

Главное управление высших и средних
педагогических учебных заведений
Министерства просвещения РСФСР

**Московский государственный заочный педагогический
институт**

Н. И. ЖИРНОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Пособие для студентов-заочников
физико-математических факультетов
педагогических институтов*

ИЗДАНИЕ 3-е, ИСПРАВЛЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

Москва 1970

537
Ж 73

Редактор МГЗПИ *Ломков Э. К.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании «Задачника-практикума по электродинамике» общее число задач доведено до 400. Значительно дополнены такие разделы сборника, как «Излучение электромагнитных волн», «Основы электронной теории» и «Специальная теория относительности». Устранены некоторые погрешности, имевшиеся в первом издании задачника.

При решении всех задач использована Международная система единиц СИ.

В настоящее время еще нет ни одного отечественного учебника по курсу теории электромагнитного поля, написанного с применением указанной системы единиц. Можно указать лишь переводную книгу А. Зоммерфельда «Электродинамика», ИЛ, Москва, 1958, в которой Международная система единиц СИ принята в качестве основной. Чтобы облегчить положение студента-заочника, в начале каждого параграфа приведены наиболее важные формулы теории. Кроме того, в приложениях 2 и 3 указаны правила перевода обозначений физических величин из абсолютной системы единиц в Международную систему СИ и соотношения между основными и некоторыми производными единицами обеих систем.

Во втором издании сборника принята отдельная нумерация задач, снабженных решениями, и задач, предназначенных для самостоятельной работы студента-заочника (эти задачи отмечены звездочкой).

Выражаю искреннюю признательность всем товарищам, призвавшим свои замечания по содержанию и оформлению первого издания сборника.

Н. Жирнов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Сборник содержит задачи по теории электромагнитного поля (макроскопической электродинамике, электронной теории и специальной теории относительности), подобранные с таким расчетом, чтобы обратить внимание студента-заочника на узловые вопросы теории и дать ему возможность приобрести необходимые практические навыки по расчету электромагнитных полей. Около половины всех помещенных в сборнике задач снабжено подробными решениями, в которых автор стремился как можно полнее отразить вопросы методики решения задач по этому важнейшему и, на наш взгляд, наиболее трудно усваиваемому разделу курса теоретической физики.

Предполагается, что студенты-заочники знакомы с математическим аппаратом теории электромагнитного поля (векторным анали-

зом) в объеме, предусмотренном книгой А. С. Компанейца «Теоретическая физика», Гостехиздат, 1957, стр. 85—96, или книгой В. И. Левина «Методы математической физики», Учпедгиз, 1956.

В качестве основных руководств по теории электромагнитного поля читателю рекомендуются следующие книги:

И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Гостехиздат, 1958.

Ю. Б. Румер, М. С. Рыбкин. Теория относительности. М., Учпедгиз, 1960

А. С. Компанейц. Теоретическая физика, М., Гостехиздат, 1957.

При работе над задачкой-практикумом студент-заочник параллельно должен изучать теоретическую часть курса, пользуясь указанными выше пособиями. Все необходимые ссылки на другую учебную литературу приводятся в текстах решений задач по мере надобности, причем число учебных пособий, на которые делаются ссылки, доведено до минимума. Задачи и упражнения, снабженные подробными решениями, должны быть тщательно рассмотрены перед тем, как приступить к самостоятельному решению задач и упражнений по соответствующей теме.

Все задачи, помещенные в задачнике-практикуме, должны быть решены студентом в межсессионный период. Вместо контрольных работ по курсу «Теория электромагнитного поля» студент-заочник получит от кафедры за месяц до начала очередной сессии номера нескольких задач из настоящего задачника-практикума, решения которых он должен выслать в деканат в пятидневный срок. Непредставление в указанный срок решений этих задач будет рассматриваться как невыполнение контрольной работы.

Кафедра физики МГЗПИ (Москва, Верхне-Радищевская ул., д. 18) обращается к кафедрам физики педагогических институтов и ко всем студентам-заочникам с просьбой присылать свои отзывы, пожелания и замечания по содержанию настоящего задачника-практикума.

Кафедра физики МГЗПИ

Г Л А В А I

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Основные уравнения постоянного электрического поля в вакууме имеют вид:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{4\pi\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$).

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума ($\epsilon_0 = 1$).

Поскольку напряженность электрического поля \vec{E} — безвихревой вектор, то ее можно выразить через скалярный потенциал φ

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (3)$$

определяемый из уравнения Пуассона:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho. \quad (4)$$

Общее решение уравнения Пуассона (4):

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv}{r}.$$

$$\varphi = \int \frac{\rho dv}{r}. \quad (5)$$

Потенциал электростатического поля точечного заряда:

В системе СИ

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

В абсолютной системе

$$\varphi = \frac{e}{r}. \quad (6)$$

Теорема Гаусса:

В системе СИ

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0}$$

В абсолютной системе

или

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = e,$$

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = 4\pi e, \quad (7)$$

причем вектор электрической индукции

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

причем вектор электрической индукции

$$\vec{D} = \vec{E}. \quad (8)$$

Скачок нормальной составляющей вектора \vec{E} :

В системе СИ

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

В абсолютной системе

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (9)$$

Плотность электрического заряда, индуцированного на поверхности проводника:

В системе СИ

$$\sigma = \epsilon_0 (E_n)_S$$

В абсолютной системе

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (E_n)_S \quad (10)$$

или

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_S$$

или

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_S. \quad (11)$$

а) Метод, основанный на использовании принципа суперпозиции полей

1. Вычислить потенциал и напряженность электростатического поля внутри и вне проводящей сферы радиуса a , по поверхности которой равномерно распределен заряд e .

Решение

Согласно принципу суперпозиции полей электростатического поле произвольной системы зарядов может быть определено путем суммирования кулоновых полей точечных зарядов. На этом основании потенциал электростатического поля, создаваемого в точке P (рис. 1), равномерно заряженной по поверхности сферой, может быть записан в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{de}{R}, \quad (1)$$

где de — заряд, приходящийся на элементарную сферическую полоску с площадью $dS = 2\pi a^2 \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$, а интегри-

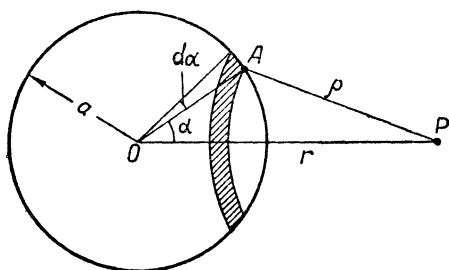


Рис. 1

рование производится по всей поверхности сферы. Заряд de в силу его бесконечной малости можно считать точечным и сосредоточенным в точке A .

Подставляя в выражение (1)

$$de = \sigma dS$$

и

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha},$$

находим:

$$\varphi = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0 r} (a + r - \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar}).$$

В случае, когда точка P лежит вне сферы ($r > a$),

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar} = r - a \text{ и}$$

$$\varphi_e = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{для } r > a).$$

Если точка наблюдения находится внутри сферы ($r < a$), то

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar} = a - r$$

и

$$\varphi_i = \frac{a\sigma}{\epsilon_0} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (\text{для } r < a).$$

2. На бесконечно тонкой квадратной пластинке (со стороной, равной $2a$) равномерно распределен заряд q . Определить поле пластинки на перпендикуляре, проходящем через ее центр. Написать приближенные формулы для расчета напряженности поля пластинки на малых расстояниях от центра ($z \ll a$) с точностью до членов порядка $\left(\frac{z}{a}\right)^4$ и на больших расстояниях ($z \gg a$) — с точностью до членов порядка $\left(\frac{a}{z}\right)^4$ включительно.

Р е ш е н и е

Используя цилиндрическую систему координат r, α, z (рис. 2) и применяя принцип суперпозиции полей, находим для потенциала в точке A следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha \int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \\ &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha}} d\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

В формуле (1) интегрирование ведется по одной восьмой части поверхности пластинки. Из рисунка 2 видно, что верхним пределом интегрирования по r является уравнение прямой BC , которое в полярных координатах имеет вид:

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Очевидно также, что потенциал в точке A зависит только от z ; поэтому вектор напряженности в этой точке направлен вдоль оси z и численно равен:

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma z}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (2)$$

(при дифференцировании по z мы воспользовались правилом дифференцирования определенных интегралов по параметру).

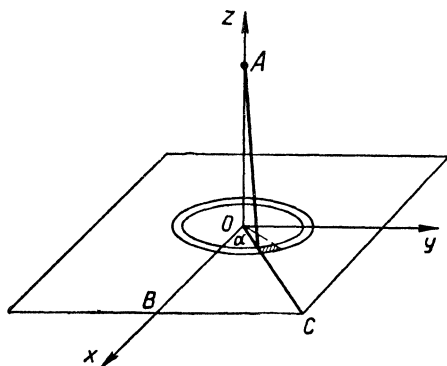


Рис. 2

Если точка наблюдения A находится на малых (по сравнению с размерами пластинки) расстояниях от ее центра, т. е. если $z \ll a$, то в разложении подынтегрального выражения (2) в ряд по степеням малого отношения $\frac{z^2 \cos^2 \alpha}{a^2}$ мы можем ограничиться первыми двумя членами, приняв

$$\begin{aligned} \left(z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\cos \alpha}{a} \left(1 + \frac{z^2 \cos^2 \alpha}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cong \\ &\cong \frac{\cos \alpha}{a} \left(1 - \frac{z^2 \cos^2 \alpha}{2a^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и выполняя интегрирование по α , получим:

$$E \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi a} z + \frac{5\sqrt{2}}{6\pi a^3} z^3 \right), \quad (z \ll a). \quad (4)$$

Аналогично поступаем и при вычислении поля на больших расстояниях ($z \gg a$) от центра пластинки. Оно оказывается равным:

$$E \simeq \frac{e}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (z \gg a). \quad (5)$$

Полученные формулы (4—5) показывают, что поле равномерно заряженной, но конечной пластинки можно отождествлять с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости лишь на малых расстояниях от нее. С другой стороны, поле конечной заряженной пластинки на больших расстояниях оказывается эквивалентным полю точечного заряда, чего нельзя сказать о поле бесконечной заряженной плоскости, так как ее поле всюду однородно.

3. Определить поле бесконечно тонкого кольца радиуса a , вдоль которого равномерно распределен заряд q .

Р е ш е н и е

Введем сферическую систему координат, совместив начало отсчета с центром кольца и направив полярную ось вдоль перпендикуляра к плоскости кольца (рис. 3). Тогда

$$\varphi_P = \frac{\gamma a}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(AP)} \frac{d\psi}{r^2}; \quad \gamma = \frac{q}{2\pi a}, \quad (1)$$

причем, имея в виду независимость вычисляемого поля от угла ψ , мы выбрали точку наблюдения в плоскости XOY . Рассматривая рисунок 3, легко показать, что

$$AP = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \Theta \cos \psi}. \quad (2)$$

В интеграле, который мы получаем после подстановки (2) в (1),

$$\varphi_P = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \Theta \cos \psi}}$$

заменяем переменную ψ по формуле $\psi = \pi + 2\alpha$. Тогда

$$\varphi_P = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \Theta - 4ar \sin \Theta \sin^2 \alpha}},$$

или

$$\varphi_P = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0} (a^2 + r^2 + 2ar \sin \Theta)^{-\frac{1}{2}} K(n), \quad (3)$$

где

$$K(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}}$$

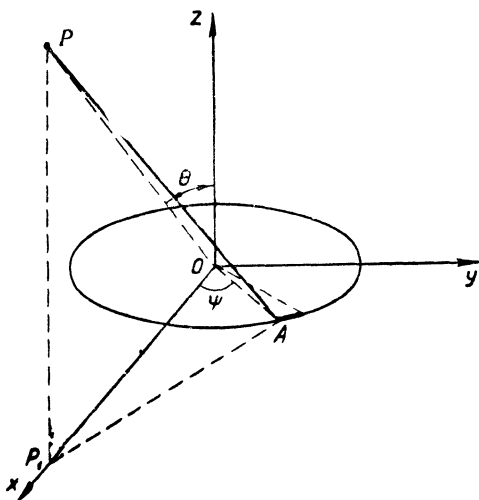


Рис. 3

есть полный эллиптический интеграл первого рода модуля

$$n = 2 \sqrt{\frac{ar \sin \Theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \Theta}}.$$

Функция $K(n)$ протабулирована (см., например, И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., Гостехиздат, 1953, стр. 79).

На достаточно больших расстояниях от кольца потенциал (3) можно с достаточной степенью точности представить в виде:

$$\varphi_P \cong \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \left[1 - \frac{a^2}{4r^2} (1 - 3 \cos^2 \Theta) \right]. \quad (4)$$

4. Внутри некоторого объема V' непрерывным образом распределен заряд e с объемной плотностью $\rho = \rho(r'_i)$. Показать, что если, выбрав начало координат где-нибудь внутри объема V' , соединить его с точкой наблюдения P (рис. 4)

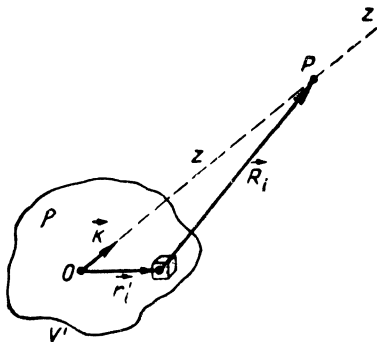


Рис. 4

и полученную прямую принять за ось z , то потенциал электрического поля на оси z с точностью до членов порядка $\left(\frac{1}{z}\right)^3$ включительно может быть представлен в виде:

$$\varphi \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} \right),$$

где

$$a_0 = \int_{V'} \rho(r'_i) dV' = e, \quad a_1 = \int_{V'} z'_i \rho(r'_i) dV' = p,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \int_{V'} (3z_i'^2 - r_i'^2) \rho(r'_i) dV' = Q$$

(p и Q — дипольный и квадрупольный моменты пространственно распределенного заряда).

Решение

Потенциал поля в точке P (рис. 4) записываем в виде:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = \int_{V'} \frac{\rho(r'_i) dV'}{R_i}, \quad (1)$$

где интегрирование распространяется на всю область V' , внутри которой распределен объемный заряд. Далее, непосредственно из рисунка 4 находим:

$$\vec{R}_i = z\vec{k} - \vec{r}'_i \text{ и } R_i^2 = z^2 + (r'_i)^2 - 2z(\vec{k} \vec{r}'_i),$$

откуда

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2\vec{k} \vec{r}'_i}{z} + \frac{(r'_i)^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Раскладывая (2) в ряд по степеням $\frac{r'_i}{z}$ и ограничиваясь в этом разложении лишь членами первого, второго и третьего порядка, получим:

$$\frac{1}{R_i} \cong \frac{1}{z} \left\{ 1 + \frac{\vec{k} \vec{r}'_i}{z} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{k} \vec{r}'_i)}{z^2} - \frac{(r'_i)^2}{z^2} \right] \right\},$$

или окончательно (после подстановки $\vec{r}'_i = x'_i \vec{i} + y'_i \vec{j} + z'_i \vec{k}$)

$$\frac{1}{R_i} \cong \frac{1}{z} + \frac{z'_i}{z^2} + \frac{1}{2z^3} (3z'^2 - r_i'^2). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), находим:

$$4\pi\epsilon_0\varphi \cong \frac{1}{z} \int_{V'} \rho(r') dV' + \frac{1}{z^2} \int_{V'} \rho(r') z' dV' + \\ + \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{2} \int_{V'} \rho(r') (3z'^2 - r'^2) dV',$$

или

$$4\pi\epsilon_0\varphi \cong \frac{e}{z} + \frac{p}{z^2} + \frac{Q}{z^3}.$$

5. Опыты показывают, что атомные ядра в состоянии равновесия не обладают дипольным моментом, но зато имеют отличный от нуля квадрупольный момент. С этим фактом согласуется представление об атомном ядре, как об эллипсоиде вращения, по объему которого равномерно распределен заряд Ze (Z —порядковый номер атома). Вычислить квадрупольный момент и электростатическое поле ядра.

Р е ш е н и е

По определению (см. задачу 4), дипольный момент ядра равен:

$$p = \int_V \rho z dV = \rho \int_{-b}^{+b} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} z dz.$$

Из уравнения поверхности ядра (т. е. поверхности эллипсоида вращения $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$) имеем:

$$z_{1,2} = \mp \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}. \quad (1)$$

Отсюда легко видеть, что

$$\int_{z_1}^{z_2} z \cdot dz = 0,$$

и поэтому дипольный момент эллипсоидального ядра оказывается равным нулю.

Квадрупольный момент ядра равен:

$$Q = \frac{1}{2} \rho \int_V (3z^2 - r^2) dV,$$

или

$$Q = \frac{1}{2} \rho \int_{-b}^{+b} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} (2z^2 - x^2 - y^2) dz. \quad (2)$$

Здесь пределы интегрирования по z определяются выражением (1), а пределы интегрирования по y легко найти из уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

лежащей в сечении поверхности ядра координатной плоскостью XOY . Вычислив затем стоящий в (2) тройной интеграл, получим:

$$Q = \frac{4}{15} \rho a b^3 (a^2 - b^2), \quad (3)$$

откуда (замечая, что $\frac{4}{3}\pi ab^2 = V$, где V — объем эллипсоида вращения, и $\rho V = Ze$) окончательно находим:

$$Q = \frac{1}{5}(a^2 - b^2)Ze. \quad (4)$$

Такова величина квадрупольного момента у атомного ядра, имеющего форму эллипсоида вращения.

Запишем теперь потенциал электростатического поля, создаваемого эллипсоидальным атомным ядром в точке, лежащей на его оси симметрии. С точностью до членов, пропорциональных $1/R^3$ включительно, указанный потенциал равен:

$$\varphi = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{(a^2 - b^2)Ze}{20\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (5)$$

где R — расстояние от центра ядра до точки наблюдения.

