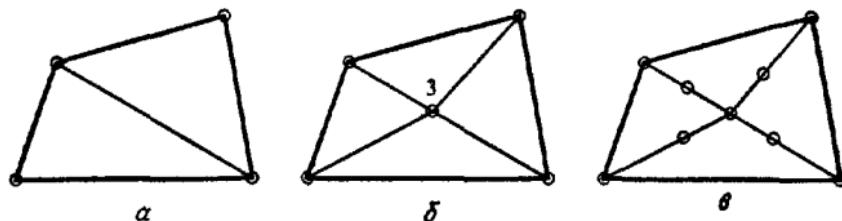
На фиг. 10.18, в изображен элемент, представляющий собой несколько усовершенствованный вариант элемента, показанного на фиг. 10.18, а. За счет того, что, кроме нормальной производной  $d\omega/dn$ , в середине сторон элемента рассматриваются еще значения  $\omega$  и смешанной производной  $d^2\omega/dsdn$ , число степеней свободы увеличивается с двенадцати до восемнадцати.

С точки зрения вычислений этот элемент более выгоден, так как теперь число степеней свободы в каждом узле одинаково. Требование непрерывности смешанных производных в *середине сторон* не является дополнительным ограничением, так как оно с физической точки зрения вполне естественно.

Способ построения этого элемента описан Айронсом [7]. Здесь достаточно сказать, что, кроме рассмотренных видов функций, используются еще члены четвертого порядка показанного на фиг. 10.6, г типа и функции, характеризующие скручивание (фиг. 10.17, б). Легко убедиться, что функция формы для такого элемента, кроме сингулярной функции, содержит все пятнадцать членов полинома четвертой степени.

### 10.12. Согласованные четырехугольные элементы

Любой из рассмотренных треугольников можно использовать для построения согласованных четырехугольных элементов с внутренними степенями свободы или без них. Три таких четырехугольника показаны на фиг. 10.19, причем ни в одном из них



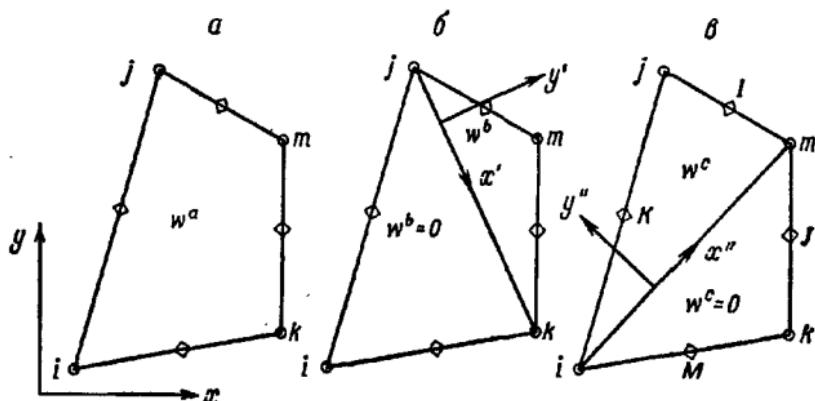
Фиг. 10.19. Некоторые составные четырехугольные элементы.  
а—внутренних степеней свободы нет; б—3 внутренние степени свободы; в—7 внутренних степеней свободы.

на внешних сторонах нет дополнительных узлов. Таким путем удается избежать уже упоминавшихся трудностей, которые возникают при составлении ансамбля.

Первый из элементов не имеет внутренних степеней свободы, и поэтому он, по-видимому, не обладает никакими преимуществами по сравнению с треугольниками с таким же числом сте-

пеней свободы. Два следующих элемента имеют соответственно 3 и 7 внутренних степеней свободы. Условия непрерывности нормальной производной в последнем из этих элементов не затрудняют составления ансамбля, так как внутренние степени свободы всегда исключаются. В работе Клуха и Фелиппы [21] показано, что при использовании таких элементов точность значительно увеличивается.

Возможный прямой способ построения четырехугольного элемента предложен Сандером [5] и Вёбеке [6, 22]. Он состоит



Фиг. 10.20. Согласованные функции, предложенные Вёбеке.

в следующем. В четырехугольном элементе (фиг. 10.20) перемещение представляется в виде суммы трех функций

$$w = w^a + w^b + w^c,$$

где первое слагаемое  $w^a$  представляет собой полный полином третьего порядка с десятью постоянными:

$$w^a = a_1 + a_2x + \dots + a_{10}y^3. \quad (10.35)$$

Вторая функция  $w^b$  задается кусочно. В нижнем треугольнике (фиг. 10.20, б) она считается равной нулю, а в верхнем имеет вид кубичного выражения с тремя постоянными, что позволяет без нарушения непрерывности угла наклона осуществить переход к нижнему треугольнику. Следовательно, в локальных координатах  $x'$ ,  $y'$  для треугольника  $jkm$  имеем

$$w^b = a_{11}y'^2 + a_{12}y'^3 + a_{13}x'y'^2. \quad (10.36)$$

Аналогично и третья функция (фиг. 10.20, в)  $w^c = 0$  в нижнем треугольнике, а в треугольнике  $imj$

$$w^c = a_{14}y''^2 + a_{15}y''^3 + a_{16}x''y''^2. \quad (10.37)$$

Таким образом, три обычные узловые переменные в углах четырехугольника и нормальные производные в узлах в середине сторон представляют собой шестнадцать внешних степеней свободы, задание которых позволяет определить шестнадцать постоянных  $a_{1-16}$ . В результате обеспечивается согласованность, но в углах вновь возникает неоднозначность вторых производных.

При желании можно наложить связи на значения переменных в узлах в середине сторон и получить элемент с двенадцатью степенями свободы.

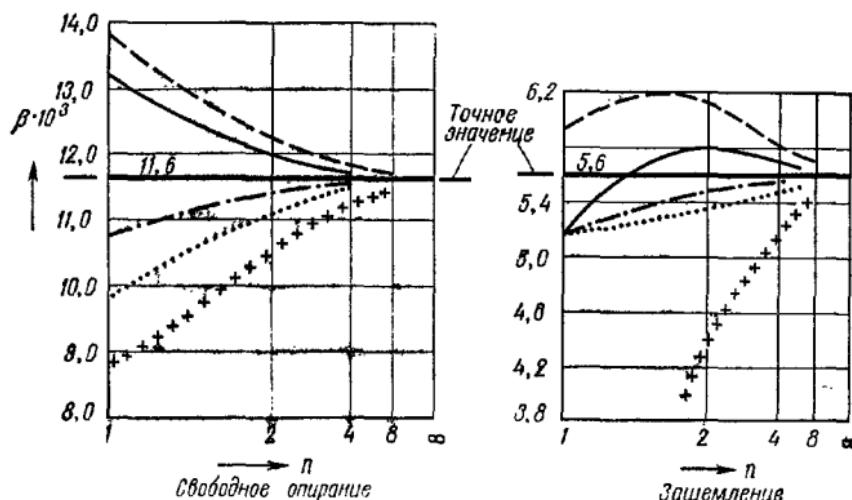
Как показал Вёбеке [22], функцию можно представить в явном виде и, таким образом, построить элемент.

Если один из углов четырехугольника входящий, то элементы такого типа построить нельзя. Это не очень серьезное ограничение, но его приходится учитывать, когда элементы вырождаются в близкую к треугольнику форму.

### 10.13. Несколько примеров решений с согласованными элементами

Сходимость и точность различных элементов, описанных здесь, многократно обсуждались в литературе. В этом плане особенно полезны работы [3, 4, 21].

На фиг. 10.21 сходимость результатов при использовании двух простых, но несогласованных элементов, рассмотренных в



Фиг. 10.21. Сравнение различных решений методом конечных элементов задачи о квадратной пластине, в центре которой приложена нагрузка  $P$  ( $n$  — число элементов на половину стороны  $a$  и  $\beta = wD/Pa^2$ ).

— — несогласованный прямоугольник, 12 степеней свободы; — — несогласованный треугольник, 9 степеней свободы; — — — согласованный четырехугольник, 16 степеней свободы (Вёбеке); + + + согласованный треугольник, 9 степеней свободы; · · · согласованный четырехугольник (Клух), 12 степеней свободы (из 7 внутренних);

этой главе, сравнивается со сходимостью при использовании трех различных согласованных элементов.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Во-первых, простейший согласованный треугольник при грубом разбиении приводит к довольно плохой аппроксимации и всегда худшей, чем эквивалентный несогласованный.

Во-вторых, тогда как решения, полученные при использовании согласованных элементов, всегда сходятся к точному *снизу*, так как в соответствии с теоремами гл. 2 они позволяют оценить нижнюю границу, решения, полученные при использовании несогласованных элементов и являющиеся обычно сходящимися сверху, могут давать ошибку любого знака.

Наконец, следует отметить, что к наилучшим результатам приводят четырехугольник Вёбеке (фиг. 10.20) и четырехугольник Клуха (фиг. 10.19, в).

## СОГЛАСОВАННАЯ ФУНКЦИЯ ФОРМЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### 10.14. Функция формы Эрмита для прямоугольника

Для прямоугольного элемента, изображенного на фиг. 10.2, в качестве узлового параметра всегда можно ввести производную  $\partial^2\omega/\partial x \partial y$ , так как это не приводит к чрезмерным требованиям непрерывности. Легко показать, что для таких элементов нетрудно построить полиномиальные функции формы, обеспечивающие согласованность.

Степенное представление для  $\omega$ , содержащее шестнадцать постоянных (в соответствии с количеством узловых параметров), можно, например, записать, сохраняя члены не выше третьего порядка по каждой координате. Естественно, что существует много способов записи таких выражений, но некоторые из них могут приводить к необратимым матрицам [C].

Один из таких способов состоит в использовании полиномов Эрмита, позволяющих непосредственно записать соответствующую функцию. Полином Эрмита

$$H_{ml}^n(x) \quad (10.38)$$

есть полином порядка  $2n + 1$ , удовлетворяющий условиям

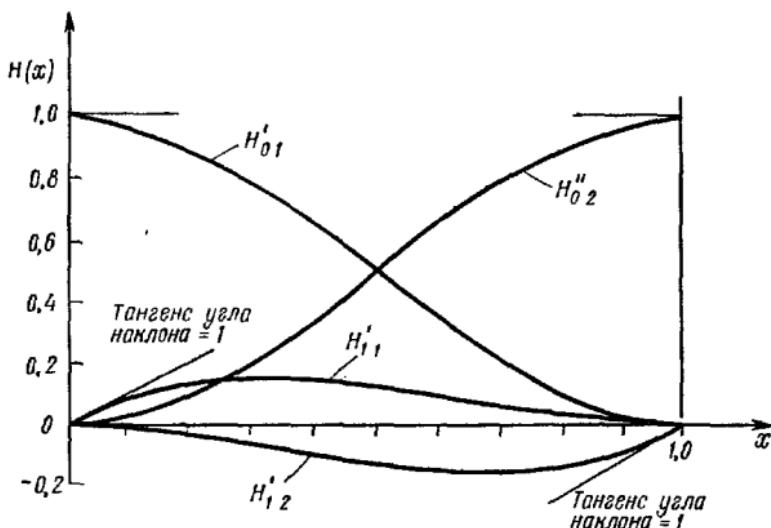
$$\frac{d^k H}{dx^k} = 1, \quad k = m \quad \text{для } m = 0, 1, \dots, n, \quad \text{при } x = x_i$$

и

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 0, \quad k \neq m, \quad \text{при } x = x_j.$$

Множество полиномов Эрмита первого порядка, таким образом, представляет собой множество полиномов третьего порядка. Их обычно используют в качестве функций формы для линейного элемента  $ij$ , узловыми перемещениями на концах которого являются значения функции и углы наклона.

На фиг. 10.22 показано такое множество полиномов третьего порядка.



Фиг. 10.22. Функции Эрмита первого порядка.

Легко проверить, что функции формы

$$[N_i] = [H_{0i}^{(1)}(x) H_{0i}^{(1)}(y), \quad H_{ii}^{(1)}(x) H_{0i}^{(1)}(y), \\ H_{0i}^{(1)}(x) H_{1i}^{(1)}(y), \quad H_{1i}^{(1)}(x) H_{1i}^{(1)}(y)] \quad (10.39)$$

соответствуют функциям

$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

и принимают единичные значения в узловой точке  $i$  и нулевые — в остальных точках.

Элемент, основанный на этих функциях, построен Богнером и Шмитом [8] и довольно успешно использовался ими.

Дальнейшее усовершенствование этого элемента, состоящее во включении условий непрерывности производных высоких порядков, осуществляется весьма просто и описано в работе [9].

В неискривленной форме такие элементы, как и все прямоугольные, применяются крайне редко.

### 10.15. Треугольники с двадцатью одной и восемнадцатью степенями свободы

Если потребовать выполнения в узлах условий непрерывности производных выше первого порядка (при этом, как пояснялось в разд. 10.3, накладываются определенные ограничения на неоднородность свойств), то нетрудно построить элементы, согласованные относительно прогиба и производной от него.

Если в качестве узловых степеней свободы принять величины

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

то треугольный элемент будет иметь по крайней мере восемнадцать степеней свободы. Полный полином пятого порядка содержит двадцать один член. Следовательно, если добавить еще три степени свободы (нормальные производные) в середине сторон, то можно получить достаточное количество уравнений для нахождения функции формы.

На любой границе имеем шесть величин, определяющих закон изменения  $w$  (перемещение, производные и кривизну в угловых точках), т. е. полином пятой степени. Таким образом, закон изменения  $w$  определяется единственным образом и, следовательно, функция  $w$  непрерывна между элементами.

Аналогично производная  $\partial w / \partial p$  задается пятью величинами и ведет себя, как полином четвертого порядка. Именно это и требуется для выполнения условий непрерывности деформаций и углов наклона между элементами.

Если записать полный полином пятой степени<sup>1)</sup>

$$w = a_1 + a_2 x + \dots + a_{21} y^5, \quad (10.40)$$

то, следуя тем же рассуждениям, что и при построении прямоугольного элемента в разд. 10.4, можно записать

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 + a_2 x_1 + & + a_{21} y_1^5, \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 &= a_2 & + a_{20} y_1^3, \\ &\vdots & \vdots \\ &\vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_1 &= & + 2a_4 + \dots + 2a_{19} y_1^2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Рекомендуется записывать полином в обычных декартовых координатах, а не в  $L$ -координатах. Поскольку полином полный, симметрия сохраняется.

и получить окончательное выражение

$$\{\delta\}^e = [C]\{a\}, \quad (10.41)$$

где  $[C]$  — матрица размерности  $21 \times 21$ .

Единственная трудность, которая может в дальнейшем встретиться, состоит в определении нормальных производных в узлах посередине сторон. Однако если заметить, что (фиг. 10.18)

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \cos \phi \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (10.42)$$

где  $\phi$  — угол между рассматриваемой стороной и осью  $x$ , то процедура упрощается.

Обратить явно матрицу  $[C]$  нелегко, поэтому такие величины, как жесткость и др., вычисляются с помощью численного обращения.

Наличие на сторонах дополнительных узлов с одной степенью свободы все же вносит некоторые трудности. Однако дополнительные степени свободы можно устраниТЬ, если вдоль каждой стороны треугольника допустить только кубический закон изменения нормальной производной. Ясно, что при этом количество степеней свободы и порядок матрицы  $[C]$  уменьшаются до восемнадцати и получается элемент (фиг. 10.18,  $\delta$ ) с тремя угловыми точками и восемнадцатью степенями свободы. Такой элемент используется чаще.

Рассмотренные элементы были совершенно независимо построены и описаны в нескольких статьях, опубликованных в 1968 г. Такой любопытный факт одновременного открытия наблюдается во многих областях науки на определенной стадии развития знаний.

Так, элемент с двадцатью одной степенью свободы описан Айронсом [27], Аргириосом [23], Беллом [10], Боссардом [24], Виссером [25] (авторы перечислены в алфавитном порядке).

Вариант этого элемента, но с восемнадцатью степенями свободы построен Аргириосом [23], Беллом [10], Купером и др. [26]. Очень похожее, но более сложное построение осуществлено Батлином и Фордом [11].

Очевидно, что можно построить еще много элементов такого типа, а некоторые из них уже были предложены в указанных работах. Однако всегда следует помнить, что они могут оказаться непригодными, если материал неоднороден и свойства его изменяются скачкообразно. Кроме того, наличие производных высоких порядков затрудняет формулировку граничных условий для них и производные от энергии уже нельзя интерпретировать как «узловые силы». Поэтому инженер все же может

скорее отдать предпочтение физически более наглядной формулировке, несмотря на то что во многих работах продемонстрирована очень хорошая точность таких элементов.

### 10.16. Заключительные замечания

В настоящей главе содержится подробный обзор функций формы и методов их построения. Включение его в книгу объясняется не только тем, что задача об изгибе пластин имеет важные инженерные приложения, но и тем, что *представленные здесь функции формы применимы ко всем задачам, функционал которых содержит вторые производные*. Например, их можно использовать в задачах о вязком течении и других задачах такого типа.

В самом деле, даже задача о двумерном напряженном состоянии, как хорошо известно, может быть сформулирована с помощью функций напряжений, а при этом получаются именно такие функционалы. При таком подходе уравнения равновесия выполняются автоматически, и путем минимизации «дополнительной работы» можно получить верхнюю границу решения. Такая формулировка впервые была предложена Вёбеке и Зенкевичем [28].

Другие подходы к решению задачи об изгибе пластины здесь не приведены. Некоторые из них хорошо обоснованы [30—36], но имеют более ограниченную область применения.

Основные соотношения этой главы основаны на классической теории тонких пластин. Поэтому деформации сдвига не рассматриваются. Тем не менее бесспорно, что в случае толстых пластин их необходимо принимать во внимание. В работах [21, 30, 31] предприняты попытки приближенно учесть деформации сдвига. В гл. 14 данной книги это будет сделано другим способом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S., Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959; есть русский перевод: Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластики и оболочки, Физматгиз, 1963.
2. Irons B. M., Draper K. J., Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending, *JIAA*, 3, 5 (1965); есть русский перевод: Айронт, Дрейпер, Несоответствие узловых связей при расчете изгиба пластины методом жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 5, стр. 206—207 (1965).
3. Clough R. W., Tocher J. L., Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
4. Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Triangular Elements in Bending—Conforming and Nonconforming Solutions, Proc.

- Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
5. Sander G., Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion — torsion, *Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, 33, 456—494 (1964).
  6. De Veubeke B. F., Bending and Stretching of Plates, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  7. Irons B. M., A Conforming Quartic Triangular Element for Plate Bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 29—46 (1969).
  8. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A., The Generation of Interelement—Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  9. Smith I. M., Duncan W., The Effectiveness of Nodal Continuities in Finite Element Analysis of Thin Rectangular and Skew Plates in Bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 253—258 (1970).
  10. Bell K., A Refined Triangular Plate Bending Element, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 101—122 (1969).
  11. Butlin G. A., Ford R., A Compatible Plate Bending Element, Univ. of Leicester Eng. Dept. Rept., 68-15, 1968.
  12. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 28, 471—488 (1964).
  13. Clough R. W., The Finite Element Method in Structural Mechanics, Ch. 7 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
  14. Dawe D. J., Parallelogram Element in the Solution of Rhombic Cantilever Plate Problems, *J. of Strain Analysis*, 3 (1966).
  15. Argyris J. H., Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  16. Walz J. E., Fulton R. E., Cyrus N. J., Accuracy and Convergence of Finite Element Approximation, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
  17. Melosh R. J., Basis of Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, *JAIА*, 1, 1631—1637 (1963); есть русский перевод: Мелош, Основы получения матриц для прямого метода жесткостей, *Ракетная техника и космонавтика*, 1, № 7, стр. 169—176 (1963).
  18. Adini A., Clough R. W., Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method and Report to Nat. Sci. Found./USA, G. 7337, 1961.
  19. Cheung Y. K., King I. P., Zienkiewicz O. C., Slab Bridges with Arbitrary Shape and Support Conditions — a General Method of Analysis Based on Finite Elements, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 40, 9—36 (1968).
  20. Tocher J. L., Kapur K. K., Comment on Basis of Derivation of Matrices for Direct Stiffness Method, *JAIА*, 3, 1215—1216 (1965); есть русский перевод: Точер, Капур, Замечания к статье «Основы получения матриц для прямого метода жесткостей», *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 6, стр. 285 (1965).
  21. Clough R. W., Felippa C. A., A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
  22. De Veubeke B. F., A Conforming Finite Element for Plate Bending, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 95—108 (1968).
  23. Argyris J. H., Fried I., Scharpf D. W., The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method, *The Aeronautical J. R. Ae. S.*, 72, 701—709 (1968).

24. Bosshard W., Ein neues vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung, *Mit. Assoc. Bridge Struct. Eng. Bulletin*, **28**, 27—40 (1968).
25. Visser W., The Finite Element Method in Deformation and Heat Conduction Problems, Dr. W. Dissertation, T. H., Delft, 1968.
26. Cowper G. R., Kosko E., Lindberg G. M., Olson M. D., Formulation of a New Triangular Plate Bending Element, *Trans. Canad. Aero-Space Inst.*, **1**, 86—90 (1968); см. также N. R. C. Aero Rept. LR514, 1968.
27. Irons B. M., Comments on Complete Polynomial Displacement Fields for Finite Element Method by Dunne P. C., *The Aeronautical J., R. Ae. S.*, **72**, 709 (1968).
28. De Veubeke B. F., Zienkiewicz O. C., Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab Analogy, *J. Strain Analysis*, **2**, 265—271 (1967).
29. Morley L. S. D., The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems, *Aero Quart.*, **19**, 149—169 (1968).
30. Pian T. H. H., Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions, *JAIAA*, **2**, 1332—1336 (1964); есть русский перевод: Пиан, Вывод соотношений для матриц жесткости элемента, основанный на выборе закона распределения напряжений, *Ракетная техника и космонавтика*, **2**, № 7, стр. 219—222 (1964).
31. Pian T. H. H., Tong P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 3—28 (1969).
32. Alwood R. J., Cornes G. M. M., A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 135—150 (1969).
33. Severn R. T., Taylor P. R., The Finite Element Method for Flexure of Slabs where Stress Distributions are Assumed, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **34**, 153—170 (1966).
34. Herrmann L. R., Finite Element Bending Analysis of Plates, *Proc. Am. Soc. Eng.*, **93**, EM 5 (1967).
35. De Veubeke B. F., An Equilibrium Model for Plate Bending, *Int. J. Solid Struct.*, **4**, 447—468 (1968).
36. Morley L. S. D., On the Constant Moment Plate Bending Element, *Journal Strain Analysis* (будет опубликовано).

## ГЛАВА II

# ОБОЛОЧКИ КАК СОВОКУПНОСТЬ ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 11.1. Введение

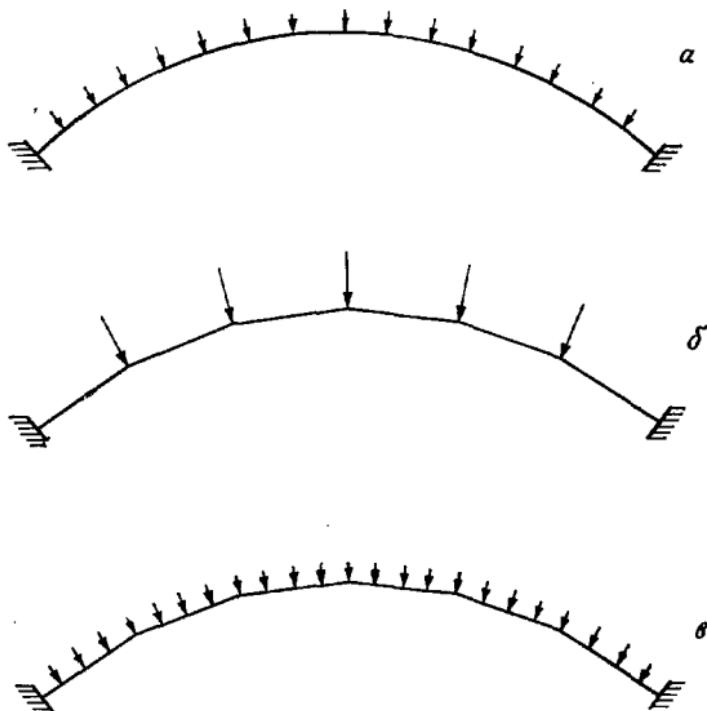
Оболочка, по существу, представляет собой конструкцию, которая может быть получена из тонкой пластины путем предварительного деформирования срединной плоскости в поверхность однопарной или двойной кривизны. Хотя предположения о распределении деформаций и напряжений в поперечном направлении остаются в силе, оболочка совсем по-другому, нежели пластина, воспринимает внешние нагрузки. Результирующие напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, теперь имеют компоненты, нормальные к этой поверхности, и уравновешивают основную часть нагрузки. Это обстоятельство объясняет экономичность оболочек как несущих конструкций и их популярность.

Вывод основных уравнений, описывающих поведение оболочки, связанны с большими трудностями и в зависимости от введенных допущений приводят к различным формулам. Классическая теория оболочек подробно изложена во многих учебниках по этому предмету, например в хорошо известной книге Флюгге [1].

Применение метода конечных элементов к решению задач теории оболочек, рассматриваемое в этой главе, устраивает упомянутые выше трудности за счет введения дополнительного допущения. Оно носит скорее физический, чем математический характер. Предполагается, что поведение непрерывной криволинейной поверхности достаточно точно характеризуется поведением поверхности, составленной из малых плоских элементов.

Из физических соображений следует, что с уменьшением размеров элементов решение должно сходиться и, как показывает опыт, такая сходимость действительно наблюдается. Особого внимания требует способ задания узловых нагрузок (или массивовых сил). В приведенных примерах нагрузка и массы в узлах распределялись так, чтобы наилучшим образом воспроизвести локальные эффекты. Теперь в связи с заменой криволинейной поверхности набором пластин более правильно представлять распределенную нагрузку в виде статически эквивалентных сосредоточенных узловых сил. Это, возможно, лучше всего иллюстрируется простой задачей о круглой арке (фиг. 11.1). Круг-

лая арка под действием равномерно распределенной нагрузки гораздо лучше аппроксимируется многоугольной аркой, нагруженной статически эквивалентными сосредоточенными силами, как показано на фиг. 11.1, б, чем такой же аркой под действием равномерно распределенной нагрузки (фиг. 11.1, в). Это можно проверить, построив соответствующие многоугольники сил.



Фиг. 11.1. Представление криволинейной арки набором прямых.

Элементы оболочки находятся в общем случае под действием изгибающих и мембранных сил, действующих в плоскости. В плоских элементах эти силы вызывают независимые деформации при условии, если они малы; поэтому, чтобы составить матрицы жесткости, можно воспользоваться уже изложенным материалом.

Для представления произвольной оболочки в виде набора плоских элементов можно использовать только треугольные элементы. Несмотря на то что эта идея была предложена Грином и др. [2] еще в 1961 г., успеху мешало отсутствие хорошей матрицы жесткости для плоского треугольного элемента при изгибе [3—6]. Улучшение элементов, получаемое изложенными п. гл. 10 способами, позволяет хорошо описывать поведение оболочек, разбитых на плоские элементы.

Некоторые оболочки, например цилиндрические, можно представить в виде набора плоских элементов прямоугольной или четырехугольной формы. Наличие хороших матриц жесткости для этих элементов позволило получить удовлетворительные результаты. С помощью элементов именно такого типа были решены практически важные задачи проектирования арочных плотин и другие задачи для перекрытий цилиндрической формы [7—8].

Очевидно, что возможности исследования оболочечных конструкций методом конечных элементов неисчерпаемы. При наличии общей вычислительной программы проблемы, связанные с наличием отверстий, переменной толщины и анизотропными свойствами, становятся несущественными.

Особый случай представляют осесимметричные оболочки. Хотя, очевидно, их можно рассматривать с помощью метода, изложенного в настоящей главе, к ним применим и более простой подход. Ему будет посвящена гл. 12.

К решению рассматриваемых здесь задач можно подойти и по-другому, а именно используя криволинейные оболочечные элементы. При этом необходимо применять криволинейные координаты, методы введения которых описаны в гл. 8. Допущение о представлении оболочки набором плоских элементов теперь исключается за счет использования той или иной теории оболочек. Несколько вариантов применения метода перемещений описано в работах [9—18].

Одни из самых простых и эффективных способов построения криволинейных оболочечных элементов состоит в использовании теории так называемых пологих оболочек [14, 16].

Здесь  $w$ ,  $u$ ,  $v$  являются нормальной и тангенциальными компонентами перемещений криволинейной поверхности, и если считается, что все элементы касаются друг друга, то нет необходимости переходить от локальных к глобальным значениям.

Предполагается, что элемент является «пологим» относительно локальной системы координат в плоскости, проходящей через его узловые точки, а энергия деформации элемента определяется соответствующими выражениями, содержащими производные по координатам в плоскости проекции. В результате можно использовать такие же функции формы, как и для рассматриваемых в этой главе плоских элементов, причем здесь интегрирование, как и ранее, проводится в плоскости.

Пологие оболочечные элементы, в выражении для энергии которых содержатся члены, характеризующие взаимное влияние друг на друга мембранных и изгибных деформаций, несколько более эффективны, чем плоские элементы, для которых взаимное влияние учитывается только на границе. Максимальную эффективность имеют простые элементы небольших разме-

ров, но для более сложных крупных элементов все преимущества пропадают. Очень хорошо использование пологих элементов описано в работе [16].

Однако во многих практических случаях плоские элементы дают хорошую аппроксимацию, и, кроме того, они позволяют производить простое соединение с подкрепляющими элементами и шлангоутами, что не всегда удается при использовании криволинейных элементов. В самом деле, во многих практических задачах вся конструкция или по крайней мере часть ее, по существу, составлена из плоских поверхностей, а такие поверхности легко аппроксимируются. По этим причинам криволинейные тонкие оболочечные элементы рассматриваться здесь не будут, а вместо этого в гл. 13 будет изложен общий подход к решению задач о толстых криволинейных оболочках (на основе трехмерного анализа, что дает возможность избежать неточностей уравнений теории оболочек).

В следующей главе, посвященной осесимметричным оболочкам, будут применяться как плоские, так и криволинейные элементы.

## 11.2. Жесткость плоского элемента в локальных координатах

Рассмотрим типичный плоский элемент, находящийся одновременно под действием мембранных и изгибающих сил (фиг. 11.2).

Остановимся сначала на действии *мембранных сил* (плоское напряженное состояние). Из гл. 4 известно, что деформированное состояние однозначно описывается величинами перемещений  $u$  и  $v$  каждой узловой точки  $i$ . Минимизация общей потенциальной энергии приводит к матрицам жесткости

$$\left\{ \begin{array}{c} F_i \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} = [k^p] \left\{ \begin{array}{c} \delta_i^p \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}, \quad (11.1)$$

где

$$\{\delta_i^p\} = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\}, \quad \{F_i^p\} = \left\{ \begin{array}{c} U_i \\ V_i \end{array} \right\}.$$

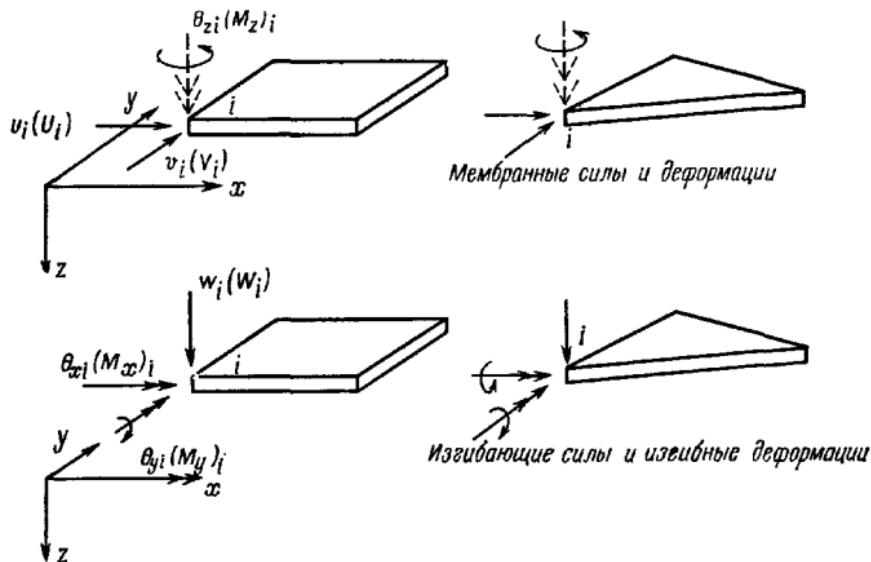
Аналогично деформированное состояние, вызванное изгибом, однозначно определяется узловым смещением  $\omega$  в направлении оси  $z$  и двумя углами поворота  $\theta_x$  и  $\theta_y$ . Это позволяет представить матрицы жесткости в виде

$$\left\{ \begin{array}{c} F_i^b \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} = [k^b] \left\{ \begin{array}{c} \delta_i^b \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}, \quad (11.2)$$

где

$$\{\delta_i^p\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad \{F_i^b\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}.$$

Прежде чем объединить эти матрицы, важно отметить два обстоятельства. Во-первых, перемещения, вызванные мембранными силами, не влияют на изгибные деформации и наоборот. Во-вторых, угол поворота  $\theta_z$  не входит в число узловых параметров, определяющих деформации. Хотя на этой стадии пово-



Фиг. 11.2. Плоский элемент под действием мембранных и изгибающих сил.

ротом вокруг оси  $z$  можно пренебречь по причинам, которые станут ясны позднее, уже сейчас при составлении ансамбля элементов целесообразно учесть этот поворот и связать его с фиктивным моментом  $M_z$ . Тот факт, что  $\theta_z$  не участвует в процессе минимизации, просто учитывается включением соответствующего количества нулей в матрицу жесткости.

Записывая теперь узловые перемещения в виде

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (11.3)$$

и соответствующие силы как

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix}, \quad (11.4)$$

получаем

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ \vdots \\ F_i \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \vdots \\ \delta_i \end{Bmatrix}$$

или

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e. \quad (11.5)$$

Нетрудно видеть, что матрица жесткости состоит из следующих подматриц:

$$[k_{rs}] = \left[ \begin{array}{c|ccc|c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline [k_{rs}^p] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & [k_{rs}^b] & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (11.6)$$

если учесть, что

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^p \\ \delta_i^b \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}. \quad (11.7)$$

Эти соотношения справедливы для любого многоугольного элемента, и в частности для двух важных случаев, иллюстрированных на фиг. 11.2.

### 11.3. Переход к глобальным координатам и составление ансамбля элементов

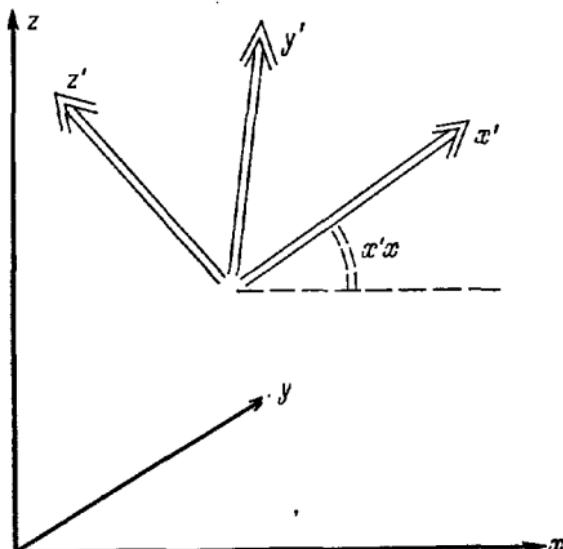
Полученная в предыдущем разделе матрица жесткости записана в локальной системе координат, так как компоненты изгибающих и мембранных сил выражены в локальных координатах.

Преобразование к глобальным координатам (которые будем обозначать через  $x, y, z$  в отличие от локальных координат  $x'$ ,

$y'$ ,  $z'$ ) необходимо для составления ансамбля элементов и записи соответствующих уравнений равновесия.

Кроме того, координаты узлов удобнее задавать в глобальной системе, а затем переходить к локальным координатам, т. е. осуществлять обратное преобразование. К счастью, все преобразования достаточно просты.

На фиг. 11.3 показаны две системы координат. Узловые силы и перемещения преобразуются из глобальной в локальную си-



Фиг. 11.3. Локальные и глобальные координаты.

стему координат с помощью матрицы  $[L]$ :

$$\{\delta_i'\} = [L] \{\delta_i\}, \quad \{F_i'\} = [L] \{F_i\}, \quad (11.8)$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (11.9)$$

а  $[\lambda]$  представляет собой матрицу размерности  $3 \times 3$  косинусов углов между осями этих систем, т. е.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y'} & \lambda_{x'z'} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y'} & \lambda_{y'z'} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y'} & \lambda_{z'z'} \end{bmatrix}, \quad (11.10)$$

где  $\lambda_{x'x}$  — косинус угла между осями  $x'$  и  $x$  и т. д.

Следовательно, для полной системы узловых сил элемента можно записать

$$\{\delta'\}^e = [T] \{\delta\}^e, \quad \{F'\}^e = [T] \{F\}^e. \quad (11.11)$$

По правилам ортогональных преобразований (см. разд. 1.4) матрица жесткости элемента в глобальных координатах принимает вид

$$[k] = [T]^T [k'] [T]. \quad (11.12)$$

В обоих последних соотношениях

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

и является диагональной матрицей, составленной из нескольких матриц  $[L]$ , количество которых равно числу узлов элемента.

Несложно показать, что типичная подматрица жесткости записывается как

$$[k_{rs}] = [L]^T [k'_{rs}] [L], \quad (11.14)$$

где подматрица  $[k'_{rs}]$  в локальных координатах определяется соотношением (11.6).

Определение локальных координат осуществляется аналогичным образом. Если начала локальной и глобальной систем координат совпадают, то

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (11.15)$$

Так как при получении матрицы жесткости положение начала координат несущественно, то такого преобразования всегда достаточно для определения локальных координат в плоскости элемента (или в плоскости, параллельной ему).

После получения матриц жесткости всех элементов в общей глобальной системе координат составление ансамбля элементов и окончательное решение производятся обычным образом. В результате искомые перемещения определяются в глобальной системе координат, и для определения напряжений необходимо в каждом элементе перейти к локальным координатам. После этого можно использовать обычные матрицы мембранных и изгибающихся напряжений.

### 11.4. Жесткость фиктивного поворота

Если все элементы, пересекающиеся в узле, компланарны, то при использовании описанного подхода встречаются некоторые трудности, связанные с тем, что жесткость в направлении  $\theta_{zi}$  (фиг. 11.2) равна нулю.

В такой точке последнее из шести уравнений равновесия (соответствующее направлению  $\theta_z$ ) в локальных координатах обращается в равенство

$$0 = 0. \quad (11.16)$$

Само по себе уравнение такого типа не вносит особых трудностей (хотя в вычислительной программе может привести к ошибочным результатам). Однако если направления глобальных и локальных осей координат отличаются, то после соответствующего преобразования получаются шесть на первый взгляд корректных уравнений. Эта система будет особенной, ибо она содержит равенство (11.16), умноженное на действительные числа<sup>1)</sup>.

Существуют две возможности обойти эту трудность:

а) составить систему уравнений для ансамбля в точке, где элементы компланарны, в локальной системе координат (и исключить уравнение  $0 = 0$ );

б) ввести в этой точке некоторый произвольный коэффициент жесткости  $k'_{\theta z}$ . Это приведет в локальных координатах к замене уравнения (11.16) уравнением

$$k'_{\theta z} \theta_{zi} = 0. \quad (11.17)$$

Последнее после преобразований позволяет получить хорошо обусловленную систему уравнений<sup>2)</sup>, из которой обычным способом находятся все перемещения, включая  $\theta_{zi}$ . Так как  $\theta_{zi}$  не входит в уравнения равновесия и напряжения от него не зависят, величине жесткости  $k'_{\theta z}$  можно придать произвольное значение. Результат при этом не изменится.

Оба предложенных способа связаны с определенными трудностями программирования (хотя второй несколько проще). В работе [15] приведены результаты определения реального коэффициента жесткости для дополнительных степеней свободы типа описанных поворотов.

<sup>1)</sup> Читатель может вспомнить логическую ошибку в доказательстве равенства  $2 = 4$  и другие, основанные на умножении обеих частей равенства (11.16).

<sup>2)</sup> По-видимому, автор имеет в виду разрешимость приведенной системы уравнений (11.5). Для хорошей обусловленности, кроме однозначной разрешимости, требуется еще малость изменения решения этой системы при малом изменении правых частей (см. С. Н. Годунов, В. С. Рябенький, Разностные схемы, изд-во «Наука», гл. 2, § 4, 1973 г.). — Прим. ред.

В программе, неоднократно применявшейся автором [6], использовалась система функциональных коэффициентов жесткости поворотов для всех элементов, как компланарных, так и некомпланарных. Для треугольных элементов они вводились в виде такой матрицы, что равновесие в локальных координатах не нарушалось, т. е.

$$\begin{Bmatrix} M_{z_l} \\ M_{z_l} \\ M_{z_k} \end{Bmatrix} = \alpha E t \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ & 1 & -0,5 \\ \text{Симметрично} & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z_l} \\ \theta_{z_l} \\ \theta_{z_k} \end{Bmatrix}, \quad (11.18)$$

где  $\alpha$  — некоторый коэффициент, который следует еще задать.

Из-за того что дополнительные жесткости вводятся в некомпланарных узлах, их величины влияют на результат, так что этот прием является приближенным. Однако изменение в довольно широких пределах величины коэффициента  $\alpha$  мало сказывается на конечном результате. Например, в приведенной ниже табл. 11.1 содержатся величины перемещений арочной плотины для различных значений  $\alpha$ , взятые из работы [2].

Таблица 11.1  
Узловые коэффициенты жесткости поворота в арочной плотине [2]

$\alpha$	1,00	0,50	0,10	0,03	0,00
Радиальные перемещения, мм	61,13	63,35	64,52	64,78	65,28

Из таблицы видно, что при  $\alpha = 0$  перемещения близки к точным. На практике рекомендуется использовать значение  $\alpha = 0,03$  или ниже.

Некоторые авторы [5] пытаются избежать этой трудности за счет уменьшения числа степеней свободы, пренебрегая одной из них и объединяя все уравнения по нормали к оболочке. Этот метод используется в гл. 14. Однако он в свою очередь вносит новую трудность, так как если учесть *действительное* изменение направлений в оболочке, то не так просто задать «нормаль».

## 11.5. Локальные направляющие косинусы

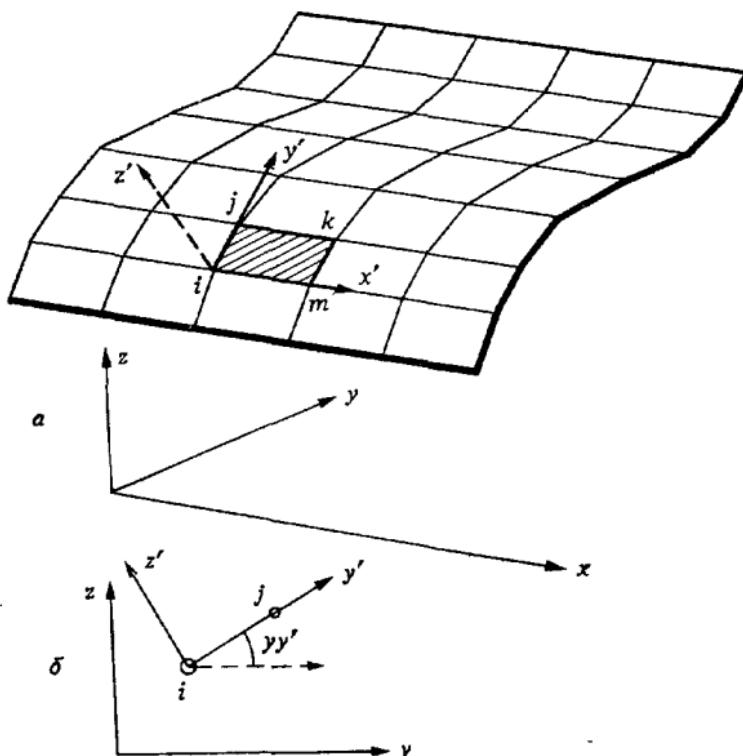
После определения матрицы направляющих косинусов  $[\lambda]$  для каждого элемента решение задачи не представляет никаких трудностей и производится обычным образом. Однако само

определение матрицы направляющих косинусов приводит к некоторым алгебраическим трудностям; это определение не единственно, так как направление одной из осей, лежащей в плоскости элемента, произвольно.

Рассмотрим сначала совокупность прямоугольных элементов, для которой матрица направляющих косинусов находится особенно просто.

### 11.5.1. Прямоугольные элементы

Такие элементы применяются только для аппроксимации цилиндрических и коробчатых поверхностей. При этом удобно



Фиг. 11.4. Цилиндрическая оболочка как совокупность прямоугольных элементов. Локальные и глобальные координаты.

направить одну из сторон элемента и соответствующую ось локальных координат  $x'$  параллельно глобальной оси  $x$ . Для типичного элемента  $ijklm$  (фиг. 11.4) легко определить все соответствующие направляющие косинусы.

Очевидно, что для оси  $x'$  направляющие косинусы имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_{x'x} &= 1, \\ \lambda_{x'y} &= 0, \\ \lambda_{x'z} &= 0.\end{aligned}\quad (11.19)$$

Направляющие косинусы оси  $y'$  выражаются через координаты различных узловых точек. Выражения

$$\begin{aligned}\lambda_{y'z} &= 0, \\ \lambda_{y'y} &= + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}, \\ \lambda_{y'x} &= + \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}\end{aligned}\quad (11.10)$$

представляют собой простые геометрические соотношения, которые получаются из рассмотрения вертикальной секущей плоскости, проходящей через точки  $ij$ .

Рассматривая то же сечение, для оси  $z'$  получаем

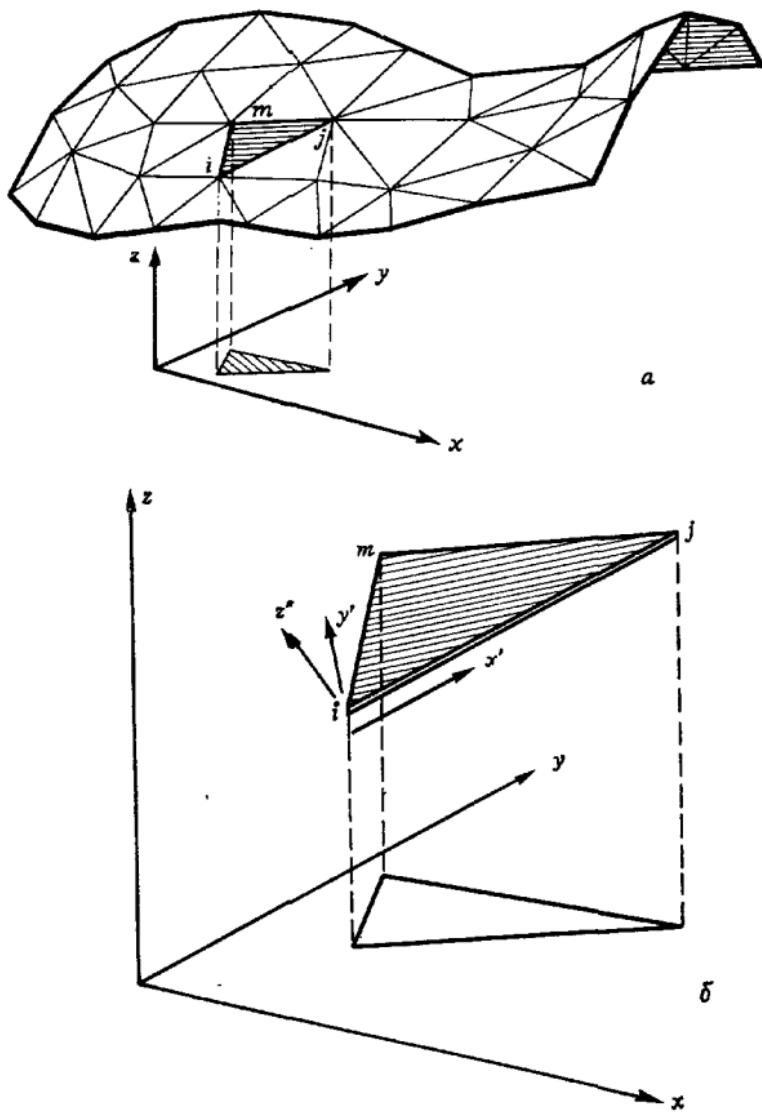
$$\begin{aligned}\lambda_{z'x} &= 0, \\ \lambda_{z'y} &= - \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}, \\ \lambda_{z'z} &= + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}.\end{aligned}\quad (11.21)$$

Ясно, что для сохранения правильных знаков выражений важен порядок нумерации узловых точек.

### 11.5.2. Произвольно ориентированные в пространстве треугольные элементы

На фиг. 11.5, а показана произвольная оболочка, разбитая на треугольные элементы. Все элементы ориентированы по отношению к координатным плоскостям совершенно произвольно. Определить локальные оси и их направляющие косинусы в этом случае значительно сложнее, чем в предыдущем более простом примере. Проще всего эта задача решается с использованием векторной алгебры; читателям, которые успели забыть ее основы, полезно обратиться к приложению 5.

Направление одной из локальных осей произвольно, и ее выбор должен быть сделан заранее. Будем считать, что ось  $x'$  направлена вдоль стороны  $lj$  треугольника, как показано на фиг. 11.5, б.



Фиг. 11.5.

*а*—ансамбль треугольных элементов, аппроксимирующий произвольную оболочку; *б*—локальные и глобальные координаты для треугольного элемента.

Эта сторона определяется вектором  $V_{ij}$  с глобальными координатами:

$$V_{ij} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix}. \quad (11.22)$$

Направляющие косинусы получаются делением компонент этого вектора на его длину, т. е. в виде компонент вектора единичной длины:

$$\mathbf{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ \lambda_{x'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{II}} \begin{Bmatrix} x_{II} \\ y_{II} \\ z_{II} \end{Bmatrix}, \quad (11.23)$$

где

$$l_{II} = \sqrt{x_{II}^2 + y_{II}^2 + z_{II}^2}.$$

Здесь для краткости положено  $x_{II} = x_j - x_i$  и т. д.

Направим ось  $z'$  перпендикулярно плоскости треугольника. Это направление в соответствии со свойствами векторного произведения можно определить как векторное произведение двух сторон треугольника

$$\mathbf{V}_{z'} = \mathbf{V}_{II} \times \mathbf{V}_{Im} = \begin{Bmatrix} y_{II}z_{mi} - z_{II}y_{mi} \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad (11.24)$$

т. е. нормальным к плоскости треугольника вектором, длина которого по определению (см. приложение) равна удвоенной площади треугольника. Таким образом,

$$l_{z'} = \sqrt{(y_{II}z_{mi} - z_{II}y_{mi})^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2} = 2\Delta.$$

Направляющие косинусы оси  $z'$  получаются просто как направляющие косинусы вектора  $\mathbf{V}_{z'}$ ; их можно представить в виде единичного вектора

$$\mathbf{v}_{z'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{z'y} \\ \lambda_{z'z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} y_{II}z_{mi} - z_{II}y_{mi} \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix}. \quad (11.25)$$

Наконец, направляющие косинусы оси  $y'$  получаются как направляющие косинусы вектора, нормального одновременно к осям  $x'$  и  $z'$ . Так как векторы единичной длины в каждом из этих направлений фактически определены соотношениями (11.23) и (11.25), имеем

$$\mathbf{v}_{y'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{y'x} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{y'z} \end{Bmatrix} = \mathbf{v}_{z'} \times \mathbf{v}_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{z'y}\lambda_{x'z} - \lambda_{z'z}\lambda_{x'y} \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (11.26)$$

без деления на длину, которая в данном случае равна единице.

Все векторные операции можно записать в виде специальной подпрограммы, автоматически осуществляющей векторное умножение, нормировку (т. е. деление на длину) и т. д. [19], по-

этому нет необходимости подробно останавливаться на выполнении описанных выше операций.

Ранее предполагалось, что ось  $x'$  направлена вдоль одной из сторон элемента. Иногда бывает полезно направить ее по линии пересечения плоскости треугольника с плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей. Так, например, если желательно направить ось  $x'$  вдоль горизонтальной стороны треугольника (т. е. параллельно плоскости  $xy$ ), можно поступить следующим образом.

Во-первых, направляющие косинусы  $v_{z'}$  определяются по соотношению (11.25).

Матрица направляющих косинусов оси  $x'$  должна теперь иметь нулевую компоненту в направлении  $z$ . Таким образом, имеем

$$v_{x'} = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{x'y} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.27)$$

Поскольку длина вектора равна единице:

$$\lambda_{x'x}^2 + \lambda_{x'y}^2 = 1, \quad (11.28)$$

а скалярное произведение векторов  $v_{x'}$  и  $v_{z'}$  должно быть равно нулю, можно записать

$$\lambda_{x'x} \cdot \lambda_{z'x} + \lambda_{x'y} \cdot \lambda_{z'y} = 0. \quad (11.29)$$

Эти два уравнения позволяют единственным образом определить вектор  $v_{y'}$ . Наконец, как и раньше,

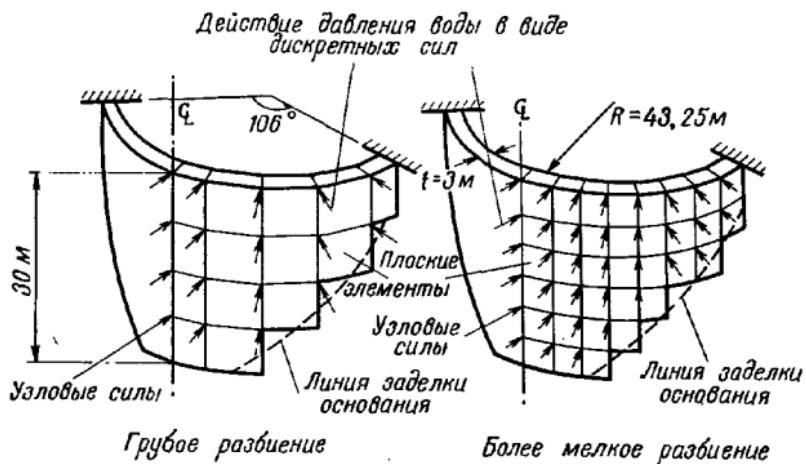
$$v_{y'} = -v_{x'} \times v_{z'} \quad (11.30)$$

Еще один способ однозначного определения оси  $x'$  описан в гл. 14.

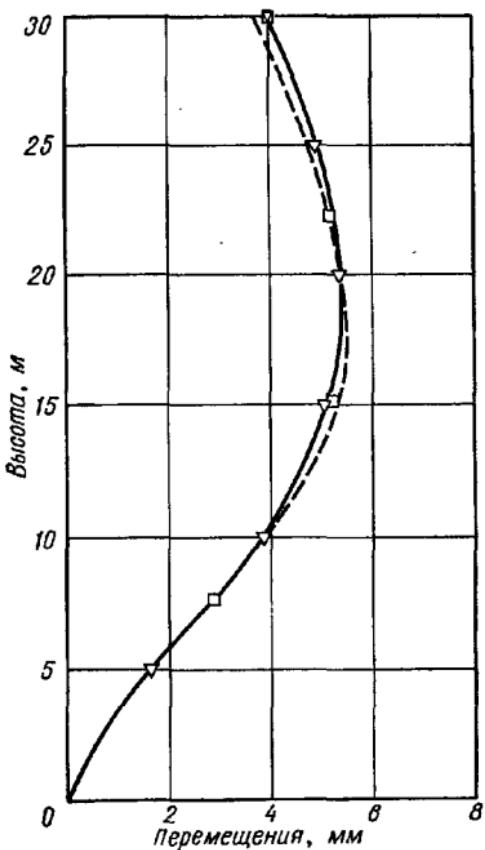
## 11.6. Некоторые практические примеры

Первый пример посвящен расчету оболочки арочной плотины. Для расчета взята простая геометрическая конфигурация, показанная на фиг. 11.6, что позволило применить различные численные методы и провести сравнение с результатами экспериментов на моделях. Благодаря цилиндрической форме оболочки использовались прямоугольные элементы, хотя линия жесткого основания аппроксимировалась при этом довольно грубо.

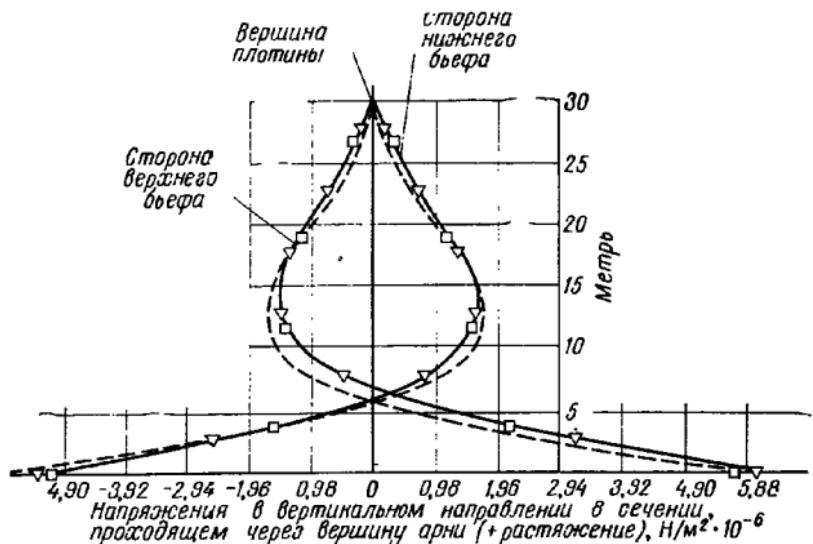
Расчеты проводились для двух размеров элементов. Результаты расчета прогиба и напряжений на оси симметрии, приведенные на фиг. 11.7—11.9, показывают, что использование более



Фиг. 11.6. Арочная плотина как совокупность прямоугольных элементов.

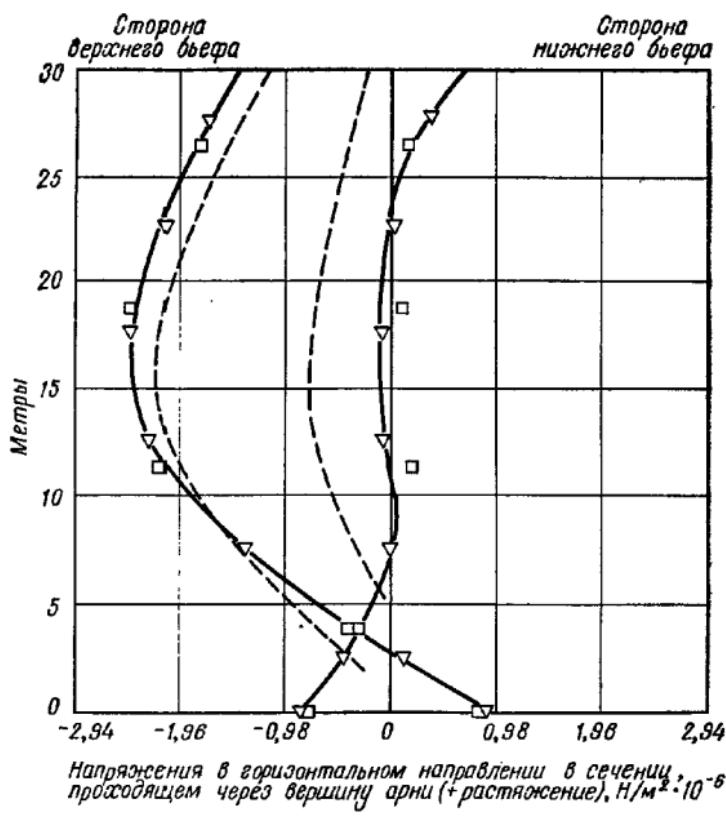


Фиг. 11.7. Арочная плотина. Горизонтальные перемещения центральной линии.  
 □ решение методом конечных элементов (крупная сетка); ▽ решение методом конечных элементов (мелкая сетка); —— решение методом пробных нагрузок (USBR). (Коэффициент Пуассона  $\nu=0,15$ .)



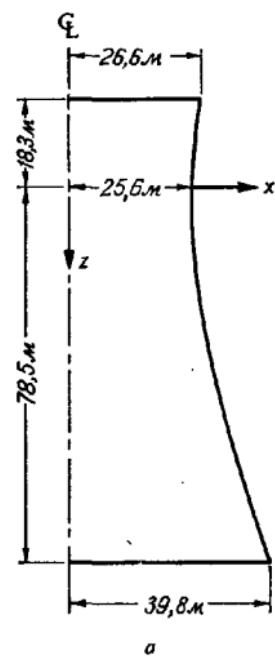
Фиг. 11.8. Арочная плотина. Напряжения в вертикальном направлении на центральной линии.

□ решение методом конечных элементов (крупная сетка); △ решение методом конечных элементов (мелкая сетка); —— решение методом пробных нагрузок (USBR), (Коэффициент Пуассона  $\gamma = 0,15$ .)

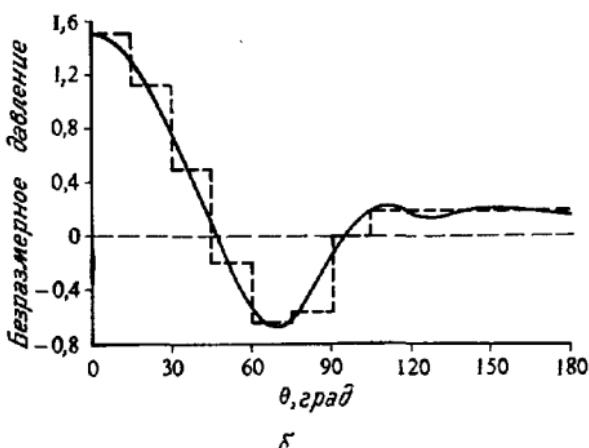


Фиг. 11.9. Арочная плотина. Напряжения в горизонтальном направлении (вдоль дуги арки) на центральной линии.

мелкого разбиения дает незначительное уточнение. Это свидетельствует о том, что физическая аппроксимация реальной формы плоскими элементами и математическая аппроксимация при использовании метода конечных элементов дают хорошие результаты. Для сравнения на рисунках показаны напряжения и прогибы, полученные другим приближенным численным методом.



a



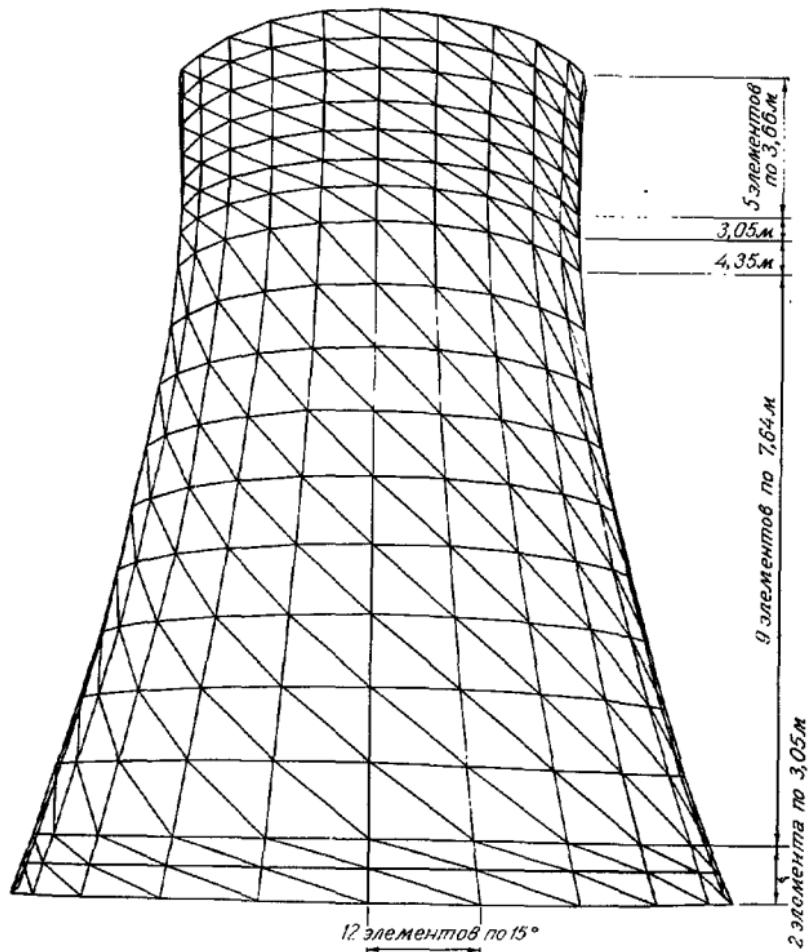
б

Фиг. 11.10. Градирня [21]. Закон изменения давления по окружности.  
— действительные значения; — предполагаемые значения.

С помощью плоских треугольных элементов аналогично была рассчитана арочная плотина двойной кривизны. Результаты показали даже несколько лучшую аппроксимацию [6].

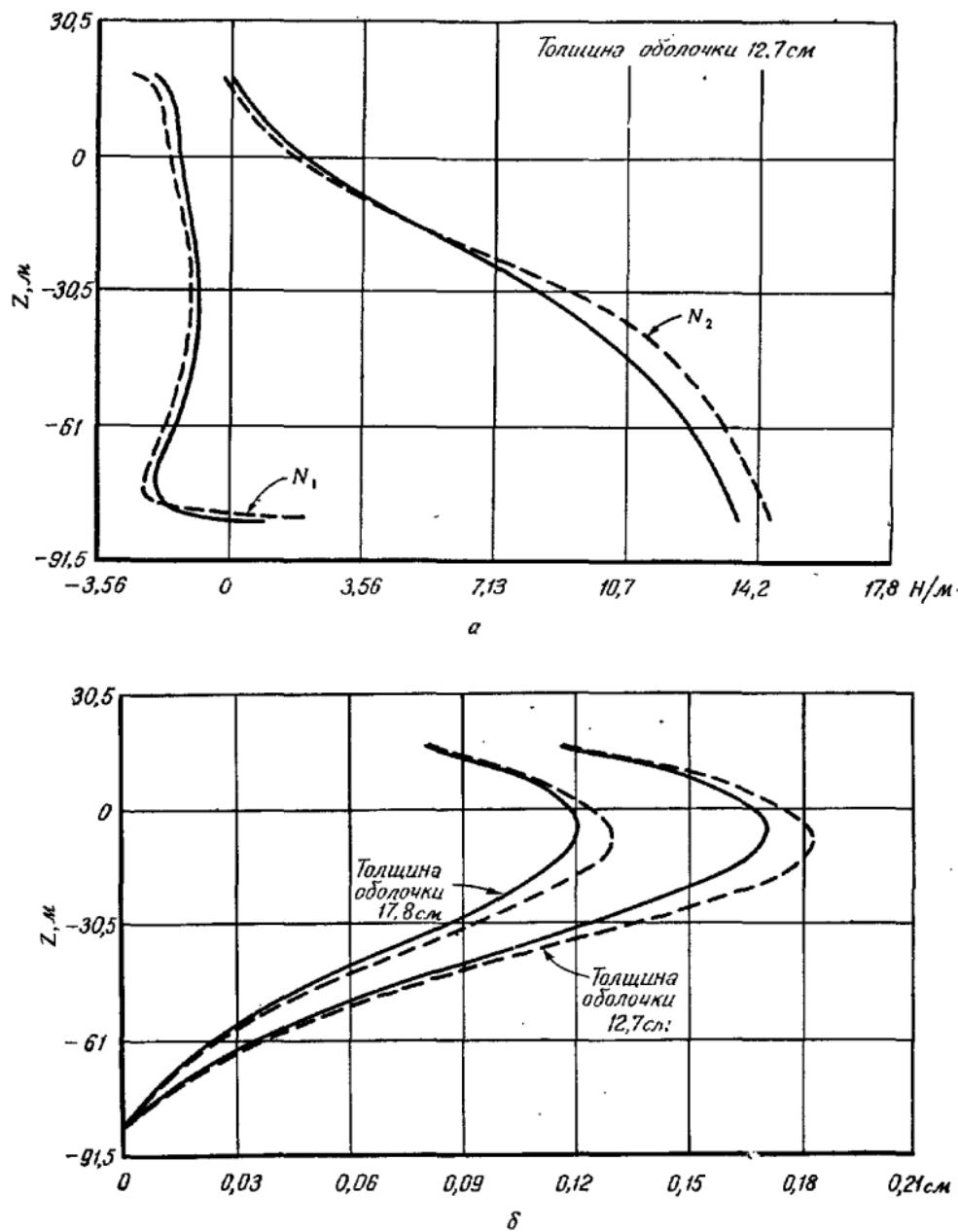
Решение большого числа задач с треугольными несогласованными элементами Парехом [20] показало, что при одинаковом числе разбиений такие элементы приводят к лучшим результатам, чем согласованные треугольные элементы, использованные Клухом и Джонсоном [5]. Ниже приведены некоторые примеры расчета.

**Градирня.** Эта задача относится к классу осесимметричных. Очевидно, что более эффективно ее рассчитывать методами, изложенными в гл. 12 и 13. Однако здесь этот пример использует-



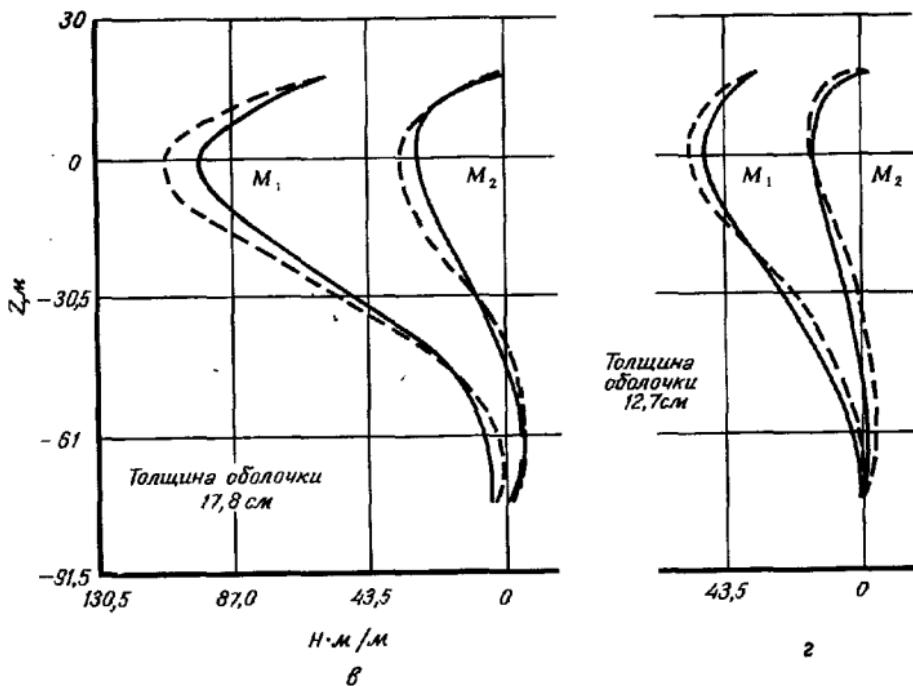
Фиг. 11.11. Градирня. Конечные элементы.

— метод конечных элементов; — решение Албазини и Мартини.



Фиг. 11.12. Градирня, изображенная на фиг. 11.11.

$a$  — мембранные силы при  $\theta=0^\circ$ ,  $N_1$  — тангенциальные силы,  $N_2$  — меридиональные силы;  
 $b$  — радиальные перемещения при  $\theta=0^\circ$ ;  $a, \sigma$  — изгибающие моменты при  $\theta=0^\circ$ ,  $M_1$  — тангенциальный момент,  $M_2$  — меридиональный момент. — метод конечных элементов;  
 — решение Албазини и Мартина,



Фиг. 11.12. Продолжение.

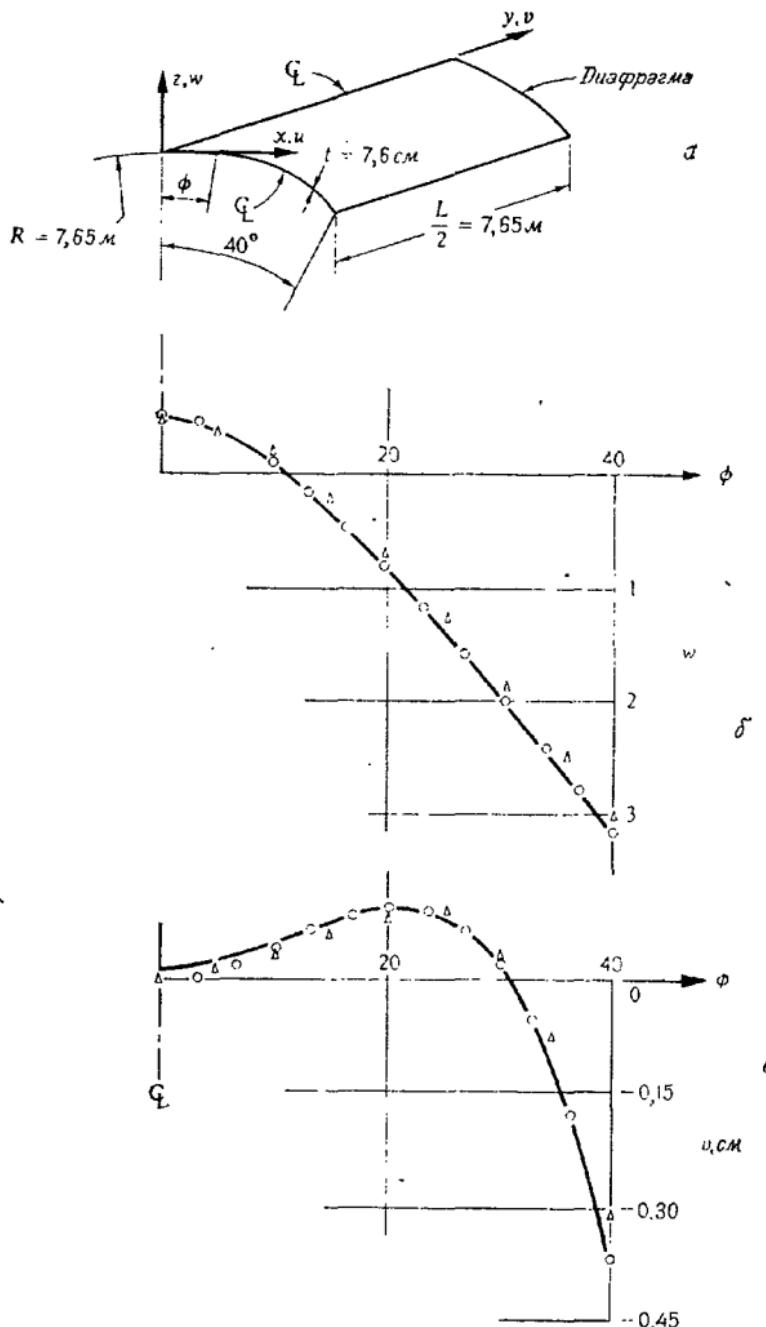
ся как хорошая иллюстрация достижимой точности. Результаты численного решения сравниваются с данными Албазини и Мартина [21]. На фиг. 11.10—11.12 показаны использованное разбиение и некоторые результаты. Рассматривалась несимметричная ветровая нагрузка.

**Цилиндрический свод.** Оболочка такого типа, часто используемая в гражданском строительстве, обычно рассчитывается методом Скордели и Ло [22]. Оболочка опирается на жесткие диафрагмы и нагружена собственным весом. На фиг. 11.13 и 11.14 сравниваются некоторые результаты.

**Складчатая конструкция из пластин.** Так как точное решение этой задачи неизвестно, сравнение проводилось с экспериментальными данными Марка и Риза [23].

Это пример задачи, для которой конечно-элементное представление физически точно. Жесткость каркаса при расчете учитывалась введением элементов балочного типа. На фиг. 11.15 и 11.16 приведены результаты решения.

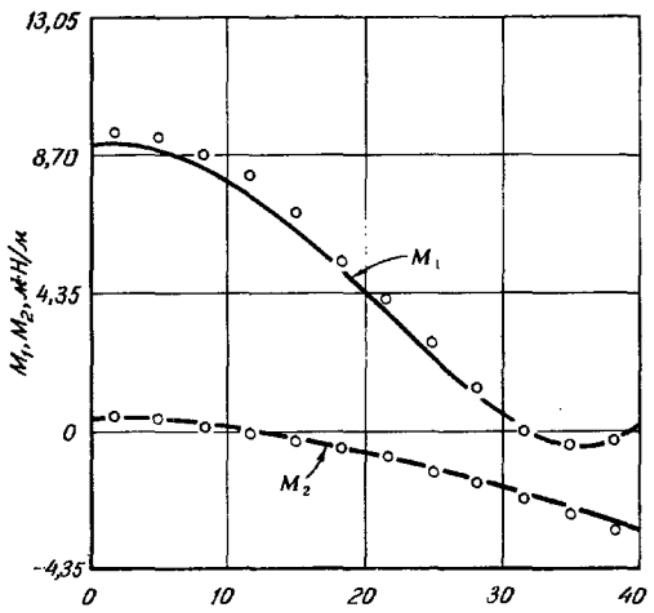
**Оболочка произвольной формы.** На фиг. 11.17 и 11.18 представлен пример расчета оболочки довольно общей формы, опертой по центру. Чтобы показать влияние кривизны, проведено сравнение данных для тарельчатой оболочки и пластины.



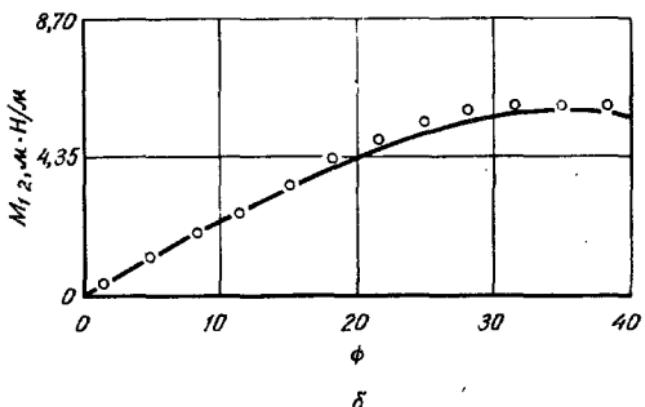
Фиг. 11.13.

*a*—цилиндрический свод под действием собственного веса.

Результаты расчета методом конечных элементов и точное решение [22]: *б*—вертикальное перемещение центрального сечения; *в*—продольное перемещение опоры.  $E = 2,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $v = 0$ , погонный вес оболочки  $4,27 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ , — аналитическое решение;  $\Delta$  сетка  $8 \times 12$ ;  $\square$   $12 \times 18$ .



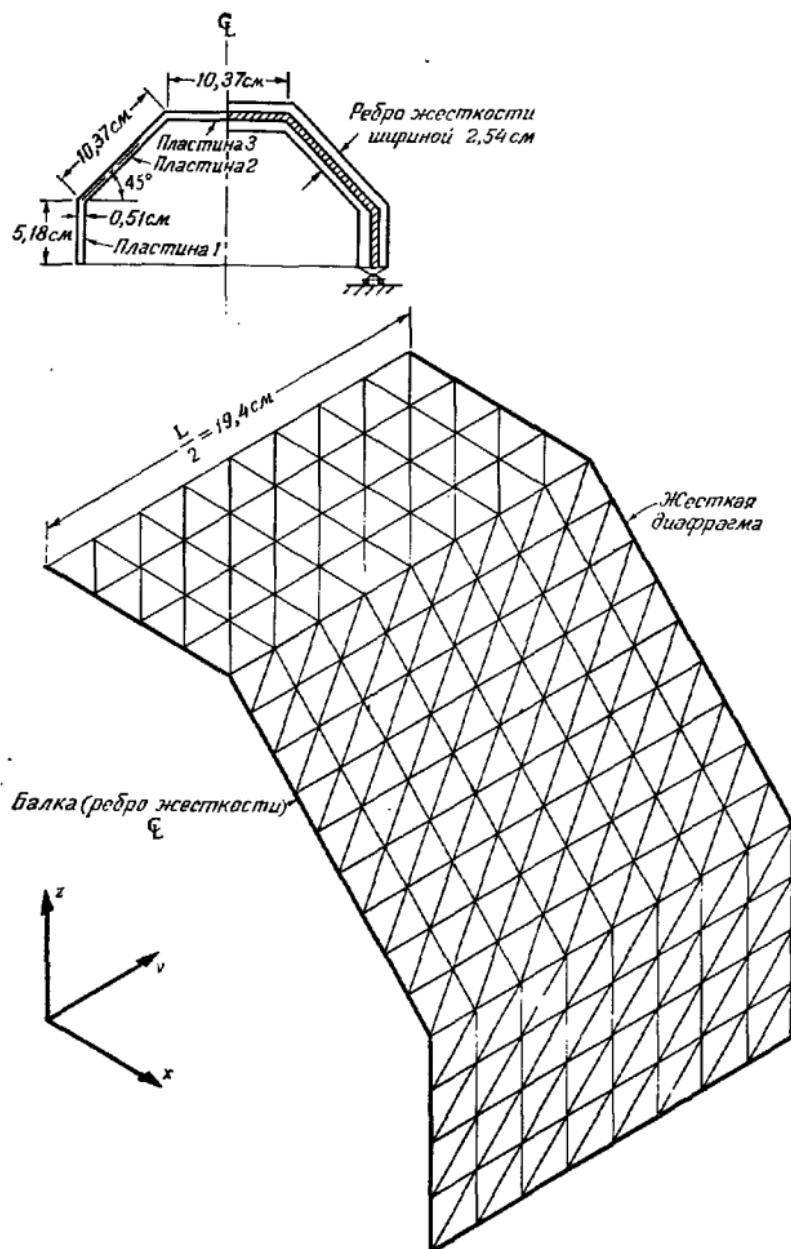
а



б

Фиг. 11.14. Свод, изображенный на фиг. 11.13.

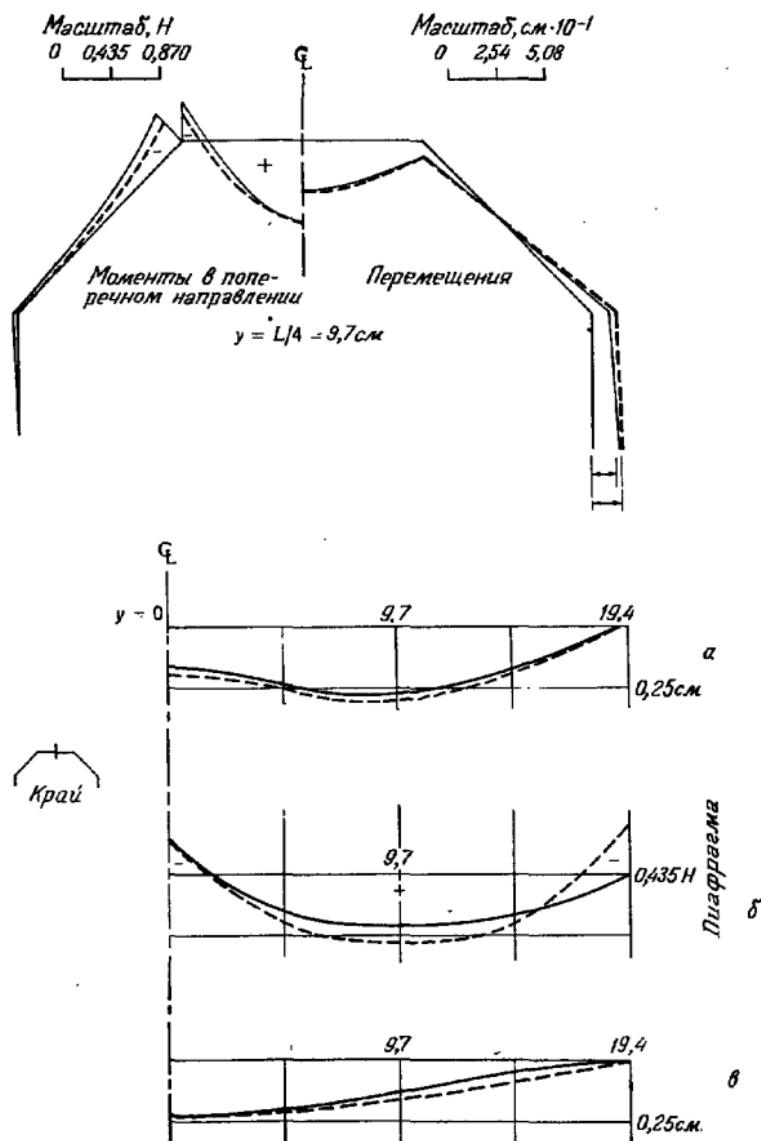
мент в косоугольном направлении;  $M_2$  — момент в продольном направлении в центральном сечении;  $M_{12}$  — крутящий момент на опоре.



Фиг. 11.15. Складчатая конструкция из пластин [23]. Расчетная схема, нагружение и сетка элементов.

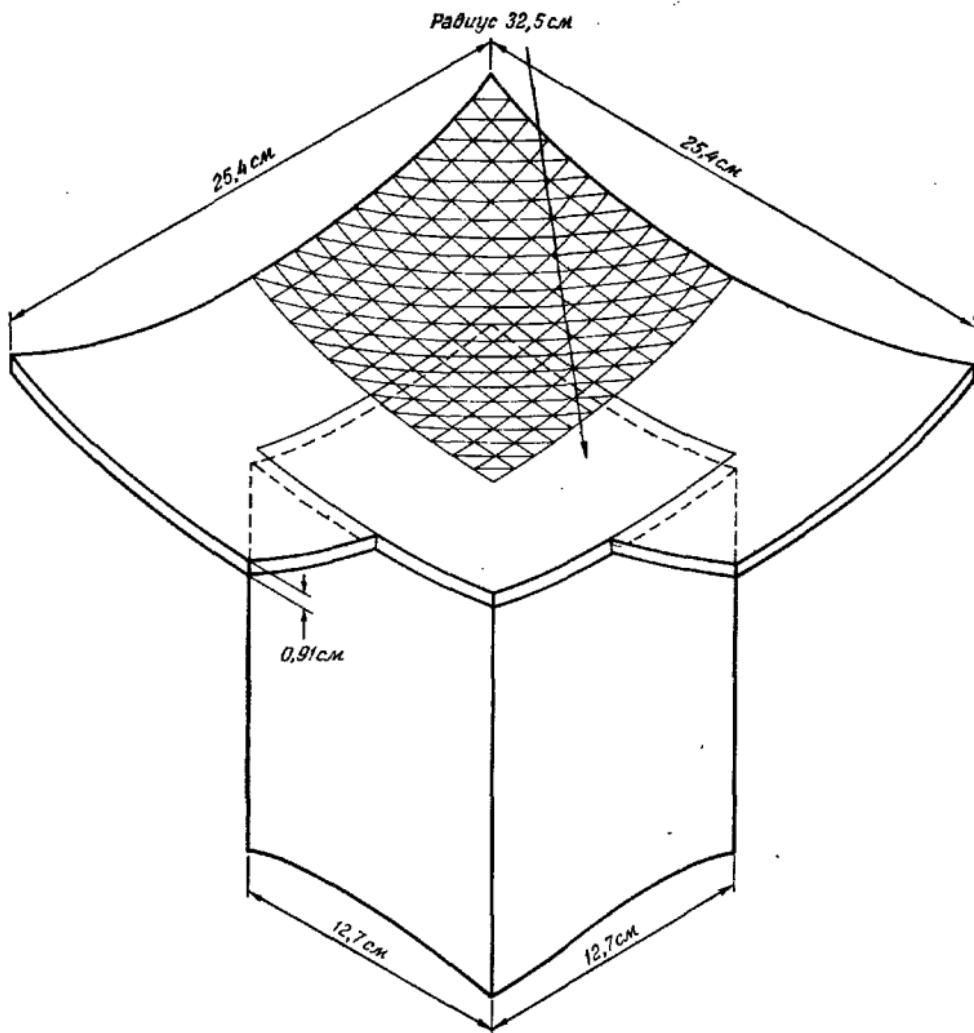
$E = 2,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,43$ . —— экспериментальные результаты; — решение методом конечных элементов.