Выражение (5) показывает, что поле эллипсоидального ядра существенным образом отличается от поля сферического ядра, потенциал которого равен $\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R}$. Это отличие тем значительнее, чем больше у ядра квадрупольный момент. Особенно велики указанные отклонения вблизи ядра, где второе слагаемое в (5) может быть достаточно велико даже в том случае, если квадрупольный момент ядра близок к нулю. В то же время на больших расстояниях отклонения поля вытянутого ядра от поля сферического ядра незначительны и ими можно пренебречь.

6. Определить поле на больших расстояниях от системы из двух бесконечных и параллельных нитей, равномерно заряженных разноименными зарядами.

Р е ш е н и е

Прежде всего отметим, что так как нити бесконечны, то создаваемое ими поле не может зависеть от координаты z (рис. 5). Действительно, проведя через точку P прямую MN , параллельную нитям, можно утверждать, что во всех точках прямой MN поле одинаково. Это следует из очевидного факта: если через любую точку прямой MN провести плоскость, перпендикулярную к нитям, то последняя по причине бесконечности нитей разделит их на две бесконечно большие половины.

В силу указанной симметрии поля в качестве точки наблюдения удобнее всего взять точку P , лежащую в плоскости XOY . Тогда на основании принципа суперпозиции потенциал, создаваемый нитями в точке P , можно записать в виде:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{R_2} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{R_1}, \quad (1)$$

где λ —заряд, приходящийся на единицу длины каждой нити. Далее, очевидно, потенциал (1) можно переписать в виде:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = 2\lambda \left(\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} - \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} \right),$$

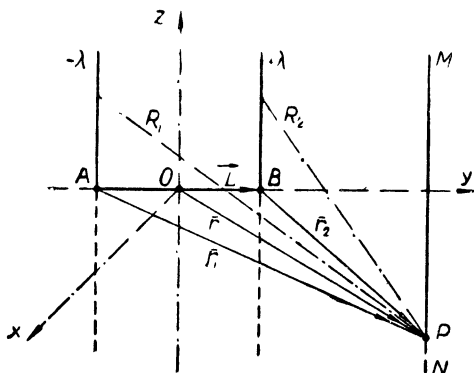


Рис. 5

откуда, производя интегрирование по z , находим:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = 2\lambda(\ln r_2 - \ln r_1). \quad (2)$$

Полученное для потенциала выражение (2)— это точное его значение, справедливое на любых расстояниях от системы нитей. Однако нас сейчас интересует приближенная форма потенциала (2), справедливая лишь на больших расстояниях от системы, или, другими словами, первый член разложения (2) в ряд по степеням малого отношения $\frac{L}{r}$ (на больших расстояниях $L \ll r$).

Для того чтобы разложить потенциал (2) в ряд, предварительно необходимо преобразовать его так, чтобы в него явно входили r и L . Из рисунка 5 видно, что

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{\vec{L}}{2}; \quad \vec{r}_2 = \vec{r} - \frac{\vec{L}}{2},$$

откуда

$$r_1 = r \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} + \frac{\vec{L}\vec{r}}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad r_2 = r \left(1 + \frac{L^2}{4r^2} - \frac{\vec{L}\vec{r}}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в формулу (2), находим:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = \lambda [\ln(1 + \alpha) - \ln(1 + \beta)], \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{L^2}{4r^2} + \frac{\vec{L}\vec{r}}{r^2}; \quad \beta = \frac{L^2}{4r^2} - \frac{\vec{L}\vec{r}}{r^2}.$$

Раскладывая затем логарифмические функции, стоящие в (4), в ряд соответственно по степеням α и β и ограничиваясь в полученных разложениях лишь первыми членами, получаем:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = \frac{2\lambda\vec{L}\vec{r}}{r^2},$$

откуда, обозначив $\lambda\vec{L} = \vec{P}$ (дипольный момент, приходящийся на единицу длины двойной нити), окончательно имеем:

$$4\pi\epsilon_0\varphi = \frac{2\vec{P}\vec{r}}{r^2}. \quad (5)$$

По виду своему полученное выражение напоминает потенциал обычного диполя. На этом основании систему двух бесконечных, параллельных и равномерно заряженных разноименными зарядами нитей часто называют двумерной дипольной системой зарядов.

Исходя из уравнения

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

и пользуясь при вычислении градиента от выражения (5) известными соотношениями векторного анализа (см. приложение 1, формулы 21, 22, 28 и 33), легко показать, что вектор напряженности двумерного дипольного поля равен:

$$4\pi\epsilon_0\vec{E} = \frac{4(\vec{P}\vec{r})\vec{r}}{r^4} - \frac{2\vec{P}}{r^2}.$$

7. Найти уравнение силовых линий поля двух параллельных и бесконечных нитей, заряженных электричеством так, что на единицу длины каждой из них приходится соответственно заряды $+\lambda$ и $-\lambda$.

Решение

Определение силовых линий поля, как известно, дается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\vec{E} = k \vec{dr} \quad (1)$$

или

$$E_x dy = E_y dx; \quad E_x dz = E_z dx.$$

В случае рассматриваемого нами плоского поля система (1) сводится к одному уравнению:

$$E_x dy = E_y dx. \quad (2)$$

Чтобы найти интересующие нас E_x и E_y , обратимся к выражению (2) предыдущей задачи, дающему точное значение потенциала поля для рассматриваемой системы зарядов. Исходя из определения $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ и пользуясь формулой (22) приложения 1, находим:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_2}{r_2^2} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} \right).$$

Обозначим $L = 2a$, так что точки A и B (рис. 5) будут соответственно иметь координаты $(0, -a)$ и $(0, a)$. Тогда

$$\vec{r}_1 = x\vec{i} + (y+a)\vec{j}; \quad \vec{r}_2 = x\vec{i} + (y-a)\vec{j}$$

и

$$E_x = \vec{E} \vec{i} = \frac{2\lambda axy}{\pi\epsilon_0 r_1^2 r_2^2}; \quad E_y = \vec{E} \vec{j} = -\frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 r_1^2 r_2^2} (x^2 - y^2 + a^2). \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение силовых линий (2) после подстановки найденных значений E_x и E_y принимает вид:

$$[x^2 - (y^2 - a^2)] \cdot dx + 2xydy = 0. \quad (4)$$

Приступая к интегрированию полученного уравнения, введем новую переменную $y^2 - a^2 = u^2$, после чего уравнение (4) приводится к однородному уравнению:

$$(x^2 - u^2)dx + 2xu du = 0,$$

в котором переменные легко разделяются при помощи хорошо известной подстановки $u = xt$. Так мы приходим к уравнению:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2t dt}{1+t^2} = 0,$$

интегрируя которое получаем:

$$x(1+t^2) = 2C.$$

Возвращаясь, наконец, к старым переменным, мы находим уравнение силовых линий поля:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2 + C^2. \quad (5)$$

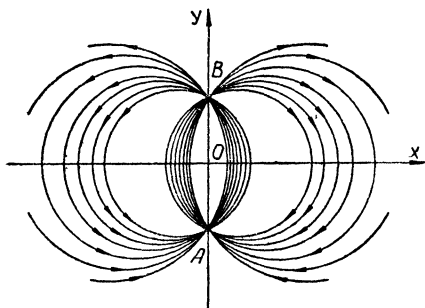


Рис. 6

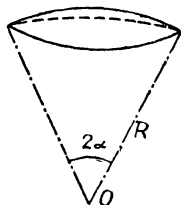


Рис. 7

В уравнении (5) C — произвольный параметр, варьируя который можно получить бесконечное множество силовых линий (рис. 6).

Задачи для самостоятельного решения

1*. Вычислить, пользуясь принципом суперпозиции, электростатическое поле равномерно заряженного по объему шара радиуса a .

2*. Заряд q равномерно распределен по поверхности шарового сегмента радиуса R , видимого из центра кривизны под углом 2α (рис. 7). Определить напряженность поля в центре кривизны сегмента.

3*. Точка P находится на расстоянии a от равномерно заряженной бесконечной плоскости. Показать, что половина полной напряженности поля $\left(\frac{\sigma}{4\epsilon_0}\right)$ в точке P обусловле-

на зарядами, находящимися на расстоянии $a \leq r \leq 2a$ от точки P , а другая половина—всеми остальными зарядами.

4*. На бесконечно тонкой круглой пластинке (радиуса a) равномерно распределен заряд q . Определить напряженность и потенциал поля на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через ее центр. Показать также, что полученные формулы переходят в формулы для поля бесконечной равномерно заряженной плоскости при $z \rightarrow 0$ и в формулы для поля точечного заряда, если $z \gg a$ (z — расстояние от центра пластинки до точки наблюдения).

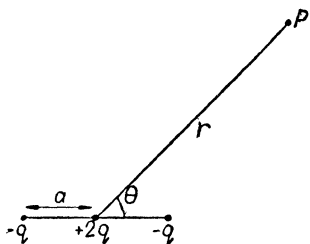


Рис. 8

5*. Тонкое плоское кольцо, внутренний и внешний радиусы которого соответственно равны a и b , заряжено электричеством с плотностью σ . Определить поле на перпендикуляре к плоскости кольца, проведенном через его центр.

6*. Вдоль бесконечно тонкого кольца радиуса a равномерно распределен заряд q . Определить напряженность поля на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр.

7*. Определить потенциал и напряженность электрического поля диполя на больших расстояниях от него.

8*. Показать, что в сферической системе координат R, Θ, α с центром в середине диполя и полярной осью, параллельной \vec{p} , составляющие вектора \vec{E} равны:

$$E_R = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 R^3} \cos \Theta; \quad E_\Theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sin \Theta; \quad E_\alpha = 0.$$

9*. Определить на больших расстояниях потенциал линейного квадруполья, у которого крайние заряды $-q$ отстоят от центрального $+2q$ на расстоянии a (рис. 8).

10*. Показать, что на больших расстояниях поле кольцевого заряда $-q$ радиуса b и концентрического, копланарного с ним другого кольцевого заряда $+q$ радиуса c совпадает с полем линейного квадруполья, рассмотренного в предыдущей задаче, если положить

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - c^2}.$$

11*. Допустим, что ядра ${}_{71}\text{Lu}^{176}$ и ${}_{53}\text{J}^{127}$ (число, написанное внизу слева от химического символа атома, обозначает порядковый номер Z , а число, написанное вверху справа, — массовое число A , или вес ядра в атомных единицах) представляют собой эллипсоиды вращения, полученные при деформации сферы радиуса $R = 1,2 \cdot 10^{-15} A^{1/3}$ м без изменения ее объема.

Вычислить отношение аксиальной полуоси a к экваториальной полуоси b , если известны квадрупольные моменты ядер (в $\text{к} \cdot \text{м}^2$): $5,6 \cdot 10^{-47}$ и $-4 \cdot 10^{-48}$ (соответственно для ядер Lu и J).

12*. Получить уравнение силовых линий электростатического поля диполя на больших расстояниях от него в плоскости XOY (ось y совпадает с направлением вектора дипольного момента \vec{p}).

б) Расчет электрических полей при помощи теоремы Гаусса

8. Заряд q находится в точке $A(a, 0, 0)$. Найти величину отрицательного заряда Q , который следует поместить в точку $B(-a, 0, 0)$ для того, чтобы поток вектора напряженности, проходящий справа налево сквозь круг $x=0$, $y^2 + z^2 = a^2$, был равен N .

Решение

По определению, поток вектора \vec{E} равен:

$$N = \int_S \vec{E}_1 \vec{n} df + \int_S \vec{E}_2 \vec{n} df, \quad (1)$$

где S — площадь круга. Из рисунка 9 видно, что

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{r}_1; \quad \vec{E}_1 \vec{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cos \alpha$$

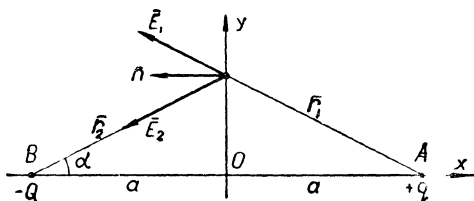


Рис. 9

и

$$\vec{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \vec{r}_2; \quad \vec{E}_2 \vec{n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cos \alpha,$$

или, так как

$$r_1 \cos \alpha = r_2 \cos \alpha = a \quad \text{и} \quad r_1 = r_2 = (a^2 + y^2)^{1/2},$$
$$\vec{E}_1 \vec{n} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} (a^2 + y^2)^{-3/2}; \quad \vec{E}_2 \vec{n} = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} (a^2 + y^2)^{-3/2}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), записывая элемент площади круга в виде $df = 2\pi y dy$ и интегрируя, находим:

$$N = \frac{(q+Q)a}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2y dy}{(V a^2 + y^2)^3} = (q+Q) \frac{2 - V\sqrt{2}}{4\epsilon_0},$$

откуда

$$Q = -q + 2\epsilon_0 N (2 + V\sqrt{2}).$$

9. Вычислить напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Р е ш е н и е

При решении электростатических задач с помощью теоремы Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{f} = \frac{e}{\epsilon_0} \quad (1)$$

необходимо прежде всего рациональным образом выбрать замкнутую поверхность, по которой в (1) ведется интегрирование. При ее выборе следует руководствоваться следующими правилами: 1) выбираемая поверхность должна обязательно проходить через точку наблюдения; 2) выбирать замкнутую поверхность S с учетом всех свойств симметрии задачи. Следует заметить, что успешное применение теоремы Гаусса к решению электростатических задач возможно лишь в том случае, если задача вообще обладает какими-либо свойствами симметрии.

В рассматриваемом примере очевидно, что все точки плоскости, проведенной через точку A параллельно заряженной плоскости (рис. 10), по отношению к последней совершенно равноправны, что является следствием бесконеч-

но больших размеров заряженной плоскости. То же самое надо сказать и о всех точках плоскости, проведенной параллельно заряженной плоскости через точку B , симметричную точке A . Из указанных свойств симметрии поля следует, что вектор \vec{E} перпендикулярен к заряженной плоскости и направлен в обе стороны от нее.

Чтобы определить напряженность поля в точке A , проводим круговой цилиндр, перпендикулярный к заряженной плоскости, причем одно его основание должно проходить

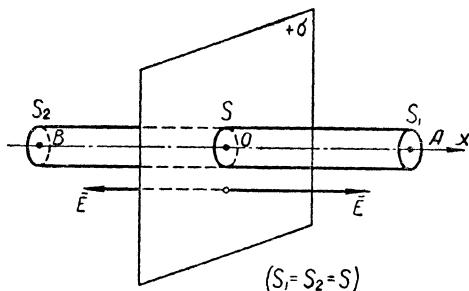


Рис. 10

через точку A , а другое—через точку B . Тогда поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндра оказывается равным нулю, так как вектор \vec{E} скользит по боковой поверхности, а поток вектора \vec{E} через всю замкнутую поверхность цилиндра будет равен:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{f} = ES_1 + ES_2 = 2ES.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса $N = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$, где $\sigma S = e$ — заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности цилиндра. Следовательно,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Потенциал поля определяем из уравнения

$$E = - \frac{d\varphi}{dx}.$$

Его решение имеет вид:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + C,$$

или

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x,$$

где φ_0 — потенциал поля на самой заряженной плоскости.

10. Поверхность бесконечного кругового цилиндра (радиуса a) равномерно заряжена электричеством так, что на единицу его длины приходится заряд λ . Определить напряженность поля внутри и вне цилиндра.

Р е ш е н и е

Вследствие симметрии поля вектор \vec{E} параллелен \vec{r} (цилиндр считается заряженным положительным зарядом) и является функцией от r . Находим поток вектора \vec{E} через замкнутую поверхность цилиндра с высотой, равной 1, и радиусом r . В силу того что \vec{E} параллелен \vec{r} , поток вектора \vec{E} через оба основания цилиндра равен нулю. Поэтому применение к указанному цилиндру теоремы Гаусса дает:

$$2\pi r E_e = \lambda/\epsilon_0 \quad \text{для } r > a,$$

$$2\pi r E_i = 0 \quad \text{для } r < a,$$

откуда находим:

$$\vec{E}_i = 0 \quad \text{и} \quad \vec{E}_e = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}.$$

Нормальная составляющая вектора \vec{E} при прохождении через заряженную поверхность цилиндра испытывает скачок, равный

$$E_{en} - E_{in} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

11. Внутри бесконечного равномерно заряженного по объему цилиндра с радиусом a имеется бесконечная цилиндрическая полость радиуса b , причем ее ось отстоит от оси цилиндра на расстоянии h . Определить поле внутри полости.

Р е ш е н и е

Применим к решению данной задачи весьма простой прием, основанный на принципе суперпозиции полей. Будем считать, что полость внутри цилиндра (рис. 11) одновременно заряжена и положительным электричеством с объемной плотностью $+\rho$ и отрицательным $-\rho$, так что в целом полость оказывается электронеutralной. Такое представление дает возможность рассматривать поле внутри полости как сумму двух полей: поля, возбуждаемого сплошным положительно заряженным цилиндром радиуса a , и поля, возбуждаемого отрицательно заряженным цилиндром радиуса b .

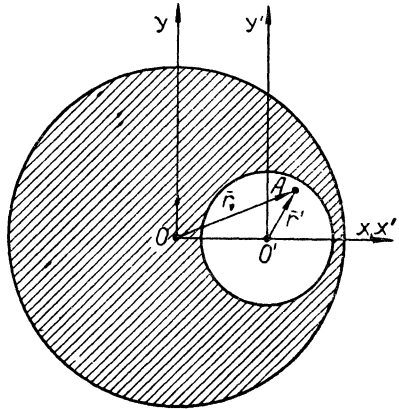


Рис. 11

Поле, создаваемое в точке A полости положительно заряженным цилиндром, как показывается в задаче 14*, равно:

$$\vec{E}^{(+)} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r},$$

или

$$E_x^{(+)} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} x; \quad E_y^{(+)} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} y \quad (1)$$

а поле, возбуждаемое в той же точке отрицательно заряженным цилиндром радиуса b , равно:

$$\vec{E}^{(-)} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}',$$

или

$$E_x^{(-)} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x'; \quad E_y^{(-)} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} y'. \quad (2)$$

Складывая поля (1) и (2), получаем:

$$E_x = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (x - x'); \quad E_y = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (y - y'). \quad (3)$$

Из рисунка 11 видно, что

$$x = x' + h \text{ и } y = y'. \quad (4)$$

Подставляя, наконец, (4) в (3), находим окончательно:

$$E_x = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \text{ и } E_y = 0.$$

Таким образом, поле внутри полости оказывается однородным и параллельным прямой, соединяющей ось цилиндра с ссью полости.

12. Положительный заряд $+e$ равномерно распределен по объему шара радиуса a . Внутри этого «роя» положительных зарядов находится отрицательный точечный заряд $-e$ (электрон), — такова самая первая модель атома водорода, предложенная Дж. Томсоном.

Определить силу, действующую на электрон со стороны электростатического поля объемно распределенного положительного заряда $+e$, как функцию расстояния электрона от центра атома. Какое движение совершает электрон под действием этой силы? Определить радиус атома Томсона, считая известными массу электрона, его заряд и длину электромагнитной волны ($\lambda = 500 \text{ м}\mu$), излучаемой атомом.

Решение

Для определения напряженности поля, возбуждаемого объемно распределенным положительным зарядом $+e$ в точке, где находится электрон (рис. 12), проводим сферу радиуса r . Вектор \vec{E} вследствие равномерного распределения заряда $+e$ по объему атома параллелен радиус-вектору электрона r . Поэтому применение теоремы Гаусса к сфере радиуса r дает

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{e}{\epsilon_0 a^3} \cdot r^3,$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}.$$

Сила, действующая на электрон со стороны объемно распределенного положительного заряда $+e$, равна

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}.$$

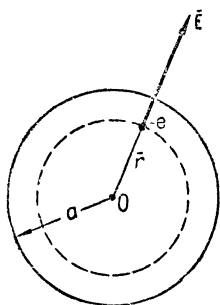


Рис. 12

Движение электрона внутри атома определяется уравнением:

$$\vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3},$$

решением которого являются гармонические колебания

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. Длина электромагнитной волны, испускаемой атомом, равна:

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m a^3}{e^2}},$$

откуда для радиуса атома Томсона находим выражение:

$$a = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2 e^2}{2\epsilon_0 m c^2} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Подстановка в (1) числовых значений: $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $e = 1,601 \cdot 10^{-19}$ к, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ ф/м, $m = 9,107 \times 10^{-31}$ кг и $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек дает:

$$a = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Задачи для самостоятельного решения

13*. Бесконечная пластинка толщиной $2a$ равномерно заряжена электричеством с объемной плотностью ρ . Выбрав начало координат на плоскости, равноудаленной от обеих поверхностей пластинки, и направив ось x по перпендикуляру к пластинке, определить, используя теорему Гаусса, напряженность поля внутри и вне пластинки.

14*. То же для бесконечного кругового цилиндра, равномерно заряженного электричеством с объемной плотностью ρ .

15*. В начале координат находится точечный заряд $+q$, вокруг которого в пространстве распределен отрицательный заряд $-q$ с объемной плотностью

$$\rho = -\frac{qa^2}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ar}}{r}.$$

Вычислить напряженность и потенциал электростатического поля, возбуждаемого такой системой зарядов.

16*. Внутри равномерно заряженного по объему шара (радиуса R) имеется сферическая полость радиуса a , при-

чем ее центр отстоит на расстоянии d от центра шара. Определить поле внутри полости (систему координат выбрать так, как показано на рисуне 13).

17*. Внутри бесконечной плоскопараллельной пластинки, рассматриваемой в задаче 13*, имеется полость в форме: а) бесконечного цилиндра (радиуса R), ось которого параллельна плоскости, делящей пластинку пополам, и

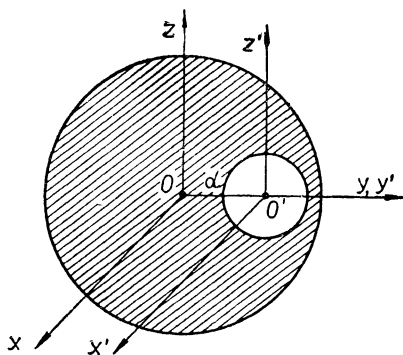


Рис. 13

отстоит от нее на расстоянии h ; б) сферы радиуса R , центр которой отстоит на расстоянии h от указанной выше плоскости.

Выбрав систему координат так, как показано на рисунке 14, определить поле внутри каждой полости.

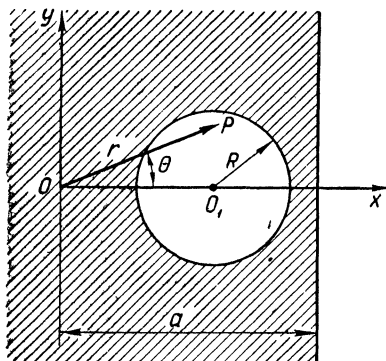


Рис. 14

в) Интегрирование уравнений Лапласа и Пуассона

13. Вычислить потенциал электростатического поля, создаваемого шаром радиуса R , по объему которого равномерно распределен заряд e .

Р е ш е н и е

Вводим сферическую систему координат r , θ и α , приняв за начало отсчета центр шара. Уравнение Пуассона, определяющее потенциал поля, принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r), \quad (1)$$

где

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho = \text{const} & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

Вследствие сферически симметричного распределения зарядов потенциал φ зависит только от расстояния r и не зависит от углов θ и α , т. е. $\varphi = \varphi(r)$. Поэтому уравнение (1) значительно упрощается, принимая вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_i}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (r \leq R) \quad (2)$$

и

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0, \quad (r \geq R). \quad (3)$$

Интегрируя уравнения (2) и (3), находим:

$$\begin{cases} \varphi_i = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{A}{r} + B, \\ \varphi_e = -\frac{C}{r} + D. \end{cases} \quad (4)$$

Постоянные A , B , C и D в выражениях (4) должны быть определены из следующих граничных условий:

1) потенциал φ_i должен оставаться конечным при $r \rightarrow 0$; отсюда непосредственно следует, что $A = 0$;

2) $\varphi_e \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, откуда $D = 0$;

3) потенциал электростатического поля является непрерывной функцией координат, поэтому необходимо, чтобы $\varphi_i(R) = \varphi_e(R)$;

4) нормальная составляющая вектора \vec{E} не должна испытывать скачка при прохождении через поверхность шара, т. е. $E_{in} = E_{en}$ при $r = R$, так как поверхностная плотность заряда σ на поверхности шара равна нулю (см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, ГТТИ, 1949, § 4, п. 2); легко видеть, что последнее условие эквивалентно требованию:

$$\left(\frac{d\varphi_i}{dr}\right)_{r=R} = \left(\frac{d\varphi_e}{dr}\right)_{r=R}.$$

Из последних двух условий находим:

$$C = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3 \text{ и } B = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2.$$

Искомые потенциалы окончательно записываются в виде:

$$\begin{cases} \varphi_i = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \\ \varphi_e = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \end{cases} \quad (5)$$

откуда при помощи уравнения $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ находим напряженность поля. Она оказывается равной:

$$\vec{E}_i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} \text{ при } r \leq R,$$

$$\vec{E}_e = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \text{ при } r \geq R.$$

14. Решить задачу 14* путем интегрирования уравнений Лапласа и Пуассона в цилиндрических координатах.

Р е ш е н и е

Вводим систему цилиндрических координат r , θ и z с осью Z , совпадающей с осью цилиндра, и записываем уравнение Пуассона в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r), \quad (1)$$

где

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho = \text{const} & \text{при } r \leq a, \\ 0 & \text{при } r \geq a. \end{cases}$$

Далее очевидно, что в силу бесконечности линейных размеров цилиндра его поле симметрично относительно любой плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, откуда следует, что потенциал φ не зависит от z . Ввиду того что цилиндр круговой, а заряд распределен равномерно по объему цилиндра, потенциал поля не может зависеть и от угла θ . В силу указанных свойств симметрии поля уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_i}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (r \leq a) \quad (2)$$

и

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = 0, \quad (r \geq a). \quad (3)$$

Интегрируя уравнения (2) и (3), находим:

$$\begin{cases} \varphi_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \\ \varphi_e = C_3 \ln r + C_4, \end{cases} \quad (4)$$

откуда напряженности поля

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r - \frac{C_1}{r} \quad \text{и} \quad E_e = -\frac{d\varphi_e}{dr} = -\frac{C_3}{r}.$$

Для того чтобы напряженность E_i оставалась конечной при $r \rightarrow 0$, следует положить $C_1 = 0$, так как в противном случае $E_i \rightarrow -\infty$ (при $r \rightarrow 0$) и, следовательно, обращалась бы в бесконечность и энергия поля

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dv,$$

т. е. имело бы место нарушение закона сохранения энергии.

Удовлетворить требованию $\varphi_e \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ (как это оказалось возможным в задаче с шаром) нельзя, так как с этой целью следовало бы положить $C_3 = 0$ и, следовательно, считать $E_e \equiv 0$ (при любых $r \geq a$), но это не соответствует действительности. Поэтому мы будем считать $C_3 \neq 0$. Это не может нас смущать, так как обращение в бесконечность потенциала φ_e при $r \rightarrow \infty$ само по себе не представляет никакой опасности для закона сохранения

энергии, так как при этом $E_e \rightarrow 0$. Известно, что физический смысл имеет не потенциал φ , а напряженность поля \vec{E} или разность потенциалов. Логарифмическая расходимость потенциала на больших расстояниях — характерная особенность полей, обладающих осевой симметрией.

Наконец, из (4) видно, что $\varphi_i \rightarrow C_2$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому положим $C_2 = \varphi_0$, где φ_0 — потенциал поля на оси цилиндра. После всех сделанных выше замечаний потенциалы (4) принимают вид:

$$\varphi_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + \varphi_0; \quad \varphi_e = C_3 \ln r + C_4, \quad (5)$$

где постоянные C_3 и C_4 подлежат определению из следующих граничных условий:

$$\varphi_i(a) = \varphi_e(a) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\varphi_i}{dr}\right)_{r=a} = \left(\frac{d\varphi_e}{dr}\right)_{r=a},$$

представляющих собой требование непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора \vec{E} на поверхности цилиндра; указанным условиям можно удовлетворить, положив

$$C_3 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} a^2 \quad \text{и} \quad C_4 = \varphi_0 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} a^2 \ln a - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} a^2.$$

Окончательно находим:

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_0 - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2, \\ \varphi_e = \varphi_0 - \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a}\right). \end{cases}$$

15. Определить поле вне проводящего незаряженного шара (радиуса R), находящегося во внешнем однородном электрическом поле E_0 . Какова величина дипольного момента шара? Как распределяется на его поверхности индуцированный заряд?

Р е ш е н и е

Вводим сферическую систему координат с началом в центре шара и полярной осью x , направленной вдоль внешнего поля E_0 (рис. 15). Тогда потенциал в точке, находящейся вне шара, можно записать в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

где φ_0 — потенциал внешнего поля ($\varphi_0 = -E_0x + C$), а φ_1 — изменение потенциала, вызываемое проводящим шаром, так что

$$\varphi = -E_0x + \varphi_1 + C. \quad (1)$$

Потенциал φ_1 необходимо определить так, чтобы он удовлетворял следующим трем условиям:

- 1) φ_1 является решением уравнения Лапласа $\Delta\varphi_1 = 0$;
- 2) $\varphi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, что равносильно требованию:

$$\varphi \rightarrow (-E_0x + C) \text{ при } r \rightarrow \infty$$

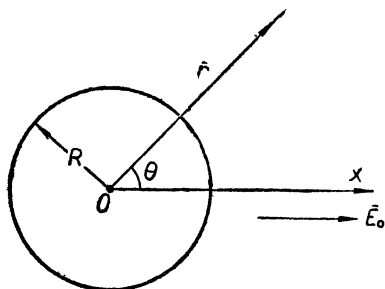


Рис 15

(на больших расстояниях от шара внешнее поле не подвергается изменениям);

3) $\varphi_1 = E_0x$ при $r = R$; это условие равносильно требованию постоянства потенциала (1) на поверхности проводящего шара.

Ввиду симметрии шара потенциал φ_1 может зависеть лишь от одного постоянного вектора \vec{E}_0 , так как потенциал φ_1 пропорционален плотности зарядов, наведенных на поверхности шара, а последняя пропорциональна величине поля E_0 ; с другой стороны, потенциал φ_1 во всех точках сферы, проходящей через точку наблюдения и концентричной поверхности шара, одинаков. Можно показать, что единственным таким решением уравнения Лапласа, обращающимся на бесконечности в нуль, является

$$\varphi_1 = -\alpha \vec{E}_0 \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \alpha \frac{\vec{E}_0 \vec{r}}{r^3}, \quad (2)$$

где α — произвольная постоянная, подлежащая определению из третьего граничного условия.

Выражению (2) можно дать простое физическое толкование. Известно, что при внесении проводящего шара во внешнее поле в нем происходит перераспределение свободных зарядов: на одной половине его поверхности наводятся положительные заряды, а на другой — отрицательные, так что по отношению к внешнему пространству шар в целом ведет себя как некоторый электрический диполь. По-

тенциал диполя равен $\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Отсюда следует, что дипольный момент проводящего шара, находящегося во внешнем однородном поле \vec{E}_0 , равен:

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \alpha \vec{E}_0. \quad (3)$$

Для определения α записываем граничное условие (3):

$$\frac{\alpha E_0}{R^2} \cos \Theta = E_0 R \cos \Theta,$$

откуда

$$\alpha = R^3 \quad (4)$$

и

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0. \quad (5)$$

Подставляя выражения (2) и (4) в (1), находим для искомого потенциала

$$\varphi = -E_0 r \cos \Theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + C. \quad (6)$$

Распределение зарядов на поверхности шара дается выражением:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \Theta. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что полный заряд шара

$$e = \int \sigma df = 0.$$

16. Неограниченная плоскость с выступом в виде полушеры радиуса a представляет собой границу бесконечного проводника. Найти распределение заряда на его поверхности.

Р е ш е н и е

Чтобы найти распределение зарядов на поверхности данного проводника, необходимо написать подходящий потенциал, для которого поверхность проводника была бы эквипотенциальной поверхностью. Таким потенциалом в рассматриваемом случае служит потенциал, найденный в предыдущей задаче:

$$\varphi = \text{const} \cdot x \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + C. \quad (1)$$

Действительно, по отношению к потенциалу (1) неограниченная плоскость $x = 0$ с выступом в виде полусферы радиуса $r = a$ является эквипотенциальной поверхностью, на которой $\varphi = C$. Поэтому указанная поверхность может быть и поверхностью проводника, а потенциал (1) определяет электростатическое поле вне проводника (приведенные выше рассуждения основаны на теореме об однозначности и единственности решения электростатических задач, с которой читатель может познакомиться по книге И. Е. Тамма, § 13, или по книге А. А. Власова «Макроскопическая электродинамика», ГТТИ, 1955, стр. 81—84).

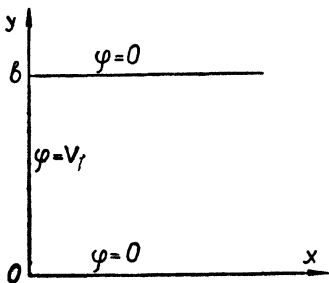


Рис. 16

Распределение зарядов на плоской части поверхности проводника дается выражением:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \quad (2)$$

(мы положили $\text{const} = -\sigma_0/\epsilon_0$, где σ_0 — плотность зарядов вдали от выступа); на поверхности полусферы

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{3\sigma_0 x}{a}. \quad (3)$$

17. Найти распределение потенциала внутри полубесконечной прямоугольной коробки (рис. 16), вертикальная стенка которой имеет потенциал V , а горизонтальные стенки — потенциал, равный нулю.

Р е ш е н и е

Математическая формулировка задачи: проинтегрировать уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = V, & (2) \\ \varphi(x, 0) = 0, & (3) \\ \varphi(x, b) = 0, & (4) \\ \varphi \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. & (5) \end{cases}$$

Интегрировать уравнение (1) будем по методу разделения переменных (метод Фурье; см.: В. И. Левин. Методы математической физики. М., Учпедгиз, 1956, стр. 84), т. е. будем искать $\varphi(x, y)$ в виде:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (6)$$

Подстановка $\varphi_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y)$ в уравнение (1) дает возможность разделить в нем переменные x и y ; в результате приходим к уравнению:

$$\frac{1}{X_n} \frac{d^2 X_n}{dx^2} = - \frac{1}{Y_n} \frac{d^2 Y_n}{dy^2}.$$

Приравнивая полученные отношения произвольной постоянной k^2 , получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_n}{dx^2} - k^2 X_n = 0, \\ \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + k^2 Y_n = 0. \end{cases}$$

Их общее решение имеет вид:

$$X_n(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}; \quad Y_n(y) = a_n \cos ky + b_n \sin ky.$$

Однако в силу граничного условия (5) мы должны оставить в $X_n(x)$ лишь первое частное решение, так как в противном случае нельзя было бы удовлетворить условию (5). С учетом сказанного решение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-kx} (A_n \cos ky + B_n \sin ky). \quad (6^*)$$

Запишем также граничные условия (2) — (4):

$$\varphi(0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos ky + B_n \sin ky) = V, \quad (2^*)$$

$$\varphi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-kx} = 0, \quad (3^*)$$

$$\varphi(x, b) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-kx} (A_n \cos kb + B_n \sin kb) = 0. \quad (4^*)$$

Из выражения (3*) непосредственно следует, что

$$A_n = 0. \quad (7)$$

Легко видеть, далее, что выражение (4*) будет иметь место лишь в том случае, если $\sin kb = 0$, откуда

$$k = \frac{S\pi}{b}, \quad (8)$$

где S — целое число.