Пластина	Вертикальная нагрузка, $\text{Н/м}^2$
1	60,6
2	60,6
3	86,8

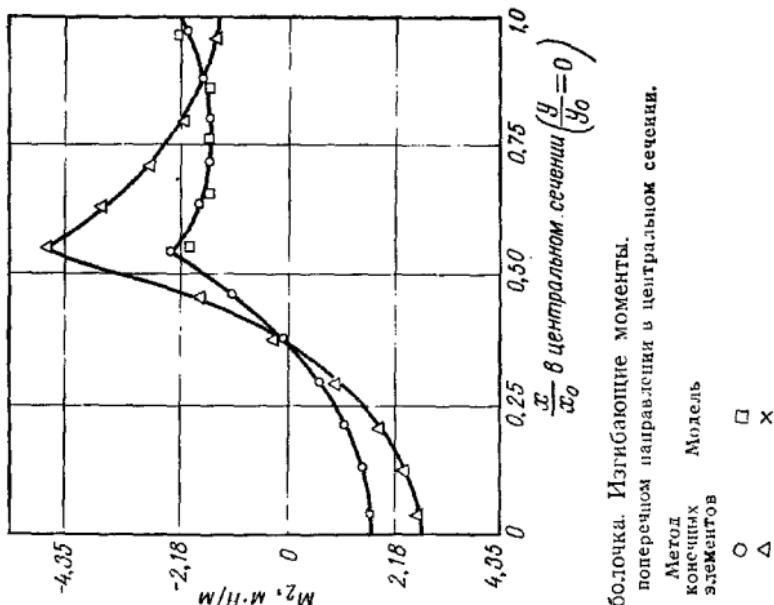


Фиг 11.16. Складчатая конструкция из пластин [23]. Моменты и перемещения в центральном сечении.

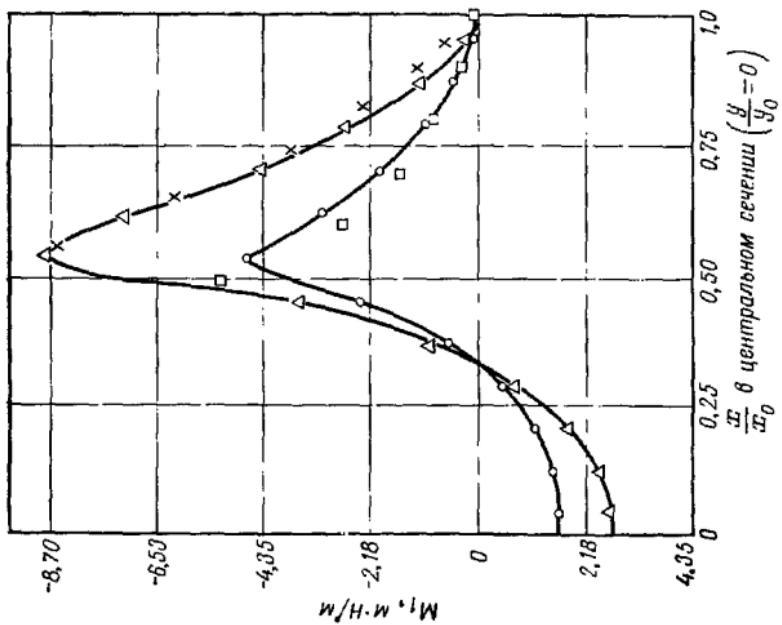
*а*—вертикальные перемещения верхней части; *б*—моменты в продольном направлении в верхней части; *в*—горизонтальные перемещения края.



Фиг. 11.17. Квадратная тарельчатая оболочка (модель).  
 $E = 6,74 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,5$ , равномерно распределенная нагрузка  $6,74 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$ .



Фиг. 11.18. Квадратная тарельчатая оболочка. Изгибающие моменты.  
 $M_1$  — момент в продольном направлении,  $M_2$  — момент в поперечном направлении в центральном сечении.



Сферическая оболочка	Пластична	Метод конечных элементов	Модель
○	△	□	×

## 11. 7. Сходимость

Матрицы для мембранных напряжений (гл. 4) определялись в предположении непрерывности перемещений между соседними элементами. В элементах, работающих на изгиб (гл. 10), условие непрерывности также выполнялось, хотя было показано, что даже при нарушении условий непрерывности производной результаты получаются достаточно хорошими.

Функции перемещений, удовлетворяющие условиям непрерывности между элементами, лежащими в одной плоскости, в общем случае будут давать разрывные перемещения, если происходит сдвиг плоскостей элементов. Таким образом, конечноЭлементная аппроксимация, использовавшая в настоящей главе, всегда основана на несогласованных функциях перемещений и ее сходимость можно подтвердить только экспериментально.

Если в реальной оболочке разрывов не возникает, то при уменьшении размеров элементов несогласованность становится меньше и ошибки аппроксимации реальной формы плоскими элементами и использования несогласованных функций исчезают.

Размеры разбиения, необходимого для получения приемлемой точности в задачах теории оболочек, зависят от многих причин. Часто оказывается, что при малой толщине оболочки область действия изгибающих моментов ограничена краевой зоной, где происходит эпачительное изменение этих моментов. При этом мембранные силы вычисляются точно даже при очень грубом разбиении, но, чтобы уловить изменение моментов вблизи границ, требуется крайне мелкое разбиение. Однако для исследования краевого эффекта разработаны относительно простые приближенные аналитические методы, поэтому метод конечных элементов применяется главным образом для решения задач об оболочках средней толщины с различного рода неправильностями, вырезами и т. д., в которых учет изгиба так же важен, как и учет мембранных сил.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Flügge W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
2. Greene B. E., Strome D. R., Weikel R. C., Application of the Stiffness Method to the Analysis of Shell Structures, Proc. Aviation Conf., Amer. Soc. Mech. Eng., Los Angeles, March 1961.
3. Clough R. W., Tocher J. L., Analysis of Thin Arch Dams by the Finite Element Method, in: Proc. Symp. on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, 1965).
4. Argyris J. H., Matrix Displacement Analysis of Anisotropic Shells by Triangular Elements, *J. Roy. Aer. Soc.*, **69**, 801–805 (Nov. 1965).
5. Clough R. W., Johnson C. P., A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells, *J. Solids and Struct.*, **4**, 43–60 (1968).

6. Zienkiewicz O. C., Parekh C. J., King I. P., Arch Dams Analysed by a Linear Finite Element Shell Solution Program, Proc. Symp. Arch Dams., Inst. Civ. Eng., London, 1968.
7. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Finite Element Procedures in the Solution of Plate and Shell Problems, Ch. 8 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds., Wiley, 1965.
8. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures, Proc. of Symp. on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, 1965).
9. Bogner F. K., Fox R. L., Schmidt L. A., A Cylindrical Shell Element, *JAIAA*, 5, 745—750 (1967); есть русский перевод: Богнер, Фокс, Шмит, Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов, *Ракетная техника и космонавтика*, 5, № 4, стр. 170—175 (1967).
10. Contin G., Clough R. W., A Refined, Curved, Cylindrical Shell Element, *AIAA Conf.*, Paper 68-176, N. Y., 1968.
11. Bonnes G., Dhatt G., Giroux Y. M., Robichaud L. P. A., Curved Triangular Elements for Analysis of Shells, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
12. Strickland G. E., Loden W. A., A Doubly Curved Triangular Shell Element, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
13. Greene B. E., Jones R. E., Strome D. R., Dynamic Analysis of Shells Using Doubly Curved Finite Elements, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
14. Connor J., Brebbia C., Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Element, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 93, EM 43—65 (1967).
15. Carr A. J., A Refined Finite Element Analysis of Thin Shell Structures Including Dynamic Loading, SEL Rept. № 67—9, Univ. of California, Berkeley, 1967.
16. Cowper G. R., Lindberg G. M., Olson M. D., A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape, *J. Solids and Structs.*, 6, 1133—1156 (1970).
17. Utku S., Stiffness Matrices for Thin Triangular Elements of Non Zero Gaussian Curvature, *JAIAA*, 5, 1659—1667 (1967); есть русский перевод: Утку, Матрица жесткостей для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны, *Ракетная техника и космонавтика*, 5, № 9, стр. 150—159 (1967).
18. Ahmad S., Curved Finite Elements in the Analysis of Solid Shell and Plate Structures, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
19. Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., A Simple Matrix-Vector Handling Scheme for Three Dimensional and Shell Analysis, *In. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 509—522 (1970).
20. Parekh C. J., Finite Element Solution System, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
21. Albasiny E. L., Martin D. W., Bending and Membrane Equilibrium in Cooling Towers, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 93, FM3, 1—17, (1967).
22. Scordelis A. C., Lo K. S., Computer Analysis of Cylindrical Shells, *J. Am. Concr. Inst.*, 61 (May 1964).
23. Mark R., Riesa J. D., Photoelastic Analysis of Folded Plate Structures, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 93, EM4, 79—83 (1967).

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ОБОЛОЧКИ

### 12.1. Введение

Проблема расчета осесимметричных оболочек имеет большое практическое значение, поэтому в этой главе описаны специальные методы ее исследования.

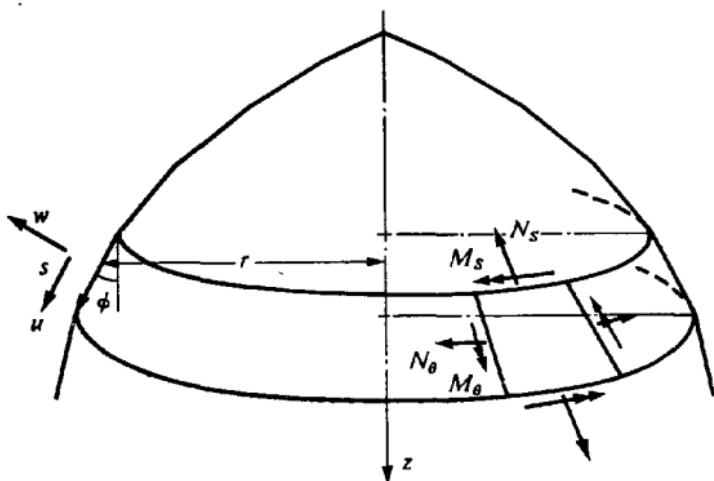
Хотя для расчета таких оболочек применим и общий метод, изложенный в предыдущей главе, за счет учета осевой симметрии конструкции можно достигнуть существенных упрощений. В частности, если и оболочка и нагрузка симметричны, элемент становится одномерным. Этому простейшему типу элемента в предыдущих главах уделялось мало внимания.

Впервые к решению осесимметричных задач метод конечных элементов был применен Графтоном и Строумом [1]. В качестве элементов они рассматривали простые усеченные конусы и использовали метод перемещений. Более строгий вывод матрицы жесткости проведен в работах [1—3], а предложенное Графтоном и Строумом [1] обобщение метода на случай несимметричной нагрузки подробно описано в работах [4—6].

Позднее появилось много работ, посвященных применению криволинейных элементов и улучшению с их помощью используемых аппроксимаций. Привести здесь полный список литературы практически невозможно. В работах [7—10] показываются возможности применения различных криволинейных координат. а в статьях [9, 11] обсуждается использование для повышения точности дополнительных неузловых степеней свободы.

В осесимметричных оболочках, как и в любых других, существуют и изгибные и мембранные усилия. Они однозначно определяются величинами обобщенных деформаций, под которыми в данном случае понимаются растяжения и искривления срединной поверхности. Если перемещения каждой точки срединной поверхности известны, то такие деформации и результирующие внутренних напряжений, или просто напряжения, определяются по формулам, которые можно найти в обычных курсах теории оболочек.

Например, перемещение точки срединной поверхности осесимметричной оболочки (фиг. 12.1), находящейся под действием осесимметричной нагрузки, однозначно определяется двумя компонентами  $u$  и  $w$  по касательной и нормали к поверхности,



Фиг. 12.1. Осесимметрическая оболочка, перемещения и результирующие напряжения. Оболочка представлена в виде набора конических оболочек.

При условии, что угол  $\phi$  не меняется, четыре компонента деформации определяются следующими выражениями [12]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{ds} \\ \frac{w \cos \phi + u \sin \phi}{r} \\ -\frac{d^2 w}{ds^2} \\ -\frac{\sin \phi}{r} \frac{dw}{ds} \end{Bmatrix}. \quad (12.1)$$

Им соответствуют четыре результирующих напряжения, показанные на фиг. 12.1, которые связаны с деформациями матрицей упругости  $[D]$ :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (12.2)$$

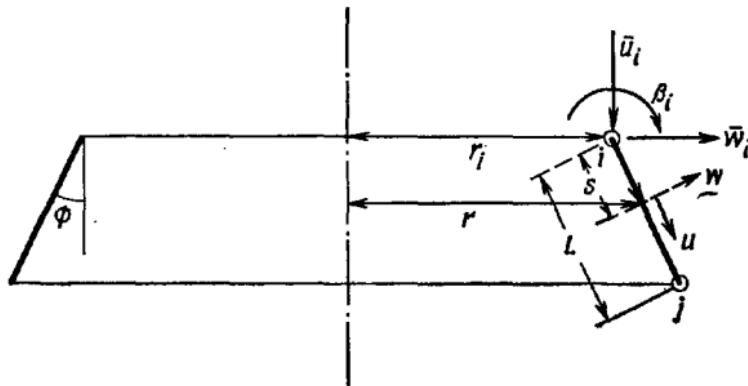
Для изотропной оболочки матрица  $[D]$  имеет вид

$$[D] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & \frac{\nu t^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu t^2}{12} & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix}, \quad (12.3)$$

где верхняя часть ее характеризует действие мембранных усилий, а нижняя представляет собой матрицу изгибных жесткостей, причем сдвиговые члены в обеих частях опущены.

## 12.2. Характеристики элемента. Оссесимметричные нагрузки. Прямолинейные элементы

Пусть узловыми поверхностями оболочки разбита на ряд усеченных конусов (фиг. 12.2). Перемещения узловых точек  $i$  и



Фиг. 12.2. Элемент осесимметричной оболочки.

$j$  однозначно определяют деформации элемента через заданную функцию перемещений.

В каждой узловой точке задаются осевое и радиальное смещение и поворот. Поскольку оболочка работает на изгиб, необходимы все эти три компоненты. Таким образом, перемещение точки  $i$  определяется тремя компонентами, причем первые две соответствуют глобальным координатам

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}. \quad (12.4)$$

Следовательно, элемент с двумя узлами  $i, j$  имеет шесть степеней свободы, которыми являются перемещения элемента

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \quad (12.5)$$

Перемещения внутри элемента должны единственным образом определяться перемещениями узловых точек  $\{\delta\}^e$  и координатой  $s$  и удовлетворять условиям непрерывности углов накло-

на и перемещений

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e. \quad (12.6)$$

Если положить, что  $u$  зависит от  $s$  линейно, а  $w$  является полиномом третьей степени от  $s$ , то получим шесть неизвестных постоянных, которые можно определить по узловым значениям  $u$ ,  $w$  и  $\beta$ .

В узле  $i$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = [\lambda] \{\delta_i\}. \quad (12.7)$$

Записывая

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 s, \\ w &= a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3, \end{aligned} \quad (12.8)$$

легко составить шесть уравнений и найти<sup>1)</sup>

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} 1-s' & 0 \\ \hline 0 & 1-3s'^2+2s'^3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & s' \\ \hline L(s'-2s'^2+s'^3) & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 3s'^2-2s'^3 & (-s'^2+s'^3)L \end{array} \right] \times \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \\ u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \end{Bmatrix}, \quad (12.9)$$

где

$$s' = \frac{s}{L}.$$

Обозначая через  $[N']$  матрицу размерности  $2 \times 6$ , можно записать

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N'] \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e = [[N'_1][\lambda], [N'_2][\lambda]] \{\delta\}^e = [N] \{\delta\}^e. \quad (12.10)$$

<sup>1)</sup> Функции, которые при этом появляются, представляют собой полиномы Эрмита нулевого и первого порядков (см. разд. 10.14).

Используя определение (12.1), нетрудно по (12.10) получить матрицу деформаций  $[B]$ :

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e = [[B_i][\lambda], [B_j][\lambda]]\{\delta\}^e, \quad (12.11)$$

где

$$[B_i] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{(1-s')\sin\phi}{r} & \frac{(1-3s'^2+2s'^3)\cos\phi}{r} & \frac{L(s'-2s'^2+s'^3)\cos\phi}{r} \\ 0 & \frac{(6-12s')}{L^2} & \frac{(4-6s')}{L} \\ 0 & \frac{(6s'-6s'^2)\sin\phi}{rL} & \frac{(-1+4s'-3s'^2)\sin\phi}{r} \end{bmatrix},$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{s'\sin\phi}{r} & \frac{(3s'^2-2s'^3)\cos\phi}{r} & \frac{L(-s'^2+s'^3)\cos\phi}{r} \\ 0 & \frac{(-6+12s')}{L^2} & \frac{(2-6s')}{L} \\ 0 & \frac{(-6s'+6s'^2)\sin\phi}{rL} & \frac{(2s'-3s'^2)\sin\phi}{r} \end{bmatrix}. \quad (12.12)$$

Теперь известны все составляющие, необходимые для составления матрицы жесткости (или матрицы нагрузки, перемещений, напряжений и начальных напряжений) по стандартным формулам гл. 2. Интегрировать надо по площади  $A$  элемента, т. е.

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r L ds', \quad (12.13)$$

где  $s'$  изменяется от 0 до 1.

Следовательно, в соответствии с (2.10) имеем

$$[k] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2\pi r L ds'. \quad (12.14)$$

Типичная подматрица  $[k_{rs}]$  этой матрицы имеет вид

$$[k_{rs}] = [\lambda]^T \left( \int_0^1 [B_r]^T [D] [B_s] r ds' \right) [\lambda] 2\pi L. \quad (12.15)$$

Перед интегрированием необходимо выразить радиус  $r$  через  $s$ .

Как и раньше, удобно использовать численное интегрирование. В работе Графтона и Строума [1] приведены явные выражения для матрицы жесткости, полученные на основе вычисления

лишь одного среднего значения подынтегральной функции и при использовании матрицы  $[D]$  ортотропного материала. Даже такая грубая аппроксимация позволяет получить очень хорошие результаты при условии, что размеры элементов малы.

Перси и др. [4] и Клейн [5] провели численное интегрирование по семи точкам и получили несколько улучшенную матрицу, хотя она и не приведена в явном виде.

Следует помнить, что если заданы действующие по окружности нагрузки или моменты, то в расчеты должно закладываться их полное окружное значение, так же как это делалось в случае осесимметричных тел, рассмотренных в гл. 5.

### 12.3. Примеры и точность

Для рассматриваемых здесь осесимметричных оболочек условия непрерывности выполняются. Поэтому для полигональных оболочек всегда будет наблюдаться сходимость.

Проблема аппроксимации криволинейной оболочки полигональной аналогична проблеме, рассмотренной в гл. 11. Числовые расчеты подтверждают ожидаемую сходимость.

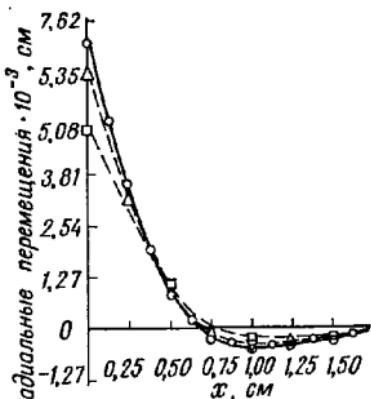
Когда нагрузка вызывает в основном мембранные напряжения, даже при достаточно мелком разбиении наблюдается некоторое расхождение в значениях изгибающих моментов. Однако с дальнейшим уменьшением размеров разбиения оно исчезает, особенно если при расчете значения моментов усредняются. Это необходимо делать для исключения влияния замены оболочки набором усеченных конусов. На фиг. 12.3 и 12.4 показано несколько типичных примеров, взятых из работы Графтона и Строуза [1].

### 12.4. Криволинейные элементы и их функции формы

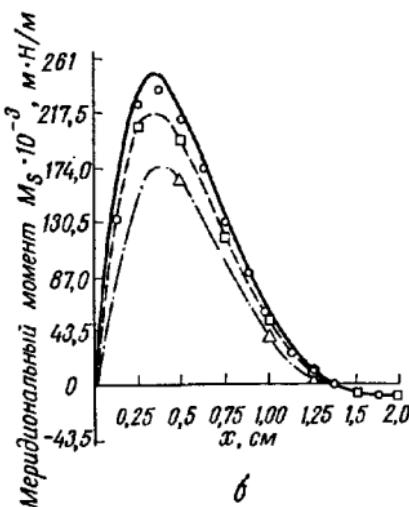
В гл. 8 уже рассматривались искривленные (криволинейные) элементы, причем в выражение для деформации входили только первые производные. В данном случае это выражение содержит вторые производные [см. (12.1)], и поэтому некоторые теоремы гл. 8 здесь неприменимы.

Ранее упоминалось, что для исследования осесимметричных оболочек предложено множество криволинейных элементов [7—10]. Элемент, описанный здесь, получен Айронсом и Делпаком [9]; в соответствии с терминологией гл. 8 он относится к элементам субпараметрического типа.

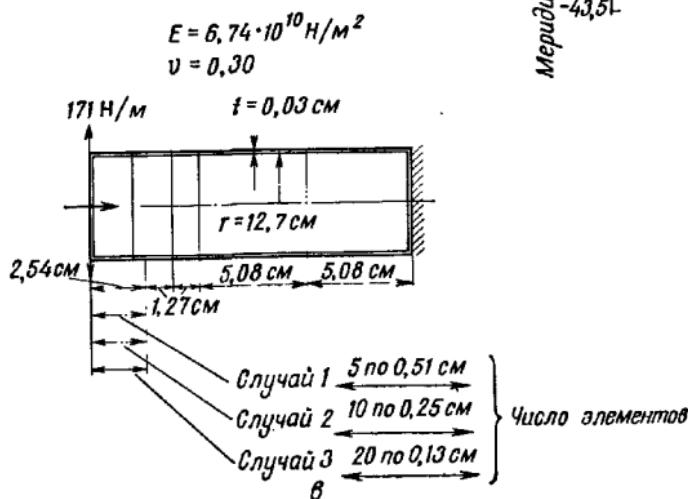
Основой для определения криволинейного элемента служит общая касательная между смежными элементами (или заданное направление касательной). Это необходимо, чтобы избежать «изломов» при описании практически гладкой оболочки.



*a*



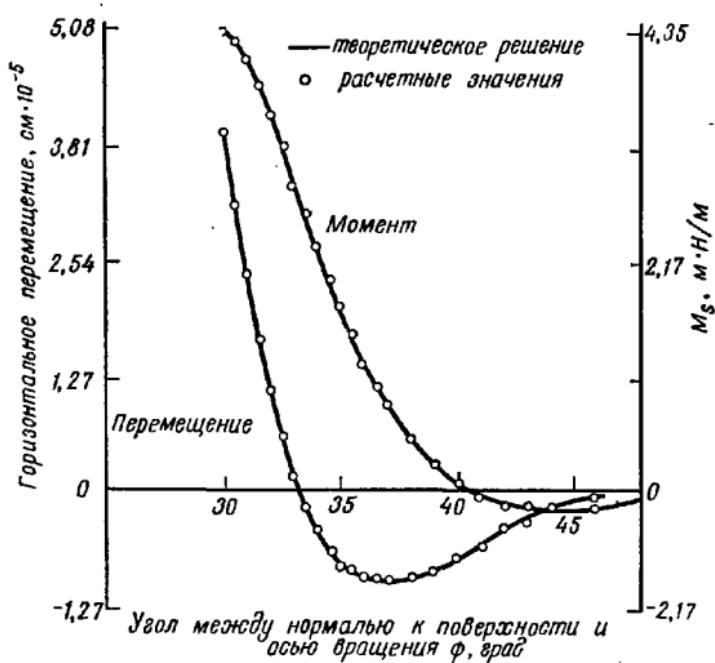
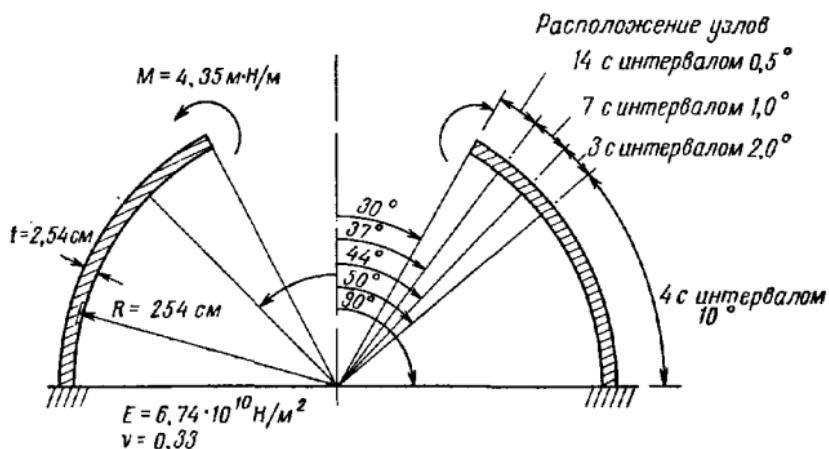
*b*



Фиг. 12.3. Расчет цилиндрической оболочки методом конечных элементов (Графто и Строум, JAIAA, 1963).

*a:* — теоретическое решение;  $\Delta$  случай 1, ошибка определения максимального перемещения 31,7%;  $\square$  случай 2, ошибка определения максимального перемещения 11,1%;  $\circ$  случай 3, ошибка определения максимального перемещения 3,1%.

*b:* — теоретическое решение;  $\Delta$  случай 1, ошибка определения максимального момента 28,8%;  $\square$  случай 2, ошибка определения максимального момента 11,0%;  $\circ$  случай 3, ошибка определения максимального момента 2,5%.



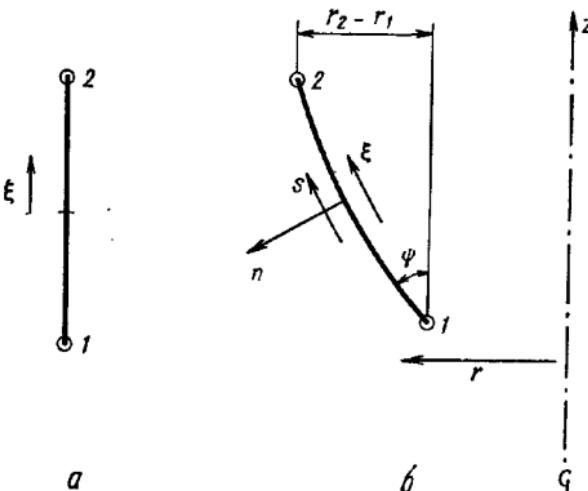
Фиг. 12.4. Расчет полусферической оболочки методом конечных элементов (Графтон и Строум, JAIAA, 1963).

Сначала рассмотрим прямолинейный исходный элемент, для которого неизвестная функция  $\phi$  выражается через свои узловые значения и значения углов наклона в точках 1, 2 (фиг. 12.5). Координата  $\xi$  изменяется от  $-1$  до  $+1$  (как в примере гл. 8).

Используя принятые обозначения, можно записать

$$\phi = \sum_{i=1}^2 \left( N'_i \phi_i + N''_i \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)_i \right) = [N] \{\bar{\phi}\}^e. \quad (12.16)$$

Здесь  $N'$  и  $N''$  — скалярные функции формы, которые при задании в виде полинома имеют третий порядок [как в соотношении (12.9) для  $w$ ].



Фиг. 12.5. Криволинейный изопараметрический элемент оболочки для осесимметричных задач.

*a* — исходный элемент; *b* — криволинейные координаты.

Эти функции записываются в виде

$$\begin{aligned} N'_i &= \frac{1}{4} \{ \xi_0 \xi^2 - 3\xi_0 + 2 \}, \\ N''_i &= \frac{1}{4} (1 - \xi_0)^2 (1 + \xi_0), \end{aligned} \quad (12.17)$$

где  $\xi_0 = \xi \xi$ .

Их можно одновременно использовать и для описания закона изменения глобальных перемещений  $\bar{u}$  и  $\bar{w}^1$ ) и для задания координат  $r$  и  $z$  оболочки (срединной поверхности).

<sup>1)</sup> Отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь обе компоненты перемещений в элементе изменяются по крайней мере по кубическому закону, тогда как ранее допускался линейный закон изменения тангенциального перемещения. Однако при условии, что толщина оболочки изменяется непрерывно, эта дополнительная степень свободы не приводит к чрезмерным требованиям непрерывности.

Если толщина элемента переменная, то и ее закон изменения можно аппроксимировать этими же функциями.

Элемент такого типа будет изопараметрическим (см. гл. 8).

Таким образом, геометрию оболочки можно характеризовать координатами

$$\begin{aligned} r &= \sum_1^2 \left( N'_i r_i + N''_i \left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i \right), \\ z &= \sum_1^2 \left( N'_i z_i + N''_i \left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i \right). \end{aligned} \quad (12.18)$$

При заданных узловых значениях эти соотношения устанавливают взаимно однозначное соответствие между  $\xi$  и положением точки на поверхности криволинейного элемента (фиг. 12.5, б).

Координаты  $r_i$  и  $z_i$  известны, кроме них, на концах известны только углы наклона

$$(\lg \psi)_i = \left( \frac{dr}{dz} \right)_i. \quad (12.19)$$

Значения производных, входящих в (12.18), зависят от масштаба  $\xi$  вдоль касательной  $s$ .

Задано только соотношение

$$\left( \frac{dr}{dz} \right)_i = \left( \frac{dr}{d\xi} \right)_i / \left( \frac{dz}{d\xi} \right)_i. \quad (12.20)$$

Производные  $(dr/d\xi)_i$  или  $(dz/d\xi)$  могут в принципе иметь произвольную величину. Здесь, однако, необходимо учитывать практические соображения, так как при некоторых значениях производных можно получить негладкую зависимость между  $s$  и  $\xi$ . При неудачном выборе кривая может быть негладкой и образовывать петлю между узлами.

Для того чтобы получить достаточно гладкие поверхности, можно положить

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{\Delta r}{\Delta \xi} = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad (12.21)$$

замечая, что длина всего интервала  $\xi$  между узлами равна 2.

## 12.5. Выражения для деформаций и свойства криволинейных элементов

До сих пор речь шла о представлении глобальных перемещений, хотя деформации в соответствии с (12.1) определяются через производные от локальных перемещений по касательной  $s$ .

Поэтому, для того чтобы получить выражения для деформаций, требуется произвести некоторые преобразования.

Если принять, что изменение глобальных перемещений описывается функцией формы (12.16)

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \sum_{i=1}^2 \left( N'_i \bar{u}_i + N''_i \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi} \right)_i \right), \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^2 \left( N'_i \bar{w}_i + N''_i \left( \frac{dw}{d\xi} \right)_i \right),\end{aligned}\quad (12.22)$$

то с помощью преобразования (12.7) легко найти локальные перемещения  $u, w$  в виде

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}, \quad (12.23)$$

где  $\psi$  — угол между касательной к кривой и осью  $z$  (фиг. 12.5). Этот угол надо выразить через координату  $\xi$ . Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \psi = \left( \frac{dr}{d\xi} \right) / \left( \frac{dz}{d\xi} \right), \quad (12.24)$$

и, следовательно, использование формул (12.18) позволит сделать это.

Посмотрим далее, можно ли наложить условия непрерывности в узлах на параметры, входящие в (12.22). Ясно, что глобальные перемещения должны быть непрерывны. Однако в предыдущих случаях требовалась непрерывность только *угла поворота* касательной. Здесь же требуется непрерывность производных от перемещений по  $s$ . Следовательно, величины

$$\frac{d\bar{u}}{ds} \text{ и } \frac{dw}{ds}$$

в узлах смежных элементов должны иметь одинаковые значения.

Поскольку

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{ds} &= \frac{d\bar{u}}{d\xi} / \frac{ds}{d\xi}, \quad \frac{d\bar{w}}{ds} = \frac{d\bar{w}}{d\xi} / \frac{ds}{d\xi}, \\ \frac{ds}{d\xi} &= \sqrt{\left( \frac{dr}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\xi} \right)^2},\end{aligned}\quad (12.25)$$

при подстановке этих новых переменных в выражения (12.22) и (12.23) не возникает никаких трудностей. В результате они при-

нимают вид

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N(\xi)] \{\delta\}^e, \quad \text{где } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \left(\frac{du}{ds}\right)_i \\ \left(\frac{d\bar{w}}{ds}\right)_i \end{Bmatrix}. \quad (12.26)$$

Функция формы состоит из подматриц размерности  $2 \times 4$  и ее можно получить в явном, хотя и довольно сложном виде.

Если рассматриваются оболочки с патрубками или оболочки с резко меняющейся толщиной, то узловые параметры в (12.26) использовать не следует. В этом случае их лучше представить в виде

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \left(\frac{du}{ds}\right)_i \\ \beta_i \end{Bmatrix},$$

где  $\beta_i = dw/ds$  — угол поворота в узле, и связать между собой только три первых параметра. Четвертая величина будет свободным параметром, минимизация по которому производится в обычном порядке. Необходимые преобразования осуществляются с помощью соотношения (12.23).

В выражение для матрицы деформаций  $[B]$ , как видно из определения (12.1), входят и первая и вторая производные по  $s^1$ ). Если вспомнить, что производные легко вычислить по правилам, уже использованным при получении (12.25), то для произвольной функции  $F$  можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \frac{dF}{d\xi} / \frac{ds}{d\xi}, \\ \frac{d^2F}{ds^2} &= \frac{d^2F}{d\xi^2} / \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 - \frac{dF}{d\xi} \left(\frac{d^2s}{d\xi^2}\right) / \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3 \end{aligned} \quad (12.27)$$

и получить все элементы матрицы  $[B]$ .

Наконец, матрица жесткости получается после замены переменных в соотношении (12.14)

$$ds = \frac{ds}{d\xi} d\xi \quad (12.28)$$

и интегрирования в пределах от  $-1$  до  $+1$ .

<sup>1)</sup> Заметим, что здесь  $s$  рассматривается как направление касательной, поэтому  $d\Psi/ds = 0$ .

Как и ранее, функции, входящие в интегралы, не позволяют выполнить интегрирование точно, поэтому обычно используется численное интегрирование. Интегрирование производится только по одной координате, так что оно не требует больших затрат времени, и для достаточно точного вычисления жесткости можно использовать необходимое количество гауссовых точек интегрирования.

Матрицы напряжений и другие матрицы вычисляются аналогично.

Приведенная здесь в общих чертах изопараметрическая формулировка несколько отличается от других [1, 7, 8, 10]. Она обладает тем преимуществом, что позволяет учитывать перемещения элемента как твердого целого и удовлетворяет критерию постоянства первой производной. Доказательство этого проводится так же, как и в разд. 8.5 гл. 8. Другие формулировки допускают деформации при перемещениях элемента как жесткого целого, что, как показано в работе [13], в некоторых случаях не очень опасно. Однако при некоторых видах несимметричных нагрузок (см. гл. 13) этот недостаток может оказаться серьезным препятствием и привести к совершенно неверным результатам.

При применении любых из рассмотренных здесь *конечных* элементов состояние постоянного искривления не только не может быть достигнуто, но и физически невозможно. Однако можно убедиться, что такое состояние достижимо в пределе при уменьшении размеров элемента.

## 12.6. Дополнительные неузловые переменные

Введение дополнительных неузловых переменных при расчете осесимметричных оболочек особенно важно, так как оно позволяет достаточно точно аппроксимировать реальную форму при использовании элементов больших размеров.

Добавление выражения

$$\sum_{i=1}^n N_i''' a_i, \quad (12.29)$$

где  $a_i$  — множество внутренних параметров элемента, а  $N_i'''$  — множество функций, имеющих в узловых точках нулевые значения и нулевые первые производные, к выражениям для нормальных перемещений в (12.26) позволяет значительно улучшить аппроксимацию перемещений без нарушения сходимости (см. гл. 2).

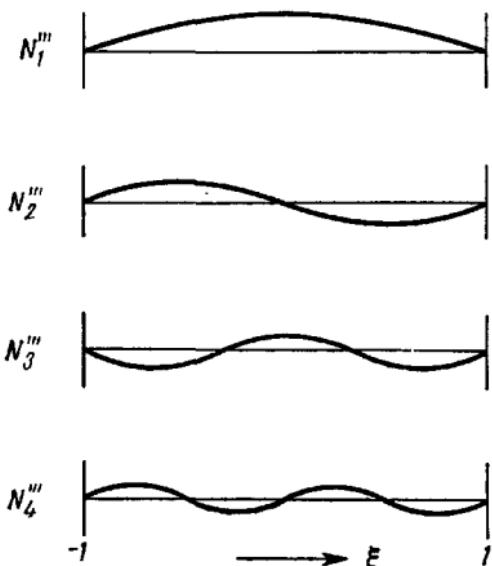
Для тангенциальных перемещений можно не требовать обращения в нуль первых производных в узлах.

Вебстер [11] использовал такие дополнительные функции для прямолинейных элементов.

Независимо от того, прямолинеен или криволинеен элемент, к компонентам перемещений, определяемым соотношением

(12.22), можно добавить выражение (12.29). Если это сделано только для перемещений, а выражения для координат не изменяются [формула (12.18)], то элемент становится элементом субпараметрического типа<sup>1)</sup>. Как показано в гл. 8, он обладает теми же преимуществами, что и изопараметрический элемент.

Особую важность имеет вопрос о том, какие именно выражения должны использоваться для дополнительных функций формы, хотя выбор их достаточно широк. Так как при этом не обязательно использовать полиномы, Делпак [9] применил специальную форму полиномов Лежандра, предложенную Айронсом. Дополнительные функции формы общего вида показаны на фиг. 12.6.



Фиг. 12.6. Внутренние функции формы для линейного элемента.

полиномов Лежандра, предложенную Айронсом. Дополнительные функции формы общего вида показаны на фиг. 12.6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grafton P. E., Strome D. R., Analysis of Axi-Symmetric Shells by the Direct Stiffness Method, *JAIAA*, 1, 2342—2347 (1963); есть русский перевод: Графтон, Струм, Расчет осесимметричных оболочек методом прямого определения жесткости, *Ракетная техника и космонавтика*, 1, № 10, стр. 129—136 (1963).
2. Popov E. P., Penzien J., Lu Z. A., Finite Element Solution for Axi-Symmetric Shells, *Proc. ASCE*, EM, 119—145 (1964).
3. Jones R. E., Strome D. R., Direct Stiffness Method of Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements, *JAIAA*, 4, 1519—1525 (1966); есть русский перевод: Джонс, Струм, Расчет оболочек вращения прямым методом жесткостей с помощью криволинейных элементов, *Ракетная техника и космонавтика*, 4, № 9, стр. 20 (1966).
4. Percy J. H., Pian T. H. H., Klein S., Navaratna D. R., Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution,

<sup>1)</sup> Очевидно, что можно было бы включить эту новую функцию формы в общее выражение, характеризующее форму элемента, но практически это не дало бы больших преимуществ, так как кубический закон позволяет достаточно точно воспроизвести любую реальную форму.

- JAIAA*, 3, 2138—2145 (1965); есть русский перевод: Перси, Пиан, Клейн, Наваратна, Приложение матричного метода к линейному упругому анализу оболочек вращения, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 11, стр. 199—208 (1965).
5. Klein S., A Study of the Matrix Displacement Methods as Applied to Shells of Revolution, Proc. Conf. on Matrix Method in Structural Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  6. Jones R. E., Strome D. R., A Survey of Analysis of Shells by the Displacement Method, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  7. Stricklin J., Navaratna D. R., Pian T. H. H., Improvements in the Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method (Curved Elements), *AIAA Int.*, 4, 2069—2072 (1966); есть русский перевод: Стриклип, Наваратна, Пиан, Усовершенствование расчета оболочек вращения матричным методом перемещений, *Ракетная техника и космонавтика*, 4, № 11, стр. 252—254 (1966).
  8. Khojasteh-Bakht M., Analysis of Elastic-Plastic Shells of Revolution Under Axi-Symmetric Loading by the Finite Element Method, Dept. Civ. Eng. Univ. of California, SE SA 67—68, 1967.
  9. Delpak R., Axi-Symmetric Vibration of Shells of Revolution by the Finite Element Method, M. Sc. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1967.
  10. Giappini M., Miles G. A., A Curved Element Approximation in the Analysis of Axi-Symmetric Thin Shells, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 2, 459—476 (1970).
  11. Webster J. J., Free Vibration of Shells of Revolution Using Ring Elements, *Int. J. Mech. Sci.*, 9, 559 (1967).
  12. Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951.
  13. Haisler W. E., Stricklin J. A., Rigid Body Displacements of Curved Elements in the Analysis of Shells by the Matrix Displacement Method, *JAIAA*, 5, 1525—1527 (1967); есть русский перевод: Хейслер, Стриклип, Перемещения недеформируемых криволинейных элементов в расчете оболочек матричным методом перемещений, *Ракетная техника и космонавтика*, 5, № 8, стр. 207—209 (1967).

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.  
ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ  
ФУНКЦИЙ

### 13.1. Введение

С помощью обычного метода конечных элементов можно решать любые двумерные и трехмерные (или даже четырехмерные) задачи<sup>1)</sup>. Однако добавление каждого нового измерения увеличивает необходимое для расчета время, и иногда решение задачи выходит за рамки возможностей машины. Поэтому желательно искать пути сокращения объема вычислений. Ниже будет рассмотрен один класс таких методов, имеющих широкое применение.

Во многих физических задачах *геометрия и свойства материала* не зависят от одной из координат. Однако нагрузка в этом направлении может быть переменной, что мешает непосредственному переходу от трехмерной задачи к двумерной задаче о плоском деформированном состоянии. В таких случаях все же можно рассматривать упрощенную задачу меньшей размерности (без координаты, вдоль которой свойства не изменяются) и полное решение составить из набора упрощенных решений.

Излагаемый здесь метод носит достаточно общий характер, и, разумеется, его применение не ограничивается только задачами строительной механики. Однако удобно использовать терминологию строительной механики и применить теорему о минимуме потенциальной энергии.

Итак, рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала, описанного в гл. 2 и 3.

Пусть  $x, y, z$  — координаты в некоторой области (не обязательно декартовы). Вдоль координаты  $z$  геометрия и свойства материала не изменяются, а значения этой координаты заключены в интервале

$$0 \leq z \leq a.$$

Предположим, что функции формы  $\{f\}$ , определяющие закон изменения перемещений [равенство (2.1)], можно записать в

---

<sup>1)</sup> См. гл. 16, посвященную применению конечных элементов в нестационарных задачах.

виде произведения

$$\{f\} = [N(x, y, z)] \{\delta\}^e = \\ = \sum_{l=1}^L \left\{ [\bar{N}(x, y)] \cos \frac{l\pi z}{a} + [\bar{\bar{N}}(x, y)] \sin \frac{l\pi z}{a} \right\} \{\delta\}^e. \quad (13.1)$$

При этом мы не ограничиваем общности, ибо с помощью рядов Фурье можно представить любую непрерывную функцию внутри заданной области (при условии, естественно, что функции формы  $\bar{N}$  и  $\bar{\bar{N}}$  в области определения  $x, y$  удовлетворяют тем же самым требованиям). Аналогично и для нагрузки получаем

$$\{p\} = \sum_{l=1}^L \left( \{\bar{p}_l(x, y)\} \cos \frac{l\pi z}{a} + \{\bar{\bar{p}}_l(x, y)\} \sin \frac{l\pi z}{a} \right), \quad (13.2)$$

причем это выражение справедливо как для массовых так и для поверхностных нагрузок (см. гл. 2).

Начальные деформации или напряжения, если они существуют, можно представить в таком же виде.

Применяя стандартные приемы гл. 2 для определения вклада элемента в уравнение, минимизирующее потенциальную энергию, и рассматривая только вклад  $\{p\}$ , можно записать

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\delta\}^e} = [k]^e \begin{Bmatrix} \{\delta^1\}^e \\ \vdots \\ \{\delta^L\}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F^1\}^e \\ \vdots \\ \{F^L\}^e \end{Bmatrix}. \quad (13.3)$$

В этом выражении, чтобы избавиться от знака суммы, в векторы  $\{\delta\}^e$  включены компоненты для каждого значения  $l$ . Теперь типичная подматрица  $[k]^e$  будет иметь вид

$$[k^{lm}]^e = \iiint_V [B^l]^T [D] [B^m] dx dy dz, \quad (13.4)$$

а типичная компонента вектора силы

$$\{F^l\}^e = \iiint_V [N^l]^T \{p\} dx dy dz. \quad (13.5)$$

Ясно, что матрица, определяемая соотношением (13.4), содержит в качестве множителей при различных подматрицах сле-

дующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a \sin \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz, \\ I_2 &= \int_0^a \sin \frac{l\pi z}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} dz, \\ I_3 &= \int_0^a \cos \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Эти интегралы появляются при перемножении производных, входящих в выражение для  $[B]$ , и благодаря известному свойству ортогональности

$$I_2 = I_3 = 0 \quad \text{для } l \neq m \quad (13.7)$$

при  $l = 1, 2, \dots$  и  $m = 1, 2, \dots$

Интеграл  $I_1$  равен нулю, только когда  $l$  и  $m$  одновременно четные или нечетные. Однако в большинстве практических случаев член, содержащий  $I_1$ , прошадает. Это означает, что матрица  $[k]^e$  становится диагональной, уравнения для ансамбля имеют вид

$$\left[ \begin{array}{c} [K^{11}] \\ [K^{22}] \\ \vdots \\ [K^{LL}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\delta^1\} \\ \vdots \\ \{\delta^L\} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \{F^1\} \\ \vdots \\ \{F^L\} \end{array} \right\} = 0 \quad (13.8)$$

и полная система уравнений разбивается на  $L$  отдельных подсистем

$$[K^{ll}] \{\delta^l\} + \{F^l\} = 0, \quad (13.9)$$

где

$$[k_{ll}^{ll}] = \iint_V [B_l^l] [D] [B_l^l] dx dy dz. \quad (13.10)$$

Из соотношений (13.5) и (13.2) следует, что вследствие свойства ортогональности (13.6) типичное выражение для компоненты нагрузки принимает вид

$$[F_l^l]^e = \iint_V [N^l]^T \{p^l\} dx dy dz. \quad (13.11)$$

Отсюда видно, что  $l$ -я гармоника нагрузки входит только в  $l$ -ю подсистему (13.9) и не влияет на остальные уравнения. Это крайне важное свойство имеет большое практическое значение,

поскольку оно означает, что если разложение нагрузки в ряд содержит только один член, то необходимо решать лишь одну подсистему уравнений. С уменьшением размеров разбиения лишь в области  $x, y$  решение будет стремиться к точному. В итоге трехмерная задача сводится к двумерной, что приводит к сокращению затрат машинного времени.

Очевидно, что аналогичным образом можно свести двумерные задачи к одномерным и т. д., причем это относится не только к задачам теории упругости. К любой физической задаче, сводящейся к минимизации квадратичного функционала (гл. 3), можно применить этот подход, который в том или ином виде использовался в строительной механике с незапамятных времен.

Следует обращать особое внимание на граничные условия, накладываемые на  $\{\delta\}$ . Для полного разделения задачи граничным условиям должен удовлетворять каждый член ряда (13.1). Задание нулевых перемещений в упрощенной задаче фактически означает задание нулевых перемещений вдоль оси  $z$ . Поэтому составление окончательной матрицы довольно затруднительно. Это несколько ограничивает возможности применения описанного метода.

Когда нагружение таково, что требуется учитывать большое число фурье-компонент, преимущества изложенного метода уменьшаются и иногда бывает экономичнее решать исходную задачу.

Очевидно, что возможны видоизменения основного соотношения (13.1). Так, например, с каждым из тригонометрических членов можно связывать свою независимую систему параметров  $\{\delta\}^a$ . Кроме того, можно использовать другие ортогональные функции. Так как особенно часто применяются тригонометрические функции, напомним читателю следующие соотношения:

$$\int_0^a \sin \frac{l\pi z}{a} \cos \frac{l\pi z}{a} dz = 0, \text{ когда } l = 0, 1, \dots, \quad (13.12)$$

$$\int_0^a \sin^2 \frac{l\pi z}{a} dz = \int_0^a \cos^2 \frac{l\pi z}{a} dz = \frac{a}{2}, \quad \text{когда } l = 1, 2, \dots$$

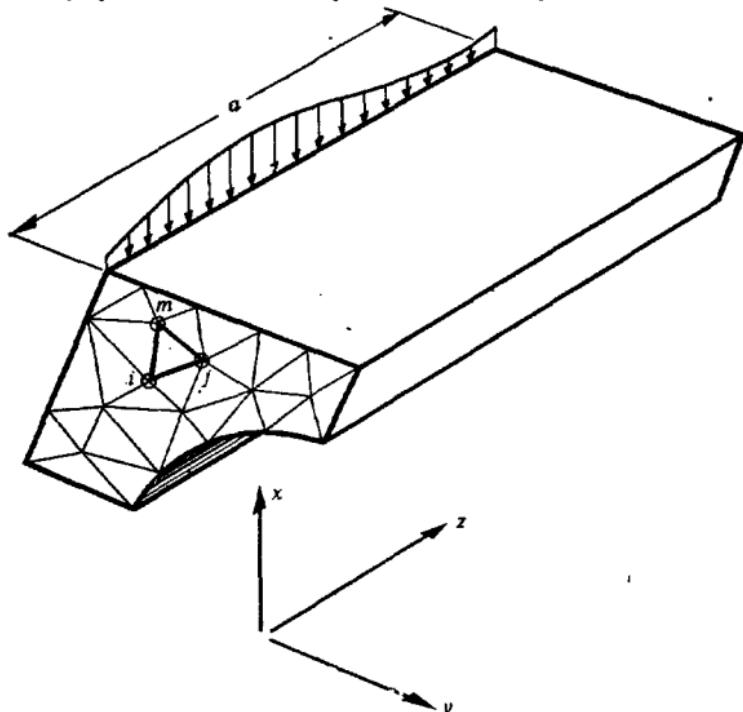
### 13.2. Призматический брус

Рассмотрим призматический брус, показанный на фиг. 13.1, который при  $z=0$  и  $z=a$  закреплен так, что исключаются какие-либо перемещения в плоскости  $x, y$ , а в направлении  $z$  брус перемещается свободно. Задача существенно трехмерная, поэтому должны быть рассмотрены три компоненты перемещений  $u, v$  и  $w$ .

Разбивая область в плоскости  $x, y$  на конечное число элементов, можно задать  $l$ -ю компоненту перемещения в направлении  $\zeta$  в виде

$$u^l = [N'_1, N'_2, \dots] \sin \frac{l\pi z}{a} \{u^l\}. \quad (13.13)$$

Для  $v^l$  и  $w^l$  можно записать аналогичные выражения, но в последнее будут входить косинусы. В этих выражениях  $N'_1$  и т. д.—



Фиг. 13.1. Сведение задачи о призматическом брусе к набору двумерных конечноЭлементных задач.

(скалярные) функции формы, соответствующие используемому элементу. Если, как показано на фиг. 13.1, применяются треугольники, то функции формы задаются соотношением (4.8) гл. 4.

Однако могут использоваться также более точные элементы, описанные в гл. 7 (с использованием преобразований гл. 8 или без них). Разложение (13.13) обеспечивает равенство нулю перемещений  $u$  и  $v$  и осевых напряжений на концах бруса.

Нагрузку тоже можно представить в виде рядов Фурье, тогда для компонент в плоскости  $x, y$  имеем

$$\{p\}^l = \{\bar{p}\} \sin \frac{l\pi z}{a}. \quad (13.14)$$

Если задача существенно трехмерная, то выражение для деформации должно содержать все шесть компонент. Такое выраже-

ние приведено в гл. 6 [см. соотношения (6.9) — (6.11)]. После подстановки функции формы (13.13) для типичного члена матрицы  $[B]$  получим

$$[B_i^l] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_l}{\partial x} \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_l}{\partial y} \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -N'_l \frac{l\pi}{a} \sin \gamma \\ \frac{\partial N'_l}{\partial y} \sin \gamma & \frac{\partial N'_l}{\partial x} \sin \gamma & 0 \\ 0 & N'_l \frac{l\pi}{a} \cos \gamma & \frac{\partial N'_l}{\partial y} \cos \gamma \\ N'_l \frac{l\pi}{a} \cos \gamma & 0 & \frac{\partial N'_l}{\partial x} \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad (13.15)$$

где  $\gamma = l\pi z/a$ . Удобно представить это выражение в виде суммы

$$[B_i^l] = [\bar{B}_i^l] \sin \frac{\pi l z}{a} + [\bar{\bar{B}}_i^l] \cos \frac{\pi l z}{a}. \quad (13.16)$$

Во всех приведенных соотношениях полагалось, что параметры располагаются в обычном порядке:

$$\{\delta_i^l\} = \begin{Bmatrix} u_i^l \\ v_i^l \\ w_i^l \end{Bmatrix}, \quad (13.17)$$

а оси координат направлены, как показано на фиг. 13.1.

Матрица жесткости вычисляется обычным образом, если принять во внимание, что

$$[k_{ij}^{ll}]^e = \iint_{V^e} [B_i^l]^T [D] [B_j^l] dx dy dz. \quad (13.18)$$

Это соотношение после подстановки в него выражения (13.16), перемножения и использования (13.12) принимает вид

$$[k_{ij}^{ll}]^e = \frac{a}{2} \iint_{A^e} \{[\bar{B}_i^l]^T [D] [\bar{B}_j^l] + [\bar{\bar{B}}_i^l]^T [D] [\bar{\bar{B}}_j^l]\} dx dy, \quad (13.19)$$

где  $l = 1, 2, \dots$ .

Интегрирование теперь производится по площади элемента<sup>1)</sup>. Члены, обусловленные распределенной нагрузкой, на-

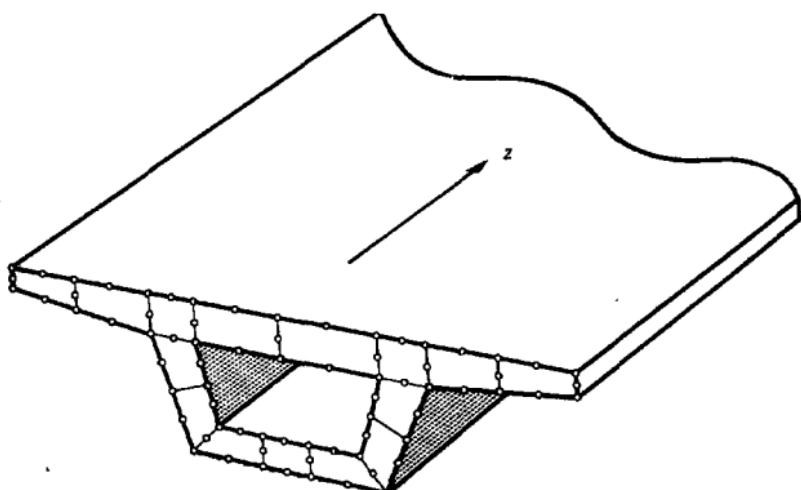
<sup>1)</sup> Следует отметить, что теперь даже в случае простого треугольника интегрирование нетривиально, так как в  $[\bar{B}]$  входят некоторые линейные члены.

чальными напряжениями и т. д., имеют вид (13.14). Сосредоточенные вдоль линий нагрузки представляются непосредственно в виде узловых сил

$$\{F_i^l\} = \int_0^a \sin \frac{\pi z}{a} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi}^l \\ \bar{F}_{yi}^l \\ \bar{F}_{zi}^l \end{Bmatrix} \sin \frac{\pi l z}{a} dz = \{\bar{F}^l\} \frac{a}{2}, \quad (13.20)$$

где  $\{\bar{F}\}$  — интенсивности на единицу длины.

Границные условия, которым удовлетворяют использованные выражения, соответствуют условиям *свободного опирания* бру-



Фиг. 13.2. Сведение расчета коробчатого моста к двумерной задаче с использованием изопараметрических элементов второго порядка.

са. С помощью аналогичных разложений можно удовлетворять другим граничным условиям.

Рассмотренный метод может быть применен ко многим практическим задачам, в частности к расчету бетонного моста, показанного на фиг. 13.2. Здесь особенно удобны криволинейные элементы Сирендицова семейства второго или третьего порядка, описанные в гл. 7 и 8.

Отметим, что удвоение числа параметров и запись рядов в виде двух сумм

$$\{f\} = \sum_{l=1}^L \bar{N}(x, y) \cos \frac{l\pi z}{a} \{\delta^{1l}\} + \sum_{l=1}^L \bar{N}(x, y) \sin \frac{l\pi z}{a} \{\delta^{8l}\} \quad (13.21)$$

позволяют устраниить некоторые ограничения на функции формы, определенные выражениями (13.1) или (13.13). Параметры  $\{\delta^A\}$  и  $\{\delta^B\}$  являются независимыми, и для каждой компоненты перемещений необходимо определять два значения и составлять два уравнения.

Другой вариант описанного выше приема состоит в представлении функций в виде

$$\{f\} = \sum [N(x, y) e^{i(l\pi z/a)}] \{\delta^l\}^e,$$

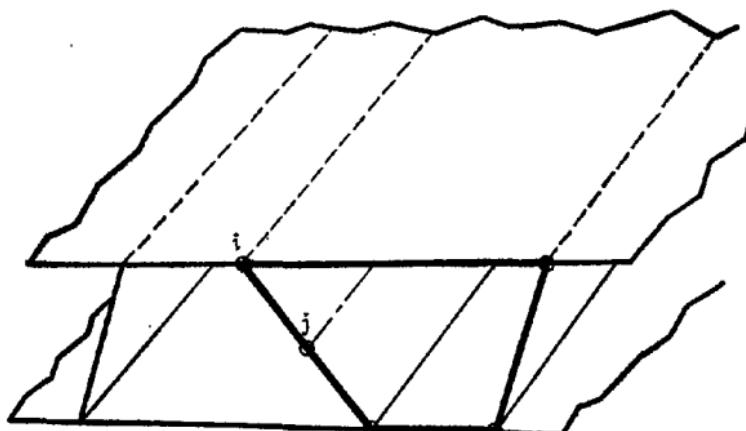
где  $[N]$  и  $\{\delta\}$  являются комплексными величинами. Тождественность этого выражения выражению (13.21) легко устанавливается, если учесть, что

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Для оперирования с комплексными величинами имеются стандартные программы.

### 13.3. Коробчатая конструкция

В предыдущем разделе трехмерная задача сводилась к двумерной. Здесь же показано, что аналогичная задача может быть решена с использованием одномерных элементов (фиг. 13.3).



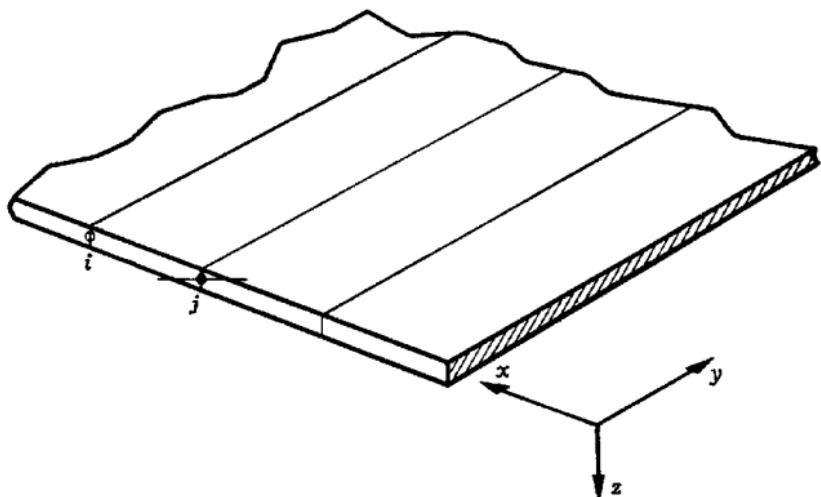
Фиг. 13.3. Расчет «мембранный» коробчатой конструкции с помощью одномерных элементов.

Коробчатая конструкция выполнена из тонких листов, способных воспринимать нагрузку только в своей плоскости. Как и в предыдущем случае, в каждой точке необходимо рассматривать три перемещения, для каждого из которых можно задать одинаковый закон изменения. Однако типичный элемент  $ij$  является одномерным в том смысле, что интегрирование надо производить только вдоль линии  $ij$  и напряжения учитываются

только в этом направлении. Легко показать, что решение этой задачи аналогично решению задачи о шарниро-стержневой системе.

### 13.4. Чистый изгиб пластин и коробчатых конструкций

Рассмотрим прямоугольную свободно опертую по краям пластину, вся энергия деформации которой уходит на изгиб. В этом случае деформированное состояние полностью определяется только одним перемещением  $w$  (см. гл. 10).



Фиг. 13.4. Метод «полос» для плит.

Обозначим через  $y$  направление, в котором геометрия и свойства материала не изменяются (фиг. 13.4). Чтобы обеспечить непрерывность угла наклона, функции формы должны содержать параметр  $\theta_i$ , характеризующий угол поворота.

Воспользуемся балочными функциями и для типичного элемента  $ij$  запишем

$$\omega^l = [\bar{N}(x)] \sin \frac{l\pi y}{a} \{\delta_i^l\}^e, \quad (13.22)$$

что обеспечивает выполнение условий *свободного опирания* краев. Типичными узловыми параметрами являются

$$\{\delta_i^l\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}. \quad (13.23)$$

Необходимым требованиям удовлетворяют функции формы третьего порядка, которые, по существу, идентичны функциям, использованным для расчета осесимметричных оболочек (гл. 12). Следуя определениям гл. 10, находим деформации (искривле-

ния) и составляем матрицу  $[B]$ . Таким образом, двумерная задача сведена к одномерной.

Этот метод разработан Ченгом [1—3] и назван им методом «конечных полос». Он использовался для решения ряда задач о прямоугольных пластинах, коробчатых балках, оболочках и различных складчатых конструкциях из пластин.

Для разъяснения уместно привести один пример из указанных работ. Это задача о квадратной равномерно нагруженной пластине с тремя свободно опретыми сторонами и одной защемленной. При решении использовались десять элементов-полос по оси  $x$ . В табл. 13.1 приведены результаты, соответствующие первым трем гармоникам.

Таблица 13.1

Квадратная пластина с тремя свободно опретыми и одной защемленной сторонами под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$

$v=0,3$	Прогиб в центре пластины	Момент в центре пластины $M_x$	Максимальный отрицательный момент $M$
$l = 1$	0,002832	0,0409	-0,0858
$l = 2$	-0,000050	-0,0016	0,0041
$l = 3$	0,000004	0,0003	-0,0007
$\Sigma$	0,002786	0,0396	-0,0824
Точное решение	0,0028	0,039	-0,084
Множитель	$qa^4/D$	$qa^2$	.

Важно не только то, что точное решение для каждой гармоники  $l$  получить довольно просто, поскольку приходится определять лишь девять неизвестных, но и то, что члены высших порядков быстро уменьшаются.

Обобщение этого метода на случай коробчатой конструкции, для которой существенны и мембранные и изгибные эффекты, представляется почти очевидным, если этот пример рассмотреть вместе с примером предыдущего раздела.

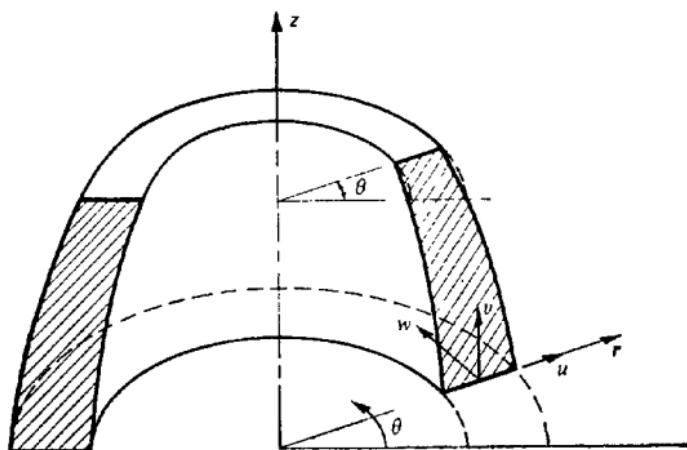
В другой статье Ченга [4] показано, что можно использовать и отличные от тригонометрических функций, хотя при этом возможно лишь частичное разделение задачи.

### 13.5. Осесимметричные тела при несимметричном нагружении

Наиболее характерным и, по всей видимости, самым важным практическим применением разложения Фурье явилось исследование осесимметричных тел под действием несимметричной нагрузки.

В этом случае, кроме радиального ( $u$ ) и осевого ( $v$ ) перемещений (как в гл. 5), следует рассматривать и тангенциальную компоненту  $w$ , соответствующую направлению угла  $\theta$  (фиг. 13.5). Именно в этом направлении геометрия и свойства материала постоянны, поэтому его следует исключить.

В целях упрощения рассмотрим отдельно симметричные и антисимметричные относительно оси  $\theta = 0$  компоненты нагрузки. Используя только выражения для узловых сил (выражения



Фиг. 13.5. Осесимметричное тело. Координаты и перемещения.

для объемных сил, краевых условий, начальных деформаций и т. д. аналогичны), запишем силы на единицу длины по окружности (фиг. 13.6, а) в виде .

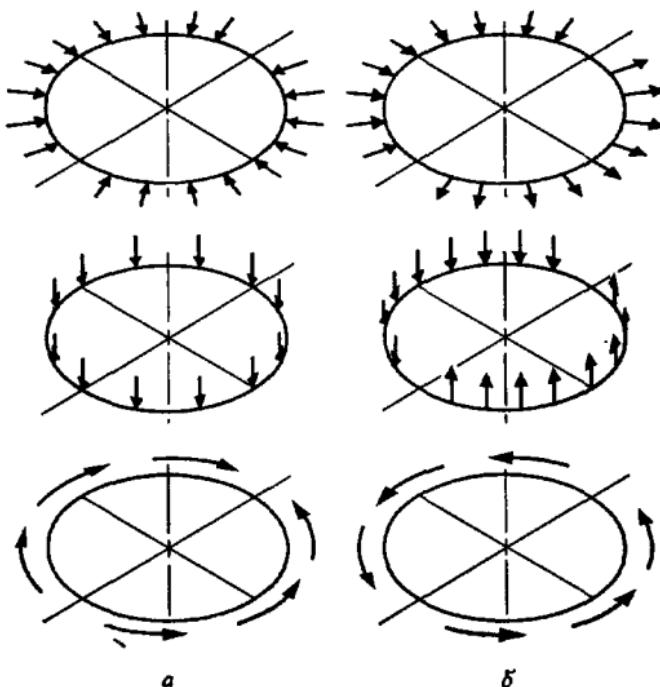
$$R = \sum_1^L \bar{R}^l \cos l\theta,$$

$$Z = \sum_1^L \bar{Z}^l \cos l\theta, \quad (13.24)$$

$$T = \sum_1^L \bar{T}^l \sin l\theta$$

по осям координат для симметричной нагрузки. Для  $T$  используется несимметричное разложение по синусам, чтобы сохранить в направлении  $T$  симметрию при  $\theta > \pi$ .

Компоненты перемещений снова описываются двумерными ( $r, z$ ) функциями формы, соответствующими используемому типу элемента; вследствие симметрии они имеют аналогичный



Фиг. 13.6. Симметричные (а) и антисимметричные (б) компоненты перемещений и нагрузок в осесимметричном теле.

выражению (13.13) вид

$$\begin{aligned} u^l &= [N'_1, N'_2, \dots] \cos l\theta \{u^l\}^e, \\ v^l &= [N'_1, N'_2, \dots] \cos l\theta \{v^l\}^e, \\ w^l &= [N'_1, N'_2, \dots] \sin l\theta \{w^l\}^e. \end{aligned} \quad (13.25)$$

В дальнейшем необходимо использовать общее выражение деформации в цилиндрических координатах для трехмерного случая (см. [5])

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (13.26)$$

Как и прежде, матрицу жесткости и другие величины можно вычислить для каждой гармоники в отдельности. Подставляя формулы (13.25) в (13.26) и группируя переменные, как это сделано в (13.17), получаем

$$[\bar{B}_i^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial r} \cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \cos l\theta & 0 \\ \frac{N'_i}{r} \cos l\theta & 0 & \frac{lN'_i}{r} \cos l\theta \\ \frac{\partial N'_i}{\partial z} \cos l\theta & \frac{\partial N'_i}{\partial r} \cos l\theta & 0 \\ -\frac{lN'_i}{r} \sin l\theta & 0 & \left( \frac{\partial N'_i}{\partial r} - \frac{N'_i}{r} \right) \sin l\theta \\ 0 & -\frac{lN'_i}{r} \sin l\theta & \frac{\partial N'_i}{\partial z} \sin l\theta \end{bmatrix}. \quad (13.27)$$

Остальные соотношения выводятся обычным путем, и читатель может получить их в качестве упражнения.

Для антисимметричного нагружения, показанного на фиг. 13.6, б, в соотношениях (13.24) и (13.25) просто заменим синус на косинус и наоборот.

Величины усилий для каждой гармоники получим из выражения для виртуальной работы. Для симметричного случая

$$\begin{aligned} \{F_i^l\} &= \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \cos^2 l\theta \\ \bar{Z}^l \cos^2 l\theta \\ \bar{T}^l \sin^2 l\theta \end{Bmatrix} d\theta = \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \text{ при } l = 1, 2, \dots, \\ &= 2\pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ при } l = 0. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Аналогично для антисимметричного случая

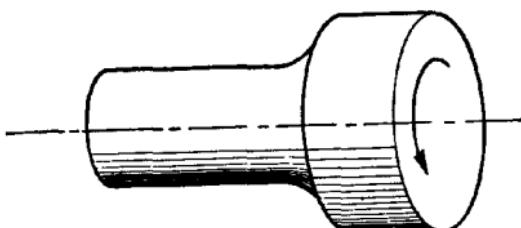
$$\{F_i^l\} = \pi \begin{Bmatrix} \bar{R}^l \\ \bar{Z}^l \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \text{ при } l = 1, 2, \dots, = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{T}^l \end{Bmatrix} \text{ при } l = 0. \quad (13.29)$$

Отсюда и из выражения для  $[k]^e$  видно, что при  $l = 0$ , как и ожидалось, задача сводится к двумерной, а при симметричном нагружении становится, кроме того, и осесимметричной.

При антисимметричной нагрузке, когда  $l = 0$ , остается только одна система уравнений относительно переменной  $\psi$ . Это

соответствует действию постоянных тангенциальных усилий и эквивалентно задаче о кручении валов (фиг. 13.7). Последняя решается классическими методами с использованием функции напряжений [6] и для сравнения была исследована методом конечных элементов [7]. Рассмотренный здесь подход более естествен.

К расчету осесимметричных тел изложенный подход впервые был применен Вильсоно [8].



Фиг. 13.7. Кручение стержня переменного сечения.

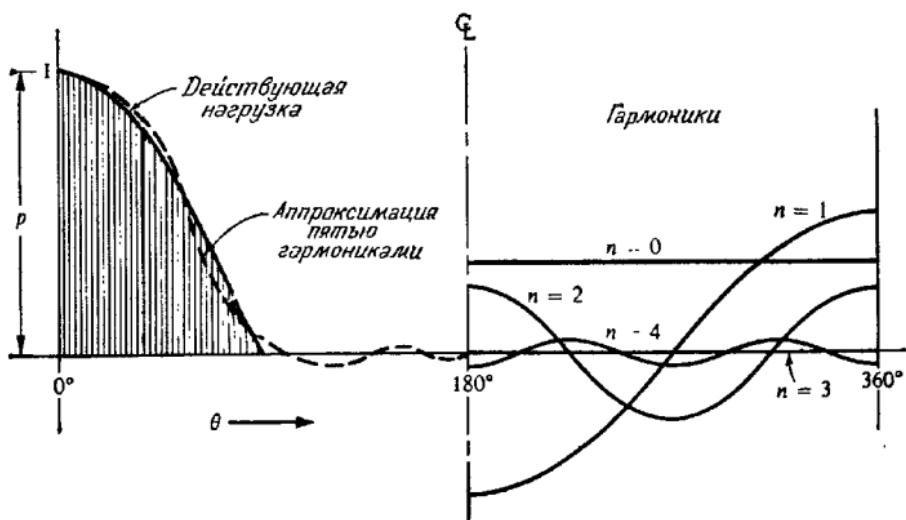
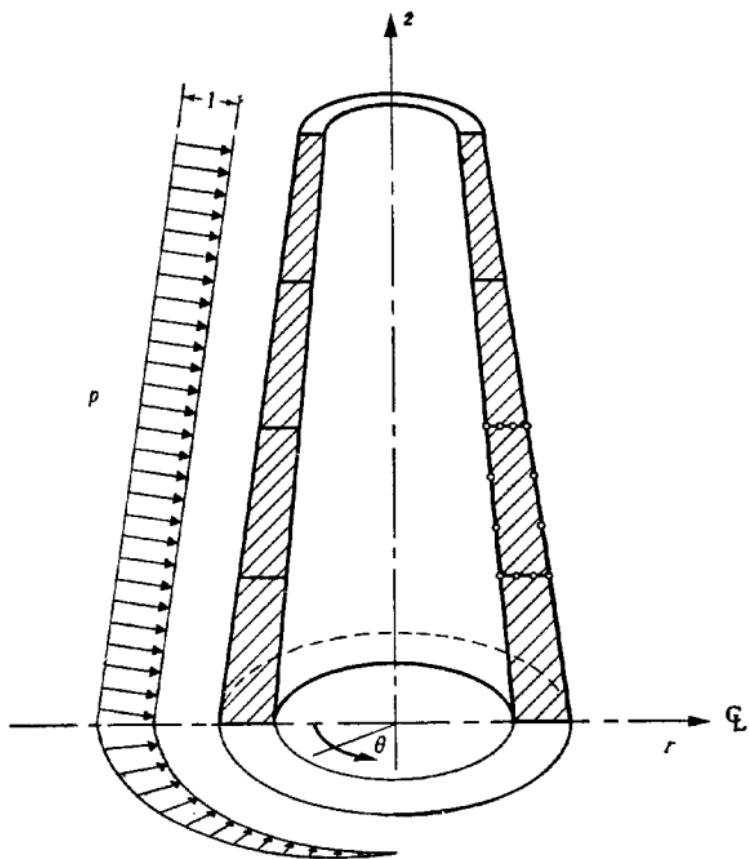
На фиг. 13.8а и 13.8б приведен простой пример, иллюстрирующий влияние различных гармоник.

### 13.6. Осесимметричные оболочки при несимметричном нагружении

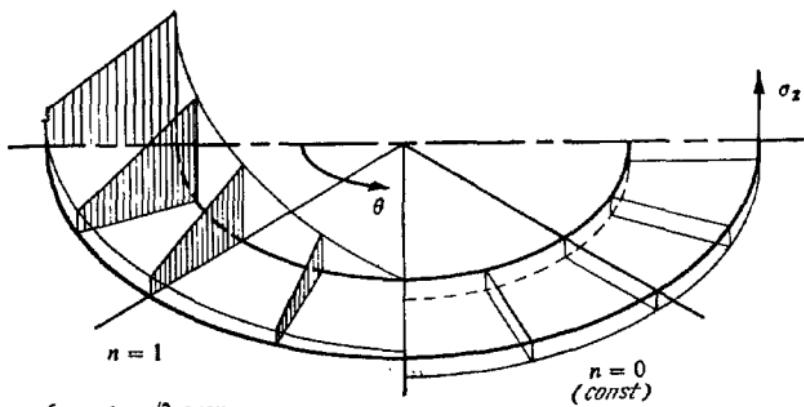
С помощью описанного подхода изложенный в гл. 12 метод расчета осесимметричных оболочек легко распространить на случай несимметричного нагружения. Однако теперь следует учесть три компоненты перемещений и усилий (фиг. 13.9). Будем рассматривать три мембранные и три изгибные компоненты и, обобщая формулу (12.1), определим деформацию как [9]<sup>1)</sup>

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + (w \cos \phi + u \sin \phi) \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - v \sin \phi \frac{1}{r} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \phi}{r^2} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\ 2 \left( - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} v \right) \end{array} \right\}. \quad (13.30)$$

<sup>1)</sup> По причине существования множества теорий оболочек можно использовать и другие соотношения. Приведенные здесь соотношения являются достаточно общепринятыми.

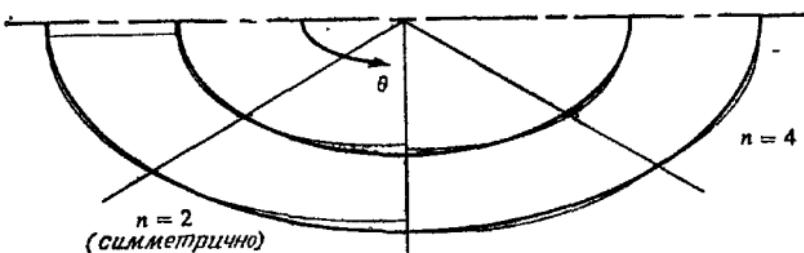


Фиг. 13.8а. Осьсимметричная башня под действием несимметричной нагрузки. При решении используются четыре элемента третьего порядка. Показаны гармоники, по которым раскладывается нагрузка.



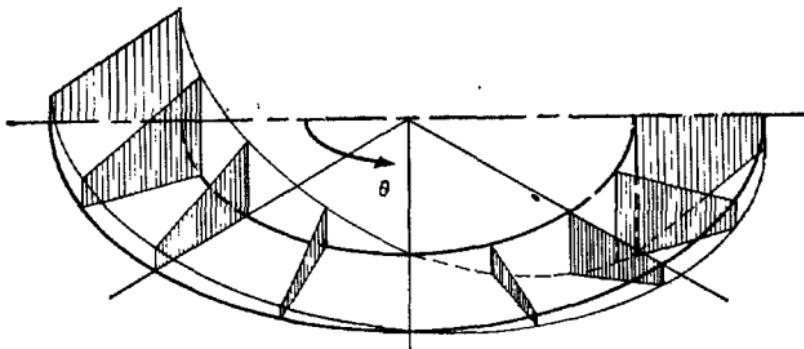
(при  $\theta > \pi/2$  знак меняется)

$n = 0$   
(const)



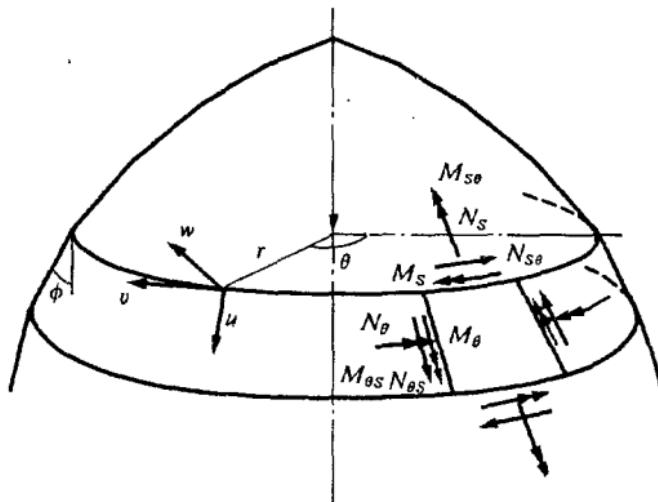
(симметрично)

$n = 4$



### Суммарное напряжение

Фиг. 13.86. Распределение вертикальных напряжений  $\sigma_z$  в основании, соответствующих отдельным гармоникам, и суммарных напряжений. (Напряжение для третьей гармоники тождественно равно нулю.) Первые две гармоники позволяют получить практически точный результат.



Фиг. 13.9. Осесимметрическая оболочка при несимметричном нагружении. Перемещения и результирующие напряжения.

Матрица напряжений, соответствующая этим деформациям, имеет вид

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix}. \quad (13.31)$$

В нее входят три мембранных и три изгибающих напряжения, показанные на фиг. 13.9.

Как и в предыдущем разделе, нагрузки и перемещения разделяются на симметричную и антисимметричную части. После этого применение метода не требует дополнительных пояснений.

Подробности читатель может найти в статье Графтона и Струма [10], в которой впервые была рассмотрена эта задача, и во многих других более поздних работах, перечисленных в гл. 12.

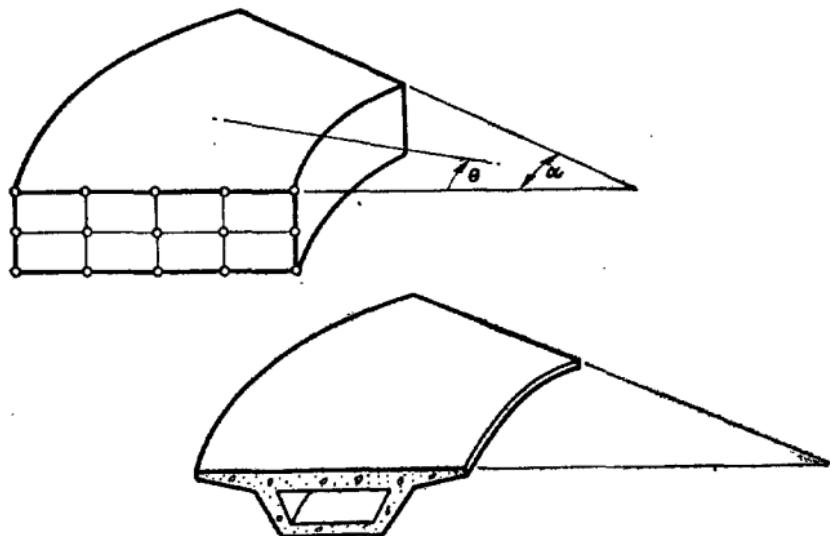
Некоторые примеры, иллюстрирующие применение полуаналитического метода к расчету толстых оболочек, даны в гл. 14.

### 13.7. Заключительные замечания

На нескольких примерах был проиллюстрирован достаточно общий полуаналитический метод, сочетающий в себе преимуще-

ства метода конечных элементов с экономичностью, обусловленной разложением по системе ортогональных функций. Конечно, в этих примерах лишь в небольшой степени используются открывающиеся возможности, однако следует иметь в виду, что метод действительно экономичен только для некоторых форм рассматриваемых тел и только в тех случаях, когда требуемое число членов разложения ограничено.

Аналогично могут быть решены задачи о призмах, если рассматривать только сегмент тела вращения (фиг. 13.10). Ясно,



Фиг. 13.10. Примеры призматических сегментных тел.

что теперь следует проводить разложение по углу  $I\pi\theta/\alpha$ , а в остальном метод совпадает с описанным ранее.

Существуют и другие возможности скомбинировать преимущества аналитических методов с общностью численных методов. Например, если решение имеет особенности, связанные, скажем, с наличием сосредоточенных нагрузок, то их можно исключить с помощью точного решения и решить численно вспомогательную задачу, в которой устранены нарушения гладкости распределенных поверхностных сил. От численного решения при этом не требуется большой точности, и поэтому оно может быть получено более экономичным путем. Описание такого метода дано Зенкевичем и др. [11, 12].

В работе [13] в общих чертах описан иной комбинированный метод, позволяющий исключить особенности, возникающие во входящих углах. Ограниченный объем книги не дает возможности продолжить обсуждение этого вопроса, оди-

ко следует отметить, что за экономичность приходится расплачиваться меньшей общностью.

В этой главе предполагалось, что свойства материала не зависят от одной из координат. В случае необходимости это ограничение с помощью дальнейших обобщений можно снять. Интересный пример такого типа приведен в работе [14].

Размерность задачи можно уменьшить с помощью другого класса методов, основанного на использовании точных сингулярных решений и сведении, скажем, трехмерной задачи к *интегральному уравнению* на поверхности. Это приводит к необходимости решения уравнения типа

$$f(p) + \int_S K(p, q) f(q) dS = F(p), \quad (13.32)$$

где  $p$  и  $q$  — координаты точек на поверхности  $S$ ,  $f(p)$  — искомая неизвестная функция,  $K$  и  $F$  — известные функции координат. Такое интегральное уравнение естественно решать методом конечных элементов, разбивая интеграл на отдельные части и используя приближенное представление функции  $f$ .

Для решения задач упругости такой подход предложен Массоне [15]; Фрид [16] показал, что таким же образом задача об обтекании тела неограниченным потоком сводится к задаче, решаемой с помощью разбиения на конечные элементы лишь одной поверхности.

## ЛИТЕРАТУРА

- Cheung Y. K., The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 40, 1—7 (1968).
- Cheung Y. K., Finite Strip Method of Analysis of Elastic Slabs, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, EM6, 1365—1378 (1968).
- Cheung Y. K., Folded Plate Structures by the Finite Strip Method, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 95, ST, 2963—2979 (1969).
- Cheung Y. K., The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks, *Publ. Int. Ass. Struct. Eng.*, 29-II, 41—52 (1969).
- Love A. E. H., *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927, p. 56; есть русский перевод: Ляв А., *Математическая теория упругости*, ОНТИ, М., 1936.
- Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
- Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Stresses in Shafts, *The Engineer*, 24 Nov., 1967.
- Wilson E. L., Structural Analysis of Axi-Symmetric Solids, *JAIAA*, 3, 2269—2274 (1965); есть русский перевод: Вильсон, *Расчет на прочность осесимметричных тел*, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 12, стр. 124—131 (1965).
- Новожилов В. В., *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, Л., 1951.
- Grafton P. E., Stromie D. R., Analysis of Axi-Symmetric Shells by the Direct Stiffness Method, *JAIAA*, 1, 2342—2347 (1963); есть русский перевод: Графтон

- тон, Строум, Расчет осесимметричных оболочек методом прямого определения жесткости, *Ракетная техника и космонавтика*, 1, № 10, стр. 129—136 (1963).
11. Zienkiewicz O. C., Gerstner R. W., The Method of Interface Stress Adjustment and Its Uses in Some Plane Elasticity Problems, *Int. J. Mech. Sci.*, 2, 267—276 (1961).
  12. Zienkiewicz O. C., Gerstner R. W., Stress Analysis and Special Problems of Prestressed Dams, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 87, POI, 7—43 (1961).
  13. Morley L. S. D., A Finite Element Application of Modified Rayleigh—Ritz Method, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 2, 85—98 (1970).
  14. Stricklin J. A., De Andrade J. C., Linear and Non Linear Analysis of Shells of Revolution with Asymmetrical Stiffness Properties, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
  15. Massonet C. E., Numerical Use of Integral Procedures, Ch. 10 in: Stress Analysis, Zienkiewicz O. C., Holister G. S., eds, Wiley, 1965.
  16. Fried I., Finite Element Analysis of Problems Formulated by an Integral Equation; Application to Potential Flow, Inst. für Statik und Dynamik, Luft- und Raumfahrtanstalt, Stuttgart, 1968.

# РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА

## 14. 1. Введение

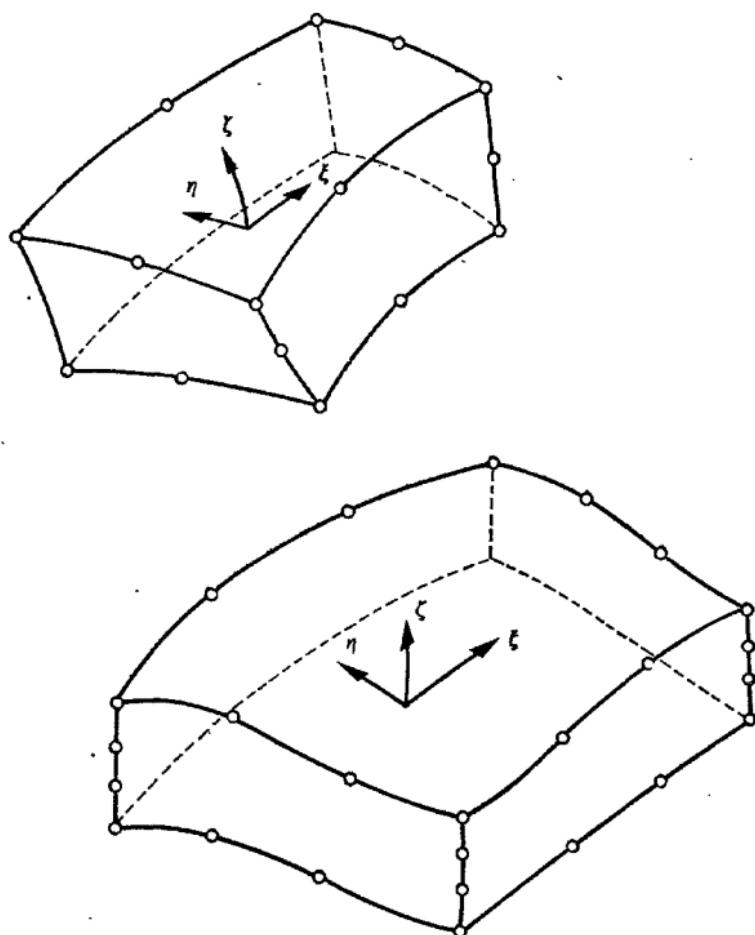
В гл. 8 и 9 были рассмотрены вопросы построения и использования сложных криволинейных двумерных и трехмерных элементов. Казалось бы очевидным, что эти элементы можно непосредственно применять при расчете криволинейных оболочек, уменьшая их размер в направлении толщины оболочки, как показано на фиг. 14.1. Такие элементы использовались в примере, иллюстрированном на фиг. 9.6 для осесимметричного тела. Однако в общем трехмерном случае при применении таких элементов возникают определенные трудности.

Во-первых, наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жесткости для перемещений по толщине оболочки. Это затрудняет проведение числовых расчетов и может явиться причиной плохой обусловленности системы уравнений, если толщина оболочки мала по сравнению с остальными размерами элемента.

Во-вторых, следует учитывать и фактор экономичности. При использовании нескольких дополнительных узлов по толщине оболочки игнорируется хорошо известный факт, что практически даже в случае толстых оболочек нормали к срединной поверхности после деформации остаются прямыми. Тем самым вводится большое число степеней свободы, что влечет за собой неоправданно большие затраты машинного времени.

В настоящей главе описан подход, позволяющий обойти обе эти трудности [1—3]. Для того чтобы повысить экономичность расчета, вводится гипотеза прямых нормалей, а чтобы улучшить обусловленность задачи, не учитывается вклад в энергию деформации напряжений, перпендикулярных к срединной поверхности. Это позволяет получить эффективный инструмент для анализа толстых оболочек. Точность его и широта применения демонстрируются на нескольких примерах.

Ясно, что оба эти допущения являются только частью обычных допущений теории оболочек. Так, умышленно опущено утверждение, что после деформации нормали остаются нормалами к срединной поверхности. Это позволяет учсть деформации сдвига — важную характеристику толстой оболочки.

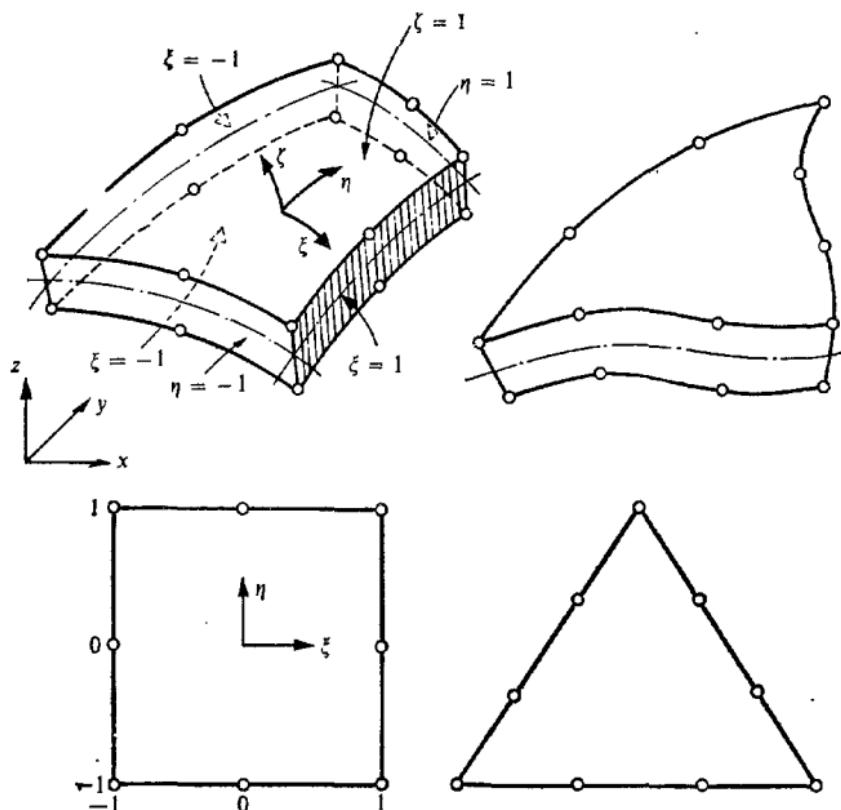


Фиг. 14.1. Криволинейные изопараметрические шестигранники для аппроксимации оболочки.

## 14.2. Геометрические характеристики элемента

Рассмотрим типичный элемент толстой оболочки (фиг. 14.2). Поверхности элемента криволинейны, тогда как поперечные сечения по толщине образованы прямыми линиями. Форма такого элемента описывается парами точек  $i_{\text{верх}}$  и  $i_{\text{ниж}}$ , заданными их декартовыми координатами.

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — криволинейные координаты в срединной плоскости оболочки, а  $\zeta$  — линейная координата по толщине. Если положить, что  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  изменяются в пределах от  $-1$  до  $+1$  на соответствующих поверхностях элемента, то зависимость между декартовыми и криволинейными координатами для любой точки



Фиг. 14.2. Различные типы криволинейных элементов для толстых оболочек.

может быть представлена в виде

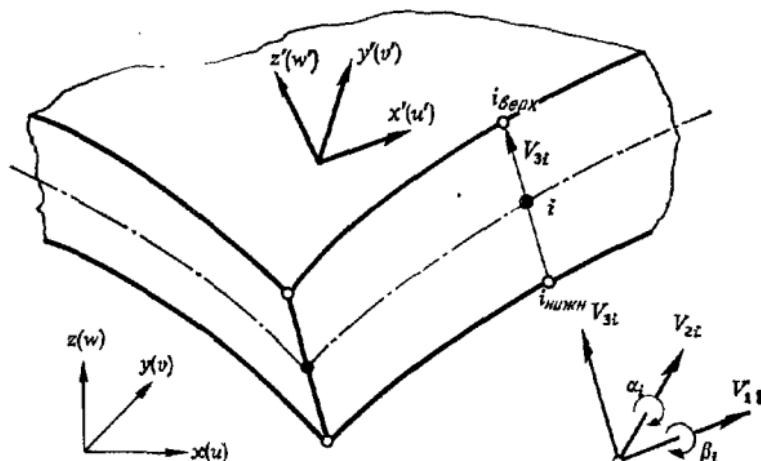
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N'_i(\xi, \eta) \frac{1+\xi}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{верх}} + \sum N'_i(\xi, \eta) \frac{1-\xi}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{ниж}} . \quad (14.1)$$

Здесь  $N'_i(\xi, \eta)$  — функция формы, равная единице в  $i$ -м узле и нулю в остальных узлах (гл. 8). Если базисные функции  $N_i$  получены из функций формы двумерных первичных элементов, квадратных или треугольных<sup>1)</sup>, и составлены так, что на границах между элементами выполняются условия совместности, то пространственные криволинейные элементы будут примыкать друг к другу по всей границе. Используя функции формы раз-

<sup>1)</sup> Как и в гл. 7, в этом случае вместо координат  $\xi$  и  $\eta$  следует использовать  $L$ -координаты.

личных порядков, можно получить разнообразные криволинейные элементы. На фиг. 14.2 показаны только элементы второго и третьего порядков. При желании их можно усовершенствовать, если ввести на сторонах большее число дополнительных узлов. Можно использовать любую из двумерных функций формы гл. 7.

Хотя связь между декартовыми и криволинейными координатами установлена, все же в качестве основных желательно использовать криволинейные координаты.



Фиг. 14.3. Локальные и глобальные координаты.

Следует отметить, что направление координаты  $\xi$  только приблизительно совпадает с направлением нормали к срединной поверхности.

Удобно записать зависимость (14.1) с помощью вектора (*длины, равной толщине оболочки l*), связывающего верхнюю и нижнюю точки и координаты срединной поверхности. При этом<sup>1)</sup> соотношение (14.1) принимает вид (фиг. 14.3)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N'_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{сред}} + \sum N'_i \frac{\xi}{2} \mathbf{V}_{3l}, \quad (14.2)$$

где

$$\mathbf{V}_{3l} = \begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{Bmatrix}_{\text{верх}} - \begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{Bmatrix}_{\text{нижн}}.$$

<sup>1)</sup> Необходимые сведения из векторной алгебры можно найти в приложении 5.

### 14.3. Поле перемещений

Определим теперь поле перемещений элемента. Предположим, что деформации в направлении нормали к срединной поверхности препнебрежимо малы. Тогда перемещения внутри элемента будут однозначно определяться тремя декартовыми компонентами узлового перемещения срединной поверхности и двумя углами поворота узлового вектора  $\mathbf{V}_{3i}$  относительно двух взаимно ортогональных перпендикулярных к нему направлений. Если два таких ортогональных направления заданы векторами единичной длины  $v_{2i}$  и  $v_{1i}$  с соответствующими углами поворота (скалярами)  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , то по аналогии с (14.2), опуская для простоты индекс «сред», можно записать

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \xi \frac{t_i}{2} [\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}, \quad (14.3)$$

откуда легко получить обычную форму

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \{\delta_i\}^e \\ \vdots \\ \{\delta_i\}^e \end{Bmatrix}, \quad \text{где } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $u$ ,  $v$  и  $w$  — перемещения в направлениях осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  глобальных координат.

Так как векторов, нормальных к заданному, бесчисленное множество, то для обеспечения однозначности используются специальные приемы. Некоторые такие приемы рассматривались в гл. 11. Здесь будет описан более простой способ обеспечения однозначности.

Так, если  $\mathbf{V}_{3i}$  — вектор, к которому надо построить нормаль, то направим первую ось по нормали к плоскости, проходящей через этот вектор и ось  $x$ <sup>1</sup>). Построенный таким образом вектор  $\mathbf{V}_{1i}$  определяется как векторное произведение

$$\mathbf{V}_{1i} = i \times \mathbf{V}_{3i}, \quad (14.4)$$

где

$$i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup>) Алгоритм проверки, если направление вектора  $\mathbf{V}_{3i}$  совпадает с направлением оси  $x$ . Для проверки этого условия легко составить программу, и если действительно это имеет место, то для определения локальных направлений используется ось  $y$ .

— единичный вектор по оси  $x$ . Разделив (14.4) на длину вектора, получим единичный вектор  $v_{1i}$ .

Третий вектор, нормальный к первым двум, определяется как векторное произведение

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{1i} \times \mathbf{V}_{3i}. \quad (14.5)$$

Направляющие косинусы локальных осей получаются путем нормирования  $\mathbf{V}_{2i}$  к  $v_{2i}$ . Таким образом, имеем три оси ортогональных локальных координат с единичными векторами

$$\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i} \text{ и } \mathbf{v}_{3i}. \quad (14.6)$$

Как и выше, если  $N'_i$  — функция формы, удовлетворяющая условиям совместности, то перемещения между смежными элементами непрерывны.

Координаты элемента определяются теперь соотношением (14.1), имеющим больше степеней свободы, чем соотношение для перемещений. Следовательно, этот элемент будет элементом суперпараметрического типа (см. гл. 8, разд. 8.3), для которого неочевидно, что критерий постоянства деформаций выполняется. Тем не менее из выражений для компонент деформации следует, что условия допустимости перемещения элемента как жесткого целого и постоянства деформаций выполняются.

При использовании соотношения (14.3) предполагается, что по толщине  $\zeta$  не возникает никаких деформаций. Хотя это направление не совсем точно совпадает с нормалью к срединной поверхности, упомянутое предположение достаточно хорошо аппроксимирует одно из обычных допущений теории оболочек.

В каждой узловой точке  $i$  срединной поверхности (фиг. 14.3) имеется пять основных степеней свободы (см. гл. 11, посвященную оболочкам).

#### 14.4. Деформации и напряжения

Для получения характеристик конечных элементов следует определить деформации и напряжения. Если используются основные гипотезы теории оболочек, то существенными являются компоненты в направлениях *взаимно ортогональных осей*, связанных с поверхностью  $\zeta = \text{const}$ . Таким образом, если в любой точке на этой поверхности построить нормаль  $z'$  и две другие ортогональные оси  $x'$  и  $y'$ , касательные к поверхности (фиг. 14.3), то выражения для представляющих интерес компонент деформации будут совпадать с соотношениями гл. 6 для трехмерного случая, в которых, согласно обычной теории оболо-

чек, деформации в направлении  $z'$  не учитываются:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix}. \quad (14.7)$$

Следует заметить, что в общем случае ни одно из этих направлений не совпадает с направлениями криволинейных координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , хотя  $x'$ ,  $y'$  лежат в плоскости  $\xi$ ,  $\eta$  ( $\zeta = \text{const}$ )<sup>1</sup>.

Напряжения, соответствующие этим деформациям, определяются матрицей  $\{\sigma'\}$ , которая связана с матрицей деформаций матрицей упругости  $[D]$ . Таким образом,

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = [D'](\{\varepsilon'\} - \{\varepsilon'_0\}) + \{\sigma'_0\}, \quad (14.8)$$

где  $\{\varepsilon'_0\}$  и  $\{\sigma'_0\}$  — произвольные начальные деформации и напряжения.

Матрица  $[D']$  размерности  $5 \times 5$  может описывать любые анизотропные свойства, а для слоистой конструкции (типа сандвича) она будет функцией от  $\zeta$ . Мы выпишем матрицу  $[D']$  только для изотропного материала. Она имеет вид

$$[D'] = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2k} & 0 \\ \text{Симметрично} & & & & \frac{1-v}{2k} \end{bmatrix}, \quad (14.9)$$

<sup>1</sup>) В самом деле, эти направления только приближенно соответствуют направлениям узловых векторов  $v_1$ , и т. д., так как в общем случае вектор  $v_3$  только приближенно перпендикулярен к средней поверхности.

где  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Коэффициент  $k$ , входящий в два последних сдвиговых члена, имеет величину 1,2. Его назначение состоит в том, чтобы улучшить аппроксимацию сдвиговых перемещений. Из определения перемещений видно, что сдвиги почти постоянны по толщине, хотя реальный закон их изменения параболический. Величина  $k = 1,2$  представляет собой отношение соответствующих значений энергии деформации.

Важно обратить внимание на то, что эту матрицу нельзя получить путем исключения соответствующих членов из эквивалентной матрицы напряжений для трехмерного случая гл. 6 [выражение (6.14)]. Чтобы ее получить, надо подставить  $\sigma'_z = 0$  в (6.13) и сделать соответствующие упрощения, так чтобы это важное допущение теории оболочек выполнялось.

#### 14.5. Характеристики элемента и некоторые необходимые преобразования

Матрица жесткости и матрицы других характеристик элемента содержат интегралы по его объему, которые в самой общей форме имеют вид

$$\int_{V^e} [S] dx dy dz, \quad (14.10)$$

где матрица  $[S]$  — функция координат. Например, для матрицы жесткости имеем соотношение

$$[S] = [B^T] [D] [B], \quad (14.11)$$

где в соответствии с определением гл. 2

$$\{e\} = [B] \{\delta\}^e. \quad (14.12)$$

Матрица  $[B]$ , как видно из соотношения (14.7), содержит производные от перемещений по локальным декартовым координатам  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Поэтому, для того чтобы вычислить соответствующие интегралы по криволинейным координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , необходимо осуществить *два преобразования*.

Прежде всего, точно так же, как это делалось в гл. 8, получим производные по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Так как глобальные перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  с криволинейными координатами связаны соотношениями (14.3), производные от этих перемещений по глобальным

координатам  $x, y, z$  определяются матричным соотношением

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (14.13)$$

Здесь, как и раньше, матрица Якоби

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

вычисляется с помощью соотношений (14.2), определяющих координаты.

Для любой системы криволинейных координат производные от глобальных перемещений можно получить численно. Последующий переход к направлениям локальных перемещений  $x', y', z'$  позволит вычислить деформации, а следовательно, и матрицу  $[B]$ .

Сначала нужно установить направление локальных осей. Вектор, нормальный к поверхности  $\xi = \text{const}$ , находится как векторное произведение любых двух векторов, касательных к этой поверхности. Таким образом,

$$\mathbf{V}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (14.15)$$

Следуя описанному выше методу, позволяющему однозначно определить два перпендикулярных вектора, и нормируя их, составим матрицу ортов по осям  $x', y', z'$  (которая, по существу, является матрицей направляющих косинусов)

$$[\theta] = [v_1, v_2, v_3]. \quad (14.16)$$

С помощью обычной операции глобальные производные от перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  преобразуются в локальные производные от локальных ортогональных перемещений:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\theta]. \quad (14.17)$$

С помощью этого соотношения компоненты матрицы  $[B']$  можно определить в явном виде, причем следует иметь в виду, что для каждого узла существует пять степеней свободы:

$$\{e'\} = [B'] \begin{Bmatrix} \{\delta_i\}^e \\ \vdots \\ \{\delta_i\}^e \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_i\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}. \quad (14.18)$$

Величина элементарного объема в криволинейных координатах определяется по формуле

$$dx dy dz = \det |J| d\xi d\eta d\zeta. \quad (14.19)$$

Этим стандартным выражением завершается вывод основных соотношений.

Численное интегрирование в пределах от  $-1$  до  $+1$  производится точно так же, как и для трехмерных элементов, рассмотренных в гл. 8.

Аналогично вычисляются и все остальные матрицы элемента.

Так как деформации изменяются линейно по толщине (в направлении  $\zeta$ ), для интегрирования в этом направлении требуются только две гауссовые точки, тогда как в направлениях  $\xi$ ,  $\eta$  для параболической и кубической функций формы используются соответственно три и четыре точки.

Здесь следует заметить, что интегрирование по  $\zeta$  при желании можно выполнить точно, экономя тем самым время вычисления. Понижение порядка интегрирования по  $\xi$  и  $\eta$  не только позволяет сократить время счета, но и приводит к заметному

улучшению характеристик элемента. Этот вопрос будет рассматриваться в разд. 14.9 и 14.10.

#### 14.6. Некоторые замечания относительно аппроксимации напряжений

После получения характеристик элемента процесс составления ансамбля и дальнейшее решение стандартны.

Остается обсудить вопрос об аппроксимации напряжений. Так как деформации определены в локальных координатах, то легко получить матрицу  $\{\sigma'\}$ . Непосредственный интерес представляют именно эти компоненты, но, поскольку направление локальных осей не всегда можно легко себе представить, иногда удобно преобразовать компоненты к глобальной системе, используя соотношение

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & 0 \end{bmatrix} [\theta]^T. \quad (14.20)$$

Если напряжения вычисляются в узле, в котором соприкасаются несколько элементов, они усредняются.

Напряжения в глобальных координатах, однако, не дают достаточно наглядной картины распределения напряжений на поверхности оболочки произвольной формы. Поэтому удобнее с помощью соответствующего преобразования вычислять главные напряжения.

При более тщательном исследовании напряжений на поверхности оболочки целесообразно, заметив, что касательные напряжения  $\tau_{x'z'}$  и  $\tau_{y'z'}$  на ней отсутствуют, положить их равными нулю перед переходом к глобальным напряжениям. Значения, полученные для касательных напряжений, являются средними по сечению. Касательные напряжения максимальны на нейтральной оси, и их значения превышают средние в 1,5 раза.

#### 14.7. Частный случай осесимметричных толстых оболочек

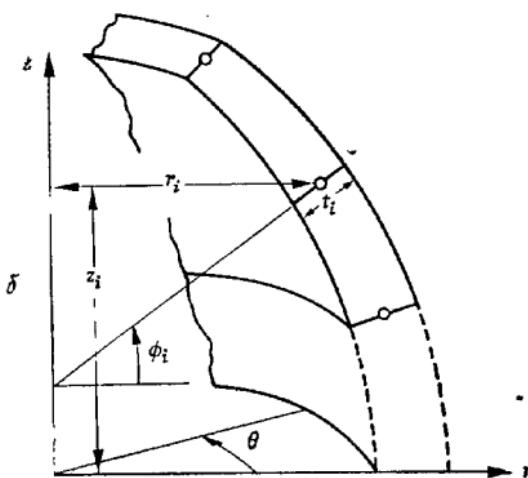
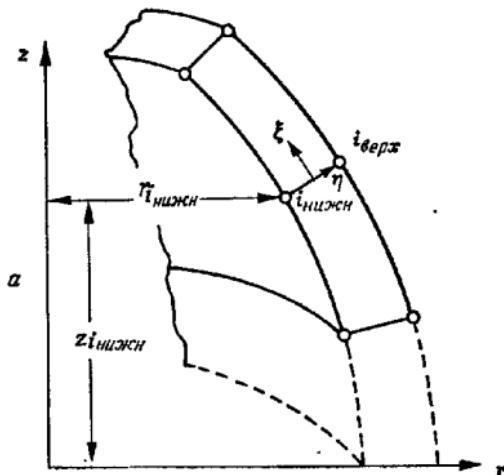
Очевидно, что для осесимметричных оболочек все соотношения упрощаются [1]. Теперь срединная поверхность элемента определяется только двумя координатами  $\xi$ ,  $\eta$ , в результате чего значительно экономится машинное время. Элемент строится точно так же, но за основу берется двумерный элемент, изображенный на фиг. 14.4. Соотношения (14.1) и (14.2) заменяются их двумерными аналогами, определяющими зависимость

между координатами в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} r \\ z \end{array} \right\} &= \sum N_i(\xi) \frac{1+\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} r_i \\ z_i \end{array} \right\}_{\text{верх}} + \sum N_i(\xi) \frac{1-\eta}{2} \left\{ \begin{array}{l} r_i \\ z_i \end{array} \right\}_{\text{нижн}} = \\ &= \sum N_i(\xi) \left\{ \begin{array}{l} r_i \\ z_i \end{array} \right\}_{\text{сред}} + \sum N_i(\xi) \frac{\eta}{2} V_{3i}, \quad (14.21) \end{aligned}$$

где

$$V_{3i} = t_i \left\{ \begin{array}{l} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{array} \right\},$$



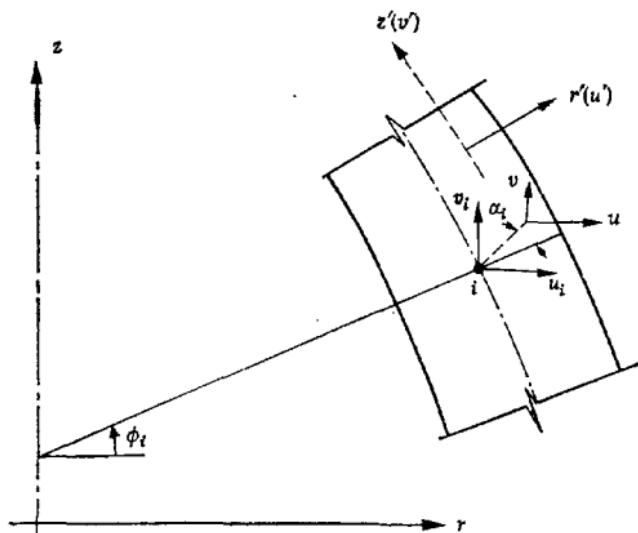
Фиг. 14.4. Координаты для расчета осесимметричной оболочки,

$\phi_i$  — угол, показанный на фиг. 14.4, б, и  $t_i$  — толщина оболочки. Выражение для перемещений определяется в соответствии с формулой (14.3).

Для общности рассмотрим случай несимметричного нагружения, указывая лишь члены, которые можно *заранее* исключить в симметричном случае. Следуя изложенному в гл. 13, предположим, что выполнено разложение по тригонометрическим функциям. Определим три компоненты перемещения  $n$ -й гармоники в виде

$$\begin{Bmatrix} u^n \\ v^n \\ w^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \left( \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i^n \\ v_i^n \\ w_i^n \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum N_i n \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} -\sin \phi_i & 0 \\ \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i^n \\ \beta_i^n \end{Bmatrix} \right). \quad (14.22)$$

Здесь  $\alpha_i$  — угол поворота, показанный на фиг. 14.5;  $u_i$  и др. — перемещения узла срединной поверхности и  $\beta_i$  — угол поворота



Фиг. 14.5. Глобальные перемещения осесимметричной оболочки.

относительно вектора, касательного (приблизительно) к срединной поверхности.

Для осесимметричного случая дальнейшее упрощение осуществляется путем исключения членов, содержащих  $w$ , первой матрицы тригонометрических постоянных и угла поворота  $\beta_i$ .

Локальные деформации удобнее определить соотношением (14.7), записанным в глобальных цилиндрических координатах:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_0 \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r0} \\ \gamma_{z0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (14.23)$$

Эти деформации преобразуются к локальным координатам, причем компонента, нормальная к поверхности  $\eta = \text{const}$ , исключается.

Матрица  $[D']$  принимает вид (14.9). Для осесимметричного случая соответствующие члены просто опускаются.

Все преобразования осуществляются так же, как и в предыдущих разделах, поэтому дополнительных пояснений не требуется, за исключением, возможно, замечания, что теперь они производятся только относительно пар переменных  $\xi, \eta; r, z$  и  $r, z'$ . Аналогично интегралы, входящие в характеристики элемента, вычисляются численно только по координатам  $\xi$  и  $\eta$ . Заметим, однако, что элемент объема определяется выражением

$$dx dy dz = \det |J| d\xi d\eta r d\theta. \quad (14.24)$$

Элементы переменной толщины второго и третьего порядка (фиг. 14.6) получаются при соответствующем подборе функций формы  $N_i(\xi)$ .

## 14.8. Частный случай толстых пластин

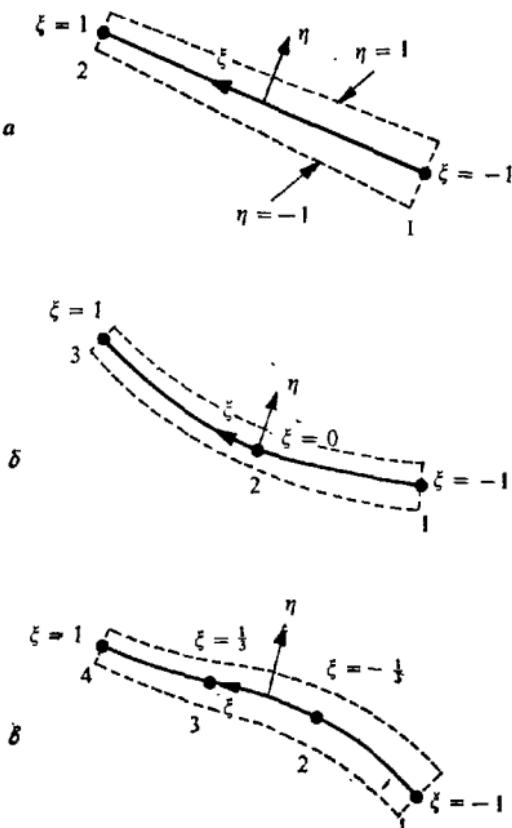
Описанные в этой главе преобразования довольно сложны и запрограммировать их непросто. Основные идеи метода можно применить при расчете толстых пластин.

Упрощения достигаются за счет того, что:

1)  $\xi = z$  и направления единичных векторов  $\mathbf{v}_{1z}, \mathbf{v}_{2z}, \mathbf{v}_{3z}$  можно взять совпадающими с направлениями осей  $x, y$  и  $z$ ;

2)  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  в этом случае являются просто углами поворота  $\theta_y$  и  $\theta_x$  (см. гл. 10);

3) нет необходимости преобразовывать компоненты напряжений и деформаций к локальной системе  $x', y', z'$  и всюду



Фиг. 14.6. Элементы осесимметричной оболочки: *а* — первого порядка, *б* — второго порядка и *в* — третьего порядка.

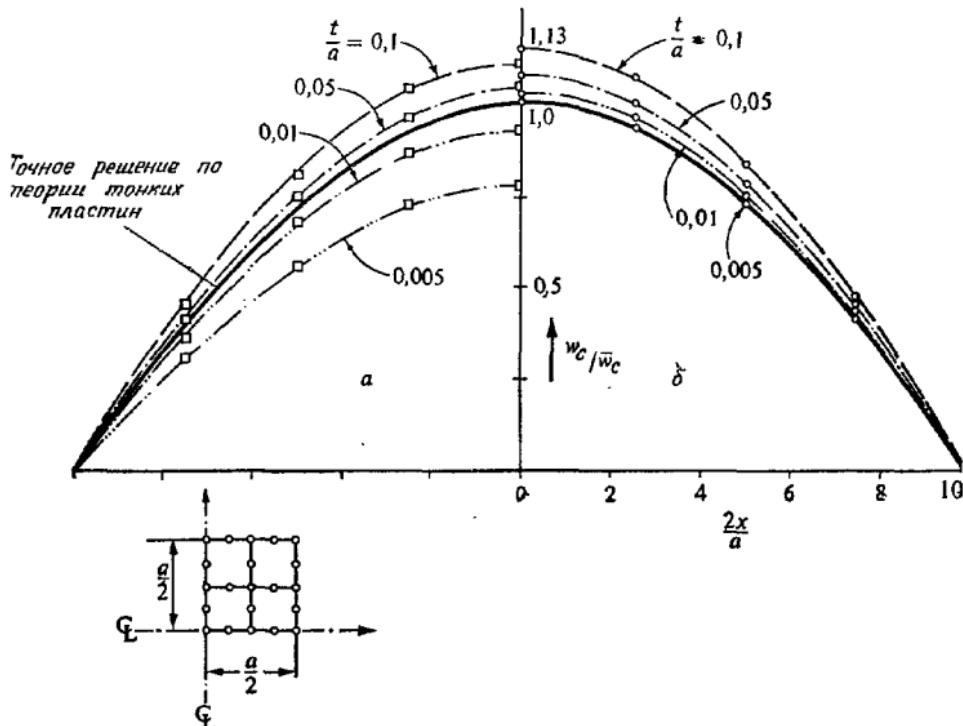
можно использовать соотношения в глобальных координатах. Для элементов простой формы можно обойтись без численного интегрирования, и в качестве упражнения читателю рекомендуется получить все необходимые выражения (матрицы, жесткости и др.), скажем, для прямоугольных элементов первого порядка.

#### 14.9. Сходимость

Если при расчете трехмерных задач можно говорить об абсолютной сходимости к точному решению упругой задачи, то в аналогичных задачах для пластин или оболочек такой сходимости быть не может. Так называемое сходящееся решение задачи об изгибе пластин при уменьшении размеров элемента сходится к точному решению для некоторой приближенной модели, используемой в расчете. Следовательно, будет наблюдаться схо-

димость к решению, удовлетворяющему гипотезе плоских сечений.

В элементах конечных размеров деформации чистого изгиба всегда сопровождаются некоторыми сдвиговыми напряжениями, которые фактически не учитываются в теории изгиба пластин или оболочек. Большие элементы, деформирующиеся главным



Фиг. 14.7. Свободно опертая квадратная пластина под действием равномерно распределенной нагрузки  $q_0$ .

*a* — прогибы на центральной линии, полученные при использовании элементов, построенных в работе [1]; *b* — прогибы, полученные при использовании численного интегрирования без учета сдвигов,  $\bar{w}_c = 0,004062 q_0 a^4 / D$  (результат расчета по теории тонких пластин), *t* — толщина пластины, *D* — жесткость пластины.

образом под действием изгибающих моментов (например, когда элемент оболочки вырождается в пластину), становятся заметно более жесткими. Чтобы избежать этого, вводятся некоторые ограничения на отношение длины стороны элемента к его толщине.

Однако можно показать, что эти ограничения могут быть ослаблены за счет *понижения порядка интегрирования*.

Например, на фиг. 14.7 показано применение элемента второго порядка при расчете квадратной пластины. Приведены результаты, соответствующие интегрированию с девятью ( $3 \times 3$ ).

и четырьмя ( $2 \times 2$ ) гауссовыми точками, в виде графиков для различных отношений толщины к длине стороны пластины. Для оболочек средней толщины результаты близки между собой, и в обоих случаях получаются сдвиговые деформации, которые вообще не рассматриваются в теории тонких пластин. Для тонких пластин результаты при более точном интегрировании значительно отличаются от точного решения, полученного с использованием теории тонких пластин, тогда как более грубое интегрирование (при исключении влияния сдвигов) по-прежнему дает хорошие результаты.

Ограничения на применение рассматриваемых в этой главе элементов хорошо известны, и неоднократно предпринимались попытки исключить их [5—7]. Как видно, весьма эффективным и достаточно общим средством является такой простейший прием, как понижение порядка интегрирования.

#### 14.10. Некоторые примеры

Ниже приведено несколько примеров, иллюстрирующих область применения и точность описанного метода расчета толстых оболочек. Другие примеры можно найти в работах [1—3].

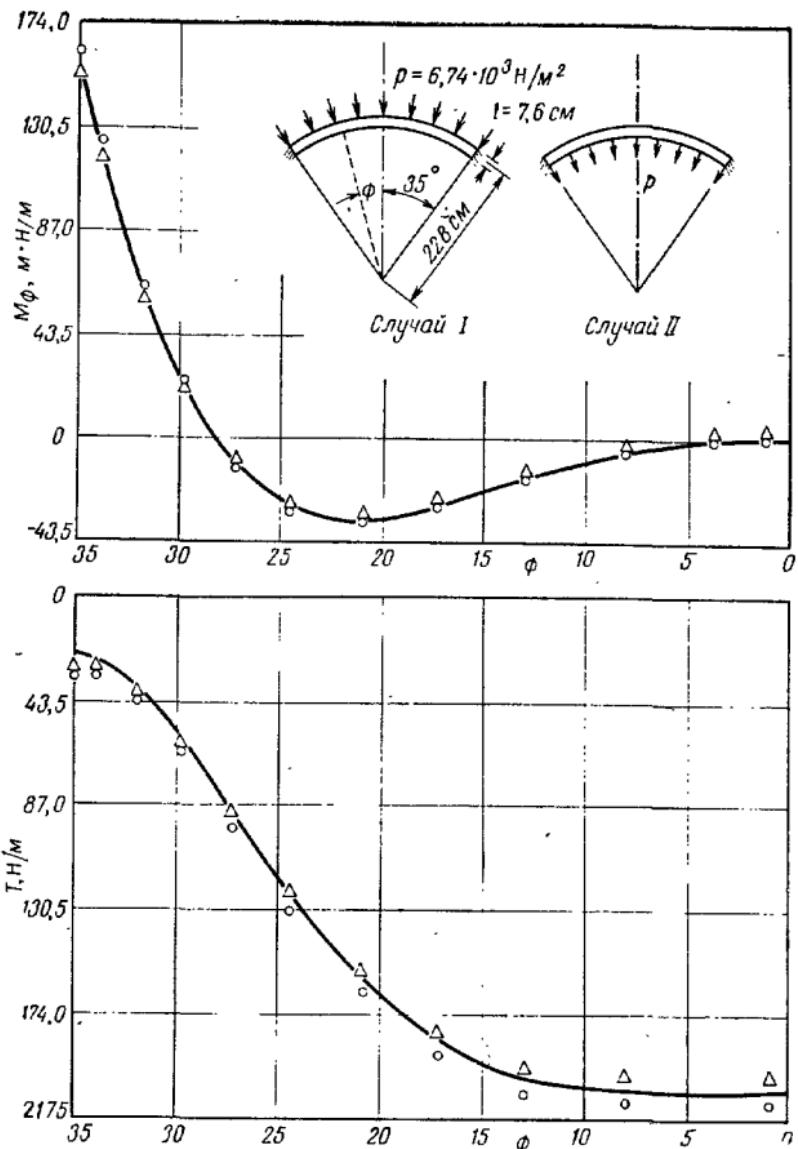
**Сферический купол под действием равномерно распределенного давления.** На фиг. 14.8 показано известное точное решение этой осесимметричной задачи, полученное с использованием теории оболочек. Для решения применялись 24 элемента третьего порядка. Размеры элементов по мере приближения к краям уменьшались.

Полученное решение, по-видимому, даже более точное, чем аналитическое, поскольку оно позволяет учесть, приложено давление на внутренней или на наружной поверхности.

**Цилиндр, нагруженный по торцам.** Следующий пример осесимметричной задачи, показанный на фиг. 14.9, приведен для того, чтобы исследовать влияние числа разбиений. Использовалось 2, 6 и 14 элементов различной длины. Результаты для двух последних разбиений почти совпадают с точным решением. Даже при использовании лишь двух элементов получаются удовлетворительные результаты, которые отличаются от точного решения только в окрестности нагруженного края.

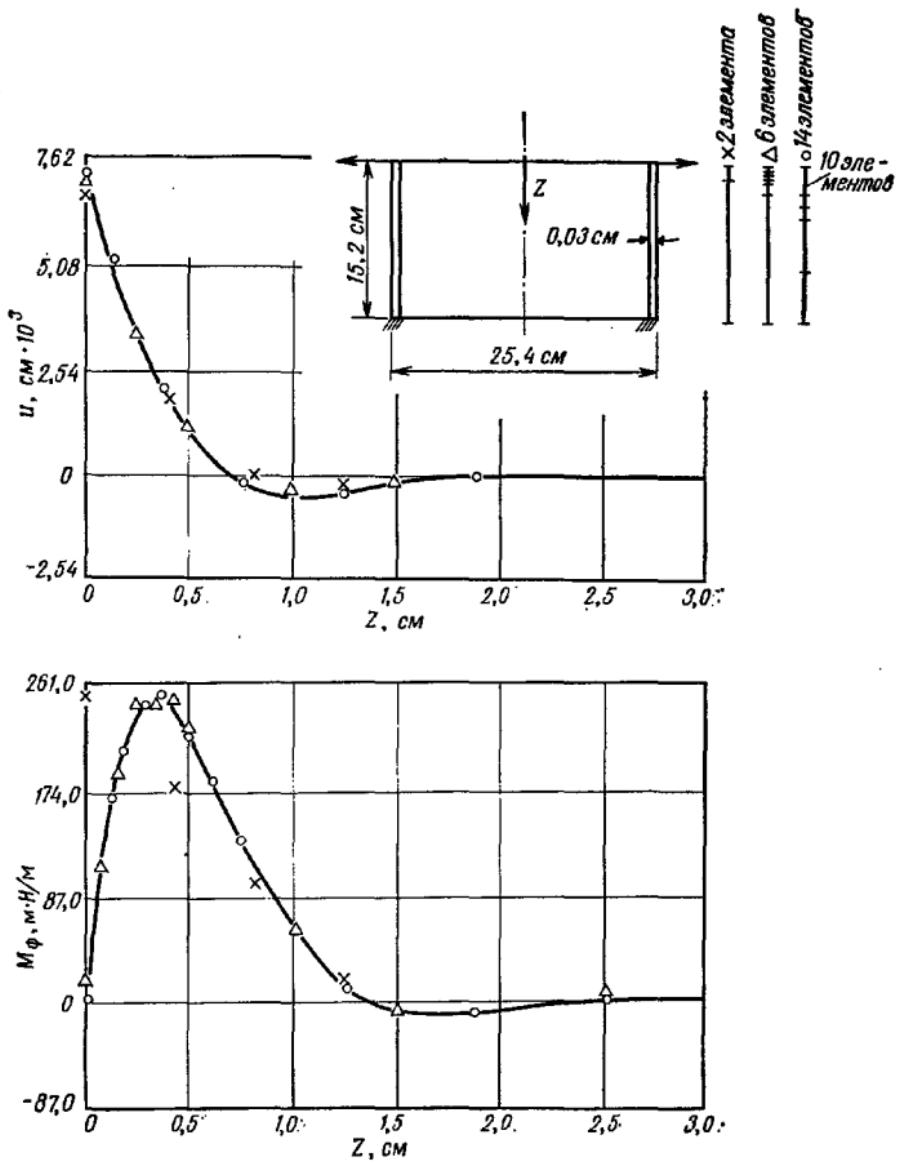
**Цилиндрический свод.** Это пример применения метода к расчету оболочки, для которой существенны изгибающие эффекты, так как опоры препятствуют перемещению двух краев (фиг. 14.10).

На фиг. 14.11 приводится сравнение результатов численного интегрирования с использованием девяти и четырех точек для элементов второго порядка. В обоих случаях, как и следовало ожидать, решение сходится. При более точном интегрировании

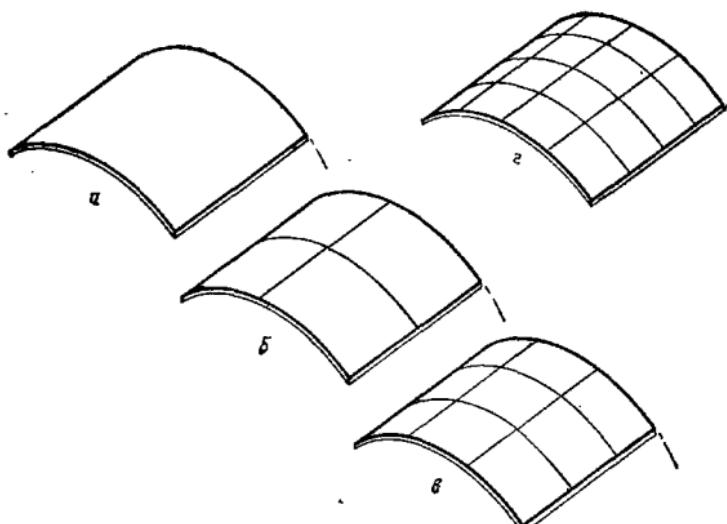
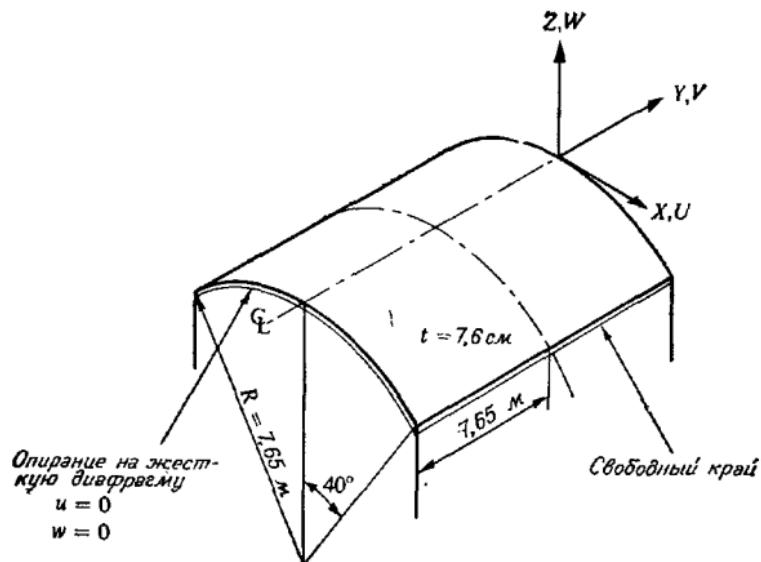


Фиг. 14.8. Расчет сферического купола под действием равномерно распределенного давления при использовании 24 элементов третьего порядка. (Первый элемент у закрепленного края стягивает дугу в  $0,1^\circ$ , размеры остальных элементов увеличиваются по арифметической прогрессии.)

$M_\phi$  — меридиональный изгибающий момент,  $T$  — окружное усилие,  $v = 1\%$ . — аналитическое решение;  $\circ$  случай I;  $\Delta$  случай II.



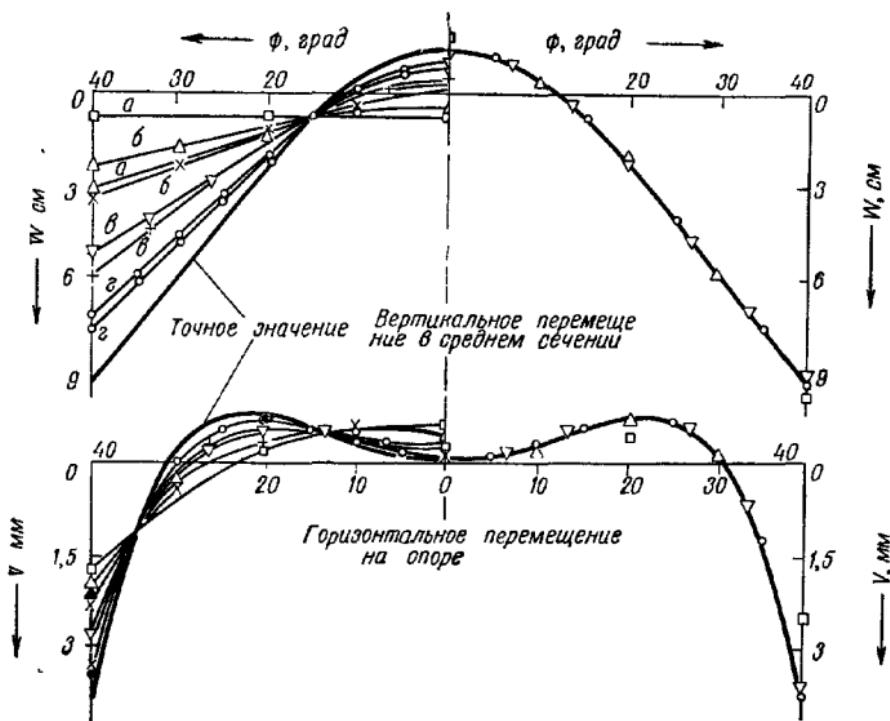
Фиг. 14.9. Тонкий цилиндр, нагруженный по краю единичной нагрузкой в радиальном направлении.  
 — радиальное перемещение,  $M_\phi$  — меридиональный момент,  $E = 6,74 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,3$  — теоретическое решение.



Фиг. 14.10. Цилиндрическая оболочка под действием собственного веса:  
 $E = 4,55 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0$ ,  $q = 9,5 \text{ Н/м}^2$ .  
 Число степеней свободы

Сетка	Элементы второго порядка
а	23
б	76
в	159
г	272

сходимость довольно медленная, в то время как при более низком порядке интегрирования очень точные результаты получаются даже при использовании одного элемента. Приведенный пример иллюстрирует преимущества такого простого приема, как



Фиг. 14.11. Перемещение цилиндрического перекрытия (элементы второго порядка).

Элементы, построенные в работе [3]	Интегрирование без учета сдвига	Сетка	Интегрирование по 2×2 точкам
□	△	а	□
△	×	о	△
▽	+	в	▽
○	○	г	○

понижение порядка интегрирования. Более подробно этот пример описан в работах [4, 8]. Обычным способом точное решение этой задачи получено в работе [9].

Улучшенная сходимость по перемещениям в этом случае соответствует сходимости по напряжениям.

**Градирия.** Опять рассмотрим градирню, о которой уже шла речь в гл. 11 (разд. 11.6, фиг. 11.10). При расчете осесимметричной оболочки разбивалась на 15 элементов третьего порядка. Несимметричная (ветровая) нагрузка достаточно точно представлялась десятью гармониками. Результаты совпали с экспериментальными данными, с которыми сравнивались результаты, полученные в гл. 11, так что в дополнительных графиках нет необходимости.

Решение изложенным в этой главе методом значительно экономичнее решения методом, изложенным в гл. 11.

**Криволинейная плотина.** Все предыдущие примеры относились к тонким оболочкам и демонстрировали применимость метода к решению именно таких задач. В качестве примера другого типа этим методом была рассчитана плотина двойной кривизны, рассмотренная в гл. 9 (фиг. 9.8). Использовалось точно такое же разбиение, и результаты почти в точности совпали с результатами решения трехмерной задачи [3]. Такое хорошее совпадение получено при значительном сокращении числа степеней свободы и затрат машинного времени.

Очевидно, что область применения элементов такого типа очень широка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axi-Symmetric Problems, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
2. Ahmad S., Curved Finite Elements in the Analysis of Solid, Shell and Plate Structures, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
3. Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 419—451 (1970).
4. Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L., Reduced Intergration Technique in General Analysis of Plates and Shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 275—290 (1971).
5. Key S. W., Beisinger Z. E., The Analysis of Thin Shells with Transverse Shear Strain by the Finite Element Method, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Air Force Inst. Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
6. Wenzner G. A., Oden J. T., Kross D. A., Finite Element Analysis of Thin Shells, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, EM6, 1273—1294 (1968).
7. Stricklin J. A., Haisler W. E., Tisdale P. R., Ganderston R., A Rapidly Converging Triangular Plate Element, *JAILA*, **7**, 180—181 (1969); есть русский перевод: Стрикли, Хайслер, Тисдейл, Гандерсон, Элемент в форме резко сужающейся треугольной пластины, *Ракетная техника и космонавтика*, № 1, стр. 219 (1969).
8. Pawsley, Dept. of Structural Mechanics, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1970.
9. Scordelis A. C., Lo K. S., Computer Analysis of Cylindrical Shells, *J. Am. Concr. Inst.*, **61**, 539—561 (1969).

# ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ, ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ДР.)

## 15.1. Введение

Хотя в предыдущих главах подробно рассматривались в основном задачи для упругой сплошной среды, описанный общий метод можно применить к решению самых разнообразных физических задач. В гл. 3 уже упоминалось о некоторых таких задачах, здесь же будет подробно рассмотрен один из широких классов подобных задач.

Остановимся сначала на задачах, описываемых квазигармоническим уравнением общего вида, частными случаями которого являются известные уравнения Лапласа и Пуассона [1—6]. Круг физических задач, описываемых этими уравнениями, весьма широк. В инженерной практике чаще всего встречаются задачи, в которых рассматриваются:

- теплопроводность;
- фильтрация сквозь пористую среду;
- безвихревое течение идеальной жидкости;
- распределение электрического (или магнитного) потенциала;
- кручение призматических стержней;
- изгиб призматических балок и др.;
- смазка опорных поверхностей.

Соотношения, приведенные в этой главе, в равной степени применимы ко всем указанным задачам, поэтому реальные физические величины будут использоваться редко. Рассматриваются как изотропные, так и анизотропные тела.

В первой части главы обсуждаются двумерные задачи. Далее они обобщаются на трехмерные. При решении используются те же функции формы, что и для двумерных и трехмерных задач теории упругости. Основное отличие состоит в том, что теперь с каждой точкой пространства связана только одна неизвестная скалярная величина (неизвестная функция), тогда как раньше находили несколько неизвестных, составляющих вектор перемещения.

Дискретизация на конечные элементы достигается с помощью вариационного метода (см. гл. 3) с использованием функционала, математически эквивалентного дифференциальному уравнению. Этот функционал в приложениях можно физически интерпретировать, связывая его, как правило, с понятием

диссипации энергии. Те же самые соотношения можно получить с помощью метода взвешенных невязок или метода Галеркина, и читателю рекомендуется сделать это в соответствии с указаниями гл. 3.

Помимо нескольких простых задач, описываемых квазигармоническим уравнением, будут рассмотрены некоторые задачи о вязком течении, описываемые уравнениями более высоких порядков [7]. При этом будет упомянута другая постановка некоторых задач теории упругости [8].

## 15.2. Экстремальная проблема

Квазигармоническое уравнение, описывающее поведение неизвестной физической величины  $\phi$ , в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (15.1)$$

где  $\phi$  — неизвестная однозначная в рассматриваемой области функция, а  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  и  $Q$  — известные функции координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Читатель, знакомый, например, с задачами теории теплопроводности, отождествит функции  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  с коэффициентами теплопроводности анизотропного материала, функцию  $Q$  — со скоростью теплообразования, а неизвестную функцию  $\phi$  — с температурой (при условии, что главные направления анизотропии материала совпадают с осями координат). В задачах электротехники эти величины можно связать соответственно с коэффициентами проводимости, плотностью тока и потенциалом. Независимо от того, какие физические величины рассматриваются, математическая задача остается одной и той же.

Физические особенности частных задач накладывают определенные граничные условия. Чаще всего встречаются случаи, когда:

а) на границе заданы значения неизвестной функции  $\phi$ :

$$\phi = \phi_\beta, \quad (15.2)$$

б) на границе выполняется условие

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q + \alpha \phi = 0, \quad (15.3)$$

где  $l_x$ ,  $l_y$  и  $l_z$  — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности.

Если  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$  равны между собой, а  $q$  и  $\alpha$  равны нулю, то последнее условие сводится к известному условию непроница-

мости границы

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (15.4)$$

В задачах теплопроводности  $q$  представляет собой поток (тепла) через поверхность единичной площади, а  $\alpha\phi$  — потери тепла путем конвекции.

Уравнение (15.1) вместе с граничными условиями однозначно определяет задачу. Однако возможна и вариационная формулировка задачи. Согласно известной теореме Эйлера, для того чтобы в некоторой области  $V$  интеграл

$$\chi(u) = \iiint_V f \left( x, y, z, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (15.5)$$

принимал минимальное значение, необходимо и достаточно, чтобы неизвестная функция  $\phi(x, y, z)$  удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial y)} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (15.6)$$

в той же области при условии, что  $\phi$  в обоих случаях удовлетворяет одинаковым граничным условиям. Можно убедиться, что уравнение (15.1) эквивалентно требованию минимизации интеграла<sup>1)</sup>

$$\chi = \iiint \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - Q\phi \right] dx dy dz \quad (15.7)$$

по всей области при тех же граничных условиях для  $\phi$ .

Однако при подборе функций формы нецелесообразно требовать удовлетворения обоим граничным условиям «а» и «б». Хотя условию «а» удовлетворить легко, выполнение условия «б» привело бы к значительным трудностям. Поэтому лучше не накладывать никаких ограничений на значения функций на тех частях границы, где должно быть удовлетворено условие «б», а добавить к функционалу (15.5) поверхностный интеграл по границе, который после минимизации обеспечивает выполнение этого граничного условия. В общем случае указанный интеграл в уравнении Эйлера имеет вид

$$\int_S \left( q\phi + \frac{1}{2} \alpha\phi^2 \right) dS, \quad (15.8)$$

<sup>1)</sup> На самом деле (15.6) является необходимым условием существования экстремали функционала (15.5). — Прим. ред.

где  $S$  — поверхность, на которой задано условие «б». Если интеграл (15.8) добавить к выражению (15.5) или (15.7) для функционала  $\chi$ , то после минимизации граничное условие (15.3) будет выполняться автоматически. Читатель, интересующийся подробностями вывода уравнения Эйлера в этой довольно общей форме, найдет все необходимые сведения в приложении 6.

### 15.3. Конечно-элементная дискретизация

#### 15.3.1. Общий трехмерный случай

Если неизвестная функция  $\phi$  определена для каждого элемента в обычной форме:

$$\phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \vdots \\ \phi_l \end{Bmatrix} = [N] \{\phi\}^e, \quad (15.9)$$

где  $\phi_i$  и т. д. — узловые параметры, то функционал можно минимизировать приближенно.

Следуя обычному порядку, вычислим вклад каждого элемента, используя соотношения (15.7) — (15.9). Дифференцируя (15.7) и (15.8), для произвольного узла запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^e}{\partial \phi_l} = & \int_V \left\{ k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - Q \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right\} dx dy dz + \int_{S^e} \left( q \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} + a \phi \frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} \right) dS. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Второй интеграл появляется только для элементов у внешней границы, на которой заданы условия типа «б».

Замечая, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial x}, \dots \right] \{\phi\}^e \text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \phi_i} = N_i \text{ и т. д.,}$$

для всего элемента (см. гл. 3) получаем

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\phi\}^e} = [h]^e \{\phi\}^e + \{F\}^e, \quad (15.11)$$

где матрица жесткости  $[h]^e$

$$h_{ij}^e = \int_V \left\{ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (15.12)$$

строится с помощью соотношений (15.9) и (15.10) и

$$F_i^e = - \int_V Q N_i dV + \int_S q N_i dS + \left( \int_S [N] \alpha N_i dS \right) \{\phi\}^e \quad (15.13)$$

с учетом того, что  $dV = dx dy dz$ . Минимизирующая система уравнений для всей области составляется по общим правилам. В результате получаем

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\phi\}} = 0 = [H] \{\phi\} + \{F\}, \quad (15.14)$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e, \quad F_i = \sum F_i^e,$$

и суммирование, как обычно, производится по всем элементам. Поскольку не известна лишь одна функция, в приведенных соотношениях фигурируют только скалярные величины.

Если интерпретировать соответствующие величины как жесткости и силы, то можно провести аналогию с расчетом конструкций. Анализируя структуру соотношения (15.13) для сил, легко заметить, что первый член соответствует объемным силам в задачах теории упругости.

Второй член представляет собой вклад только от границ, на которых задан поток  $q$ . В теории упругости ему соответствует поверхностная нагрузка. Если границы непроницаемые [т. е. граничное условие имеет вид (15.4)], то имеет место точное соответствие со случаем свободной границы.

Последний член соотношения (15.13) отражает новое качество. Соответствующая ему «граничная» сила пропорциональна перемещениям на границе и, следовательно,  $\{\phi\}^e$ . Поэтому этот член эквивалентен некоторой присоединенной внешней жесткости элемента

$$[h]^e = \int_S [N]^T \alpha [N] dS, \quad (15.15)$$

представляемой в виде интеграла по границе. К дополнительной жесткости приводят, в частности, граничные условия для потерь тепла излучением или конвекцией (в задачах теплопроводности).

Так как получена полная аналогия с задачами расчета конструкций, далее могут быть проведены стандартные операции.

На заключительной стадии расчетов можно вычислить не только значения функции  $\phi$  (соответствующие перемещениям), но и ее производных (соответствующие напряжениям). Так, если записать

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right\} = [S]^e \{ \phi \}^e, \quad (15.16)$$

то получим *матрицу производных*, аналогичную матрице напряжений (2.17) гл. 2.

Ясно, что

$$\{ S_i \} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\}. \quad (15.17)$$

Вычисление этих градиентов часто имеет определенный физический смысл, так как в некоторых задачах они характеризуют скорости потока.

### 15.3.2. Условия сходимости

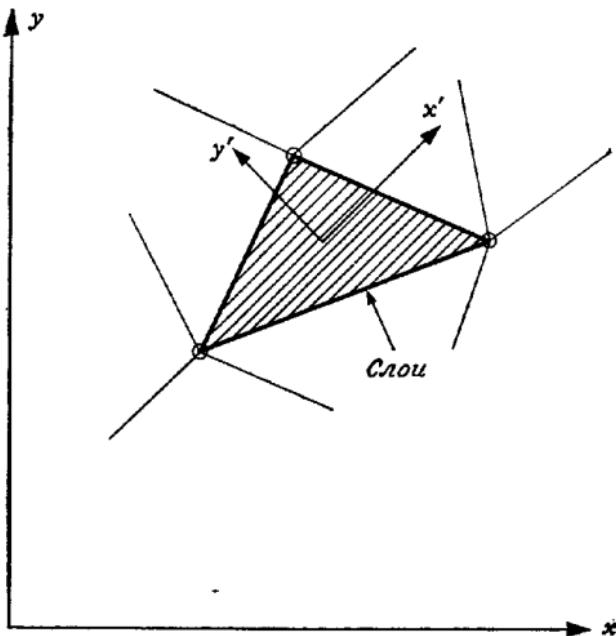
Поскольку в функционал входят лишь первые производные от  $\phi$ , то при выборе функций формы требуется удовлетворить только условиям непрерывности функции  $\phi$ . Кроме того, функции формы должны быть такими, чтобы любые первые производные принимали внутри элемента постоянные значения при соответствующем задании узловых величин  $\{ \phi \}^e$ . Поэтому при решении практических задач можно использовать функции формы, рассмотренные в гл. 7, и соответствующие элементы. Кроме того, можно применять все криволинейные элементы, рассмотренные в гл. 8.

### 15.3.3. Неоднородность и анизотропия

Интересно отметить, что в минимизируемый функционал не входят производные от коэффициентов теплопроводности ( $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ ). Поэтому приведенные выше соотношения в равной степени справедливы и для постоянных и для переменных коэф-

фициентов. Они могут скачкообразно изменяться от элемента к элементу или даже принимать различные значения внутри элемента, причем это изменение должно учитываться в процессе интегрирования при вычислении матриц элемента.

Однако для анизотропного материала дифференциальное уравнение (15.1) справедливо только в том случае, если оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  совпадают с главными направлениями анизотропии.



Фиг. 15.1. Анизотропный материал. Локальные координаты совпадают с главными направлениями слоев.

При решении задачи для слоистого материала может возникнуть ситуация, когда это условие не будет выполняться (фиг. 15.1). В таких случаях характеристики элемента следует записывать в локальных координатах  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ , а вычислительная программа должна давать возможность осуществлять необходимые преобразования.

При этом возникает одно важное отличие от расчета конструкций. Поскольку такие матрицы элемента, как, например,  $[h]^e$  в (15.12), связывают скалярные величины, они не зависят от ориентации локальных осей. Поэтому для каждого элемента при желании можно использовать свою локальную систему, причем это не потребует матричных преобразований и не влияет на стандартную процедуру составления ансамбля,

### 15.3.4. Двумерная задача

Нетрудно записать частный вид общего уравнения (15.8) для двумерных задач, если предположить, что  $\phi$  не зависит от  $z$ . В этом случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0, \quad (15.18)$$

а минимизируемый функционал

$$\chi = \iint_V \left[ \frac{1}{2} \left\{ k_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - Q\phi \right] dx dy + \iint_S \left( q\phi + \frac{1}{2} \alpha \phi^2 \right) dS. \quad (15.19)$$

Получить все матрицы элемента довольно легко. Например, из (15.12) находятся элементы матрицы  $[h]^e$ :

$$h_{ii}^e = \iint_{V^e} \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy. \quad (15.20)$$

Обсуждать этот вопрос дальше, очевидно, нет необходимости. Однако, по-видимому, имеет смысл рассмотреть подробнее самый простой, но тем не менее очень полезный треугольный элемент (фиг. 15.2). Если принять

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta},$$

как в соотношении (4.8) гл. 4, то получим матрицу жесткости в виде

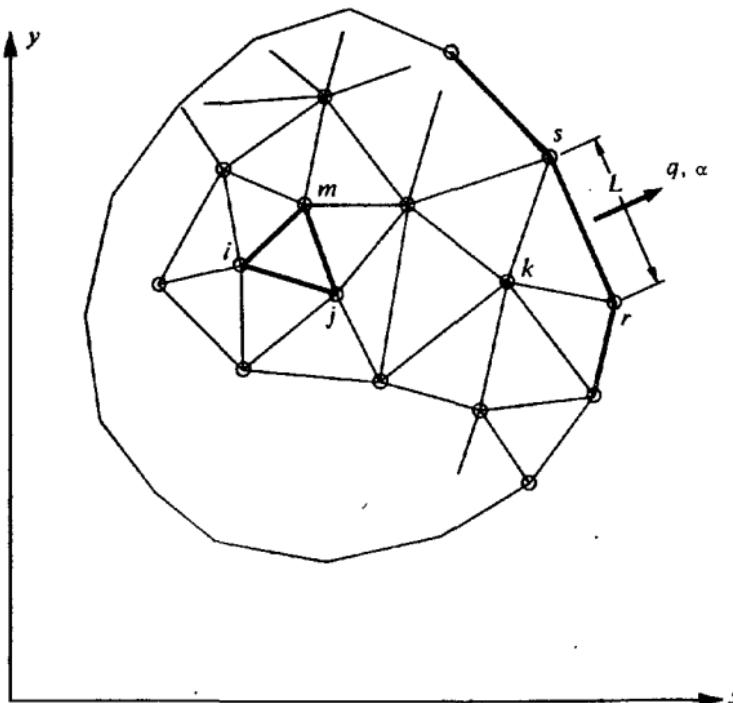
$$[h]^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix}.$$

Симметрично  $b_m b_m$       Симметрично  $c_m c_m$

(15.21)

Также просто строятся и матрицы нагрузки; например, для  $Q$  читатель может получить очень простой (почти очевидный) результат

$$\{F\}_Q^e = -\frac{Q\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (15.22)$$



Фиг. 15.2. Разбиение двумерной области на треугольные элементы.

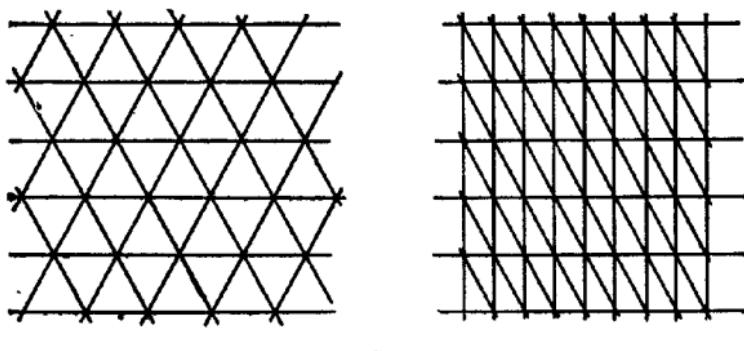
Уравнение (15.8) можно записать в цилиндрических координатах и использовать для решения осесимметричных задач. В этом случае дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( k_r r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z r \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0. \quad (15.23)$$

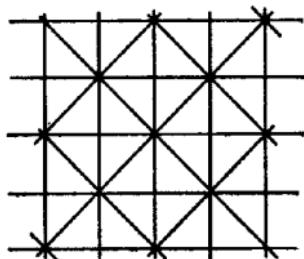
Соответствующим образом должен быть преобразован и функционал, но проще считать величины  $k_r r$  и  $k_z r$  модифицированными значениями коэффициентов теплопроводности и непосредственно использовать приведенные выше выражения. При этом интегрирование лучше всего производить численно, как в аналогичных задачах гл. 5.

#### 15.4. Примеры. Оценка точности

Легко показать, что уравнения, полученные в результате объединения выраженных в явном виде жесткостей треугольных элементов для регулярных сеток (фиг. 15.3, а), совпадают с уравнениями, полученными известными конечно-разностными методами [10]. Очевидно, что и решения, полученные этими ме-

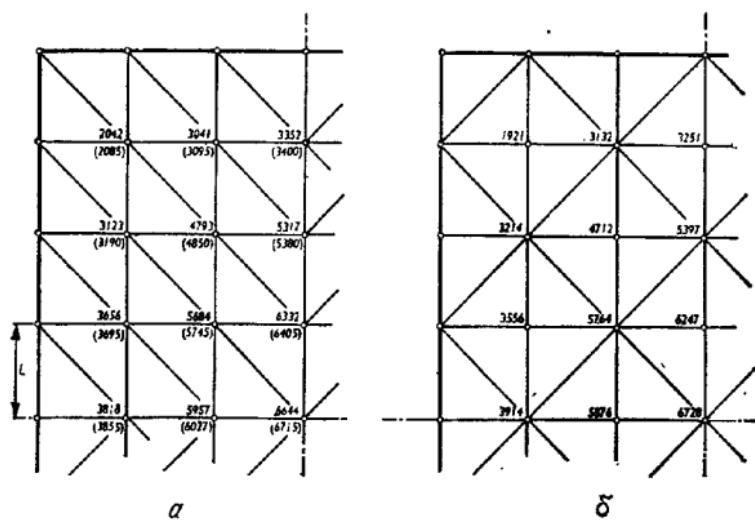


*a*



*b*

Фиг. 15.3. Образцы регулярного и нерегулярного разбиений.



Фиг. 15.4. Кручение вала прямоугольного сечения,

числа в скобках — более точное решение Саусвелла при использовании сетки 12×16 (здесь величины  $\phi/G\theta L^2$ ).

тодами, будут одинаковыми и иметь одинаковую степень точности<sup>1)</sup>.

Если используется нерегулярная сетка, изображенная на фиг. 15.3, б, то различие между двумя подходами очевидно. Оно касается в основном вектора нагрузки  $\{F\}^e$ . При конечно-элементной аппроксимации значения узловых нагрузок несколько отличаются от нагрузок при конечно-разностной аппроксимации, но суммарные значения их одинаковы. Поэтому решения, полученные этими двумя методами, будут иметь только локальные отличия, а в среднем они будут одинаковы.

На фиг. 15.4 решение, полученное методом конечных элементов при нерегулярной сетке, сравнивается с решением конечно-разностных уравнений наименьшего порядка аппроксимации методом релаксации. Как и следовало ожидать, оба решения дают результаты одного порядка точности.

У читателя, вероятно, может возникнуть вопрос: зачем нужно было вводить другой метод, который, казалось бы, повторяет результаты известного и хорошо зарекомендовавшего себя метода? Причина кроется в том, что новый метод обладает рядом несомненных преимуществ. К ним относятся:

а) простота исследования неоднородных и анизотропных тел (в частности, когда направление анизотропии переменное);

б) возможность использования элементов различной формы и размеров для аппроксимации произвольных границ и для исследования областей сильного изменения неизвестных функций;

в) граничные условия для градиента (условия излучения) вводятся естественным образом и с большей точностью, чем в обычных конечно-разностных методах;

г) точность решения можно увеличивать за счет использования элементов более высоких порядков без усложнения граничных условий, чего нельзя добиться при использовании конечно-разностной аппроксимации более высокого порядка;

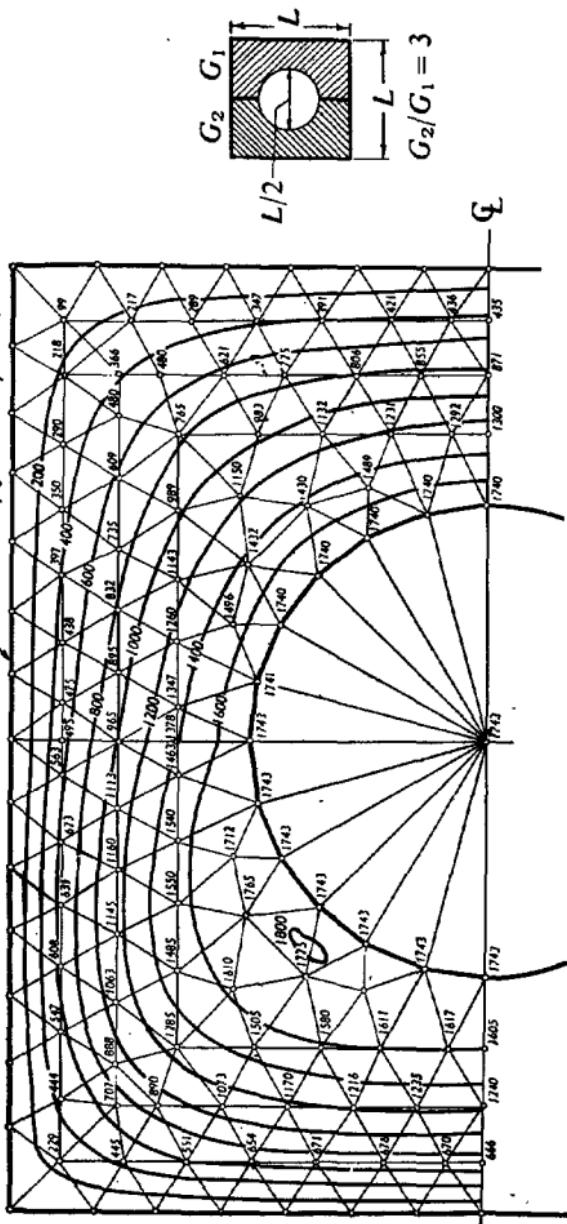
д) последнее, но очень важное при широком распространении ЭВМ преимущество состоит в том, что для составления ансамбля и решения систем уравнений можно использовать стандартные (предназначенные для расчета конструкций) программы.

Для демонстрации достижимой на практике точности приводятся два более сложных примера. Первый из них — это задача о чистом кручении неоднородного стержня (фиг. 15.5). Основное дифференциальное уравнение имеет вид

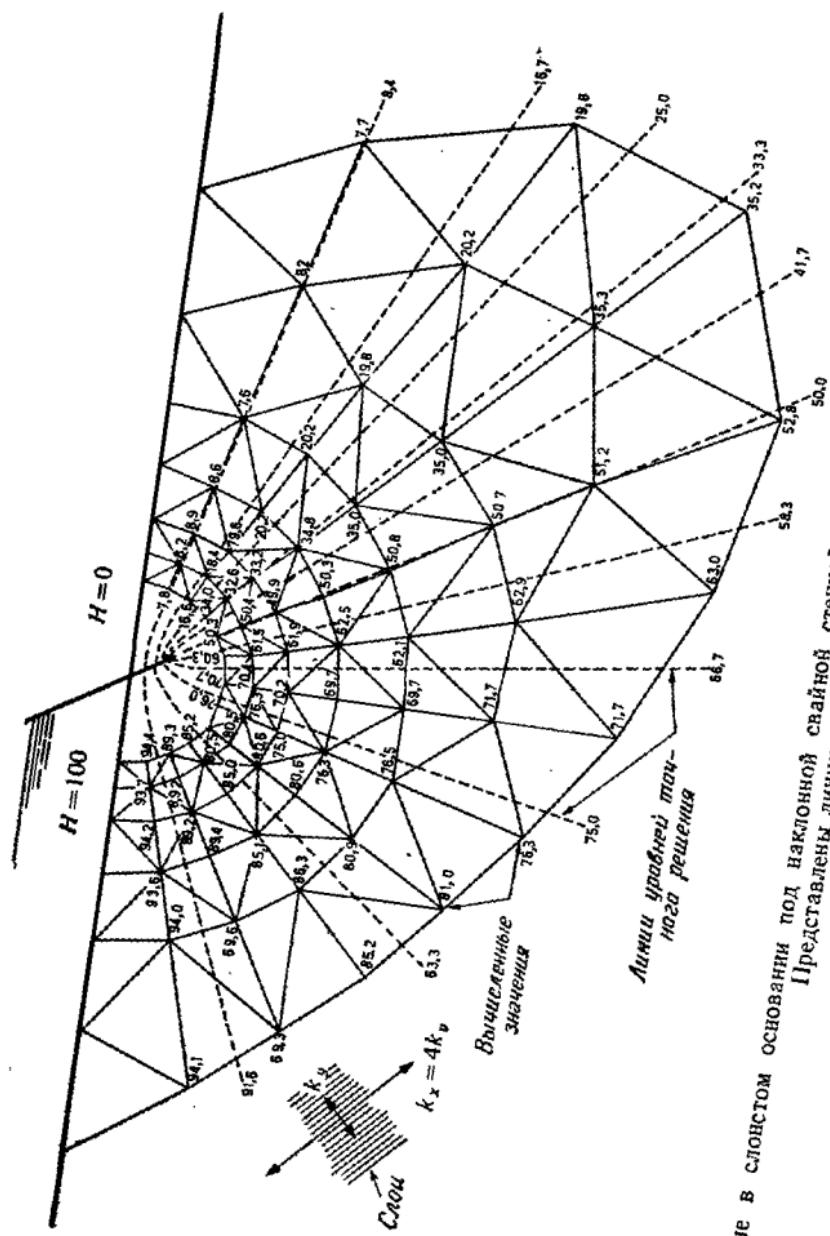
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + 2\theta = 0, \quad (15.24)$$

<sup>1)</sup> В случае, когда на границе заданы значения неизвестной функции.

$\phi=0$  на наружной границе



Фиг. 15.5. Кручение полого биметаллического вала,  $\phi/G\theta L^2 \cdot 10^4$ .



Фиг. 15.6. Течение в слонистом

При под наклонной свайной стенкой уровня линии точного решения. Представлениям сетка вблизи стеки не показана.

где  $\phi$  — функция напряжений,  $G$  — модуль сдвига и  $\theta$  — угол закручивания на единицу длины стержня.

При решении методом конечных элементов внутренняя полость заменялась материалом с модулем  $G$ , на три порядка меньшим модулем материалов стержня<sup>1)</sup>). Эти результаты хорошо согласуются с точным решением методом конечных разностей [11].

На фиг. 15.6 приведен пример расчета задачи о фильтрации жидкости через анизотропное пористое основание. Уравнение, описывающее эту задачу, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad (15.25)$$

где  $k_x$  и  $k_y$  — коэффициенты проницаемости в направлении главных (наклонных к границе основания) осей. Результаты сравниваются с результатами точного решения, показанными пунктирными линиями. На этом примере особенно наглядно видна возможность использования элементов разных размеров.

### 15.5. Некоторые практические задачи

**Анизотропная фильтрация.** Первая задача связана с исследованием течения жидкости через сильно неоднородные анизотропные искривленные слои грунта. Основное уравнение опять имеет вид (15.25). Однако программу следует модифицировать с тем, чтобы получить возможность изменять направление главных осей  $x'$  и  $y'$  при переходе от элемента к элементу. Никаких трудностей при решении не встречается. Расчетная схема и некоторые результаты приведены на фиг. 15.7.

**Осьсимметричный тепловой поток.** Уравнение для осьсимметричного теплового потока можно записать в стандартной форме

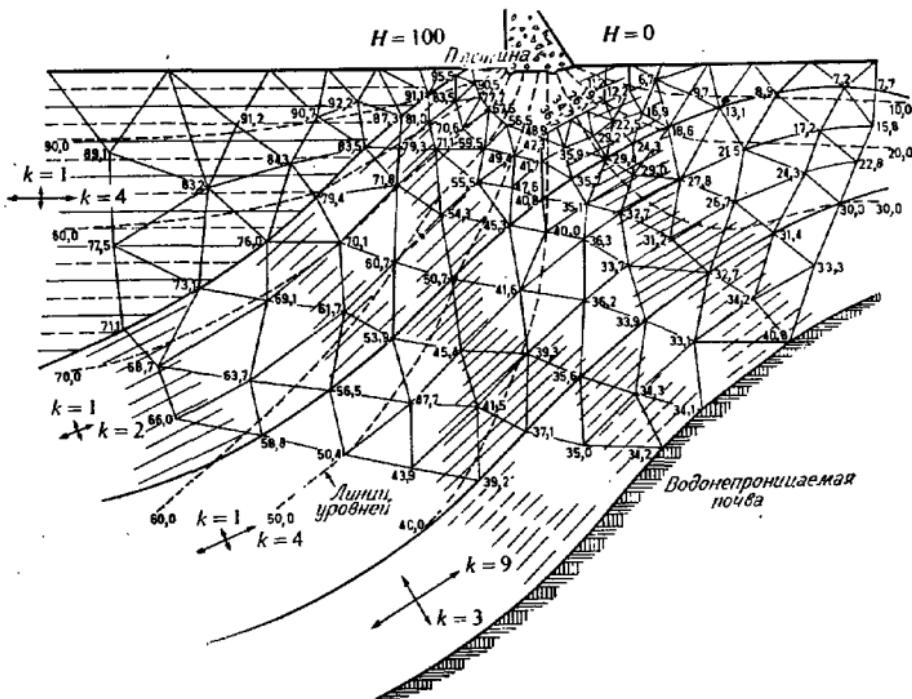
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( rk \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (15.26)$$

если отсутствует теплообразование. Здесь  $T$  — температура, а  $k$  — коэффициент теплопроводности. Координаты  $x$  и  $y$  заменены на координаты в радиальном и осевом направлениях  $r$  и  $z$ .

На фиг. 15.8 показано установившееся распределение температуры в сосуде высокого давления ядерного реактора [1] при равномерном нагреве изнутри.

**Гидродинамическое давление на движущейся поверхности.** Если погруженная в жидкость поверхность движется с задан-

1) Это было сделано, чтобы избежать трудностей, возникающих из-за многосвязности области, и тем самым получить возможность использовать стандартную программу.



Фиг. 15.7. Фильтрация под плотиной в сильно неоднородном и искривленном основании.

ным ускорением и с малой амплитудой перемещения, то можно показать [12], что избыточное давление удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0.$$

На движущихся (или неподвижных) границах граничное условие типа «б» [см. (15.3)] принимает вид

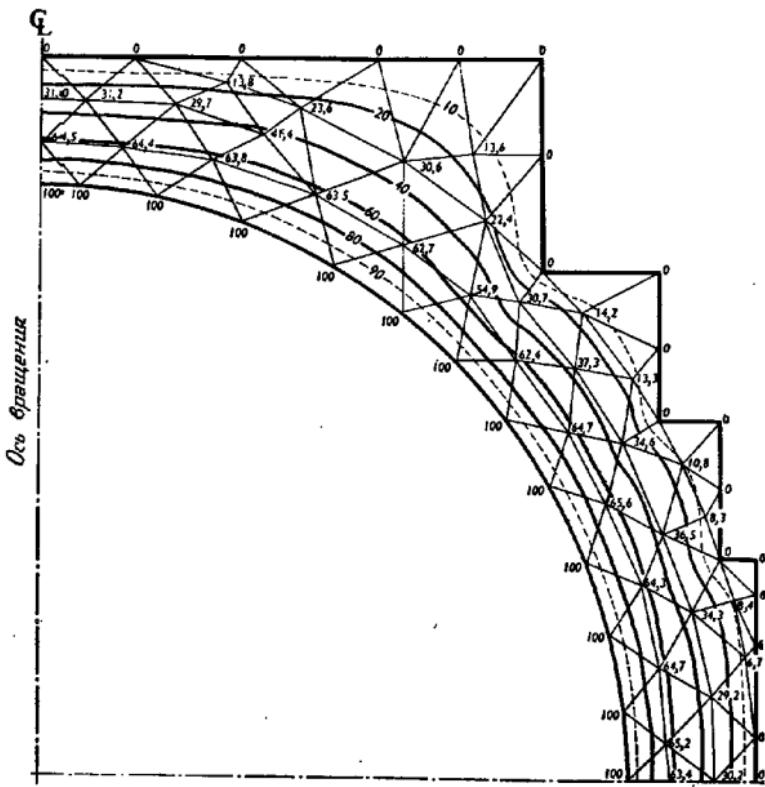
$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n, \quad (15.27)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости и  $a_n$  — нормальная компонента ускорения границы. На свободных поверхностях краевое условие записывается как

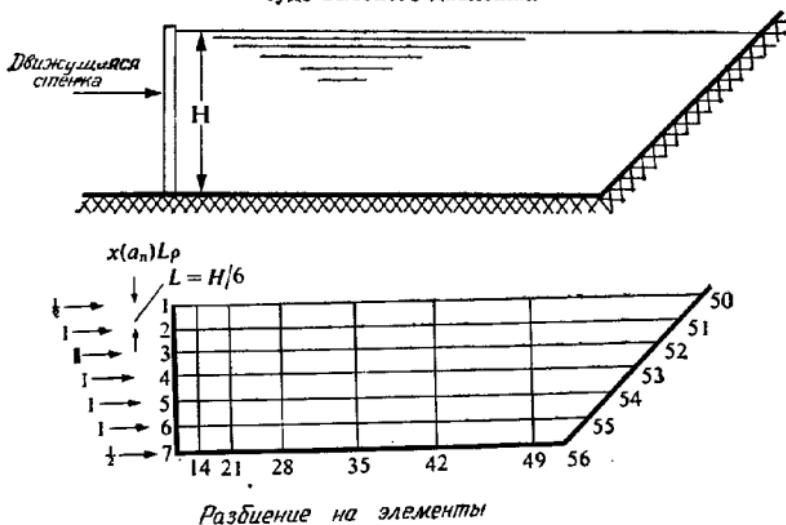
$$p = 0. \quad (15.28)$$

Таким образом, совершенно ясно, что задача принадлежит к категории задач, уже рассмотренных в этой главе.

В качестве примера рассмотрим движение вертикальной стенки резервуара (фиг. 15.9) и найдем распределение давления на стенке и дне резервуара при произвольном законе движения граничных точек 1—7. Область была разбита на 42 четырех-



Фиг. 15.8. Установившееся распределение температур в осесимметричном со суде высокого давления.



Фиг. 15.9. Задача о горизонтальном движении стеки в резервуаре.

угольных элемента. Для того чтобы результаты можно было применить для *любых* ускорений, решены семь задач. В каждой из них на части границы, примыкающей к рассматриваемой точке, задано единичное ускорение, что дает в точках 1—7 нагрузки  $\rho^{1/2}L$ ,  $\rho L$ , ...,  $\rho L$ ,  $\rho^{1/2}L$ . Давления в точках 1—56 при произвольном профиле ускорений можно представить в виде матрицы, зависящей от ускорений точек 1—7. Таким образом,

$$\left[ \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \\ p_{14} \\ p_{21} \\ p_{28} \\ p_{35} \\ p_{42} \\ p_{49} \\ p_{56} \end{array} \right] = [M] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{array} \right\}. \quad (15.29)$$

Матрица  $M$  имеет вид, показанный в табл. 15.1.

Таблица 15.1

$[M] = \rho \frac{H}{6}$	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0,7249	0,3685	0,2466	0,1963	0,1743
	3	0	0,3685	0,9715	0,5648	0,4210	0,3644
	4	0	0,2466	0,5648	1,1459	0,7329	0,5954
	5	0	0,1963	0,4210	0,7329	1,3203	0,9292
	6	0	0,1744	0,3644	0,5954	0,9292	1,5669
	7	0	0,1680	0,3488	0,5607	0,8420	1,2977
	14	0	0,1617	0,3332	0,5260	0,7548	1,0285
	21	0	0,1365	0,2754	0,4171	0,5573	0,6793
	28	0	0,0879	0,1731	0,2519	0,3187	0,3657
	35	0	0,0431	0,0838	0,1195	0,1478	0,1661
	42	0	0,0186	0,0359	0,0150	0,0626	0,0699
	49	0	0,0078	0,0150	0,0213	0,0261	0,0291
	56	0	0,0069	0,0134	0,0190	0,0232	0,0259

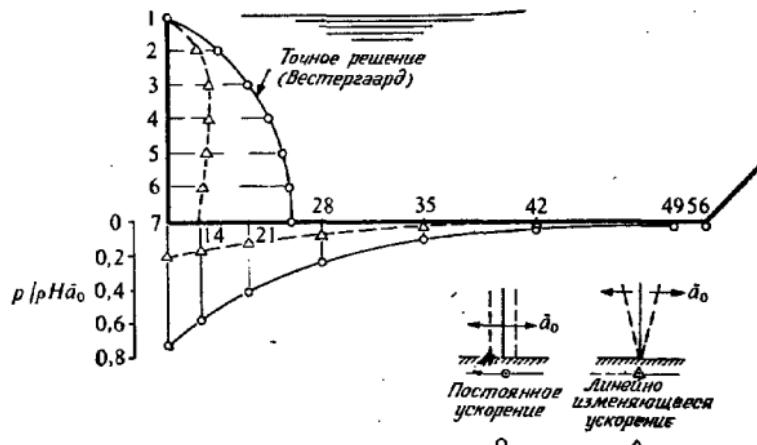
$$(L = H/6)$$

Следовательно, можно найти давление при любом распределении ускорений. Например, если ускорение  $a$  постоянно, то

давление можно вычислить, принимая

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{array} \right\} = \bar{a} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (15.30)$$

Распределение давления на стенке и дне резервуара показано на фиг. 15.10. Значения полученных давлений на стенке



Фиг. 15.10. Распределение давления на движущейся стенке и дне резервуара.

отличаются от хорошо известного точного решения Вестергаарда не более чем на 1%.

Аналогично можно получить распределение давления при любом другом законе движения стенки. Например, если стенка шарнирно соединена с основанием и совершает колебания вокруг точки закрепления так, что ускорение верхней точки (точка 1) равно  $\bar{a}$ , то

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{array} \right\} = \bar{a} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{4}{6} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (15.31)$$

Распределение давления, полученное с помощью выражения (15.29), показано на фиг. 15.10.