С учетом значений (7) и (8) решение задачи (6*) и неиспользованное граничное условие (2*) можно переписать:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\frac{S\pi x}{b}} \sin \frac{S\pi}{b} y \quad (9)$$

и

$$\varphi(0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin \frac{S\pi}{b} y = V. \quad (10)$$

С другой стороны, разложение $V(y) = V$ в ряд Фурье имеет вид:

$$V = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \sin \frac{S\pi}{b} y,$$

где

$$\beta_s = \frac{2}{b} \int_0^b V \sin \frac{S\pi}{b} y \cdot dy.$$

Вычисления показывают, что

$$\beta_s = \begin{cases} \frac{4V}{(2n+1)\pi}, & \text{когда } S = 2n + 1, \\ 0, & \text{когда } S = 2n, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (11)$$

Сравнивая выражения (11) и (10), находим:

$$B_n = \frac{4V}{(2n+1)\pi},$$

$$\varphi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi}{b} y \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{b} x}.$$

Для представления решения в конечном виде воспользуемся разложением:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin y}{\operatorname{sh} x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1} \sin(2n+1)y \quad (x > 0),$$

откуда окончательно находим:

$$\varphi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left| \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right|.$$

18. Заряженный проводящий клин со сторонами $\theta = \alpha$ и $\theta = -\alpha$ пересекается под прямым углом с заряженной проводящей плоскостью $z = 0$. Вычислить электростатический потенциал в области $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$; $z > 0$.

Р е ш е н и е

Искомый потенциал записываем в виде:

$$\varphi = U(r, \theta, z) + \varphi_0,$$

где φ_0 — потенциал на поверхности проводника, а $U(r, \theta, z)$ — функция, характеризующая распределение потенциала внутри полубесконечного проводящего клина. Она является решением уравнения Лапласа (в цилиндрических координатах)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$U(r, -\alpha, z) = U(r, \alpha, z) = U(r, \Theta, 0) = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$U(r, \Theta, z) = f(z) \cdot R(r) \cdot Y(\Theta). \quad (4)$$

Подстановка (4) в (2) приводит нас к новому уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \Theta^2} \right\} + \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} = 0, \quad (5)$$

в котором можно разделить переменные.

Следует заметить, что в силу линейности исходного уравнения (2) интересующие нас функции $f(z)$ и $R(r)$ имеют вид полиномов от z или r . Известно также, что решение уравнения (2) должно быть справедливым во всей рассматриваемой нами области ($-\alpha \leq \Theta \leq \alpha$, $z > 0$), в том числе и на больших расстояниях от плоскости ($z \rightarrow \infty$) и ребра клина ($r \rightarrow \infty$). Отсюда следует, что в полиномах $f(z)$ и $R(r)$ надо сохранить лишь члены с наименьшими положительными степенями z и r . Так, с точностью до постоянной можно положить

$$f(z) = z. \quad (6)$$

Тогда в остающемся от (5) уравнении

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\Theta^2} = 0 \quad (7)$$

легко разделить переменные r и Θ . Для этого в уравнении (7) первое слагаемое приравняем m^2 , а второе $-m^2$, после чего для определения функций $R(r)$ и $Y(\Theta)$ получаем два весьма простых уравнения:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - m^2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\Theta^2} + m^2 Y = 0. \quad (9)$$

Интересующие нас решения уравнений (8) и (9) имеют вид:

$$R(r) = r^m \quad (10)$$

и

$$Y(\Theta) = A \cos m \Theta + B \sin m \Theta. \quad (11)$$

Подстановка (6), (10) и (11) в (1) дает:

$$\varphi = z \cdot r^m (A \cos m \Theta + B \sin m \Theta) + \varphi_0. \quad (12)$$

Из граничных условий (3), которые принимают теперь вид:

$zr^m (A \cos m\alpha - B \sin m\alpha) = zr^m (A \cos m\alpha + B \sin m\alpha) = 0$
 (последнее условие в (3) удовлетворяется тождественно), считая $A \neq 0$, находим:

$$m = \frac{\pi}{2a} \text{ и } B = 0. \quad (13)$$

Для m , как указывалось выше, выбрано наименьшее возможное значение. Подстановка (13) в (12) приводит к окончательному ответу на вопрос задачи:

$$\varphi = Azr^{\frac{\pi}{2a}} \cos \frac{\pi\theta}{2a} + \varphi_0.$$

Задачи для самостоятельного решения

18*. Решить задачу 1 путем интегрирования уравнения Лапласа в сферических координатах.

19*. В статистической модели атома (модель Томаса — Ферми), справедливой для атомов с большими порядковыми номерами Z , принимается, что атомные электроны образуют вокруг ядра непрерывное электронное облако, плотность которого является функцией расстояния от ядра. Она приближенно может быть записана в виде:

$$\rho = -\frac{A}{x^3} e^{-x}; \quad x = \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где A определяется из условия нормировки

$$-Ze = \int \rho dv,$$

а параметр a выбирается так, чтобы полная энергия атома

$$E = T + U_1 + U_2,$$

складывающаяся из кинетической энергии электронов T , энергии электростатического взаимодействия электронов с ядром U_1 и энергии взаимодействия электронов между собой U_2 , была минимальной.

Считая параметр a известным, вычислить потенциал электростатического поля, возбуждаемого электронным облаком на расстоянии r от центра ядра.

20*. Определить поле вне бесконечного проводящего цилиндра радиуса R , находящегося в однородном поперечном поле E_0 . Определить также дипольный момент единицы длины цилиндра и распределение зарядов на его поверхности.

21*. Найти распределение зарядов на поверхности проводника, граница которого представляет собой неограниченную плоскость с выступом в виде бесконечного полуцилиндра радиуса a .

22*. То же для бесконечного проводника, границей которого является неограниченная плоскость с вмятиной: а) в виде полусферы радиуса a ; б) в виде бесконечного полуцилиндра того же радиуса.

23*. Показать, что функции

$$\varphi_1 = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ и } \varphi_2 = b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где a и b — постоянные, служат решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. При каком расположении точечных зарядов вблизи начала координат создаются на больших расстояниях потенциалы φ_1 и φ_2 ?

24*. Показать, что в пространстве, в котором отсутствуют заряды, потенциал электростатического поля не может принимать ни максимальных, ни минимальных значений.

25*. Найти потенциал электростатического поля внутри вытянутой коробки прямоугольного сечения, две противоположные грани которой находятся при потенциале V , а две другие заземлены (рис. 17).

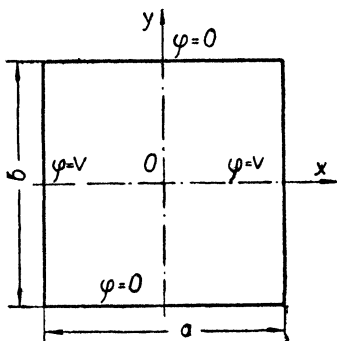


Рис. 17

26*. Даны три заряженные ортогональные проводящие поверхности: клин со сторонами $\Theta = a$ и $\Theta = -a$, плоскость $Z = 0$ и цилиндр $r = a$. Определить электростатический потенциал в области $-a \leq \Theta \leq a, Z > 0$ и $r > a$.

27*. Найти распределение потенциала в пространстве между двумя проводящими бесконечными полуцилиндрами

ми, один из которых поддерживается при потенциале φ_0 , а другой — при нулевом потенциале (в месте стыка полуцилиндры разделены бесконечно тонким изолирующим слоем).

г) Метод электрических изображений

19. Точечный заряд $+e$ находится на расстоянии a от плоской поверхности бесконечного проводника, занимающего все левое полупространство. Определить поле вне проводника. Найти также поверхностную плотность отрицательных зарядов, индуцированных на поверхности проводника.

Р е ш е н и е

Электростатическое поле точечного заряда в присутствии незаряженного проводника является суммой двух различных по своей природе полей: собственного поля точечного заряда и поля, создаваемого зарядами, индуцированными на поверхности проводника. Однако непосредственное применение к расчету интересующего нас поля принципа суперпозиции ни к чему не приводит, — нам неизвестен характер распределения индуцированных зарядов.

На помощь приходит уже упоминавшаяся нами в задаче 16 теорема об однозначности и единственности решения задач электростатики. Практический смысл этой очень важной теоремы состоит в следующем: формально решение той или иной электростатической задачи очень часто можно угадывать, основываясь на тех или иных интуитивных соображениях; и если затем окажется, что построенное таким образом решение будет удовлетворять всей совокупности физических требований, предъявляемых к искомому решению, то на основании теоремы об однозначности и единственности решения электростатических задач можно будет утверждать, что это «угаданное» решение не только правильное, но и единственное решение рассматриваемой задачи.

Таким образом, указанная теорема для целого ряда задач электростатики позволяет обосновать сугубо специальные методы решения. Метод изображений является одним из таких методов. Постараемся изложить основные идеи этого метода на примере рассмотрения данной задачи.

Итак, мы будем пытаться «угадать» решение нашей задачи. Но прежде чем начать такое угадывание, необходимо

сформулировать все физические условия, которым должно удовлетворять искомое решение. Эти требования сводятся к следующему:

1) искомое решение всюду должно удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$ (за исключением лишь той точки, где находится сам точечный заряд $+e$; потенциал в этой точке обращается в бесконечность за счет обращения в бесконечность собственного поля заряда);

2) $\varphi = 0$ на поверхности проводника, так как поверхность проводника совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей искомого решения (потенциал проводника для простоты принимаем равным нулю);

3) $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ (не следует забывать, что представление о бесконечном проводнике является физической идеализацией, на самом деле в задаче имеется, конечно, в виду конечный кусок проводника, размеры которого, однако, велики по сравнению с расстоянием от проводника до точечного заряда; если это учесть, то на больших расстояниях поверхностный заряд проводника следует, очевидно, считать точечным).

Нетрудно теперь видеть, что всем указанным условиям удовлетворяет потенциал

$$4\pi\epsilon_0\varphi = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \quad (1)$$

где смысл r_1 и r_2 ясен из рисунка 18. Формально потенциал (1) получен в результате замены всех индуцированных на поверхности проводника зарядов одним точечным зарядом $-e$, расположенным в точке A' , представляющей собой зеркальное изображение точки A (где находится заряд $+e$) в плоской границе проводника. В такой замене истинных поверхностных зарядов фиктивными точечными зарядами, которые вместе с данными зарядами создавали бы такое поле, для которого поверхность проводника слу-

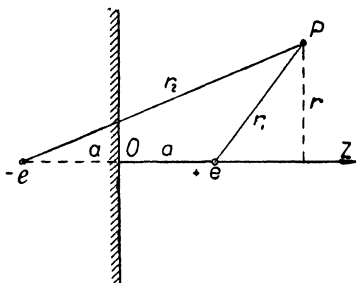


Рис. 18

жила бы одной из его эквипотенциальных поверхностей, и состоит основная идея излагаемого метода.

Чтобы определить распределение зарядов на поверхности проводника, введем цилиндрическую систему координат (так, как это показано на рисунке 18) и перепишем потенциал (1) в виде:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = e \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} \right],$$

откуда, пользуясь формулой

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)_{z=0},$$

находим:

$$\sigma = -\frac{ae}{2\pi R^3},$$

где $R = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$.

20. То же для бесконечной прямой равномерно заряженной нити, параллельной плоской границе проводника и отстоящей от нее на расстоянии a .

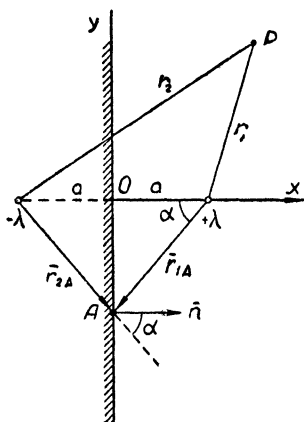


Рис. 19

Решение

Вводим декартову систему координат так, как это указано на рисунке 19 (ось z параллельна заряженной нити и перпендикулярна к плоскости чертежа). В силу бесконечных размеров нити и проводника искомое поле, очевидно, одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости чертежа, другими словами, искомое поле не зависит от координаты z . Поэтому совокупность

физических требований, которые мы должны предъявить к искомому решению, сводится к следующему:

1) искомый потенциал всюду удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0;$$

2) $\varphi = 0$ на поверхности проводника, т. е. при $x = 0$ потенциал проводника принимается равным нулю. Требовать, чтобы как и в предыдущей задаче $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, очевидно, бессмысленно, так как потенциал нити логарифмически расходится на бесконечности.

Сформулированным выше условиям удовлетворяет потенциал

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2, \quad (1)$$

который служит искомым решением задачи. Формально потенциал (1) получается в результате замены индуцированных поверхностных зарядов фиктивной, равномерно заряженной отрицательным электричеством, бесконечной нитью, параллельной данной нити и являющейся ее зеркальным изображением в граничной плоскости проводника.

При определении распределения индуцированных зарядов будем пользоваться формулой $\sigma = \epsilon_0 \cdot (E_n)_A$, где $(E_n)_A$ — нормальная составляющая вектора напряженности в какой-нибудь точке A на поверхности проводника. Из формулы (1) находим:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} \right) \text{ и } (E_n)_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\vec{r}_{1A}\vec{n})}{r_{1A}^2} - \frac{(\vec{r}_{2A}\vec{n})}{r_{2A}^2} \right]. \quad (2)$$

Подстановка в формулу (2) значений для $r_{1A} = r_{2A}$, $(\vec{r}_{1A}\vec{n})$ и $(\vec{r}_{2A}\vec{n})$, легко определяемых при помощи рисунка 19, дает:

$$\sigma = -\frac{\lambda(a+y)}{2\pi(a^2+y^2)}. \quad (3)$$

В формулах (1) и (3) λ — заряд, приходящийся на единицу длины нити.

21. Проводником заняты три четверти всего пространства. В свободной от проводника части пространства на расстояниях a и b от плоских стенок проводника находится точечный заряд $+e$.

Определить силу притяжения заряда к проводнику и величину отрицательных зарядов, индуцированных на поверхностях XOZ и YOZ проводника (за координатную плоскость XOY принять плоскость, перпендикулярную к стенкам проводника и проходящую через заряд $+e$).

Р е ш е н и е

Поверхность проводника совпадает с эквипотенциальной поверхностью потенциала

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right), \quad (1)$$

который и является искомым решением задачи. При его написании поверхностный заряд проводника заменен тройкой фиктивных точечных зарядов, помещенных в точках A , B и C координатной плоскости XOY (рис. 20).

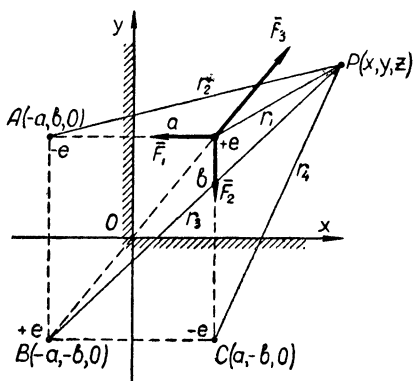


Рис. 20

Сила, с которой заданный точечный заряд $+e$ притягивается к проводнику, равна:

$$\vec{F} = - \frac{e^2}{16 \pi \epsilon_0 a^2 b^2} (b^2 \vec{i} + a^2 \vec{j}) + \frac{e^2}{16 \pi \epsilon_0 r_0^3} \vec{r}_0,$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор заданного точечного заряда. Далее, воспользовавшись тем, что

$$r_1 = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2 = [(x + a)^2 + (y - b)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_3 = [(x + a)^2 + (y + b)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_4 = [(x - a)^2 + (y + b)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

перепишем потенциал (1) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \{ [(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} - \\ & - [(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} + \\ & + [(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} - \\ & - [(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \}. \end{aligned}$$

Отсюда по формулам

$$\sigma_{xoz} = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{и} \quad \sigma_{yoz} = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{x=0}$$

определяем распределения зарядов на стенках проводника, совпадающих с координатными плоскостями XOZ и ZOY . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sigma_{xoz} = & -\frac{eb}{2\pi} \{ [(x-a)^2 + z^2 + b^2]^{-\frac{3}{2}} - \\ & - [(x+a)^2 + z^2 + b^2]^{-\frac{3}{2}} \} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{yoz} = & -\frac{ea}{2\pi} \{ [(y-b)^2 + z^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} - \\ & - [(y+b)^2 + z^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} \}. \end{aligned}$$

Заряд, распределенный на поверхности XOZ проводника, равен:

$$\begin{aligned} e_1 = & -\frac{eb}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + z^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{[(x+a)^2 + z^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} dx dz = -\frac{2e}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется заряд, распределенный на поверхности ZOY . Он равен:

$$e_2 = -\frac{2e}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Очевидно также, что полный заряд, индуцированный на поверхности проводника, равен $-e$.

22. На некотором расстоянии друг от друга находятся два точечных заряда e_1 и $-e_2$. Определить поверхность, на которой потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} \right)$$

равен нулю,

Решение

Допустим, что искомой поверхностью является поверхность, изображенная на рисунке 21. Выясним, что должна представлять собой эта поверхность.

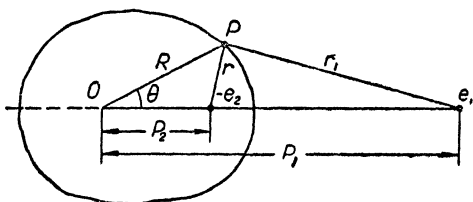


Рис. 21

Для этого на продолжении прямой, соединяющей заданные заряды, за отрицательным зарядом $-e_2$ выбираем полюс O полярной системы координат. Обозначим $Oe_1 = p_1$ и $Oe_2 = p_2$. Тогда

$$r_1^2 = R^2 + p_1^2 - 2p_1R \cos \Theta \quad \text{и} \quad r_2^2 = R^2 + p_2^2 - 2p_2R \cos \Theta.$$

Чтобы в любой точке искомой поверхности $\varphi = 0$, необходимо, чтобы

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

или

$$\frac{e_1^2}{e_2^2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\frac{R^2}{p_1} + p_1 - 2R \cos \Theta}{\frac{R^2}{p_2} + p_2 - 2R \cos \Theta}.$$

Отсюда непосредственно видно, что если начало координат выбрать так, чтобы

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{e_1^2}{e_2^2},$$

то искомой поверхностью будет являться сфера радиуса

$$R = \sqrt{p_1 p_2} = \text{const.}$$

Другими словами, искомой поверхностью является сфера, центр которой делит отрезок прямой, соединяющей заданные заряды, извне в отношении квадратов зарядов.

23. В эвакуированной сферической камере (с радиусом, равным 10 см) с заземленными проводящими стенками в некоторый момент времени на расстоянии $r = 6$ см от ее центра образовался ион водорода, не обладающий в момент образования начальной скоростью. Через какой промежуток времени ион достигнет стенки камеры?

Р е ш е н и е

Ион движется вдоль оси x (рис. 22) под действием силы притяжения к заряду-изображению $-e_1$, движущемуся

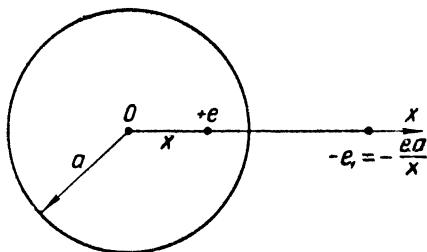


Рис. 22

навстречу иону. Эта сила, как было показано в задаче 22, равна:

$$F = - \frac{e^2 a x}{4\pi \epsilon_0 (a^2 - x^2)^2},$$

где x — координата движущегося иона.

Дифференциальное уравнение движения иона имеет, следовательно, вид:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{e^2 a x}{4\pi \epsilon_0 (a^2 - x^2)^2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) должно быть проинтегрировано при следующих начальных условиях: при $t = 0$, $x_0 = r$ и $v_0 = 0$.

Умножая обе части уравнения (1) на скорость v и интегрируя полученное уравнение

$$\int_0^v d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} \int_r^x \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2},$$

находим:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2 a}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a^2 - x^2} - \frac{1}{a^2 - r^2} \right),$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v = e \sqrt{\frac{a}{4\pi\epsilon_0 m (a^2 - r^2)}} \left(\frac{x^2 - r^2}{a^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Интегрируя еще раз уравнение (2), находим величину интересующего нас отрезка времени:

$$\tau = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m (a^2 - r^2)}{a}} \int_r^a \left(\frac{x^2 - r^2}{a^2 - x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (3)$$

Стоящий в (3) определенный интеграл с помощью подстановки

$$\frac{a^2 - x^2}{x^2 - r^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

преобразуется так:

$$a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right) = a \{K(n) - E(n)\},$$

где $K(n)$ и $E(n)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = 0,8.$$

В результате полученное нами выражение (3) принимает вид:

$$\tau = \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a (a^2 - r^2)}}{e} \{K(0,8) - E(0,8)\}. \quad (4)$$

Подстановка в (4) числовых значений ϵ_0 , m , e , $K(0,8)$ и $E(0,8)$ дает

$$\tau = 4,88 \cdot 10^{-2} \text{ сек.}$$

24. Точечный заряд $+e$ находится на расстоянии a от центра заземленной проводящей сферы радиуса R . Опре-

делить потенциал точечного заряда с учетом искажения, вызываемого отрицательными зарядами, индуцированными на поверхности сферы. Найти также силу, с которой заряд притягивается к сфере.

Р е ш е н и е

Будем искать решение задач в виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_1} - \frac{e_1}{r_2} \right). \quad (1)$$

В потенциале (1) отрицательный заряд, распределенный по поверхности сферы, заменен некоторым фиктивным точечным зарядом $-e_1$; последний помещен нами в точку A , лежащую на прямой, соединяющей заданный заряд

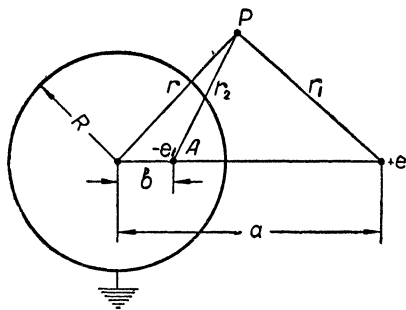


Рис. 23

с центром сферы (рис. 23). Чтобы быть решением задачи, потенциал (1) должен обращаться в нуль на поверхности сферы. Указанное условие будет удовлетворено, если так же, как и в задаче 22, положить

$$\frac{e^2}{e_1^2} = \frac{a}{b} \text{ и } ab = R^2,$$

откуда

$$e_1 = \frac{eR}{a},$$

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{ar_2} \right). \quad (2)$$

Сила взаимодействия заряда и проводящей заземленной сферы равна:

$$F = - \frac{e^2 a R}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)^2}.$$

25. Какой минимальный положительный заряд следует поместить на сферу в условиях предыдущей задачи для того, чтобы поверхностная плотность зарядов на ней была всюду положительной?

Р е ш е н и е

Чтобы ответить на интересующий нас вопрос, необходимо найти распределение отрицательных зарядов, наведенных на сфере.

Представив полученный в предыдущей задаче потенциал (2) в виде

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{R}{a} \left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2rR^2}{a} \cos \Theta \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

и воспользовавшись формулой

$$\sigma = - \epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R},$$

находим:

$$\sigma = - \frac{e(a^2 - R^2)}{4\pi R} [a^2 + R^2 - 2aR \cos \Theta]^{-\frac{3}{2}}.$$

Из полученного выражения видно, что максимальная плотность отрицательных зарядов, индуцированных на поверхности сферы, равна:

$$\sigma_{\max} = - \frac{e(a+R)}{4\pi R(a-R)^2}.$$

Но это есть в то же время и минимальная плотность положительного заряда, который следует поместить на сферу для того, чтобы всюду на ней плотность зарядов была положительной. Отсюда искомый заряд равен:

$$q = 4\pi R^2 |\sigma_{\max}| = \frac{eR(a+R)}{(a-R)^2}.$$

26. Точечный заряд e находится на расстоянии a от центра изолированной и незаряженной проводящей сферы радиуса R . Определить поле вне сферы и силу, с которой заряд притягивается к сфере.

Р е ш е н и е

Как известно, при внесении изолированной проводящей сферы в поле точечного заряда на ее поверхности наводятся в равных количествах положительные и отрицательные заряды. Заменим их фиктивными точечными зарядами e' и $-e'$ и запишем искомый нами потенциал в виде:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_1} - \frac{e'}{r_2} + \frac{e'}{r_3} \right). \quad (1)$$

Указанный потенциал и будет являться решением задачи, если подобрать в нем величину и положения фиктивных зарядов так, чтобы удовлетворялись следующие очевидные требования:

1) при заземлении сферы (т. е. при отбрасывании последнего слагаемого) потенциал (1) должен переходить в известное нам решение задачи о заземленной сфере (см. задачу 24);

2) $\Phi(R) = \text{const}$, т. е. поверхность сферы должна совпадать с одной из эквипотенциальных поверхностей потенциала (1).

Нетрудно видеть, что указанным условиям можно удовлетворить, положив $e' = eR/a$ и разместив заряды e' и $-e'$ так, как это показано на рисунке 24, после чего искомое нами решение принимает вид:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_1} - \frac{eR}{ar_2} + \frac{eR}{ar} \right),$$

или в сферических координатах

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[(r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{R}{a} \left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2rR^2}{a} \cos \Theta \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{R}{ar} \right]. \quad (2)$$

Сила притяжения точечного заряда к изолированной, незаряженной сфере определяется выражением:

$$F = - \frac{e^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \frac{2a^2 - R^2}{(a^2 - R^2)^2}.$$

27. Бесконечная прямая заряженная нить (с зарядом $+\lambda$ на единицу длины) параллельна бесконечному заземленному проводящему цилиндру (радиуса R) и отстоит на расстоянии h от его оси. Определить: 1) поле вне цилинд-

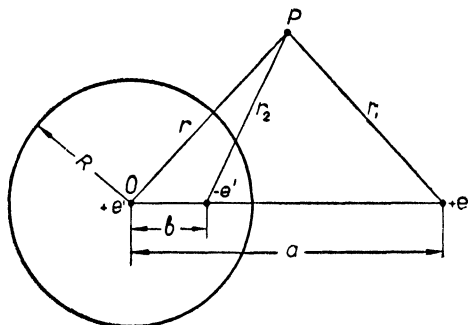


Рис. 24

ра; 2) плотность зарядов, индуцированных на поверхности цилиндра, и 3) силу (на единицу длины), с которой нить притягивается к цилиндру.

Решение

В плоскости, перпендикулярной к нити и цилиндру, введем полярную систему координат с началом на оси цилиндра и полярной осью, проходящей через ось цилиндра и нить (рис. 25). Индуцированный на поверхности цилиндра отрицательный заряд заменим равномерно заряженной (с зарядом $-\lambda_1$ на единицу длины) фиктивной нитью, проходящей через точку B , и запишем искомый потенциал в виде:

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = -2\lambda \ln r_1 + 2\lambda_1 \ln r_2 + C,$$

или

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = -\lambda \ln (r^2 + h^2 - 2rh \cos \Theta) + \lambda_1 \ln (r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta) + C.$$

Постоянные a , λ_1 и C следует подобрать так, чтобы удовлетворялось граничное условие $\varphi(R) = 0$. Последнее, как нетрудно проверить, имеет место лишь в том случае, если в потенциале (1) положить

$$\lambda_1 = \lambda; \quad a = \frac{R^2}{h} \quad \text{и} \quad C = \lambda \ln \frac{h}{a} = 2\lambda \ln \frac{h}{R}.$$

Окончательно искомый потенциал принимает вид:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(r^2 + h^2 - 2rh \cos\Theta) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(r^2 + \frac{R^4}{h^2} - \frac{2rR^2}{h} \cos\Theta\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R}. \quad (2)$$

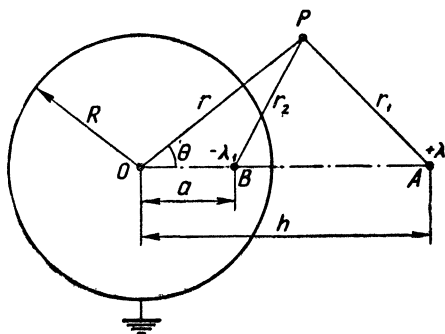


Рис. 25

Распределение зарядов на поверхности цилиндра определяется формулой:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{\lambda(h^2 - R^2)}{2\pi R(h^2 + R^2 - 2hR \cos\Theta)}.$$

Сила, действующая на единицу длины заряженной нити, параллельна прямой AO и равна:

$$F = \lambda E_A,$$

где E_A — напряженность поля фиктивной нити в точке A , через которую проходит заданная нить. Для определения E_A запишем потенциал поля, создаваемого в точке A фиктивной нитью,

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(h - a) + \text{const},$$

откуда

$$E_A = -\frac{d\varphi_A}{dh} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(h-a)} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(AB)},$$

после чего искомая сила оказывается равной

$$F = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0(AB)} = -\frac{\lambda^2 h}{2\pi\epsilon_0(h^2 - R^2)}. \quad (4)$$

Задачи для самостоятельного решения

28*. Проводником занято все пространство, за исключением первого октанта; в точке (a, a, a) находится заряд e . Определить силу, с которой заряд притягивается к проводнику.

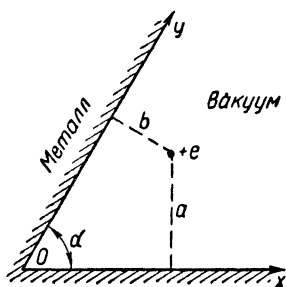


Рис. 26

29*. Доказать, что для системы, состоящей из проводника (образующего двугранный угол α) и точечного заряда (рис. 26), метод изображений применим лишь в том случае, если $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — целое число.

30*. В условиях задачи 26 определить поверхностную плотность зарядов, наведенных точечным зарядом на изолированной, незаряженной сфере.

31*. Какова величина силы взаимодействия между металлическим шаром радиуса R с зарядом q и малым пробным телом с зарядом e , находящимся на расстоянии a от центра шара?

Показать, что заряженный проводящий шар и пробное тело при некоторых условиях могут притягиваться и в том случае, если даже их заряды q и e имеют одинаковый знак.

32*. Два одинаковых точечных заряда помещены на расстоянии $2a$ друг от друга. Показать, что помещенная посередине между ними заземленная проводящая сфера полностью уничтожает их взаимное отталкивание, если радиус сферы выбрать приблизительно равным $\frac{a}{8}$.

33*. Пусть \vec{r}_0 — радиус-вектор, проведенный из центра проводящей сферы (радиуса a) в точку, где находится точечный заряд q .

Какой заряд следует поместить на сферу для того, чтобы сила, действующая на заряд q в однородном поле \vec{E}_0 , совпадающем по направлению с радиусом-вектором \vec{r}_0 , в присутствии заряженной сферы обратилась в нуль?

34*. Бесконечная прямая и равномерно заряженная нить параллельна по отношению к бесконечно длинному, изолированному и равномерно заряженному проводящему цилиндру и отстоит на расстоянии h от его оси. Определить потенциал поля вне цилиндра, распределение индуцированных зарядов на его поверхности и силу (отнесенную к единице длины), с которой нить притягивается к цилиндру.

35*. То же для системы, находящейся в однородном поперечном электрическом поле \vec{E}_0 и состоящей из бесконечной равномерно заряженной нити и параллельного ей, изолированного и равномерно заряженного проводящего цилиндра. Поле \vec{E}_0 по направлению совпадает с прямой, соединяющей точки пересечения плоскостью чертежа оси цилиндра и нити.

§ 2. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЕМКОСТЬ ПРОВОДНИКОВ И КОНДЕНСАТОРОВ. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ И ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Энергия электростатического поля в вакууме вычисляется по одной из следующих двух формул:

В системе СИ

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho \varphi dv + \frac{1}{2} \int_s \sigma \varphi df,$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv.$$

В абсолютной системе

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho \varphi dv + \frac{1}{2} \int_s \sigma \varphi df, \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dv. \quad (2)$$

Плотность энергии электрического поля в вакууме:

В системе СИ

В абсолютной
системе

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad \omega = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (3)$$

Сила взаимодействия точечных зарядов (закон Кулона):

В системе СИ

В абсолютной
системе

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad F = \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad (4)$$

На 1 м^2 поверхности проводника со стороны электрического поля действует сила, направленная по внешней нормали к его поверхности:

В системе СИ

В абсолютной
системе

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}, \quad f = 2\pi\sigma^2, \quad (5)$$

где σ — плотность заряда на поверхности проводника.

28. По объему шара (радиуса a) равномерно распределен заряд e . Определить собственную энергию электростатического поля, возбуждаемого шаром.

Решение

Собственную энергию электростатического поля в отсутствии в нем диэлектриков можно вычислить, пользуясь формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho \varphi dv + \frac{1}{2} \int_s \sigma \varphi dS \quad (1)$$

(где v — объем той части пространства, где имеются объемно распределенные заряды, т. е. где $\rho \neq 0$, и S — поверхности, на которых имеются поверхностно распределенные заряды $\sigma \neq 0$), либо формулой:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv, \quad (2)$$

где интегрирование распространяется на всю бесконечную область пространства, занимаемого электрическим полем.

Применяя к расчету электрической энергии заряженного шара формулу (1), заметим, что в рассматриваемом случае всюду $\sigma = 0$, а $\rho \neq 0$ лишь внутри шара, где

$$\varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

(см. задачу 13). Поэтому

$$W = \frac{\rho^2}{4\varepsilon_0} \int_{v_{\text{шара}}} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) dv. \quad (3)$$

Так как подинтегральное выражение в (3) не зависит от углов Θ и α , элемент объема можно выбрать в виде $dv = 4\pi r^2 dr$. Подстановка dv в формулу (3) и интегрирование по r в пределах от 0 до a дают:

$$W = \frac{\pi\rho^2}{\varepsilon_0} \int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) r^2 dr = \frac{4\pi a^5 \rho^2}{15\varepsilon_0}.$$

Подставляя сюда величину объемной плотности зарядов, получаем:

$$W = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}. \quad (4)$$

Покажем теперь, как пользоваться формулой (2). Прежде всего ее следует переписать в виде:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left\{ \int E_i^2 dv + \int E_e^2 dv \right\}, \quad (5)$$

где E_i и E_e — напряженности поля соответственно внутри и вне шара; они, как это было показано в задаче 13, равны:

$$E_i = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \quad \text{и} \quad E_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Подставляя в (5) также $dv = 4\pi r^2 dr$ и выполняя интегрирование, находим

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left\{ \int_0^a \frac{e^2}{a^6} r^4 dr + \int_a^\infty \frac{e^2}{r^2} dr \right\} = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}.$$

29. Считая, что заряды протонов равномерно распределены по объему ядра, представляющего собой шар радиуса R , подсчитать энергию электростатического взаимодействия протонов в ядре атома с порядковым номером Z .

Р е ш е н и е

В ядре атома с порядковым номером Z имеется

$$C_z^2 = \frac{Z(Z-1)}{2}$$

пар взаимодействующих между собой протонов. Поэтому для определения энергии взаимодействия всех протонов в ядре достаточно вычислить энергию взаимодействия какой-либо одной пары протонов и полученный результат умножить на число взаимодействующих пар.

Известно, что энергия взаимодействия точечных зарядов равна:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами (кроме e_i) в той точке, где находится заряд e_i . В случае двух зарядов

$$U_0 = e_1 \varphi_1,$$

где φ_1 — потенциал, создаваемый зарядом e_2 в точке, занимаемой зарядом e_1 . Если оба заряда распределены непрерывно по некоторому объему, то вышеприведенную формулу следует переписать в виде:

$$U_0 = \int \rho_1 \varphi dv, \quad (1)$$

где ρ_1 — объемная плотность распределения одного из взаимодействующих протонов, а φ — потенциал, создаваемый вторым протоном. Интегрирование в (1) следует провести по всему объему ядра.