При решении задачи о колебаниях очень важно иметь такую матрицу влияния. Если стена колеблется, то в общем случае ее ускорения неизвестны. Используя верхнюю часть матрицы  $[M]$  в соотношении (15.29), которую обозначим через  $[M_0]$ , давления в точках 1—7 можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \end{Bmatrix} = [M_0] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = [M_0] \{\ddot{\delta}\}. \quad (15.32)$$

Этим давлениям соответствуют следующие узловые силы:

$$\{R_p\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_7 \end{Bmatrix} = [A][M_0] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} = -[M_p] \{\ddot{\delta}\}, \quad (15.33)$$

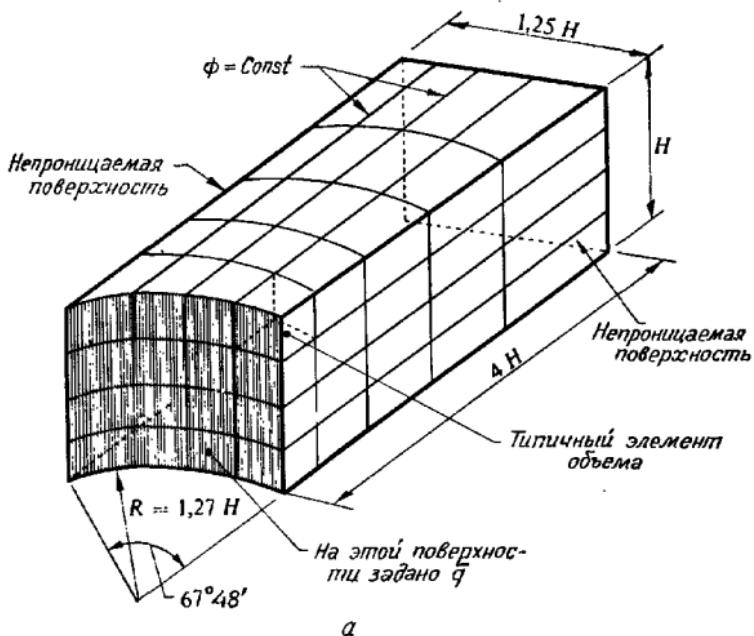
где  $[A]$  — матрица, характеризующая нагрузки, а  $\{\ddot{\delta}\}$  — матрица, определяющая ускорения узловых точек стены. Это уравнение может быть добавлено к динамическим уравнениям движения стены. Эта и родственные ей задачи будут подробно рассмотрены в гл. 16.

На фиг. 15.11 показаны результаты расчета аналогичной трехмерной задачи [4]. Использовались простые тетраэдральные элементы. Точность полученных результатов достаточно высока.

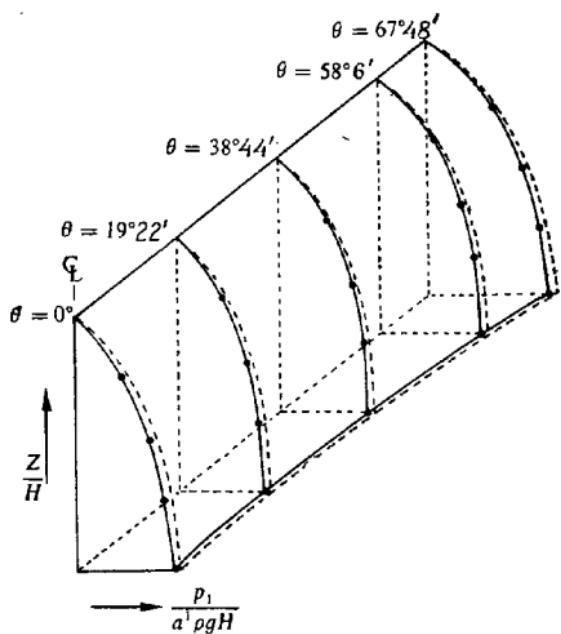
**Задачи электростатики.** На фиг. 15.12 приведено решение трехмерного уравнения Лапласа [4]. В данном случае оно моделирует электростатическое поле около изолятора. На фиг. 15.13 представлены результаты решения более сложной двумерной задачи о распределении магнитного поля [6].

**Безвихревое течение жидкости со свободной поверхностью** [13—19]. Уравнение Лапласа, описывающее течение вязкой жидкости в задачах фильтрации, справедливо также для безвихревого течения жидкости за пределами пограничного слоя, обусловленного вязкостью. Приведенные ранее примеры применения метода можно использовать и для иллюстрации таких задач. Другие примеры рассмотрены в работе Мартина [14]. Заслуживают внимания задачи о течении жидкости с *априори* неизвестной свободной поверхностью.

Для этого класса задач типичны два примера — задача о струйном водосливе (фиг. 15.14, а) и задача о фильтрации через земляную плотину (фиг. 15.14, б). В обоих случаях свободная граница представляет собой линию тока; она *априори* неизвестна и должна быть определена таким образом, чтобы на ней удовлетворялось некоторое *дополнительное условие*. Если, на-



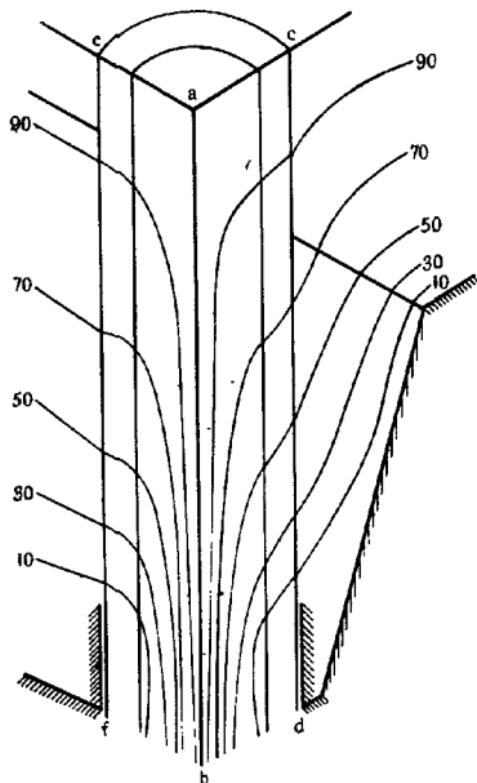
*a*



*b*

Фиг. 15.11. Давление на ускоряющейся поверхности перемычки в несжимаемом потоке.

— решение, полученное методом конечных элементов; - - - решение, найденное с использованием электролитической ванны;  
 $p_1$  — избыточное давление;  $q^1$  — относительное ускорение;  $\rho$  — плотность.



Фиг. 15.12. Трехмерное распределение электростатического потенциала около фарфорового изолятора.

пример, вторая задача сформулирована через потенциал  $H$ , то определяющим является уравнение (15.25).

Так как свободная граница представляет собой линию тока, то на ней должно выполняться условие

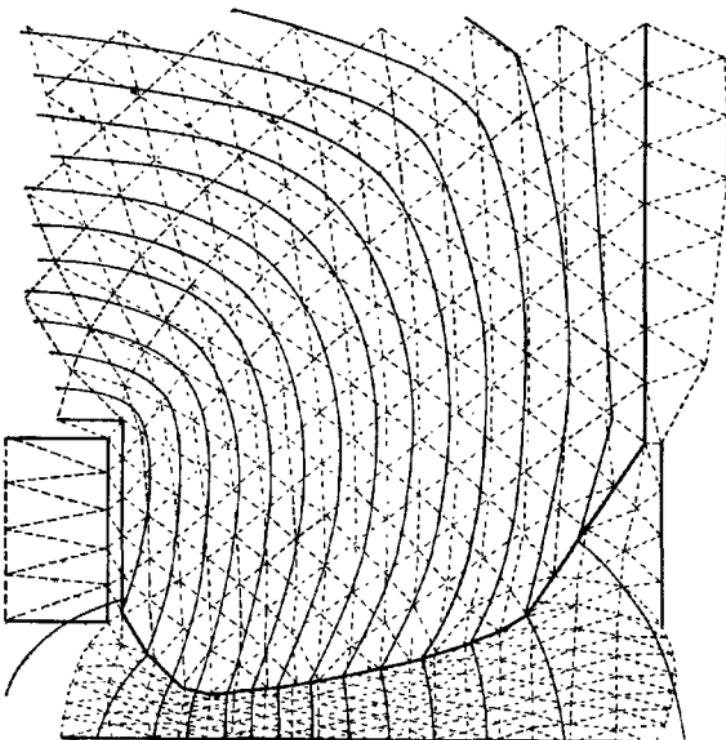
$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0. \quad (15.34)$$

Кроме того, поскольку эта граница связана с атмосферой, давление на ней должно быть равно нулю. Так как

$$H = \frac{p}{\gamma} + y, \quad (15.35)$$

где  $\gamma$  — удельный вес жидкости,  $p$  — давление и  $y$  — расстояние от некоторого горизонтального уровня, на свободной поверхности должно выполняться условие

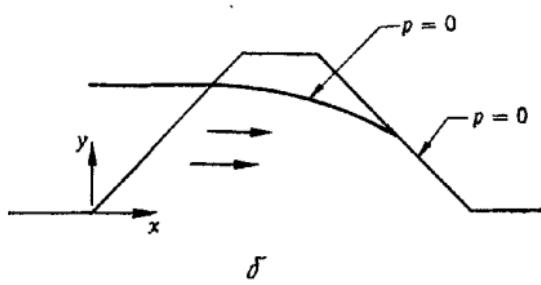
$$H = y. \quad (15.36)$$



Фиг. 15.13. Поле магнита (по Винслоу [6])



*a*



*б*

Фиг. 15.14. Типичные задачи со свободной границей (линейный тока, на которой давление равно нулю).

*а*—струйный водослив; *б*—фильтрация через земляную плотину.

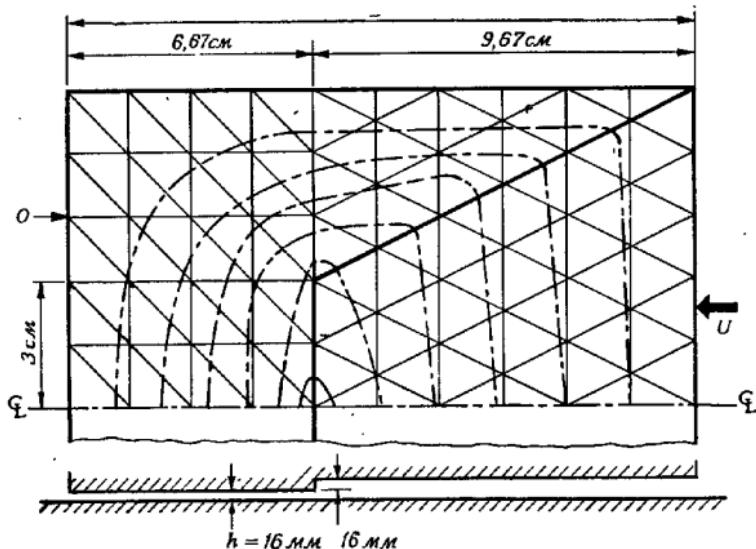
Решение задачи можно получить итерационным методом. Полагая свободную поверхность известной, решаем стационарную задачу. Далее производим проверку, удовлетворяется ли условие (15.36), и если нет, то из условия равенства  $H$  только что найденному значению  $u$  находим новую поверхность. Несколько таких итераций показывают, что сходимость достаточно быстрая. Этот метод использовался Тэйлором и Брауном [19]. Другой возможный метод решения описан в гл. 16.

**Задачи теории смазки.** Расчет вкладыша подшипника сводится к решению двумерной задачи, которая описывается уравнением Пуассона. В случае, когда плотность и вязкость смазочного вещества постоянны, должно быть решено уравнение Рейнольдса [20]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu V \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (15.37)$$

где  $h$  — толщина пленки,  $p$  — возникающее давление,  $\mu$  — вязкость и  $V$  — скорость движения вкладыша в направлении  $x$ .

На фиг. 15.15 показано распределение давления во вкладыше  $L$



Фиг. 15.15. Вкладыш с уступом. Распределение давления. Линии уровня  $ph^2/6\mu UL$ .

шего ступенчатого подшипника [21]. В качестве краевого условия используется условие равенства давления нулю. Интересно заметить, что благодаря наличию уступа вкладыша при интегрировании правой части уравнения (15.37) появляется условие эквивалентная нагрузка, распределенная по линии,

Ясно, что можно рассмотреть и более общие случаи задач о смазке с учетом вертикального движения вкладыша (уплотнение пленки) и скимаемости. Этому вопросу посвящено много недавно опубликованных работ [22—24].

Число различных задач, относящихся к рассмотренному классу, настолько велико, что рассмотреть их все практически невозможно.

## 15.6. Задачи, описываемые бигармоническим уравнением.

### Вязкое течение

До сих пор при решении квазигармонических задач минимизируемый функционал рассматривался как формальное математическое выражение, и не делалось никаких попыток определить его физический смысл. В частном случае вязкого течения жидкости в пористой среде нетрудно установить, что он представляет собой скорость диссиляции энергии. Распределение скоростей, получаемое в результате решения, минимизирует эту диссиацию, как и следует ожидать из универсального принципа минимума действия. Для задач о фильтрации эта интерпретация была установлена Зенкевичем и др. [3]. Принцип минимума энергии диссиляции известен в механике жидкости с конца прошлого века, и поэтому интересно рассмотреть его применение к решению задач о вязком течении.

В гл. 3 в качестве примера применения метода взвешенных невязок рассматривалось уравнение Навье — Стокса без инерционных членов. Это уравнение справедливо для медленного течения жидкости. Дифференциальное уравнение (3.48) было получено для двумерного течения. Это дифференциальное уравнение можно было бы получить непосредственно путем минимизации методом Эйлера функционала, представляющего собой скорость диссиляции энергии.

Если компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$  обозначить через  $u$  и  $v$  и выразить их через функцию тока  $\phi$  как

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (15.38)$$

то легко показать, что при постоянном значении вязкости  $\mu$  функционал будет иметь вид [7]

$$\chi = \mu \int_V \left\{ 4 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} dV. \quad (15.39)$$

Его можно минимизировать точно так же, как это делалось ранее в этой и предыдущей главах, после представления функции  $\phi$  через узловые параметры элементов. Поскольку функцио-

нал квадратичный, в результате минимизации получаются стандартные жесткостные соотношения.

Так как в него входят вторые производные, на границах между элементами требуется обеспечить непрерывность функции  $\phi$  и ее нормальных производных. Узловые параметры удобно представить в виде

$$\{\delta_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \phi_i \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_i \end{array} \right\}, \quad (15.40)$$

а в качестве функций формы использовать те же самые функции, которые применялись в задачах гл. 10 об изгибе пластина.

Такой подход Аткинсон и др. [7] применены для исследования распределения скоростей в начальной области потока между параллельными плоскостями. Границные условия и форма исследованной области показаны на фиг. 15.16, а, а на фиг. 15.16, б представлены полученные профили скоростей, которые хорошо согласуются с результатами эксперимента. Ясно, что эта же программа пригодна и для исследования областей с границами любой другой формы.

Интересно отметить, что при решении использовался описанный в гл. 10 простой несогласованный треугольный элемент, который не удовлетворяет полному критерию непрерывности производной.

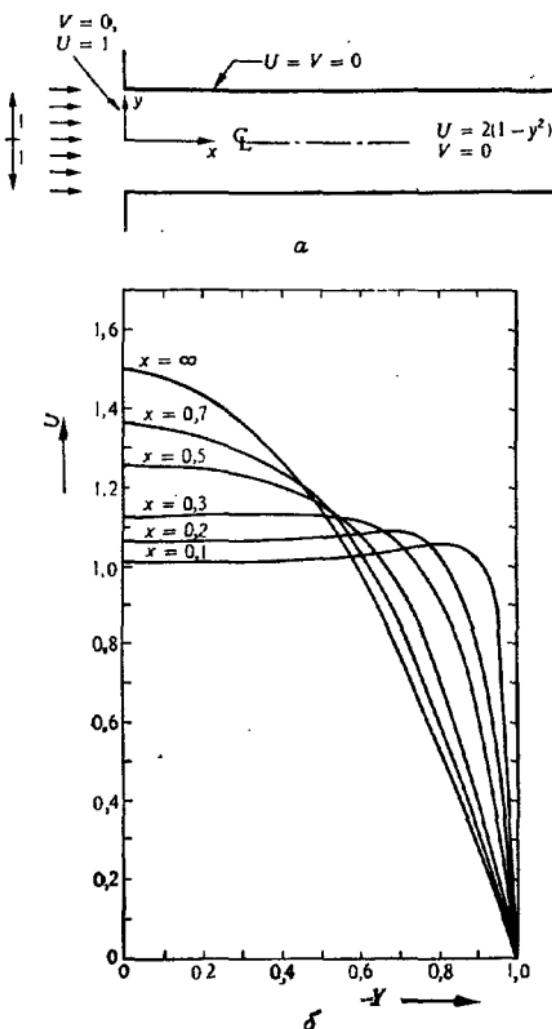
Этими же авторами получен функционал для осесимметричных задач и рассмотрены аналогичные задачи о течении жидкости в цилиндрических трубопроводах. Более подробно этот метод описан в работе [25].

## 15.7. Аналогии

Интересно отметить, что, поскольку уравнение, которому удовлетворяет функция тока [гл. 3, уравнение (3.4)], совпадает с уравнением изгиба пластина (работа [1] из списка литературы к гл. 10), для решения задач о вязком течении можно было бы непосредственно использовать любую программу расчета изгиба пластина. Такие аналогии в технике имеют большое значение, так как они часто дают возможность сделать полезные обобщения с минимальными затратами сил.

Другим примером подобной аналогии может служить плоская задача теории упругости. Если выразить напряжения через известную функцию напряженний Эрн [26]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (15.41)$$



Фиг. 15.16. Скорость вязкого ламинарного течения между параллельными плоскостями. Решение методом конечных элементов [7].  
*a* — геометрия; *б* — профили скоростей в различных сечениях.

то можно показать, что эта функция будет удовлетворять би- гармоническому уравнению, описывающему вязкое течение жидкости и изгибы пластин. Поэтому с помощью программы расчета пластин можно решать плоские задачи теории упругости.

Если не используется вариационный подход, то полученное решение, автоматически удовлетворяющее уравнениям равновесия, дает *верхнюю границу* энергии деформации, тогда как решение в перемещениях дает *нижнюю границу*.

С другой стороны, решения плоской задачи теории упругости в перемещениях можно использовать для получения верхних границ решений задач теории изгиба пластин. Эта возможность обнаружена и подробно описана Вёбеке и Зенкевичем [8].

### 15.8. Заключительные замечания

В этой главе показаны лишь некоторые возможности использования метода конечных элементов в ряде задач физики и техники. Не вызывает сомнения, что в ближайшее время этот метод будет применен к решению и других задач.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Finite Elements in the Solution of Field Problems, *The Engineer*, 507—510 (Sept. 1965).
2. Visser W., A Finite Element Method for the Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
3. Zienkiewicz O. C., Mayer P., Cheung Y. K., Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 92, EM1, 111—120 (1966).
4. Zienkiewicz O. C., Arlett P. L., Bahrani A. K., Solution of Three Dimensional Field Problems by the Finite Element Method, *The Engineer*, 27 (Oct. 1967).
5. Herrmann L., Elastic Torsion Analysis of Irregular Shapes, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 91, EM 6, 11—19 (1965).
6. Winslow A. M., Numerical Solution of the Quasi-Linear Poisson Equation in a Non-Uniform Triangle Mesh. *J. Computational Physics*, 1, 149—172 (1966).
7. Alkinson B., Brocklebank M. P., Card C. C. M., Smith J. M., Low Reynolds Number Developing Flows, *AIChEJ*, 15, 548—553 (1969).
8. De Veubeke B. F., Zienkiewicz O. C., Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab Analogy, *J. Strain An.*, 2, 267—271 (1967).
9. Berg P. N., Calculus of Variations, Ch. 16, in: *Handbook of Eng. Mechanics*, Flügge N., ed., McGraw-Hill, 1962.
10. De G. Allen D. N., Relaxation Methods, McGraw-Hill, 1955, p. 199.
11. Ely J. F., Zienkiewicz O. C., Torsion of Compound Bars—a Relaxation Solution, *Int. J. Mech. Sci.*, 1, 356—365 (1960).
12. Zienkiewicz O. C., Nath B., Earthquake Hydrodynamic Pressures on Arch Dams—an Electric Analogue Solution, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 25, 165—176 (1963).
13. Westergaard H. M., Water Pressure on Dams During Earthquakes, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 98, 418—433 (1933).
14. Martin H. C., Finite Element Analysis of Fluid Flows, Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
15. Oden J. T., Szmigił D., Finite Element Applications in Fluid Dynamics, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 95, EM3 (1969).
16. Argyris J. H., Marcczek C., Scharpf D. W., Two and Three Dimensional Flow Using Finite Elements, *J. Roy. Aero Soc.*, 73, 961—964 (1969).
17. Doctors L. J., An Application of Finite Element Technique to Boundary Value Problems of Potential Flow, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 243—252 (1970).

18. De Vries G., Norrie D. H., Application of the Finite Element Technique to Potential Flow Problems, Rept. Land 8., Dept. Mech. Eng. Univ. of Caágary, Alberta, Canada, 1969.
19. Taylor R. L., Brown C. B., Darcy Flow Solutions with a Free Surface, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 93, HY2, 25—33 (1967).
20. Gross W. A., Gas Film Lubrication, Wiley, 1962.
21. Tanesa D. V., Rao I. C., Student Project Report on Lubrication, Royal Naval College, Dartmouth, 1966.
22. Reddi M. M., Finite Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 91, Series F, 524 (1969); есть русский перевод: Редди, Решение задачи о несжимаемой смазке методом конечных элементов Труды Американского общества инженеров-механиков, серия F, *Проблемы трения и смазки*, № 3, стр. 169 (1969).
- 23 Reddi M. M., Chu T. Y., Finite Element Solution of the Steady State Compressible Lubrication Problem, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 92, Series F, 495 (1970); есть русский перевод: Редди, Чу, О решении стационарных задач теории сжимаемой смазки методом конечных элементов. Труды Американского общества инженеров-механиков, серия F, *Проблемы трения и смазки*, № 3, стр. 124—132 (1970).
24. Argyris J. H., Scharpf D. W., The Incompressible Lubrication Problem, *J. Roy. Aero Soc.*, 73, 1044—1046 (1969).
- 25 Atkinson B., Card C. C. M., Irons B. M., Application of the Finite Element Method to Creeping Flow Problems, *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, 48, T276—T284 (1970).
26. Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.

## ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

### 16.1. Введение

Во всех задачах, рассмотренных до сих пор в этой книге, предполагалось, что параметры не изменяются во времени. Распространение конечно-элементной концепции на задачи, параметры которых зависят от времени, не представляет особых трудностей.

Область практических задач, в которых должна быть учтена зависимость от времени, достаточно обширия. Типичными примерами являются задачи нестационарной теплопроводности, распространения волн в жидкостях или газах и задачи динамического поведения конструкций. Несмотря на то что эти различные по характеру задачи обычно принято рассматривать раздельно, классифицируя их иногда по математической структуре как параболические или гиперболические [1], мы объединим их в один класс, чтобы показать тождественность постановки задач.

В первой части этой главы на основе простого обобщения методов, использованных ранее, мы запишем матричные дифференциальные уравнения, характеризующие указанные задачи, для различных физических ситуаций. При этом конечно-элементная дискретизация будет использована лишь для пространственных переменных. Далее будут рассмотрены различные методы решения, показывающие возможность непосредственного включения временного измерения в конечно-элементную дискретизацию.

### 16.2. Непосредственная дискретизация нестационарных задач

#### 16.2.1. Квазигармоническое уравнение для нестационарных задач

Во многих физических задачах квазигармоническое уравнение, подробно рассмотренное в предыдущей главе, содержит производные от неизвестной функции  $\phi$  по времени. Для трех-

мерного случая мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \\ + \left( \bar{Q} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (16.1)$$

Все коэффициенты этого уравнения, вообще говоря, являются заданными функциями времени:

$$k_x = k_x(t), \quad \bar{Q} = \bar{Q}(t) \text{ и т. д.}$$

В некоторый фиксированный момент времени производные от  $\phi$  по времени и все коэффициенты могут рассматриваться как *заданные функции координат*. Для этого момента задача совершенно аналогична рассмотренной в предыдущей главе (разд. 15.2) при условии, что выражение в последней скобке уравнения (16.1) трактуется как величина  $Q$  уравнения (15.1).

Конечно-элементная дискретизация этого уравнения для *пространственных* переменных уже подробно обсуждалась, и при заданной для каждого элемента величине

$$\phi = [N(x, y, z)] \{\phi\}^e \quad (16.2)$$

была получена обычная форма определяющего уравнения:

$$[H] \{\phi\} + \{F\} = 0. \quad (16.3)$$

Вклад каждого элемента в приведенные выше матрицы определяется соотношениями (15.12) и (15.13), которые здесь не приводятся, за исключением слагаемого «нагрузки», обусловленного величиной  $Q$ . Уравнение (15.13) дает

$$F_i^e = - \int_{V^e} Q N_i dV, \quad \text{или} \quad \{F\}^e = - \int_{V^e} Q [N]^T dV.$$

Заменяя теперь  $Q$  последним слагаемым в уравнении (16.1), получаем

$$\{F\}^e = - \int_{V^e} [N]^T \left( \bar{Q} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dV. \quad (16.4)$$

Однако из уравнения (16.2) видно, что  $\phi$  аппроксимируется с помощью узловых параметров  $\{\phi\}^e$ . Подстановка этой аппрокси-

мацин дает

$$\begin{aligned} \{F\}^e = & - \int_{V^e} [N]^T \bar{Q} dV + \left( \int_{V^e} [N]^T \mu [N] dV \right) \frac{\partial}{\partial t} \{\phi\}^e + \\ & + \left( \int_{V^e} [N]^T \rho [N] dV \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\}^e. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Записывая (16.3) в окончательной форме определяющих уравнений, получаем следующее *матричное дифференциальное уравнение*:

$$[H]\{\phi\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\phi\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} + \{\bar{F}\} = 0, \quad (16.6)$$

в котором все матрицы составляются по стандартному правилу из подматриц  $[h]^e$  и  $\{F\}^e$  для каждого элемента, заданных соотношениями (15.12) и (15.13), н

$$c_{ii}^e = \int_{V^e} N_i \mu N_i dV, \quad (16.7)$$

$$g_{ii}^e = \int_{V^e} N_i \rho N_i dV. \quad (16.8)$$

Как видно из приведенных выше соотношений, эти матрицы симметричны.

Границные условия задаются в каждый момент времени, так же как в предыдущей главе.

Физических задач, описываемых уравнением (16.1), настолько много, что подробное их обсуждение невозможно в рамках этой книги. Здесь будет приведено только несколько типичных примеров.

При  $\rho = 0$  уравнение (16.1) является обычным уравнением нестационарной теплопроводности [1, 2], которое было рассмотрено некоторыми авторами с позиций конечных элементов [3—6]. Это же уравнение описывает и другие физические явления, например консолидацию грунта, связанную с разновидностями нестационарной фильтрации [8].

При  $\mu = 0$  уравнение (16.1) превращается в известное волновое уравнение, описывающее общирную область физических явлений. Электромагнитные волны [9], поверхностные волны в жидкости [10] и волны расширения — сжатия [11] представляют собой лишь несколько явлений, к которым был применен метод конечных элементов.

При  $\rho \neq 0$  и  $\mu \neq 0$  уравнение (16.1), будучи волновым уравнением с демпфированием, обладает широкой областью приме-

нимости и имеет важное значение для некоторых волновых явлений в механике жидкости и газа.

### 16.2.2. Динамическое поведение упругих конструкций с линейным демпфированием<sup>1)</sup>

В предыдущем разделе была рассмотрена чисто математическая задача; рассуждение подобного рода может быть непосредственно применено к широкому классу задач о динамическом поведении упругих конструкций в точном соответствии с общими положениями гл. 2.

Перемещения упругого тела во времени обусловлены наличием двух систем дополнительных сил. Первую из них составляют силы инерции, которые характеризуют ускорение  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\}$  и, согласно хорошо известному принципу Даламбера, могут быть заменены их статическим эквивалентом

$$-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\}. \quad (16.9)$$

(Здесь  $\{f\}$  является обобщенным перемещением, определенным в гл. 2.)

Эти силы совпадают по направлению с перемещениями  $\{f\}$  и обычно отнесены к единице объема, а  $\rho$  — масса единицы объема.

Вторая система сил обусловлена сопротивлением движению (силы трения). Эти силы могут быть вызваны перемещением микроструктуры, сопротивлением воздуха и т. д.; в общем случае они связаны нелинейной зависимостью со скоростью перемещения  $\frac{\partial}{\partial t} \{f\}$ .

Однако для простоты изложения будет учтено только линейное сопротивление вязкого типа, которое статически эквивалентно силе, отнесененной к единице объема

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \{f\}. \quad (16.10)$$

Здесь  $\mu$  — некоторый коэффициент.

Эквивалентная статическая задача в каждый момент времени дискретизируется теперь в соответствии с изложенным в гл. 2, причем распределенная сила  $\{p\}$  заменяется эквивалентом

$$\{\bar{p}\} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \{f\}. \quad (16.11)$$

<sup>1)</sup> Для простоты мы рассмотрим только эффекты *распределенных* сил инерции и демпфирования; сосредоточенные массовые и демпфирующие силы получаются предельным переходом.

Узловые силы элемента, заданные уравнением (2.11), принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \{F\}_p^e = & - \int_{V^e} [N]^T \{p\} dV = \{\bar{F}\}_p^e + \int_{V^e} [N]^T \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\} dV + \\ & + \int_{V^e} [N]^T \mu \frac{\partial}{\partial t} \{f\} dV. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Здесь первый член совпадает с силой, обусловленной виешней распределенной нагрузкой (см. гл. 2), и поэтому не будет далее рассматриваться.

Аппроксимация перемещений дается соотношением (2.1):

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e.$$

Подставив выражение (16.12) в общее уравнение равновесия, окончательно получим следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$[K] \{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + \{\bar{F}\} = 0, \quad (16.13)$$

где  $[K]$  и  $\{\bar{F}\}$  — матрицы жесткости и сил ансамбля, полученные обычным суммированием коэффициентов жесткости и сил элементов, вызванных заданными виешними нагрузками, начальными напряжениями и т. д. Новые матрицы  $[C]$  и  $[M]$  составляются по обычному правилу из подматриц элементов, задаваемых в виде

$$[c_{ij}]^e = \int_{V^e} [N_i]^T \mu [N_j] dV \quad (16.14)$$

и

$$[m_{ij}]^e = \int_{V^e} [N_i]^T \rho [N_j] dV. \quad (16.15)$$

Матрица  $[m_{ij}]$  известна как *матрица масс элемента*, а матрица ансамбля  $[M]$  — как *матрица масс системы*.

Интересно заметить, что в ранних попытках исследования динамических задач такого типа масса элементов обычно предполагалась произвольно сконцентрированной в узлах, что приводило всегда к диагональной матрице, даже если не существовало сосредоточенных масс. Тот факт, что подобная процедура в действительности не нужна и приводит к плохой аппроксимации, был установлен в 1963 г. Арчером [12] и независимо от него Лекки и Линдбергом [13]. Общее выражение (16.15) получено Зенкевичем и Ченом [14]. Для матрицы распределенных масс элемента был введен термин «согласованная матрица масс»; эта матрица является единственной допустимой матрицей, используемой при расчете.

Матрицы  $[C_{ij}]$  и  $[C]$  по аналогии могут быть названы *согласованными матрицами демпфирования*.

Следует отметить, что иногда для описания сил инерции нужно использовать функции формы, отличные от функций, задающих перемещения  $\{f\}$ . Например, в задачах о пластинах и балках (гл. 10) полное деформированное состояние было задано с помощью только поперечного перемещения  $w$ , так как были введены дополнительные гипотезы об изгибе пластины. Однако при учете сил инерции следует рассматривать не только силу инерции поперечного перемещения

$$-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(где  $\rho$  представляет собой массу, отнесенную к единице площади пластины), но и моменты сил инерции типа

$$\frac{\rho t^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{и т. д.}$$

Теперь перемещение  $\{f\}$  необходимо записать в более общем виде:

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\bar{N}] \{\delta\}^e,$$

где  $[\bar{N}]$  непосредственно следует из определения матрицы  $[N]$ , которая задается только компонентой  $w$ . Соотношения, подобные уравнению (16.14), но-прежнему справедливы, если только заменить  $[N]$  на  $[\bar{N}]$  и подставить вместо  $\rho$  матрицу

$$\begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho t^2}{12} \end{bmatrix}.$$

Однако подобный подход применяется редко.

### 16.2.3. Матрицы масс и демпфирования некоторых типичных элементов

Представить в явном виде все матрицы масс различных элементов, исследованных в предыдущих главах, практически невозможно, и здесь будут рассмотрены лишь некоторые частные примеры.

**Плоское напряженное состояние и плоская деформация.** При использовании треугольных элементов, описанных в гл. 4, матрица  $[N]$  определяется выражением

$$[N] = [IN'_1, IN'_2, IN'_3],$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а

$$N'_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad \text{и т. д.,}$$

где  $\Delta$  — площадь треугольника,  $N'_i$  задаются соотношением (4.8).

Если толщина элемента  $t$  предполагается постоянной в пределах элемента, то из уравнения (16.15) для матрицы масс имеем

$$[m]^e = \rho t \iiint [N]^T [N] dx dy \quad (16.16)$$

или

$$[m_{rs}]^e = \rho t [I] \iiint N'_r N'_s dx dy. \quad (16.17)$$

С помощью соотношения (4.8) можно показать, что

$$\iiint N'_r N'_s dx dy = \begin{cases} \frac{1}{12} \Delta & \text{при } r \neq s, \\ \frac{1}{6} \Delta & \text{при } r = s. \end{cases} \quad (16.18)$$

Таким образом, при

$$\rho t \Delta = W$$

получаем матрицу масс

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad (16.19)$$

Если бы масса элемента была равномерно распределена по трем его узлам, то матрица масс имела бы вид

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (16.20)$$

Очевидно, что эти результаты значительно отличаются друг от друга.

**Изгиб пластин.** Колебания пластин представляют собой весьма важную инженерную проблему. Такие важные явления, как колебания мостового настила, колебания лопаток турбин и др., приводят к задачам, трудно поддающимся аналитическому решению.

Важность использования согласованной матрицы масс вместо матрицы сосредоточенных масс подчеркивается в нескольких работах [15—19].

Если рассматривается, например, прямоугольный плоский элемент из разд. 10.4, то функции перемещений определяются соотношением (10.16)

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (16.21)$$

в соответствии с обозначениями гл. 10.

Заметим, что  $[C]$  не зависит от координат, а  $[P]$  определяется выражением

$$[P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3].$$

Таким образом, для плоского элемента постоянной толщины  $t$  матрица масс (16.15) принимает вид

$$[m]^e = \rho t ([C]^{-1})^T \left( \iint [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1}. \quad (16.22)$$

Как и ранее, без особых затруднений вычисляется интеграл в круглых скобках, а полная матрица масс может быть получена матричным умножением. В табл. 16.1 приводится ее явное выражение, данное Дейвом [16].

Подобные матрицы масс могут быть получены и для треугольных элементов, рассмотренных в разд. 10.6 и далее. Явные

Таблица 16.1

### Матрица масс прямоугольного элемента

$$[m]^e = [L][M][L]$$

Здесь  $L$  определяется по табл. 10.1 и  $\lambda \equiv \rho_{lab}/6300$ .

выражения для этих матриц здесь не приводятся; выполнение алгебраических преобразований предоставляется читателю<sup>1)</sup>.

При использовании таких элементов рекомендуются методы численного интегрирования.

**Оболочки.** Если определены матрицы масс для плоских и изгибных движений некоторого элемента, то может быть найдена матрица масс, отнесенная к общей координатной системе. Правила преобразований в этом случае, очевидно, точно такие же, как для сил. Основные этапы получения матрицы масс для каждого элемента в общих координатах и составление матрицы масс для ансамбля аналогичны подобным операциям для матриц жесткости (см. гл. 11). Поэтому в принципе решение задач о колебаниях оболочек не представляет особых трудностей.

**Матрицы демпфирования** и другие. Приведенные выше примеры, возможно, помогли читателю закрепить некоторые общие идеи. Он легко заметит, что матрицы демпфирования, заданные уравнением (16.14), имеют точно такую же структуру, что и матрицы масс. Различные матрицы, введенные в подразд. 16.2.1 и определяемые равенствами (16.7) и (16.8), также имеют аналогичную форму. Таким образом, после незначительного видоизменения ко всем этим задачам в равной мере применимы результаты, относящиеся к плоскому треугольному элементу, и отпадает необходимость в повторном вычислении.

### 16.3. Связанные задачи

Для задач обоих типов, рассмотренных в предыдущем разделе, получены матричные дифференциальные уравнения одина-

<sup>1)</sup> Интегралы в явном виде приведены в работе [20].

ковой формы [формулы (16.6) и (16.13)]. Аналогично могут быть получены уравнения для более сложных задач. Иногда в задачах связанного типа появляются две самостоятельные системы уравнений. Мы обсудим два таких примера, представляющих значительный практический интерес.

### 16.3.1. Связанное движение упругой конструкции в жидкой среде [21, 22]

Дифференциальное уравнение, описывающее распределение давления  $p$  при малых колебаниях сжимаемой жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (16.23)$$

где  $c$  — скорость звука, а демпфирующие члены (вязкости) опущены.

На границе задается или  $p$  или величина

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U_n), \quad (16.24)$$

если граница непроницаема и движется. Здесь  $U_n$  есть нормальная составляющая перемещения. После разбиения жидкой области на конечные элементы получается уравнение, аналогичное уравнению (16.6):

$$[H]\{p\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{p\} + \{\bar{F}\}_f = 0, \quad (16.25)$$

в котором матрицы  $[H]$  и  $[G]$  находятся обычным способом. Матрица  $\{\bar{F}\}$  не содержит вкладов интегрирования по объему, а обусловлена поверхностными интегралами, соответствующими описанным выше движениям [см. уравнение (15.27)]<sup>1</sup>).

Движение границы (поверхности раздела) обусловлено перемещением конструкции. Если дискретизируется сама конструкция, то можно записать

$$U_n = [\bar{N}] \{\delta\}, \quad (16.26)$$

где  $[\bar{N}]$  определяется соответствующими функциями формы, а  $\{\delta\}$  является вектором узловых перемещений. Согласно формуле (15.13), имеем

$$\{\bar{F}\}_f = [S] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\}, \quad (16.27)$$

<sup>1</sup>) В более общем случае в уравнение (16.25) может входить член, содержащий первую производную от  $p$  по времени. Например, если в уравнение движения жидкости входят члены, обусловленные вязким трением, или граница не отражает падающие волны давления. Такая граница имеет важное значение, если область жидкости бесконечна, а при расчете ее нужно ограничить [22].

где

$$[S] = \int_S [N]^T \rho [\bar{N}] dS. \quad (16.28)$$

Здесь  $[N]$  — функции формы, определяющие распределение давления, а  $S$  — поверхность раздела жидкости и конструкции (фиг. 16.1).

После дискретизации задачи строительной механики имеем

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{\bar{F}\}_s + \{R\} = 0, \quad (16.29)$$

где содержатся обычные члены уравнения (16.13), но воздействия разделены на заданные

внешние силы  $\{R\}$  и силы  $\{\bar{F}\}_s$ , обусловленные давлением жидкости на поверхности раздела. На основании принципа виртуальных работ можно найти, что силы  $\{\bar{F}\}_s$  должны быть заданы в виде

$$\{\bar{F}\}_s = \int_S [\bar{N}]^T p dS = \frac{1}{\rho} [S]^T \{p\}, \quad (16.30)$$

так как

$$p = [N]\{p\}.$$

Фиг. 16.1. Поверхность раздела твердого тела и жидкости.

Объединяя уравнения (16.25), (16.27), (16.29) и (16.30), окончательно получаем связанный систему матричных дифференциальных уравнений

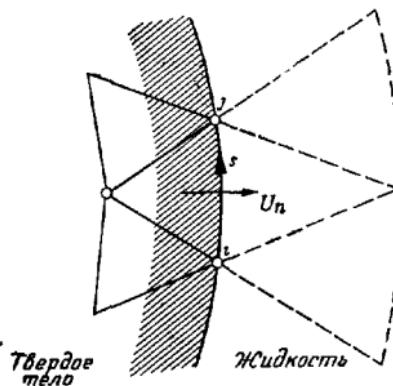
$$\begin{aligned} [H]\{p\} + [G]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{p\} + [S]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} &= 0, \\ [K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \frac{1}{\rho}[S]^T\{p\} + \{R\} &= 0, \end{aligned} \quad (16.31)$$

которая описывает эту задачу.

Некоторые аспекты этой задачи обсуждаются в работах [21] и [22]. В частном случае для несжимаемой жидкости ( $c = \infty$ ) второй член первого уравнения становится равным нулю и это уравнение может быть решено непосредственно, что дает

$$\{p\} = -[H]^{-1}[S]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}. \quad (16.32)$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим обычное динамическое уравнение, в котором к матрице масс



добавлена матрица присоединенных масс

$$-\frac{1}{\rho} [S]^T [H]^{-1} [S]. \quad (16.33)$$

Такая матрица присоединенных масс, впервые предложенная Зенкевичем с сотр. [4, 15], была введена в разд. 15.5. Сравнительно недавно подобная методика была использована при определении собственных частот арочных плотин [23].

### 16.3.2 Упругое поведение пористого насыщенного материала [24]

Эта задача встречается в механике грунтов и во многих геотехнических проблемах.

В пористой упругой среде давление жидкости в порах вызывает объемные силы, определяемые матрицей

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (16.34)$$

Они уже рассматривались в гл. 4. Подробнее эти вопросы изложены в работе [25].

Если упругая конструкция дискретизируется конечными элементами, то объемные силы вызовут узловые силы

$$\{F\}_p = \left( \int_V [\bar{N}]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [N] dV \right) \{p\} = [L] \{p\}, \quad (16.35)$$

где  $[\bar{N}]$  — функции формы, определяющие перемещения упругого тела, а  $[N]$  — функции формы, характеризующие распределение давления<sup>1)</sup>.

В результате для упругой среды мы имеем обычное уравнение дискретизированной задачи

$$[K] \{\delta\} + [L] \{p\} + \{R\} = 0, \quad (16.36)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости, а  $\{R\}$  включает все заданные силы, кроме сил, обусловленных давлением в порах.

Переходя к рассмотрению жидкости, содержащейся в порах, следует записать соответствующее дифференциальное уравнение переносимости. Оно уже встречалось в гл. 15 как типичное уравнение (15.1), но  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  являются теперь коэффициентами про-

<sup>1)</sup> Для простоты интегралы записываются по всей области, как в гл. 2.

ницаемости и  $Q$  представляет собой скорость, с которой происходит наполнение жидкости в единице объема. Для матрицы третьего порядка, связанной с компонентами перемещений, имеем

$$Q = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \frac{\partial / \partial x}{\partial / \partial y} \\ \frac{\partial / \partial y}{\partial / \partial z} \end{Bmatrix}^T [\bar{N}] \{\delta\}. \quad (16.37)$$

Из уравнения (15.1) с учетом (16.37) получаем

$$[H]\{p\} + [S] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} = 0, \quad (16.38)$$

и так как сила  $Q$  определяется уравнением (15.13), то

$$\int_V [N]^T Q dV = \left( \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial / \partial x}{\partial / \partial y} \\ \frac{\partial / \partial y}{\partial / \partial z} \end{Bmatrix} [\bar{N}] dV \right) \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}. \quad (16.39)$$

Уравнения (16.36) и (16.38) образуют связанную систему совместных матричных дифференциальных уравнений. Эти уравнения аналогичны системе (16.31), полученной для связанного динамического взаимодействия жидкости и конструкции. Если пренебречь сжимаемостью жидкости, то эти системы будут иметь одинаковую форму.

Следует заметить, что из формул (16.35) и (16.39) формально следует, что

$$[S] = [L]^T. \quad (16.40)$$

Используя несколько иной подход, Санду и Уилсон [24] впервые дискретизировали эту задачу с помощью конечных элементов. Физические аспекты этой задачи обсуждаются в работах [26, 27].

Обычное уравнение консолидации, которое имеет форму (16.1) (без вторых производных по времени), является частным случаем более общей формулировки.

Выше предполагалось, что жидкость несжимаема. Если же в задаче учитывается и сжимаемость жидкости, то в уравнении (16.38) появляется дополнительный член вида

$$[A] \frac{\partial}{\partial t} \{p\}. \quad (16.41)$$

Такое обобщение позволяет рассмотреть нестационарные задачи частично насыщенных грунтов.

## 16.4. Другой способ учета временного эффекта

В предыдущем разделе различные задачи были сведены к матричным дифференциальным уравнениям относительно времени. Это осуществляется достаточно просто и не требует новых принципов. Однако возможны и другие подходы.

Во-первых, к дифференциальным уравнениям, описывающим задачу, может быть непосредственно применена процедура Галеркина (или другой весовой метод минимизации невязки), обсуждавшаяся в разд. 3.4. При описании неизвестной величины функциями формы, зависящими не только от пространственных координат, но и от времени, т. е.

$$\phi = [N(x, y, z, t)] \{\Phi\},$$

дискретизация задачи может быть произведена пространственными и временными конечными элементами [6, 28]. При этом задача становится четырехмерной, но в принципе численное решение может быть получено обычным методом после непосредственной дискретизации на произвольном интервале времени  $t_1 < t < t_2$ .

Во втором подходе применяется вариационный принцип по пространственным переменным и времени. Вариационные методы, использующие свертку интегралов, описаны Гэртином [29] и успешно применены в работах [5, 24]. На основе этих методов могут быть также построены пространственные и временные конечные элементы.

В простых динамических задачах вариационный принцип непосредственно следует из принципа Лагранжа. Ищется стационарное значение интеграла

$$x = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (16.42)$$

в котором

$$L = U + W + T, \quad (16.43)$$

где  $U + W$  — сумма энергии деформации и потенциальной энергии, которая была уже введена в гл. 2, и  $T$  — кинетическая энергия системы. Величина  $L$  называется *функцией Лагранжа* [30].

Несмотря на то что такие подходы обладают достаточной общностью, они не будут подробно рассматриваться.

Упрощенный вариант процедуры Галеркина в следующем разделе будет непосредственно использован для уравнений дискретизированной задачи.

## 16.5. Рекуррентные соотношения для решения задач Коши

В матричных дифференциальных уравнениях, полученных в предыдущих разделах, значения функций и, если необходимо,

их первых производных по времени, заданные в начальный момент времени, однозначно определяют эти функции на определенном интервале времени.

Задачи такого класса, известные как «начальные» или «шаговые», могут быть решены с помощью подходящих рекуррентных соотношений [1]. В некоторых простых случаях такие рекуррентные соотношения приводят к точным решениям [3]. Эти случаи не будут рассматриваться в дальнейшем.

Рекуррентное соотношение может быть установлено различными способами. Например, может быть непосредственно использована разностная схема или применен метод Галеркина для минимизации погрешности в пределах каждого интервала. Другой метод, который применяется чаще, обладает всеми достоинствами вариационных методов, предложенных Уилсоном и др. [5, 24].

Рекуррентное соотношение может быть записано для нескольких интервалов одновременно, что требует решения большего числа совместных уравнений, но приводит к повышенной точности и устойчивости.

Здесь удобно отдельно рассмотреть матричные уравнения, содержащие лишь первые производные по времени, и уравнения, имеющие производные второго порядка по времени.

#### *16.5.1. Задачи, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка по времени*

Типичной для этого класса является задача, определяемая уравнением (16.6) при  $[G] = 0$ :

$$[H]\{\phi\} + [C] \frac{\partial}{\partial t}\{\phi\} + \{F\} = 0. \quad (16.44)$$

Мы рассмотрим интервал  $0 \leq t \leq t_n$ , обозначая через  $\{\phi\}_0$  начальные значения при  $t = 0$ .

В общем случае предположим, что в пределах этого интервала вектор  $\{\phi\}$  интерполирован по его некоторым значениям:

$$\{\phi\} = \sum_{i=0}^n N_i(t) \{\phi\}_i, \quad (16.45)$$

где  $N_i(t)$  — соответствующие функции формы, непрерывные в пределах рассматриваемого интервала.

Например, если интерполяция линейная, то следует рассмотреть лишь начальное значение  $\phi$  при  $t = 0$  и значение при  $t_n = \Delta t$  ( $n = 1$ ), т. е. в матричной форме

$$\{\phi\} = [N_0, N_1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix}. \quad (16.46)$$

при  $N_0 = (\Delta t - t)/\Delta t$ ,  $N_1 = t/\Delta t$ . Производная по времени

$$\frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} = \left[ \frac{\partial N_0}{\partial t}, \frac{\partial N_1}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} [-1, 1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix}. \quad (16.47)$$

Так как начальное значение  $\{\phi\}_0$  известно, то используется только одна весовая невязка. Интегрируя уравнение (16.44), умноженное на  $N_1$ , имеем

$$\int_0^t \frac{t}{\Delta t} \left( [H] [N_0, N_1] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} + [C] \left[ \frac{\partial N_0}{\partial t}, \frac{\partial N_1}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \end{Bmatrix} + \{\bar{F}\} \right) dt = 0; \quad (16.48)$$

после подстановки (16.46) и (16.47) и последующего интегрирования получаем

$$[H] \left( \frac{1}{3} \{\phi\}_0 + \frac{2}{3} \{\phi\}_1 \right) + \frac{1}{\Delta t} [C] (-\{\phi\}_0 + \{\phi\}_1) + \frac{2}{\Delta t^2} \int_0^t \{\bar{F}\} t dt = 0. \quad (16.49)$$

Этот результат подобен тому, который был бы получен на основе обычной центральной конечной разности [1, 4, 8]. Однако вывод уравнения (16.49) является иным, и при этом возникают интересные возможности использования других интерполяционных функций.

Из уравнения (16.49) величина  $\{\phi\}_1$  может быть найдена формально:

$$\{\phi\}_1 = - \left( \frac{2}{3} [H] + [C]/\Delta t \right)^{-1} \left[ \left( \frac{1}{3} [H] - [C]/\Delta t \right) \{\phi\}_0 + \frac{2}{\Delta t^2} \int_0^t \{\bar{F}\} t dt \right]. \quad (16.50)$$

Это рекуррентное соотношение может быть использовано для всех последующих интервалов времени (выбор в качестве начального значения  $\phi$  величины  $\{\phi\}_0$  при  $t = 0$  является в данном случае чисто условным).

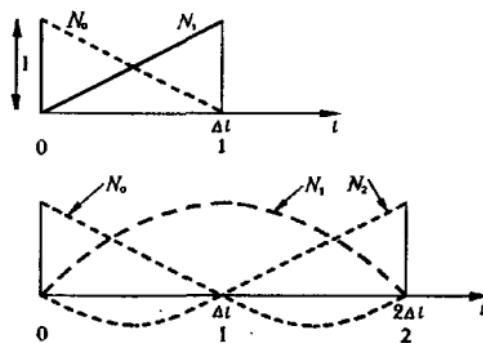
Для другой рекуррентной схемы можно рассмотреть некоторый интервал времени, содержащий три точки  $(0, \Delta t, 2\Delta t)$ , как

показано на фиг. 16.2. Поступая аналогично, мы вместо уравнения (16.46) получим

$$\{\phi\} = [N_0(t), N_1(t), N_2(t)] \begin{Bmatrix} \{\phi\}_0 \\ \{\phi\}_1 \\ \{\phi\}_2 \end{Bmatrix} \quad (16.51)$$

с параболическими интерполяционными полиномами Лагранжа.

Продолжение этого примера приводит к двум весовым уравнениям минимизации невязки, подобным уравнению (16.48), причем  $\{\phi\}_1$  и  $\{\phi\}_2$  определяются по заданным начальным значениям  $\{\phi\}_0$ . Эта процедура может продолжаться до бесконечности, причем с увеличением числа совместных уравнений точность решения повышается. Ясно, что более сложные временные элементы обеспечивают большую устойчивость решения и при этом



Фиг. 16.2. Временные функции формы с разрывной первой производной.

могут быть использованы большие временные интервалы.

### 16.5.2. Задачи, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка по времени

Динамические задачи строительной механики и подобные задачи описываются уравнениями вида

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{\bar{F}\} = 0. \quad (16.13)$$

Для решения этого уравнения, очевидно, необходимы два начальных условия. Обычно задаются значения  $\{\delta\}_0$  и  $\partial/\partial t\{\delta\}_0$  в начальный момент времени. В соответствии с вышеизложенным функции формы, описывающие изменение конструкции во времени, выбираются по значениям  $\{\delta\}$  и  $\partial/\partial t\{\delta\}$  в различные моменты времени. В случае простейшей интерполяции учитываются лишь значения времени  $t = 0$  и  $t = \Delta t$  и внутри интервала используются кубические полиномы Эрмита. Таким образом, имеем

$$\{\delta\} = [H_{00}, H_{10}, H_{01}, H_{11}] \begin{Bmatrix} \{\delta\}_0 \\ \partial/\partial t\{\delta\}_0 \\ \{\delta\}_1 \\ \partial/\partial t\{\delta\}_1 \end{Bmatrix} \quad (16.52)$$

при

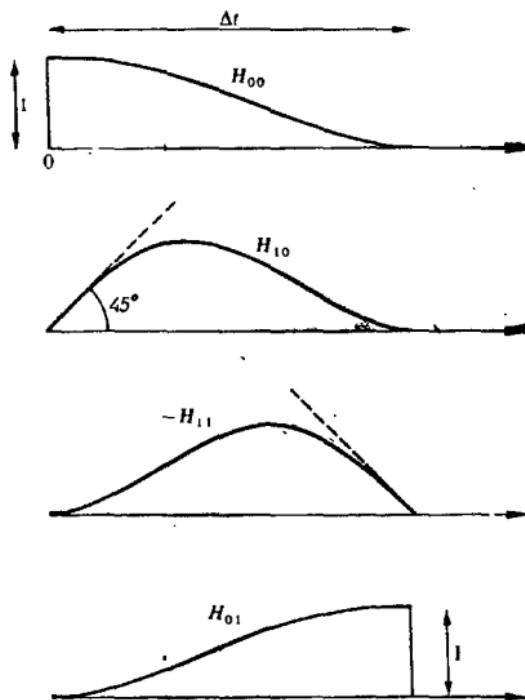
$$H_{00} = 1 - 3s^2 + 2s^3,$$

$$H_{10} = (s - 2s^2 + s^3) \Delta t,$$

$$H_{01} = 3s^2 - 2s^3,$$

$$H_{11} = (-s^2 + s^3) \Delta t \text{ и } s = \frac{t}{\Delta t}.$$

Эти полиномы Эрмита аналогичны приведенным в гл. 10 и 12; их графики представлены на фиг. 16.3.



Фиг. 16.3. Временные функции формы с разрывной второй производной.

Необходимое рекуррентное соотношение можно получить, если записать весовое уравнение минимизации невязки для  $t = \Delta t$ :

$$\int_0^t \left\{ \begin{matrix} H_{01} \\ H_{11} \end{matrix} \right\} \left[ ([K] + [C] \frac{\partial}{\partial t} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}) [H_{00}, H_{10}, H_{01}, H_{11}] \left\{ \begin{matrix} \{\delta\}_0 \\ \{\delta\}_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_1 \end{matrix} \right\} + \{\bar{F}\} \right] dt = 0. \quad (16.53)$$

После подстановки функций формы и интегрирования из равенства (16.53) будут получены уравнения для определения величин  $\{\delta\}_1$  и  $\partial/\partial t \{\delta\}_1$ , выраженных через начальные значения. Окончательный вид рекуррентного соотношения:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \partial/\partial t \{\delta\}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_0 \\ \partial/\partial t \{\delta\}_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}; \quad (16.54)$$

вывод этих выражений предоставляется читателю в качестве несложного упражнения.

Полученное рекуррентное соотношение не совпадает с конечно-разностным уравнением Уилсона и Клуха [31] или с его разновидностями, использованными Чэном и др. [32]. Оно было с успехом применено Фридом [28], хотя и выведено им другим способом.

Очевидно, что можно применить и более сложные конечные временные элементы с дополнительными степенями свободы.

### 16.5.3. Связанные задачи

Эти задачи могут быть исследованы изложенным выше способом с использованием различных аппроксимирующих функций по времени в соответствующей форме. Подробно этот вопрос мы рассматривать не будем.

### 16.5.4. Некоторые примеры

Несколько простых примеров использования рекуррентных соотношений, рассмотренных в подразд. 16.5.1, взято из работы [6] для иллюстрации применения метода и подтверждения его устойчивости.

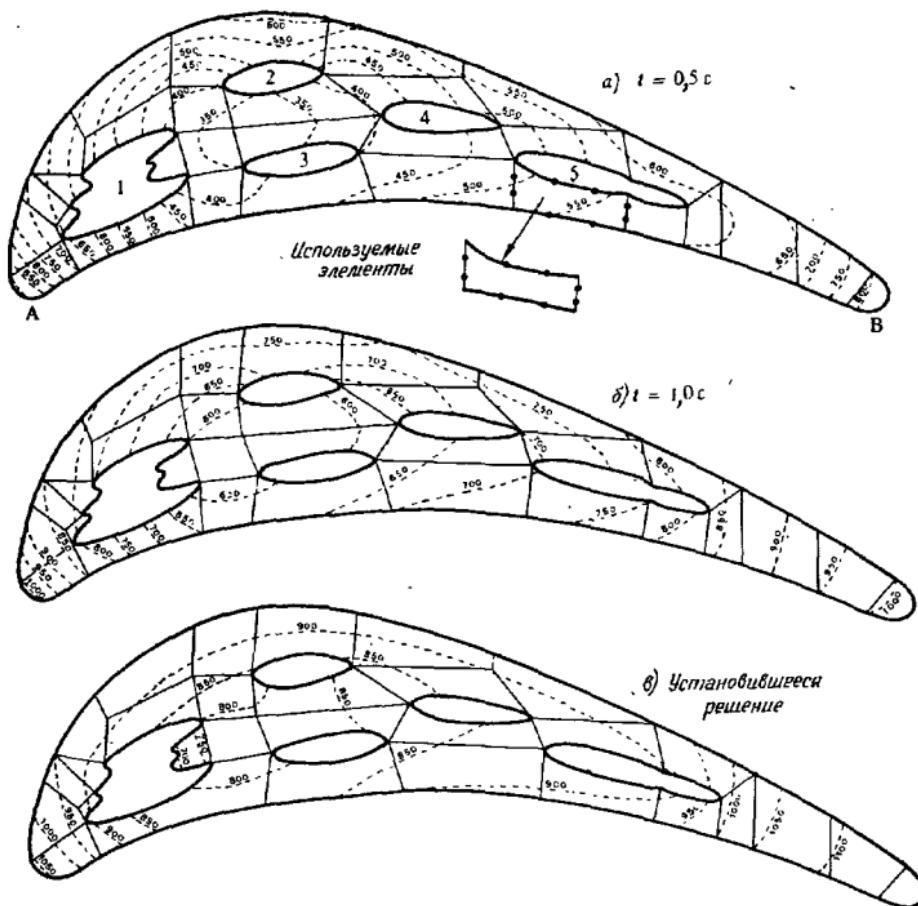
**Нестационарное распределение температуры в лопасти ротора.** Пример, приведенный на фиг. 16.4, иллюстрирует двумерную задачу, описываемую уравнением теплопроводности

$$\nabla^2 T + \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (16.55)$$

Границное условие<sup>1)</sup> излучения тепла на поверхности лопасти [уравнение (15.3)] записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{-\alpha(T - T_a)}{k}, \quad (16.56)$$

<sup>1)</sup> Обычно принято граничное условие (16.56) называть условием теплообмена, а условием излучения оно называется, если в правой части (16.56) вместо разности температур берется разность их четвертых степеней. — Прим. ред.



Фиг. 16.4. Распределение температур в охлаждаемой лопасти ротора, имеющей нулевую начальную температуру ( $\Delta t = 0,01$  с).

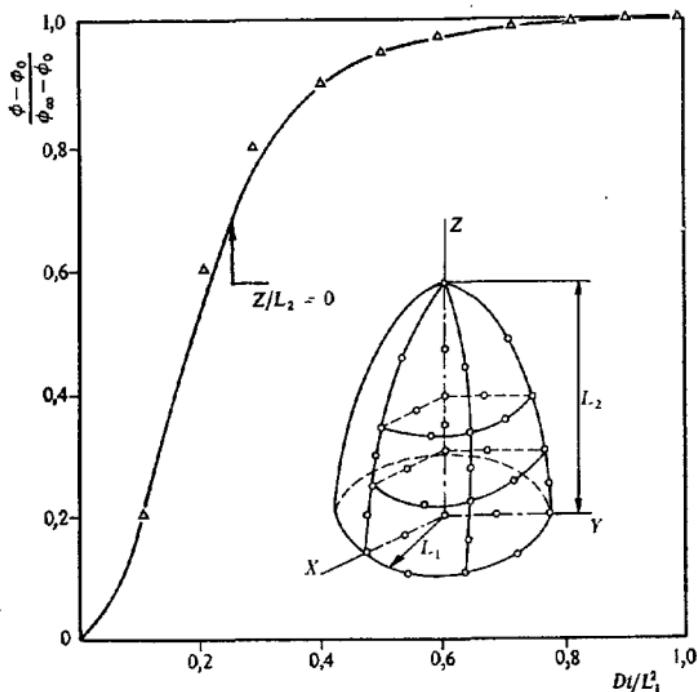
Удельная теплоемкость  $c = 3,11$  кал/г · °С. Плотность  $\rho = 7,99$  г/см<sup>3</sup>. Коэффициент теплопроводности  $k = 0,05$  кал/см · с · °С. Температура газа около лопасти 1145 °С. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  на наружной поверхности лопасти (A—B) изменяется от 0,390 до 0,056 (сечение A—B).

Номер отверстия	Температура в отверстии, °С	$\alpha$
1	545	0,0980
2	587	0,0871

где  $T_a$  — температура окружающего газа,  $\rho$  — плотность,  $c$  — удельная теплоемкость,  $k$  — коэффициент теплопроводности и  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи.

Для конечно-элементного представления лопасти были применены изопараметрические элементы третьего порядка. Распределения температур в различные моменты времени показаны пунктирными линиями.

**Трехмерная задача теплопроводности.** Одна восьмая часть эллипсоида вращения грубо аппроксимируется тремя квадратичными изопараметрическими элементами. На фиг. 16.5 показаны эти элементы и изменение температуры в центре эллипсоида,



Фиг. 16.5. Изменение температуры во времени в вытянутом эллипсоиде вращения при  $x = y = z = 0$  ( $\Delta t = 0,025$  с).  
— аналитическое решение;  $\Delta$  решение методом конечных элементов,  $L_2/L_1 = 2$ ,  $aL_1/k = \infty$ .

полученное аналитически и методом конечных элементов. Наблюдается хорошее совпадение результатов.

## 16.6. Различные нестационарные задачи. Фильтрация со свободной поверхностью

Специальный класс нестационарных задач образуют задачи о течении грунтовых вод, в которых не учитывается сжимаемость жидкости, но происходит непрерывное изменение ее свободной поверхности. Определяющее уравнение таких задач является стационарным [уравнение (15.26)].

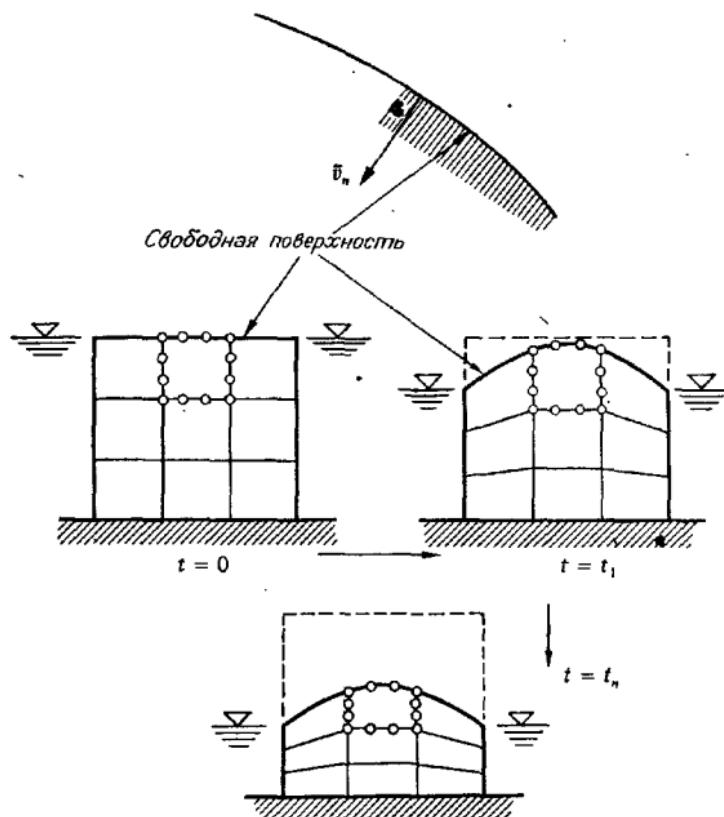
Свободная поверхность фильтрующейся жидкости есть поверхность нулевого давления (см. гл. 15), но она не составлена из линий тока в неустановившемся течении. Если решение задано в любой момент времени при известном положении свобод-

ной поверхности, то может быть найдена нормальная составляющая  $v_n$  скорости фильтрации для этой свободной поверхности. Когда жидкость покидает поры, нормальная составляющая  $\bar{v}_n$  скорости движения свободной поверхности может быть определена как

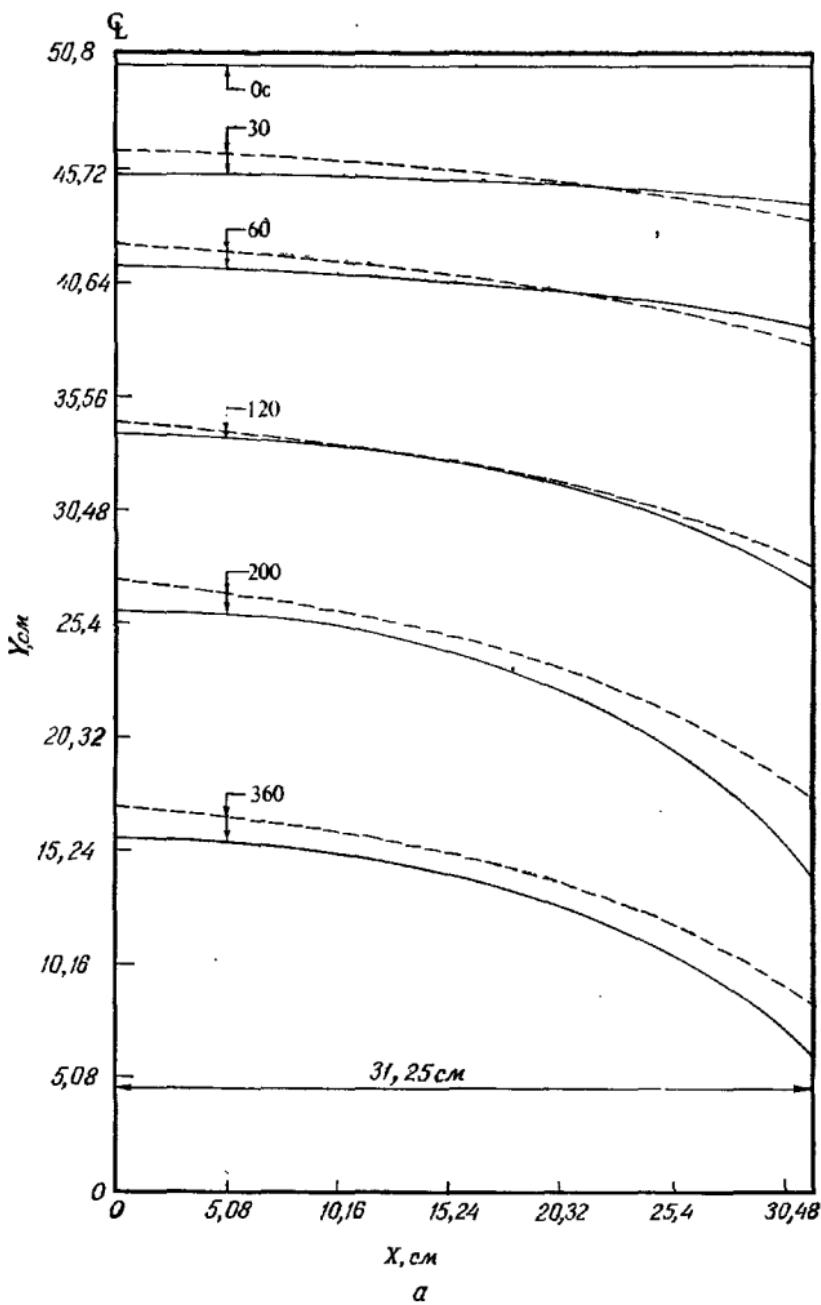
$$\bar{v}_n = \frac{1}{\mu} v_n. \quad (16.57)$$

Для следующего интервала времени  $\Delta t$  может быть установлено новое положение свободной поверхности и произведено повторное вычисление на основе шаговой схемы решения.

Очевидно, что сетка конечных элементов должна выбираться так, чтобы она соответствовала новому положению свободной поверхности на каждом шаге вычислений. Здесь особенно полезны изопараметрические криволинейные конечные элементы,

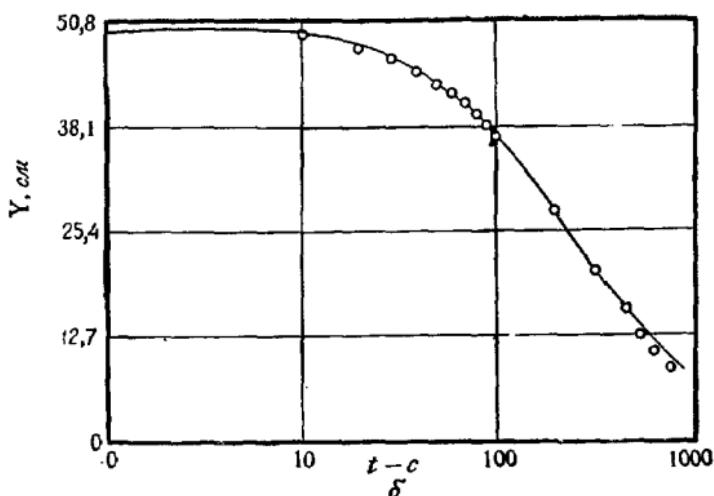


Фиг. 16.6 Фильтрационный поток при наличии свободной поверхности. Для каждого момента времени автоматически устанавливается сетка элементов и находится скорость свободной поверхности.



Фиг. 16.7.

*a* — форма свободной поверхности в различные моменты времени для задачи фиг. 16.6.  
 — аналоговое решение; — решение методом конечных элементов ( $\Delta t = 10\text{с}$ ),



Фиг. 16.7 (продолжение).

б—изменение во времени свободной поверхности в продольной плоскости симметрии при быстром спуске жидкости. — аналоговое решение; O решение методом конечных элементов.

которые были использованы для решения двумерных и трехмерных задач [34, 35].

На фиг. 16.6 и 16.7 иллюстрируется применение изложенного метода к простому примеру дренажа через две симметрично выполненные траншеи и проводится сравнение с аналоговым решением этой задачи [36]. Подобное решение широко применяется на практике и позволяет получить количественные оценки в таких задачах, как быстрый спуск жидкости и т. д. Другие попытки рассмотрения нестационарной задачи этого типа перечисляются в работах [37—39].

### 16.7. Заключительные замечания

В настоящей главе были кратко рассмотрены некоторые типы нестационарных задач и дано изложение основных методов их решения. Подобным образом могут быть поставлены и решены многочисленные задачи, имеющие важное практическое значение.

Решения, полученные методом конечных элементов, обладают некоторыми преимуществами по сравнению с соответствующими решениями, полученными конечно-разностными методами. Однако остаются трудности, связанные с устойчивостью таких решений, хотя неявная схема рекуррентных зависимостей, полученных в разд. 16.3, обычно является достаточно надежной.

При решении задач с помощью рекуррентного соотношения, типичная форма которого задана уравнением (16.50), появляется

необходимость вычисления матриц большого порядка на каждом шаге по времени. Если шаги по времени одинаковые и матрицы не зависят от времени, то на каждом шаге вычисления применяются одни и те же матрицы. В результате использования частичного обращения время, необходимое для вычисления на последующих шагах, может быть значительно уменьшено по сравнению с временем, затраченным на первом шаге [6].

Дальнейшую экономию времени решения можно получить, уменьшая число пространственных переменных, используя эффективный метод, подобный описанному в гл. 17 (подразд. 17.4.3), или применяя анализ Хэрти [40, 41].

К сожалению, это не относится к случаю существенно нелинейных задач, таких, как задача о свободной поверхности (разд. 16.6) и другие задачи подобного характера. В гл. 18 будет рассмотрено несколько таких нелинейных задач. Специальная задача, относящаяся к этой группе задач, решена недавно в работе [42], где рассматривается уравнение нестационарной теплопроводности с учетом фазового превращения (затвердевания). Подробное обсуждение этой задачи и других задач подобного рода выходит за рамки этой книги.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Crandall S., Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.
2. Carslow H. S., Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Clarendon Press, 1959; есть русский перевод: Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, изд-во «Наука», 1964.
3. Visser W., A Finite-Element Method for the Determination of Non Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformation, Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Technology, Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
4. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, 1st ed., McGraw-Hill, 1967.
5. Wilson E. L., Nickell R. E., Application of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, Nuclear Eng. and Design., 4, 1–11 (1966).
6. Zienkiewicz O. C., Parekh C. J., Transient Field Problems — Two and Three Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements, Int. J. Num. Meth. in Eng., 2, 61–71 (1970).
7. Terzhagi K., Peck R. B., Soil Mechanics in Engineering Practice, Wiley, 1948.
8. Todd D. K., Ground Water Hydrology, Wiley, 1959.
9. Arlett P. L., Bahrani A. K., Zienkiewicz O. C., Application of Finite Elements to the Solution of Helmholtz's Equation, Proc. IEE, 115, 1762–1766 (1968).
10. Taylor C., Patil B. S., Zienkiewicz O. C., Harbour Oscillation: a Numerical Treatment for Undamped Natural Modes, Proc. Inst. Civ. Eng., 43, 141–156 (1969).
11. Zienkiewicz O. C., Newton R. E., Coupled Vibrations in a Structure Submerged in a Compressible Fluid, Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.

12. Archer J. S., Consistent Mass Matrix for Distributed Systems, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, **89**, ST4, 161 (1963).
13. Leckie F. A., Lindberg G. M., The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies, *The Aero. Quarterly*, **14**, 234 (1963).
14. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **28**, 471 (1964).
15. Zienkiewicz O. C., Irons B., Nath B., Natural Frequencies of Complex, Free or Submerged Structures by the Finite Element Method, in Symposium on Vibration in Civil Engineering, London, April 1965 (Butterworth, 1966).
16. Dawe D. J., A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems, *J. Mech. Eng. Sci.*, **7**, 28 (1965).
17. Guyan R. J., Distributed Mass Matrix for Plate Elements in Bending, *JAIAA*, **3**, 567 (1965), есть русский перевод: Гайан, Матрица распределенной массы элемента пластины при изгибе, *Ракетная техника и космонавтика*, **3**, № 3 (1965).
18. Bazeley G. P., Cheung Y. K., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Traingular Elements in Plate Bending — Conforming and Non-Conforming Solution, Proc. Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
19. Anderson R. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 1031—1055, 1968.
20. Anderson R. G., The Application of the Non-Conforming Triangular Plate Bending Element to Plate Vibration Problems, M. Sc. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1966.
21. Zienkiewicz O. C., Discussion of «Earthquake Behaviour of Reservoir-Dam Systems» by Chopra A. K., *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, **95**, EM3 801—803 (1969).
22. Zienkiewicz O. C., Newton R. E., Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid, Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.
23. Back P. A. A., Cassell A. C., Dungar R., Severn R. T., The Seismic Study of a Double Curvature Dam, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **43**, 217—248 (1969).
24. Sandhu R. S., Wilson E. L., Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, EM3, 641—651 (1969).
25. Serafim J. L., Ch. 3 in: Rock Mechanics and Eng. Practice, Stagg K. G., Zienkiewicz O. C., eds., Wiley, 1968.
26. Crochet J., Naghdi P. M., On Constitutive Equations for Flow of Fluid Through an Elastic Solid, *Int. J. Eng. Sci.*, **4**, 383—401 (1966).
27. Biot M. A., General Theory of Three Dimensional Consolidation, *J. Appl. Phys.*, **12**, 155—164 (1941).
28. Fried I., Finite Element Analysis of Time Dependent Phenomena, Int. Report, Stuttgart Univ., 1969.
29. Gurtin M., Variational Principles for Linear Elastodynamics, *Arch. for Rational Mech. and Analysis*, **16**, 34—50 (1969).
30. Washizu K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
31. Wilson E. L., Clough R. W., Dynamic Response by Step by Step Matrix Analysis, Symp. on Use of Computers in Civil Eng., Lisbon, Oct. 1962.
32. Chan S. P., Cox H. L., Benfield W. A., Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical Systems, *J. Roy. Aero. Soc.*, **66**, 457—460 (1962).
33. Hajji-Sheikh A., Sparrow E. M., Transient Heat Conduction in a Prolate Spheroidal Solid, *Trans. ASME HT*, **88**, 331—333 (1966); есть русский перевод: Хаджи-Шейх, Спарроу, Нестационарная теплопроводность в удлиненном сфероидальном теле, Труды Американского общества инженеров механиков, Серия С, Теплопередача, **88**, № 3, 1966.

34. Parekh C. J., Finite Element Solution System, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969.
35. Taylor C., Parekh C. J., Peters J. C., France P., Numerical Analysis of Linear Free Surface Seepage Problems, *Proc Am. Soc. Civ. Eng.* (будет опубликовано).
36. Herbert R., Rushton K. R., Groundwater Flow Studies by Resistance Networks, *Geotechnique* 16, 53—75 (1966).
37. Neuman S. P., Witherspoon P. A., Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface, *Water Resources Res.*, 6, № 3, 889 (1970a).
38. Neuman S. P., Witherspoon P. A., Variational Principles for Confined and Unconfined Flow of Groundwater, *Water Resources Res.*, 6, № 5 (1970b).
39. Javandel I., Witherspoon P. A., Application of the Finite Element Method to Transient Flow in Porous Media, *Soc Pet. Eng. J.*, 241—252 (Sept. 1968).
40. Hurty W., Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes, *JAIAA*, 6 (July, 1968).
41. Gallagher R. H., Mallett R. H., Efficient Solution Processes for Finite Element Analysis of Transient Heat Conduction, Bell Aerosystems, Buffalo, 1969.
42. Zienkiewicz O. C., Parekh C. J., Wills H. J., The Application of Finite Elements to Heat Conduction Problems Involving Latent Heat (будет опубликовано).

## — ГЛАВА 17

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ. КОЛЕБАНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

### 17.1. Введение

В гл. 13 было показано, как задачи, в которых в направлении одной из координат свойства не изменяются, можно упростить и что, используя ортогональные функции, можно исключить эту координату. Такой подход давно применяется при решении задач, содержащих в качестве одной из координат время, и фактически лежит в основе линейной теории колебаний. В этой главе мы будем рассматривать уравнение типа (16.13), полученное в результате дискретизации в предыдущей главе:

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{F(t)\} = 0. \quad (17.1)$$

Это уравнение применимо ко всем упоминавшимся классам задач, для чего достаточно одну или несколько матриц приравнять нулю. Уравнение связанный задачи тоже может быть приведено к такому виду.

### 17.2. Динамическое уравнение при периодическом входном сигнале

Пусть член  $\{F\}$ , представляющий собой возмущающую силу, имеет вид

$$\{F(t)\} = \{F_0\} e^{at}, \quad (17.2)$$

где  $\{F_0\}$  не зависит от времени. Далее предположим, что решение  $\{\delta\}$  существует и имеет такую же форму:

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} e^{at}. \quad (17.3)$$

После подстановки этих выражений в (17.1) получим

$$([K] + a[C] + a^2[M])\{\delta_0\} + \{F_0\} = 0. \quad (17.4)$$

Решение уравнения (17.4) относительно  $\{\delta_0\}$  дает возможную форму реакции, если для  $\{\delta\}$  удовлетворяются начальные условия.

Если  $a \leftarrow$  минимая величина, т. е. имеет вид

$$a = i\omega, \quad (17.5)$$

то

$$e^{at} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

и вещественная часть выражения (17.2) соответствует периодическому сигналу.

В общем случае  $\{F_0\}$  и  $\{\delta_0\}$  будем считать комплексными, тогда уравнение (17.4) можно рассматривать как совокупность двух уравнений, получающихся в результате приравнивания вещественных и мнимых частей.

Таким образом, если

$$\begin{aligned}\{F_0\} &= \{\bar{F}_0\} + i \{\bar{F}_0\}, \\ \{\delta_0\} &= \{\bar{\delta}_0\} + i \{\bar{\delta}_0\},\end{aligned}\quad (17.6)$$

где все величины с одной и двумя черточками сверху вещественные, то, приравнивая вещественную и мнимую части (17.4), получаем систему двух уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -\omega [C] \\ -\omega [C] & [K] - \omega^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_0 \\ \bar{\delta}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{F}_0 \end{Bmatrix}. \quad (17.7a)$$

$$(17.7b)$$

Уравнения (17.7) образуют систему, в которую входят только вещественные величины. В результате решения этой системы можно определить реакцию на любой периодический сигнал. Эта система уже не является положительно определенной, хотя она по-прежнему симметрична.

При периодическом сигнале решение после начального переходного периода не чувствительно к начальным условиям и поэтому найденное приближенное решение будет характеризовать устанавлившееся поведение. Это справедливо как для задач о динамическом поведении конструкций, так и для задач теплопроводности, при решении которых надо принять

$$[M] = 0.$$

### 17.3. Собственные частоты

Если матрица  $[C]$  равна нулю, т. е. рассматривается динамическая задача без демпфирования, и если внешних возмущений  $\{F\}$  нет, то уравнение (17.1) принимает вид

$$[K]\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0. \quad (17.8)$$

Это уравнение имеет вещественное периодическое решение

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} \cos \omega t,$$

если выполняется условие

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta_0\} = 0. \quad (17.9)$$

Последнее равенство возможно только при некоторых значениях  $\omega$ , при которых определитель заключенной в скобки матрицы обращается в нуль. Поскольку этот определитель имеет порядок  $n$  (при размерности матрицы  $n \times n$ ), в общем случае существует  $n$  вещественных корней  $\omega^2$ . Они определяют *собственные угловые частоты* системы, а задача их нахождения представляет собой типичную задачу о *собственных значениях* [1]

$$\det |[K] - \omega^2 [M]| = 0. \quad (17.10)$$

В динамических задачах о колебаниях  $n$  корней этого уравнения вещественные.

Каждая частота, при которой выполняется условие (17.9), определяет вектор  $\{\delta_0\}_n$ , величина компонент которого произвольна; а их отклонения принимают заданные значения. Такие векторы называются *модами* системы.

На практике удобно вводить масштаб для этих векторов так, чтобы

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_i = I \quad (\text{единичная матрица}). \quad (17.11)$$

Масштабированные таким образом векторы называются *нормированными модами* (собственными функциями) системы.

Еще одно важное свойство мод состоит в том, что для любых двух различных частот  $i \neq j$

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_j = 0. \quad (17.12)$$

Это свойство называется свойством *ортогональности* мод [1]. Интересно отметить, что матрица  $([K] - \omega^2 [M])$  появляется и при решении задач о поведении систем при вынужденных колебаниях [уравнения (17.7)]. Как известно, при приближении величины  $\omega$  к собственной частоте реакция увеличивается и возникает явление *резонанса*.

## 17.4. Решение задачи о собственных значениях

### 17.4.1. Общие замечания

При нахождении собственных значений редко прибегают к записи определителя (17.10) в виде полинома  $a$ , как правило, используют другие методы. Такие методы описаны в специальных учебниках [1, 2], и сейчас многие библиотеки стандартных программ содержат соответствующие программы.

В большинстве случаев рассматривается *частная задача о собственных значениях*

$$[H]\{X\} = \lambda \{X\}, \quad (17.13)$$

где  $[H]$  — симметричная положительно определенная матрица. Уравнение (17.9) после обращения матрицы  $[K]$  и введения обозначения  $\lambda = 1/\omega^2$  можно записать в виде

$$[K]^{-1}[M]\{\delta_0\} = \lambda \{\delta_0\}, \quad (17.14)$$

однако симметрии в общем случае нет.

Если записать матрицу  $[K]$  в виде

$$[K] = [L][L]^T \text{ и } [K]^{-1} = [L]^{T-1}[L]^{-1},$$

где  $[L]$  — матрица с нулевыми коэффициентами над главной диагональю, то после умножения (17.14) на  $[L]^T$  будем иметь

$$[L]^{-1}[M]\{\delta_0\} = \lambda [L]^T\{\delta_0\}.$$

Полагая

$$[L]^T\{\delta_0\} = \{X\}, \quad (17.15)$$

окончательно получим уравнение

$$[H]\{X\} = \lambda \{X\}, \quad (17.16)$$

которое совпадает с (17.13), так как матрица  $[H]$  теперь симметрична и имеет вид

$$[H] = [L]^{-1}[M][L]^{T-1}. \quad (17.17)$$

После определения  $\lambda$  (всех или только нескольких наибольших значений, которые соответствуют основным тонам) находятся моды  $\{X\}$ , а затем с помощью (17.15) и моды  $\{\delta_0\}$ .

#### 17.4.2. Свободные колебания

В статических задачах всегда вводится необходимое число условий *закрепления* для обеспечения возможности получения обращения  $[K]^{-1}$ , или, что то же самое, единственности решения уравнений статики (см. гл. 1). Когда такие условия отсутствуют, как, например, при полете ракеты, произвольное задание минимального необходимого числа условий закрепления позволяет получить решение статической задачи, причем эти условия не влияют на величины напряжений. В динамических задачах задание таких условий недопустимо и часто приходится сталкиваться с задачей о свободных колебаниях, в которой матрица  $[K]$  сингулярна и поэтому не имеет обратной.

Использование простого искусственного приема позволяет сделать возможным применение к такой задаче общих методов,

описанных в предыдущем разделе. Уравнение (17.9) записывается в виде

$$([K] + \alpha[M]) - (\omega^2 + \alpha)[M]\{\delta\} = 0, \quad (17.18)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная того же порядка, что и искомая величина  $\omega^2$ . Новая матрица  $([K] + \alpha[M])$  может быть обращена, и, следовательно, обычным способом можно найти  $(\omega^2 + \alpha)$ . Этот простой, но эффективный путь преодоления существенных трудностей предложен впервые Коксом [3а].

#### 17.4.3. Экономичные методы определения собственных значений

Какой бы метод ни использовался для определения собственных значений и собственных функций системы, необходимо проделать на порядок больше вычислений, чем при решении соответствующей статической задачи. К счастью, собственные значения можно достаточно точно определить при меньшем, чем в случае статической задачи, числе степеней свободы.

Если при решении статической задачи используется достаточно мелкое разбиение, то можно сократить число степеней свободы и сосредоточить коэффициенты, учитывающие влияние массы и демпфирования, в меньшем числе узловых параметров. Этот способ предложен Айронсоном [4, 5] и несколько позднее Гайяном [6]. От читателя, по-видимому, не ускользнет его сходство с описанным в гл. 7 способом построения сложных элементов.