Потенциал φ , согласно задаче 13, равен:

$$\varphi = \frac{\rho_2}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad (2)$$

где

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{e}{\frac{4\pi}{3}R^3}.$$

Подстановка (2) в формулу (1) и интегрирование по объему ядра дает:

$$U_0 = \frac{\rho_1 \rho_2}{2\epsilon_0} \int_0^R \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{6e^2}{20\pi\epsilon_0 R},$$

откуда полная энергия электростатического взаимодействия всех протонов в ядре оказывается равной:

$$U = \frac{3Z(Z-1)}{20\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R}.$$

30. Вычислить энергию и емкость сферического конденсатора.

Р е ш е н и е

Чтобы зарядить конденсатор, его присоединяют к источнику постоянного тока, который и «перекачивает» заряды с одной его обкладки на другую, тратя на это определенное количество энергии. Возникающее в результате электрическое поле конденсатора обладает энергией, равной работе, совершенной источником тока.

Чтобы перенести с одной обкладки конденсатора на другую бесконечно малый заряд de , источник тока совершает работу, равную $dA = de(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $(\varphi_2 - \varphi_1)$ — разность потенциалов на обкладках конденсатора. По определению емкости, $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{e}{C}$ и поэтому $dA = \frac{ede}{C}$, откуда энергия конденсатора

$$W = A = \frac{1}{C} \int_0^e ede = \frac{e^2}{2C}. \quad (1)$$

С другой стороны, энергию конденсатора можно вычислить по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv. \quad (2)$$

В сферическом конденсаторе все поле сосредоточено между его обкладками. Напряженность этого поля равна: $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Подставляя в (2) напряженность поля E , элемент объема $dv = 4\pi r^2 dr$ и выполняя интегрирование по r в пределах от R_1 до R_2 , где R_1 и R_2 — соответственно радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора, находим:

$$W = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2(R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (3)$$

Сравнивая формулы (2) и (3), находим следующее выражение для емкости сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (4)$$

31. Для системы двух бесконечно длинных и параллельных цилиндрических проводников (произвольного сечения), имеющих заряды $\pm e$, известен потенциал $\varphi(x, y)$, который на поверхностях проводников принимает постоянные значения φ_1 и φ_2 и всюду в пространстве между ними удовлетворяет уравнению Лапласа. Какова взаимная емкость (на единицу длины) указанной системы проводников?

Р е ш е н и е

Полная электрическая энергия, приходящаяся на единицу длины рассматриваемой системы проводников, равна:

$$W = \frac{1}{2} \left(\int_{S_1} \sigma_1 \varphi_1 dS + \int_{S_2} \sigma_2 \varphi_2 dS \right),$$

где интегрирование производится по боковым поверхностям S_1 и S_2 цилиндров единичной длины. Ввиду того что цилиндры несут равные по абсолютной величине заряды ($\sigma_2 = -\sigma_1$),

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{S_2} \sigma_2 dS.$$

Подставляя сюда

$$\sigma_2 = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{S_2} \quad \text{и} \quad dS = dL,$$

где dL — элемент длины кривой L_2 , лежащей в сечении одного из цилиндров, находим:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2) \oint_{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL. \quad (1)$$

С другой стороны, рассматривая данную систему проводников как конденсатор, ее полную электрическую энергию можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 C. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим величину взаимной емкости рассматриваемой системы проводников

$$C = \frac{\epsilon_0}{\varphi_1 - \varphi_2} \oint_{L_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL.$$

32. Определить взаимную емкость единицы длины двойной проводки, т. е. системы из двух бесконечных и параллельных проводящих цилиндров радиуса a с осями, отстоящими друг от друга на расстоянии $h > a$.

Решение

Поле, возбуждаемое цилиндрами (равномерно заряженными разноименными зарядами), заменяем полем двух фиктивных равномерно заряженных нитей, несущих за-

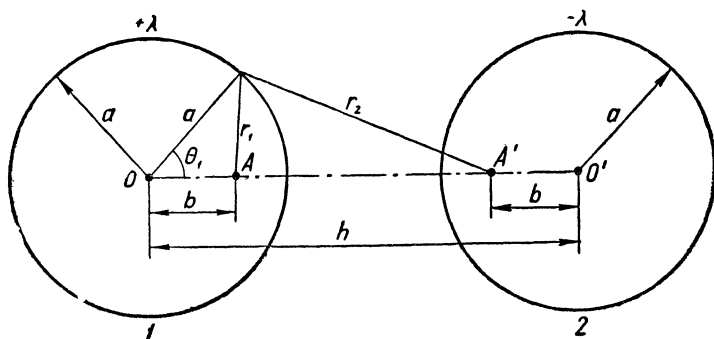


Рис. 27

ряд $\pm \lambda$ (на единицу длины) и проходящих через точки A и A' (рис. 27), с потенциалом

$$\varphi = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + \text{const.} \quad (1)$$

Положение точек A и A' на линии OO' надо подобрать так, чтобы поверхности цилиндров совпадали с эквипотенциальными поверхностями, для этого необходимо найти такое b , при котором отношение $\frac{r_1}{r_2}$ было бы постоянным на поверхности обоих цилиндров.

Для любой точки на поверхности цилиндра 1 можно записать:

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{b}{h-b} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\frac{a^2}{b} + b - 2a \cos \Theta_1}{\frac{a^2}{(h-b)} + h - b - 2a \cos \Theta_1} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (2)$$

аналогично, в любой точке на поверхности цилиндра 2

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{h-b}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a^2/(h-b) + h - b - 2a \cos \Theta_2}{a^2/b + b - 2a \cos \Theta_2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Чтобы отношения (2) и (3) оставались постоянными на поверхностях цилиндров, надо положить:

$$\frac{a^2}{h-b} + h - b = \frac{a^2}{b} + b,$$

откуда

$$b(h-b) = a^2 \text{ и } b = \frac{h}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{h^2}} \right) \quad (4)$$

(в выражении (4) взят лишь один знак минус; это следует из того, что $b = 0$, если $a = 0$, т. е. если двухпроводная линия будет состоять из двух бесконечно тонких нитей).

Потенциалы цилиндров оказываются равными

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} + \text{const} \text{ и } \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} + \text{const},$$

откуда для емкости единицы длины двухпроводной линии находим:

$$\frac{1}{C} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda} \text{ или } \frac{1}{C} = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{h}{2a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{h^2}} \right). \quad (5)$$

Из общего выражения (5) для случая, когда $h \gg a$, нетрудно получить приближенную формулу:

$$C \cong \pi \epsilon_0 \left(\ln \frac{a}{h} \right)^{-1}. \quad (6)$$

33. Записать энергию системы заряженных проводников через их потенциалы, коэффициенты емкости и коэффициенты электростатической индукции.

Р е ш е н и е

Полную энергию системы заряженных проводников можно представить в виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i, \quad (1)$$

где e_i и φ_i — заряд и потенциал i -го проводника (см.: И. Е. Т а м м, стр. 83). Учтем, что заряды и потенциалы проводников нельзя задавать одновременно произвольным образом, так как между ними существует некоторая зависимость. При установлении вида этой зависимости необходимо учитывать, что все уравнения электростатики линейные, а поэтому связь между зарядами и потенциалами проводников также должна быть линейной. Она имеет вид:

$$e_i = \sum_{\kappa} C_{i\kappa} \varphi_{\kappa}. \quad (2)$$

Совокупность величин $C_{i\kappa}$, входящих в (2) и имеющих размерность емкости, образует квадратную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (3)$$

диагональные элементы C_{ii} которой называют коэффициентами емкости, а $C_{i\kappa}$ — коэффициентами электростатической индукции.

Можно также указать формулу, связывающую потенциалы проводников с их зарядами; она имеет вид:

$$\varphi_i = \sum_{\kappa} C_{i\kappa}^{-1} e_{\kappa}, \quad (4)$$

где коэффициенты $C_{i\kappa}^{-1}$ образуют матрицу C^{-1} , обратную матрице C , т. е.

$$CC^{-1} = E, \quad (5)$$

где E — единичная матрица, имеющая вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Укажем также известное из курса линейной алгебры правило умножения матриц:

$$A_{ik} = \sum_j B_{ij} C_{jk}. \quad (7)$$

Подстановка выражений (2) и (4) в формулу полной энергии заряженных проводников (1) дает:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k C_{ik} \varphi_i \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k C_{ik}^{-1} e_i e_k, \quad (8)$$

при этом следует помнить, что коэффициенты C_{ik} и C_{ik}^{-1} обладают следующим свойством:

$$C_{ik} = C_{ki} \quad \text{и} \quad C_{ik}^{-1} = C_{ki}^{-1}. \quad (9)$$

34. Два проводника с емкостями C_1 и C_2 помещены на расстоянии r друг от друга, большом по сравнению с их собственными размерами. Определить коэффициенты C_{ik} .

Р е ш е н и е

Допустим, что заряжен только проводник 1, т. е. $e_1 \neq 0$, а $e_2 = 0$. Тогда $\varphi_1 = \frac{e_1}{C_1}$; с другой стороны, согласно соотношению (4) предыдущей задачи $\varphi_1 = e_1 C_{11}^{-1} + e_2 C_{12}^{-1}$. Сравнивая эти два выражения для φ_1 , найдем:

$$C_{11}^{-1} = \frac{1}{C_1}. \quad (1)$$

О проводнике 2 можно сказать, что он находится в поле, возбуждаемом проводником 1, и так как расстояние между проводниками достаточно велико, проводники можно заменить точечными зарядами и считать, что $\varphi_2 = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r}$. С другой стороны, $\varphi_2 = e_1 C_{12}^{-1} + e_2 C_{22}^{-1}$. Отсюда видно, что

$$C_{12}^{-1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Допуская аналогично, что заряженным является проводник 2, а $e_1 = 0$, можно показать, что

$$C_{22}^{-1} = \frac{1}{C_2}. \quad (3)$$

Итак, матрица C^{-1} рассматриваемой системы проводников имеет вид:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1}; & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}; & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Чтобы найти элементы C_{ik} матрицы C , воспользуемся равенством (5) предыдущей задачи. Оно принимает в данном случае вид:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1}; & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}; & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

или (после перемножения матриц, стоящих в левой части)

$$\begin{pmatrix} \frac{C_{11}}{C_1} + \frac{C_{12}}{4\pi\epsilon_0 r}; & \frac{C_{11}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{C_{12}}{C_2} \\ \frac{C_{12}}{C_1} + \frac{C_{22}}{4\pi\epsilon_0 r}; & \frac{C_{12}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{C_{22}}{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5a)$$

Приравняв между собой матричные элементы матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (5a), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_{ik} :

$$\begin{cases} C_{11} + \frac{C_{12}}{4\pi\epsilon_0 r} = 1, \\ \frac{C_{11}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{C_{12}}{C_2} = 0, \\ \frac{C_{12}}{C_1} + \frac{C_{22}}{4\pi\epsilon_0 r} = 0, \\ \frac{C_{12}}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{C_{22}}{C_2} = 1, \end{cases}$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_1 \left(1 - \frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \right)^{-1}, & C_{22} &= C_2 \left(1 - \frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \right)^{-1}, \\ C_{12} &= -\frac{C_1 C_2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как емкости C_1 и C_2 проводников определяются их линейными размерами, а линейные размеры проводников малы по сравнению с расстоянием между ними, то $\frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \ll 1$, и поэтому формулы (6) с точностью до членов порядка $\frac{1}{r^2}$ включительно можно представить в следующей приближенной форме:

$$C_{11} \cong C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \right), \quad C_{22} \cong C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2} \right),$$

$$C_{12} \cong -\frac{C_1 C_2}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (6a)$$

35. Определить период гармонических колебаний жесткого диполя с моментом $p = eL$ во внешнем однородном и постоянном поле E_0 , считая, что с каждым из зарядов $+e$ и $-e$ связана масса m .

Решение

При включении внешнего электрического поля диполь поворачивается вдоль поля. Однако в силу инертности диполя (с каждым из зарядов связана масса m) он начинает совершать около направления поля (рис. 28) колебания. Будем пренебрегать силами радиационного трения (силы, учитывающие наличие излучения электромагнитной энергии ускоренно движущимися зарядами диполя) и будем считать колебания диполя малыми. Тогда в разложении

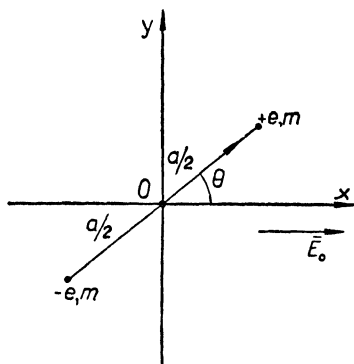


Рис. 28

$$\sin \Theta = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \dots$$

можно ограничиться только одним первым членом, т. е. принять

$$\sin \theta \approx \theta. \quad (1)$$

Составим для колеблющегося диполя функцию Лагранжа $L = T - U$. В силу того что $m_1 = m_2 = m$ и $v_1 = v_2 = v$, кинетическая энергия диполя оказывается равной

$$T = mv^2 = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2),$$

или, так как рассматриваемый диполь — жесткий, т. е.

$$r = \frac{a}{2} = \text{const},$$

$$T = \frac{ma^2}{4} \dot{\Theta}^2.$$

Потенциальная энергия диполя во внешнем поле E_0

$$U = -pE_0 \cos \Theta = -eaE_0 \cos \Theta$$

и, следовательно,

$$L = \frac{ma^2}{4} \dot{\Theta}^2 + eaE_0 \cos \Theta$$

Уравнение движения диполя имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0,$$

которое с учетом выражения (1) можно переписать в виде:

$$\ddot{\Theta} + \frac{2eE_0}{ma} \cdot \Theta = 0,$$

откуда период малых колебаний диполя

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{2eE_0}}.$$

36. Висящий на трубке мыльный пузырь при открытой трубке стягивается под влиянием поверхностного натяжения ($\alpha = 0,05 \text{ Дж/м}^2$). Можно ли путем сильного заряжения пузыря предохранить его от полного сжатия? При этом следует иметь в виду ограниченную диэлектрическую прочность воздуха, равную $2\,000\,000 \text{ в/м}$. Если да, то при каком диаметре останется мыльный пузырь?

Р е ш е н и е

Путем заряжения пузыря силы поверхностного натяжения мыльной пленки можно уравновесить силами электростатического отталкивания зарядов, нанесенных на по-

верхность пузыря. Эти силы (отнесенные к 1 м^2 пленки) соответственно равны (в н/м^2) $\frac{4\alpha}{d}$ и $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, где d — диаметр пузыря. При равновесии

$$\frac{4\alpha}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Однако заряжаться пузырь может до такого E , при котором не возникает опасность пробоя диэлектрика (воздуха), окружающего пузырь. Таким значением E для воздуха является $2\,000\,000 \text{ в/м}$. Из условия равновесия сил находим:

$$d = \frac{8\alpha}{\epsilon_0 E^2} = 1,13 \text{ см.}$$

37. Проводящая сфера радиуса a , помещенная в однородное электрическое поле \vec{E}_0 , рассечена на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению линий поля. С какой силой отталкиваются полушеры?

Решение

Рассмотрим положительно заряженную полушферу (рис. 29). На каждый 1 м^2 ее поверхности со стороны внешнего поля E_0 действует сила

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0},$$

где

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \Theta$$

(см. задачу 15). Сила, действующая на всю полушферу, параллельна внешнему полю и равна:

$$F_x = \int f \cos \Theta dS.$$

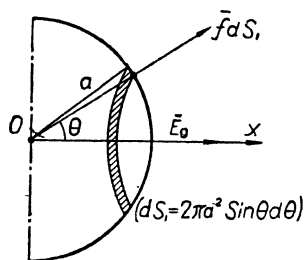


Рис. 29

Подставляя сюда $dS = a^2 d\alpha \sin \Theta d\Theta$ и интегрируя, находим:

$$F_x = \frac{9}{2} \epsilon_0 a^2 E_0^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 a^2 E_0^2.$$

На вторую полусферу, заряженную отрицательно, со стороны поля действует равная, но противоположно направленная сила.

38. Определить энергию притяжения электрического диполя с моментом \vec{P} (P_x, P_y) к плоской границе бесконечного проводника.

Р е ш е н и е

На рисунке 30 изображены заданный электрический диполь \vec{P} и его изображение в плоской границе проводника — диполь \vec{P}_1 . Энергия взаимодействия диполя \vec{P} с проводником равна энергии взаимодействия диполей \vec{P} и \vec{P}_1 . Последнюю можно рассматривать как энергию диполя \vec{P} во внешнем поле \vec{E}_1 , возбуждаемом диполем-изображением \vec{P}_1 , т. е. $U = -\vec{P} \vec{E}_1$. Подставляя сюда \vec{E}_1 из задачи 7*, получим:

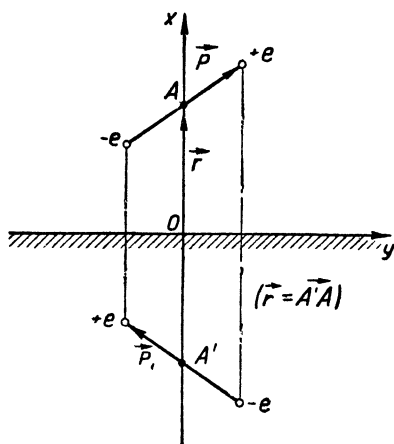


Рис. 30

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{P}\vec{P}_1}{r^3} - \frac{3(\vec{P}\vec{r})(\vec{P}_1\vec{r})}{r^5} \right\}, \quad (1)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, соединяющий середины диполей (рис. 30). Подставляя в (1)

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j}; \quad \vec{P}_1 = P_x \vec{i} - P_y \vec{j} \quad \text{и} \quad \vec{r} = 2x \vec{i},$$

где x — координата точки A (середины диполя \vec{P}), находим:

$$U = -\frac{2P_x^2 + P_y^2}{32\pi\epsilon_0 x^3}. \quad (2)$$

Задачи для самостоятельного решения

36*. Согласно одной из гипотез о строении электрона его заряд q считается распределенным в пространстве с объемной плотностью

$$\rho(r) = - \frac{q}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right),$$

так что весь его заряд практически оказывается сосредоточенным внутри сферы радиуса r_0 («протяженный» электрон). Найти собственную электростатическую энергию такого электрона.