Пусть все степени свободы  $\{\delta\}$  разделены на две части:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{\delta} \end{Bmatrix}. \quad (17.19)$$

Предположим, что перемещения  $\bar{\delta}$  однозначно выражаются через перемещения  $\delta$ . В соответствии с этим последние будем называть главными, а первые — вспомогательными перемещениями. Таким образом,

$$\{\bar{\delta}\} = [L]\{\delta\} \quad (17.20)$$

и

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}\{\bar{\delta}\}, \quad (17.21)$$

где  $[L]$  — матрица, характеризующая связь между этими перемещениями.

Динамическое уравнение всей системы

$$[K]\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} = 0 \quad (17.22)$$

должно быть записано с учетом ограничения на деформации, налагаемого соотношением (17.21). Новое уравнение лучше всего получить, минимизируя полную потенциальную энергию системы по уменьшенному числу параметров.

В гл. 2 показано, что, используя принцип Даламбера для динамических сил, потенциальную энергию можно записать в виде

$$\chi = \{\delta\}^T [K] \{\delta\} + \left( [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} \right)^T \{\delta\}. \quad (17.23)$$

После некоторых преобразований получаем

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = [K^*] \{\bar{\delta}\} + [M^*] \{\bar{\delta}\} = 0, \quad (17.24)$$

где матрицы

$$\begin{aligned} [K^*] &= \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}, \\ [M^*] &= \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17.25)$$

соответствуют меньшему числу степеней свободы, связанных с  $\{\bar{\delta}\}$ .

Выражения (17.25) можно получить непосредственно, используя правила рассмотренного в гл. 1 контрградиентного преобразования, если выражение (17.21) принять за определение матрицы этого преобразования.

Важно установить связь между вспомогательными и главными перемещениями. При этом уместно сделать приемлемое с инженерной точки зрения предположение, что картина деформации не изменится, если вместо нагрузок задать перемещения  $\{\bar{\delta}\}$ . В соответствии с этим, записывая по аналогии с (17.19) соотношение

$$[K] \{\delta\} = \begin{bmatrix} \bar{K} & \hat{K} \\ \hat{K}^T & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \hat{\delta} \end{Bmatrix}, \quad (17.26)$$

получаем

$$[\hat{K}]^T \{\bar{\delta}\} + [\bar{K}] \{\bar{\delta}\} = 0,$$

поскольку вспомогательные узлы не нагружены, и

$$\{\bar{\delta}\} = -[\bar{K}]^{-1} [\hat{K}]^T \{\bar{\delta}\} \quad (17.27)$$

или

$$[L] = -[\bar{K}]^{-1} [\hat{K}]^T.$$

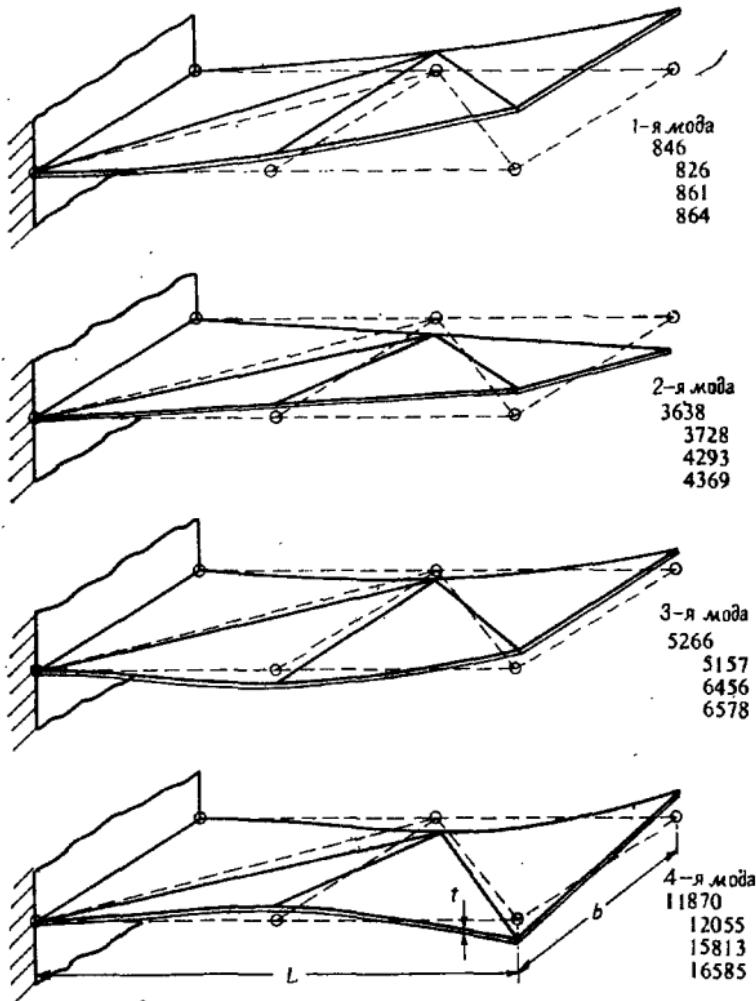
Приложения этого метода хорошо описаны в литературе [7, 8] и будут рассмотрены на приведенных ниже примерах.

## 17.5. Некоторые примеры определения собственных значений

Приведем лишь несколько примеров из множества решенных практических задач.

### 17.5.1. Колебания пластин

На фиг. 17.1 представлены результаты расчета колебаний прямоугольной консольной пластины, полученные при использо-



Фиг. 17.1: Моды консольной пластины.

Исходные данные для расчета при разбиении на 4 треугольных элемента:  $E=2,02 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $t=0,25 \text{ см}$ ,  $L=5,08 \text{ см}$ ,  $b=2,54 \text{ см}$ ,  $\nu=0,3$ ,  $\rho=7,65 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ . Числа обозначают частоты в герцах, полученные при использовании: 1) точного решения [9]; 2) «несогласованного» треугольника; 3) согласованного треугольника с поправочной функцией (10.28) и 4) согласованного треугольника с поправочной функцией (10.29).

вании всего лишь четырех треугольных элементов. Результаты сравниваются с результатами сложных расчетов Бартона [9]. Видно, что использование несогласованного треугольника приводит к лучшим результатам, чем использование уточненных соотношений. Точность определения и частот и собственных функций вполне удовлетворительна.

Более полно результаты, полученные при использовании несогласованных треугольников, для различных разбиений приведены в табл. 17.1 [7].

Таблица 17.1

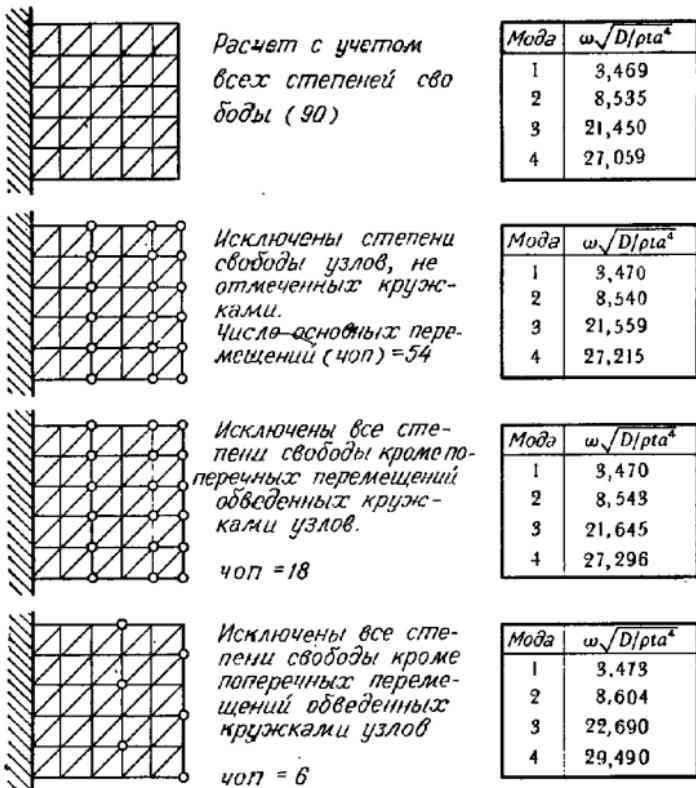
**Сравнение теоретических и экспериментальных результатов определения частот прямоугольной консольной пластины постоянной толщины (длина  $a$ , ширина  $a/2$ ) [7]**

Мо- да	$\omega/V\sqrt{D/\rho h a^4}$					
	Результаты Бартона		Экспери- ментальные результаты Планкетта	Расчет методом конечных элементов (несогласованный треугольник)		
	Метод Ритца	Экспери- мент		Сетка $2 \times 1$ , 4 эле- ментов	Сетка $4 \times 2$ , 16 эле- ментов	Сетка $2 \times 8$ для половины пластины с учетом симметрии, что эквивалентно использованию 64 элементов
1	3,47	3,42 <sup>1)</sup>	3,50	3,39	3,44	3,44(с)
2	14,93	14,52 <sup>1)</sup>	14,50	15,30	14,76	14,77 (а)
3	21,26	20,86	21,70	21,16	21,60	21,50 (с)
4	48,71	46,90	48,10	49,47	48,28	48,19 (а)
5			60,50	67,46	60,56	60,54 (с)
6			92,30		88,84	91,79 (с)
7	94,49	93,99	92,80		92,24	92,78 (а)
8			118,70		117,72	119,34 (с)
9			125,10		118,96	124,23 (с)
10			154,00			153,15 (а)
11			176,00			174,46 (с)
12			196,00			199,61 (с)

<sup>1)</sup> Результаты, скорректированные Бартоном в соответствии с проведенными им испытаниями. Буквами (с) и (а) обозначены симметричные и антисимметричные моды.

Решение подобной задачи иллюстрируется на фиг. 17.2. При решении проверялась эффективность экономичного метода определения собственных значений. Видно, что при сокращении числа степеней свободы с 90 до 6 первые четыре частоты изменяются очень мало.

В литературе так много примеров расчета колебаний пластин, что их невозможно перечислить.



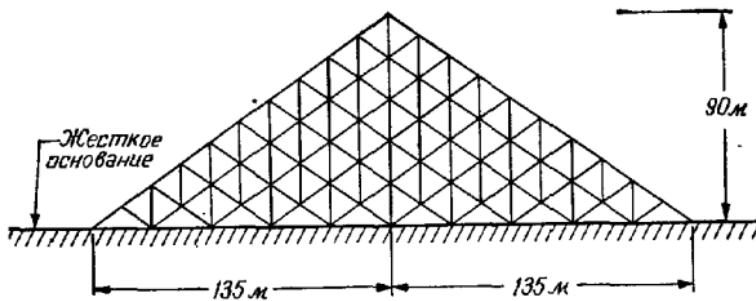
Фиг. 17.2 Исключение степеней свободы при определении собственных частот квадратной консольной пластины.

### 17.5.2. Плоская задача о колебаниях

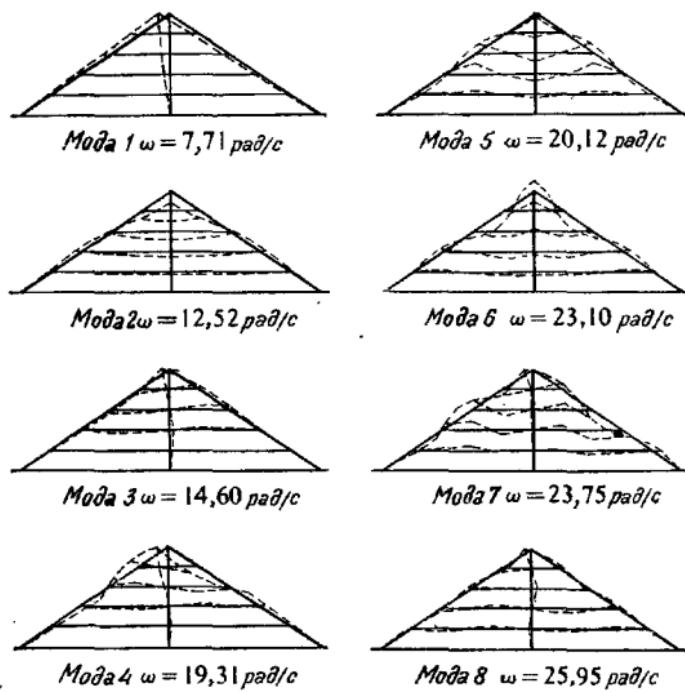
На фиг. 17.3а и 17.3б приведены результаты расчета Клуха и Чопры [10] колебаний сечения земляной дамбы. При расчете использовались простые треугольные элементы.

### 17.5.3. Колебания оболочек

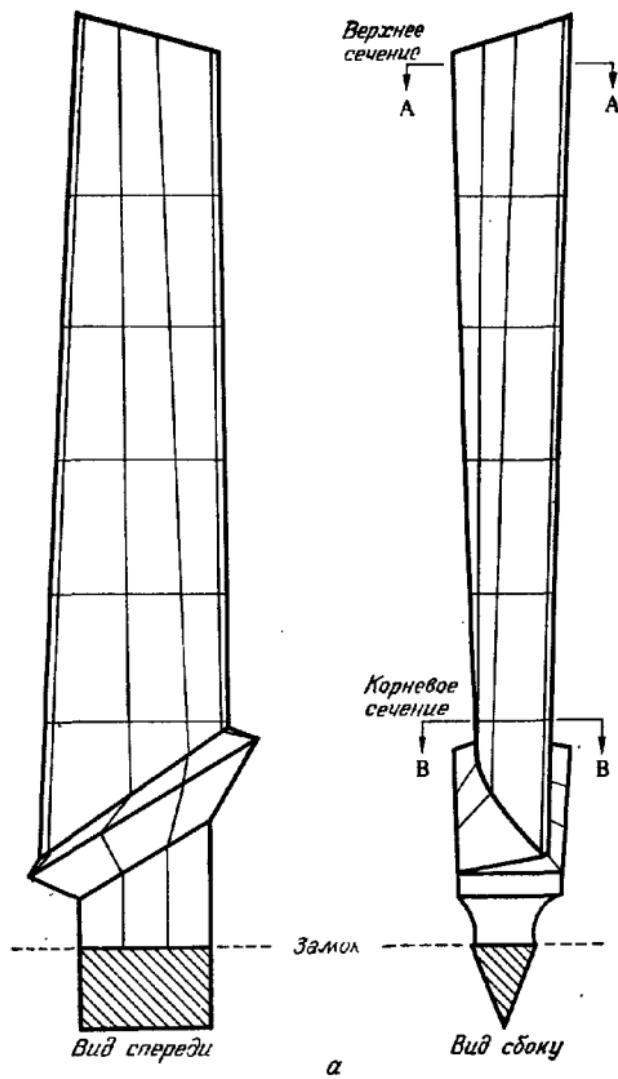
Очевидно, что изложенный метод можно применить при решении любых двумерных или трехмерных задач для упругой сплошной среды. В частности, большой интерес представляют задачи о колебаниях оболочек. В противоположность предыдущему простому примеру на фиг. 17.4 приведены результаты использования сложных элементов толстых оболочек, описанных в гл. 14, при решении задачи о колебаниях турбинной лопатки [11, 12]. Показанные на фиг. 17.5а и 17.5б элементы такого же типа используются для динамического расчета арочной плотины.



Фиг. 17.3а. Конечно-элементная идеализация земляной дамбы.

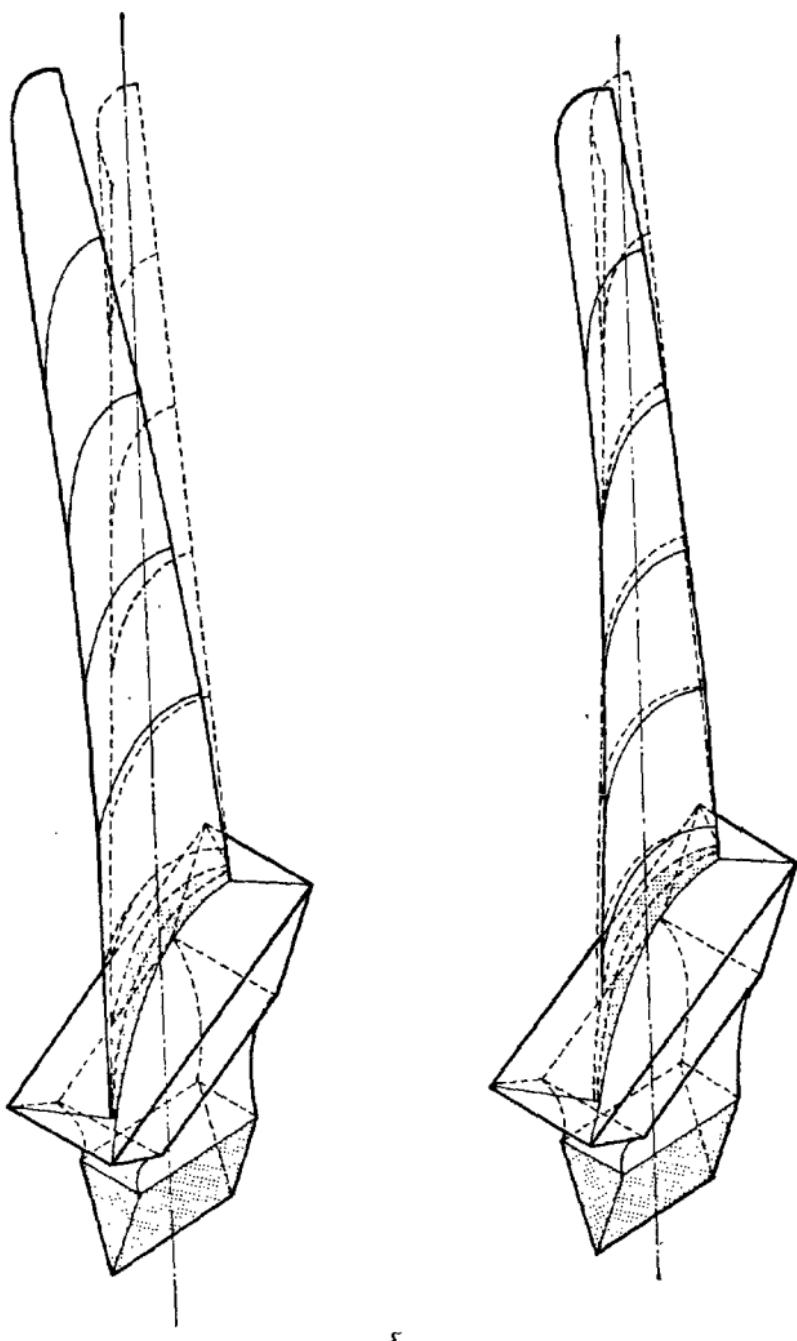


Фиг. 17.3б. Моды и частоты собственных колебаний земляной дамбы [10].



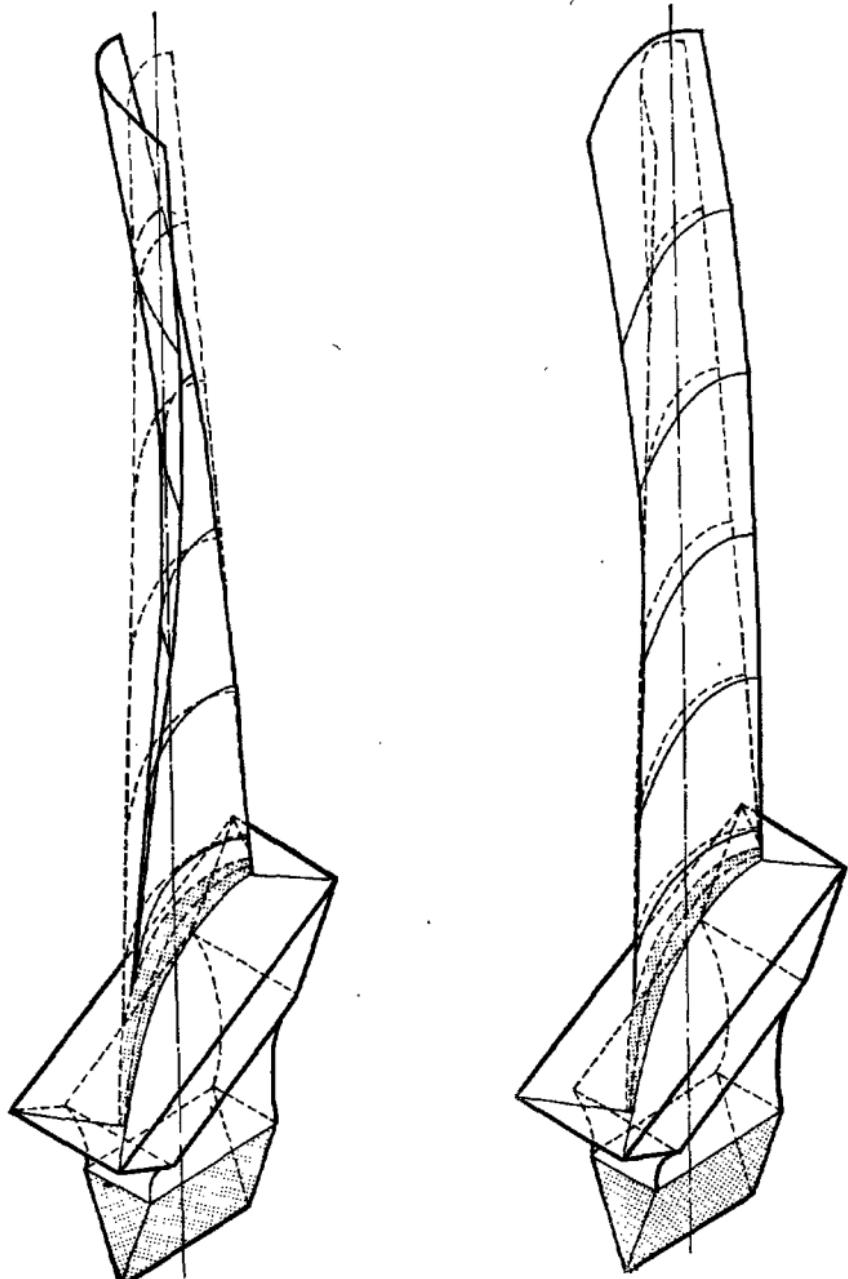
Фиг. 17.4. Колебания турбинной лопатки, рассчитываемой как толстая оболочка.

а-- элементы параболического типа; б-- моды и частоты. Сравнение с экспериментом. Мода 1—1-я форма поперечных колебаний. Измеренная частота 517 Гц. Вычисленное значение 518 Гц. Мода 2—1-я форма поперечных колебаний вдоль кромки. Измеренная частота 1326 Гц. Вычисленное значение 1692 Гц. Мода 3—1-я форма крутильных колебаний. Измеренная частота 2885 Гц. Вычисленное значение 2686 Гц. Мода 4—2-я форма поперечных колебаний. Измеренная частота 2510 Гц. Вычисленное значение 2794 Гц.

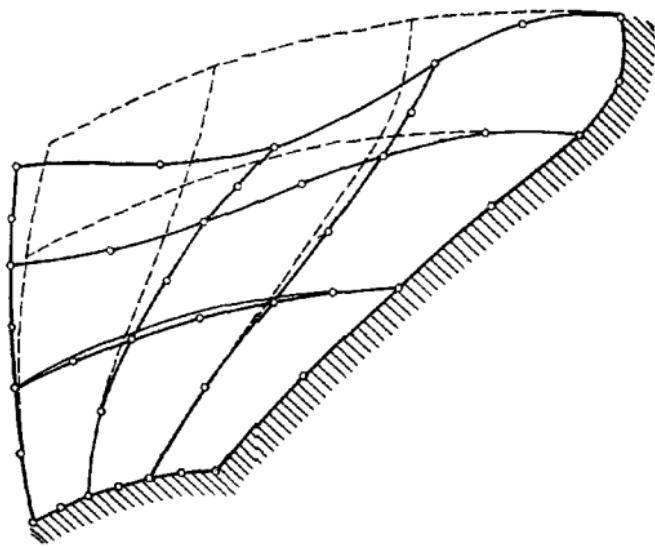


*δ*

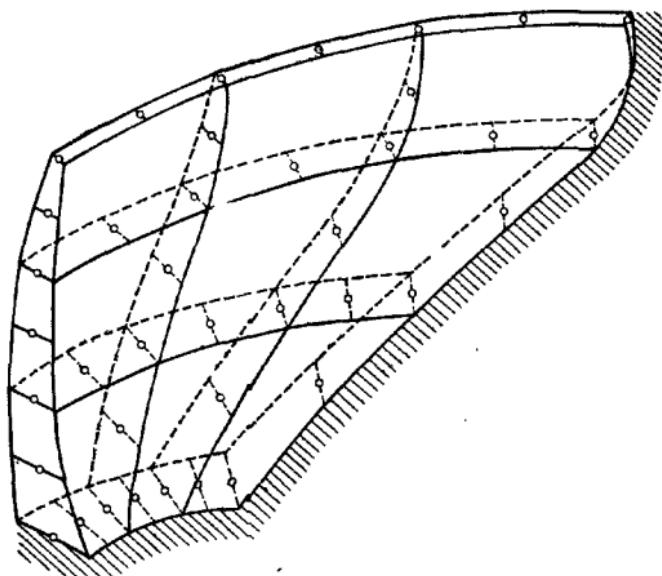
Фиг. 17.4. (продолжение).



Фиг. 17.4. (продолжение).  
 $\delta$



17.5a. Сетка  $3 \times 3$  параболических толстых оболочечных элементов, использованная для расчета колебания арочной плотины.



Фиг. 17.5б. Первая мода; частота 2,20 Гц.

Некоторые другие примеры динамического расчета оболочек содержатся в работах [13—16]. В работе [7] используются трехмерные изопараметрические элементы.

#### 17.5.4. Волновое уравнение. Задачи электромагнетизма и гидродинамики

Как было показано в предыдущей главе, основное уравнение динамики (17.1) может описывать разнообразные задачи, не связанные с расчетом конструкций. В задаче о собственных значениях матрицы массы и жесткости могут иметь другой физический смысл.

Частным случаем рассмотренных ранее общих уравнений является известное волновое уравнение, которое для двумерных задач имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.28)$$

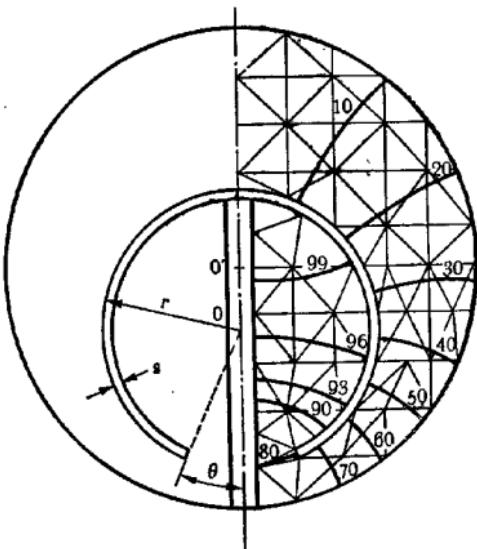
Если граничные условия не оказывают возмущающего действия, получаем задачу о собственных значениях, встречающуюся в различных областях физики.

Сначала рассмотрим ее применительно к теории электромагнитных полей [17]. На фиг. 17.6 показаны моды поля в задаче о волноводе. При расчете использовались простые треугольные элементы. Более сложная задача о трехмерных колебаниях рассмотрена в работе [17].

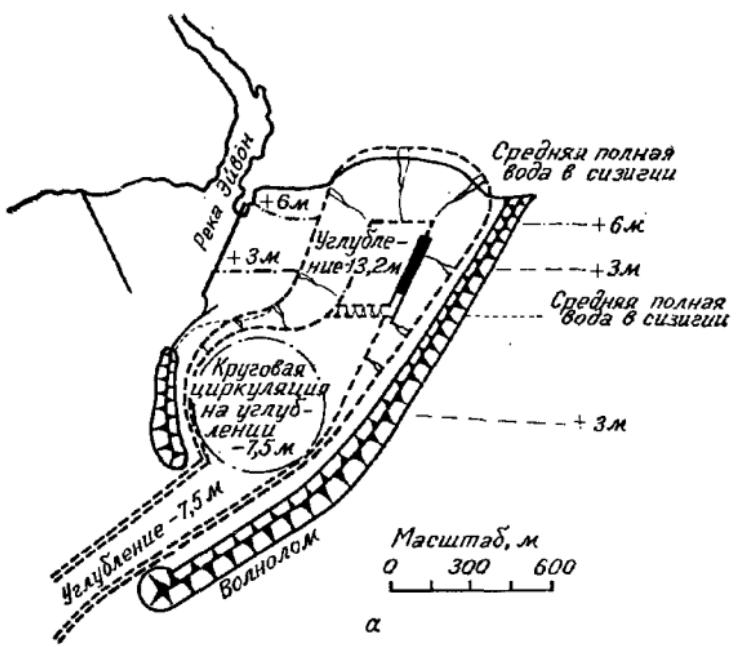
Аналогичное уравнение довольно хорошо описывает поверхностные волны в некотором объеме жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.29)$$

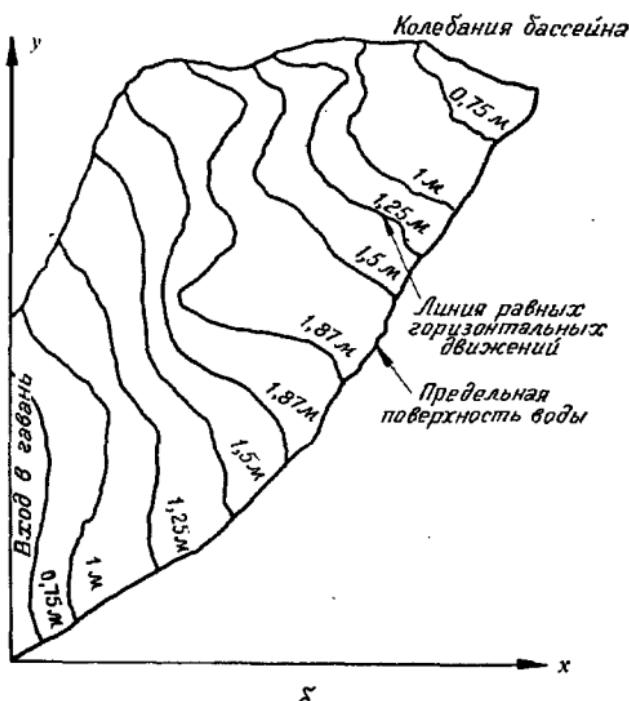
Здесь  $h$  — средняя глубина,  $\Psi$  — превышение уровня воды над средним и  $g$  — ускорение силы тяжести. С помощью этого уравнения нетрудно подсчитать собственные частоты воды в гавани [18]. На фиг. 17.7 показана форма колебаний воды в одной из гаваней.



Фиг. 17.6. Серповидный волновод; моды электромагнитного поля.  
 $d$  — наружный диаметр;  $0^\circ = 1,3d$ ;  $r = 0,29d$ ;  
 $S = 0,55d$ ;  $\theta = 22^\circ$ .

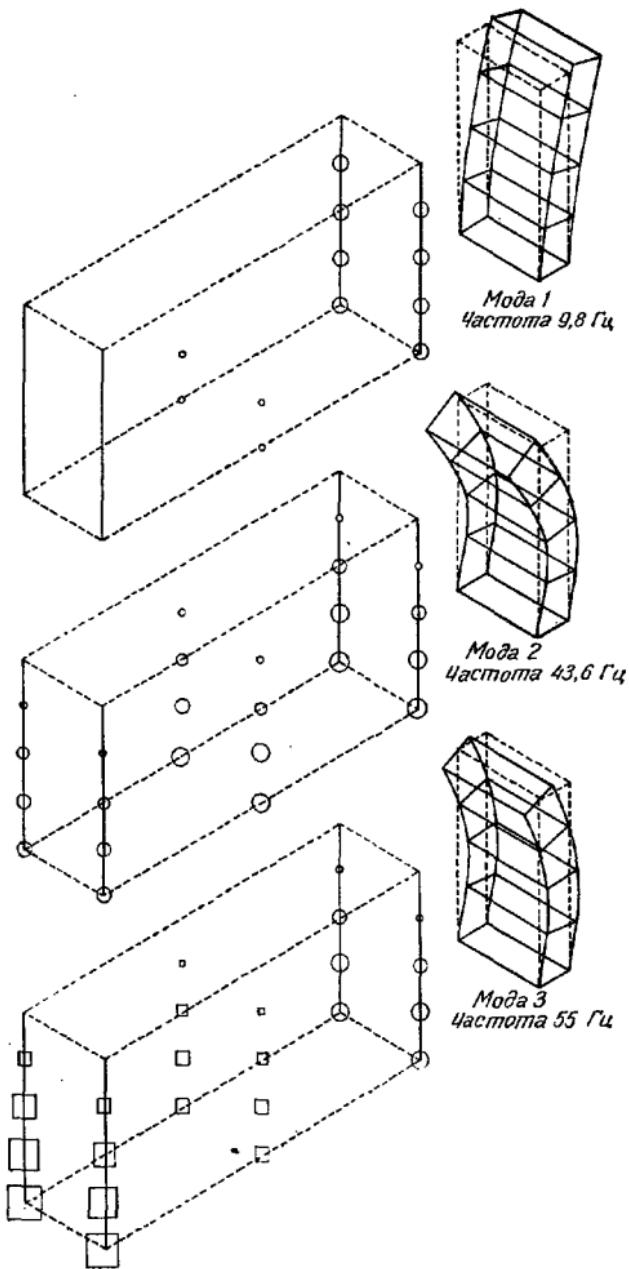


*α*



*б*

Фиг. 17.7. Колебания воды в естественной гавани.  
а — план; б — линии уровней амплитуд.



Фиг. 17.8. Колебания объема жидкости при наличии свободной поверхности.  
Расчет трехмерной задачи с использованием параболических элементов.  
○ амплитуда давления; □ смена знака.

### 17.5.5. Связанные задачи гидродинамики

Эта задача была сформулирована в предыдущей главе. В случае отсутствия возмущающей силы и демпфирования опять возникает задача о собственных значениях.

Если жидкость несжимаема, то следует просто ввести матрицу присоединенных масс. В гл. 15 довольно подробно рассматривался вопрос построения такой матрицы, так что добавление ее не представляет особых затруднений. Этот подход к решению задачи впервые описан Зенкевичем и др. [19] и впоследствии был использован Баком и др. [20].

При учете сжимаемости жидкости задача несколько усложняется, поскольку колебания жидкости и конструкции взаимосвязаны.

Простой пример двумерной задачи, иллюстрирующий взаимодействие идеализированной плотины и жидкости, представлен на фиг. 17.8. Этот пример показывает эффективность использования различных разбиений на элементы [22].

При сведении связанный задачи к обычной задаче о собственных значениях целесообразно использовать специальные преобразования. Некоторые такие преобразования описаны в работе [21]. Другой метод вычислений изложен Айронсом [23].

## 17.6. Решения нестационарных задач. Метод нормированных собственных функций

В предыдущей главе обсуждалось решение нестационарных задач с помощью различных рекуррентных соотношений. Однако если известны собственные частоты и собственные функции системы без демпфирования, то сравнительно нетрудно определить реакцию на неустановившиеся воздействия системы с демпфированием, которая описывается уравнением (17.1).

Этот метод изложен во многих учебниках. Хотя и приближенно, он позволяет вычислить реакции на такие сложные воздействия, как толчки при землетрясениях и др. [20, 24, 25].

Рассматривая опять основное уравнение (17.1)

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{F(t)\} = 0,$$

отметим, что любое движение можно представить в виде линейной комбинации собственных функций  $\{\delta_0\}_i$ , полученных в результате решения задачи о собственных значениях

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\}_i = 0. \quad (17.9)$$

Таким образом, можно записать

$$\{\delta\} = [\{\delta_0\}_1, \{\delta_0\}_2, \dots, \{\delta_0\}_n]\{z\} = [\Delta_0]\{z\}, \quad (17.30)$$

где матрица  $[\Delta_0]$  содержит все собственные функции (нормированные), а  $\{z(t)\}$  — коэффициенты пропорциональности при собственных функциях.

Если теперь подставить (17.30) в (17.1) и результат умножить на  $[\Delta_0]^T$ , то получим

$$[\Delta_0]^T [K] [\Delta_0] \{z\} + [\Delta_0]^T [C] [\Delta_0] \frac{\partial}{\partial t} \{z\} + \\ + [\Delta_0]^T [M] [\Delta_0] \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{z\} + [\Delta_0]^T \{F\} = 0. \quad (17.31)$$

В соответствии со свойством ортогональности [см. 17.12])

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Кроме того, по определению

$$[K]\{\delta_\alpha\}_i = \omega_i^2 [M]\{\delta_\alpha\}_{ii}$$

Следовательно,

$$\{\delta_0\}_i^T [K] \{\delta_0\}_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \omega_i^2 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Если также предположить<sup>1)</sup>, что выполняются соотношения

$$\{\delta_0\}_i^T [C] \{\delta_0\}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 2\omega_i c_i & \text{при } i = j, \end{cases}$$

то система (17.31) будет содержать только *диагональные члены*. Следовательно, при нормированных собственных функциях получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

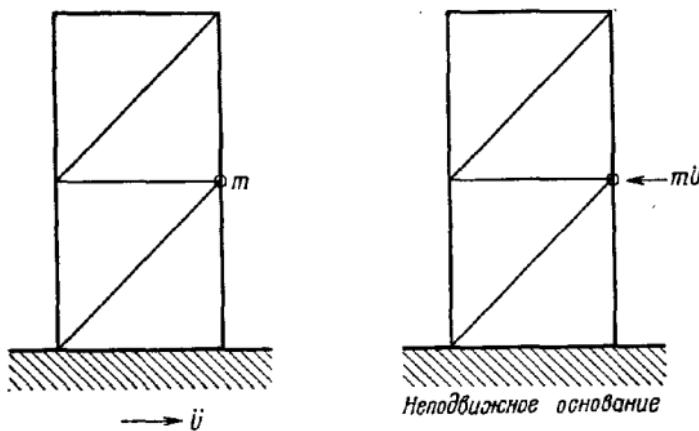
Каждое из этих уравнений решается элементарно, а затем с помощью соотношения (17.30) строится полное решение.

Этот метод особенно удобен, если все силы  $\{F(t)\}$  одинаково меняются со временем. Если, например, основание конструкции движется с ускорением  $\ddot{U}(t)$ , то можно считать, что это основание неподвижно, а к самой конструкции в узлах (фиг. 17.9) приложены силы

$$= [M] \{A\} \dot{U}. \quad (17.33)$$

<sup>1)</sup> Это предположение является обоснованным, так как в предыдущей главе было показано, что матрица  $[C]$  по форме аналогична матрице  $[M]$ .

Матрица  $\{A\}$  характеризует геометрические соотношения между ускорениями узлов и величиной  $\ddot{U}$  (если направление  $U$  совпадает с направлением одной из координат, то она состоит из единиц и нулей).



Фиг. 17.9. Эквивалентность движения основания действию силы.

Типичное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\omega_i^2 z'_i + 2\omega_i c_i \frac{d}{dt} z'_i + \frac{d^2}{dt^2} z'_i = \ddot{U}(t), \quad (17.34)$$

где

$$z_i = R_i z'_i$$

и

$$R_i = \{\delta_{ij}\}_i^T [M] \{A\}. \quad (17.35)$$

Решение уравнения (17.34) имеет простой вид

$$z'_i = \int_0^t \ddot{U}(\tau) e^{-c\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (17.36)$$

и его можно вычислить для любых типов движения.

При расчете конкретных конструкций необходимо знать весовые множители  $R_i$ , вычисление которых можно предусмотреть в программе решения задачи о собственных значениях.

С помощью уравнения (17.34) рассчитывались реакции системы с одной степенью свободы на воздействия сейсмического характера. Часто можно видеть, что поведение системы определяется небольшим числом собственных функций и что для определения максимальной реакции достаточно сложить максимальные реакции, соответствующие этим собственным функциям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Crandall S. H., *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956.
2. Wilkinson J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford Univ. Press, 1965.
- 3a. Cox H. L., *Vibration of Missiles*, *Aircraft Eng.*, 33, 2—7, 48—55 (1961).
- 3b. Jenning A., *Natural Vibration of a Free Structure*, *Aircraft Eng.*, 34, 81—83 (1962).
4. Irons B., *Eigenvalue Economisers in Vibration Problems*, *J. Roy. Aero. Soc.*, 67, 526 (1963).
5. Irons B., *Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables*, *JAIAA*, 3, 961 (1965); есть русский перевод: Айронас, Задачи о собственных значениях матриц конструкции: исключение лишних переменных, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 5, стр. 207 (1965).
6. Guyan R. J., *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, *JAIAA*, 3, 380 (1965); есть русский перевод: Гайян, Приведение матриц жесткости и массы, *Ракетная техника и космонавтика*, 3, № 2, стр. 287 (1965).
7. Anderson R. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., *Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements*, *Int. J. Solids and Struct.*, 4, 1031—1055 (1968).
8. Ramsden J. N., Stoker J. R., *Mass Condensation; a Semi Automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 333—349 (1969).
9. Barton M. V., *Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates*, *J. Appl. Mech.*, 18, 129—134 (1951).
10. Clough R. W., Chopra A. K., *Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Structures and Materials Research Rept.* № 65—8, Univ. of California, Berkeley, California, 1965.
11. Ahmad S., Anderson R. G., Zienkiewicz O. C., *Vibration of Thick, Curved, Shells with Particular Reference to Turbine Blades*, *J. Strain Analysis*, 5, 200—206 (1970).
12. Anderson R. G., *A Finite Element Eigenvalue System*, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
13. Archer J. S., Rubin C. P., *Improved Linear Axi-Symmetric Shell-Fluid Model for Launch Vehicle Longitudinal Response Analysis*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
14. Argyris J. H., *Continua and Discontinua*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
15. Klein S., Sylvester R. J., *The Linear Elastic Dynamic Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method*, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
16. Dungar R., Severn R. T., Taylor P. R., *Vibration of Plate and Shell Structures Using Triangular Finite Elements*, *J. of Strain Analysis*, 2, 73—83 (1967).
17. Arlett P. I., Bahrani A. K., Zienkiewicz O. C., *Application of Finite Elements to the Solution of Helmholtz's Equation*, *Proc. IEE*, 115, 1762—1964 (1968).
18. Taylor C., Patil B. S., Zienkiewicz O. C., *Harbour Oscillation: a Numerical Treatment for Undamped Natural Modes*, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 43, 141—155 (1969).
19. Zienkiewicz O. C., Irons B., Nath B., *Natural Frequencies of Complex, Free or Submerged Structures, by the Finite Element Method*, Symp. on Vibrations in Civil Eng., Inst. Civ. Eng., London (Butterworth), 1965.
20. Back P. A. A., Cassell A. C., Dungar R., Gaukroger D. R., Severn R. T., *The Seismic Design Study of a Double Curvature Arch Dam*, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 43, 217—248 (1969).

21. Zienkiewicz O. C., Newton R. E., Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid, Int. Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, 1969.
22. Holbeche J., Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
23. Irons B. M., Role of Part-Inversion in Fluid Structure Problems with Mixed Variables, *JAIAA*, 7, 568 (1970); есть русский перевод: Айронс, Роль частичного обращения в задачах со смешанными переменными о поведении системы жидкость — конструкция, *Ракетная техника и космонавтика*, 8, № 3, стр. 239 (1970).
24. Housner G. W., Behaviour of Structures During Earthquakes, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 85, EM4, 110—129 (1959).
25. Zienkiewicz O. C., Anderson R. G., Irons B., Buttress Dam Analysis for Earthquake Loads, *Water Power*, 19, 359—363 (1967).

## ГЛАВА 18

# ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ. ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПОЛЗУЧЕСТЬ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И Т. Д.

## 18.1. Введение

Все рассмотренные до сих пор задачи описывались линейными дифференциальными уравнениями, приводящими к стандартной квадратичной форме функционала. В задачах механики упругого тела линейность являлась следствием:

а) линейной связи между деформациями и перемещениями [см. соотношение (2.2)];

б) линейной связи между напряжениями и деформациями [см. соотношение (2.3)].

В задачах теории поля такая линейность была следствием предположения о независимости постоянных, например пропицаемости  $k$ , от искомого потенциала  $\phi$  [см. соотношение (15.1)].

Однако многие практические важные задачи не являются линейными, поэтому обобщение изложенных численных методов, которое позволило бы исследовать такие задачи, представляет большой интерес. В механике твердого тела такие явления, как plasticность, ползучесть и другие сложные реологические явления, заставляют отказаться от предположений линейной упругости. Аналогично ситуации, когда вязкость зависит от скорости потока или когда в пористых средах неприменимы законы фильтрации Дарси из-за наличия турбулентности или магнитная пропицаемость зависит от плотности тока, приводят к физической нелинейности.

Эти задачи можно исследовать, не меняя их постановки, т. е. на основе тех же основных вариационных принципов. Если найдено решение линейной задачи, то можно получить решение нелинейной задачи с помощью некоторого итерационного процесса, на каждом шаге которого материальные константы выбираются так, чтобы удовлетворялись определяющие уравнения.

Однако если нелинейна связь между деформациями и перемещениями, то необходимы более существенные изменения в постановке задачи. Такие задачи в настоящей главе не рассматриваются (они изложены в гл. 19). Тем не менее будет установлено, что итерационные методы применимы и для этого случая, поэтому с их помощью можно решать задачи, в которых имеют место нелинейности обоих типов<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> То есть физическая и геометрическая. — Прим. ред.

Следует сделать одно существенное замечание. В нелинейных задачах в отличие от линейных часто нет единственности решения. Таким образом, найденное *решение* не обязательно будет *искомым*. Для получения правильного ответа необходимо применять метод малых приращений и четко представлять физическую сущность задачи.

Здесь могут быть использованы формальные численные итерационные методы, такие, например, как методы Ньютона — Рафсона и т. д. Однако их применение требует понимания физической природы задачи, и поэтому на практике численные методы более успешно разрабатываются инженером (или физиком), нежели математиком.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

### 18.2. Подход с общих позиций

#### 18.2.1. Основные положения

Задача линейной теории упругости в перемещениях всегда сводится к решению уравнений для ансамбля (см. гл. 1 и 2)

$$[K]\{\delta\} - \{R\} = 0, \quad (18.1)$$

где вектор  $\{R\}$  содержит все силы, обусловленные внешними нагрузками, начальными напряжениями и деформациями и т. д.

При выводе этого соотношения использовался закон линейной упругости в виде

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}. \quad (18.2)$$

Кроме того, предполагалось существование линейной связи между деформациями и перемещениями [соотношение (2.2) гл. 2], перемещения считались непрерывными и уравнения равновесия удовлетворялись приближенно.

При решении задач о малых деформациях, в которых используются другие, возможно и нелинейные, определяющие уравнения, следует изменить только соотношение (18.2). Новое соотношение можно записать в виде

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon\}) = 0. \quad (18.3)$$

*Если удастся найти такое решение уравнения (18.1), что при соответствующем подборе одного или нескольких входящих в (18.2) параметров  $[D]$ ,  $\{\epsilon_0\}$  или  $\{\sigma_0\}$  это уравнение и соотношение (18.3) удовлетворяются при одинаковых значениях напряжений и деформаций, то полученное решение будет искомым.*

Очевидно, что при решении целесообразно использовать итерационный метод. Какая из трех вышеупомянутых величин будет подбираться в процессе итераций, зависит от:

- метода решения линейной задачи;
- физического закона связи между напряжениями и деформациями.

Если при итерациях подбирается матрица  $[D]$ , то приходим к известному методу *переменной жесткости*<sup>1)</sup>. Если же подбираются  $\{\varepsilon_0\}$  или  $\{\sigma_0\}$ , то имеем так называемые методы *начальных деформаций* или *начальных напряжений*.

Во многих случаях не удается установить соотношения типа (18.3) для полных деформаций и напряжений, но можно вывести их для приращений этих величин  $\Delta\{\sigma\}$  и  $\Delta\{\varepsilon\}$ . В этих случаях итерационные методы применяются для каждого приращения нагрузки (или времени при ползучести). Методы приращений можно использовать в сочетании с любым из ранее рассмотренных методов.

Из изложенного ранее видно, что параметры  $[D]$ ,  $\{\varepsilon_0\}$ ,  $\{\sigma_0\}$  являются весьма важной частью исходных данных для программы решения задачи линейной теории упругости. Поэтому такие программы представляют собой основу решения любой нелинейной задачи. На данной стадии несущественно, составлены ли эти программы на основе конечно-элементной дискретизации или нет. Изложенные ниже методы можно использовать в сочетании с любым другим способом дискретизации (например, конечно-разностным) при условии, что берутся одинаковые исходные данные.

### 18.2.2. Методы переменной жесткости

Метод переменной жесткости можно использовать в случае, когда связь между напряжениями и деформациями (18.3), характеризующую поведение материала, можно представить в форме (18.2), где матрица упругости зависит от достигнутого уровня деформации, т. е. имеет вид

$$[D] = [D(\{\varepsilon\})] = [D(\{\delta\})]. \quad (18.4)$$

Так как матрица упругости влияет на окончательный вид матрицы жесткости ансамбля, приходим к уравнению

$$\{\Phi\} = [K(\{\delta\})]\{\delta\} - \{R\} = 0, \quad (18.5)$$

которое можно решить различными итерационными методами.

<sup>1)</sup> В советской литературе этот метод носит название метода переменных параметров. О других методах см. сб. «Упругость и неупругость», вып. 3, стр. 120, Изд-во МГУ, 1973. — Прим. ред.

Очевиден следующий простой итерационный процесс. Сначала предполагается  $\{\delta\}_0 = 0$ , вычисляется  $[K(\{\delta\}_0)] = [K_0]$  и определяется  $\{\delta\}_1 = [K_0]^{-1}\{R\}$ . Процесс повторяется в соответствии с формулой

$$\{\delta\}_n = [K]_{n-1}^{-1} \{R\} \quad (18.6)$$

до тех пор, пока перемещения перестанут изменяться.

Если определяющие уравнения таковы, что соотношение типа (18.4) может быть записано только для приращений напряжений и деформаций, то описанный процесс следует применить для приращений нагрузки, отсчитываемых от ранее достигнутого значения.

В любом случае можно пользоваться стандартной программой решения задач линейной теории упругости при условии, что матрица  $[D]$  симметрична. Это требование весьма существенно, так как в программе обычно используется свойство симметрии.

Одним из существенных недостатков методов перемещенных параметров является то, что на каждом шаге приходится заново строить матрицы жесткости и решать полученные уравнения. Если программа использует прямые методы решения, то такой подход становится очень неэкономичным и более приемлемыми оказываются другие методы, которые описаны в следующем разделе.

### 18.2.3. Методы начальных напряжений

Если определяющие уравнения разрешимы относительно напряжений, т. е. (18.3) имеет вид

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}), \quad (18.7)$$

то соотношение (18.2) для упругого материала можно привести к форме (18.7), задавая соответствующим образом  $\{\sigma_0\}$ . Так как  $\{\sigma_0\}$  влияет на силы  $\{R\}$ , приходим к решению уравнения

$$\{\psi\} = [K_0]\{\delta\} - R(\{\delta\}) = 0. \quad (18.8)$$

Итерационный процесс проводится следующим образом. Сначала находится

$$\{\delta_0\} = [K_0]^{-1}\{R_0\},$$

где  $\{R_0\}$  соответствует приложенным нагрузкам. Определяются напряжения  $\{\sigma_0\}_1$ , необходимые для приведения упругого решения в соответствие с реальными напряжениями при достигнутых деформациях. Далее с учетом начального напряжения с помощью соотношения (2.13) находится  $\{R\}_1$  и определяется

$$\{\delta_1\} = [K_0]^{-1}\{R_1\} \quad \text{и т. д.}$$

до

$$\{\delta_n\} = [K_0]^{-1} \{R_n\}. \quad (18.9)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока решение не перестанет изменяться<sup>1</sup>).

Другой удобный метод состоит в определении только изменений  $\{R\}$ , обусловленных изменениями требуемого начального напряжения. В этом случае  $\{\delta_0\}$  находится, как и ранее, по

$$\Lambda \{\delta_1\} = [K_0]^{-1} \Lambda \{R_1\} \text{ и т. д.}$$

и итерации продолжаются до тех пор, пока величина  $\Delta \{\delta\}_n$  не станет достаточно близкой к нулю.

При вычислениях более удобен последний подход, который, кроме того, имеет ясный физический смысл. На каждом этапе во всех точках конструкций определяется разность между *истинными напряжениями при соответствующих деформациях и напряжениями, найденными из упругого решения*. Эта разность напряжений затем перераспределяется в соответствии с упругим законом, чтобы восстановить равновесие, и поэтому метод первоначально получил название метода перераспределения напряжений [1].

Величину силы  $\Delta \{R\}_n$ , вычисленную на  $n$ -м шаге итерации, можно физически интерпретировать как *неуравновешенную невязку силы* в конструкции, и, следовательно, она является удобной мерой ошибки.

В этом методе на каждом шаге итерационного процесса используется одна и та же матрица жесткости, и если она поблочно обратима, то время, необходимое для каждой итерации, составляет лишь небольшую часть времени, затрачиваемого на получение первого приближения.

Теперь возникает вопрос, какие упругие постоянные следует использовать для определения матрицы  $[K_0]$ . Если поведение материала в основном описывается соотношениями линейной теории упругости и отклонения от линейно-упругого поведения локализованы, то естественно использовать начальные значения упругих постоянных. Однако если нелинейность проявляется для всех напряжений, то для ускорения сходимости можно рекомендовать скорректировать упругие постоянные после первой итерации.

#### 18.2.4. Методы начальных деформаций

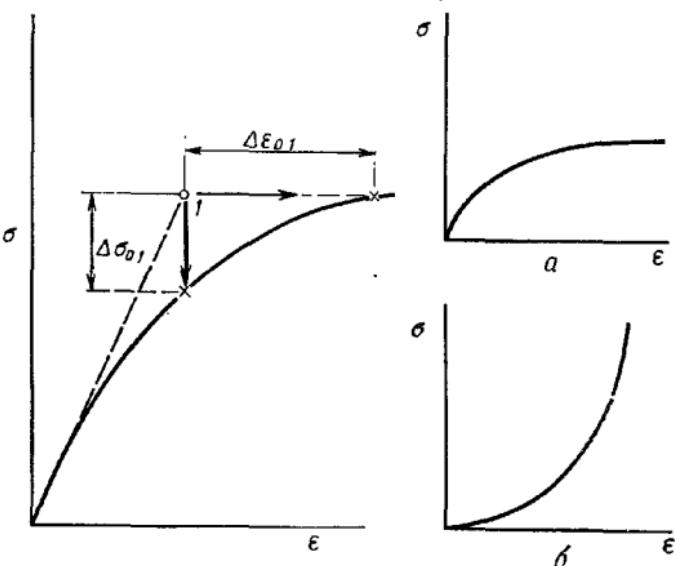
В некоторых задачах, особенно в задачах ползучести, действующие напряжения нельзя выразить в явном виде через де-

<sup>1</sup>) Описанный метод носит название метода упругих решений. См. А. А. Ильюшин, Пластичность, ГИТТЛ, 1948. — Прим. ред.

формации. С другой стороны, в этих случаях можно определить деформации (или приращения деформаций) через напряжения, т. е. установить соотношение типа

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}). \quad (18.10)$$

Совпадение соотношений (18.10) и (18.2) может быть достигнуто при соответствующем выборе  $\{\varepsilon_0\}$ . Уравнение (18.8) опять решается итерационным методом, но теперь упругие деформации, получаемые на каждом шаге, сравниваются с деформациями, соответствующими определяющему соотношению (18.10),



Фиг. 18.1 Методы начальных деформаций и начальных напряжений. Размягчающийся (а) и затвердевающий (б) материалы.

и их разность используется для оценки невязки силы  $\Delta\{R\}_n$ . В остальном процесс идентичен описанному выше, и, в частности, матрица жесткости остается постоянной на любом шаге.

В некоторых законах ползучести (см. разд. 18.7) дополнительные деформации (деформации ползучести) явно отделены от упругих деформаций и, следовательно, при каждой итерации определяются непосредственно дополнительные начальные деформации. Различие между методами начальных напряжений и начальных деформаций лучше всего, вероятно, проиллюстрировать графически. На фиг. 18.1 уровню напряженно-деформированного состояния, полученному в первом приближении, соответствует точка 1. В методе начальных напряжений полученные напряжения уменьшаются до правильного значения введением некоторого начального напряжения  $\Delta\{\sigma_0\}_1$ , тогда как в методе

начальных деформаций значения деформаций корректируются поправочным членом  $\Delta\{\varepsilon_0\}_1$ . Ясно, что когда с ростом напряжений деформации быстро увеличиваются, предпочтительнее использовать первый метод, а когда справедливо обратное утверждение ( затвердевающие материалы) — второй.

### 18.2.5. Ускорение сходимости

Методами начальных напряжений и начальных деформаций можно получить окончательное решение, если правильно подобрать значения  $\{\sigma_0\}$  или  $\{\varepsilon_0\}$ . Однако описанные процессы подбора не всегда обладают быстрой сходимостью. Исследуя сходимость в процессе вычислений и вводя на каждом этапе дополнительные поправки, ее можно ускорить. Одна из таких процедур в общих чертах описана в работах [2а] и [2б]. Однако инженер, составляющий программу, может проявить здесь свою изобретательность. Любой метод является вполне законным, если окончательное решение удовлетворяет всем требованиям.

## 18.3. Математический подход

На этой стадии важно пересмотреть всю проблему в целом с математических позиций [3]. Читатель, несомненно, знаком с методом Ньютона решения нелинейных уравнений с одной переменной  $x$  вида

$$\psi(x) = 0.$$

Если приближенное решение  $x_n$  достаточно близко к точному, но в то же время  $\psi(x_n) \neq 0$ , то его можно уточнить, полагая

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_{n+1},$$

где

$$\Delta x_{n+1} = -\frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx}(\psi)_n}.$$

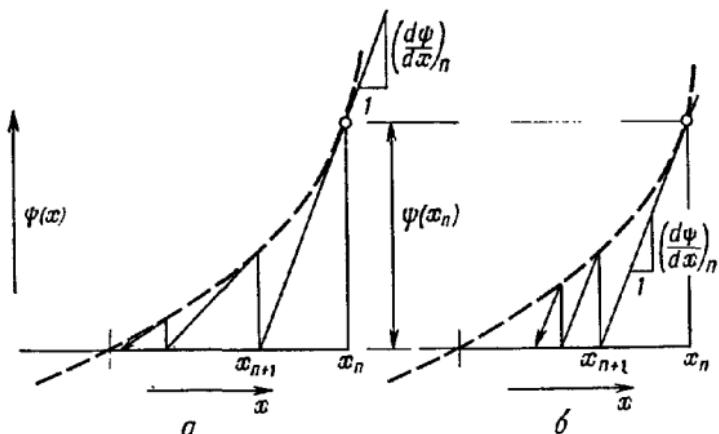
Сходимость метода Ньютона графически показана на фиг. 18.2, а. Можно поступить по-другому и на каждом шаге использовать некоторое постоянное значение величины

$$\frac{d}{dx}(\psi)_0,$$

тогда поправка принимает вид

$$\Delta x_{n+1} = -\frac{\psi(x_n)}{\frac{d}{dx}(\psi)_0}.$$

Такой процесс, изображенный на фиг. 18.2, б, обычно сходится медленнее. Ясно, что эти же идеи легко обобщить на нелинейные уравнения со многими переменными. В этом случае процесс известен как метод Ньютона-Рафсона, который в свою очередь может быть модифицирован аналогично тому, как это сделано выше. Очевидно, что методы переменной и постоянной жесткости, рассмотренные с общих позиций в разд. 18.2, относятся к этим двум категориям.



Фиг. 18.2. Итерационный метод Ньютона (*а*) и метод с использованием постоянного наклона (*б*).

Для проведения дальнейших выкладок удобно вернуться к основным уравнениям метода конечных элементов, полученным из принципа виртуальной работы в гл. 2. Уравнения (2.28) представляют собой уравнения равновесия, полученные из условия равенства изменений внутренней и внешней работ. Если  $\{\psi\}$  представляет собой вектор суммы внутренних и внешних сил, то можно записать

$$d\{\delta\}^T \{\psi\} = \int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{\delta\}^T \{\bar{R}\} = 0, \quad (18.11)$$

где вектор  $\{\bar{R}\}$  содержит все внешние силы, обусловленные приложенными нагрузками. Если для вариации деформаций справедливо соотношение

$$d\{\varepsilon\} = [B] d\{\delta\}, \quad (18.12)$$

то, исключая  $d\{\delta\}^T$ , получаем справедливое в общем случае соотношение

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} = 0, \quad (18.13)$$

в котором  $\{\sigma\}$  — истинные напряжения, зависящие от достигнутого уровня деформаций.

Если деформации малы, то  $[B]$  — зависящая от координат матрица деформаций, которая уже была определена ранее в гл. 2. Если можно установить зависимость  $\{\sigma\}$  от деформаций и, следовательно, от перемещений, то задача сводится к решению нелинейного уравнения

$$\psi(\{\delta\}) = 0.$$

На этом заканчивается постановка задачи.

Рассмотрим теперь вариацию  $\{\psi\}$  по  $d\{\delta\}$ , которая имеет вид

$$d\{\psi\} = \int_V [B]^T d\{\sigma\} dV, \quad (18.14)$$

так как  $\{\bar{R}\}$  не зависит от  $\{\delta\}$  и  $d\{\bar{R}\} = 0$ . Если записать

$$d\{\sigma\} = [D_T(\{\varepsilon\})] d\{\varepsilon\}, \quad (18.15)$$

где  $[D_T]$  — матрица упругих постоянных для приращений (или касательных модулей), то, используя соотношение (18.15) вместе с (18.12), можно переписать (18.14) в виде

$$d\{\psi\} = \left( \int_V [B]^T [D_T(\{\varepsilon\})] [B] dV \right) d\{\delta\} = [K_T] d\{\delta\}. \quad (18.16)$$

Если теперь применить метод Ньютона — Рафсона, начиная с некоторого приближенного решения  $\{\delta\}_n$ , которое не обращает в нуль значения  $\{\psi\}_n$ , то можно получить соотношение для поправки к этому решению

$$\Delta\{\delta\}_{n+1} = -[K_T]_n^{-1} \{\psi\}_n, \quad (18.17)$$

где  $[K_T]_n$  — матрица касательных упругих постоянных, определенная для перемещений и деформаций, соответствующих приближенному решению  $\{\delta\}_n$ .

Таким образом, основываясь на методе Ньютона — Рафсона, получаем еще один метод решения нелинейных задач с использованием переменной жесткости. Он отличается от описанного в подразд. 18.2.2 тем, что здесь применяется не секущая, а касательная жесткость. Этот метод гораздо удобнее на практике, так как физические законы обычно формулируются с использованием касательной жесткости.

Однако если вместо касательной матрицы использовать постоянную матрицу, соответствующую начальной упругой жесткости, то метод Ньютона — Рафсона<sup>1)</sup> (фиг. 18.2, б) становится

<sup>1)</sup> Этот метод называется модифицированным методом Ньютона — Канторовича. — Прим. ред.

тождественным ранее описанным методам начальных напряжений и начальных деформаций.

Итак, для методов, основанных на простых физических соображениях, имеется математическое обоснование<sup>1)</sup>. Ясно, что при использовании модифицированного метода Ньютона — Канторовича потребуется большее число итераций, хотя в целом, как указывалось ранее, метод более экономичен, поскольку необходимо обращение только одной матрицы жесткости. Может оказаться, что оптимальный в экономическом отношении вариант получится при удачном сочетании обоих методов — постоянной и переменной жесткости.

Таким образом, существенным в каждом нелинейном методе является способ непосредственного вычисления вектора  $\{\phi\}$ , характеризующего *неуравновешенность сил*.

Вектор  $\{\phi\}_n$  можно рассматривать как *неуравновешенную невязку сил*. Таким образом, он играет важную роль в вычислительном процессе.

К описанным методам решения могут применяться любые процедуры ускорения сходимости.

## 18.4. Пластичность

### 18.4.1. Общая теория

Этот частный вид отклонения от линейно-упругого поведения хорошо известен для металлов и подробно изучен с теоретических позиций [4—7]. По существу, пластичность характеризуется не зависящим от времени необратимым деформированием, начинающимся лишь по достижении некоторого напряжения, известного как предел текучести.

**Поверхность текучести.** Обычно постулируется и подтверждается экспериментально, что текучесть начинается только тогда, когда напряжения  $\{\sigma\}$  удовлетворяют критерию текучести

$$F(\{\sigma\}, \alpha) = 0, \quad (18.18)$$

где  $\alpha$  — параметр упрочнения. Условие текучести можно наглядно представить в виде поверхности в  $n$ -мерном пространстве напряжений, положение которой зависит от мгновенного значения параметра  $\alpha$  (фиг. 18.3).

**Закон пластического течения** (ассоциированный закон). Мизес [4] первый предложил соотношение, связывающее приращения пластических деформаций с поверхностью текучести. Различными авторами [4, 5] были высказаны эвристические сообра-

<sup>1)</sup> Метод начальных напряжений фактически совпадает с описанным здесь, если аппроксимировать  $[K_t]$  матрицей  $[K_0]$ .

жения в пользу предложенного соотношения; в настоящее время общепринятой, по-видимому, является следующая гипотеза: если  $d\{\varepsilon\}_p$  — приращение пластической деформации, то

$$d\{\varepsilon\}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (18.19)$$

или для любой компоненты  $n$

$$d\varepsilon_{n,p} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_n}.$$

Здесь  $\lambda$  — неопределенный коэффициент пропорциональности. Это соотношение известно как *ассоциированный закон* и его можно трактовать как требование ортогональности вектора приращений пластических деформаций поверхности текучести в  $n$ -мерном пространстве напряжений.

**Соотношения между полными напряжениями и деформациями.** Предположим, что изменение деформации при бесконечно малом приращении напряжения может быть представлено в виде суммы упругой и пластической частей, т. е.

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}_e + d\{\varepsilon\}_p. \quad (18.20)$$

Упругие приращения деформации связаны с приращениями напряжения, как обычно, симметричной матрицей  $[D]$ . Таким образом, соотношение (18.20) можно записать в виде

$$d\{\varepsilon\} = [D]^{-1} d\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \lambda. \quad (18.21)$$

При пластическом течении напряжения находятся на поверхности текучести, определяемой равенством (18.18). Дифференцируя его, получаем

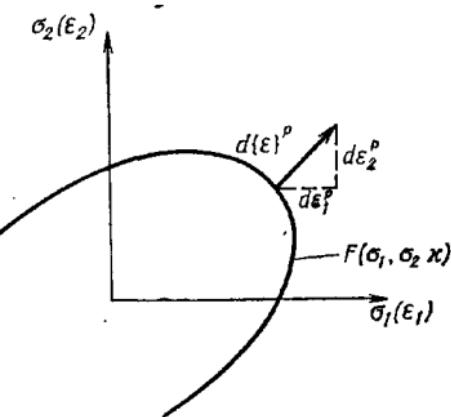
$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} d\sigma_n = 0 \quad (18.22)$$

или

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} - A\lambda = 0,$$

где введено обозначение

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda \frac{1}{\lambda}. \quad (18.23)$$



Фиг. 18.3. Поверхность текучести и ассоциированный закон в двумерном пространстве напряжений.

Соотношения (18.21) и (18.22) можно записать в симметричной матричной форме

$$\begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \dots - A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad (18.24)$$

Неопределенную постоянную  $\lambda$  можно исключить (избегая при этом умножения или деления на величину  $A$ , которая в общем случае может равняться нулю). В результате получаем выражение, в явном виде определяющее изменения напряжений через изменения деформаций:

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep}^* d\{\varepsilon\}. \quad (18.25)$$

Здесь

$$[D]_{ep}^* = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left[ A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right]^{-1}. \quad (18.26)$$

Место матрицы упругости  $[D]$ , используемой в методе приращений, занимает упруго-пластическая матрица  $[D]_{ep}^*$ . Она симметрична и имеет смысл независимо от того, равна ли нулю величина  $A$ . Подробное описание теории пластичности в такой форме впервые дано в работах [8, 9].

**Значение параметра  $A$ .** Ясно, что в случае идеальной пластичности без упрочнения величина  $A$  равна нулю. При учете упрочнения необходимо рассмотреть сущность параметра (или параметров)  $\alpha$ , определяющего смещение поверхности текучести.

В упрочняющемся материале  $\alpha$  определяется как пластическая часть работы при пластическом деформировании, т. е.

$$d\alpha = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \dots = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}_p. \quad (18.27)$$

Используя закон течения (18.19), получаем

$$d\alpha = \lambda \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (18.28)$$

Очевидно, что  $\lambda$  можно исключить из (18.23) и записать

$$A = - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \quad (18.29)$$

Это выражение позволяет определить  $A$  при известной зависимости  $F$  от  $\alpha$ .

**Соотношения Прандтля — Рейсса.** Для иллюстрации некоторых понятий рассмотрим частный случай поверхности текучести Мизеса. Она определяется соотношением

$$F = \left[ \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 3\sigma_4^2 + 3\sigma_5^2 + 3\sigma_6^2 \right]^{1/2} - \bar{\sigma} = 0, \quad (18.30)$$

где в общем случае трехмерного напряженного состояния индексы 1, 2, 3 относятся к нормальным компонентам напряжений, а 4, 5, 6 — к сдвиговым.

Из (18.30) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} &= \frac{3\sigma'_1}{2\bar{\sigma}}, & \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} &= \frac{3\sigma'_2}{2\bar{\sigma}}, & \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} &= \frac{3\sigma'_3}{2\bar{\sigma}}, \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_4} &= \frac{3\sigma_4}{\bar{\sigma}}, & \frac{\partial F}{\partial \sigma_5} &= \frac{3\sigma_5}{\bar{\sigma}}, & \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} &= \frac{3\sigma_6}{\bar{\sigma}}. \end{aligned}$$

Штрихами обозначены компоненты девнатора тензора напряжений, т. е.

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad \text{и т. д.}$$

Величина  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x)$  — одноосное напряжение при течении. Если известны результаты опыта для одноосного растяжения в виде зависимости  $\bar{\sigma}$  от пластической деформации  $\varepsilon_{up}$ , то можно записать

$$dx = \bar{\sigma} d\varepsilon_{up}$$

и

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_{up}} \frac{1}{\sigma} = \frac{H'}{\sigma},$$

где  $H'$  — тангенс угла наклона кривой в точке, соответствующей  $\bar{\sigma}$ .

Подставляя это выражение в (18.29), после некоторых преобразований получаем

$$A = H', \quad (18.31)$$

что приводит к хорошо известным соотношениям Прандтля — Рейсса между напряжениями и деформациями.

С обобщением на случай поверхности текучести с угловыми точками можно познакомиться в работе [6].

#### 18.4.2. Исторические замечания

Поскольку в изложенной теории пластичности законы сформулированы в виде соотношений (18.25) и (18.26) для приращений, ясно, что итерационный процесс необходимо применять

для малых приращений нагрузок. При этом можно использовать любой из процессов, описанных в разд. 18.2.

В самых первых приложениях метода конечных элементов к задачам теории пластичности предпочтение отдавалось методам начальных деформаций (см., например, работы [10] и [11]). Однако эти методы совершенно неприменимы при рассмотрении идеальной пластичности (без упрочнения), поскольку в этом случае деформации при заданных напряжениях нельзя определить однозначно. По этой причине в последующих работах повысился интерес к методу переменной жесткости [12—16]. Некоторая экономия достигалась за счет того, что для решения систем уравнений использовался метод итераций и жесткость менялась в общем итерационном процессе.

Метод начальных напряжений, впервые примененный для задач теории пластичности Зенкевичем и др. [9], по-видимому, наиболее удобен, так как любая разгрузка автоматически происходит по законам теории упругости, что позволяет исследовать циклическое нагружение. В настоящее время этот метод используется довольно широко [17].

#### *18.4.3. Приложения метода начальных напряжений к некоторым задачам пластичности*

Приспособить метод начальных напряжений к решению задач пластичности довольно просто. Трудности, возникающие при этом, связаны со следующими двумя обстоятельствами:

а) Соотношение между приращениями напряжений и деформаций (18.25) справедливо лишь с момента достижения напряжениями поверхности текучести, т. е. при  $F(\sigma) = 0$ . Если  $F(\sigma) < 0$ , то материал продолжает вести себя упруго.

б) Соотношение для приращений (18.25) справедливо лишь при бесконечно малом увеличении деформации. При увеличении на конечную величину напряжения могут выйти за пределы поверхности текучести. Для предотвращения этого после каждой итерации надо изменять напряжения так, чтобы выполнялось условие текучести.

Метод, с помощью которого решены приведенные ниже примеры, состоит в следующем:

а) Для приращения нагрузки вычисляются приращения упругих напряжений и деформаций.

б) Для полученных полных напряжений вычисляется величина  $F(\{\sigma\})$ . Если  $F < 0$ , то поведение материала упруго и дополнительных итераций не требуется. Если  $F > 0$ , то вычисляется значение  $F$  в начале интервала и путем интерполяции

определяются приращения упругих деформаций и напряжений в окрестности точки на поверхности текучести.

С помощью соотношения (18.25) находится приращение упруго-пластического напряжения, соответствующее определенному таким образом упругому напряжению<sup>1)</sup>). Напряжение в момент начала текучести после добавления упомянутого выше приращения сравнивается с определенными ранее полными напряжениями, а разность используется в качестве начального (поправочного) напряжения.

в) Далее вычисляют невязки сил и получают упругое решение, дающее новую величину полного напряжения. Если невязки сил меньше некоторого значения, то процесс заканчивается. В противном случае: г) повторяются этапы «б» и «в» и т. д.

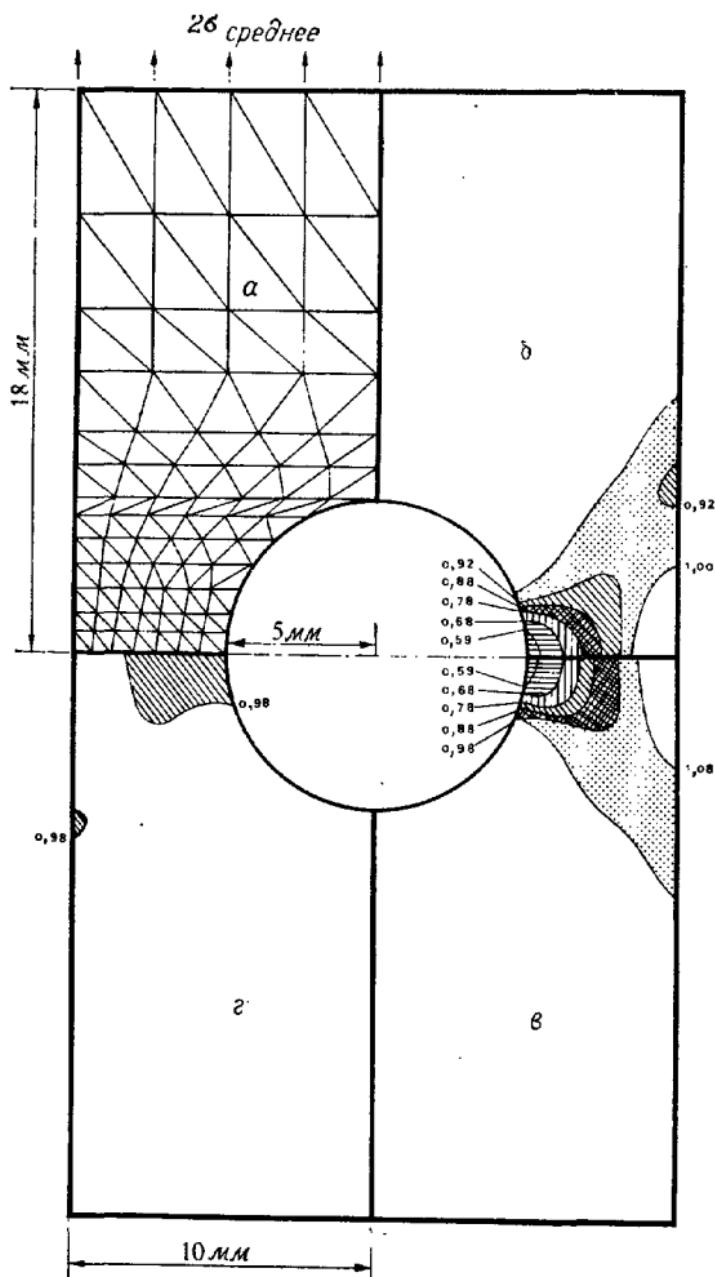
На каждом этапе полные напряжения должны соответствовать поверхности текучести. Упруго-пластическая матрица определяется по значениям напряжений, при которых  $F = 0$ , или изменяется в процессе итераций.

Во всех приведенных примерах описанный итерационный процесс использовался без ускорения сходимости. При этом наблюдалась довольно быстрая сходимость (5—15 циклов). Медленная или плохая сходимость является обычно признаком критического состояния конструкции.

Полученная ранее упруго-пластическая матрица относится к общему случаю трехмерной сплошной среды. Для двумерных состояний необходимо привести ее к специальному виду. Например, для плоского напряженного состояния это достигается простым вычеркиванием в (18.24) столбцов, соответствующих нулевым компонентам напряжений. В случае *плоской деформации* должны учитываться все напряжения, но обращаются в нуль соответствующие компоненты деформаций. В работе [9] выполнены соответствующие преобразования и приведены явные выражения для матриц. Интересно отметить, что в этих случаях даже при идеальной пластичности диагональный член, соответствующий  $A$ , отличен от нуля.

**Пластина с отверстием из упрочняющегося и неупрочняющегося материала.** На фиг. 18.4 показаны форма пластины и простые треугольные элементы. Получено решение задачи в предположении плоского напряженного состояния как для идеально пластического, так и для упрочняющегося материалов. Использовался критерий Мизеса с линейным упрочнением [по-

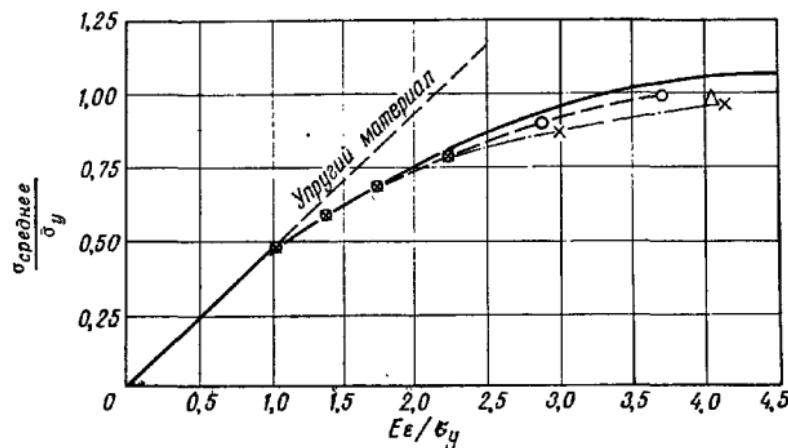
<sup>1)</sup> Поскольку приращение нагрузки конечно, возможно, что определенные с помощью формулы (18.25) упругие напряжения будут несколько превышать предел текучести. Это проверяется, и в случае превышения предела текучести напряжения уменьшаются так, чтобы они находились на поверхности текучести.



Фиг. 18.4. Растяжение полосы с отверстием (плоское напряженное состояние).  
 а—разбиение на конечные элементы (149 элементов, 94 узла); б—пластические зоны для различных отношений  $\sigma_{\text{сред}}/\delta_y'$  идеальная plasticность,  $E=6,85 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $v=0,2$ ,  $\delta_y=2,38 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$ ; в—то же, что и на б, но для упрочняющегося материала. Постоянный наклон  $H'/E=0,032$ ; г—нагрузка 0,98 приложена за один этап. Упрочняющийся материал.

стоянное  $H'$  в (18.31)]. Зоны пластичности при различных нагрузках показаны на фиг. 18.4, б и в.

Хотя соотношение пластичности справедливо только для приращений, метод начальных напряжений приложении всех нагрузок за один этап приводит к решению, удовлетворяющему условиям равновесия и не превышающему напряжений текучести. Такое решение для очень большого приращения нагрузки показано на фиг. 18.4, г. Интересно отметить, что, несмотря на нарушение законов для приращений деформаций, пластические зоны практически не изменились.

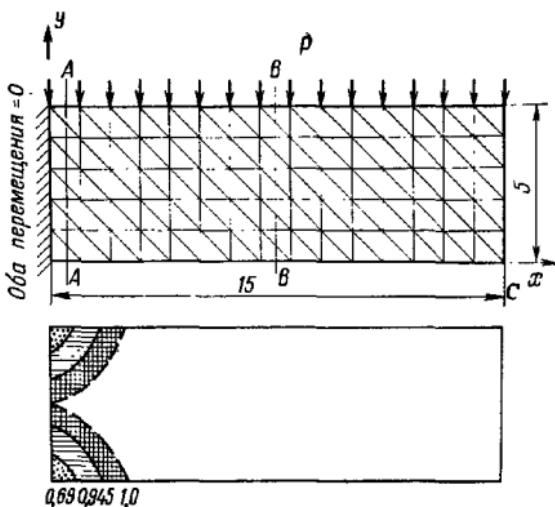


Фиг. 18.5. Пластична с отверстием; упрочняющийся материал,  $H'/E = 0,032$ . Максимальная деформация в точке начала текучести. Приращение нагрузки =  $= 0,2 \times$  нагрузка, соответствующая началу текучести.

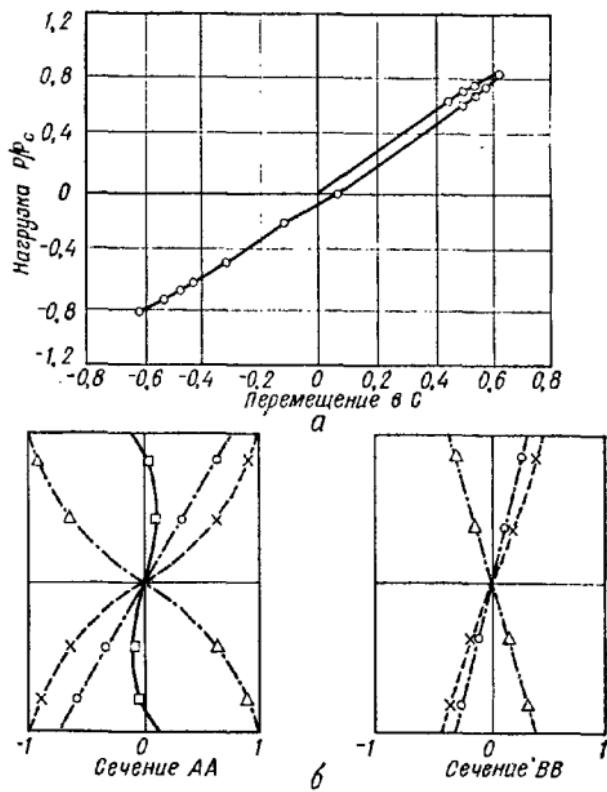
— экспериментальные результаты Теокариса и Маркетоса [18]; ○ метод начальных напряжений; X метод переменной жесткости [14]; Δ решение для одного этапа нагружения в пластической области.

Важно также отметить, что, как видно из фиг. 18.5, максимальные деформации в точке начала текучести почти совпадают с определенным методом приращений. Там же проведено сравнение с экспериментальными результатами и с результатами, полученными методом переменной жесткости [14].

**Консольная балка — циклическое нагружение.** На фиг. 18.6 показана находящаяся в условиях плоского напряженного состояния консольная балка, для материала которой справедливы законы идеальной пластичности Мизеса. Нагрузки отнесены к критической нагрузке, определенной по элементарной теории пластического шарнира. На фиг. 18.7 показан первый цикл нагружения для иллюстрации способности метода правильно описывать упругое поведение при разгрузке. Заслуживают внимания



Фиг. 18.6. Консольная балка. Плоское напряженное состояние, идеальная пластичность. Пластические зоны для различных отношений  $P/P_c$  ( $P_c$  — критическая нагрузка, вычисленная по балочной теории пластичности).



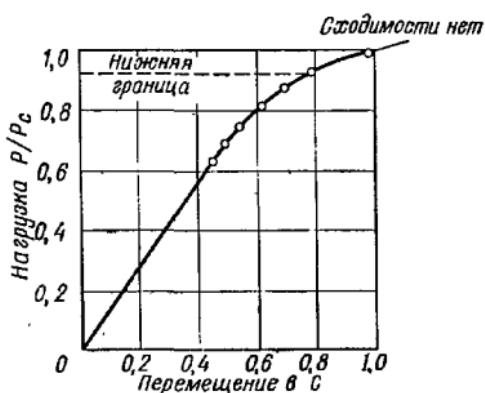
Фиг. 18.7. Консольная балка, показанная на фиг. 18.6.  
а — перемещения при изменении знака нагрузки; б — распределение напряжений  $\sigma_x/\sigma_y$  на различных этапах разгрузки. О при начале текучести; Х при максимальной нагрузке;  $\Delta$  при максимальной нагрузке с обратным знаком;  $\square$  остаточные напряжения.

ния показанный на фиг. 18.7, а «гистерезис» перемещения и остаточные напряжения после снятия нагрузки, обусловленные пластическим деформированием.

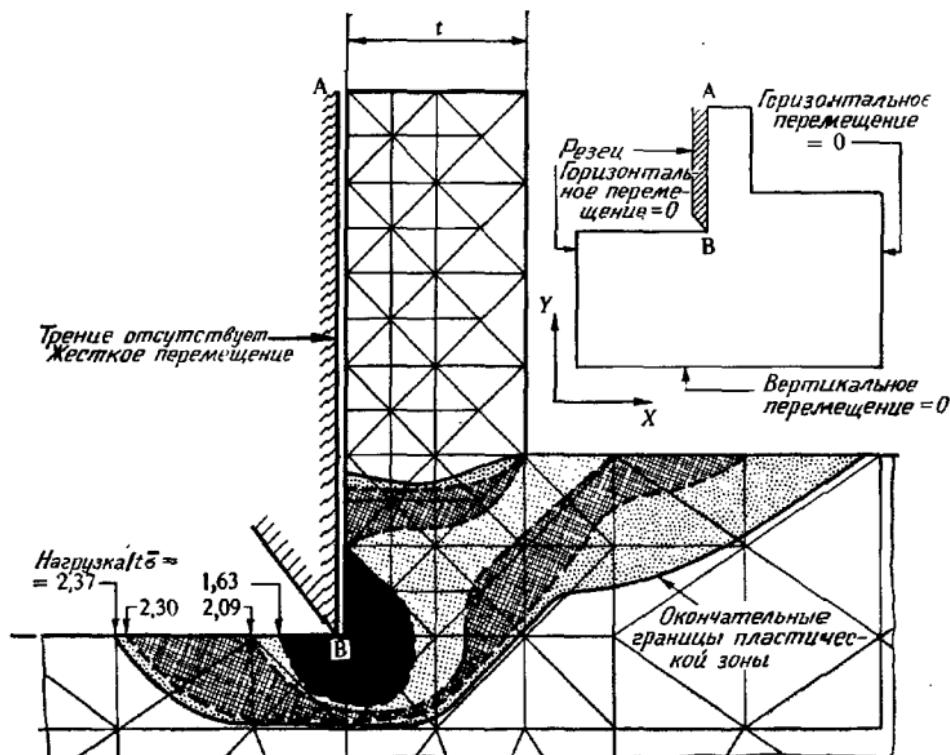
На фиг. 18.8 представлено графическое изменение перемещений при возрастании нагрузки. По мере приближения к критической нагрузке требуется все большее число итераций, и при  $P/P_c = 1$  процесс не сходится. Таким образом, хотя нелинейное решение дает возможность найти *нижнюю границу* критической нагрузки (путем удовлетворения условиям равновесия и текучести), метод приращений нагрузок не позволяет установить ее истинную величину. Для лучшего описания критического поведения балки проще задать некоторые перемещения в точке приложения нагрузки и затем увеличивать их, пока реакция в этой точке не перестанет возрастать. Этот прием рассмотрен в следующем примере.

**Пластическое течение при резании металла.** На фиг. 18.9а показана идеализированная схема обработки металлической заготовки резцом, снимающим с нее стружку. Хотя в действительности эта задача связана с большими перемещениями, решалась упрощенная упруго-пластическая задача о поведении тела определенной формы при заданных постоянных перемещениях вертикальной поверхности. На фиг. 18.9б показаны пластические зоны, распределение нагрузки и полная нагрузка на резец. Видно, что вследствие идеальной пластичности материала при определенных перемещениях нагрузки увеличиваются до некоторых постоянных значений. При этом возникает критическое состояние, соответствующее отделению стружки. В рассмотренном примере только этот заключительный этап имеет практическое значение.

**Материал Мора — Кулона. Туннель.** Сходные с пластичностью явления наблюдаются во многих материалах, таких, как почва, скальные породы, керамические материалы и бетон. В них также может происходить необратимое деформирование при почти постоянных напряжениях. Однако поверхность текучести для этих материалов зависит не только от девиаторных (сдвиговых) напряжений, как в законе Мизеса, но и от величины среднего напряжения.



Фиг. 18.8. Консольная балка. Зависимость перемещения от  $P/P_c$ .



Фиг. 18.9а. Приближенное описание процесса обработки металла путем задания эквивалентных перемещений в месте среза.  $\delta$  — одноосное напряжение текучести. Форма детали и пластические зоны.

Известный критерий Мора — Кулона, определяющий максимальное сдвиговое напряжение на произвольной площадке в виде

$$\tau = C + \sigma_n \operatorname{tg} \phi, \quad (18.32)$$

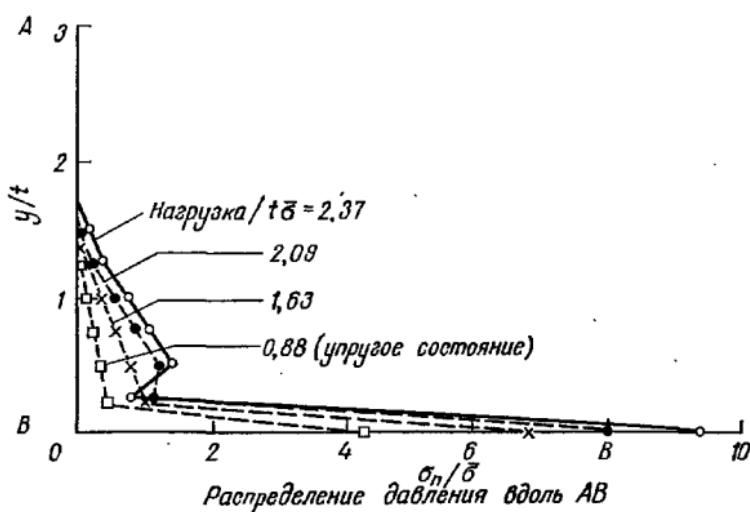
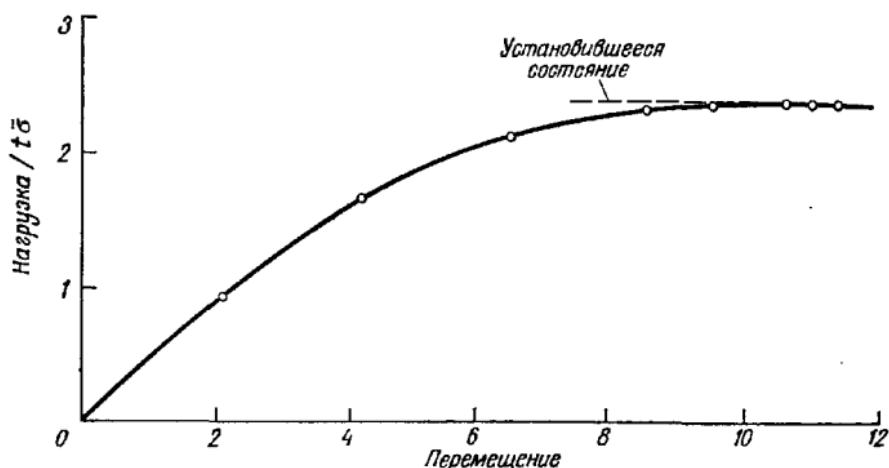
где  $C$  — сила сцепления,  $\sigma_n$  — нормальное напряжение и  $\phi$  — угол внутреннего трения, можно приблизенно записать в более удобной форме, предложенной Друкером [19]:

$$F = aJ_1 + \sqrt{J_2} - K = 0, \quad (18.33)$$

где  $J_1$  — первый инвариант тензора напряжений  $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,  $J_2$  — второй инвариант

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

$a$  и  $K$  — постоянные, зависящие от сцепления и внутреннего трения материала. Постоянные, входящие в (18.33), связаны с



Фиг. 18.96. Приближенное описание процесса обработки металла. Зависимость полной нагрузки от перемещения и распределение давления на резец.

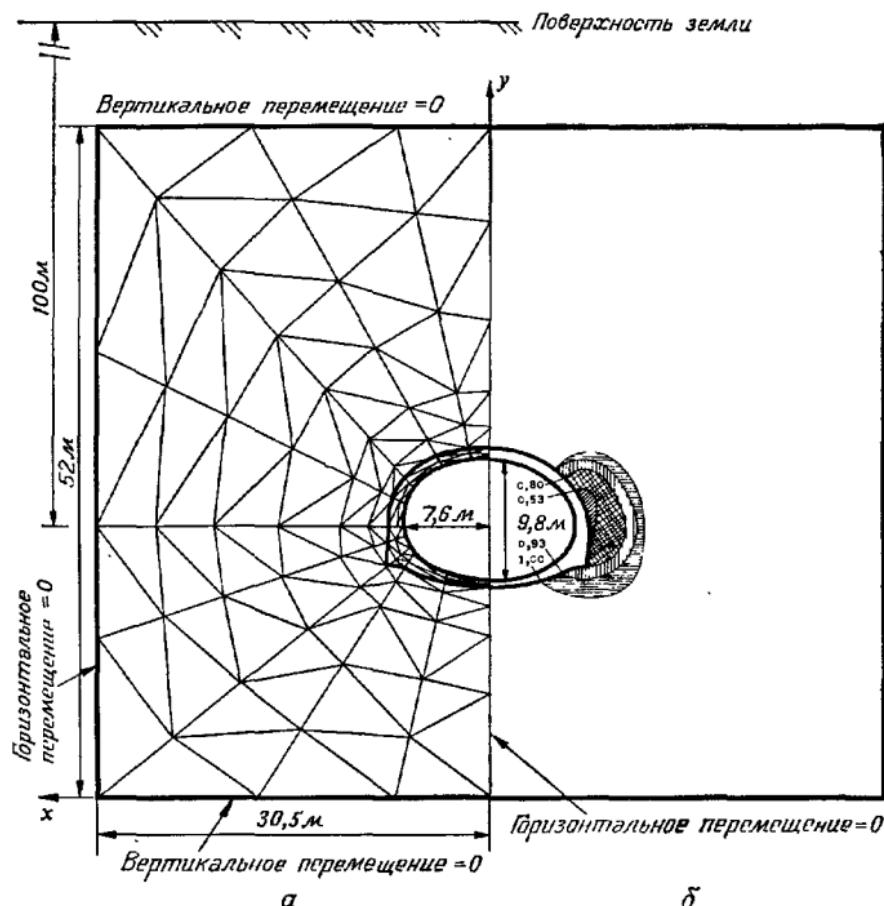
величинами в (18.32) соотношениями

$$a = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}, \quad K = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}.$$

Другие возможные формы критерииов подробно обсуждены в работе [20], однако для иллюстрации метода вполне достаточно рассмотреть форму, предложенную Друкером.

Если в дополнение к предположению о существовании такой поверхности текучести использовать ассоциированный закон, то

задачи расчета конструкций из подобных материалов можно решать с помощью описанных ранее методов. На фиг. 18.10 показано решение задачи о пластических зонах около туннеля, возникающих за счет перераспределения напряжений в резуль-



Фиг. 18.10. Подкрепленный туннель.

*a*—разбиение на 154 элемента с 94 узлами. Подкрепление:  $E = 2,02 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,15$ . Грунт:  $E = 3,4 \cdot 10^3$  Н·м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,20$ ,  $C = 9,5 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>,  $\phi = 30^\circ$ . Начальное напряжение  $\sigma_{y0} = \gamma h$  с началом при  $h = 124$  м.  $\sigma_{x0} = 0,2\gamma h$ ,  $\gamma = 6,9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>3</sup>. *b*—пластичные зоны.

тате выемки грунта. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [9, 15, 21 и 22].

Основная трудность решения таких задач связана не с вычислениями, а с формулировкой соответствующих определяющих уравнений. В частности, для материалов Мора — Кулона ассоциированный закон, как правило, не выполняется [23]. Их

поведение описывается так называемыми неассоциированными законами. В соответствии с простым предположением, сделанным Девисом [24], пластические деформации удовлетворяют соотношению

$$d\{\varepsilon\}_p = \lambda [D_1(\{\sigma\})]^{-1}, \quad (18.34)$$

где  $[D_0]$  — матрица, зависящая от уровня напряжений, сходная по структуре с матрицей упругости. Повторив описанные соотношениями (18.20) — (18.26) действия, получим новую упруго-пластическую матрицу, которая уже не будет симметричной [25]. Однако метод начальных напряжений применим и в этом случае.

## 18.5. Материал, работающий только на сжатие

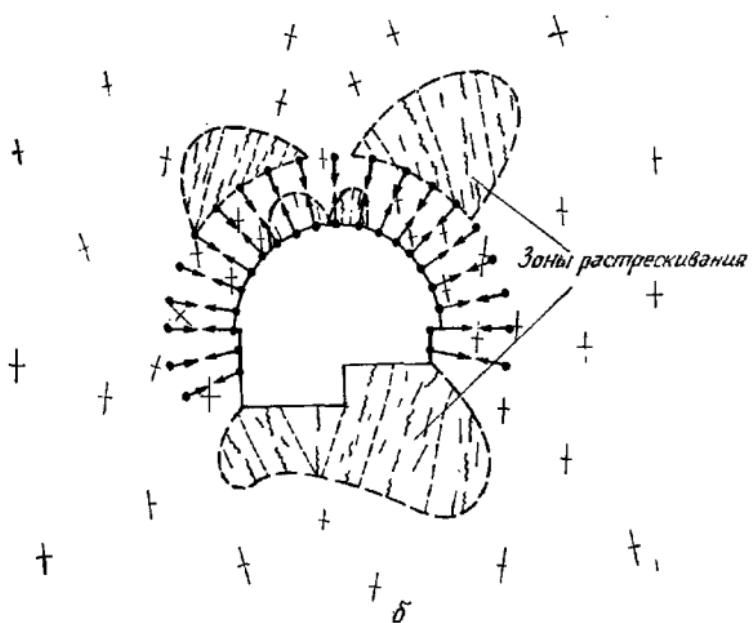
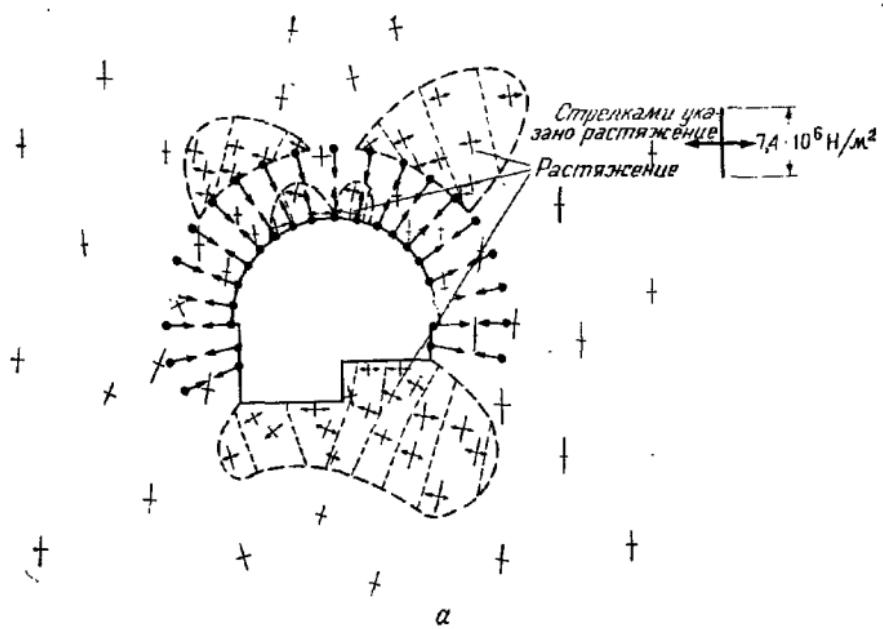
Гипотетический материал, способный выдерживать только сжимающие напряжения и не сопротивляющийся растяжению при деформировании, во многих отношениях аналогичен идеально пластичному материалу. Хотя в действительности такой идеальный материал, вероятно, не существует, он хорошо аппроксимирует поведение насыпей из горных пород и других сыпучих материалов.

В явном виде соотношение между напряжениями и деформациями, как правило, записать не удается, однако достаточно воспользоваться соотношениями теории упругости, а при появлении растягивающих напряжений приравнять их нулю. При этом уместно использовать метод начальных напряжений, который фактически и был разработан для решения таких задач [1].

Схема вычислительного процесса очевидна, но важно помнить, что *главные растягивающие напряжения должны исключаться*.

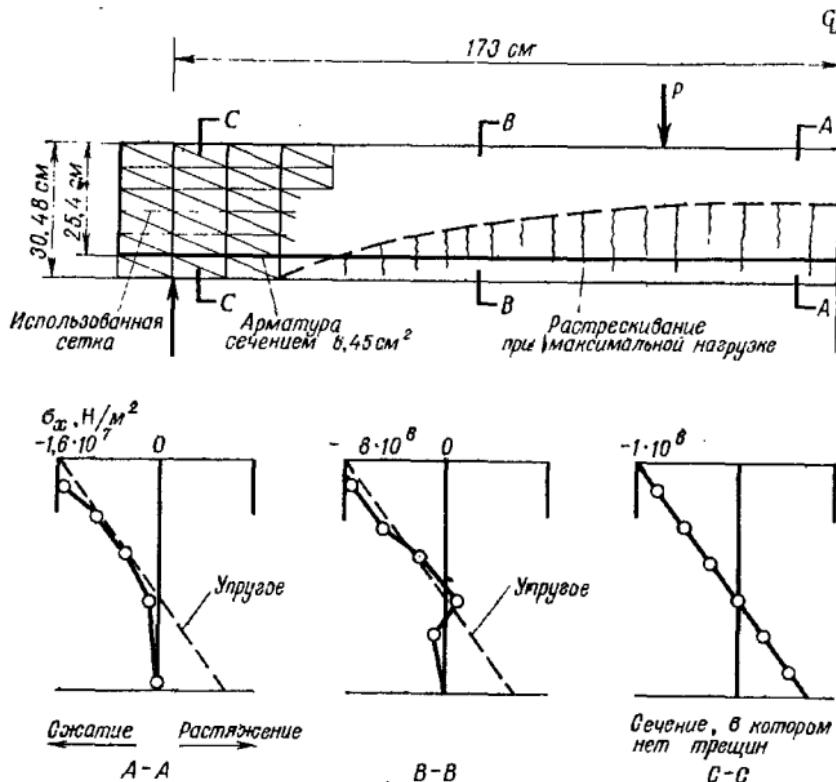
Приведенные выше определяющие соотношения могут лишь приблизительно описывать реальное поведение материала, поскольку при этом не учитывается влияние нераскрытия трещин на перераспределение сжимающих напряжений. Однако ясно, что полученные результаты помогут все же изучить поведение реальных конструкций из сыпучих пород.

**Подземная электростанция.** На фиг. 18.11, *a* и *б* показан пример применения описанной модели в практической задаче. На фиг. 18.11, *а* изображено распределение напряжений в районе подземной электростанции с учетом предварительно напряженной арматуры вблизи выработки, полученное в результате упругого решения. Там же указаны зоны растягивающих напряжений. Результаты решения этой же задачи (фиг. 18.11, *б*) при использовании модели материала, работающего только на *сжатие*, свидетельствуют о незначительном перераспределении напряжений и опасных зон.



Фиг. 18.11. Напряжения вблизи подземной электростанции при действии сил тяжести с учетом предварительных напряжений.  
*а*—упругие напряжения; *б*—напряжения, определенные для материала, работающего только на сжатие.

Разновидностью такого материала может служить материал с конечным пределом прочности на растяжение, не обращающимся в нуль в момент появления трещин. Такой подход использовался в работе [26] при исследовании поведения балок из армированного бетона. Для предварительно напряженных балок



Фиг. 18.12. Образование трещин в балке из предварительно напряженного бетона. Максимальное растягивающее напряжение  $1.55 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ . Распределение напряжений в различных сечениях.

(без учета текучести при сжатии) получено очень хорошее совпадение с экспериментальными результатами. На фиг. 18.12 показаны некоторые результаты для балки, испытанной в работе [27].

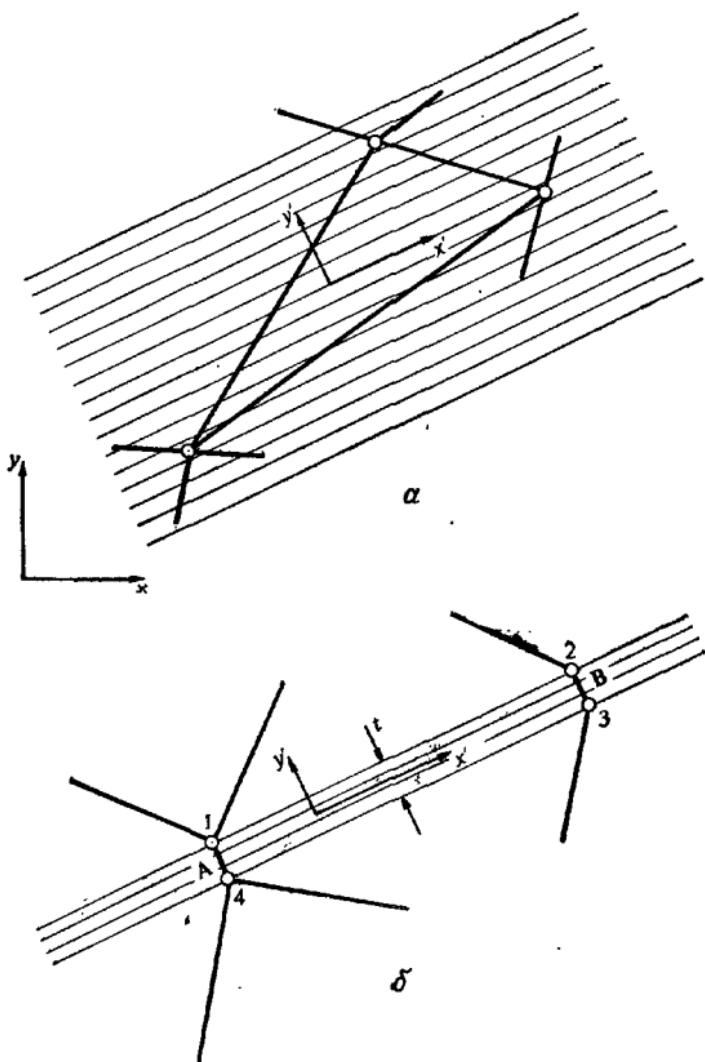
## 18.6. Слоистый материал истыковочные элементы

В другой модели идеализированного материала предполагается, что материал состоит из большого числа изотропных упругих слоев. При сжатии слои передают сдвиговые напряже-

ния, не превышающие сопротивления трения. Растягивающие напряжения по нормали к слоям не передаются.

Ясно, что такую идеализацию можно использовать при исследовании слоистых горных пород. Как будет показано ниже, она имеет гораздо более широкое применение.

На фиг. 18.13 показан такой материал в двумерном случае. Если ось локальных координат  $x'$  направлена вдоль слоев, то для напряжений, возникающих при упругом поведении, можно



Фиг. 18.13. Слоистый материал (a) и узкое слоистое соединение (б):

записать

$$|\tau_{x'y'}| \leq \mu \sigma_y \quad (18.35a)$$

и

$$\sigma_{y'} \leq 0. \quad (18.35b)$$

Здесь  $\mu$  — коэффициент трения между слоями.

Если упругие напряжения превышают предельные значения, определяемые соотношениями (18.35), то они должны быть уменьшены до этих значений.

Применение метода начальных напряжений для таких материалов опять не представляет затруднений. Задача аналогична рассмотренной в предыдущем разделе задаче о расчете материала, работающего только на сжатие. На каждом этапе упругого расчета проверяется наличие растягивающих напряжений  $\sigma_y'$ . Если такие напряжения возникают, то вводится поправочное начальное напряжение, сводящее их и касательные напряжения к нулю. Если же  $\sigma_y'$  — сжимающее напряжение, то производится проверка абсолютной величины касательных напряжений  $\tau_{x'y'}$ . В случае превышения значения, определяемого соотношением (18.35a), их уменьшают до предельно возможной величины.

Описанная математическая модель не всегда будет правильно отражать истинное поведение материала при разгрузке, поскольку сжимающие напряжения могут возникнуть лишь после исчезновения зазоров между слоями. Это затруднение (при нулевом коэффициенте Пуассона) можно устранить, контролируя появление растягивающих деформаций и используя вместо (18.35b) соотношение

$$\sigma_y = 0 \text{ при } \varepsilon_y' \geq 0. \quad (18.36)$$

В противном случае материал будет упругим. Это фактически один из вариантов деформационной теории пластичности.

Излишне говорить о том, что направления слоев могут меняться от элемента к элементу и таким методом можно исследовать сложное поведение горных пород со случайным расположением трещин.

Введение прочности сцепления и коэффициента трения, зависящего от величины сдвиговой деформации (обычно коэффициент трения уменьшается с увеличением сдвиговой деформации), требует незначительных изменений программы. Таким же образом можно исследовать размягчающиеся материалы [25].

В некоторых случаях описанный тип поведения наблюдается лишь в узкой области между однородными массивными упругими телами. Это, в частности, имеет место при геологических сдвигах или при наличии больших трещин в горной породе. В таких случаях удобно использовать узкие, как правило, пря-

моугольные элементы, геометрическими характеристиками которых являются средние координаты концов  $A$  и  $B$  (фиг. 18.13, б) и толщина. Однако элемент соединяется с примыкающими телами в четырех отдельных точках (1—4). Эти переходные элементы могут быть, как показано на фиг. 18.13, простыми прямоугольниками. Можно также использовать и изопараметрические элементы более сложной формы (см. гл. 8).

В работе [28] рассмотрены в некоторой степени похожие переходные элементы, использованные для исследования устойчивости насыпей из горных пород. Однако описанные здесь переходные элементы имеют более широкое применение. С помощью тонких переходных элементов можно, например, решать задачи о посадках деталей машин и зазорах между ними. При использовании очень узкого переходного элемента между двумя частями конструкции или деталями машины зазоры учитываются введением такой начальной деформации  $\epsilon_y^0$ , что величина  $t\epsilon_y^0$  равняется величине зазора. Поскольку описанный переходный элемент не передает растяжения, быстро получаем ответ на вопрос, закрывается ли зазор. И наоборот, посадка эквивалентна отрицательной начальной деформации по нормали к переходному элементу.

Недостатком такой аппроксимации является необходимость использования переходных элементов конечной толщины, чтобы избежать появления очень больших коэффициентов жесткости в направлении нормали и, следовательно, плохо обусловленных уравнений. Для того чтобы обойти упомянутые затруднения, можно использовать другие методы, имеющие более специальное назначение [29].

## 18.7. Ползучесть: деформации, зависящие от времени

### 18.7.1. Общие положения

Явления ползучести характеризуются зависимостью деформации не только от напряжения, но и от времени. Деформации в данный момент времени определяются всей предысторией напряженного состояния. Таким образом, любой вычислительный процесс должен сводиться к расчету приращений для достаточно малых отрезков времени. Для каждого такого отрезка времени, используя заданный закон ползучести, средние для этого отрезка напряжения и при необходимости их предыдущие значения, можно определить приращения деформаций. Таким образом, в рассматриваемом случае естественно использовать описанный в подразд. 18.2.4 метод начальных деформаций.

Однако иногда можно обратить закон ползучести и получить закон, по которому напряжения в любой момент времени опре-

деляются *предысторией деформирования*. В тех случаях, когда удобно использовать функцию *релаксации*, можно применять описанный в подразд. 18.2.3 метод начальных напряжений.

Поскольку при ползучести удобнее измерять деформации, обычно рекомендуется применять метод начальных деформаций, который и будет использован в дальнейшем.

При применении метода начальных деформаций к задачам теории ползучести обычно [30—34]:

а) рассматриваются все изменения нагрузки (температуры и т. д.) в начальный момент  $t$  некоторого отрезка времени и определяется напряженно-деформированное состояние из решения задачи теории упругости;

б) определяется изменение деформации ползучести  $\{\Delta e_c\}$ , за рассматриваемый отрезок времени в предположении, что при этом полученное на этапе «а» напряженное состояние не меняется;

в) величина  $\{\Delta e_c\}$ , используется как *начальная деформация* и в результате решения задачи теории упругости определяется новое напряженно-деформированное состояние в конце рассматриваемого отрезка времени.

Если отрезок времени  $\Delta t$  достаточно мал, то описанный процесс отражает истинное поведение материала и можно перейти к расчетам для следующего отрезка времени. Если изменения деформаций относительно велики, то можно повторить этапы «б» и «в», используя для определения  $\{\Delta e_c\}$  уточненные средние значения напряжений. Осуществление таких итераций иногда желательно, но редко требуется более двух циклов.

Ясно, что устойчивость описанного процесса зависит от выбранной величины отрезков времени и для каждой задачи необходимо ее проверять.

Здесь уместно сделать одно замечание относительно эффективности вычислений. Если упругие мгновенные свойства материала не изменяются во времени (и на них не влияет изменение во времени температуры), то очевидно, что многократно будет применяться один и тот же метод нахождения упругого решения. В таких случаях удобнее хотя бы частично обращать матрицы, встречающиеся при решении, чем использовать итерационные методы решения. И наоборот, если упругие свойства меняются во времени и на каждом отрезке времени приходится решать существенно различные задачи теории упругости, то целесообразнее использовать итерационные методы решения, принимая за начальное приближение полученные ранее значения перемещений.

Основной проблемой, возникающей при использовании описанного метода, является построение алгоритма определения

приращения деформации  $\{\Delta e_c\}$ . Она рассматривается в последующих разделах.

### 18.7.2. Ползучесть, зависящая от предыстории деформирования (вязкоупругость)

Явления вязкоупругости характеризуются тем, что скорость деформаций ползучести зависит не только от мгновенного напряженно-деформированного состояния, но и от всей его предыстории. Таким образом, для определения приращения деформации  $\{\Delta e_c\}$  на каком-либо отрезке времени надо знать напряжения и деформации во все *предыдущие моменты времени*. Поскольку в процессе решения задачи они вычисляются, в принципе затруднений не возникает. Однако даже самые большие ЭВМ не в состоянии хранить всю историю в оперативной памяти, а многократное использование дополнительных запоминающих устройств требует много времени. Поэтому использование этого метода экономически невыгодно.

Метод, описанный Зенкевичем и др. [31] для задач *линейной* вязкоупругости, позволяет обойти эту трудность. Его можно обобщить и на случай решения задач *нелинейной* вязкоупругости.

В линейной теории вязкоупругости соотношение между напряжениями и деформациями всегда можно записать в форме, сходной с используемой в теории упругости, например в виде (18.2), заменив упругие постоянные в матрице  $[D]$  соответствующими дифференциальными или интегральными операторами [35]. Для изотропного материала вместо двух упругих постоянных можно использовать два оператора, а для анизотропных материалов может потребоваться 21 оператор.

Таким образом, деформация ползучести может быть описана соотношением вида

$$\{e_c\} = [\bar{D}]^{-1} \{\sigma\},$$

где каждый элемент матрицы вязкоупругости  $[\bar{D}]^{-1}$  при использовании дифференциальных операторов имеет вид

$$\bar{d}_{rs} = \frac{a_c + a_1(d/dt) + a_2(d^2/dt^2) + \dots}{b_c + b_1(d/dt) + b_2(d^2/dt^2) + \dots}. \quad (18.37)$$

Если эти разложения конечны, то, выделяя мгновенные упругие эффекты, соотношение (18.37) можно представить в виде суммы элементарных дробей

$$\bar{d}_{rs} = \frac{A_1}{d/dt + B_1} + \frac{A_2}{d/dt + B_2} + \dots \quad (18.38)$$

Как известно, эта сумма характеризует поведение показанного на фиг. 18.14 набора элементов Кельвина (хотя физически

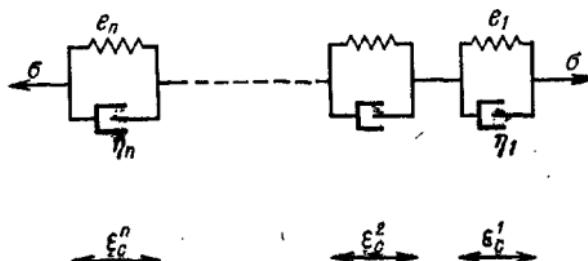
использование таких моделей может и не иметь смысла). Каждый член суммы характеризует один элемент Кельвина. Типичный вклад в компоненту деформации представляет собой, таким образом, слагаемое вида

$$e_n = \frac{A_n}{d/dt + B_n} \sigma_s \quad (18.39)$$

или

$$\frac{d}{dt} (e_n) = A_n \sigma_s - B_n e_n. \quad (18.40)$$

Записанное выше соотношение позволяет определить приращение каждого такого слагаемого за какой-либо отрезок времени,



Фиг. 18.14. Набор элементов Кельвина.

если известны текущее значение компоненты напряжения  $\sigma_s$  и текущее значение  $e_n$ . Таким образом, для описания процесса необходимо хранить только конечное число текущих значений  $e_n$ <sup>1)</sup>.

На практике для описания поведения материала используется ограниченное число элементов Кельвина и небольшое число вязкоупругих операторов. Например, для изотропного несжимаемого материала матрица  $[D]^{-1}$  определяется только одним оператором. Если этот оператор представляется двумя слагаемыми суммы (18.38), то в процессе вычислений требуется хранить лишь две величины [31]<sup>2)</sup>.

Вычислительный процесс не усложняется, если величины  $A_n$  и  $B_n$  для каждого элемента Кельвина зависят от времени и температуры, что характерно для задач термовязкоупругости (например, задач о ползучести бетона или пластмасс).

Задавая зависимость постоянных пружины и поршня  $A$  и  $B$  от текущих напряжений, можно обобщить метод на нелинейные

<sup>1)</sup> В более поздних работах они получили название переменных состояния.

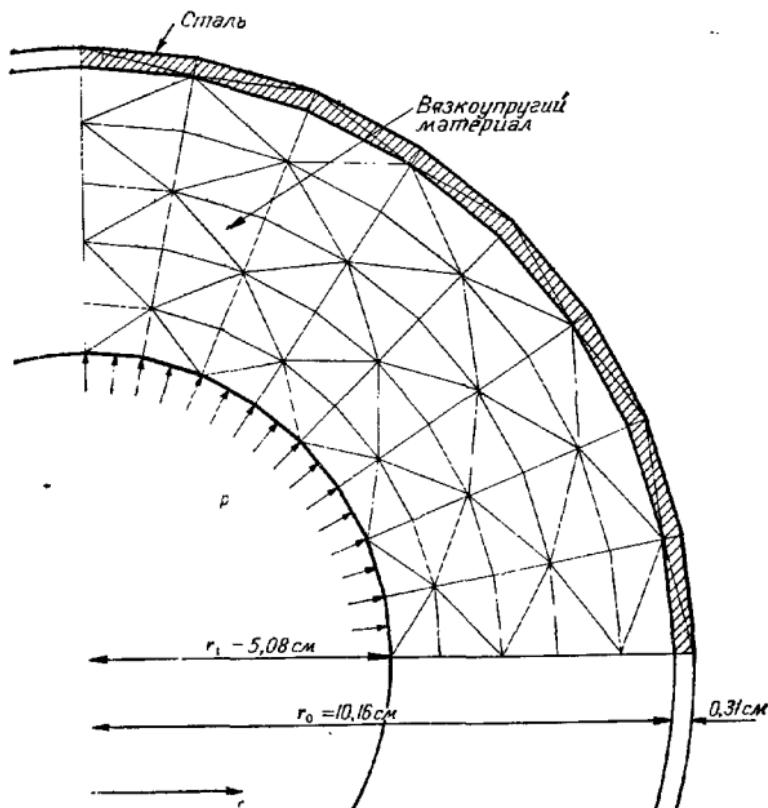
<sup>2)</sup> Для произвольного линейного вязкоупругого оператора метод экономии оперативной памяти при численном счете указан в работе Б. Е. Победри «Численные методы в теории вязкоупругости», Механика полимеров, № 6, 1973. — Прим. ред.

вязкоупругие явления. Вопрос о формулировке таких законов, согласующихся с экспериментальными результатами, еще не решен окончательно.

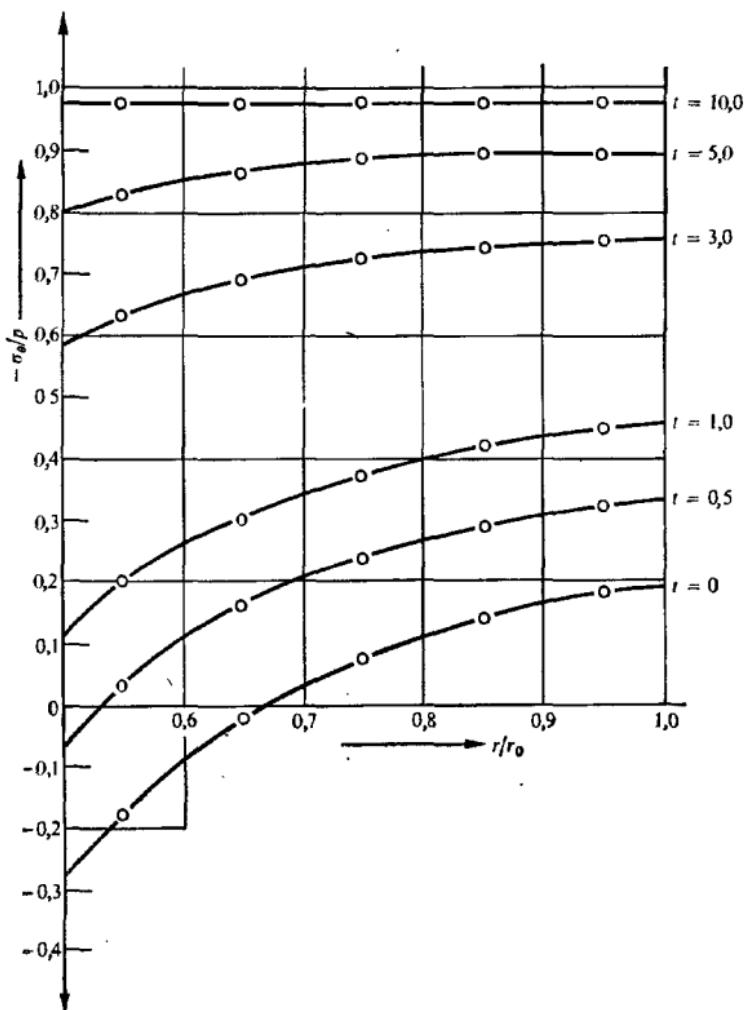
Для иллюстрации применения описанного метода возьмем пример из работы [31]. Это задача о расчете скрепленного с металлической оболочкой цилиндра из вязкоупругого материала. Так как задача, по существу, одномерная, имеется точное решение [36]. Использовалась программа расчета двумерного состояния. Для получения решения, соответствующего  $t = 10$ , понадобилось 100 шагов при шаге по времени, равном 0,1 (фиг. 18.15 и 18.16). В работе [31] приведены и другие более сложные примеры.

### 18.7.3. Законы теории ползучести, учитывающие зависимость от напряженно-деформированного состояния

Хотя, несомненно, вся предыстория напряженно-деформированного состояния влияет на ползучесть большинства материалов.



Фиг. 18.15. Решение задачи о нагруженном внутренним давлением подкрепленном вязкоупругом цилиндре как двумерной задачи.



Фиг. 18.16. Изменение во времени тангенциального напряжения в цилиндре, показанном на фиг. 18.15.

Материал подкрепления упругий. Сдвиговые свойства внутреннего цилиндра вязкоупругие, а объемные — упругие [31, 36]. Результаты совпадают с точными [36].

лов, сильно нелинейная зависимость от напряжений, характерная почти для всех металлов, позволяет записать законы в упрощенной форме, которая дает возможность оценить скорость деформации по текущим значениям переменных состояния (в частности, напряжения, деформации, времени и температуры).

Обзор таких законов сделан в работе [37]. Деформацию ползучести изотропного несжимаемого материала можно, например,

определить выражением

$$\frac{d}{dt} \{\epsilon\}_c = \frac{F_1(t) F_2(\bar{\epsilon}_c) F_3(\bar{\sigma}) F_4(\theta) [D_0]^{-1} \{\sigma\}}{E}, \quad (18.41)$$

где матрица  $[D_0]^{-1}$  эквивалентна соответствующей матрице упругости с коэффициентом Пуассона, равным 0,5;  $\bar{\epsilon}_c$ ,  $\bar{\sigma}$  — вторые инварианты деформации ползучести и напряжения и  $\theta$  — температура.

При вторичной ползучести зависимость от времени накопленной деформации слабая и часто используется степенной закон [38, 39]

$$\frac{d}{dt} \{\epsilon\}_c = \frac{K \bar{\sigma} [D_0]^{-1} \{\sigma\}}{E}. \quad (18.42)$$

Хотя физические аргументы в пользу таких теорий спорны, особенно относительно явной зависимости от времени, описывающей так называемое старение, их очень просто использовать в практических приложениях. Определение скорости деформации ползучести

$$\frac{d}{dt} \{\epsilon\}_c$$

в любой момент времени не представляет труда, и, следовательно, приращение деформации ползучести может быть найдено просто как

$$\Delta \{\epsilon\}_c = \frac{d}{dt} \{\epsilon\}_c \Delta t. \quad (18.43)$$

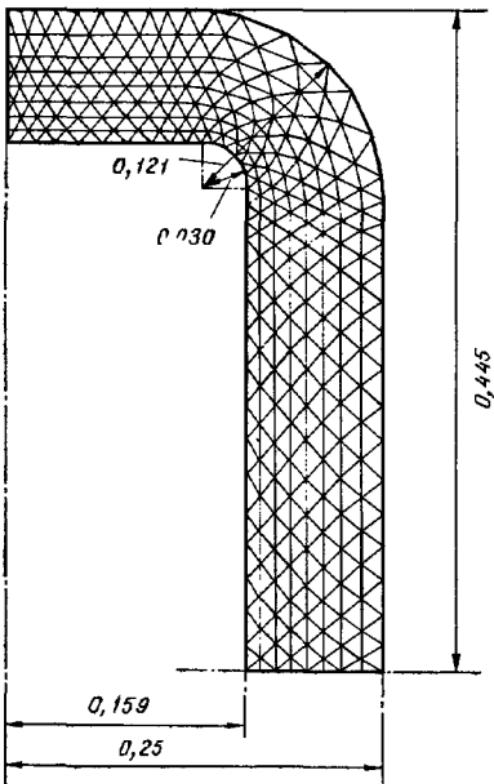
Фиг. 18.17. Расчетная схема сосуда высокого давления с плоским дном [33].

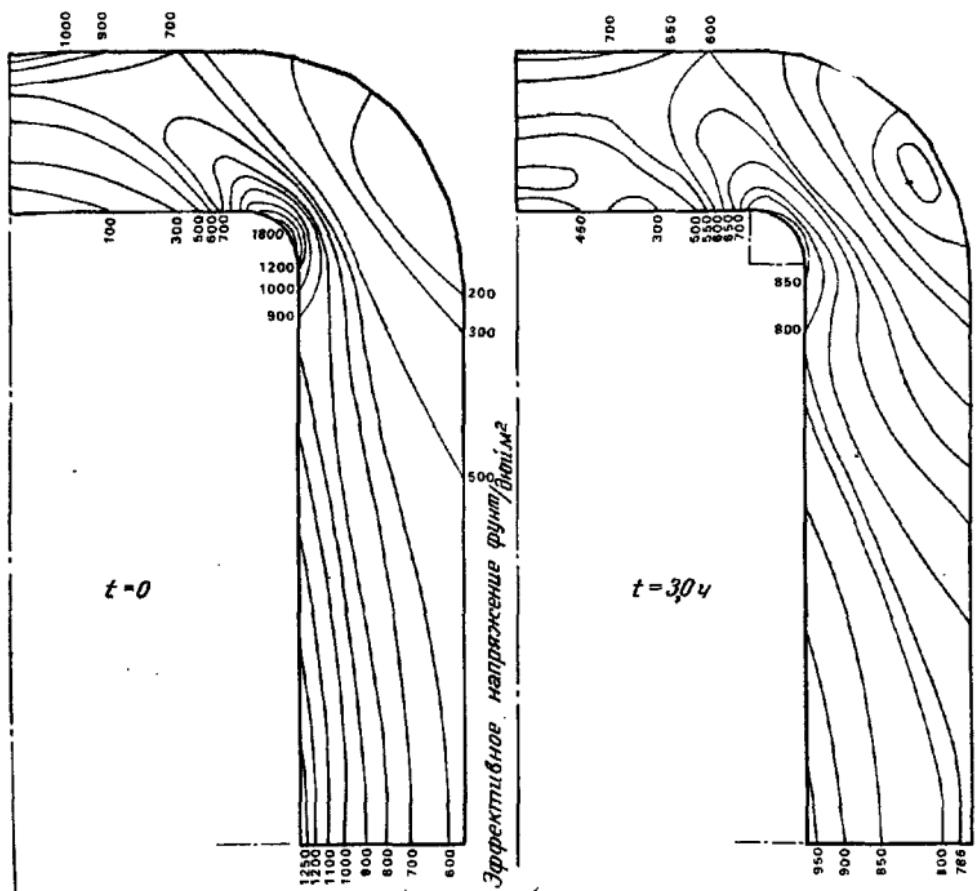
Внутреннее давление  $3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ; модуль Юнга  $1,35 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ; коэффициент Пуассона 0,3;  
 $\epsilon_c = 19,8 \cdot 10^{-16} \sigma^{3,6} \cdot t^{1,06}$ .

Это выражение непосредственно используется в процессе вычислений.

С приложениями метода можно познакомиться по работам [33, 34 и 40]. На фиг. 18.17 и 18.18 показаны некоторые примеры из работы [33].

В подобных и других задачах ползучести важно достичь наилучшего компромисса между требованиями экономичности и





Фиг. 18.18. Изменение во времени эффективного (октаэдрического) напряжения после приложения внутреннего давления [33].

устойчивости решения. Так, интервалы времени следует, как правило, выбирать в процессе вычислений. Они могут значительно увеличиваться, если, как это часто бывает, распределение напряжений приближается к установившемуся. Подходящим критерием выбора может служить требование, чтобы относительные приращения напряжений за рассматриваемый огрезок времени не превышали заданной величины [34].

### 18.8. Некоторые специальные приемы решения задач ползучести

Довольно часто с помощью некоторых обобщений или упрощающих предположений удается получить достаточно точные решения, учитывающие эффект ползучести, не прибегая к трудоемким и дорогостоящим методам приращений.

**Линейная вязкоупругость.** Для однородных изотропных вязкоупругих материалов с постоянным оператором коэффициента Пуассона, используя аналогии Алфрея — Мак-Генри и решая задачу теории упругости при соответствующих *эквивалентных нагрузках, перемещениях и температурах*, можно определить напряжения и перемещения в любой заданный момент времени [41].

Некоторые обобщения этих аналогий предложены Хилтоном [42].

Кроме того, если деформация ползучести стремится к некоторой постоянной величине при  $t \rightarrow \infty$ , то окончательное распределение напряжений можно найти и тогда, когда упомянутые аналогии нельзя применить. Например, если на конструкцию из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры, действуют не изменяющиеся во времени нагрузки и температура, то можно определить предельные упругие постоянные и свести задачу к линейной задаче теории упругости для неоднородного материала [43]. Влияние такого изменения упругих свойств на распределение температурных напряжений в реакторе высокого давления показано на фиг. 18.19.

**Установившаяся ползучесть.** Если при ползучести, описываемой соотношением (18.42), полные деформации ползучести настолько велики, что упругими деформациями можно пренебречь, то удается получить существенные упрощения. В этом случае скорости полной деформации и деформации ползучести одинаковы и определяющие уравнения можно записать в виде

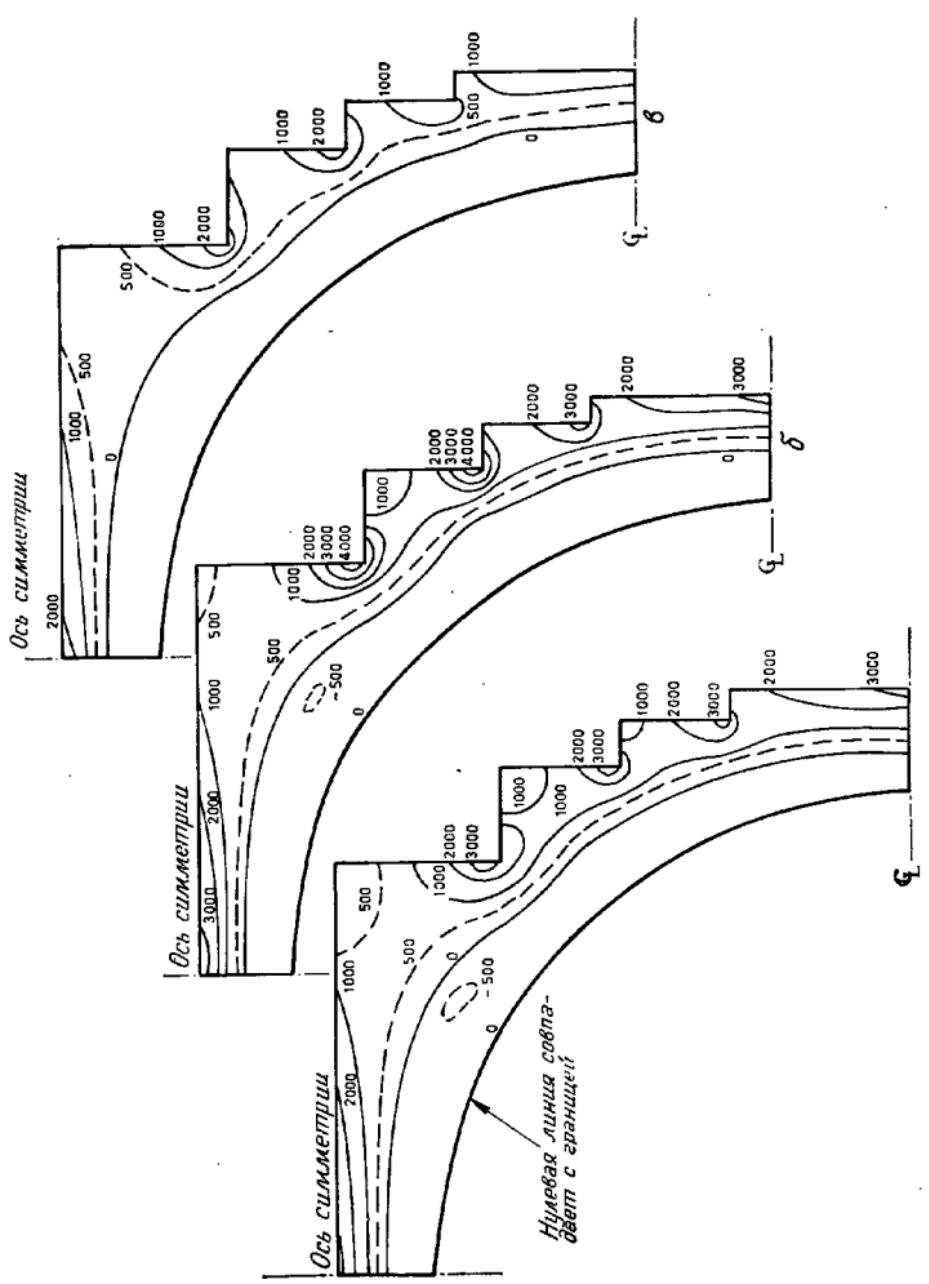
$$\frac{d}{dt} \{e\} = \frac{d}{dt} \{e\}_c = \frac{F(\sigma) [D_0]^{-1} \{\sigma\}}{E}, \quad (18.44)$$

как для изотропного несжимаемого материала.

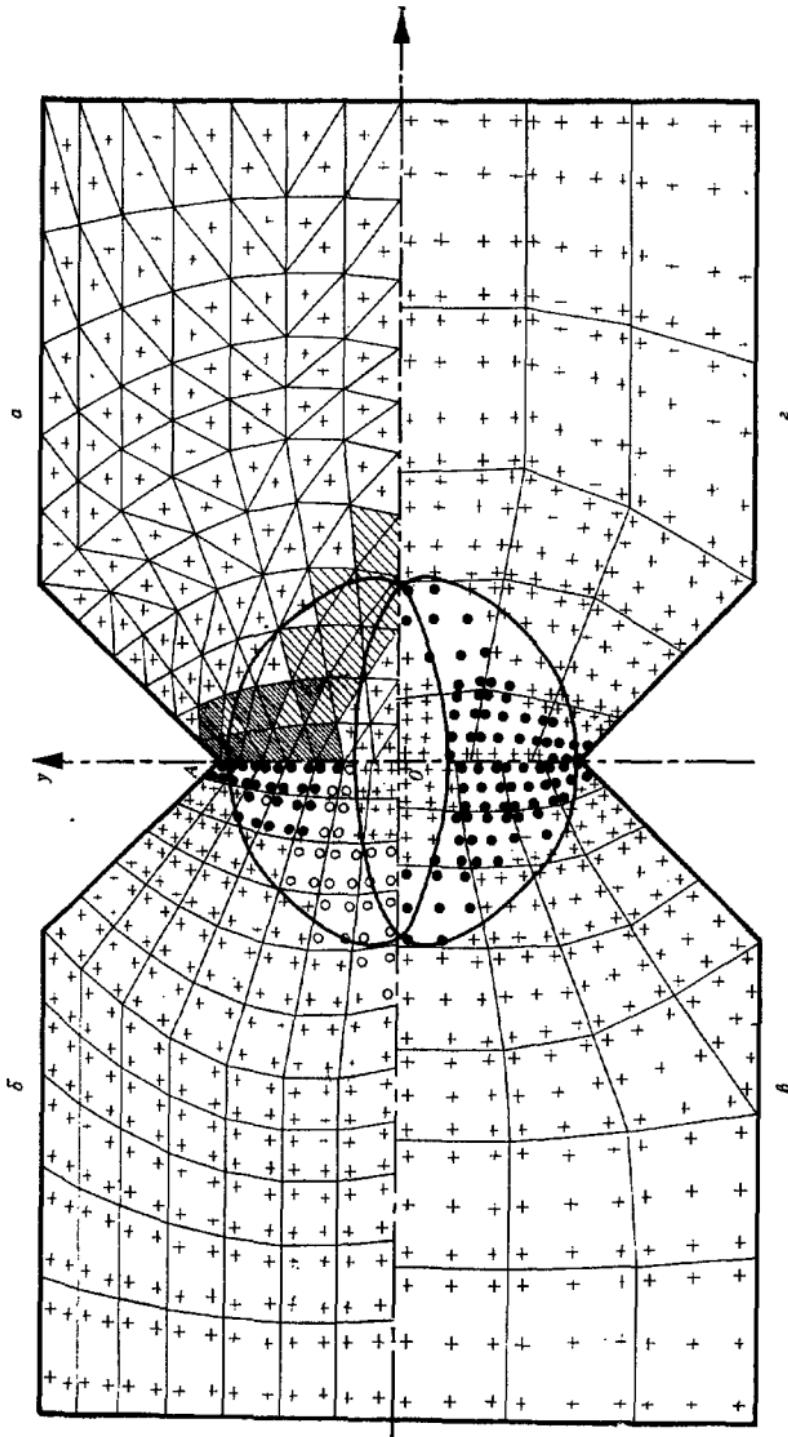
Если соотношения между перемещениями и деформациями (или уравнения совместности деформаций) продифференцировать по времени, то станет ясно, что задача представляет собой задачу нелинейной теории упругости, в которой обычные деформации и перемещения заменены на скорости деформаций и скорости. Решение для этих величин не зависит от времени и его можно получить любым из описанных ранее методов, не прибегая к методам приращений. При этом напряженное состояние конструкции постоянно, а деформации возрастают пропорционально времени.

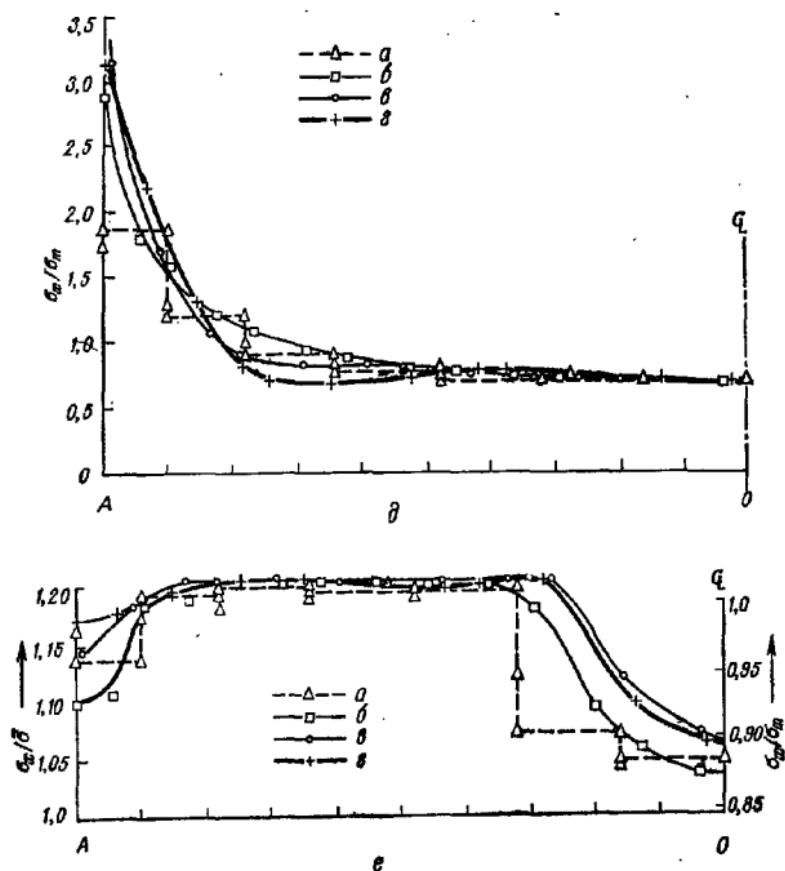
## 18.9. Заключительные замечания

В предыдущих разделах рассмотрены общие методы решения задач при использовании сложных нелинейных определяющих уравнений и некоторые частные приложения. Ясно, что этот



Фиг. 18.20( $a - z$ ).





Фиг. 18.20. Характеристика различных элементов при упругопластическом расчете плоского напряженного состояния образца с выточками.

*Пластическая зона:* а—треугольный элемент,  $\sigma_m/\delta = 1,186$  и  $1,226$ ; б—линейный четырехугольник,  $\sigma_m/\delta = 1,186$  и  $1,226$ ; в—квадратичный четырехугольник,  $\sigma_m/\delta = 1,186$ ; г—кубический четырехугольник,  $\sigma_m/\delta = 1,186$  ( $\sigma_m$ —среднее напряжение в выточке,  $\delta$ —одноосное напряжение текучести, идеальная пластичность).

*Распределение напряжений в ослабленном сечении:* д—упругое решение; е—упругопластическое решение,  $\sigma_m/\delta = 1,186$ . Число степеней свободы во всех четырех случаях примерно одинаково (172–178).

вопрос настолько обширен и практическое значение его так велико, что осветить его в одной главе невозможно. Для различных материалов можно предложить и экспериментально подтвердить различные формы определяющих уравнений. Как только установлены определяющие уравнения, к ним можно приспособить описанные в этой главе стандартные методы. Действительно, можно создать стандартные программы решения задач для материалов с различными свойствами, в которые характеристики, определяющие особенности поведения материала, входят в виде «черного ящика»,

Таким образом можно рассматривать такие явления, как **вязкопластичность** (пластические деформации зависят от времени) или различные задачи механики грунтов и горных пород [44].

Необходимо еще раз напомнить, что при решении нелинейных задач а) возможна неединственность решения; б) *априори* никогда нельзя гарантировать сходимость; в) стоимость решения значительно выше стоимости решения линейных задач.

Для преодоления первых двух трудностей необходимо понимание физической сущности задачи, а стоимость может быть снижена в результате дальнейших усовершенствований методов. В приведенных примерах применялись лишь простейшие конечные элементы. Очевидно, что при использовании этих методов можно применять любые функции формы элементов. Последние работы показывают, что использование рассмотренных в гл. 7 и 8 сложных элементов даже в двумерных задачах может дать значительную экономию [45].

На фиг. 18.20 сравниваются результаты расчета пластических зон при использовании элементов с постоянным распределением напряжений и изопараметрических элементов. Гладкость границ пластических зон (определенная по точкам Гаусса) в последнем случае приводит к значительному ускорению сходимости и повышению точности.

Наконец, следует отметить, что описанные методы удобно использовать и для решения **линейных задач**, сформулированных первоначально с использованием других значений **постоянных**. Привлекательность такого подхода не очевидна до тех пор, пока мы не рассмотрим, например, решение задачи теории упругости для материала с коэффициентом Пуассона, равным 0,5. Ранее отмечалось, что в этом случае матрица  $[D]$  становится неопределенной и необходимо использовать специальные приемы (см., например, гл. 4, разд. 4.5). Можно, однако, решать задачу теории упругости с допустимым значением коэффициента Пуассона методом начальных деформаций, изменяя в процессе решения деформации так, чтобы удовлетворить условию несжимаемости [34, 36].

## ДРУГИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

### 18.10. Нелинейные квазигармонические задачи теории поля

Нелинейности возникают в различных задачах теории поля рассмотренного в гл. 15 типа. Например, в задачах, описываемых уравнением [см. (15.1)]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (18.45)$$

проводимость  $k$  может зависеть от функции  $\phi$  или ее градиентов. В качестве иллюстрации можно привести два типичных примера. Во-первых, при фильтрации жидкости скорость может не удовлетворять условию ламинарности (Дарси), в соответствии с которым она определяется выражениями

$$v_x = k \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{и т. д.} \quad (18.46)$$

В случае турбулентности требуется учитывать зависимость потери напора ( $\text{grad } \phi$ ) от более высокой степени скоростей. Такие законы получены, например, в работах [47] и [48]. Их можно также записать в виде (18.46), полагая [49—51]

$$k = k(\bar{v}), \\ \bar{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогичная ситуация возникает в задачах магнитостатики, где  $\phi$  — магнитный потенциал, а  $k$  — величина, обратная магнитной проницаемости, которая существенно зависит от градиентов магнитного поля [52].

Таким образом, в обеих задачах уравнения, по существу, одинаковы.

Хотя очевидно, что термины «переменные параметры упругости», « начальные напряжения и деформации» в этих случаях не подходят, для решения можно использовать аналогичные итерационные методы (см. разд. 18.3). В гл. 15 [уравнение (15.14)] показано, что после дискретизации уравнения принимают такой же вид, как и в задачах теории упругости:

$$\{\psi\} = [H]\{\phi\} + \{F\} = 0. \quad (18.47)$$

Поскольку  $k$  используется при вычислении матрицы  $[H]$ , получаем

$$[H] = [H(\{\phi\})]$$

и задача, таким образом, относится к рассмотренному в разд. 18.3 классу.

Для решения можно использовать итерационный метод Ньютона, вычисляя на каждом шаге

$$\Delta \{\phi\}_{n+1} = -[H_n]^{-1} \{\psi(\{\phi\}_n)\}. \quad (18.48)$$

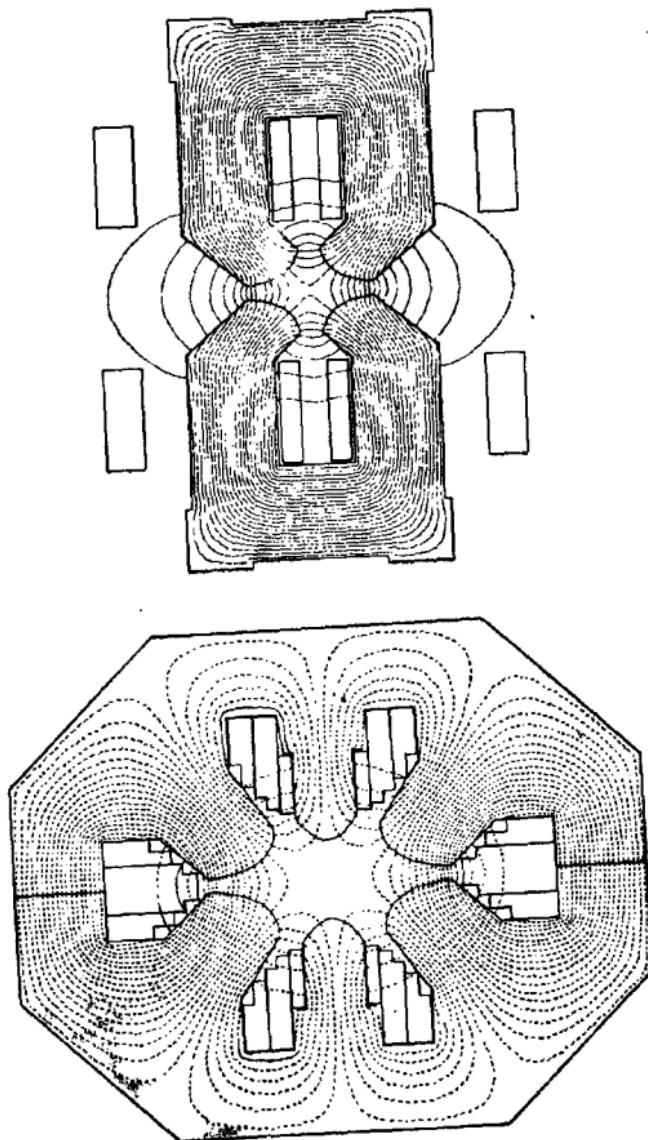
В этом случае, как было показано ранее, при каждой итерации приходится обращать различные матрицы. Можно также применять модифицированный метод Ньютона — Канторовича, вычисляя

$$\Delta \{\phi\}_{n+1} = -[H_0]^{-1} \{\psi(\{\phi\}_n)\}, \quad (18.49)$$

где  $[H_0]$  — матрица, полученная на первом шаге. Опять можно использовать различные способы ускорения сходимости [2]. Ана-

логия с методами постоянной и переменной жесткости решения задач теории упругости очевидна.

До сих пор методы конечных элементов для подобных задач применялись сравнительно мало. Волкер [49] получил решение задачи о нестационарном течении жидкости в пористой среде с помощью первого из описанных методов (с переменной матри-



Фиг. 18.21. Магнитное поле в шестиполюсном магните с нелинейностью, обусловленной насыщением [52].

цей  $[H]$ ). Удовлетворительные результаты получены после небольшого числа итераций. Винслоу [52] использовал аналогичный метод для решения различных задач магнитостатики. На фиг. 18.21 показаны некоторые полученные им довольно интересные поля в нелинейном материале<sup>1)</sup>.

### 18.11. Некоторые другие возможные применения

Ясно, что описанные в предыдущем разделе методы решения нелинейных уравнений могут непосредственно применяться и для других задач, например для задач теплопроводности с ярко выраженной зависимостью коэффициентов теплопроводности от температуры при повышенных температурах.

Однако очевидно, что эти методы имеют более широкие возможности в других физических задачах. Примером такой задачи является задача о ламинарном течении неильтоновских жидкостей, уравнения которой, по существу, совпадают с уравнениями вязкого ламинарного течения, рассмотренными в разд. 15.6 гл. 15, но вязкость в этом случае зависит от градиентов скорости.

Читатель может проявить свою изобретательность, применяя изложенные методы к подобным и многим другим задачам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O. C., Valliappan S., King I. P., Stress Analysis of Rock as a No-Tension Material, *Geotechnique*, **18**, 56–66 (1968).
- 2a. Irons B. M., Tuck R. C., A Version of the Aitken Accelerator for Computer Iteration, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 275–278 (1969).
- 2b. Zienkiewicz O. C., Irons B. M., Matrix Iteration and Acceleration Processes in Finite Element Problems of Structural Mechanics, Ch. 9 in: *Numerical Methods for Non-Linear Algebraic Equations*, Rabinowitz P., ed., Gordon and Breach, 1970.
3. Oden J. T., Numerical Formulation of Non Linear Elasticity Problems, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, ST3, 235–255 (1967).
4. Von Mises R., Mechanik der Plastischen Formänderung der Kristalle, *Z. angew. Math. Mech.*, **8**, 161–185 (1928).
5. Drucker D. C., A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Solutions, *Proc. Inst. U. S. Natn. Congr. Appl. Mech.*, 487–491 (1951).
6. Koiter W. T., Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic Plastic Materials with a Singular Yield Surface. *Q. Appl. Math.*, **11**, 350–354 (1953); есть русский перевод: Койтер, Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упруго-пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести, *Механика*, **2**, № 60, стр. 117–121 (1960).
7. Johnson W., Mellor P. W., *Plasticity for Mechanical Engineers*, Van Nostrand, Princeton, 1962.
8. Yamada Y., Yoshimura N., Sakurai T., Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method, *Int. J. Mech. Sci.*, **10**, 343–354 (1968).

<sup>1)</sup> В обеих работах уравнения решались итерационным методом, что пред определило выбор метода, в котором используется переменная матрица  $[H]$ .

9. Zienkiewicz O. C., Valliappan S., King I. P., Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems. Initial-Stress, Finite Element Approach, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 1, 75—100 (1969).
10. Gallagher R. H., Padlog J., Bijlaard P. P., Stress Analysis of Heated Complex Shapes, *J. Am. Rocket Soc.*, 32, 700—707 (1962); есть русский перевод: Галлагер, Падлог, Бейлард, Анализ напряжений в конструкциях сложной формы, подверженных нагреву, *Ракетная техника*, 32, № 5, стр. 52—61 (1962).
11. Argyris J. H., Elasto-Plastic Matrix Displacement Analysis of Three-Dimensional Continua, *J. Roy. Aero. Soc.*, 69, 633—635 (1965).
12. Pope G. G., A Discrete Element Method for Analysis of Plane Elasto-Plastic Strain Problems, R. A. E. Farnborough, T. R. 65028, 1965.
- 13a. Swedlow J. L., Williams M. L., Yang W. M., Elasto-Plastic Stresses in Cracked Plates, Calcit, Rept. SM. 65—19, California Inst. of Technology, 1965.
- 13b. Swedlow J. L., Elastic Plastic Cracked Plates in Plane Strain, *Int. J. Fracture Mech.*, 5, 33—44 (1969).
14. Marcal P. V., King I. P., Elastic-Plastic Analysis of Two Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method, *Int. J. Mech. Sci.*, 9, 143—155 (1967).
15. Reyes S. F., Deere D. U., Elasto-Plastic Analysis of Underground Openings by the Finite Element Method, *Proc. 1st Int. Congr. Rock Mechanics*, II, 477—486, Lisbon (1966).
16. Popov E. P., Khojasteh-Bakht M., Yaghmai S., Bending of Circular Plates of Hardening Material, *Intern. J. Sol. Struct.*, 3, 975—988 (1967).
17. Argyris J. H., Scharpf D. W., Methods of Elasto-Plastic Analysis, Symp. on Finite Element Techniques, Stuttgart, June 1969.
18. Theokaris P. S., Marketos E., Elastic-Plastic Analysis of Perforated Thin Strips of Strain-Hardening Material, *J. Mech. Phys. Sol.*, 12, 377—390 (1964).
19. Drucker D. C., Prager W., Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Q. Appl. Math.*, 10, 157—165 (1952).
20. Bishop A. W., The Strength of Soils as Engineering Materials, *Geotechnique*, 16, 91—128 (1966).
21. Zienkiewicz O. C., Continuum Mechanics as an Approach to Rock Mass Problems, Ch. 8 in: *Rock Mechanics in Engineering Practice*, Stagg K. G., Zienkiewicz O. C., eds., Wiley, 1969.
22. Valliappan S., Non-Linear Stress Analysis of Two-Dimensional Problems with Special Reference to Rock and Soil Mechanics, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, 1968.
23. Mroz Z., Non Associated Laws in Plasticity, *J. Mec. and Phys. Appl.*, 2, 21—41 (1963).
24. Davis E. M., Theories of Plasticity and the Failure of Soil Masses, Ch. 6 in: *Soil Mechanics*, Lee I. K., ed., Butterworth, 1969.
- 25a. Zienkiewicz O. C., Best B., Some Non-Linear Problems in Soil and Rock Mechanics — Finite Element Solution, Conf. on Rock Mechanics, Univ. of Queensland, Townsville, June 1969.
- 25b. Zienkiewicz O. C., Best B., Dullage C., Stagg K. G., Analysis of Non-Linear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems, Proc. 2nd Int. Congress on Rock Mechanics, Belgrade, 1970.
26. Valliappan S., Nath P., Tensile Crack Propagation in Reinforced Concrete Beams by Finite Element Techniques, Int. Conf. on Shear Torsion and Bond in Reinforced Concrete, Coimbatore, India, Jan. 1969.
27. Kralh N. W., Khachaturian W., Seiss C. P., Stability of Tensile Cracks in Concrete Beams, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 93, ST1, 235—254 (1967).
28. Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T., A Model for the Mechanics of Jointed Rock, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, SM3, 637—659 (1968).

29. Scholes A., Strover E. M., The Piecewise Linear Analysis of Two Connected Structures Including the Effect of Clearance at the Connections, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **3**, 45–52 (1971).
30. Mendelson A., Hischberg M. H., Manson S. S., A General Approach to the Practical Solution of Creep Problems, *J. of Basic Engineering. Trans. ASME*, Series D, **81**, 585–598 (1959).
31. Zienkiewicz O. C., Watson M., King I. P., A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis, *Int. J. of Mech. Sci.*, **10**, 807–827 (1968).
32. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, 1st ed., McGraw-Hill, 1967.
33. Greenbaum G. A., Rubinstein M. F., Creep Analysis of Axi-Symmetric Bodies Using Finite Elements, *Nucl. Eng. and Design*, **7**, 379–397 (1968).
34. Treharne G., Applications of the Finite Element Method to the Stress Analysis of Materials Subject to Creep, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
35. Lee E. H., Visco-Elasticity in: *Handbook of Engineering Mechanics*, Flügge W., ed., McGraw-Hill, 1962.
36. Lee E. H., Radok J. R. M., Woodward W. B., Stress Analysis for Linear Visco-Elastic Materials, *Trans. of the Soc. of Rheology*, **3**, 41–59 (1959).
37. Leckie F. A., Martin J. B., Deformation Bounds for Bodies in a State of Creep, *J. Appl. Mech., ASME*, **411**–417 (June 1967); есть русский перевод: Лекки, Мартин, Оценки для поля деформаций при ползучести. Труды Американского общества инженеров-механиков, *Прикладная механика*, № 2 (1967).
38. Finnie I., Heller W. R., Creep of Engineering Materials, McGraw-Hill, 1959.
39. Johnson A. E., Complex Stress Creep, *Met. Rev.*, **5**, 447 (1960).
40. Frederick C. O., Chubb E. J., Bromley W. P., Cyclic Loading of a Tube with Creep, Plasticity and Thermal Effects, Applied Mechanics Convention, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **180**, 31 (1965).
41. Zienkiewicz O. C., Analysis of Visco-Elastic Behaviour of Concrete Structures with Particular Reference to Thermal Stresses, *Proc. Am. Concr. Inst.*, **58**, 383–394 (1961).
42. Hilton If. H., Russell H. G., An Extension of Alfrey's Analogy to Thermal Stress Problems in Temperature Dependent Linear Visco-elastic Media, *J. Mech. Phys. Solids*, **9**, 152–164 (1961).
43. Zienkiewicz O. C., Watson M., Cheung Y. K., Stress Analysis by the Finite Element Method — Thermal Effects, Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Inst. Civ. Eng., London, 1967.
44. Malina H., Berechnung von Spannungsumlagerungen in Fels und Boden mit Hilfe der Elementenmethode, *Veröffentlichungen Univ. Karlsruhe*, **40**, 1–90 (1969).
45. Nayak G. C., Plasticity and Large Deformation Problems by Finite Element Method, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
46. Zienkiewicz O. C., Valliappan S., Analysis of Real Structures for Creep, Plasticity and Other Complex Constitutive Laws, Conf. on Materials in Civ. Eng., Univ. of Southampton, 1969.
47. Forchheimer P. H., Wasserbewegung durch Boden, *Zeit Ver. Dt. Ing.*, **1782** (1901).
48. Muskat M., The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, J. W. Edwards Inc., 1946.
49. Volker R. W., Numerical Solutions to Problems of Nonlinear Flow Through Porous Media, Ph. D. Thesis, Univ. of Queensland, Townsville, 1969.
50. Volker R. W., Non-Linear Flow in Porous Media by Finite Elements, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, HY, 2093–2114 (1969).
51. Ahmed N., Suneda D. K., Non-Linear Flow in Porous Media, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **95**, HY6, 1847–1859 (1969).
52. Winslow A. M., Numerical Solution of the Quasi-Linear Poisson's Equation in a Non-Uniform Triangle Mesh, *J. Comp. Physics*, **1**, 149–172 (1967).

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ; БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ

## 19.1. Введение

В предыдущей главе рассматривались нелинейности, обусловленные свойствами материала, и были описаны итерационные методы решения нелинейных задач, в которых используются обычные линейные соотношения. В этой главе такой же подход будет применен к исследованию геометрической нелинейности.

Во всех рассмотренных ранее задачах предполагалось, что и перемещения и деформации конструкций малы. Практически это означает, что форма элементов в процессе нагружения не изменяется и что для деформаций можно использовать приближенные линейные соотношения.

На практике эти предположения часто приводят к неправильным результатам даже при малых деформациях, не превышающих предел упругости материала конструкции. При точном определении перемещений ряда конструкций может оказаться необходимым учет геометрической нелинейности. Например, мембранные напряжения, которыми обычно пренебрегают при изгибе пластин, могут явиться причиной значительного уменьшения перемещений даже при малых деформациях. С другой стороны, может оказаться, что нагрузка, при которой прогиб увеличивается, достигается быстрее, чем это предсказывается линейной теорией, и может возникнуть ситуация, в которой при продолжающемся деформировании несущая способность будет падать. Это не что иное, как краевая задача устойчивости конструкций. Такие задачи встречаются довольно часто. Значение их особенно велико в авиационной и космической технике, при конструировании радиотелескопов, градирен и других тонкостенных конструкций.

Кроме того, во многих случаях могут иметь место *большие перемещения* при малых деформациях. Типичным примером такого типа является классическая задача о гибких телах, как, например, о часовой пружине.

В этой главе предпринята попытка подойти ко всем этим задачам с единых позиций и указать общие методы исследований.

Однако ни один из вопросов, связанных с геометрической нелинейностью, подробно в этой главе не рассматривается. Это вопрос о больших, хотя и упругих деформациях таких материа-

лов, как резина и т. п. В этом случае необходимо использовать специальные соотношения между напряжениями и деформациями. Ограниченный объем книги не позволяет подробно остановиться на этом вопросе. Тем не менее общий подход, описанный в следующем разделе, можно применить и к таким задачам, если использовать соответствующие законы связи напряжений с деформациями.

Геометрическая нелинейность часто может сочетаться с нелинейностью физического типа, рассмотренной в предыдущей главе, такой, как пластичность при малых деформациях и др. В принципе это не приводит к дополнительным трудностям, и методы, изложенные в этой главе, легко могут быть применены и к таким задачам.

## 19.2. Общие положения

### 19.2.1. Основная задача

Независимо от того, велики или малы перемещения (или деформации), внутренние и внешние силы должны удовлетворять условиям равновесия. Если в соответствии с изложенным в гл. 2 перемещения определяются конечным числом (узловых) параметров  $\{\delta\}$ , то, как показано там и повторено в предыдущей главе [см. соотношение (18.13)], должно выполняться равенство

$$\{\psi(\{\delta\})\} = \int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\} dV - \{\bar{R}\} = 0, \quad (19.1)$$

где  $\{\psi\}$  — сумма внешних и внутренних обобщенных сил, а матрица  $[\bar{B}]$  определяется из соотношения

$$d\{\epsilon\} = [\bar{B}] d\{\delta\}. \quad (19.2)$$

Черта означает, что при больших перемещениях деформации нелинейно зависят от перемещений и матрица  $[\bar{B}]$  зависит от  $\{\delta\}$ . В дальнейшем будет видно, что ее удобно представить в виде

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L(\{\delta\})], \quad (19.3)$$

где  $[B_0]$  — матрица, определяющая бесконечно малые деформации, а матрица  $[B_L]$  зависит от перемещений. Будет показано, что в общем случае  $[B_L]$  является линейной функцией перемещений,

Если деформации не очень велики, то можно использовать обычное соотношение теории упругости

$$\{\sigma\} = [D] (\{e\} - \{e_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (19.4)$$

где  $[D]$  — обычная матрица упругих постоянных<sup>1)</sup>.

Однако в равной степени можно было бы использовать и любое нелинейное соотношение между напряжениями и деформациями, поскольку задача сводится к решению нелинейной системы уравнений (19.1).

Вероятно, нет необходимости повторять, что интегрирование в (19.1) фактически производится по отдельным элементам, а их вклады в уравнения равновесия в узлах суммируются обычным образом.

### 19.2.2. Итерационные методы

Ясно, что уравнение (19.1) следует решать методом итераций, и возможность применения описанных в предыдущей главе (разд. 18.3) общих методов очевидна.

При использовании метода Ньютона необходимо, как уже указывалось, найти зависимость между  $d\{\delta\}$  и  $d\{\psi\}$ . Варьируя (19.1) по  $d\{\delta\}$ , получаем

$$d\{\psi\} = \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV. \quad (19.5)$$

Используя формулы (19.4) и (19.2), находим<sup>2)</sup>

$$d\{\sigma\} = [D] d\{e\} = [D] [\bar{B}] d\{\delta\},$$

а на основании (19.3) имеем

$$d[\bar{B}] = d[B_L].$$

Поэтому

$$d\psi = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV + [\bar{K}] d\{\delta\}, \quad (19.6)$$

где

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dV = [K_0] + [K_L], \quad (19.7)$$

<sup>1)</sup> Необходимо иметь в виду, что компоненты напряжения, определяемые соотношением (19.4), соответствуют используемым компонентам деформации. В некоторых задачах о больших перемещениях эти компоненты деформации относятся к направлениям, значительно отличающимся от направлений первоначальных фиксированных координат.

<sup>2)</sup> Если используется нелинейное соотношение между напряжениями и деформациями, то  $[D] = [D(\{\sigma\})]$  — матрица упругих постоянных для приращений, определяемая равенством (18.15).

а  $[K_0]$  является обычной матрицей жесткости при малых деформациях, т. е.  $[K_0]$  имеет вид

$$[K_0] = \int_V [B_0]^T [D] [B_0] dV. \quad (19.7a)$$

Матрица  $[K_L]$  появляется благодаря тому, что перемещения велики. Она определяется выражением

$$\begin{aligned} [K_L] = & \int_V ([B_0]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_L] + \\ & + [B_L]^T [D] [B_0]) dV. \end{aligned} \quad (19.7b)$$

Матрица  $[K]$  известна как матрица *начальных перемещений* [2], *матрица больших перемещений* и т. п. Нетрудно показать, что эту матрицу можно построить, считая деформации малыми, но учитывая изменения координат элемента при вычислении жесткостей.

Первый член выражения (19.6) может быть записан в виде

$$\int_V d [B_L]^T \{\sigma\} dV = [K_a] d \{\delta\}, \quad (19.8)$$

где  $[K_a]$  — симметричная матрица, зависящая от величины напряжения (в справедливости этого утверждения, вероятно, лучше всего убедиться на конкретных примерах). Эта матрица известна как матрица *начальных напряжений* [2] или *геометрическая матрица* [3, 4]. Таким образом,

$$d \{\psi\} = ([K_0] + [K_a] + [K_L]) d \{\delta\} = [K_T] d \{\delta\}, \quad (19.9)$$

где  $[K_T]$  — полная матрица *тангенциальных жесткостей*. Итерации метода Ньютона строятся, как описано в разд. 18.3:

а) в качестве первого приближения  $\{\delta\}$  строится решение по линейной теории упругости;

б) с помощью соотношения (19.1) определяется  $\{\psi\}_1$  для заданной матрицы  $[B]$  и напряжений, определяемых равенством (19.4) (или любым другим линейным или нелинейным законом);

в) строится матрица  $[K_T]$ ;

г) определяется поправка

$$\Delta \{\delta\}_1 = -[K_T]^{-1} \{\psi\}_1.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока величина  $\{\psi\}_n$  не станет достаточно малой.

И здесь возможно использование постоянной матрицы, если на каждом шаге правильно вычислять  $\{\psi\}_n$  [5]. Хотя применение этого метода решения сокращает затраты машинного врем-

мени, число итераций увеличивается и метод сходится во многих случаях медленно.

Все решения можно находить за один шаг для полной действующей нагрузки. Однако, как и во всех нелинейных задачах, возникает возможность неединственности решения и при этом может быть найдено решение, не имеющее физического смысла. В таких случаях целесообразно задавать нагрузку отдельными приращениями и получать нелинейное решение для каждого приращения. С вычислительной точки зрения это часто экономичнее, поскольку эффекты нелинейности на каждом шаге становятся меньше. Если приращения нагрузки достаточно малы по величине, то каждое решение в приращениях с достаточной степенью точности может быть найдено за один шаг [3, 4, 6]<sup>1</sup>). Однако необходимо периодически проверять выполнение условия равновесия с помощью нелинейного соотношения (19.1).

### 19.2.3. Задача начальной устойчивости

Интересно отметить, что матрица  $[K_o]$  не содержит перемещений в явном виде и пропорциональна величине напряжения  $\{\sigma\}$ . Если на первом шаге вычислений  $\{\sigma\}$  определяется из линейного решения, то в соответствии с (19.6)

$$d\{\psi\} = ([K_o] + [K_0]) d\{\delta\}, \quad (19.10)$$

поскольку при этом  $[K_L] = 0$ .

Если нагрузки увеличить в  $\lambda$  раз, то можно найти, что существует нейтральное состояние равновесия, т. е. такое, при котором

$$d\{\psi\} = ([K_o] + \lambda [K_0]) d\{\delta\} = 0. \quad (19.11)$$

Решая описанную выше (см. гл. 17) типичную задачу о собственных значениях, можно найти  $\lambda$ .

Это не что иное, как классическая задача начальной устойчивости (вылучивание стоек, пластин, оболочек и т. д.).

В литературе довольно часто этот метод используется там, где он неприменим. Описанная задача начальной устойчивости может дать физически правильное решение только в том случае, если деформации, определенные из упругого ( $[K_0]$ ) решения, такие, что матрица больших деформаций  $[K_L]$  тождественно равна нулю. Это может быть только в очень ограниченном числе представляющих практический интерес случаев (например, идеально прямая стойка под действием осевой силы; замкнутая

<sup>1</sup>) Это обстоятельство фактически указывает на то, что описанный метод эквивалентен методу Эйлера. Ясно, что его можно уточнить, применяя методы Рунге — Кутта или методы проб и ошибок [28].

сфера, нагруженная равномерно распределенным давлением, и т. д.). Полученные с помощью этого метода выводы о начальных «несовершенствах» применимы только в тех случаях, когда возможна бифуркация равновесия. Для технических приложений такие задачи необходимо исследовать, используя полную матрицу тангенциальных жесткостей [6]. Состояние центрального равновесия достигается тогда, когда величина  $[K_T]d\{\delta\}$  тождественно равна нулю. Ясно, что в этом случае следует использовать метод приращений.

#### 19.2.4. Энергетическая интерпретация критериев устойчивости

Как было показано в гл. 2, виртуальная работа при изменении перемещения на величину  $d\{\delta\}$  фактически равна вариации полной потенциальной энергии  $\chi$ . Таким образом, в состоянии равновесия

$$d\chi = d\{\delta\}^T \{\psi\} = 0, \quad (19.12)$$

т. е. полная потенциальная энергия стационарна [что эквивалентно уравнению (19.1)].

Вторая вариация  $\chi$  в соответствии с (19.9) имеет вид

$$d^2\chi = d(d\chi) = d\{\delta\}^T d\{\psi\} = d\{\delta\}^T [K_T] d\{\delta\}. \quad (19.13)$$

Критерием устойчивости является положительность величины этой второй вариации, и, наоборот, ее отрицательность является критерием неустойчивости (поскольку в первом случае конструкции должна быть сообщена энергия, а во втором — у конструкции избыток энергии). Другими словами, если матрица  $[K_T]$  положительно определенная, то состояние равновесия устойчиво. Этот критерий хорошо известен и широко используется при исследовании устойчивости в случае больших деформаций<sup>1)</sup> [7—9].

#### 19.2.5. Силы, зависящие от деформации

При выводе формулы (19.5) предполагалось, что силы  $\{R\}$  не зависят от деформации. В некоторых случаях это не так. Например, к категории зависящих от деформаций нагрузок относятся давление, действующее на сильно деформируемую конструкцию, и некоторые аэродинамические силы (при флаттере).

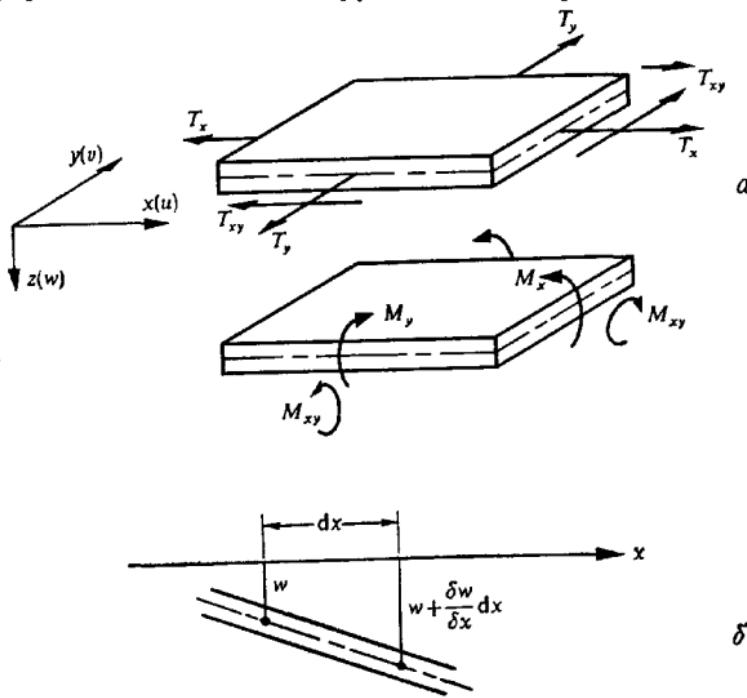
<sup>1)</sup> Другой, хотя и реже используемой проверкой является исследование знака определителя матрицы  $[K_T]$ .

Если силы зависят от перемещения, то в (19.5) необходимо добавить вариацию  $d\{\bar{R}\}$  по  $d\{\delta\}$ . Учет этого члена позволит исследовать задачи об устойчивости и о больших деформациях под действием таких (неконсервативных) нагрузок.