37*. Определить электрическую энергию шара (радиуса a), по поверхности которого равномерно распределен заряд e . Объяснить, исходя из соображений сохранения энергии, почему равновесному распределению зарядов в проводящем шаре соответствует равномерное распределение по поверхности, а не какое-либо другое распределение.

38*. Вычислить электростатическую энергию электрона в поле ядра атома, представляющего собой шар радиуса R , по объему которого равномерно распределен заряд Ze .

39*. Вычислить энергию электростатического взаимодействия электронов в атоме, описываемом статистической моделью Томаса — Ферми (см. задачу 19*).

40*. Написать потенциальную энергию электрона в поле однократно ионизированного атома Томаса — Ферми с порядковым номером Z .

41*. Вычислить энергию и емкость плоского и цилиндрического конденсаторов.

42*. Проводник заряжается от электрофорной машины путем повторяющихся подсоединений к пластине, которая после каждого подсоединения проводника снова заряжается электрофорной машиной до заряда q . Определить величину конечного заряда на проводнике, если известно, что после первой операции присоединения проводника к пластине его заряд оказался равным e .

43*. Замкнутый мыльный пузырь с радиусом 3 см заряжается электрофорной машиной до $27\,000$ в, благодаря чему его радиус увеличивается до 4 см. Определить коэффициент поверхностного натяжения пленки мыльного раствора.

44*. К конденсатору, состоящему из двух параллельных пластин площадью 80 см^2 каждая и удаленных друг от друга на расстояние 5 мм , приложена разность потенциалов в 300 в , поддерживаемая постоянной при помощи батареи. Определите энергию в единице объема этого поля.

Пусть между обкладками конденсатора введена очень маленькая капелька масла, имеющая заряд $32 \cdot 10^{-19} \text{ к}$. Подсчитайте силу, действующую со стороны поля на эту капельку.

45*. Абсолютный электрометр Томсона состоит из плоского конденсатора, нижняя обкладка K которого заземлена (рис. 31), а верхняя обкладка образована легкой

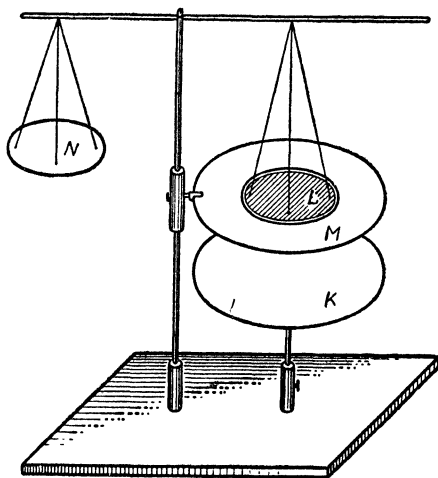


Рис. 31

пластинкой L , подвешенной к коромыслу чувствительных весов, и неподвижным защитным кольцом M , отстоящим на расстоянии $l \text{ см}$ от обкладки K . Площадь пластинки L и защитного кольца M — по $S \text{ см}^2$; площадь обкладки K — $2S \text{ см}^2$.

Между защитным кольцом и подвижной пластинкой L имеется очень узкий зазор. Поэтому если пластинку L и кольцо M зарядить до одного и того же потенциала, то рассеяние электрического поля будет заметно лишь у внешних краев кольца, а под пластинкой L поле будет однородным.

В незаряженном состоянии пластинка L находится в плоскости защитного кольца. Возникающее при зарядке пластинки L и кольца M до некоторого измеряемого потенциала φ электростатическое притяжение между пластинками L и K уравнивается гирьками на другой чашке весов так, чтобы пластинка L снова оказалась в плоскости защитного кольца M .

Чему равен измеряемый потенциал φ (в вольтах), если вес гирек на чашке N оказался равным P Г?

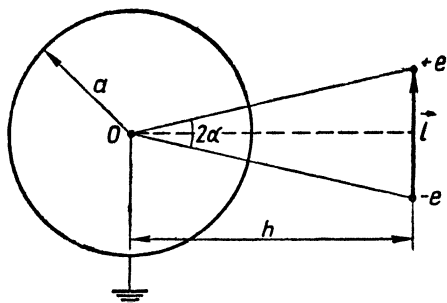


Рис. 32

46*. Выразить взаимную емкость системы двух проводников, заряженных равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку зарядами, через их коэффициенты емкости и электростатической индукции.

47*. Пусть имеется несколько изолированных проводников, положение которых задано и не меняется со временем. Пусть собственные емкости каких-нибудь двух проводников из этой системы равны C_1 и C_2 , а их взаимная емкость равна C_{12} . Доказать, что если эти проводники соединить тонкой проволокой, то емкость объединенного проводника окажется равной $C_1 + C_2 + C_{12}$.

48*. Определить силы, действующие на диполь во внешнем электростатическом поле \vec{E} , и момент этих сил, исходя из выражения для потенциальной энергии диполя во внешнем электрическом поле $U = -\vec{p}\vec{E}$.

49*. Какова величина поверхностной плотности зарядов на поверхности Земли в том месте, где падение потенциала составляет 250 в/м. Какова сила, действующая

здесь на 1 м^2 земной поверхности со стороны электрического поля?

50*. Заряженный проводящий шар (радиуса a) разрезан на две половины. Определить силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга.

51*. То же для бесконечного проводящего цилиндра, находящегося в однородном поперечном поле E_0 и рассеченного на две половины плоскостью, перпендикулярной к линиям поля.

52*. Точечный электрический диполь \vec{P} находится на расстоянии h от центра заземленной проводящей сферы радиуса a и ориентирован так, как это показано на рисунке 32. С какой силой диполь притягивается к сфере, если из ее центра он виден под небольшим углом 2α ? Изменится ли полученный результат, если сферу изолировать?

§ 3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Основные уравнения постоянного электрического поля в диэлектриках имеют вид:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

откуда

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (3)$$

где φ — скалярный потенциал электростатического поля, определяемый из уравнения Пуассона:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Общее решение уравнения Пуассона:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho dv}{r}, \quad \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho dv}{r}. \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика ($\varepsilon > \varepsilon_0$), определяемая из соотношения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) видно, что в системе СИ вектора \vec{D} и \vec{E} имеют разные размерности: вектор \vec{D} имеет размерность $[\kappa/м^2]$, а вектор \vec{E} — размерность $[в/м]$, в то время как в абсолютной системе единиц оба вектора имеют одинаковую размерность.

Помимо абсолютной диэлектрической проницаемости, удобно ввести понятие об относительной (безразмерной) диэлектрической проницаемости

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (7)$$

Потенциал электростатического поля, возбуждаемого в диэлектрике только его связанными зарядами:

<p>В системе СИ</p> $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int \frac{\rho_{\text{связ.}} dv}{r} + \int \frac{\sigma_{\text{связ.}} dS}{r} \right).$	<p>В абсолютной системе</p> $\varphi_1 = \int \frac{\rho_{\text{связ.}} dv}{r} + \int \frac{\sigma_{\text{связ.}} dS}{r}.$
---	--

Объемная и поверхностная плотности связанных зарядов диэлектрика соответственно равны (в обеих системах единиц):

$$\rho_{\text{связ.}} = -\text{div } \vec{P} \quad (9)$$

и

$$\sigma_{\text{связ.}} = P_{1n} - P_{2n}, \quad (10)$$

где \vec{P} — вектор поляризации диэлектрика.

Полный потенциал электрического поля при наличии диэлектрика:

В системе СИ

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int \frac{(\rho + \rho_{\text{связ.}}) dV}{r} + \int \frac{(\sigma + \sigma_{\text{связ.}}) dS}{r} \right). \quad (11)$$

В абсолютной системе

$$\varphi = \int \frac{(\rho + \rho_{\text{связ.}}) dV}{r} + \int \frac{(\sigma + \sigma_{\text{связ.}}) dS}{r}. \quad (12)$$

Из формул (11) и (12) вытекает следующее определение вектора электрической индукции \vec{D} .

В системе СИ	В абсолютной системе
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$.

(13)

Как известно, для широкого класса диэлектриков (см.: И. Е. Тамм, § 21) имеет место следующее соотношение: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, где α — поляризуемость диэлектрика, связанная с диэлектрической проницаемостью соотношением:

В системе СИ	В абсолютной системе
$\alpha = \epsilon_0 (K - 1)$,	$\alpha = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$,

(14)

причем в системе СИ поляризуемость α имеет размерность $[\phi/m]$, а в абсолютной системе единиц поляризуемость α — безразмерная величина.

Электростатическая теорема Гаусса для электрического поля при наличии в нем диэлектриков формулируется следующим образом:

В системе СИ	В абсолютной системе
$\oint \vec{D} d\vec{S} = e$.	$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi e$.

(15)

Граничные условия для электрического поля при наличии диэлектриков:

В системе СИ	В абсолютной системе
$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$,	$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$,
$E_{2t} = E_{1t}$.	$E_{2t} = E_{1t}$.

(16)
(17)

Плотность энергии электрического поля в диэлектриках:

В системе СИ	В абсолютной системе
$\omega = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$.	$\omega = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \vec{D}$.

(18)

Объемная плотность пондеромоторных сил, действующих на диэлектрики со стороны электростатического поля:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \alpha \nabla E^2 \qquad \vec{f} = \frac{1}{2} \alpha \nabla E^2 \quad (19)$$

или

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (K - 1) \nabla E^2. \qquad \vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2. \quad (20)$$

39. В плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого равно d , вдвигаются пластинки из одного и того же диэлектрика с относительной проницаемостью K , но разных толщин. Конденсатор соединен с источником напряжения, который поддерживает на его обкладках постоянную разность потенциалов V .

а) Как меняется емкость конденсаторов в зависимости от толщины x вдвигаемой пластинки?

б) В какой зависимости от толщины пластинки находится напряженность электрического поля в диэлектрическом (E_1) и воздушном (E_2) слоях?

в) Каковы напряженности поля в обоих слоях, если конденсатор сначала отделяется от источника напряжения и только после этого в конденсатор вдвигается диэлектрическая пластинка?

Р е ш е н и е

а) Плоский конденсатор с вдвинутой в него диэлектрической пластинкой можно рассматривать как систему двух последовательно соединенных конденсаторов. Так как емкость конденсатора с диэлектрическим слоем

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 K S}{x},$$

а конденсатора с воздушным слоем

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x},$$

то их общая емкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 K S}{x + (d - x) K}.$$

б) Напряженности электрического поля в диэлектрическом и воздушном слоях соответственно равны:

$$E_1 = \frac{V_1}{x} \text{ и } E_2 = \frac{V_2}{d-x},$$

где $V = V_1 + V_2$. Количество электричества на обкладках конденсатора

$$q = CV = C_1V_1 = C_2V_2.$$

Отсюда можно написать следующие два уравнения для определения V_1 и V_2 :

$$CV = C_1V_1 \text{ и } CV = C_2V_2,$$

или
$$\frac{V}{x + (d-x)K} = \frac{V_1}{x}; \quad \frac{KV}{x + (d-x)K} = \frac{V_2}{d-x},$$

откуда

$$E_1 = \frac{V}{x + (d-x)K}; \quad E_2 = \frac{KV}{x + (d-x)K}.$$

в) До отключения источника напряжения на обкладках конденсатора находится заряд

$$q = CV = \frac{\epsilon_0VS}{d}, \text{ так что } \sigma = \frac{q}{S} = \frac{\epsilon_0V}{d}.$$

Если, отключив батарею, вдвинуть в конденсатор диэлектрическую пластинку, то напряженности поля в воздушном и диэлектрическом слоях будут равны $E'_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ и E'_1 , причем на поверхности раздела слоев должно выполняться условие

$$E'_2 = KE'_1$$

(равенство нормальных составляющих вектора электрической индукции). Поэтому

$$E'_1 = \frac{V}{Kd} \text{ и } E'_2 = \frac{V}{d}.$$

40. Определить электрическое поле внутри и вне равномерно поляризованного диэлектрического шара (в отсутствие внешнего поля), не прибегая к рассмотрению механизма поляризации вещества.

Р е ш е н и е

Потенциал электрического поля, возбуждаемого в диэлектрике его связанными зарядами, имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \frac{\rho_{\text{связ.}} \, dV}{R} + \int_S \frac{\sigma_{\text{связ.}} \, dS}{R} \right).$$

В рассматриваемом случае $\rho_{\text{связ.}} = -\operatorname{div} \vec{P} = 0$, так как $\vec{P} = \text{const}$ (шар равномерно поляризован), и поэтому

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_{\text{связ.}} \, dS}{R}, \quad (1)$$

где интегрирование должно быть проведено по всей поверхности шара.

Для того чтобы выполнить это интегрирование, поместим начало сферической системы координат (r, α, ψ) в центре шара; полярную ось направим из центра шара в точку наблюдения A и плоскость векторов \vec{r} и \vec{P} (вектор поляризации шара) примем за координатную плоскость XOZ (рис. 33). Тогда в точке B , лежащей на бесконечно малой площадке

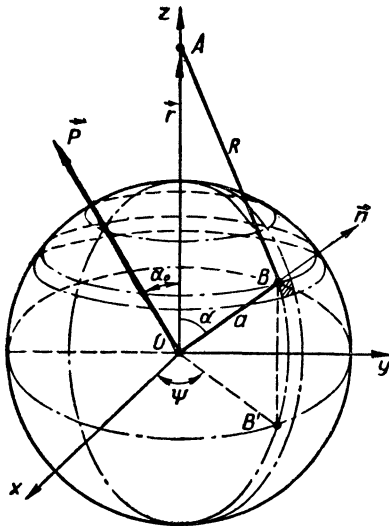


Рис. 33

$$dS = a^2 \sin \alpha \, d\alpha \, d\psi \quad (2)$$

на расстоянии

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha} \quad (3)$$

от точки наблюдения A , поверхностная плотность связанных зарядов оказывается равной

$$\sigma_{\text{связ.}} = P_n = P (\sin \alpha_0 \sin \alpha \cos \psi + \cos \alpha_0 \cos \alpha) \quad (4)$$

(для получения выражения (4) необходимо написать разложения векторов \vec{P} и \vec{n} по осям декартовой системы координат и выполнить умножение $\vec{P} \vec{n} = P_n$). После подстановки выражений (2) — (4) в (1) и интегрирования по углам ψ и α находим:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{aP}{2\epsilon_0 r} \cos \alpha_0 \left\{ \frac{1}{3ar} \left[(r+a)^3 - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{3}{2}} \right] - \right. \\ \left. - (r-a) - (r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая в (5)

$$(r^2 + a^2 - 2ar)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} r - a & \text{при } r > a, \\ a - r & \text{при } r < a, \end{cases}$$

получаем:

$$\Phi_e = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{P \cos \alpha_0}{r^2} \quad \text{и} \quad \Phi_i = \frac{1}{3\epsilon_0} P r \cos \alpha_0,$$

или

$$\Phi_e = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P}r)}{r^3} \quad \text{и} \quad \Phi_i = \frac{1}{3\epsilon_0} (\vec{P}r).$$

Аналогичные результаты могут быть получены и иным путем (см., например, книгу И. Е. Тамма «Основы электричества», § 24).

41. Определить вектор поляризации однородного диэлектрического шара, помещенного во внешнее однородное поле E_0 . Найти также потенциалы поля внутри и вне диэлектрического шара.

Р е ш е н и е

Поле внутри и вне шара складывается из двух полей: внешнего однородного поля E_0 и поля, возбуждаемого поверхностными связанными зарядами однородно поляри-

зованного диэлектрического шара, т. е. поля, рассчитанного в предыдущей задаче.

Введя сферическую систему координат с полярной осью, направленной вдоль внешнего поля E_0 (рис. 34), мы можем записать потенциал суммарного поля в следующем виде:

$$\varphi_e = -E_0 x + \frac{a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P}r)}{r^3}, \quad (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -E_0 x + \frac{1}{3\epsilon_0} (\vec{P}r), \quad (r \leq a),$$

где $\varphi_0 = -E_0 x$ — потенциал внешнего однородного поля.

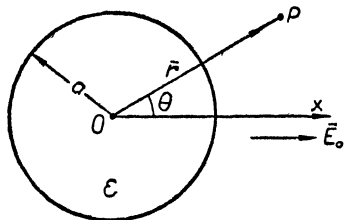


Рис. 34

Для того чтобы записанные выше потенциалы представляли собой решение задачи, необходимо, чтобы они удовлетворяли следующим двум условиям:

1) $\varphi_i = \varphi_e$ при $r = a$ и 2) $D_{in} = D_{en}$ при $r = a$, или

$$\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r}\right)_{r=a} = K \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=a}.$$

Нетрудно видеть, что первое условие выполняется автоматически: для этого достаточно переписать потенциалы φ_e и φ_i в виде:

$$\varphi_e = -E_0 r \cos \Theta + \frac{a^3 (K-1)}{3r^2} E_i \cos \Theta,$$

$$\varphi_i = -E_0 r \cos \Theta + \frac{K-1}{3} E_i r \cos \Theta$$

(при переписывании заменяем x и \vec{P} по формулам $x = r \cos \Theta$, где $\cos \Theta = \cos(\vec{E}_0, \vec{r})$, и $\vec{P} = \epsilon_0 (K-1) \vec{E}_i$, где \vec{E}_i — напряженность поля внутри диэлектрика). Второе граничное условие принимает вид:

$$E_0 + \frac{2(K-1)}{3} E_i = K E_0 - \frac{K(K-1)}{3} E_i,$$

откуда

$$E_i = \frac{3E_0}{K+2} \text{ и } \vec{P} = \frac{3\epsilon_0(K-1)}{K+2} \vec{E}_0.$$

Потенциалы поля окончательно записываются в виде:

$$\varphi_e = -E_0 x \left(1 - \frac{K-1}{K+2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (r \geq a),$$

$$\varphi_i = -\frac{3E_0}{K+2} x, \quad (r \leq a).$$

42. Проводящая сфера радиуса a находится внутри концентрического с ней диэлектрического шара радиуса b с относительной проницаемостью K . Определить емкость проводящей сферы.