### 19.3. Большие прогибы и начальная устойчивость пластин

#### 19.3.1. Определения

В качестве первого примера рассмотрим задачи, связанные с деформацией пластины, нагруженных поперечными силами и



Фиг. 19.1.

*a*—результатирующие мембранных и изгибных напряжений плоской пластины; *б*—удлинение срединной поверхности при поперечном перемещении.

силами в плоскости пластины, когда перемещения конечны, но не велики. Известно, что в таких случаях перемещения в поперечном направлении вызывают деформации мембраниного типа, и задачи о деформации в плоскости и в поперечном направлении уже нельзя рассматривать отдельно, поскольку они являются *связанными*.

Как и ранее, деформации пластины будем характеризовать перемещениями срединной поверхности; если, как показано на

фиг. 19.1, а, плоскость  $x, y$  совпадает со срединной поверхностью, то (см. гл. 10 и 11)<sup>1)</sup>

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl} \\ \epsilon_b \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{pl} \\ \sigma_b \end{Bmatrix}. \quad (19.14)$$

В частности,  $T_x = \bar{\sigma}_x l$ , где  $\bar{\sigma}_x$  — среднее мембраниое напряжение. Если рассмотреть деформированную пластину (фиг. 19.1, б), то можно увидеть, что перемещение  $w$  приводит к дополнительному растяжению срединной поверхности в направлениях  $x$  и  $y$  и элемент длины  $dx$  растягивается до величины

$$dx' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots \right\},$$

т. е. удлинение в направлении  $x$  можно записать (с точностью до членов второго порядка) в виде

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Рассматривая таким же образом и другие компоненты [10], деформацию можно представить в виде

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl}^0 \\ \epsilon_b^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_{pl}^L \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19.15)$$

<sup>1)</sup> Мембранные и изгибающие компоненты помечены индексами *pl* и *b*.

Здесь первый член представляет собой уже неоднократно рассмотренное линейное выражение, а второй содержит нелинейные члены. В этом выражении  $u, v, w$  — перемещения срединной поверхности.

Если рассматривается линейно-упругое поведение, то матрица  $[D]$  состоит из мембранных и изгибающих компонент (см. гл. 4 и 10):

$$[D] = \begin{bmatrix} [D^P]^I & 0 \\ 0 & [D^b] \end{bmatrix}. \quad (19.16)$$

Перемещения с помощью соответствующих функций формы выражаются через узловые параметры. Например,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e. \quad (19.17)$$

Множество узловых параметров удобно разделить на части, определяющие мембранные и изгибные деформации:

$$\{\delta_I\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^P \\ \delta_i^b \end{Bmatrix},$$

где

$$\{\delta_i^P\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \text{ (как в гл. 4)}, \quad (19.18)$$

$$\{\delta_i^b\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} \text{ (как в гл. 10)}.$$

Функцию формы также удобно представить в виде

$$[N_I] = \begin{bmatrix} [N_I]^P & 0 \\ 0 & [N_I]^b \end{bmatrix}; \quad (19.19)$$

мы будем считать, что и вектор перемещений тоже имеет вид, соответствующий (19.18).

Такие представления удобны, поскольку все характеристики, за исключением нелинейной деформации  $\{\epsilon_{Pl}^I\}$ , совпадают с обычными линейными,

### 19.3.2. Вычисление матрицы $[\bar{B}]$

Для дальнейшего необходимо получить выражения для матриц  $[\bar{B}]$  и  $[K_T]$ . Сначала отметим, что

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L], \quad (19.20)$$

где

$$[B_0] = \begin{bmatrix} [B_0^{pl}] & 0 \\ 0 & [B_0^b] \end{bmatrix}, \quad [B_L] = \begin{bmatrix} 0 & [B_L^b] \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

причем  $[B_0^{pl}]$ ,  $[B_0^b]$  — обычные известные матрицы, соответствующие линейным элементам при плоском напряженном состоянии и изгибе, а  $[B_L^b]$  находится варьированием  $\{\varepsilon_{pl}^L\}$  по параметрам  $\{\delta^b\}$ .

Эту нелинейную компоненту деформации из выражения (19.15) удобно записать в виде

$$\{\varepsilon_{pl}^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\}. \quad (19.21)$$

Производные (углы наклона)  $\omega$  можно связать с узловыми параметрами  $\{\delta^b\}$ :

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta^b\}, \quad (19.22)$$

где

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^b}{\partial x} & \frac{\partial N_j^b}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_i^b}{\partial y} & \frac{\partial N_j^b}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}. \quad (19.23)$$

Матрица  $[G]$  зависит только от координат.

Варьируя (19.21), получаем<sup>1)</sup>

$$d \{\varepsilon_{pl}^L\} = \frac{1}{2} d[A] \{\theta\} + \frac{1}{2} [A] d \{\theta\} = [A] d \{\theta\} = [A][G] d \{\delta^b\}, \quad (19.24)$$

<sup>1)</sup> При получении (19.24) использовано интересное свойство матриц  $[A]$  и  $\{\theta\}$ . Легко проверить, что если

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

и, следовательно, по определению

$$[B_L^b] = [A][G]. \quad (19.25)$$

### 19.3.3. Вычисление матрицы $[K_T]$

Матрицы, связанные с линейной (малой) деформацией, записываются в виде

$$[K_0] = \begin{bmatrix} K_0^{pl} & 0 \\ 0 & K_0^b \end{bmatrix} \quad (19.26)$$

в соответствии с определениями, приведенными в гл. 4 и 10. Матрицы, связанные с большими перемещениями, можно получить, подставляя (19.20) в (19.76). После некоторых преобразований имеем

$$[K_L] = \int_V \begin{bmatrix} 0 & [B_L^{pl}]^T & [D^{pl}] & [B_L^b] \\ \text{Симметрично} & [B_L^b]^T & [D^{pl}] & [B_L^b] \end{bmatrix} dV. \quad (19.27)$$

Матрица  $[K_L]$  находится в соответствии с определением (19.8). Варьируя (19.20), получаем

$$d[B_L]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d[B_L^b]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (19.28)$$

есть произвольный вектор, то

$$d[A]\{x\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \\ d\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{bmatrix} d\{\theta\}.$$

Таким образом,

$$d[A]\{0\} = [A]d\{\theta\}.$$

Аналогично если

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix},$$

то

$$d[A]^T\{y\} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 0 & d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) & d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{bmatrix} d\{\theta\};$$

это второе свойство будет использовано позднее.

а после подстановки в (19.8) и (19.25) находим

$$[K_\sigma] d\{\delta\} = \int_V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [G]^T d[A]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dV. \quad (19.29)$$

В соответствии со свойством, изложенным в примечании на стр. 447, можно записать

$$d[A]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} d\{\theta\} = \begin{bmatrix} \dot{T}_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} [G] d\{\delta^b\}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$[K_\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_\sigma^b] \end{bmatrix}, \quad (19.30)$$

где

$$[K_\sigma^b] = \int_V [G]^T \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} [G] dV - \quad (19.31)$$

известная симметричная матрица для начальных напряжений пластины.

#### 19.3.4. Задача о больших прогибах

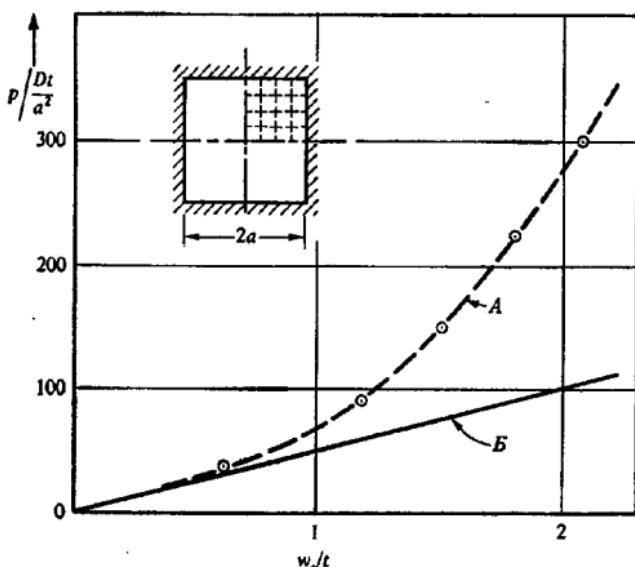
Все необходимые соотношения для решения задачи о больших прогибах пластины уже получены.

На первом этапе находятся перемещения  $\{\delta\}$  из решения несвязанной задачи о малых перемещениях. С их помощью определяются линейная и нелинейная [по соотношению (19.21)] части действительных деформаций. Соответствующие этим деформациям напряжения находятся из обычных соотношений теории упругости, а затем из уравнения (19.21) определяется  $\{\psi_0\}$ . Для последующих приближений  $[K_t]$  строится по формулам (19.26), (19.27) и (19.30).

Полученное таким образом решение типичной задачи [9] (фиг. 19.2) показывает, что с увеличением деформации благодаря появлению мембранных напряжений пластина становится жестче. Перемещения краев пластины как в ее плоскости, так и в поперечном направлении отсутствуют. Результаты расчета хорошо согласуются с аналитическим решением.

Для описания мембраний деформации элемента использовалась приведенная в гл. 7 простейшая функция для прямоугольника, а для описания изгибной деформации — несогласованная функция формы для прямоугольника (разд. 10.4 гл. 10).

В работах [11—15] приведены другие примеры использования метода конечных элементов для расчета больших деформаций пластин.



Фиг. 19.2. Прогиб  $w_c$  в центре защемленной квадратной пластины при равномерно распределенной нагрузке  $p$  [9].

А — расчет больших прогибов; Б — теория малых прогибов.

### 19.3.5. Бифуркация

В ряде случаев, таких, например, как классическая задача Эйлера, возможна бифуркация равновесия. Рассмотрим пластину, нагруженную лишь в своей плоскости. Поскольку поперечных перемещений  $\omega$  не возникает, теория малых прогибов дает точное решение. Однако даже при пулевых поперечных перемещениях можно определить матрицу начальных напряжений  $[K_0^b]$ , хотя  $[K_L] = 0$ . Если мембранные напряжения сжимающие, то эта матрица, как правило, будет такой, что из уравнения изгибной деформации

$$([K_0^b] + \lambda[K_\sigma^b])\{\delta^b\} = 0 \quad (19.32)$$

можно найти действительные собственные значения. Здесь  $\lambda$  — множитель при мембранных напряжениях, указывающий, при

каком их значении достигается состояние пейтрального равновесия (неустойчивость). При соответствующей этим мембранным напряжениям нагрузке начинается выпучивание и могут появляться поперечные перемещения в отсутствие поперечной нагрузки.

Для постановки этой задачи достаточно записать уравнение изгиба, в которое входят введенная в гл. 10 матрица  $[K_0^b]$  и определенная соотношением (19.31) матрица  $[K_\sigma^b]$ .

С помощью различных конечных элементов определены точки начала выпучивания для различных задач расчета пластин [16—21]. Некоторые сравнительные результаты для простой задачи расчета квадратной свободно опертой пластины в условиях равномерного сжатия в одном направлении приведены в табл. 19.1. Параметром выпучивания в этом случае является величина

$$C = \frac{T_x a^2}{\pi^2 D},$$

где  $a$  — сторона пластины и  $D$  — изгибная жесткость.

Таблица 19.1

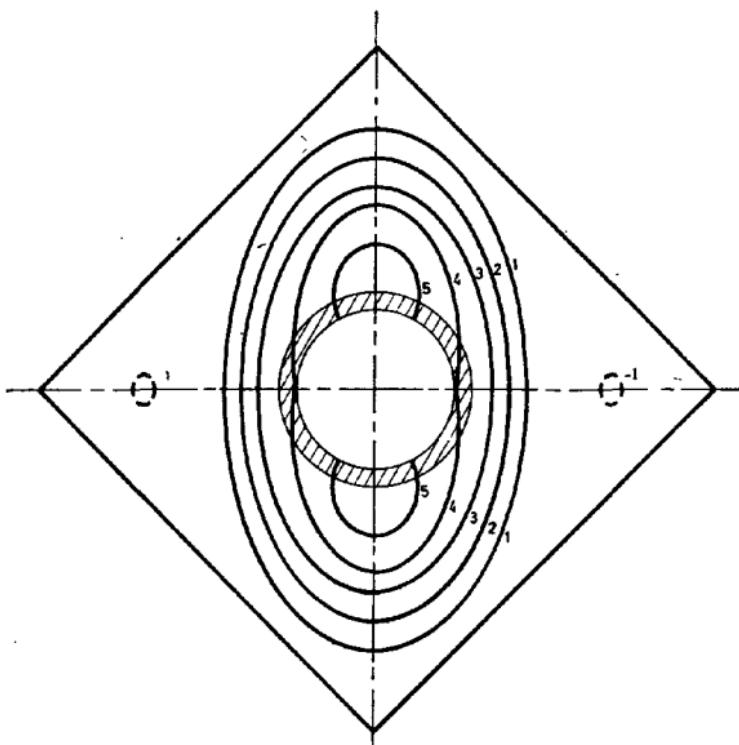
Значения  $C$  для квадратной свободно опертой пластины при одностороннем сжатии (точное значение  $C = 4,00$  [10])

	Несогласованные элементы		Согласованные элементы	
	прямоугольник [17], 12 степеней свободы	треугольник [19], 9 степеней свободы	прямоугольник [20], 16 степеней свободы	четырехугольник [21], 16 степеней свободы
2×2		3,22		
4×4	3,77	3,72	4,015	4,029
8×8	3,93	3,90	4,001	4,002

Все элементы относятся к описанному в гл. 10 типу. Интересно отметить, что при выполнении требования непрерывности углов наклона для параметра выпучивания всегда получаются оценки сверху. При использовании несогласованных элементов в этом случае получаются оценки снизу, хотя в общем случае справедливость этой оценки пока не установлена.

На фиг. 19.3 показана форма выпучивания для пластины более сложной формы [19]. При расчете использовались несогласованные треугольные элементы.

Практическое значение таких задач об устойчивости пластин невелико. Поскольку при наличии поперечных перемещений пластина становится жестче, она может выдерживать дополнительные нагрузки. Такое увеличение жесткости отмечалось в при-



Фиг. 19.3. Форма выпучивания квадратной пластины с защемленными краями и подкрепленным фланцем центральным отверстием при сдвиге.

$$K = \frac{Y_C R d^2 t}{\pi^2 D} = 26,12.$$

размеры фланца:

$$W = \frac{L}{30}, \quad t = 4t_0.$$

мере, иллюстрированном на фиг. 19.2. Таким образом, поведение пластины после выпучивания необходимо исследовать, применяя описанный в предыдущих разделах общий метод изучения больших деформаций [22—24]. Для того чтобы избежать связанных с бифуркацией трудностей, следует задать небольшое возмущение (или поперечную нагрузку).

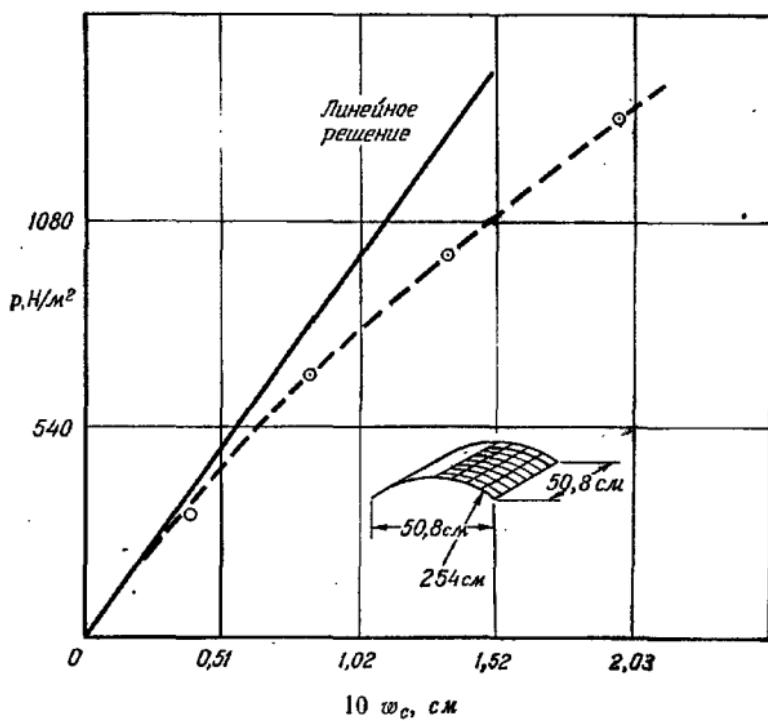
#### 19.4. Оболочки

Задачи устойчивости для оболочек имеют большее значение, чем для пластин. При исследовании оболочек матрицу тангенциальной жесткости  $[K_t]$ , как правило, всегда следует определять с учетом действительных перемещений, поскольку, за исключением самых тривиальных случаев, при заданной нагрузке мембранные и изгибные эффекты всегда взаимосвязаны. Одна-

ко, вычисляя матрицу начальной устойчивости  $[K_0]$  для упругих напряжений, иногда можно получить полезные результаты относительно коэффициента устойчивости  $\lambda$ . В классических работах по выпучиванию оболочек почти исключительно рассматривается именно такая начальная устойчивость. Однако истинная критическая нагрузка может быть значительно ниже нагрузки, соответствующей начальной устойчивости. Поэтому важно выявить, хотя бы приближенно, влияние деформаций.

Если предполагается, что оболочки состоят из плоских элементов пластики, то к матрице тангенциальной жесткости пластины можно применить описанные в гл. 11 преобразования [25, 26]. При использовании криволинейных элементов оболочек следует вернуться к уравнениям теории оболочек и включить в них нелинейные члены [9, 27]. Необходимые подробности читатель может найти в упомянутых работах.

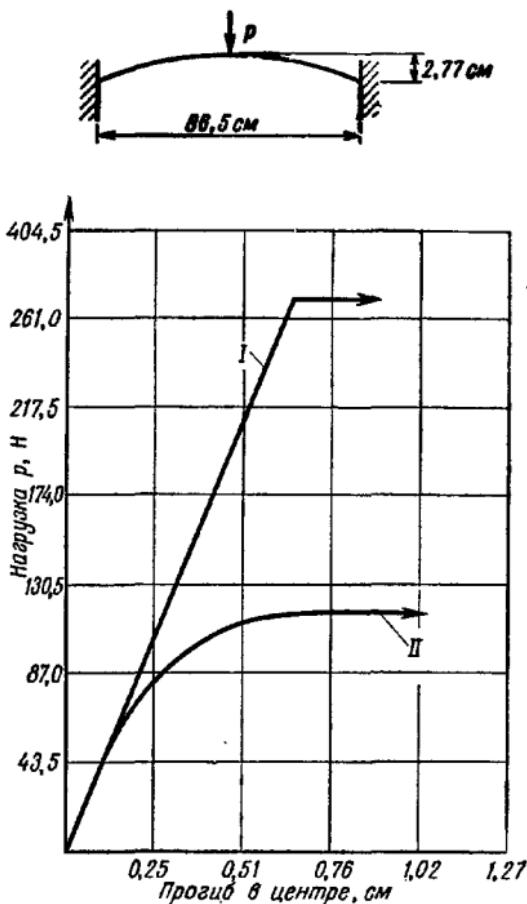
Важно опять подчеркнуть, что расчеты начальной неустойчивости имеют смысл только в частных случаях и что они часто дают сильно завышенные значения критических нагрузок. Для



Фиг. 19.4. Протябы в центре цилиндрической оболочки. Все края защемлены.

$$t=0,32 \text{ см}, v=0,3, E=3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2,$$

получения правильных результатов необходимо решать нелинейные задачи. Существенное размягчение оболочки под нагрузкой видно на примере, взятом из работы [9] и иллюстрированном на фиг. 19.4. На фиг. 19.5 показано, что перемещения нагруженной



Фиг. 19.5. Расчет больших деформаций арки методом начальной устойчивости и приращений.

I — решение методом начальной устойчивости; II — решение методом конечных элементов [7].  $A = 1,21 \text{ см}^2$ ,  $I = 0,00229 \text{ см}^4$ ,  $E = 6,74 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

арки неограниченно возрастают при величине нагрузки, гораздо меньшей определенной по линейной теории устойчивости [6].

Определение истинной критической нагрузки оболочки или другой тонкой конструкции связано с определенными трудностями (уже рассмотренного в гл. 18 вида), поскольку не может быть сходимости перемещений при увеличении нагрузки вблизи предела несущей способности.

Если рассматривается только сосредоточенная нагрузка, то удобно задавать приращения перемещений и вычислять соответствующие реакции. Аргирис [4] с помощью этого метода изучил поведение арки при прощелкивании.

План и Тонг [28] показали, каким образом этот прием можно просто обобщить на случай системы пропорционально изменяющихся нагрузок.

В работах [29—33] описаны другие методы исследования потери устойчивости.

## 19.5. Общий случай больших деформаций и перемещений

Использованные в разд. 19.3 нелинейные соотношения (19.5) между деформациями и перемещениями были выведены *специально* для этого случая. Аналогично можно вывести соотношения и для оболочек, кроме того, всегда существует возможность получений и других приближенных выражений. Однако можно использовать общее определение деформаций, *справедливое как для больших, так и для малых перемещений и деформаций*. Такое определение введено Гриром и Сен-Венаном. Оно известно как тензор деформации Грина. В фиксированной декартовой системе координат  $x, y, z$  деформации определяются через перемещения  $u, v, w$  выражениями [34]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right].\end{aligned}\quad (19.33)$$

Остальные компоненты получаются в результате соответствующих перестановок.

Если градиенты перемещения малы, то после пренебрежения квадратичными членами получаем обычные линейные выражения для деформаций.

Геометрическая интерпретация вышеприведенных определений деформаций в общем случае не очевидна, но следует отметить, что они являются мерами удлинения и искажения углов первоначально ортогонального элемента.

Если деформации по величине малы, то нетрудно показать, что  $\varepsilon_x$  определяет изменение длины единичного отрезка, *первоначально параллельного оси x*, а  $\gamma_{xy}$  характеризует изменение угла между двумя линейными элементами, *первоначально параллельными осям x и y*. Это справедливо даже при движениях, связанных с большими переосом и поворотом первоначальных осей координат.

Далее выводятся нелинейные выражения для матриц  $[B]$  и  $[K_T]$  в общем случае трехмерного напряженного состояния. Из

этих выражений просто получить одномерные и двумерные формы. Это предоставляетя проделать читателю в качестве упражнения. Общие соотношения удобно использовать для задач расчета пластин и оболочек. При этом можно учесть некоторые члены, которыми мы пренебрегали в записанных в предыдущем разделе выражениях для пластин.

### 19.5.1. Построение матрицы $[B_L]$

Вектор полной трехмерной деформации можно представить через компоненты бесконечно малой и большой деформаций

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^L\}, \quad (19.34)$$

где

$$\{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (19.35)$$

столбец, рассмотренный в гл. 6. Нелинейные члены в соотношении (19.33) удобно переписать в виде

$$\{\epsilon^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{0_x\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{0_y\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{0_z\}^T \\ 0 & \{0_z\}^T & \{0_y\}^T \\ \{0_z\}^T & 0 & \{0_x\}^T \\ \{0_y\}^T & \{0_x\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0_x\} \\ \{0_y\} \\ \{0_z\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A] \{0\}, \quad (19.36)$$

где

$$\{0_x\}^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right] \text{ и т. д.,}$$

а  $[A]$  — матрица размерности  $6 \times 9$ .

Читатель легко может убедиться в справедливости записанного выше соотношения и проверить выполнение свойств матриц

$[A]$  и  $\{0\}$ , описанных в подразд. 19.3.2 (примечание на стр. 447). В этом случае

$$d\{\epsilon^L\} = \frac{1}{2} d[A]\{0\} + \frac{1}{2}[A]d\{0\} = [A]d\{0\}, \quad (19.37)$$

и так как  $\{0\}$  можно выразить через функцию формы  $[N]$  и узловые параметры  $\{\delta\}$ , то

$$\{0\} = [G]\{\delta\} \quad (19.38)$$

или

$$d\{\epsilon^L\} = [A][G]d\{\delta\}$$

и

$$[B_L] = [A][G]. \quad (19.39)$$

### 19.5.2. Построение матрицы $[K_T]$

Замечая, что

$$[\bar{B}] = [B_0] + [B_L],$$

легко построить матрицу, определенную соотношением (19.7):

$$[\bar{K}] = [K_0] + [K_L] = \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dV. \quad (19.40)$$

Для получения полной матрицы тангенциальных жесткостей необходимо построить матрицу начальных напряжений  $[K_\sigma]$ . В соответствии с (19.8) имеем

$$[K_\sigma] d\{\sigma\} = \int_V d[B_L]^T \{\sigma\} dV = \int_V [G]^T d[A]^T \{\sigma\} dV. \quad (19.41)$$

Можно записать

$$d[A]^T \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x I_3 & \tau_{xy} I_3 & \tau_{xz} I_3 \\ & \sigma_y I_3 & \tau_{yz} I_3 \\ \text{Симметрично} & & \sigma_z I_3 \end{bmatrix} d\{0\} = [M][G]d\{\delta\}, \quad (19.42)$$

где  $I_3$  — единичная матрица размерности  $3 \times 3$ .

Подставляя (19.42) в (19.41), получаем

$$[K_\sigma] = \int_V [G]^T [M][G] dV, \quad (19.43)$$

где  $[M]$  — матрица размерности  $9 \times 9$  из шести компонент напряжения, расставленных, как показано в (19.42). Очевидно, что матрица  $[K_\sigma]$  симметрична.

В предыдущих выражениях индекс элемента опущен, хотя все матрицы должны строиться для каждого элемента, а затем суммироваться обычным образом.

В случае необходимости введения непротиворечивых упрощений при исследовании пластин и оболочек полезно начинать с общих выражений. Эти выражения необходимо использовать и при исследовании рассмотренных в гл. 14 толстых оболочек.

Если известна связь между напряжениями и деформациями, то ее можно использовать для исследования больших деформаций. Однако чаще определяют непосредственно энергию деформаций через компоненты деформации и, минимизируя ее, находят обобщенные силы. Некоторые примеры такого подхода к исследованию больших деформаций даны Одеом [35—38], который рассмотрел большие деформации резиновых мембран и сплошных сред.

## 19.6. Заключительные замечания

В этой главе сделана попытка подойти ко всем задачам о больших деформациях с одних и тех же позиций. Указаны различные методы решения основной системы нелинейных уравнений, и вполне естественно, что перед читателем может встать вопрос, какой из этих методов предпочтительнее. Если требуется найти лишь одно решение нелинейной задачи о больших деформациях, то в большинстве случаев оказывается, что метод Ньютона сходится довольно быстро. Однако в некоторых случаях экономически выгоднее применять методы, использующие постоянную матрицу.

Если требуется исследовать весь процесс деформирования при нагружении, то, как правило, рассматриваются малые приращения нагрузки и для каждого такого приращения решается задача линейной теории упругости, причем матрица тангенциальных жесткостей вычисляется для начала приращения нагрузки [2, 3]. При использовании этих методов может накапливаться ошибка, и поэтому Бреббия и Конпор [9] рекомендуют после нескольких приращений уточнять решение методом Ньютона.

Рассмотренные методы можно использовать для решения геометрически нелинейных задач динамики, особенно когда существуют матрицы жесткости, соответствующие начальным напряжениям, и рассматриваемая задача квазилинейна. Андерсоном и др. [19], например, решено много задач о колебаниях предварительно сжатых пластин<sup>1)</sup>.

Если можно построить матрицу упругих постоянных для приращений, то совместное рассмотрение физической и геометрической нелинейностей становится особенно простым. Марсал [2]

<sup>1)</sup> В работе [39] исследовалась переходные процессы в таких задачах.

решил ряд таких задач о больших пластических деформациях. Интересно отметить, что приемы решения нелинейных задач при физической и геометрической нелинейностях сходны. Это позволяет разработать вычислительные программы решения задач с учетом обоих типов нелинейности.

В заключение следует отметить два обстоятельства. Во-первых, это сравнительно громоздкое построение матрицы начальных напряжений для пластин, хотя в ряде ранее опубликованных работ изложен более простой способ построения. Однако при этом, как нам кажется, удалось достичь общности изложения. Во-вторых, применение используемых в книге матричных обозначений в разделе о больших деформациях потребовало осуществления достаточно сложных преобразований. Некоторых упрощений можно было бы достичь при использовании тензорных обозначений. Кстати, их можно было бы применить по всей книге. Однако избранный нами путь более доступен и понятен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Truesdell C. (ed.), *Continuum Mechanics IV, Problems of Non-Linear Elasticity*, Vol. 8, p. 4, Gordon and Beach, 1965.
2. Marçal P. V., *Finite Element Analysis of Combined Problems of Material and Geometric Behaviour*, Techn. Rept. 1, ONR, Brown Univ., 1969; Proc. Am. Soc. Mech. Eng. Conf. on Computational Approaches in Applied Mechanics, 133, June 1969.
3. Argyris J. H., Kelsey S., Kamel H., *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGARDograph 72, Pergamon Press, 1963.
4. Argyris J. H., *Continua and Discontinua*, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
5. Nayak G. C., *Plasticity and Large Deformation Problems by Finite Element Method*, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
6. Marçal P. V., *Effect of Initial Displacement on Problem of Large Deflection and Stability*, Techn. Rept. ARPA E54, Brown Univ., 1967.
7. Marguerre K., *Über die Anwendung der Energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme*, Hohrb., D. V. L., 252—262, 1938.
8. de Veubeke B. F., *The Second Variation Test with Algebraic and Differential Contrasts, Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimisation*, Pergamon Press, 1969.
9. Brebbia C., Connor J., *Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 95, EM2, 463—483 (1969).
10. Timoshenko S. P., Gere J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 2nd ed., 1961.
11. Schmit L. A., Bogner F. K., Fox R. L., *Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Cylindrical Shell Discrete Elements*, Proc. AIAA/ASME 8th Struct. and Stress Dynamic Conference, Palm Springs, California, 197—211, March 1967; *JAIAA*, 5, 1525—1527 (1968); есть русский перевод: Шмит, Богнер, Фокс, Расчет конструкций при конечных прогибах с использованием дискретных элементов пластин и оболочек, *Ракетная техника и космонавтика*, № 5, стр. 17 (1968).

12. Turner M. J., Ditt E. H., Martin H. C., Melosh R. J., Large Deflection of Structures Subjected of Heating and External Loads, *J. of Aero. Sciences*, 27, 97—106 (1960).
13. Kawai T., Yoshimura N., Analysis of Large Deflection of Plates by Finite Element Method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 123—133 (1969).
14. Mallett R. H., Marcal P. V., Finite Element Analysis of Non-Linear Structures, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, S. T. 9, 2081—2105 (1968).
15. Murray D. W., Wilson E. L., Finite Element Large Deflection Analysis of Plates, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, EM 1, 143—165 (1968).
16. Martin H. C., On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
17. Kapur K. K., Hartz B. J., Stability of Thin Plates Using the Finite Element Method, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, EM2, 177—195 (1966).
18. Gallagher R. H., Padlog J., Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis, *JAIAA*, 1, 1537—1539 (1963); есть русский перевод: Галлагер, Падлог, Исследование устойчивости конструкций на основе анализа дискретных элементов, *Ракетная техника и космонавтика*, № 6, стр. 194 (1963).
19. Anderson R. G., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 1031—1055 (1968).
20. Carson W. G., Newton R. E., Plate Buckling Analysis Using a Fully Compatible Finite Element, *JAIAA*, 8, 527—529 (1969); есть русский перевод: Карсон, Нью顿, Анализ выпучивания пластинки с использованием полнотью совместного конечного элемента, *Ракетная техника и космонавтика*, № 3, стр. 174 (1969).
21. Kabaila A. P., de Veubeke B. F., A Quadrilateral Element for Plate Buckling Analysis, *Int. J. Num. Meth. in Eng.* (в печати).
22. Murray D. W., Wilson E. L., Finite Element Post Buckling Analysis of Thin Elastic Plates, Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
23. Rockey K. C., Bagchi D. K., Buckling of Plate Girder Webs Under Partial Edge Loadings, *Int. J. Mech. Sci.*, 12, 61—76, (1970).
24. Roberts T. M., Ashwell D. G., Post-buckling Analysis of Slightly Curved Plates by the Finite Element Method, Rept. 2, Dept. of Civil and Struct. Engineering, Univ. of Wales, Cardiff, 1969.
25. Anderson R. G., A Finite Element Eigenvalue Solution System, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
26. Gallagher R., Gellatly R., Mallett R., Padlog J., A Discrete Element Procedure for Thin Shell Instability Analysis, *JAIAA*, 5, 138—145 (1967); есть русский перевод: Галлагер, Джеллатти, Моллети, Расчет неустойчивости тонких оболочек методом дискретных элементов, *Ракетная техника и космонавтика*, № 1, стр. 161 (1967).
27. Gallagher R. H., Yang H. T. Y., Elastic Instability Predictions for Doubly Curved Shells, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods, Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1968.
28. Pian T. H. H., Tong P., Variational Formulation of Finite Displacement Analysis, Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High Speed Computing of Elastic Structures, Liège, 1970.
29. Martin H. C., Finite Elements and the Analysis of Geometrically Non-Linear Problems, U. S.—Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, 1970.
30. Walker A. C., A Non-Linear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches, *Int. J. Solids Struct.*, 5, 97—107 (1969).
31. Thompson J. M. T., Walker A. C., A Non-Linear Perturbation Analysis of Discrete Structural Systems, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 757—767 (1968).

32. Przemieniecki J. S., Stability Analysis of Complex Structures Using Discrete Element Techniques, Symp. on Struct. Stability and Optimisation, Loughborough Univ., March 1967.
33. Connor J., Morin N., Perturbation Techniques in the Analysis of Geometrically Non-Linear Shells, Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High Speed Computing of Elastic Structures, Liége 1970.
34. Fung Y. C., Foundation of Solid Mechanics, Prentice Hall Int., 1965.
35. Oden J. T., Finite Plane Strain of Incompressible Elastic Solids by the Finite Element Method, *The Aeronautical Quarterly*, **19**, 254—264 (1967).
36. Oden J. T., Sato T., Finite Deformation of Elastic Membranes by the Finite Element Method, *Int. J. Solids and Struct.* **3**, 471—488 (1967).
37. Oden J. T., Numerical Formulation of Non-Linear Elasticity Problems, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, ST3, 235—255 (1967).
38. Oden J. T., Finite Element Applications in Non-Linear Structural Analysis, Proc. Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Am. Soc. Civ. Eng., Vanderbilt Univ., 1969.
39. Stricklin J. A., Non-Linear Dynamic Analysis of Shells of Revolution, Symp. Int. Un. Th. Appl. Mech. on High Speed Computing of Elastic Structures, Liége, 1970.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ  
И ПРОГРАММЫ (ЧЕНГ И КИНГ)

## 20.1. Введение

Метод конечных элементов легко программируется для быстродействующих вычислительных машин и достаточно эффективен, поскольку с помощью ЭВМ можно решать большие системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются после дискретизации задачи [1].

Для расчета методом конечных элементов разработано большое количество программ. Первоначально они имели узко специальное назначение и часто составлялись на машинном языке. Подмечено в процессе различных приложений сходство в структуре программ привело к созданию более совершенных и универсальных программ. Одним из первых примеров является программа ASKA<sup>1)</sup>, ориентированная на определенный тип машины. Например, в области исследования аэрокосмических проблем особое значение имеет возможность решения множества различных задач; составление универсальной программы для расчета небольшого числа задач малоэффективно.

Быстрые темпы развития вычислительной техники привели к необходимости создания программы на языке, понятном любой машине. Возможности алгоритмического языка ФОРТРАН обусловили его широкое использование для программирования при решении задач методом конечных элементов.

Программа NASA<sup>2)</sup> представляет собой попытку создания гибкой программы для широких исследований и решения задач Американской аэрокосмической промышленности.

Созданные в Суонси программы FESS (Finite Element Solution Swansea) и FINESSE были больше ориентированы на эффективное решение инженерных задач строительной механики малых и средних размеров, таких, например, как расчет мостов, плотин, ядерных реакторов. При их разработке основное внимание уделено созданию простой системы, которую легко приспособить к любым конкретным задачам.

Важно иметь в виду, что затраченные усилия при программировании должны окупаться эффективностью программы. Чем

---

<sup>1)</sup> Составлена под руководством проф. Аргириса (Штутгарт).

<sup>2)</sup> Национальное управление по аeronавтике и исследованию космического пространства,

меньшую по размеру предстоит создать программу, тем больше внимания следует уделить ее эффективности. При составлении программы решения задач методом конечных элементов важно знать пределы возможностей машины и при необходимости использования специальных приемов переходить к ЭВМ с большим объемом памяти и большим быстродействием. Программирование в машинных кодах, как правило, происходит более медленно, и разработка такой программы обходится дороже.

Программа и приемы программирования, описанные в этой главе, имеют ряд особенностей, присущих программе FESS. Однако многие приемы и тонкости рационального использования памяти, характерные для программы FESS, здесь опущены ради простоты. Тем не менее приведенная программа без каких-либо существенных изменений использовалась для расчета сложных упругопластических задач. И хотя здесь приведен всего лишь простейший вариант программы, с ее помощью успешно исследовались методом собственных функций также задачи устойчивости и теории колебаний.

## 20.2. Программы, реализующие метод конечных элементов

Программы, реализующие метод конечных элементов, могут иметь различное назначение. Чаще всего требуется только решение линейных задач в упругой постановке, однако число степеней свободы может быть различным, от нескольких десятков до нескольких тысяч. В задачах динамики и устойчивости может потребоваться отыскание собственных значений, а для решения нелинейных задач может оказаться необходимым применение различных итерационных методов.

При решении конкретных задач методом конечных элементов встречаются непреодолимые трудности, если составлять программу для каждого нового класса задач. Поэтому очень важно использовать созданные ранее программы.

Типичная программа, реализующая метод конечных элементов, состоит из ряда общих блоков, которые в различных контекстах могут использоваться по-разному. Такими блоками являются ввод исходных данных, вычисление жесткости элементов, решение уравнений, построение матрицы масс, нахождение собственных значений, вычисление напряжений и вывод на дисплей.

При программировании такие блоки используются как подпрограммы. Для обеспечения взаимозаменяемости входные параметры этих подпрограмм должны быть стандартизированы. Тогда при составлении новой программы в каждом конкретном случае можно просто комбинировать соответствующие подпрограммы, и вся дополнительная работа программиста сводится

лишь к введению каких-либо новшеств или дополнений, связанных со спецификой задачи.

В таких системах *управляющая программа* обычно представляет собой очень простую программу, которая обращается в соответствующем порядке к различным подпрограммам. Для некоторых классов задач можно создать стандартные управляющие программы и автоматизировать выбор нужных подпрограмм. В больших организациях, имеющих дело с некоторыми определенным типами задач, создание таких стандартных программ может оказаться чрезвычайно полезным. Однако в исследовательских целях, видимо, предпочтительнее более гибкое ручное программирование.

Важно, чтобы сформированные блоки имели достаточное количество документации, позволяющей легко использовать их не только непосредственному составителю, но и другим лицам. Крайне полезным может оказаться включение в соответствующие места комментарев.

**Пример управляющей программы.** В этой главе приведен пример программы расчета линейной задачи о плоской деформации, не требующей большого объема памяти машины, что позволяет применять ее в малых ЭВМ. Программа написана на языке ФОРТРАН IV и представляет собой очень простой пример использования отдельных подпрограмм. Однако она вполне пригодна для решения практических задач и легко может быть использована читателями, знакомыми с ФОРТРАНом. В разд. 20.7 описан пример решения с помощью этой программы задачи о плоском напряженном состоянии (с измененными материальными константами). При использовании подпрограмм в других целях или при применении элементов других типов необходимо составить соответствующие управляющие программы. Типичная блок-схема управляющей программы приведена на стр. 467.

Заметим, что в этой программе цикл по нагрузкам вводится в целях экономии памяти вычислительной машины, что, однако, приводит к увеличению затрат машинного времени. Тем не менее, когда есть необходимость отдельно исследовать влияние большого числа различных видов нагрузок, как, например, при расчете мостов, его введение обязательно. Для задач с небольшим разнообразием нагрузок часто бывает предпочтительнее рассматривать их одновременно.

#### *Обозначения переменных общего блока (CONTR)*

TITLE (12)	Массив для заголовка из 12 символов
NP	Число узловых точек
NE	Число элементов

NB	Число узлов, в которых заданы граничные условия
NDF	Число степеней свободы узла
NCN	Максимальное число узлов в элементе
NLD	Количество случаев нагружения
NMAT	Количества типов материала
NSZF	Число уравнений в системе
LI	Счетчик цикла по нагрузкам
NT4	Порядковый номер запоминающего устройства

*Основные переменные, помещаемые в область COMMON*

CORD (100,2)	Массив координат узловых точек
NOP (200,4)	Массив, содержащий информацию о связи элементов
IMAT (200)	Массив, содержащий информацию о типе материала элемента
ORT (25,2)	Массив, содержащий характеристики материала элемента
NBC (25)	Номера узлов, в которых заданы граничные условия
NFIX (25)	Тип граничного условия
R1 (200)	Вектор нагрузки
SK (200,40)	Прямоугольная матрица для уравнений

*Обозначения переменных в программе MAIN*

NPROB	Количество задач
NPR	Счетчик числа задач

*Программа 20-1*

C Управляющая программа MAIN  
 COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,  
 NSZF,LI,NT4  
 COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),  
 NFIX(25)  
 1,R1(200),SK(200,40)

C Номер исходной ленты и максимальное число узловых точек 10  
 C  
 C  
 C NT4 = 11  
 NCN = 3  
 READ(5,1) NPROB  
 C  
 C Начало цикла по задачам  
 C

DO 400 NPR = 1,NPROB	13
REWIND NT4	
C	
C Считывание исходных данных по геометрии и свойствам материалов	16
C	
CALL GDATA	14
NSZF = NP•NDF	19
DO 200LI = 1,NLD	21
C	
C Считывание нагрузки	22
C	
CALL LOAD	23
C	
C Формирование и решение системы алгебраических уравнений	
C	
C CALL FORMK	
CALL SOLVE	28
C	
C Вычисление напряжений	
C	
CALL STRESS	
200 CONTINUE	32
400 CONTINUE	33
1 FORMAT(915)	35
STOP	36
END	37

## 20.3. Ввод исходных данных

Для работы программы, реализующей метод конечных элементов, дополнительно требуется четыре основные системы исходных данных:

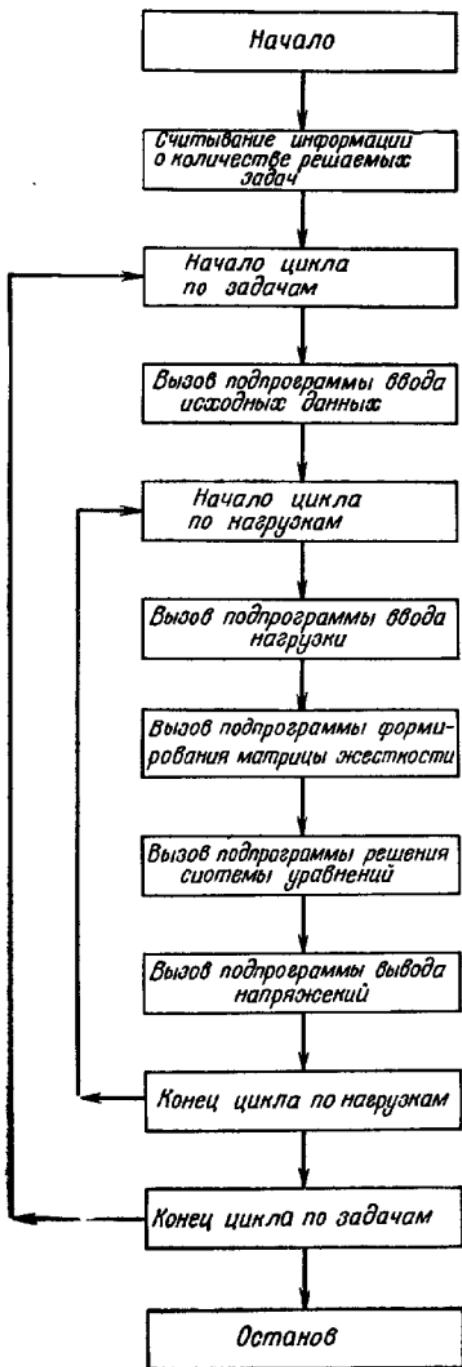
- координаты и характеристики элементов;
- свойства материала каждого элемента;
- граничные условия;
- нагрузки.

Подпрограммы ввода исходных данных могут иметь различную структуру, но в любом случае их основное назначение состоит в формировании массива исходных данных указанных четырех систем, характеризующих задачу. Для работы управляющей программы необходим полный набор исходных данных.

### 20.3.1. Координаты и характеристики элементов

Используемые координаты — это координаты всех узловых точек (например, координаты  $x_i$  и  $y_i$  узла  $i$  в задаче о плоском напряженном состоянии), расположенные в определенном порядке. В большинстве случаев матрицы жесткости не зависят от положения начала координат, которое обычно выбирается произвольно.

## Блок-схема программы MAIN



К характеристикам элементов относятся информация о связи между элементами, содержащая номера всех узлов элемента, а также число, характеризующее свойства материала элемента. Эти характеристики также перечислены последовательно.

### *20.3.2. Свойства материала*

В большинстве приложений свойства материала одинаковы для больших групп элементов. Поэтому удобно присвоить каждому элементу номер, определяющий материал элемента, и информацию о свойствах материала считывать отдельно.

### *20.3.3. Нагрузки*

Для обеспечения максимальной простоты и гибкости программы нагрузки можно задавать в виде одного вектора, который затем непосредственно используется в программе. Во многих случаях, когда число точек, в которых задана нагрузка, составляет лишь небольшой процент от общего числа узлов системы, бывает предпочтительнее считывать только ненулевые значения нагрузки и номера соответствующих узлов. Вектор нагрузки должен быть, конечно, задан нулевым, чтобы его компоненты, соответствующие ненагруженным узлам, были нулевыми.

Однако в тех случаях, когда рассматриваются объемные силы, для формирования вектора нагрузки в зависимости от геометрии системы и свойств материала необходимо иметь специальную подпрограмму. Подпрограммы формирования вектора нагрузки можно также использовать для вычисления значений узловых сил при действии распределенной нагрузки. В результате работы таких подпрограмм получаются векторы нагрузки, идентичные по форме обычным векторам, считающимся с перфокарт.

### *20.3.4. Границные условия*

Границные условия могут быть учтены либо при построении элементов, либо путем соответствующего изменения системы алгебраических уравнений непосредственно перед ее решением. Последний подход удобен для элементов простой формы, но становится сложным при использовании элементов высоких порядков или при необычных граничных условиях, как, например, при ограничениях, накладываемых в некотором произвольном направлении. В приведенной в этом разделе подпрограмме граничное условие для узла считывается в виде комбинации цифр 0 и 1, причем 0 означает отсутствие ограничений на данную степень свободы, а 1 — наличие ограничений.  
Таким образом,

01 означает свободу в направлении  $X$  и отсутствие перемещений в направлении  $Y$ ;

10 означает отсутствие перемещения в направлении  $X$  и свободу в направлении  $Y$ ;

11 означает отсутствие перемещений в обоих направлениях.

**Примеры подпрограмм.** Ниже помещены тексты двух подпрограмм. Подпрограмма GDATA считывает основные исходные данные о геометрии, а подпрограмма LOAD считывает векторы нагрузки. Ни одна из них не может самостоятельно вырабатывать исходные данные. Блок-схемы этих подпрограмм приведены на стр. 470 и 471.

### *Обозначения переменных в подпрограмме GDATA*

II            Вывод на печать введенных исходных данных

### *Обозначения переменных в подпрограмме LOAD*

R(3) \*        Массив для временного хранения значений нагрузки в узле NQ

### *Программа 20-2*

SUBROUTINE GDATA

COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,  
NSZF,LI,NT4

COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),  
NFI(X(25))

1,R1(200),SK(200,40)

2,R(3)

C

Считывание и печать заголовка и контрольных данных

C

READ(5,7)TITLE

11

WRITE(6,100)TITLE

15

READ(5,1)NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1

WRITE(6,1)NP,NE,NB,NLD,NDF,NMAT,I1

C

Считывание и печать характеристик материала

C

READ(5,8) (N,(ORT(N,I),I = 1,2),N = 1,NMAT)

17

WRITE(6,108)

WRITE(6,8) (N,(ORT(N,I),I = 1,2),N = 1,NMAT)

C

Считывание информации об узлах

C

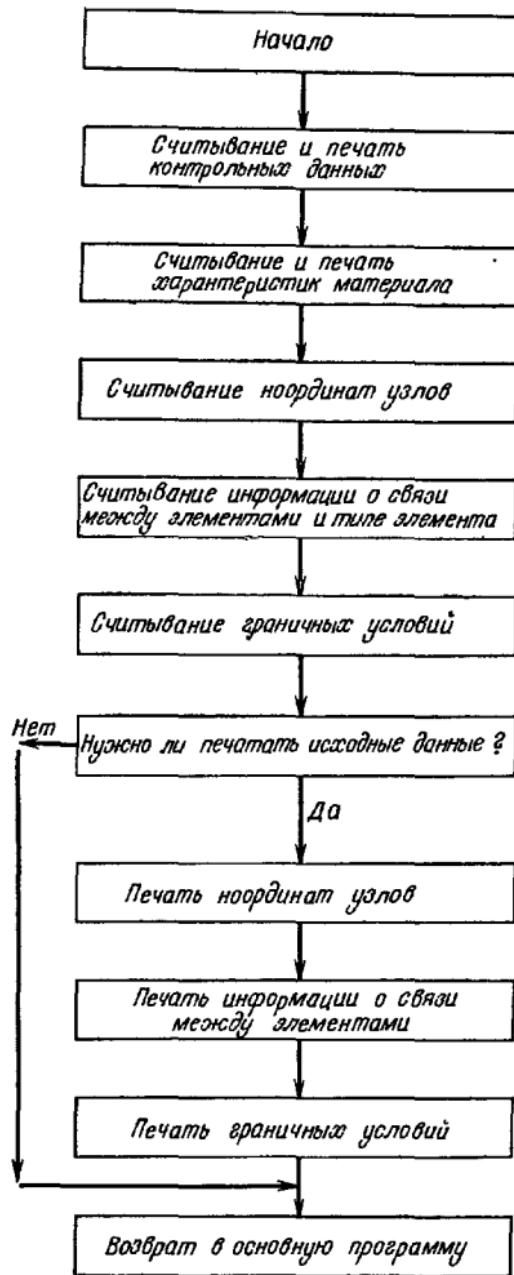
READ(5,2) (N,(CORD(N,M),M = 1,2),N = 1,NP)

35

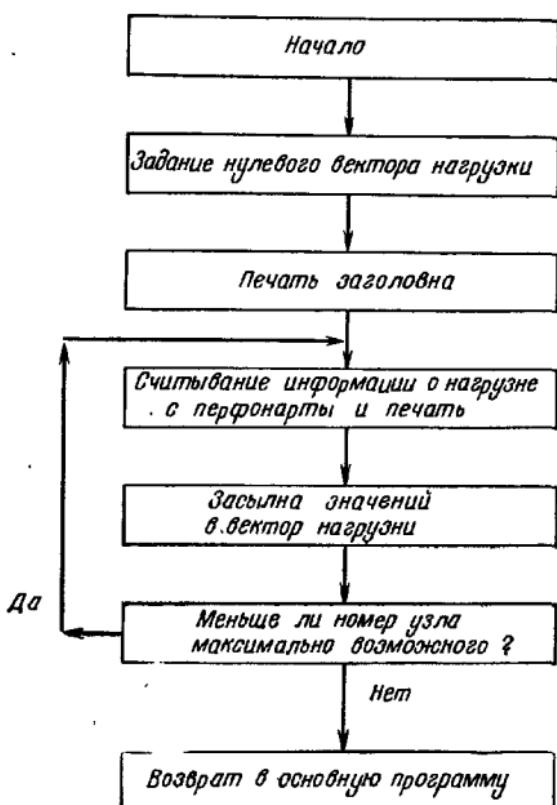
37

\* Массив, расположенный в области COMMON.

# Схема программы GDATA



## Блок-схема подпрограммы LOAD



C			40
C	Считывание информации об элементе		42
C	READ(5,3) (N,(NOP(N,M),M = 1,3),IMAT(N),N = 1,NE)		
C			44
C	Считывание граничных условий		46
C	READ(5,4) (NBC(I),NFX(I),I = 1,NB)		
480	IF(I1.NE.O) GO TO 500		50
C			
C	Печать введенных данных		
C	WRITE(6,102)		51
	WRITE(6,2) (N,(CORD(N,M),M = 1,2),N = 1,NP)		52
	WRITE(6,103)		53
	WRITE(6,3) (N,(NOP(N,M),M = 1,3),IMAT(N),N = 1,NE)		
	WRITE(6,104)		55
	WRITE(6,4) (NBC(I),NFX(I),I = 1,NB)		

500	CONTINUE	58
1	FORMAT(915)	71
2	FORMAT(110,2F10.3)	72
3	FORMAT(615)	
4	FORMAT(215)	
7	FORMAT(12A6)	75
8	FORMAT(110,2F10.2)	
100	FORMAT(1H1,12A6)	77
102	FORMAT(20H0 NODAL POINTS)	
103	FORMAT(20H0 ELEMENTS)	
104	FORMAT(21H0 BOUNDARY CONDITIONS)	80
108	FORMAT(1H0,20H MATERIAL PROPERTIES)	81
	RETURN	82
	END	83

*Программа 20-3*

SUBROUTINE	LOAD	1
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,		
NSZF,LI,NT4		
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),		
NFX(25)		
1,R1(200),SK(200,40)		
2,R(3)		
C		
C	Задание нулевого массива нагрузки	
C		
160	DO 160 J = 1,NSZF	10
160	R1(J) = 0.	11
	WRITE(6,100) TITLE,LI	12
	WRITE(6,109)	13
C		
C	Считывание с перфокарты, печать и засылка в память	
C	информации о нагрузке	
165	CONTINUE	20
	READ(5,9)	21
1	NQ,(R(K),K = 1,NDF)	22
	WRITE(6,9)	23
1	NQ,(R(K),K = 1,NDF)	24
	DO 170 K = 1,NDF	25
	IC = (NQ - 1)*NDF + K	26
170	R1(IC) = R(K) + R1(IC)	27
C		
C	Если номер узла не равен максимальному NP, то возврат и про-	
C	должение считывания	
C		9
	IF(NQ.LT.NP) GO TO 165	28
9	FORMAT(110,3F10.2)	39
20	FORMAT(10X,4I5)	40
100	FORMAT(1H1,12A6,5X, 10HLOAD CASE, I5)	41
109	FORMAT(1H0,6H LOADS)	42
	RETURN	43
	END	44

## 20.4. Формирование матрицы жесткости

Основная задача подпрограммы формирования матрицы жесткости — составление матрицы жесткости элемента для исследуемой задачи. Такая подпрограмма обычно использует всю необходимую информацию из общих массивов памяти и в конце работы либо возвращает матрицу жесткости элемента в вызывающую программу, либо отсылает ее в периферийную память. Структура подпрограммы в большой степени зависит от математического описания жесткости элемента и, в частности, от того, необходимо ли для элемента численное интегрирование или возможно точное интегрирование.

Для простых элементов основными операциями являются:

- а) описание элемента в локальных координатах;
- б) составление матрицы  $B$ , связывающей деформации с перемещениями (или ее эквивалента);
- в) составление матрицы  $D$ , связывающей напряжения и деформации;
- г) получение матричного произведения  $B^T DB$ ;
- д) интегрирование по площади элемента произведения матриц (в случае плоского напряженного состояния эта операция сводится к простому умножению на площадь треугольника);
- е) выполнение при необходимости обратного преобразования полученной матрицы к глобальным координатам.

Выбор системы локальных координат обычно зависит от используемого способа получения матрицы жесткости. В простейших случаях (например, треугольный элемент при плоской деформации) система локальных координат может либо просто совпадать с глобальной, либо может быть получена путем переноса начала координат в один из узлов или в центр тяжести элемента. На этой стадии, если необходимо, могут применяться  $L$ -координаты или криволинейные координаты, описанные в гл. 7 и 8.

Подпрограмма формирования матрицы жесткости может использоваться для построения матрицы напряжений, после умножения которой на соответствующие узловые перемещения получаются напряжения элемента. Эта матрица обычно строится попутно при формировании матрицы жесткости, и получение ее не требует большого машинного времени. При этом возможны два варианта. Первый — составлять матрицу напряжений одновременно с матрицей жесткости и хранить ее до дальнейшего использования в накопителе (т. е. сначала вычислять произведение  $DB$ , а затем  $B^T DB$ ), а второй — отдельно вычислять матрицу  $DB$  непосредственно перед использованием. Выбор того или другого способа зависит от скорости выборки данных из

накопителя и от времени, необходимого для повторного проведения некоторых вычислений.

Для сложных элементов, например изопараметрического типа, указанный порядок вычислений, как правило, неэкономичен. В этом случае можно использовать специальные приемы, описанные, в частности, Айронсом [2].

В зависимости от характера задачи основная программа может изменяться. Некоторые возможности описаны ниже.

а) При использовании элементов высоких порядков с дополнительными узлами на сторонах или групп малых элементов одной и той же конфигурации исходные данные могут задаваться только в некоторых определенных узлах, а для полного описания геометрии элемента могут использоваться специальные подпрограммы. Иногда элемент может содержать узел, не связанный с другими элементами (например, внутреннюю степень свободы). В таких случаях соответствующую степень свободы можно исключить, а в ансамбле использовать сокращенную матрицу жесткости.

б) Координатные оси можно выбирать по направлению перемещений (например, координаты, связанные с узлом, которые описаны в работе [3]), что влечет за собой необходимость преобразования матриц от узла к узлу. Применение таких координат приводит к тому, что матрицы жесткости элементов записываются в разных системах координат. Указанный подход удобен в следующих случаях:

1) при наличии узлов, в которых под некоторым углом к глобальным осям направлена одна (или несколько) удерживающая связь, что сильно затрудняет непосредственный учет граничных условий;

2) при учете симметрии или антисимметрии с целью уменьшения общего числа уравнений; например, при исследовании  $\frac{1}{8}$  вместо  $\frac{1}{4}$  пластины в случае двойной симметрии или при использовании неосесимметричных элементов в осесимметричных задачах [3].

3) при исследовании оболочек двойной кривизны, когда ось  $z$  в каждом узле направляется по внешней нормали к поверхности оболочки, так что для каждого узла требуется всего лишь пять степеней свободы [4].

**Пример программы.** Приведенная программа строит матрицу жесткости размерностью  $6 \times 6$  для элемента, используемого при расчете плоской деформации, и записывает матрицу напряжений на магнитную ленту для дальнейшего использования при вычислении напряжений элемента. Блок-схема программы приведена на стр. 477.

*Обозначения переменных в подпрограмме STIFT2 (N)*

N	Всюду обозначает номер элемента
I, J, K	Параметры, определяющие связи элемента; позже используются как счетчики цикла
AJ, BJ, AK, BK A(3,6) *	Локальные координаты треугольника
ESTIFM (12,12) *	Матрица, связывающая деформации с перемещениями
B (3,9) *	Матрица, связывающая напряжения с деформациями; в дальнейшем используется при построении матрицы жесткости элемента;
	Матрица напряжений для обратного хода

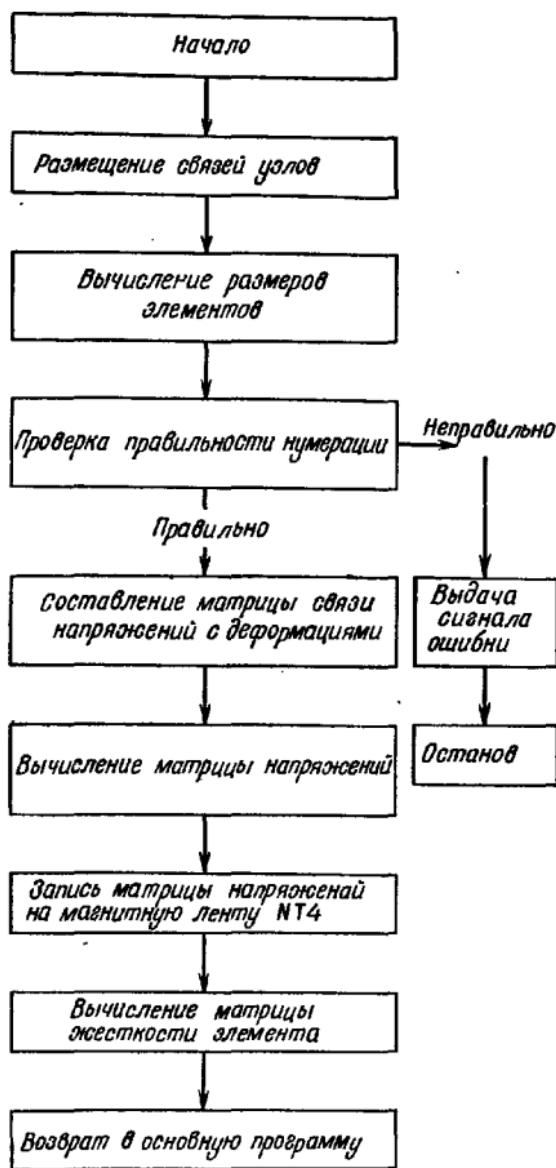
*Программа 20-4*

SUBROUTINE STIFT2(N)	1
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT, NSZF,LI,NT4	
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25), NFIIX(25)	
1,R1(200),SK(200,40)	
2, ESTIFM(12,12),A(3,6),B(3,9)	
C	
C      Определение связей элемента	10
C	
I = NOP(N,1)	11
J = NOP(N,2)	12
K = NOP(N,3)	13
L = IMAT(N)	14
C	
C      Образование системы локальных координат	
C	
AJ = CORD(J,1) - CORD(I,1)	15
AK = CORD(K,1) - CORD(I,1)	16
BJ = CORD(J,2) - CORD(I,2)	17
BK = CORD(K,2) - CORD(I,2)	18
AREA = (AJ*BK - AK*BJ)/2	19
IF(AREA.LE.0.) GO TO 220	20
C	
C      Формирование матрицы связи деформаций с перемещениями	
C	
A(1,1) = BJ - BK	23
A(1,2) = 0.	24
A(1,3) = BK	25
A(1,4) = 0.	26
A(1,5) = - BJ	27
A(1,6) = 0.	28

\* Массивы, расположенные в области COMMON.

A(2,1) = 0.	29
A(2,2) = AK - AJ	30
A(2,3) = 0.	31
A(2,4) = - AK	32
A(2,5) = 0.	33
A(2,6) = AJ	34
A(3,1) = AK - AJ	35
A(3,2) = BJ - BK	36
A(3,3) = - AK	37
A(3,4) = BK	38
A(3,5) = AJ	39
A(3,6) = - BJ	40
<b>C</b>	
<b>C</b>	
<b>C</b> Формирование матрицы связи напряжений с деформациями	
COMM = ORT(L,1)/((1. + ORT(L,2))*(1. - ORT(L,2)*2)*AREA)	
ESTIFM(1,1) = COMM*(1. - ORT(L,2))	
ESTIFM(1,2) = COMM*ORT(L,2)	42
ESTIFM(1,3) = 0.	43
ESTIFM(2,1) = ESTIFM(1,2)	44
ESTIFM(2,2) = ESTIFM(1,1)	
ESTIFM(2,3) = 0.	46
ESTIFM(3,1) = 0.	47
ESTIFM(3,2) = 0.	48
ESTIFM(3,3) = ORT(L,1)/(2*(1. + ORT(L,2)*AREA))	
<b>C</b>	
<b>C</b> В — матрица напряжений для обратного хода; хранится на ма-	
<b>C</b> гнитной ленте	
<b>C</b>	
DO 205 I = 1,3	50
DO 205 J = 1,6	51
B(I,J) = 0.	52
DO 205K = 1,3	53
205 B(I,J) = B(I,J) + ESTIFM(1,K)/2.*A(K,J)	54
WRITE(NT4)N,((B(I,J),J = 1,6),I = 1,3)	
<b>C</b>	
<b>C</b> ESTIFM — матрица жесткости	
<b>C</b>	
DO 210 I = 1,6	55
DO 210 J = 1,6	56
ESTIFM(I,J) = 0.	57
DO 210 K = 1,3	58
210 ESTIFM(I,J) = ESTIFM(I,J) + B(K,I)/2.*A(K,J)	59
RETURN	63
<b>C</b>	
<b>C</b> Выход из программы при ошибке в задании связей	
<b>C</b>	
220 WRITE(6,100)N	64
100 FORMAT(33H1ZERO OR NEGATIVE AREA ELEMENT NO14/21	
HOEXECUTION I TERMINATED)	66
STOP	67
END	68

### Блок-схема подпрограммы STIFT2



### 20.5. Составление ансамбля и решение уравнений

В любой программе, реализующей метод конечных элементов, ключевой является подпрограмма решения систем уравнений. Выбор метода решения зависит от числа уравнений задачи и от типа используемой вычислительной машины.

В простейшем случае уравнения формируются полностью. При таком подходе требуется  $N^2$  ячеек памяти, где  $N$  — количество уравнений, и его можно использовать только для небольших задач и при применении больших ЭВМ. При 100 уравнениях, например, требуется 10 000 ячеек памяти.

Для решения систем линейных уравнений хорошо разработаны два метода: а) прямой метод, позволяющий получить точное (в пределах ошибки округления) решение; б) итерационный метод, использующий сходящийся к точному решению процесс последовательных приближений.

В качестве прямого метода часто используется метод исключения Гаусса, а в качестве итерационного — метод Гаусса — Зейделя.

### 20.5.1. Метод исключения Гаусса

Пусть система  $N$  уравнений представлена в блочном виде

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (20.1)$$

где  $K_{11}$  — матрица размерности  $1 \times 1$ ,

$K_{12}$  — матрица размерности  $1 \times (N - 1)$ ,

$K_{21}$  — матрица размерности  $(N - 1) \times 1$ ,

$K_{22}$  — матрица размерности  $(N - 1) \times (N - 1)$ ,

$\delta$  — вектор неизвестных величин,

$F$  — вектор известных величин.

Метод исключения Гаусса позволяет уменьшить размерность матрицы  $K$  и получить матричное уравнение размерности  $N - 1$  в виде

$$K^* \delta = F^*, \quad (20.2)$$

где

$$K^* = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}, \quad (20.3)$$

$$F^* = F_2 - K_{21} K_{11}^{-1} F_1. \quad (20.4)$$

Разбивая точно так же на блоки матрицу  $K^*$ , этот прием можно повторить. Основной операцией при этом будет вычисление тройного произведения  $K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}$ . Так как матрица  $K_{11}$  имеет размерность  $1 \times 1$ , количество операций пропорционально  $(N - 1)^2$ . Когда размерность матрицы  $K$  будет сведена к  $1 \times 1$ , последнюю неизвестную  $\delta_n$  можно будет найти непосредственно.

Используя обратный ход<sup>1)</sup>, остальные неизвестные можно

<sup>1)</sup> Процесс исключения Гаусса обычно называют прямым ходом, а решение системы с треугольной матрицей — обратным ходом. — Прим. ред.

определить из уравнения типа

$$\delta_1 = K_{11}^{-1} F_1 - K_{11}^{-1} K_{12} \delta_2. \quad (20.5)$$

Описанная процедура представляет собой простейший прямой метод, при использовании которого все элементы матрицы хранятся в оперативной памяти и участвуют в вычислениях. Используя свойство симметрии матриц жесткости, можно сократить число операций почти вдвое, производя все действия только с частью матрицы, расположенной выше диагонали. При этом для решения необходимо выполнить около  $\frac{1}{6}N^3$  операций.

Типичная матрица жесткости ансамбля элементов содержит много нулей, в частности, на некотором расстоянии от диагонали находятся только нулевые члены. Такая матрица называется ленточной, а расстояние от диагонального члена элемента до последнего ненулевого элемента этой же строки называется половиной ширины ленты. Ленточный характер этой матрицы можно продемонстрировать, записывая ее в блочном виде, как показано ниже, где нулевая подматрица заменяет часть подматрицы  $K_{12}$ , содержащую нули:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23}^T & K_{33} \end{bmatrix}. \quad (20.6)$$

В силу симметрии матрицы будут иметь размерности

$$K_{11}(1 \times 1), \quad K_{12}(1 \times m), \quad K_{22}(m \times m), \\ K_{23}(m \times (N-1-m)), \quad K_{33}((N-1-m) \times (N-1-m)).$$

При исключении подматрицы  $K_{11}$  изменяется только  $K_{22}$ , так как нулевая подматрица не изменяет  $K_{23}$  и  $K_{33}$ . Количество операций исключения пропорционально  $m^2$ , а общее количество операций — величине

$$\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n^2 \right]$$

или приблизительно  $\frac{1}{2}Nm_{\max}^2$ , где  $m_{\max}$  — максимальная величина половины ширины ленты.

На практике половина ширины ленты обычно меньше  $\frac{1}{10}$  размерности матрицы, и описанный способ использования свойства ленточности матрицы позволяет уменьшить число арифметических операций почти до 3% от числа выполняемых операций при использовании метода, не учитывающего ленточного характера матрицы.

Другим преимуществом является экономия использования памяти машины, так как матрица может быть помещена в прямоугольный массив размерности  $N \times m_{\max}$ , как показано на фиг. 20.1. Однако при этом общее число уравнений, которое может быть решено, ограничивается размерами прямоугольного массива.

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \\ & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} & \\ & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} & K_{54} \\ & & K_{51}^T & K_{55} & \end{array} \right] \\ a \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{33} & K_{34} & 0 \\ K_{41} & K_{45} & 0 \\ K_{55} & 0 & 0 \end{array} \right] \\ b \end{array}.$$

Фиг. 20.1. Хранение матрицы при решении уравнений методом ленточных матриц.

Ленточная матрица, задаваемая формулой (20.6), особенно удобна при решении больших систем уравнений, так как в процессе исключения операции производятся только над  $K_{22}$  и поэтому только эта матрица нужна в оперативной памяти. Однако истинная эффективность достигается, если составление уравнений для ансамбля и исключение производятся параллельно, т. е. если уравнение исключается сразу после его составления. Это легко осуществить, если в качестве первого узла каждого элемента всегда использовать узел с наименьшим номером, а элементы располагать так, чтобы номера их первых узлов располагались последовательно. При таком способе процесс составления уравнений ансамбля будет автоматически прекращаться, как только номер первого узла станет больше номера рассматриваемого узла. После исключения  $K_{11}$  оставшаяся матрица сдвигается так, что первый элемент измененной матрицы  $K_{22}$  занимает позицию (1,1), а остальные — соответствующие им места. Исключенные уравнения могут временно пересыпаться в промежуточное запоминающее устройство, а затем переписываться в виде блока в накопитель до следующего вызова. Для небольших задач объем промежуточной памяти может оказаться достаточным для того, чтобы вместить в себя все исключенные уравнения, при этом делать пересылку нет никакой необходимости.

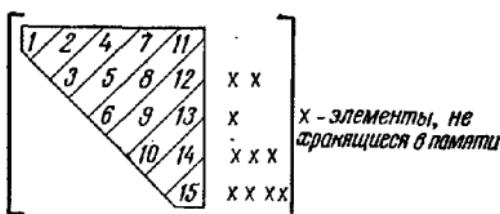
Новая матрица может быть вновь выражена через подматрицы  $K_{11}$ ,  $K_{12}$  и  $K_{22}$ , после чего процесс исключения повторяется.

На каждом этапе исключения требуется  $(m+1) \times (m+2)$  ячеек памяти или при наличии симметрии — половина этого

числа. С помощью этого метода можно решить практически неограниченное число уравнений при условии коиечности максимальной ширины ленты. В большинстве случаев при решении задачи методом конечных элементов точность не является проблемой. При необходимости можно решать уравнения с двойной точностью, однако при этом увеличиваются используемый объем памяти и время решения. В некоторых случаях точность можно повысить, если подставить полученные значения в первоначальную систему уравнений и вычислить невязки, а затем, используя эти невязки в качестве новых правых частей, снова решить систему. Сумма этих двух решений даст уточненное решение. Однако чаще эти невязки используются для оценки ошибок округления.

#### 20.5.2. Экономное распределение памяти для решения ленточных систем

Чтобы уменьшить используемый объем памяти вычислительной машины, в программе решения больших систем FESS (в настоящей главе не приводится) для хранения в памяти верхней



Фиг. 20.2. Порядок размещения в памяти уравнений в программе FESS.

треугольной части матрицы жесткости, необходимой при исключении самого верхнего уравнения, используется одномерный массив. Пример расположения в памяти элементов матрицы показан на фиг. 20.2. В этом примере элементы матрицы располагаются по столбцам, так как это удобнее, чем построчное расположение. В программе FESS матрицы, необходимые для обратного хода [уравнение (20.5)], хранятся в верхней части одномерного массива. Если матрица жесткости и эти матрицы перекрывают друг друга, содержимое остатка переписывается на ленту и процесс повторяется. Такой способ достаточно эффективен, так как позволяет использовать длинные записи на ленту. В некоторых случаях удается решить уравнения без использования внешней памяти.

### 20.5.3. Итерационный метод Гаусса — Зейделя

В общем случае  $n$ -е уравнение системы  $N$  уравнений может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i + k_{nn} \delta_n + \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i = F_n. \quad (20.7)$$

Из этого уравнения можно найти

$$\delta_n = k_{nn}^{-1} \left\{ F_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i - \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i \right\}. \quad (20.8)$$

Если процесс итераций таков, что в правой части используются последние приближения  $\delta_i$ , то для  $m$ -й итерации имеем

$$\delta_n^m = k_{nn}^{-1} \left\{ F_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ni} \delta_i^m - \sum_{i=n+1}^N k_{ni} \delta_i^{m-1} \right\}. \quad (20.9)$$

В этом заключается итерационный процесс Гаусса — Зейделя.

Часто для уточнения решения используется прием, состоящий в умножении разности между двумя итерациями для  $\delta$  на некоторый коэффициент и представлении уточненной величины  $\delta$  в виде

$$\delta_n^m = \delta_n^{m-1} + \beta (\delta_n^{m*} - \delta_n^{m-1}), \quad (20.10)$$

где  $\delta_n^{m*}$  — величина, вычисленная в соответствии с (20.9), а  $\beta$  — коэффициент верхней релаксации, значение которого обычно лежит между 1 и 2. Установлено, что во многих практических случаях самым подходящим является значение, близкое к 1,8.

Итерационный метод Гаусса — Зейделя легко программируется. Матрица жесткости хранится в компактной форме без нулевых членов вместе с матрицей-указателем номеров столбцов, в которых находятся ее элементы. Каждое уравнение итерируется в соответствии с (20.9), и найденное значение уточняется в соответствии с (20.10). Процесс повторяется столько раз, сколько необходимо для получения приемлемого решения, причем сходимость обычно оценивается путем вычисления разности между двумя последовательными приближениями.

Итерационные методы удобны для решения нелинейных задач, так как при их использовании обычно требуется решение ряда сходных задач, поэтому для вектора решения всегда есть удачное начальное приближение. Кроме того, если на промежуточных этапах ограничиться невысокой точностью решения, то число арифметических операций уменьшается.

Недостатком использования итерационных методов является необходимость повторения основного цикла для всех уравнений.

Поэтому при использовании для хранения уравнений внешней памяти процесс решения занимает много времени. Однако компактное расположение матрицы жесткости дает возможность решать большое число уравнений с использованием только оперативной памяти, например 1000 дополнительных уравнений на 32К слов памяти. Главный же недостаток итерационных методов состоит в том, что при решении, как правило, может быть рассмотрен только один вектор нагрузки, так как перемещения занимают почти всю память.

В приложении 20А приведены две подпрограммы: FORMK (формирование матрицы жесткости и соответствующей матрицы-указателя) и SOLVE (решение системы уравнений итерационным методом Гаусса — Зейделя). Это упрощенные подпрограммы, в которых заданы число циклов и пределы сходимости. Кроме того, в них используется взаимно однозначное соответствие между матрицей жесткости и матрицей-указателем. Эти подпрограммы совместимы с остальными подпрограммами, приведенными в этой главе. Заметим, что подпрограмма FORMK вычисляет члены, лежащие как выше, так и ниже диагонали компактной матрицы жесткости, и этим она отличается от другой подпрограммы FORMK (программа 20-5), которая используется при применении прямого метода решения.

#### 20.5.4. Некоторые другие прямые методы

Видоизменением метода исключения, используемого в случае ленточных матриц, является так называемый *метод редкозаполненных матриц*, часто применимый в экономических расчетах. В соответствии с этим методом подматрица записывается в компактной форме вместе с матрицей-указателем, назначение которой состоит в указании номера строки и столбца полной матрицы. При решении задач методом конечных элементов с одинаковым числом степеней свободы в каждом узле матрица-указатель может быть записана в компактной форме для того, чтобы соответствовать узловым подматрицам.

В методе редкозаполненных матриц исключение производится точно так же, как описано выше, но при этом в качестве индекса используется матрица-указатель. Преимущество, получаемое за счет избавления от некоторых операций, необходимо сравнивать с дополнительными затратами времени на отыскание элемента в полной матрице с помощью матрицы-указателя. Требуемый объем памяти зависит от числа ненулевых подматриц на каждом шаге процесса исключения и не зависит от ширины ленты. Следует отметить, что при исключении на местах, где раньше стояли нули, появляются ненулевые подматрицы. Для максимального эффективного использования памяти и времени

уравнения следует упорядочить так, чтобы в матрице в каждый момент содержалось минимальное число элементов. Определение оптимального порядка является сложной задачей динамического программирования, и для ее решения могут использоваться другие приближенные методы [5]. С помощью аналогичного упорядочения уравнений можно минимизировать число операций в ленточных методах. Однако при этом ширина ленты может сильно увеличиться, что сведет на нет все преимущества метода.

В приложении 20Б приведены подпрограмма FORMK составления матрицы жесткости (верхней треугольной части в форме прямоугольника) вместе с соответствующей матрицей-указателем и подпрограмма SOLVE решения систем уравнений методом редкозаполненных матриц.

Более существенными отличиями обладает *фронтальный метод решения*. Как и в методе редкозаполненных матриц, матрица жесткости записывается в компактной форме вместе с матрицей-указателем. Однако здесь исключение производится по элементам независимо от нумерации узлов. Своим названием метод обязан тому, что в процессе решения создается некоторый фронт, проходящий через систему узлов. Метод применяется главным образом при наличии дополнительных узлов на сторонах элементов, так как он может привести к значительной экономии памяти по сравнению с ленточным методом:

Преимущество использующей метод фронтального исключения системы FINESSE особенно заметно при использовании элементов высоких порядков и в том случае, когда основное внимание уделяется характеристикам элементов. Поскольку, например, предпочтительна поэлементная выдача, число расчетных параметров нагружения, которое может быть помещено в оперативной памяти вычислительной машины, значительно увеличивается. В каждый момент времени в процессе исключения в оперативной памяти машины находятся только сведения о векторе нагрузки.

*Фронтальный метод решения* наиболее эффективен при решении больших задач с применением трехмерных элементов.

#### 20.5.5. Некоторые специальные приемы

Для улучшения более крупных программ могут использоваться некоторые специальные приемы:

а) Выделение подконструкций. Вместо того чтобы решать полную систему уравнений, иногда бывает удобно строить новую матрицу меньшей размерности. Этот прием позволяет построить матрицу жесткости для совокупности элементов, в которой все точки, кроме внешних, исключены.

б) Включение дополнительной жесткости. В дополнение к выделению подконструкций используется введение в полную матрицу жесткости специальных дополнительных жесткостей. Это позволяет непосредственно учитывать, например, граничные условия, описывающие упругое опирание.

Эти два приема особенно полезны при решении нелинейных задач, в которых большая часть конструкции остается линейно-упругой. В таких случаях линейно-упругая часть конструкции заменяется некоторой подконструкцией в виде линии или поверхности, примыкающей к исследуемой области нелинейности, а затем решается нелинейная задача при упругом граничном условии. Получающаяся нелинейная задача значительно меньше по объему.

### 20.5.6. Учет граничных условий

При применении метода конечных элементов граничные условия в напряжениях автоматически учитываются вектором нагрузки; если граница свободная, элементы вектора нагрузки, соответствующие расположенным на границе узлам, равны нулю.

При заданных перемещениях (например, осадка фундамента и др.) матрица жесткости и вектор нагрузки должны быть модифицированы. В общем случае для упрощения индексации размерность матрицы не должна изменяться, т. е. никакие строки или столбцы не должны исключаться. Существуют два способа, с помощью которых, не нарушая указанных требований, можно удовлетворить граничным условиям, не учтенным при формировании элемента. Положим, что имеется некоторая система  $N$  уравнений

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & \dots & k_{nN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \quad (20.11)$$

и, скажем,  $u_1 = \alpha$ .

В соответствии с первым способом столбец нагрузки видоизменяется так, что  $\bar{F}_i = F_i - k_{1i}\alpha$  ( $i = 2, N$ ) и  $\bar{F}_1 = \alpha$ . Тогда соответствующая строка и столбец становятся нулевыми, а диагональный член — единичным. В частном, но часто встречающемся случае, когда  $\alpha = 0$  (т. е. опора неподвижна), необходимо изме-

нить матрицу описанным выше способом, оставляя матрицу нагрузки неизменной, кроме члена  $F_1 = 0$ .

Второй способ состоит в умножении соответствующего диагонального элемента матрицы на некоторое большое число, скажем  $10^8$ , перед модификацией соответствующего коэффициента нагрузки. В рассматриваемом случае мы бы получили

$$\bar{k}_{11} = k_{11} \cdot 10^8, \quad \bar{F}_1 = k_{11} \cdot 10^8 \cdot \alpha,$$

$$\bar{k}_{ij} = k_{ij} \quad (\text{за исключением случая, когда } i = 1, j = 1),$$

$$\bar{F}_i = F_i \quad (i \neq 1).$$

В полученном решении  $u_1$  будет почти равно  $\alpha$ . Этот способ пригоден для любых методов решения.

Во многих случаях возникает необходимость определять силы реакции в граничных точках, например реакции мостовых опор или контрфорсов плотин.

Если требуется определить реакции, то при обратном ходе необходимо преобразовать соответствующие уравнения так, чтобы вместо определения в точке опоры неизвестного перемещения по известной нагрузке отыскивалась неизвестная нагрузка по известному перемещению. В соответствии с первым из уравнений (20.11) получаем следующее выражение для силы реакции:

$$R_1 = F_1 - k_{11}\alpha - \sum_{j=2}^N k_{1j}u_j.$$

#### 20.5.7. Пример подпрограммы

Ниже приведены блок-схемы и тексты двух подпрограмм. Подпрограмма FORMK используется для построения ленточной прямоугольной матрицы жесткости и учета граничных условий первым способом, описанным в предыдущем разделе (при  $\alpha = 0$ ). Подпрограмма SOLVE применяется для решения систем алгебраических уравнений методом ленточных матриц<sup>1)</sup>. Блок-схемы приведены на стр. 488 и 489.

#### Обозначения переменных в подпрограмме FORMK

NBAND

Максимально возможная в программе ширина ленты

NROWB, NCOLB, NCOL

Переменные, определяющие положение элемента матрицы жесткости

<sup>1)</sup> В приложении 20В приведены другие подпрограммы, нес совместные с системой FFSS.

NR, NX	Переменные, используемые для записи граничного условия
ESTIFM * (12,12)	Матрица жесткости элемента

*Обозначения переменных в подпрограмме SOLVE*

NBAND	Максимально возможная в программе ширина ленты
N	Счетчик числа уравнений для исключения и обратного хода
C	Рабочая переменная для процесса исключения
R1 * (200)	Вектор правых частей; в конце работы программы на его место помещается решение

*Программа 20-5*

SUBROUTINE FORMK

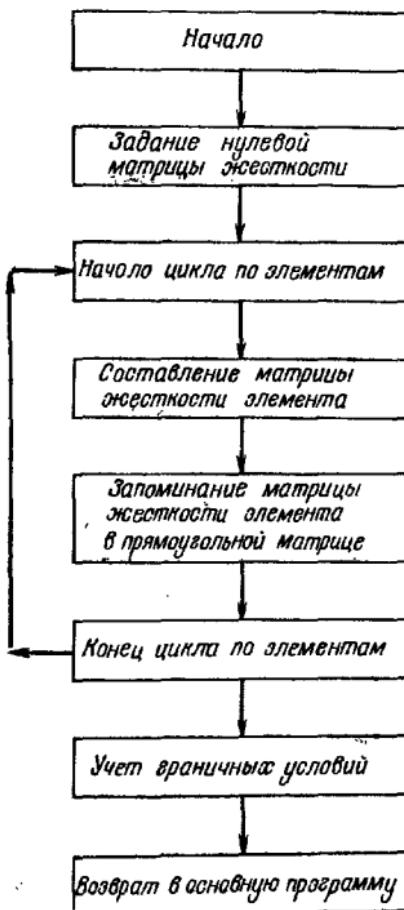
```

C   Формирование верхнего треугольника матрицы жесткости
C
C   COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
C   NSZFLI,NT4
C   COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
C   NFIX(25)
C   1,RI(200),SK(200,40)
C   2,ESTIFM(12,12)
C   Ввод максимальной ширины ленты и информации о количестве
C   решаемых уравнений
C   NBAND = 40
C   Задание нулевой матрицы жесткости
C
C   DO 300 N = 1,NSZF
C   DO 300 M = 1,NBAND
C   300 SK(N,M) = 0.
C
C   Цикл по элементам
C
C   DO 400 N = 1,NE
C   CALL STIFT2(N)
C
C   Возврат к ESTIFM, как к матрице жесткости

```

\* Массив, расположенный в области COMMON

### Блок-схема подпрограммы FORMK



C Засылка ESTIFM в массив SK

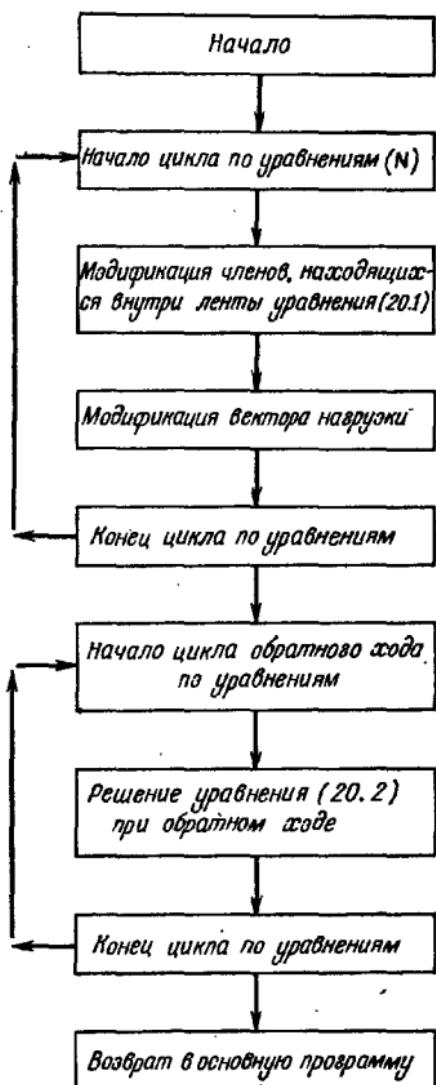
C Обход по строкам

DO 350 JJ = 1,NCN  
NROWB = (NOP(N,JJ) - 1)\*NDF  
DO 350 J = 1,NDF  
NROWB = NROWB + 1  
I = (JJ - 1)\*NDF + J

C Затем по столбцам

DO 330 KK = I,NCN  
NCOLB = (NOP(N,KK) - 1)\*NDF  
DO 320 K = I,NDF  
L = (KK - I)\*NDF + K  
NCOL = NCOLB + K + I - NROWB

## Блок-схема подпрограммы SOLVE

С  
С  
С

Если элемент ниже ленты, то пропуск засылки

IF(NCOL) 320,320,310  
 310 SK(NROWB,NCOL) = SK(NROWB,NCOL) + ESTIFM(I,L)  
 320 CONTINUE  
 330 CONTINUE  
 350 CONTINUE  
 400 CONTINUE

```

C Учет граничных условий
C
C DO 500 N = 1,NB
NX = 10*(NDF - 1)
I = NBC(N)
NROWB = (I - 1)*NDF
C Проверка каждой степени свободы
C
C DO 490 M = 1,NDF
NROWB = NROWB + 1
ICON = NFLX(N)/NX
IF(ICON)450,450,420
420 SK(NROWB,1) = 1.
DO 430 J = 2,NBAND
SK(NROWB,J) = 0.
NR = NROWB + 1 - J
IF(NR)430,430,425
425 SK(NR,J) = 0.
430 CONTINUE
NFLX(N) = NFLX(N) - NX*ICON
450 NX = NX/10
490 CONTINUE
500 CONTINUE
RETURN
END

```

### *Программа 20-6*

```

SUBROUTINE SOLVE
C Спецификация
C
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
NSZF,L1,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
NFLX(25),
1,R1(200),SK(200,40)
IBAND = 40
C Сокращение матрицы
C
DO 300 N = 1,NSZF
I = N
DO 290 L = 2,NBAND
I = I + 1
IF(SK(N,L)) 240,290,240
240 C = SK(N,L)/SK(N,1)
J = 0
DO 270 K = L,NBAND
J = J + 1
IF(SK(N,K)) 260,270,260
260 SK(I,J) = SK(I,J) - C*SK(N,K)
270 CONTINUE

```

```

280 SK(N,L) = C
C      Сокращение вектора нагрузки для каждого уравнения
C
C
R1(I) = R1(I) - C*R1(N)
290 CONTINUE
300 RI(N) = R1(N)/SK(N,1)

C      Обратный ход
C
N = NSZF
350 N = N - 1
IF(N) 500,500,360
360 L = N
DO 400 K = 2,NBAND
L = L + 1
IF(SK(N,K)) 370,400,370
370 RI(N) = RI(N) - SK(N,K)*RI(L)
400 CONTINUE
GO TO 350

C
500 RETURN
END

```

## 20.6. Вычисление внутренних усилий и вывод результатов

Последним этапом решения обычных линейных задач методом конечных элементов является вычисление внутренних усилий для элемента.

Для каждого элемента необходимо выполнить следующие две операции:

а) сформировать вектор решения в координатах, связанных с рассматриваемым элементом;

б) построить матрицу напряжений для перехода от вектора решения к внутренним усилиям. Эта матрица уже упоминалась в разд. 20.4, где рассматривалась подпрограмма вычисления матрицы жесткости. Она формируется либо путем считывания с внешней памяти, либо путем дополнительного вызова подпрограммы вычисления матрицы жесткости.

Кроме внутренних усилий, часто бывает удобно вычислить некоторые другие силы. Например, в плоских задачах вычисляются значения максимального и минимального напряжений и их направления. В конце работы программы на печать выводятся необходимые сведения о напряжениях.

При решении более сложных нелинейных задач подпрограмма вычисления напряжений обычно становится отправной

точкой для циклического процесса вычисления уточненной матрицы жесткости (зависящей от уровня напряжений) или уточненного вектора нагрузки. Вектор нагрузки обычно строится с помощью метода начальных напряжений или деформаций (см. гл. 18).

**Блок-схема и пример подпрограммы.** Подпрограмма STRESS выводит на печать перемещения, считает и печатает напряжения в элементах в задачах о плоской деформации.

#### *Обозначения переменных в подпрограмме STRESS*

DIS (2, 100)*	(см. примечание)	Вектор перемещений
FORCE (200, 3)*	(см. примечание)	Вектор сил элемента
B (3,6)*		Матрица обратного хода
R (8)*		Вектор перемещений элемента
SMAX		Максимальное напряжение в $N$ -м элементе
SMIN		Минимальное напряжение в $N$ -м элементе
ANG		Отклонение от вертикали в направлении часовой стрелки линии действия максимального напряжения $N$ -го элемента

**Примечание.** Предложение EQUIVALENCE позволяет использовать массив DIS (2, 100) для вектора решения R1 (200), а массив внутренних сил FORCE (200, 3) — для хранения массива SK.

#### *Программа 20-7*

```

SUBROUTINE STRESS
DIMENSION DIS(2,100),FORCE(200,3)
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
NFIIX(25)
1,R1(200),SK(200,40)
2,B(3,6), R(8)
EQUIVALENCE (DIS(1),R1(1)),(SK(1),FORCE(1))
REWIND NT4

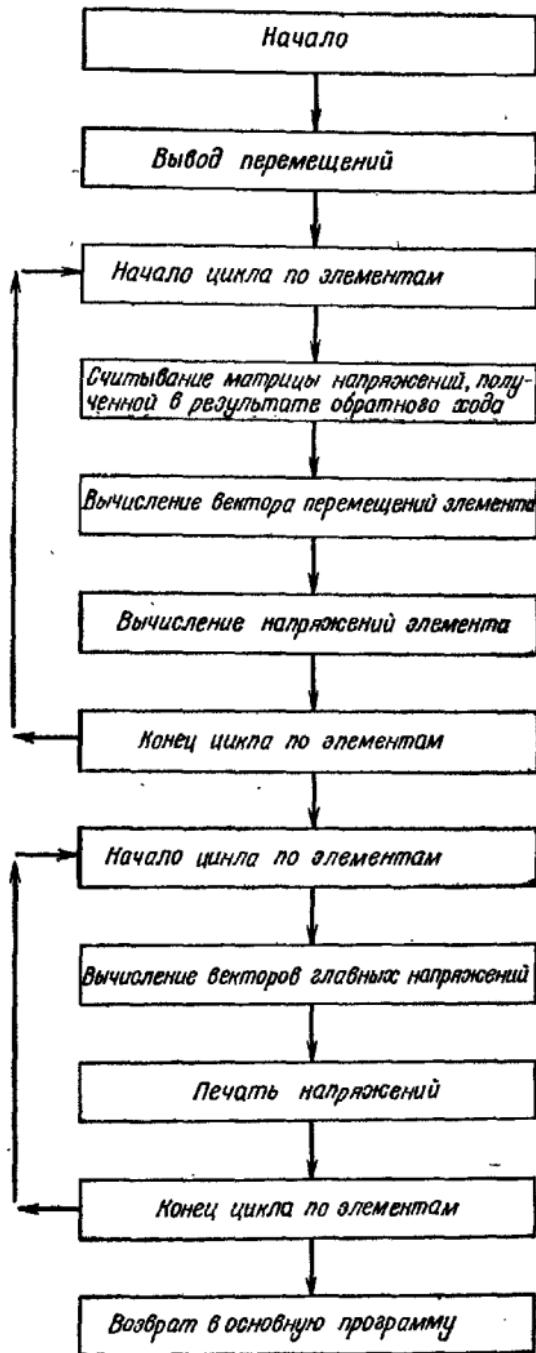
```

1

9

\* Массив, расположенный в области COMMON.

# Схема подпрограммы STRESS



C Печать перемещений

C WRITE(6,100)  
 WRITE(6,110) (M,(DIS(J,M),J = 1,NDF),M = 1,NP)  
 100 FORMAT(//,.15X,13HDISPLACEMENTS)  
 110 FORMAT(I10,2F15.4)

C Вычисление усилий в элементе

DO 200 NC = 1,NE	10
READ(NT4) N,(B(I,J),J = 1,6),I = 1,3	
DO 260 I = 1,NCN	12
M = NOP(N,I)	
IF(M.EQ.0) GO TO 260	
K = (I - 1)*NDF	16
DO 240 J = 1,NDF	16
IJ = J + K	17
R(IJ) = DIS(J,M)	18
240 CONTINUE	19
IA = K + NDF	20
DO 300 I = 1,3	21
FORCE(N,I) = 0.	22
DOO 300 J = 1,IA	23
FORCE(N,I) = FORCE(N,I) + B(I,J)*R(J)	24
200 CONTINUE	26
WRITE(6,101)	28

C Вычисление главных напряжений и их направлений

C

C

DOO 600 N = 1,NE	29
250 C = (FORCE(N,1) + FORCE(N,2))/2,	38
A = SQRT((FORCE(N,2) - FORCE(N,1))/2)**2 + FORCE(N,3)**2)	39
SMAX = C + A	40
SMIN = C - A	41
IF(FORCE(N,2).EQ.SMIN)GO TO 700	42
ANG = 57.29578*ATAN(FORCE(N,3)/FORCE(N,2) - SMIN))	43
GO TO 210	44
700 ANG = 90.	45
210 CONTINUE	46

C Печать всех компонент напряжений

C

C

400 WRITE(6,111)	47
1N,(FORCE(N,I),I = 1,3),SMAX,SMIN,ANG	
600 CONTINUE	51
101 FORMAT(I07H0 ELEMENT X-STRESS Y-STRESS X	
1Y-STRESS MAX-STRESS MIN-STRESS ANGLE)	
111 FORMAT(I10,5F17.4,F12,3)	
RETURN	54
END	55

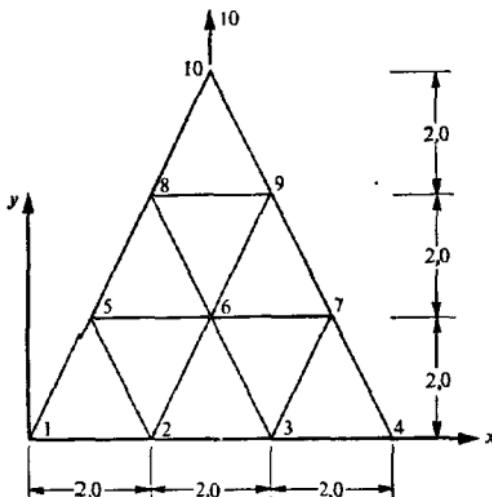
## 20.7. Пример задачи

На фиг. 20.3 показана простая задача о плоской деформации треугольной области при нагружении вертикальной силой. Для расчета область разбита на 9 элементов с 10 узлами. Треугольник закреплен в точках 1 и 4.

В этой задаче используются следующие подпрограммы:

- а) программа MAIN (пр. 20-1),
- б) подпрограмма GDATA (пр. 20-2),
- в) подпрограмма LOAD (пр. 20-3),
- г) подпрограмма STIFT2 (пр. 20-4),
- д) подпрограмма FORMK (пр. 20-5),
- е) подпрограмма SOLVE (пр. 20-6),
- ж) подпрограмма STRESS (пр. 29-7).

Ниже приведены инструкции для ввода исходных данных, а также образец данных и печати результатов для показанной на фиг. 20.3 задачи.



Фиг. 20.3. Плоская деформация треугольной области.

$E=0,96, v=0,2$ . Эквивалент для плоского напряженного состояния:  $E=1,0, v=0,25$ .

### Инструкции для ввода исходных данных

1. Перфокарта, содержащая информацию о задаче (15)

Кол. 1-5\* Номер задачи

(NPROB)

2. Перфокарта, содержащая заголовок (12A6)

Кол. 1-72 Заголовок, печатаемый при выводе

(TITLE)

## 3. Перфокарты настройки на задачу (7I5)

Кол.	1—5 * Число узловых точек	(NP)
	6—10 * Количество элементов	(NE)
	11—15 * Количество граничных точек	(NB)
	16—20 * Количество случаев нагружения	(NLD)
	21—25 * Количество степеней свободы = 2	(NDF)
	26—30 * Количество различных материалов	(NMAT)
	31—35 * { 0 печать исходных данных 1 пропуск печати исходных данных	(II)

## 4. Перфокарты, содержащие информацию о свойствах материалов (110,2F10.2) (по одной на каждый материал)

Кол.	1—10 * Номер материала	(N)
	11—20 Модуль Юнга	(ORT(N,1))
	21—30 Коэффициент Пуассона	(ORT(N,2))

## 5. Перфокарты, содержащие информацию о координатах (по одной на каждую узловую точку) (110,2F10.0)

Кол.	1—10 * Номер узла	(N)
	11—20 Координата X	(CORD(N,1))
	21—30 Координата Y	(CORD(N,2))

## 6. Перфокарты, содержащие информацию об элементах (6I5) (по одной на каждый элемент)

Кол.	1—5 * Номер элемента	(N)
	6—10 * $t$ }	(NOP(N,1))
	11—15 * $j$ } связи между элементами	(NOP(N,2))
	16—20 * $m$ }	(NOP(N,3))
	21—25 Не используются	(NOP(N,4))
	26—30 * Номер материала	(IMAT(N))

## 7. Перфокарты, содержащие информацию о граничных условиях (2I5) (по одной на каждое граничное условие)

Кол.	1—5 * Номер граничного узла	(NBC(I))
	6—10 * 01 — закрепление в направлении Y	
	10 — закрепление в направлении X	
	11 — закрепление в обоих направлениях	(NFIX(I))

## 8. Перфокарты, содержащие информацию о нагрузке (110,2F10.2) (по одной на каждую точку)

Кол.	1—10 * Номер узла	NQ
	11—20 Нагрузка по оси X	R(1)
	21—30 Нагрузка по оси Y	R(2)

*Примечание.* Перфокарты, содержащие информацию о нагрузке, заканчиваются информацией о нагрузке в последнем узле независимо от того, задана в нем нагрузка или нет.

\* Означает, что десятичная точка в числе не набивается, остальные числа обязательно должны содержать десятичные точки.

## Образец печати исходных данных и результатов

## Колонки

1            2            3            4            5            6            7            8

12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

1

## Расчет треугольника

10    9    2    1    2    1

1    0.96    0.2

1

2 2.

3 4.

4 6.

5 1.        2.

6 3.        2.

7 5.        2.

8 2.        4.

9 4.        4.

10 3.       6.

1    1    2    5        1

2    2    3    6        1

3    3    4    7        1

4    3    7    6        1

5    2    6    5        1

6    5    6    8        1

7    6    7    9        1

8    6.    9    8        1

9    8    9    10      1

1    11

4    11

10        10

## Расчет треугольника

10    9    2    1    2    1

## Свойства материала

1        96        20

## Узловые точки

1        .000       .000

2        2.000      .000

3        4.000      .000

4        6.000      .000

5        1.000      2.000

6        3.000      2.000

7        5.000      2.000

8        2.000      4.000

9        .000      4.000

*Элементы*

1	1	2	5	0	1
2	2	3	6	0	1
3	3	4	7	0	1
4	3	7	6	0	1
5	2	6	5	0	1
6	5	6	8	0	1
7	6	7	9	0	1
8	6	9	8	0	1
9	8	9	10	0	1

*Границные условия*

1	11
4	11

## Расчет треугольника

## Случай нагружения 1

## Нагрузки

10 .00 10.00

## Перемещения

1	.0000	.0000
2	1.0941	17.7565
3	-1.0941	17.7565
4	.0000	.0000
5	-1.6412	15.6785
6	.0000	20.9599
7	1.6412	15.6785
8	.8206	25.3126
9	-.8206	25.3126
10	.0000	44.4729

Эле- мен- ты	Напряже- ние в на- правле- нии <i>X</i>	Напряже- ние в на- правле- нии <i>Y</i>	Касатель- ное на- пряжен- ие	Макси- мальное напряже- ние	Мини- мальное напряже- ние	Угол
1	1.4902	3.7727	3.1136	5.9477	-6.847	34.935
2	-.7399	1.4167	-.0000	1.4167	-.7399	-.000
3	1.4902	3.7727	-3.1136	5.9477	-.6847	-34.935
4	.9503	.5189	-.6733	1.4417	.0276	-53.881
5	.9503	.5189	.6733	1.4417	.0277	53.881
6	1.8077	3.9487	1.3845	4.6283	1.1282	26.145
7	1.8077	3.9487	-1.3845	4.6283	1.1281	-26.145
8	-.2949	2.1027	.0000	2.1027	-.2949	.000
9	1.6794	10.0000	.0000	10.0000	1.6794	.000

## 20.8. Графический вывод результатов

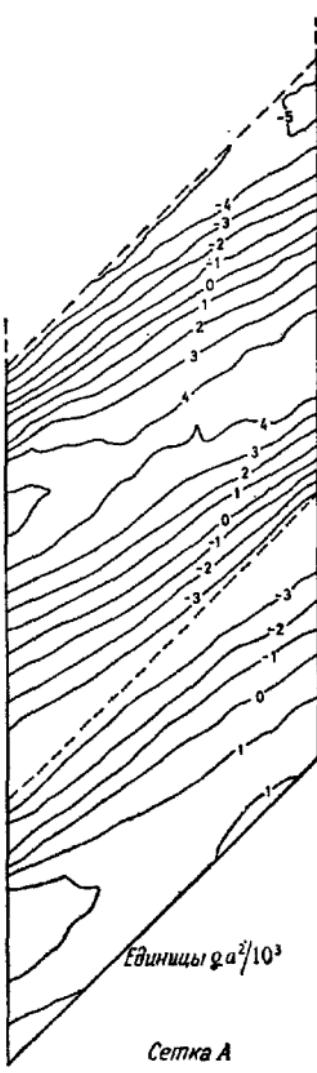
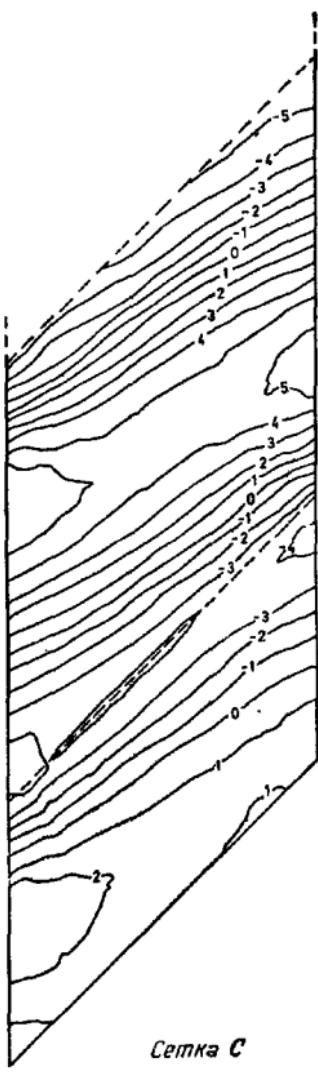
Одна из основных проблем, возникающих при практическом использовании метода конечных элементов, связана с огромной информацией, получаемой в результате счета, и с большими затратами времени на обработку выводимых на печать результатов. В значительной степени эту задачу облегчает использование при воспроизведении результатов автоматического самописца.

Одним из самых удобных способов представления результатов является построение изостат. Они могут быть построены либо во всей области, либо только в некоторой ее части, представляющей особый интерес. В простейшем случае напряжения в элементе усредняются по узловым значениям. При этом изостаты вычерчиваются в виде набора прямолинейных в каждом элементе отрезков, согласующихся с этими узловыми значениями. На фиг. 20.4 приведен пример [7]. Недостаточная гладкость кривых вызывает сомнение в правильности решения. Программы, позволяющие вычерчивать гладкие кривые на основе данных, полученных в отдельных точках, можно приобрести у предприятий, производящих эти самописцы.

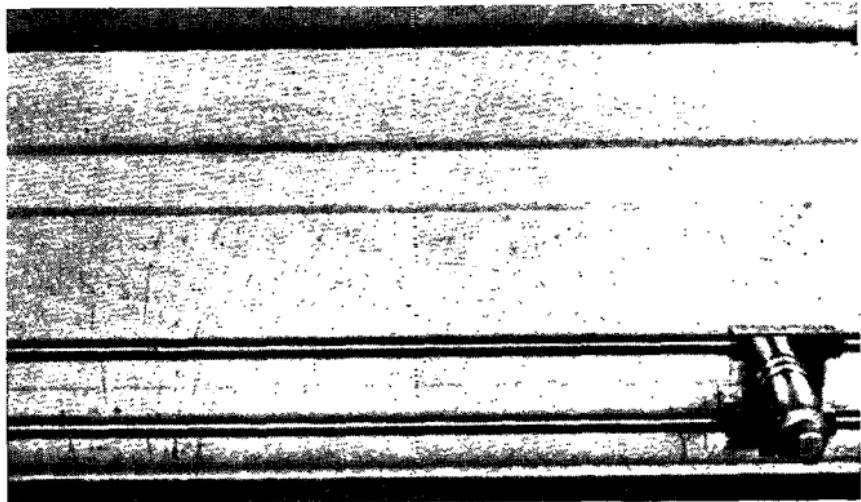
Второй способ использования самописца состоит в вычерчивании для каждого элемента в заданном масштабе векторов главных напряжений в соответствующих направлениях. Такой способ представления напряжений показан на фиг. 20.5.

Большинство применяемых в настоящее время элементов дают скачкообразно меняющиеся от элемента к элементу напряжения, хотя напряжения в двух соседних элементах колеблются относительно истинного. Для сглаживания разрывов напряжений при их описании (и в некоторых случаях для улучшения точности) обычно используются два способа усреднения. Первый заключается в усреднении напряжений по двум смежным элементам. Например, из двух треугольников составляется четырехугольник и в качестве напряжения в некоторой точке четырехугольника принимается среднее по этим двум треугольникам значение. При втором способе усреднения суммируются напряжения всех элементов, соединяющихся в рассматриваемом узле, и сумма делится на число этих элементов. Этот способ обычно дает совершенно гладкую кривую напряжений, достаточно точно описывающую их распределение во всей области, за исключением граничных точек или областей с высоким градиентом напряжений.

**Блок-схема. Пример программы.** Приведенная ниже программа определения вектора напряжений представляет собой неза-



Фиг. 20.4. Линии уровней моментов косого моста (из *Proc. Inst. Civ. Eng.*, Aug. 1967).



Фиг. 20.5. Автоматическое вычерчивание главных напряжений подпрограммой вычерчивания векторов.

висимую подпрограмму считывания с перфокарт, содержащих напряжения, и вывода на печать в соответствующем масштабе векторов для каждого элемента.

Все такие подпрограммы являются частью набора Calcomp Fortran. Типичная блок-схема приведена на стр. 502.

### *Программа 20-8*

```

C Подпрограмма вычерчивания вектора для Calcomp
C DIMENSION IBUF(1000)

C Вывод номера барабана и определение места во внешней
C памяти
C

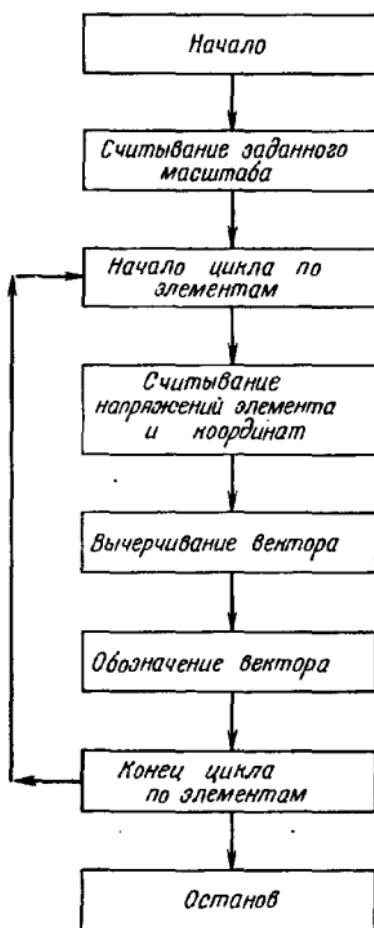
LDEV = 1
CALL PLOTS (IBUF,1000,LDEV)

C Считывание масштаба
C

READ(5,10) XSHIFT,XSCALE,YSHIFT,YSCALE
10 FORMAT(4F10.2)
      WRITE(6,11) XSHIFT,XSCALE,YSHIFT,YSCALE

```

## Блок-схема программы PROGRAM STVECT



```

11 FORMAT(13H1 X SHIFT = ,F10.2/
1      13H X SCALE = ,F10.2/
2      13H Y SHIFT = ,F10.2/
3      13H Y SCALE = ,F10.2)
     READ(5,15) PSCALE
15 FORMAT(F10.2)
     WRITE(6,16) PSCALE
16 FORMAT(13H0PLOT SCALE = ,F10.2,9H UNITS/IN)
  
```

C  
C      Считывание с перфокарт координат и напряжений  
C  
C

```

100 READ(5,20) N,X,Y,SMAX,SMIN,ANG
     WRITE(6,20) N,X,Y,SMAX,SMIN,ANG
20 FORMAT(I10,2F10.2,3F10.3)
  
```

C      Если перфокарта пустая, закончить чертеж  
C  
IF(N)210,210,110  
C      Изменение масштаба  
110 X = (X - XSHIFT)\*XSCALE  
Y = (Y - YSHIFT)\*YSCALE  
SMAX = SMAX/PSCALE  
SMIN = SMIN/PSCALE  
ANG = ANG/57.3  
  
C      Вычисление координат концов векторов  
C  
R = X + SMAX/2.\*SIN(ANG)  
S = Y + SMAX/2.\*COS(ANG)  
P = 2.\*X - R  
Q = 2.\*Y - S  
  
C      Вычерчивание отрезков  
C  
CALL PLOT(R,S,3)  
CALL PLOT(P,Q,2)  
R = X - SMIN\*COS(ANG)  
S = Y + SMIN\*SIN(ANG)  
P = 2.\*X - R  
Q = 2.\*Y - S  
CALL PLOT(R,S,3)  
CALL PLOT(P,Q,2)  
  
C      Печать номера элемента  
C  
A = X + 0.2  
B = Y + 0.1  
FPN = N  
CALL NUMBER (A,B,,14,FPN,0.,0)  
  
C      Переход к следующему элементу  
C  
GO TO 100  
  
C      Конец чертежа  
C  
210 CONTINUE  
CALL PLOT (0.,0.,999)  
STOP  
END

## 20.9. Решение задачи о собственных значениях итерационным методом

При исследовании колебаний и устойчивости, а также при расчете методом конечных элементов волноводов и т. д. можно получить систему матричных уравнений вида  $HX = \lambda X$ , где  $H$  — квадратная матрица известных коэффициентов,  $X$  — вектор  $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , а  $\lambda$  — скалярная величина, соответствующая собственным частотам, критической нагрузке, частотам среза и т. п. Уравнения вида  $HX = \lambda X$  называются уравнениями собственных значений, и в общем случае они имеют столько решений, т. е. собственных значений и соответствующих собственных векторов, сколько степеней свободы  $x_i$ . Примером могут служить задачи о свободных колебаниях, в которых

$$H = K^{-1}M. \quad (20.12)$$

Наибольшее собственное значение можно определить простым итерационным методом:

а) Задать некоторое значение вектора  $X$ , которое в дальнейшем называется  $X_{g1}$ . Поскольку собственный вектор характеризует некоторую собственную функцию системы, нам нужны только относительные значения компонент вектора  $X$ . Поэтому можно считать, что одна из неизвестных (скажем,  $x_1$ ) всегда равна единице.

б) Вычислить  $AX_{g1}$ .

в) Произведение  $AX_{g1}$  представляет собой вектор, который можно записать в виде  $\lambda_{g2}X_{g2}$ , где  $\lambda_{g2}$  — множитель, такой, что компонента  $x_1$  вектора  $X_{g2}$  опять равна единице, а остальные переменные  $x_2, x_3, \dots, x_n$  принимают соответствующие значения.

г) Сравнить  $X_{g2}$  с  $X_{g1}$  или в общем случае  $X_{gr}$  с  $X_{g(r+1)}$ . Если они не отличаются (в пределах заданной точности) друг от друга, то получившее множество значений образует собственный вектор, а множитель представляет собой наибольшее собственное значение. В противном случае снова вернуться к пункту «а».

Другие собственные значения и соответствующие им собственные векторы определяются методом «ловли льва в пустыне» в сочетании с итерационным методом. При использовании этого метода матрица  $H$  видоизменяется таким образом, чтобы свести максимальное собственное значение системы к нулю. В результате наибольшим собственным значением становится последующее значение  $\lambda$ . После этого процесс итераций повторяется.

Предположим, что на некотором этапе получены собственное значение  $\lambda_r$  и собственный вектор  $X_r$ .

Используемую для нахождения  $\lambda_r$  и  $X_r$  матрицу можно с помощью метода «ловли льва» видоизменить так, чтобы

избавиться от  $r$ -го корня, т. е. сделать  $\lambda_r$  равным нулю, не изменяя других собственных значений и собственных векторов. Очевидно, что после этого у видоизмененной матрицы наибольшим собственным значением будет  $\lambda_{r+1}$ . Пусть

$$Z_r = \frac{X_r X_r^T M}{X_r^T M X_r}. \quad (20.13)$$

Можно записать

$$\begin{aligned} [H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_r &= \\ &= H X_r - \lambda_1 Z_1 X_r - \lambda_2 Z_2 X_r - \dots - \lambda_r Z_r X_r = \\ &= \lambda_r X_r - \frac{\lambda_1 X_1 (X_1^T M X_r)}{X_1^T M X_1} - \frac{\lambda_2 X_2 (X_2^T M X_r)}{X_2^T M X_2} - \dots - \frac{\lambda_r X_r (X_r^T M X_r)}{X_r^T M X_r}. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Используя свойство ортогональности собственных функций, можно показать, что при  $r \neq s$  справедливо равенство

$$X_r^T M X_s = 0. \quad (20.15)$$

Равенство (20.14) можно переписать в виде

$$[H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_r = \lambda_r X_r - \lambda_r X_r = O X_r, \quad (20.16)$$

так как  $X_r^T M X_r$  — скалярная величина и на нее можно сократить.

Из соотношения (20.16) следует, что  $X_r$  все еще остается собственным вектором видоизмененной матрицы, но соответствующее собственное значение  $\lambda_r$  равно нулю.

Теперь остается доказать, что другие корни системы не изменяются в процессе «ловли льва». Полагая, что  $\lambda_s$  и  $X_s$  — собственное значение и собственный вектор ( $s > r$ ), можно записать

$$\begin{aligned} [H - \lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2 - \dots - \lambda_r Z_r] X_s &= \\ &= H X_s - \lambda_1 Z_1 X_s - \lambda_2 Z_2 X_s - \dots - \lambda_r Z_r X_s = \\ &= \lambda_s X_s - \frac{\lambda_1 X_1 (X_1^T M X_s)}{X_1^T M X_1} - \frac{\lambda_2 X_2 (X_2^T M X_s)}{X_2^T M X_2} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{\lambda_r X_r (X_r^T M X_s)}{X_r^T M X_r} = \lambda_s X_s. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Следовательно,  $\lambda_s$  остается корнем видоизмененной матрицы.

Свойство ортогональности, использованное в (20.14) и (20.17), доказывается следующим образом. Записываем равенства

$$K^{-1} M X_s = \lambda_s X_s, \quad (20.18)$$

$$K^{-1} M X_r = \lambda_r X_r. \quad (20.19)$$

Умножая (20.18) на  $X_r^T M^T$ , а (20.19) на  $X_s^T M^T$  и выполняя затем операцию транспонирования в последнем уравнении (помня при этом, что матрицы  $K^{-1}$  и  $M$  симметричны), получаем

$$X_r^T M^T K^{-1} M X_s = \lambda_s X_r^T M X_s, \quad (20.20)$$

$$X_r^T M^T K^{-1} M X_s = \lambda_r X_r^T M X_s. \quad (20.21)$$

Если теперь вычесть (20.21) из (20.20), то в результате получим

$$(\lambda_s - \lambda_r) X_r^T M X_s = 0. \quad (20.22)$$

Так как в общем случае  $\lambda_s \neq \lambda_r$ , то должно выполняться равенство

$$X_r^T M X_s = 0. \quad (20.23)$$

### Пример программы

*Обозначения переменных в подпрограмме EIGEN*

EGG	Характеристическая матрица ( $K^{-1} M$ или $M^{-1} K$ )
W	Матрица масс (или жесткости)
TEST	Требуемая точность определения собственного вектора
NIT	Максимально допустимое число итераций
NEIG	Количество определяемых собственных чисел
OM	Квадратный корень из обратной величины собственного значения, используемый вместе с матрицей $K^{-1} M$ для определения низших собственных частот

### Программа 20·9

```
SUBROUTINE EIGEN (EGG,W,NV)
DIMENSION EGG(4,4),X(4),XAUX(4),XUX(4),EAUX(4,4),W(4,4)
```

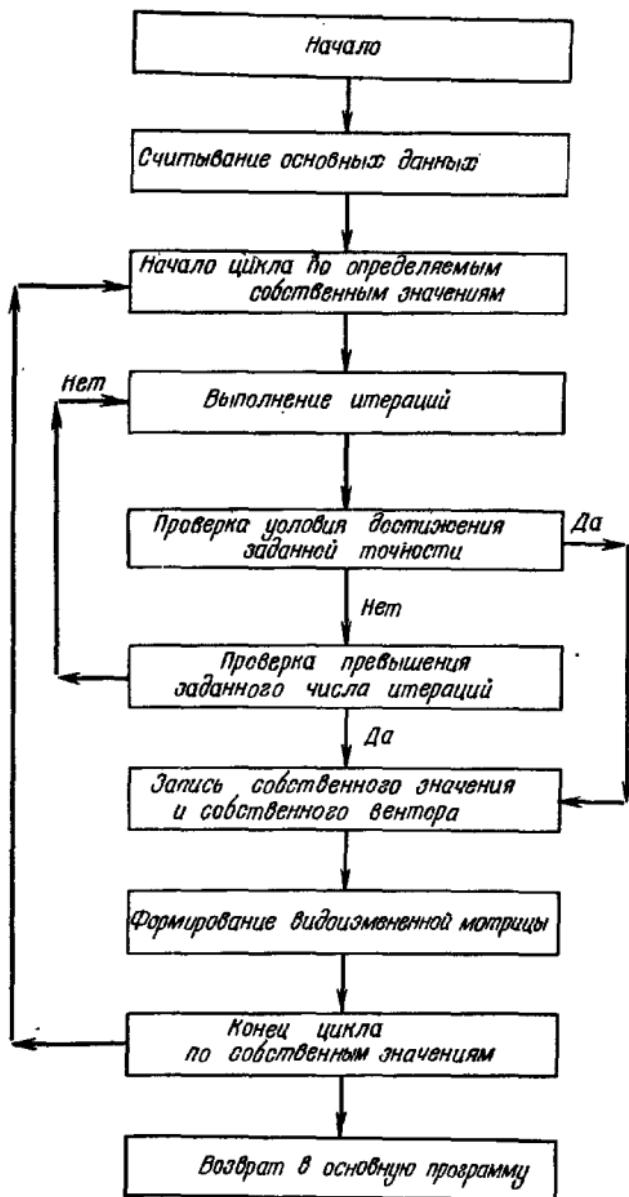
C      EGG — характеристическая матрица  
C      W — матрица масс

```
10 READ (5,10) TEST,NIT,NEIG
      FORMAT(F10.5,2I10)
```

C      TEST — требуемая точность  
C      NIT — максимальное число итераций  
C      NEIG — количество определяемых собственных чисел

```
DO 1 II = 1,NEIG
DO 66 I = 1,NV
  XUX(I) = 1.
66 X(I) = 1.
14 CALL MPRD(EGG,X,XAUX,NV,NV,1)
  EIG = XAUX(1)
  DO 57 I = 1,NV
```

## Блок-схема программы EIGEN



```

57 X(I) = XAUX(1)/EIG
DO 67 I = 1,NV
IF(ABS((X(I) - XUX(I))/X(I)) - TEST)67,67,82
67 CONTINUE

```

C      Достаточно  
C

C      GO TO 50  
C      Повторение  
C

```

82 ITS = ITS - 1
IF(ITS)21,21,25
21 WRITE(5,22)
22 FORMAT(26H ITERATION COUNT EXCEEDED)
GO TO 50
25 DO 26 I = 1,NV
26 XUX(I) = X(I)
42 FORMAT (4E16.8)
GO TO 14
50 OM = SQRT(1./EIG)
WRITE(5,13) II,OM
WRITE(5,42) (X(I),I = 1,4)
13 FORMAT (15,E16.8)

```

C      Формирование видоизменений матрицы  
C

```

CALL TPRD(X,W,XUX,NV,1,NV)
CALL MPRD(XUX,X,XAUX,1,NV,1)
AA = EIG/XAUX(1)
DO 68 I = 1,NV
68 XAUX(I) = X(I)*AA
CALL MPRD (XAUX,XUX,EAUX,NV,1,NV)
DO 110 I = 1,NV
DO 110 J = 1,NV
110 EGG(I,J) = EGG(I,J) - EAUX(I,J)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

### *Программа 20-10*

```

SUBROUTINE MPRD(D,B,DB,L,M,N)
DIMENSION D(4,4),B(4,4),DB(4,4)
C      DB(L,N) = D(L,M)*B(M,N)

DO 110 J = 1,N
DO 110 I = 1,L
DB(I,J) = 0
DO 110 K = 1,M
110 DB(I,J) = DB(I,J) + D(I,K)*B(K,J)
RETURN
END

```

**Программа 20-11**

```
SUBROUTINE TPRD (D,B,DB,M,L,N)
DIMENSION D(4,4),B(4,4),DB(4,4)
```

C      DB(L,N) = (транспонированная D(M,L)) \* B(M,N)

```
DO 110 J = 1,N
DO 110 I = 1,L
DB(I,J) = 0
DO 110 K = 1,M
110 DB(I,J) = DB(I,J) + D(K,I)*B(K,J)
RETURN
END
```

**20.10. Заключительные замечания**

В этой главе рассмотрен весь процесс реализации метода конечных элементов и приведены образцы программ. Изложенный материал не содержит каких-либо уточненных приемов, которые могли бы оказаться непонятными для начинающих. Напротив, авторы привели достаточно простые, но весьма эффективные рабочие программы, отметив в то же время возможности использования других методов и учета особенностей исследуемой системы.

Программа решения задач о собственных значениях, приведенная в этой главе, очень проста и не использует свойство симметрии матриц жесткости и масс (или геометрической жесткости). Читателям, интересующимся применением более совершенных методов и возможностями экономии памяти машины, следует обратиться к работе Андерсона [8], посвященной задачам о колебаниях и устойчивости.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Clough R. W., The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
2. Irons B. M., Economical Computer Techniques for Numerically Integrated Finite Elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1, 201–203 (1969).
3. Martin H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
4. Clough R. W., Johnson C. P., A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells, *Int. J. Solids Struct.* 4, 43–60 (1968).
5. King I. P., An Automatic Recording Scheme for Simultaneous Equations Derived from Network Systems (будет опубликовано).
6. Irons B. M., A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2, 5–32 (1970).
7. Zienkiewicz O. C., King I. P., Discussion on «The Analysis of a Four-Span Bridge Using an Electrical Analogue Computer», *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 37, 819–820 (1967).
8. Anderson R. G., A Finite Element Eigenvalue Solution System, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1968.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 20А

Приведенные программы являются подпрограммами формирования и решения уравнений итерационным методом Гаусса—Зейделя.

*Программа 20-12*

## SUBROUTINE FORMK

```

C      Подпрограмма предназначена для формирования компактной
C      матрицы K и соответствующей матрицы-указателя
C
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(I00,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
NFIIX(25)
I,RI(200),SI(200,20),ISP(200,20)
2,ESTIFM(I2,12)

C      Задание максимального числа членов
C
NMAX = 20
NOFF = 20

C      Задание нулевых массивов
C
DO 300 N = I,NSZF
DO 280 M = I,NMAX
280 SI(N,M) = 0
DO 290 M = 2,NOFF
290 ISP(N,M) = 0
300 ISP(N,1) = N

C      Обход по всем элементам
C
DO 400 N = I,NE
CALL STIFT2(N)

C      Возврат к ESTIFM, как к матрице жесткости
C      Засылка ESTIFM в массив SI и члена-указателя в ISP
C
C      Обход сначала по строкам
C
I = 0
DO 350 JJ = 1,NCN
NROWB = (NOP(N,JJ) - 1)*NDF
DO 350 J = 1,NDF

```

NROWB = NROWB + 1  
 I = I + I

C      Затем обход по столбцам

II = 0  
 DO 330 KK = 1,NCN  
 NCOLB = (NOP(N,KK) - I)\*NDF  
 DO 330 K = I,NDF  
 NCOLB = NCOLB + 1  
 II = II + I

C      Поиск в ISP номера столбца

DO 310 M = 1,NOFF  
 IF(ISP(NROWB,M) = NCOLB) 305,320,305  
 305 IF(ISP(NROWB,M)) 315,315,310  
 310 CONTINUE

C      Поиск свободного места для хранения NCOLB

315 ISP(NROWB,M) = NCOLB

C      Запись ESTIFM

320 SI(NROWB,M) = ESTIFM(I,II) + SI(NROWB,M)

C      Конец цикла по столбцам

330 CONTINUE

C      Конец цикла по строкам

350 CONTINUE

C      Конец цикла по элементам

400 CONTINUE

C      Учет граничных условий

DO 500 N = 1,NB  
 NX = 10\*\* (NDF - I)  
 I = NBC(N)  
 NROWB = (I - I)\*NDF

C      Проверка каждой степени свободы

DO490 M = I,NDF  
 NROWB = NROWB + 1  
 ICON = NFIX(N)/NX  
 IF(ICON) 450,450,420

C  
C      Запоминание большого номера на диагонали  
C

420 SI(NROWB,1) = SI(NROWB,1)\*10\*\*20  
NFI(X(N) = NFI(X(N) - NX\*ICON  
450 NX = NX/10  
490 CONTINUE  
500 CONTINUE  
RETURN  
END

### *Программа 20-13*

SUBROUTINE SOLVE

C      Подпрограмма предназначена для решения уравнений итерационным методом

COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,  
NEQ,LI,NT4  
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),  
NFI(X(25)  
1,R(200),A(200,20),ITEM(200,20),DIS(200)  
NT = 20

C  
C      Задание коэффициента релаксации и точности  
TOLER = .1E - 3  
RELAX = 1.8

C  
C      При отрицательном числе уравнений пропуск задания начальных  
C      данных

C  
IF(NEQ.LT.0)GO TO 310  
DO 300 N = 1,NEQ  
DO 250 M = 1,NT  
IF(ITEM(N,M).NE.0) GO TO 250

C  
C      Массив ITEM(N,1) содержит счетчик расстояния от диагонали  
C

ITEM(N,1) = M - 1  
GO TO 260  
250 CONTINUE  
260 CONTINUE  
300 CONTINUE  
310 NEQ = IABS(NEQ)

C  
C      Задание максимального количества циклов  
C

NCYC = NEQ/2  
IF(NCYC.LT.25)NCYC = 25

```
C
C      Задание нулевого массива неизвестных
C
DO 320 N = 1,NEQ
IF(A(N,1).NE.0.)A(N,1) = 1./A(N,1)
320 DIS(N) = 0.

C      Начало цикла по циклам
DO 500 NC = 1,NCYC
SUM = 0.
SUMD = 0.

C      Начало цикла по уравнениям
DO 450N = 1,NEQ
FX = R(N)
NUM = ITEM(N,1)
DO 330 M = 2,NUM
L = ITEM(N,M)
330 FX = FX - A(N,M)*DIS(L)

C      FX — общее отклонение от RHS
C      DX — измененное значение
DX = A(N,1)*FX - DIS(N)
DIS(N) = DIS(N) + RLAX*DX

C      SUM и SUMD — параметры, характеризующие сходимо
C      450 CONTINUE

C      Выход из цикла при достижении сходимости
ND = NC
IF(SUM.LT.SUMD*TOLER) GO TO 550
500 CONTINUE

C      Пересылка окончательных результатов в массив R
550 DO 600 N = 1,NEQ
600 R(N) = DIS(N)

C      Печать последнего значения суммы и т. д.
WRITE(6,10),ND,SUM,SUMD
10 FORMAT(20H0 LAST CYCLE NO. = ,110
1, /      20H (SN - SN - 1)/SN = ,E10.3
```

```
2, /      20H          SN  = ,E10.3)
RETURN
END
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 20В

Приведенные программы являются подпрограммами составления и решения уравнений методом редкозаполненных матриц (фронтальным методом).

### *Программа 20-14*

SUBROUTINE FORMK

C  
C      Программа предназначена для формирования верхнего треугольника компактной матрицы и матрицы-указателя  
C  
C

```
COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
NSZF,LI,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
NFIIX(25)
1,R1(200),SI(200,20),ISP(200,20)
2,ESTIFM(12,12)
```

C  
C      Задание максимального числа членов  
C

```
NMAX = 20
NOFF = 20
```

C  
C      Задание нулевых массивов  
C

```
DO 300 N = 1,NSZF
DO 280 M = 1,NMAX
280 SI(N,M) = 0.
DO 290 M = 2,NOFF
290 ISP(N,M) = 0
300 ISP(N,I) = N
```

C  
C      Обход по элементам  
C

```
DO 400 N = 1,NE
CALL STIFT2(N)
```

C  
C      Возврат к ESTIFM как к матрице жесткости
C      Засылка ESTIFM в SI и члена указателя в ISP  
C  
C

C      Обход сначала по строкам

```
I = 0
DO 350 JJ = 1,NCN
NROWB = (NOP(N,JJ) - 1)*NDF
DO 350 J = 1,NDF
NROWB = NROWB + 1
I = I + 1
```

C C Затем обход по столбцам ESTIFM  
C

```
II = 0
DO 330 KK = 1,NCN
NCOLB = (NOP(N,KK) - 1)*NDF
DO 330 K = 1,NDF
NCOLB = NCOLB + 1
II = II + 1
```

C C Пропуск, если член лежит ниже диагонали  
C

```
302 IF(NCOLB - NROWB) 330,302,302
CONTINUE
```

C C Поиск в ISP номера столбца  
C
DO 310 M = 1,NOFF
IF(ISP(NROWB,M) - NCLOB) 305,320,305
305 IF(ISP(NROWB,M) 315,315,310
310 CONTINUE

C C Поиск свободного места для хранения NCOLB  
C

```
315 ISP(NROWB,M) = NCOLB
```

C C Запись ESTIFM  
C

```
320 SI(NROWB,M) = ESTIFM(I,II) + SI(NROWB,M)
```

C C Конец цикла по столбцам  
C

```
330 CONTINUE
```

C C Конец цикла по строкам  
C

```
350 CONTINUE
```

C C Конец цикла по элементам  
C

```
400 CONTINUE
```

C C Учет граничных условий  
C
DO 500 N = 1,NB
NX = 10\*\*(NDF - 1)
I = NBC(N)
NROWB = (I - 1)\*NDF

```

C
C Проверка каждой степени свободы
DO 490 M = 1,NDF
NROWB = NROWB + 1
ICON = NFIX(N)/NX
IF(ICON) 450,450,420

C
C Запоминание большого номера на диагонали
C

420 SI(NROWB,1) = SI(NROWB,1)*10**20
    NFIX(N) = NFIX(N) - NX*ICON
450 NX = NX/10
490 CONTINUE
500 CONTINUE
    RETURN
    END

```

*Программа 20-15*

SUBROUTINE SOLVE

```

C Решает методом редкозаполненных матриц
C

COMMON/CONTR/TITLE(12),NP,NE,NB,NDF,NCN,NLD,NMAT,
    NEQ,L1,NT4
COMMON CORD(100,2),NOP(200,4),IMAT(200),ORT(25,2),NBC(25),
    NFIX(25)
1,R(200),A(200,20),ITEM(200,20),IMET(200)
NT = 20

```

```

C
C Пропуск, если число уравнений отрицательно
C Составление полной матрицы ITEM
C

```

IF(NEQ.LT.0) GO TO 360

SYM 5

```

C
C В противном случае заполнение ITEM по мере необходимости
C

```

DO 220 M = I,NT	SYM	6
220 IMET(M) = ITEM(I,M)	SYM	7
DO 340 N = 2,NEQ	SYM	8
DO 280 M = I,NT	SYM	9
IF(IMET(M) - N + 1) 225,280,225	SYM	10
225 DO 240 L = 1,NT	SYM	11
IF(ITEM(N,L)) 230,260,230	SYM	12
230 IF(ITEM(N,L) - IMET(M)) 240,280,240	SYM	13
240 CONTINUE	SYM	14
WRITE(6,100)N	SYM	15
100 FORMAT(43H ALLOWABLE SPACE EXCEEDED IN	SYM	16
EQUATION TABLE,14)	SYM	17
STOP	SYM	18
260 ITEM(N,L) = IMET(M)	SYM	19
280 CONTINUE	SYM	20
300 DO 320 M = I,NT	SYM	21
320 IMET(M) = ITEM(N,M)		

340	CONTINUE	SYM	22
360	NEQ = IABS(NEQ)	SYM	23
	NEQM = NEQ - 1	SYM	24
C			
C	Начало цикла по уравнениям		
C			
C	DO 520 I = 1,NEQM	SYM	25
C			
C	Модификация вектора RHS		
C			
C	R(I) = R(I)/A(I,1)	SYM	26
C			
C	Цикл по строкам необходимо исключить		
C			
C	DO 460 M = 2,NT	SYM	27
	IN = ITEM(I,M)	SYM	28
	IF(IN) 365,480,365	SYM	29
C			
C	Найти соответствующие строки		
C			
365	DO 380 N = 1,NT	SYM	30
	IA = ITEM(IN,N)	SYM	31
	IF(IA) 370,400,370	SYM	32
370	IMET(IA) = N	SYM	33
380	CONTINUE	SYM	34
400	CONTINUE	SYM	35
	TEMP = A(I,M)/A(I,1)	SYM	36
C			
C	Цикл по столбцам необходимо исключить		
C			
C	DO 420 N = 1,NT	SYM	37
	IA = ITEM(I,N)	SYM	38
	IF(IA) 405,440,405	SYM	39
405	IF(IA - IN) 420,410,410	SYM	40
410	IM = IMET(IA)	SYM	41
C			
C	Модификация элемента матрицы		
C			
C	A(IN,IM) = A(IN,IM) - TEMP*A(I,N)	SYM	42
420	CONTINUE	SYM	43
C			
C	Модификация вектора нагрузки		
C			
440	R(IN) = R(IN) - R(I)*A(I,M)	SYM	44
460	CONTINUE	SYM	45
480	CONTINUE	SYM	46
C			
C	Пересылка строки для обратного хода		
C			
DO 500 M = 2,NT		SYM	47
	A(I,M) = A(I,M)/A(I,1)	SYM	48
500	CONTINUE	SYM	49
520	CONTINUE	SYM	50
	R(NEQ) = R(NEQ)/A(NEQ,1)	SYM	51

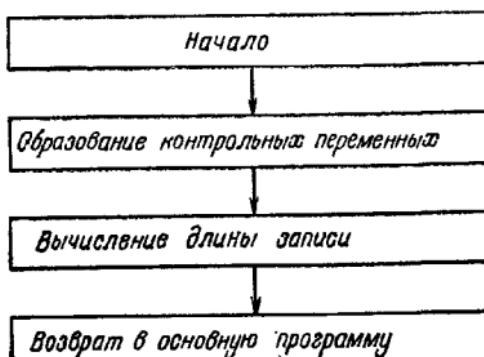
C			
C	Обратный ход		
C			
DO 560 IB = I,NEQM		SYM	52
I = NEQ - IB		SYM	53
DO 540 M = 2,NT		SYM	54
J = ITEM(I,M)		SYM	55
IF(J) 540,560,540		SYM	56
540 R(I) = R(I) - A(I,M)*R(J)		SYM	57
560 CONTINUE		SYM	58
RETURN		SYM	59
END		SYM	60

### ПРИЛОЖЕНИЕ 20В

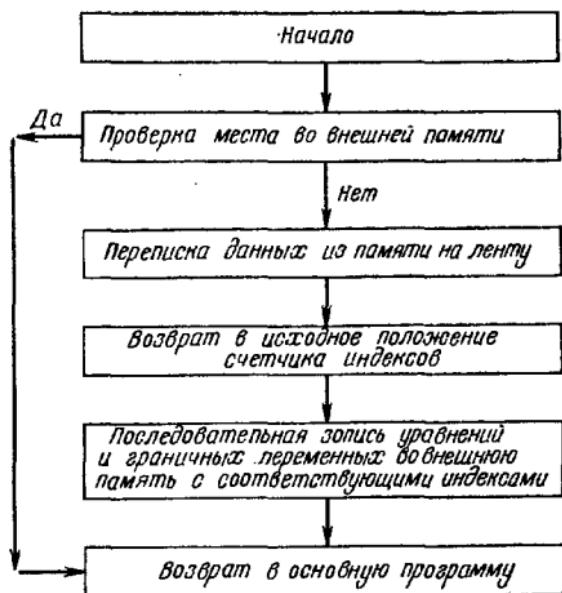
В этом приложении приведен ряд подпрограмм, которые можно использовать для решения очень большого числа уравнений при ограниченной максимальной половине ширины ленты. Эти подпрограммы несовместимы с описанными ранее.

Как уже отмечалось в последней части подразд. 20.5.1, составление ансамбля и исключение выполняются параллельно и исключение жесткостных уравнений узла осуществляется сразу же после их составления. Подпрограмма SOLV используется для построчного исключения (число строк равно числу степеней свободы узла), а подпрограмма BSUB — для осуществления обратного хода, при котором вычисляются и реакции в граничных точках. Подпрограммы STORE и RDBK — две небольшие подпрограммы для запоминания и считывания модифицированных уравнений. Эти модифицированные уравнения не записываются по мере их составления на ленту, а временно хранятся во внешней памяти и записываются в виде блока при заполнении памяти. Подпрограмма INIT образует индексы, необходимые в вышеупомянутых подпрограммах. Она вызывается перед началом решения задачи.

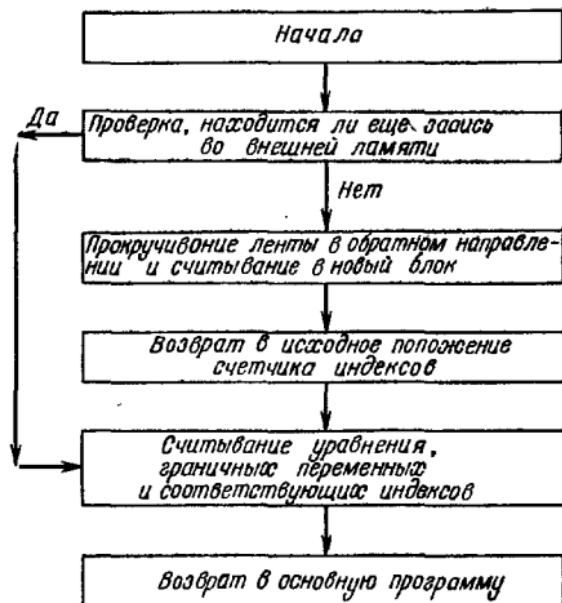
а) Блок-схема подпрограммы INIT



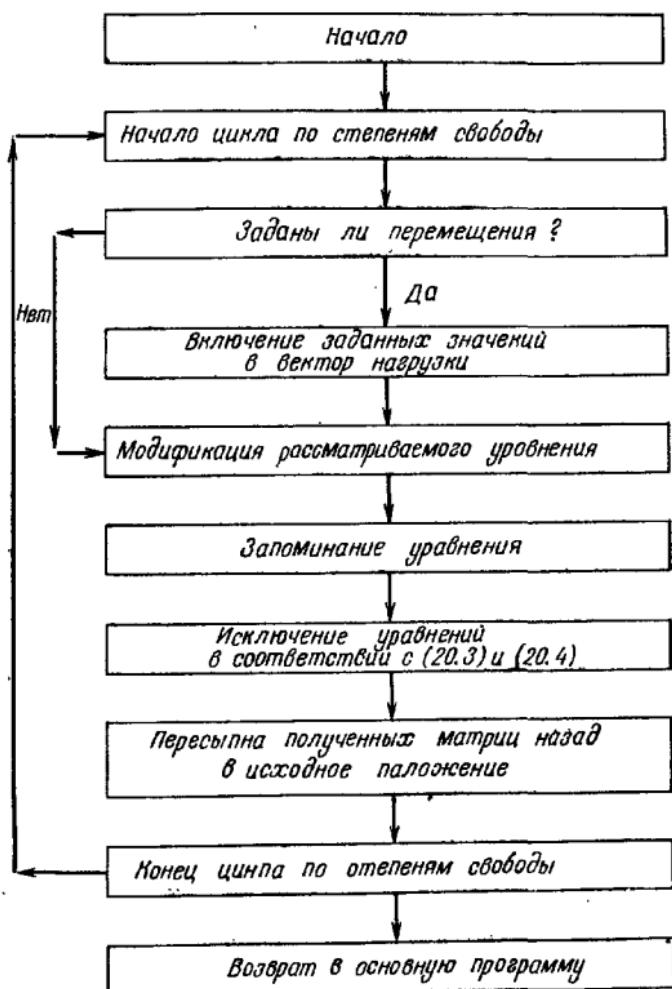
б) Блок-схема подпрограммы STORE



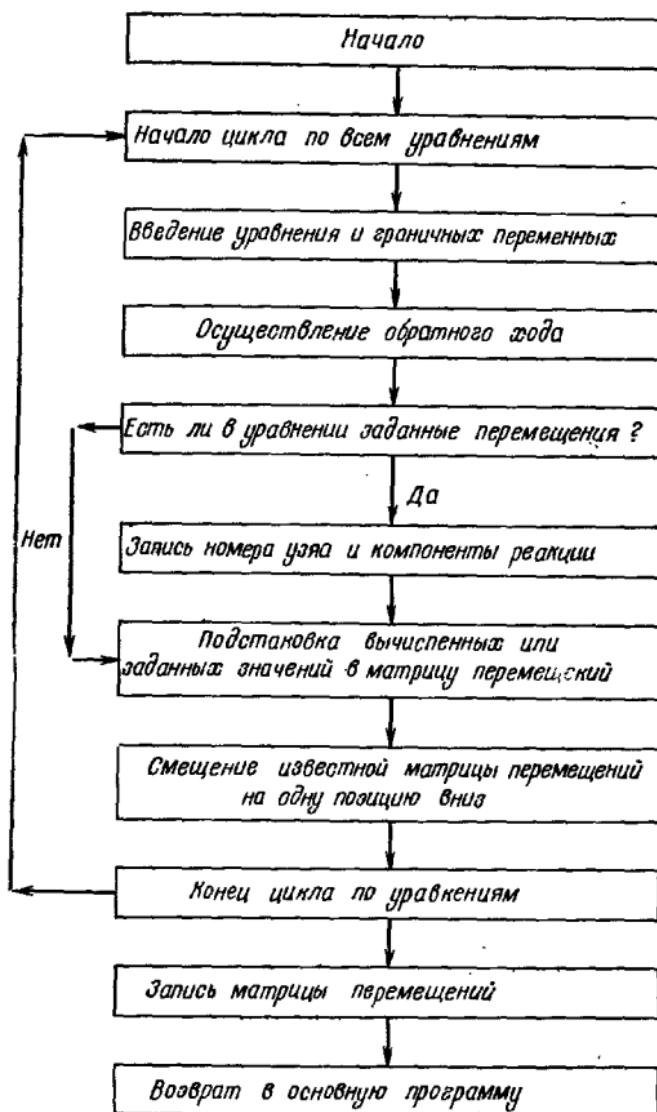
в) Блок-схема подпрограммы RDBK



## г) Блок-схема подпрограммы SOLV



д) Блок-схема подпрограммы BSUB



*Обозначения переменных в подпрограммах 20-16 ÷ 20-20*

NBAND	Максимальная величина половины ширины ленты
NDF	Число степеней свободы узла
NR	Переменная для проверки граничных точек
BN	Переменная для проверки заданных компонент перемещений
BV	Заданное значение
NCOLN	Количество столбцов нагрузки (векторов)
ST	Массив жесткости
P	Массив нагрузок (перемещений)
X	Объем внешней памяти

*Программа 20-16*

```

SUBROUTINE INIT (NBAND,NCOLN)
C Контрольные счетчики
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,L,X(8000)
C Размеры X можно изменять
C NA имеет тот же размер, что и X
C

NA = 8000
IS = 1
NBD = NBAND
NCOL = NCOLN
LRECL = NBD + NCOL + 3
NREC = 0
IF (LRECL - NA) 1,1,2
1 RETURN
2 WRITE(6,4) LRECL,NA
4 0 FORMAT ('LOGICAL RECORD LENGTH OF',16,'EXCEEDS
           BUFFER SET AT', 1 16)
      STOP
END

```

*Программа 20-17*

```

SUBROUTINE STORE (ST,P,NR,BN,BV)
DIMENSION ST(60,60),P(60,2)
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,L,X(8000)
C Проверка возможности размещения во внешней памяти
C программы автоматического разбиения на элементы
C
C IF(IS + LRECL - NA) 5,5,50
C Место во внешней памяти
C
5 DO 10 I = 1,NBD
X(IS) = ST(1,I)
10 IS = IS + 1
DO 15 I = 1,NCOL
X (IS) = P(1,I)
15

```

```
15 IS = IS + 1
X(IS) = NR
X(IS + 1) = BN
X(IS + 2) = BV
IS = IS + 3
RETURN
C Нет места во внешней памяти
C
50 L = IS - 1
WRITE(2) (X(J),J = 1,L)
C Канал 2 внешней памяти
C
IS = 1
NREC = NREC + 1
GO TO 5
END
```

*Программа 20-18*

```
SUBROUTINE RDBK (ST,P,NR,BN,BV)
DIMENSION ST(60,60),P(60,2)
COMMON/BUFDA/NBD,NCOL,IS,NA,LRECL,NREC,I,X(8000)
C Проверка нахождения следующей записи во внешней памяти
C
10 IS = IS - LRECL
IF(IS = 1) 40,12,12
C Запись находится во внешней памяти
C
12 DO 11 I = 1, NBD
ST (1,I) = X(IS)
11 IS = IS + 1
DO 15 I = 1, NCOL
P (1,I) = X(IS)
15 IS = IS + 1
NR = X(IS)
BN = X(IS + 1)
BV = X(IS + 2)
IS = IS + 3 - LRECL
RETURN
C Необходимо считывать последний записанный блок
C
40 IF (NREC) 100,100,41
41 NREC = NREC - 1
BACKSPACE 2
READ (2) (X(J),J = 1,I)
BACKSPACE 2
IS = I + 1
GO TO 10
```

```

C Нелогичная ошибка
C
100 WRITE (6,101)
101 FORMAT('O ATTEMPT TO READ BACK TOO MANY RECORDS.')
      STOP
      END

```

*Программа 20-19*

```

SUBROUTINE SOLV
COMMON DIS(720,2),ST(60,60),Q(60,2),P(60,2),PST(2),BN(2),BV(2)
COMMON NDF,NBAND,NSIZ,NDF1,NP,NELEM,NCOLN,NDATA
C NCOLN — число столбцов нагрузки
C NR = I — узлы с граничными условиями
C BN — 1 — закреплено, 0 — свободно
C BV — заданные перемещения
C NBAND — половина ширины ленты
C NDF — число степеней свободы
C NDF1 = NDF + 1, NSIZ = NBAND — NDF
C
DO 111 JJ = 1,NDF
C Проверка граничных условий
IF(NR,NE.1) GO TO 58
IF (ABS(BN(JJ)),LT..00001) GO TO 58
ST11 = 0
DO 5 J = 1,NCOLN
  5 PST(J) = BV(JJ)
  DO 8 J = 1,NCOLN
    8 P(I,J) = -BV(JJ) + P(I,J)/ST(1,1)
    DO 4 I = 2,NBAND:
      4 ST(1,I) = ST(1,I)/ST(1,1)
      ST(1,1) = -ST(1,1)
      GO TO 60
C Уравнение без граничных условий
C
58 ST11 = 1./ST(1,1)
  DO 6 J = 1,NCOLN
    6 PST(J) = P(I,J)*ST11
    ST(1,1) = ST11
  60 CALL STORE (ST,P,NR,BN(JJ),BV(JJ))
  DO 11 I = 2,NBAND
  DO 16 J = 1,NCOLN
    16 P(I,J) = P(I,J) - ST(1,I)*PST(J)
C Составление модифицированной матрицы нагрузки
C
  DO 11 J = 2,NBAND
  11 ST(I,J) = ST(I,J) - ST(1,I)*ST(1,J)*ST11
C Составление модифицированной матрицы жесткости
C
  DO 14 I = 2,NBAND
  DO 15 J = 1,NCOLN
    P(I - 1,J) = P(I,J)

```

```

15 P(I,J) = 0
    DO 14 J = 2,NBAND
        ST(I - 1, J - 1) = ST(I,J)
        ST(I - 1,J) = 0
        ST(I,J - 1) = 0
    14 ST(J,J) = 0
C     Смещение в исходное положение
C
111 CONTINUE
    RETURN
    END

Программа 20-20

SUBROUTINE BSUB
COMMON DIS(720,2),ST(60,60),Q(60,2),P(60,2),PST(2),BN(2),BV(2)
COMMON NDF,NBAND,NSIZ,NDF1,NP,NELEM,NCOLN,NDATA
C     NP — число узлов
C
NP2 = NDF*NP
DO 30 II = 1,NP2
M = NP2 - II
CALL RDBK(ST,P,NR,BNJJ,BVJJ)
C     Выполнение обратного хода
C
DO 11 J = 1,NCOLN
DO 11 I = 2,NBAND
11 P(1,J) = P(1,J) - ST(1,I)*P(I,J)
    DO 2 J = 1,NCOLN
        P(1,J) = P(1,J)*ST(1,1)
        IF (NR.NE.1) GO TO 88
        IF (BNJJ) 90,88,90
    90 LK = M/NDF + 1
C     Запись номера узла и вычисленной реакции
C
      WRITE(6,10) LK,P(1,J)
10 FORMAT(14,E16.8)
      DIS(M + 1,J) = BVJJ
      P(1,J) = BVJJ
      GO TO 2
88 DIS(M + 1,J) = P(1,J)
2 CONTINUE
C     Смещение известной матрицы перемещений
C
DO 4 I = 2,NBAND
L = NBAND - I + 1
DO 4 J = 1,NCOLN
4 P(L + I,J) = P(L,J)
30 CONTINUE
      WRITE(6,15)
15 FORMAT(16H X-DISPLACEMENT, 16H Y-DISPLACEMENT)
34 WRITE(6,7) ((DIS(I,J),I = 1,NP2),J = 1,NCOLN)
7 FORMAT(2E16.8)
      RETURN
      END

```

---

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

Для понимания содержания этой книги и проведения необходимых вычислений требуется знание лишь некоторых основных определений матричной алгебры.

#### Определение матрицы

Линейное соотношение между совокупностью переменных  $x$  и  $b$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

можно записать более кратко:

$$[A]\{x\} = \{b\}, \quad (\text{A1.1a})$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.2})$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}.$$

Эти выражения поясняют понятия матрицы и матричного умножения. Матрицы определяются как массивы чисел указанного в (A1.2) типа. Массив в виде одного столбца чисел часто называется вектором или матрицей-столбцом. Умножение матрицы на матрицу-столбец записывается в виде (A1.1) или (A1.1a).

Если для тех же самых постоянных, но других векторов  $x$  и  $b$  справедливо другое соотношение:

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 &= b'_1, \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 &= b'_2, \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 &= b'_3, \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

то формулой

$$[A][X] = [B], \quad (\text{A1.4})$$

где

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 & x'_1 \\ x_2 & x'_2 \\ x_3 & x'_3 \\ x_4 & x'_4 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.5})$$

объединяются соотношения (A1.1) и (A1.3):

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots, & a_{11}x'_1 + \dots \\ a_{21}x_1 + \dots, & a_{21}x'_1 + \dots \\ a_{31}x_1 + \dots, & a_{31}x'_1 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.4a})$$

Отсюда видно, что матрицы равны только тогда, когда равны между собой все их элементы.

Записанные соотношения справедливы и для умножения полных матриц. Очевидно, это умножение имеет смысл, если число столбцов матрицы  $[A]$  равно числу строк матрицы  $[X]$ . Одним из характерных свойств матричного умножения является его некоммутативность:

$$[A][X] \neq [X][A].$$

### Матричное сложение и вычитание

Складывая соотношения (A1.1) и (A1.3), получаем

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 + x'_1) + a_{12}(x_2 + x'_2) + a_{13}(x_3 + x'_3) + a_{14}(x_4 + x'_4) &= \\ &= b_1 + b'_1, \\ a_{21}(x_1 + x'_1) + a_{22}(x_2 + x'_2) + a_{23}(x_3 + x'_3) + a_{24}(x_4 + x'_4) &= \\ &= b_2 + b'_2, \\ a_{31}(x_1 + x'_1) + a_{32}(x_2 + x'_2) + a_{33}(x_3 + x'_3) + a_{34}(x_4 + x'_4) &= \\ &= b_3 + b'_3, \end{aligned} \quad (\text{A1.6})$$

что также следует из

$$[A]\{x\} + [A]\{x'\} = [A]\{x + x'\} = \{b\} + \{b'\} = \{b + b'\},$$

если определить сложение матриц как сложение их элементов. Ясно, что складывать можно лишь матрицы одинаковой размерности, например

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix},$$

или

$$[A] + [B] = [C]. \quad (\text{A1.7})$$

Каждый элемент матрицы  $[C]$  равен сумме соответствующих элементов  $[A]$  и  $[B]$ .

Вычитание производится по таким же правилам.

### Транспонирование матрицы

Эта операция представляет собой переупорядочение чисел массива в соответствии с соотношением

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.8})$$

и обозначается символом  $T$ .

Примеры использования этой операции будут указаны позднее. Пока же можно ограничиться только определением.

### Обращение матрицы

Если матрица  $[A]$  в соотношении (A1.1a) квадратная, т. е. состоит из коэффициентов системы уравнений типа (A1.1), в которой число уравнений равно числу неизвестных, то неизвестные  $\{x\}$  можно выразить через известные коэффициенты  $\{b\}$ <sup>1)</sup>. Решение можно записать в виде

$$\{x\} = [A]^{-1} \{b\}, \quad (\text{A1.9})$$

где матрица  $[A]^{-1}$  называется обращением квадратной матрицы  $[A]$ . Ясно, что матрица  $[A]^{-1}$  тоже квадратная и ее порядок равен порядку матрицы  $[A]$ .

Соотношение (A1.9) можно было бы получить, умножая обе стороны (A1.1a) на  $[A]^{-1}$ . Следовательно,

$$[A]^{-1} [A] = [I] = [A] [A]^{-1}, \quad (\text{A1.10})$$

<sup>1)</sup> Это можно сделать только в том случае, если определитель матрицы  $[A]$  отличен от нуля. — Прим. ред.

где  $[I]$  — единичная матрица, все элементы которой, не стоящие на диагонали, равны нулю, а диагональные элементы равны единице.

Ясно, что если уравнения не имеют решений, то обратной матрицы не существует.

### Сумма произведений

В задачах механики часто приходится иметь дело с такими величинами, как, например, силы, которые можно представить в виде матрицы-вектора

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A1.11})$$

Силы в свою очередь связаны с перемещениями, определенными другим вектором, скажем

$$\{\delta\} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A1.12})$$

Известно, что работа равна сумме произведений сил на перемещения:

$$W = \sum F_n \delta_n.$$

Очевидно, что здесь целесообразно использовать операцию транспонирования и в соответствии с первым правилом умножения матриц записать

$$W = [F_1, F_2, \dots, F_n] \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} \equiv \{\delta\}^T \{F\}. \quad (\text{A1.13})$$

Такая запись часто используется в книге.

### Транспонирование произведения

Иногда приходится транспонировать произведение матриц. Читателю предоставляется возможность, основываясь на приведенных определениях, доказать, что

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T. \quad (\text{A1.14})$$

## Симметричные матрицы

В задачах расчета конструкций часто встречаются симметричные матрицы. Если элементы матрицы  $[A]$  обозначить через  $a_{ij}$ , то для симметричной матрицы

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Можно показать, что матрица, обратная симметричной, всегда симметрична.

## Разбиение матриц на клетки

Легко убедиться, что матричное произведение

$$[A][B],$$

в котором матрицы имеют, например, вид

$$[A] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} \right],$$

$$[B] = \left[ \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \\ \hline b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{array} \right],$$

можно получить, разбивая матрицы, как указано пунктиром, на подматрицы, применив сначала правила умножения матриц так, как будто каждая подматрица является скаляром, и производя дальнейшее умножение обычным образом. Если записать

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

то можно показать, что

$$[A][B] = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix}.$$

При разбиении матриц на клетки существенно, чтобы строение подматриц обеспечивало существование произведений вида  $A_{11}B_1$ , т. е. число столбцов матрицы  $A_{11}$  должно быть равно числу строк матрицы  $B_1$  и т. д. В этом случае любые действия над матрицами можно производить так, как будто каждая клетка является скаляром. Отметим, что любую матрицу можно умножить на скаляр (число).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2  
ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ  
ГЛАВЫ 2

$$(2.1) \quad \{f\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m, \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$

$$(2.2) \quad \{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e.$$

$$(2.3) \quad \{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}.$$

$$(2.9) \quad \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [k]^e \{\delta\}^e + \{F\}_{\epsilon_0}^e + \{F\}_{\sigma_0}^e + \{F\}_p^e$$

$$(2.10) \div [k]^e = \int [B]^T [D] [B] dV,$$

$$\div (2.13) \quad \{F\}_p^e = - \int [N]^T \{p\} dV,$$

$$\{F\}_{\epsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV.$$

$$\{F\}_{\sigma_0}^e = + \int [B]^T \{\sigma_0\} dV.$$

$$(2.16) \quad \{\sigma\} = [D] [B] \{\delta\}^e - [D] \{\epsilon_0\} + \sigma_0.$$

$$(2.17) \quad [S]^e = [D] [B].$$

---

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

## НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА (ФИГ. 4.1)

Пусть треугольник в плоскости  $x - y$  определен тремя точками  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  и  $(x_m, y_m)$ , а начало координат находится в центре тяжести, т. е.

$$\frac{x_i + x_j + x_m}{3} = \frac{y_i + y_j + y_m}{3} = 0.$$

Интегрируя по площади треугольника, получаем

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0,$$

$$\int dx \, dy = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \Delta = \text{площадь треугольника},$$

$$\int x^2 \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2),$$

$$\int y^2 \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2),$$

$$\int xy \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m).$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ТЕТРАЭДРА (ФИГ. 6.1)

Пусть тетраэдр определен в системе координат  $x, y, z$ , начало которой расположено в центре тяжести, четырьмя точками  $(x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j), (x_m, y_m, z_m), (x_p, y_p, z_p)$ , причем

$$\frac{x_i + x_j + x_m + x_p}{4} = \frac{y_i + y_j + y_m + y_p}{4} = \frac{z_i + z_j + z_m + z_p}{4} = 0.$$

Интегрируя по объему тетраэдра, получаем

$$\int dx dy dz = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} = V = \text{объем тетраэдра.}$$

При указанной на фиг. 6.1 нумерации вершин тетраэдра справедливы следующие формулы:

$$\int x dx dy dz = \int y dx dy dz = \int z dx dy dz = 0,$$

$$\int x^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2 + x_p^2),$$

$$\int y^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2 + y_p^2),$$

$$\int z^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (z_i^2 + z_j^2 + z_m^2 + z_p^2),$$

$$\int xy dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m + x_p y_p),$$

$$\int xz dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i z_i + x_j z_j + x_m z_m + x_p z_p),$$

$$\int yz dx dy dz = \frac{V}{20} (y_i z_i + y_j z_j + y_m z_m + y_p z_p).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ  
ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

При использовании элементов, произвольно ориентированных в пространстве, например при расчете оболочек и т. п., требуется знание и понимание основ векторной алгебры. Кратко изложим некоторые основные понятия.

Векторы (с геометрической точки зрения) можно определить их компонентами по направлениям осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ <sup>1</sup>). Таким образом, вектор  $\mathbf{V}_{01}$ , показанный на фиг. A5.1, можно представить в виде

$$\mathbf{V}_{01} = i x_1 + j y_1 + k z_1, \quad (\text{A5.1})$$

где  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — единичные векторы в направлениях осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

С другой стороны, этот же вектор можно записать как

$$\{\mathbf{V}_{01}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.2})$$

(как вектор-матрицу), располагая его компоненты в виде столбца.

**Сложение и вычитание.** При сложении и вычитании векторов производится сложение и вычитание их компонент:

$$\mathbf{V}_{02} - \mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_{21} = i(x_2 - x_1) + j(y_2 - y_1) + k(z_2 - z_1). \quad (\text{A5.3})$$

Этот же результат можно получить, используя правила матричной алгебры, т. е.

$$\{\mathbf{V}_{02}\} - \{\mathbf{V}_{01}\} = \{\mathbf{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A5.4})$$

**Длина вектора.** Из геометрических соображений длина вектора  $\mathbf{V}_{21}$  определяется выражением

$$l_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (\text{A5.5})$$

или в обозначениях матричной алгебры

$$l_{21} = \sqrt{\{\mathbf{V}_{12}\}^T \{\mathbf{V}_{12}\}}. \quad (\text{A5.6})$$

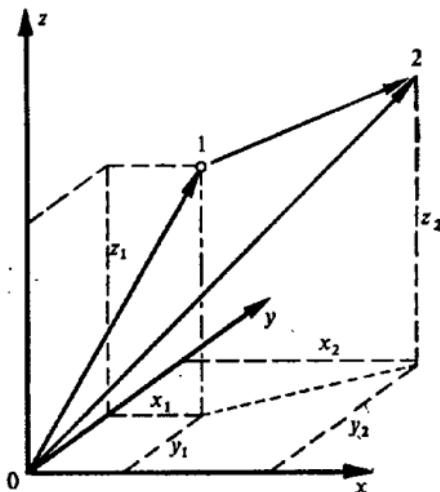
<sup>1)</sup> Здесь и далее предполагается прямоугольная декартова система координат. — Прим. ред.

**Направляющие косинусы.** Направляющие косинусы вектора определяются через длины его проекций:

$$\cos \alpha_x = \lambda_{vx} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} \quad \text{и т. д.,} \quad (\text{A5.7})$$

где  $\alpha_x$  — угол между вектором и осью  $x$ .

**Скалярные произведения.** Скалярное произведение двух векторов определяется как произведение длины одного из векторов на длину проекции на линию действия другого вектора. Та-



Фиг. А5.1. Векторное сложение.

ким образом, если  $\gamma$  — угол между двумя векторами  $A$  и  $B$ , длина которых  $l_a$  и  $l_b$ , то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = l_a l_b \cos \gamma = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{A5.8})$$

Если

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= i a_x + j a_y + k a_z, \\ \mathbf{B} &= i b_x + j b_y + k b_z, \end{aligned} \quad (\text{A5.9})$$

то, учитывая, что в соответствии с приведенным определением

$$\begin{aligned} i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = 1, \\ i \cdot j &= j \cdot k = k \cdot i = 0 \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

получаем

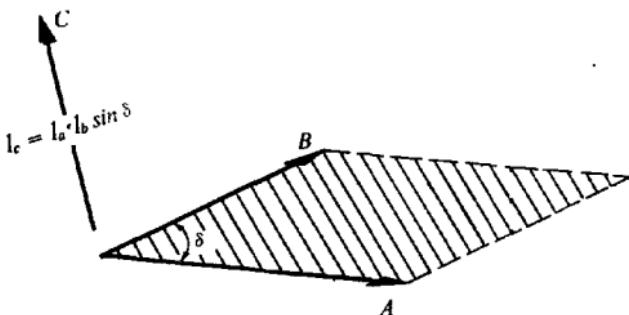
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A5.10})$$

В матричных обозначениях

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}, \quad (\text{A5.11})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{A\}^T \{B\} = \{B\}^T \{A\}. \quad (\text{A5.12})$$

**Векторное произведение.** Векторное произведение определяется как вектор, направленный по нормали к плоскости, задаваемой двумя векторами, и равный по величине произведению



Фиг. А5.2. Умножение векторов (векторное произведение).

длии этих векторов на синус угла между ними. Его направление определяется по правилу правой руки. Так, на фиг. А5.2 показан вектор

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}. \quad (\text{A5.13})$$

Ясно, что

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (\text{A5.14})$$

Отметим, что величина (или длина) вектора  $\mathbf{C}$  равна площади показанного на фиг. А5.2 параллелограмма.

Используя представления (А5.9) и замечая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (\text{A5.15})$$

получаем

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \quad (\text{A5.16})$$

В матричной алгебре нет простого аналога векторному произведению, однако можно использовать для вектора  $C$  следующее определение<sup>1)</sup>:

$$\{C\} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix}. \quad (\text{A5.17})$$

Векторное произведение особенно полезно при построении нормали к поверхности (см. гл. 11).

**Элементарные площадь и объем.** Если  $\xi$  и  $\eta$  — некоторые криволинейные координаты, то векторы

$$d\xi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\xi, \quad d\eta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\eta \quad (\text{A5.18})$$

определеняемые соотношениями между декартовыми и криволинейными координатами, направлены по касательным к линиям  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ . Поскольку длина векторного произведения  $d\xi \times d\eta$  равна площади элементарного параллелограмма, используя (A5.17), можно записать

$$dS = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta. \quad (\text{A5.19})$$

Аналогично в криволинейных координатах  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  трехмерного пространства элементарный объем определяется смешанным произведением

$$dV = d\xi \cdot (d\eta \times d\zeta) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \cdot d\xi d\eta d\zeta. \quad (\text{A5.20})$$

Это соотношение следует из геометрических соображений. Произведение, стоящее в скобках, по определению представляет собой вектор, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $d\eta$  и  $d\zeta$ . Скалярное умножение этого вектора на вектор  $d\xi$  дает элементарный объем.

<sup>1)</sup> Подробнее см. в книге: Б. Е. Победря, Лекции по тензорному анализу, Изд-во МГУ, 1974. — Прим. ред.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА  
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Продемонстрируем здесь относительно простой переход от вариационного соотношения к эквивалентному дифференциальному уравнению. Однако обратный процесс гораздо сложнее и его не всегда удается осуществить, поскольку зачастую не удается установить вариационный принцип.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z) dV + \int_C \left( q\phi + \frac{a\phi^2}{2} \right) dS. \quad (\text{A6.1})$$

Здесь  $f$  — произвольная функция,  $\phi_x = \partial\phi/\partial x$  и т. д.,  $C$  — часть границы, на которой не заданы значения функции  $\phi$ . На остальной части границы  $\phi = \bar{\phi}$ .

Рассматривая произвольную вариацию неизвестной функции  $\phi$  и ее производных, получаем

$$\delta\chi = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \delta\phi_x + \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \delta\phi_y + \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \delta\phi_z \right) dV + \int_C (q \delta\phi + a\phi \delta\phi) dS. \quad (\text{A6.2})$$

Поскольку

$$\delta\phi_x = \delta \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) \quad \text{и т. д.},$$

соотношение (A6.2) можно переписать в виде

$$\delta\chi = \int_V \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) + \dots \right) dV + \int_C (q \delta\phi + a\phi \delta\phi) dS = 0. \quad (\text{A6.3})$$

Величина  $\delta\chi$  приравнена нулю, так как в точке минимума (стационарной точке) вариация обращается в нуль.

Подставляя  $dV = dx dy dz$  и интегрируя второе слагаемое в первом интеграле по частям [см. формулу (3.25)], получаем

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) dV = \int_S \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \delta\phi I_x dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) \delta\phi dV,$$

где  $l_x$  — косинус угла между внешней нормалью к поверхности и осью  $x$ . Интегрируя таким же образом остальные слагаемые в (A6.3), окончательно получаем

$$\delta\chi = \int_V \delta\phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right) \right\} dV + \\ + \int_C \delta\phi \left\{ q + a\phi + l_x \frac{\partial f}{\partial \phi_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial \phi_y} + l_z \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right\} dS. \quad (\text{A6.4})$$

Второй интеграл берется только по части границы  $C$ , поскольку на остальной части поверхности  $S$  значения  $\phi$  заданы и поэтому  $\delta\phi = 0$ .

Поскольку равенство (A6.4) должно выполняться при произвольной вариации  $\delta\phi$ , повсюду в области  $V$  должно выполняться условие

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \right) = 0, \quad (\text{A6.5a})$$

а на части границы  $C$

$$l_x \frac{\partial f}{\partial \phi_x} + l_y \frac{\partial f}{\partial \phi_y} + l_z \frac{\partial f}{\partial \phi_z} + q + a\phi = 0. \quad (\text{A6.5b})$$

Если функция  $\phi$  удовлетворяет этим двум уравнениям, то она минимизирует функционал  $\chi^1$ ). В случае единственности решения постановки задач с использованием соотношений (A6.1) и (A6.5) эквивалентны. Приведенные дифференциальные уравнения известны как уравнения Эйлера.

Если функционал зависит и от производных функции  $\phi$  более высокого порядка, то соответствующие этому случаю уравнения Эйлера получаются аналогично. Точно так же можно найти систему дифференциальных уравнений Эйлера для функционала от нескольких независимых функций  $\phi$ ,  $\psi$  и т. д. и их производных.

<sup>1)</sup> При указанных условиях функционал имеет экстремальное значение. Для того чтобы это экстремальное значение соответствовало минимуму, требуется дополнительное условие. Подробнее см.: Г. Е. Шилов, Математический анализ. — Прим. ред.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	7
Глава 1. Предварительные сведения: метод жесткостей расчета конструкций и исследование сетей . . . . .	11
Глава 2. Конечные элементы упругой среды. Метод перемещений . . . . .	26
Глава 3. Обобщение понятия конечных элементов . . . . .	44
Глава 4. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния . . . . .	60
Глава 5. Осесимметричное напряженное состояние . . . . .	87
Глава 6. Исследование трехмерного напряженного состояния . . . . .	104
Глава 7. Функции формы элемента. Некоторые семейства этих функций . . . . .	117
Глава 8. Криволинейные изопараметрические элементы и численное интегрирование . . . . .	143
Глава 9. Некоторые примеры применения изопараметрических элементов при исследовании двумерного и трехмерного напряженных состояний . . . . .	169
Глава 10. Изгиб пластин . . . . .	186
Глава 11. Оболочки как совокупность плоских элементов . . . . .	230
Глава 12. Осесимметричные оболочки . . . . .	259
Глава 13. Полуаналитический метод конечных элементов. Применение ортогональных функций . . . . .	274
Глава 14. Расчет толстостенных оболочек как частный случай исследования трехмерного тела . . . . .	294
Глава 15. Задачи о стационарных полях (теплопроводность, электрический потенциал, течение жидкости и др.) . . . . .	316
Глава 16. Постановка нестационарных и динамических задач . . . . .	344
Глава 17. Динамические задачи. Полуаналитическое исследование. Колебания и собственные значения . . . . .	371
Глава 18. Физически нелинейные задачи. Пластичность, ползучесть, задачи нелинейной теории поля и т. д. . . . .	393
Глава 19. Геометрически нелинейные задачи; большие перемещения и неустойчивость конструкций . . . . .	438

Глава 20. Вычислительные методы и программы (Ченг и Кинг) . . . . .	462
Приложение 1. Матричная алгебра . . . . .	526
Приложение 2. Основные соотношения главы 2 . . . . .	531
Приложение 3. Некоторые формулы интегрирования для треугольника (фиг. 4.1) . . . . .	532
Приложение 4. Некоторые формулы интегрирования для тетраэдра (фиг. 6.1) . . . . .	533
Приложение 5. Некоторые сведения из векторной алгебры . . . . .	534
Приложение 6. Теорема Эйлера вариационного исчисления . . . . .	538

**УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присыпать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП,  
1-й Рижский пер., 2,  
Издательство «Мир».

О. ЗЕНКЕВИЧ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ТЕХНИКЕ

Редактор Л. Якименко  
Художник А. Смеляков

Художественный редактор В. Биссигалиев  
Технический редактор З. Резник

Сдано в набор 6/III 1975 г. Подписано к пе-  
чати 8/IX 1975 г. Бумага № 2 60×90/<sub>16</sub>=17 бум. л.  
84 печ. л. Уч.-изд. л. 31,76. Изд. № 207928.  
Цена 2 р. 70 к. Зак. 613

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете  
Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52,  
Измайловский проспект, 29