Р е ш е н и е

Пусть проводящая сфера заряжена до заряда e ; тогда ее электрическая энергия будет равна:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0 K}{2} \int_a^b \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 K r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_b^\infty \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 ab K}, \end{aligned}$$

а ее емкость

$$C = \frac{e^2}{2W} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab K}{a(K-1) + b}.$$

43. Левая часть пространства занята диэлектриком с проницаемостью (относительной) K_1 , а правая — диэлектриком с проницаемостью K_2 . Во второй среде на расстоянии a от плоской границы раздела двух сред находится точечный заряд $+e$.

Определить поле в обоих диэлектриках. Рассмотреть частный случай: в правом полупространстве — пустота ($K_2 = 1$). Сравнить искажение поля точечного заряда, вызываемое бесконечным диэлектриком K_1 (с плоской границей), с тем искажением, которое наблюдалось бы, если в левом полупространстве находился проводник. При каком условии искажение поля точечного заряда диэлектриком K_1 будет таким же, как и искажение от бесконечной проводящей стенки?

Решение

Применим к решению данной задачи метод изображений. Допустим, что заряду $+e$ соответствует по другую сторону плоской границы раздела двух сред электрическое изображение $-e'$ (рис. 35) и попробуем искать потенциал поля в среде K_2 (в точке P) в виде:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K_2} \left(\frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} \right).$$

Потенциал поля в среде K_1 (в точке P') попытаемся представить в виде:

$$\varphi_1 = \frac{e''}{4\pi\epsilon_0 K_1 r},$$

т. е. мы считаем поле в среде K_1 таким, каким оно было бы, если все пространство было занято только одним диэлектриком с проницаемостью K_1 , а в точке A находился заряд $+e''$.

Покажем, что указанные допущения возможны, если распорядиться произвольными пока e' и e'' так, чтобы удовлетворялись граничные условия:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ и } D_{1n} = D_{2n}$$

на поверхности раздела двух сред.

В какой-либо точке M , лежащей на поверхности раздела, указанные условия принимают вид:

$$\frac{1}{K_2} \left(\frac{e}{r_M} - \frac{e'}{r'_M} \right) = \frac{e''}{K_1 r_M}, \quad \frac{e}{r_M^3} (\vec{r}_M \vec{n}) - \frac{e'}{r'_M{}^3} (\vec{r}'_M \vec{n}) = \frac{e''}{r_M^3} (\vec{r}_M \vec{n})$$

или

$$K_1(e - e') = K_2 e'' \text{ и } e + e' = e''.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$e' = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} e, \quad e'' = \frac{2K_1}{K_1 + K_2} e, \quad (1)$$

после чего искомые потенциалы принимают вид:

$$\varphi_1 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0(K_1 + K_2)r}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 K_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \frac{1}{r'} \right). \quad (2)$$

В частном случае, при $K_2 = 1$

$$\varphi_1 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0(1 + K_1)r}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1} \frac{1}{r'} \right).$$

Если заменить диэлектрик K_1 проводником, то для определения потенциала φ_2 в правом полупространстве необходимо поместить в точке A' точечный заряд $-e$ (см. задачу 19). Следовательно, возмущающее действие, оказываемое на поле точечного заряда большим куском диэлектрика с плоской границей, в

$$\frac{e'}{e} = \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1} = \left(1 - \frac{2}{K_1 + 1} \right)$$

раз меньше по сравнению с аналогичным действием куска проводника. Отсюда видно, что $e' = e$ при $K_1 \rightarrow \infty$, т. е. в задачах электростатики формально можно рассматривать проводник как диэлектрик с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью.

44. Вычислить силу, действующую на единицу длины бесконечной прямой и равномерно заряженной нити, параллельной плоской границе раздела двух диэлектрических сред и расположенной от нее на расстоянии d .

Р е ш е н и е

Решение вполне аналогично решению задачи 43, с той лишь разницей, что потенциалы поля в обеих средах теперь следует записывать в виде:

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda''}{2\pi\epsilon_0 K_1} \ln r, \quad \varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K_2} \ln r + \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 K_2} \ln r',$$

где λ , λ' , λ'' — заряды, приходящиеся на единицу длины нити и ее изображений, а r , r' — расстояния в плоскости, перпендикулярной к нитям. Для λ' , λ'' получаются те же выражения, что и в задаче 43 [формула (1)] для зарядов-изображений e' и e'' .

Сила, действующая на единицу длины нити,

$$F = \lambda E_A,$$

где E_A — напряженность поля, возбуждаемого фиктивной нитью (с зарядом λ') в точках, занимаемых реальной (заданной) нитью. Она, как легко видеть, равна (рис. 36):

$$E_A = - \left[\frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 K_2} \ln r' \right) \right]_{r'=2d}.$$

Отсюда

$$F = -\lambda \left[\frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 K_2} \ln r' \right) \right]_{r'=2d} = - \frac{\lambda^2 (K_1 - K_2)}{4\pi\epsilon_0 K_2 (K_1 + K_2) d}.$$

45. Внутри бесконечной цилиндрической полости (радиуса a), вырезанной в протяженном диэлектрике, находится бесконечная прямая заряженная нить, параллельная

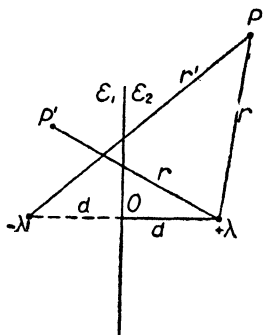


Рис. 36

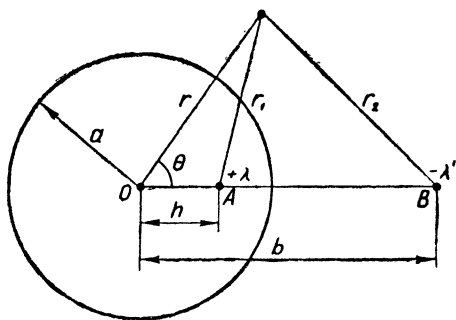


Рис. 37

полости и отстоящая на расстоянии h от ее оси. Вычислить силу, действующую на единицу длины нити со стороны диэлектрика.

Решение

Применяя метод изображений, будем искать поле внутри полости как суммарное поле реальной заряженной нити (с зарядом $+\lambda$ на единицу длины) и фиктивной нити (с зарядом $-\lambda'$), проходящей через точку B (рис. 37), находящуюся на расстоянии $b = a^2/h$ от оси полости. Поле вне полости (в диэлектрике) будем искать в виде суперпозиции полей от двух фиктивных нитей с зарядами $+\lambda''$ и $\lambda - \lambda''$ и проходящих соответственно через точки A и O . На основании всего сказанного выше потенциалы поля можно записать в виде:

$$\varphi_i = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2,$$

$$\varphi_e = -\frac{\lambda''}{2\pi\epsilon_0 K} \ln r_1 - \frac{\lambda - \lambda''}{2\pi\epsilon_0 K} \ln r + C$$

или в полярных координатах:

$$\varphi_i = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln (r^2 + h^2 - 2rh \cos \Theta) +$$

$$+ \frac{\lambda'}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(r^2 + \frac{a^4}{h^2} - \frac{2ra^2}{h} \cos \Theta \right),$$

$$\varphi_e = -\frac{\lambda''}{4\pi\epsilon_0 K} \ln (r^2 + h^2 - 2rh \cos \Theta) -$$

$$- \frac{\lambda - \lambda''}{2\pi\epsilon_0 K} \ln r + C. \quad (1)$$

Подберем теперь λ' , λ'' , C так, чтобы удовлетворялись граничные условия:

$$\varphi_i(a) = \varphi_e(a) \text{ и } \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)_{r=a} = K \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Первое из указанных условий принимает вид:

$$(\lambda' - \lambda) \ln (a^2 + h^2 - 2ah \cos \Theta) + 2\lambda' \ln \frac{a}{h} =$$

$$= -\frac{\lambda''}{K} \ln (a^2 + h^2 - 2ah \cos \Theta) - \frac{2(\lambda - \lambda'')}{K} \ln a + C,$$

откуда видно, что непрерывность потенциала на поверхности полости будет обеспечена, если положить

$$C = 2\lambda' \ln \frac{a}{h} + \frac{2(\lambda - \lambda'')}{K} \ln a$$

и

$$K(\lambda - \lambda') = \lambda''. \quad (2)$$

Второе граничное условие имеет вид:

$$-\frac{2\lambda(a - h \cos \Theta)}{a^2 + h^2 - 2ah \cos \Theta} + \frac{2\lambda' \left(a - \frac{a^2}{h} \cos \Theta \right)}{a^2 + \frac{a^4}{h^2} - \frac{2a^3}{h} \cos \Theta} = -\frac{2(\lambda - \lambda'')}{a}$$

$$-\frac{2\lambda''(a - h \cos \Theta)}{a^2 + h^2 - 2ah \cos \Theta}$$

или

$$\lambda + \lambda' = \lambda''. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) находим:

$$\lambda' = \frac{K-1}{K+1} \lambda \text{ и } \lambda'' = \frac{2K}{K+1} \lambda. \quad (4)$$

Сила, действующая на единицу длины заряженной нити со стороны диэлектрика, находящегося вне полости, оказывается равной:

$$F = -\lambda \left[\frac{\partial}{\partial r_2} \left(\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 \right) \right]_{r_2=(b-h)} = - \frac{\lambda^2 (K-1) h}{2\pi\epsilon_0 (K+1) (a^2-h^2)}. \quad (5)$$

46. Точечный заряд q находится на расстоянии r_0 от центра сферической полости (радиуса $a > r_0$), вырезанной в бесконечно большом куске диэлектрика с относительной проницаемостью K . Определить силу, действующую на заряд со стороны полости.

Решение

Поле внутри полости будем искать в виде суммарного поля реального точечного заряда q , находящегося в точке A (рис. 38), и фиктивного точечного заряда $-q'$, находяще-

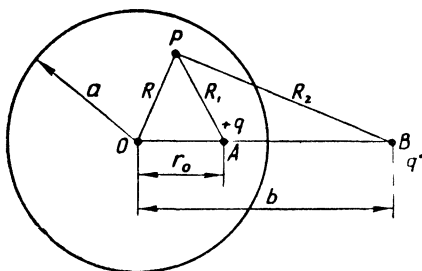


Рис. 38

гося в точке, лежащей на продолжении прямой OA на расстоянии $b = \frac{a^2}{r_0}$ от центра полости. Потенциал, соответствующий указанному полю, записываем в виде:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q'}{R_2} \right), \quad (1)$$

где

$$R_1 = (R^2 + r_0^2 - 2r_0 R \cos \Theta)^{\frac{1}{2}} \text{ и } R_2 = (R^2 + b^2 - 2bR \cos \Theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись разложениями обратных расстояний $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ в ряд по сферическим гармоникам (см.: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, 1950, стр. 490)

$$\frac{1}{R_1} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & \text{при } R < r_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & \text{при } R > r_0 \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\frac{1}{R_2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{n+1}}{a^{2n+2}} R^n P_n(\cos \Theta) & \text{при } R < \frac{a^2}{r_0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{r_0^n R^{n+1}} P_n(\cos \Theta) & \text{при } R > \frac{a^2}{r_0}, \end{cases} \quad (3)$$

перепишем потенциал (1) в следующем виде:

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{r_0^{n+1}} - \frac{q' r_0^{n+1}}{a^{2n+2}} \right) R^n P_n(\cos \Theta), & (0 \leq R \leq r_0), \quad (1a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q r_0^n}{R^{n+1}} - \frac{q' r_0^{n+1}}{a^{2n+2}} R^n \right) P_n(\cos \Theta), & (r_0 \leq R \leq a). \quad (1б) \end{cases}$$

Запишем также потенциал поля, возбуждаемого внутри полости только одним фиктивным зарядом — q' :

$$\varphi_i^* = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q' r_0^{n+1}}{a^{2n+2}} R^n \cdot P_n(\cos \Theta). \quad (4)$$

Поле вне полости будем искать в виде поля, которое создавал бы в однородной среде с относительной проницаемос-

тью K фиктивный заряд q'' , находящийся в точке, занимаемой в действительности реальным зарядом q . Соответствующий этому полю потенциал можно записать в виде:

$$\varphi_e = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 K R_1} \quad (5)$$

или

$$\varphi_e = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q'' R^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \Theta), & (R < r_0), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q'' r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \Theta), & (R > r_0). \end{cases} \quad (5a)$$

$$\varphi_e = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q'' R^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \Theta), & (R < r_0), \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q'' r_0^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \Theta), & (R > r_0). \end{cases} \quad (5b)$$

Для того чтобы потенциалы (1а, б) и (5а, б) были решением задачи о потенциале, необходимо подобрать q' и q'' так, чтобы на поверхности полости удовлетворялись граничные условия

$$\varphi_l(a) = \varphi_e(a) \text{ и } \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial R}\right)_{R=a} = K \left(\frac{\partial\varphi_e}{\partial R}\right)_{R=a} \quad (6)$$

[при записи граничных условий (6) потенциал φ_l следует взять по формуле (1б), а φ_e — по формуле (5б)]. Нетрудно показать, что граничные условия (6) будут удовлетворены, если положить

$$\frac{q''}{K} = q - q' \cdot \frac{r_0}{a}$$

и

$$(n+1) q'' = (n+1) q + n q' \cdot \frac{r_0}{a},$$

откуда

$$q' = \frac{(K-1)(n+1)a}{[n+K(n+1)]r_0} q \text{ и } q'' = \frac{(2n+1)K}{n+K(n+1)} q. \quad (7)$$

Сила, действующая на заряд q со стороны полости, параллельна прямой AO и равна:

$$F = -q \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial R}\right)_{\left(\begin{smallmatrix} R=r_0 \\ \theta=0 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{(K-1)q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n+K(n+1)} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{2n+1}.$$

47. Экспериментальные методы измерения поляризуемости диэлектрических материалов (так же, как и измере-

ние диамагнитной и парамагнитной восприимчивости магнитных материалов) основаны на определении сил, действующих на испытываемый образец в неоднородном электрическом поле. Схема одного из подобных методов представлена на рисунке 39.

Испытываемый образец в виде достаточно тонкого цилиндра предварительно уравнивают на весах. Затем образец помещается в поле двух заряженных разноименными зарядами сфер и снова уравнивается. Какова

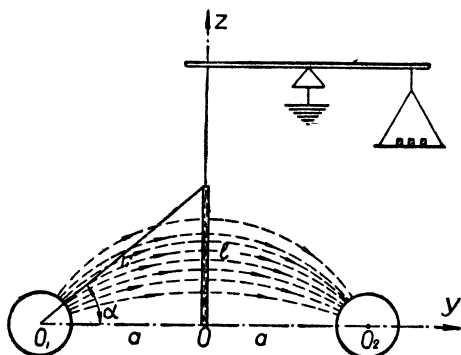


Рис. 39

поляризуемость диэлектрика, если заряд каждой сферы равен q , расстояние между центрами сфер — $2a$, сечение образца — S , его длина — l , вес образца до внесения в поле — P и вес образца в поле — P_1 ?

Р е ш е н и е

Известно (см: И. Е. Т а м м. Основы теории электричества, § 32), что на единицу объема диэлектрика со стороны электростатического поля действует сила

$$\vec{f} = \frac{\alpha}{2} \text{grad } E^2.$$

Сила, действующая со стороны электростатического поля заряженных сфер на испытываемый диэлектрический образец, параллельна оси (см. рис. 39) и равна.

$$F_z = \frac{\alpha}{2} \int \text{grad}_z E^2 dv = \frac{\alpha S}{2} \int_0^l \frac{dE^2}{dz} dz = \frac{\alpha S}{2} [E^2(l) - E^2(0)].$$

С помощью рисунка 39 находим:

$$E(l) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_1^2} \cos \alpha = \frac{aq}{2\pi\epsilon_0(a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad E(0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Следовательно,

$$F_z = -\frac{\alpha S a^2 q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right]. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$F_z = -(P_1 - P). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим поляризуемость диэлектрика; она равна:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \epsilon_0^2 (P_1 - P)}{S a^2 q^2} \left[\frac{1}{a^6} - \frac{1}{(a^2 + l^2)^3} \right]^{-1} \text{ ф/м.}$$

48. Определить изменение внутренней энергии теплоизолированного диэлектрика, находящегося между обкладками плоского конденсатора, при бесконечно малом изменении в диэлектрике поля, происходящем за счет увеличения заряда обкладок на бесконечно малую величину Δe . Обкладки конденсатора поддерживаются при постоянной разности потенциалов. Изменением объема диэлектрика при изменении поля пренебречь.

Р е ш е н и е

Работа, которую надо произвести для того, чтобы увеличить заряд обкладки конденсатора на бесконечно малую величину Δe , равна:

$$\Delta A = \varphi_1 \Delta e. \quad (1)$$

Это — механическая работа, производимая электрическим полем при переносе заряда Δe из бесконечности на обкладку конденсатора.

Задача состоит в том, чтобы преобразовать ΔA к виду, выраженному через характеристики поля в диэлектрике.

Пусть D_n — проекция вектора электрической индукции на нормаль к обкладке конденсатора, внешней по от-

ношению к диэлектрику; тогда очевидно, что поверхностная плотность заряда на обкладке равна $-D_n$, так что

$$e = - \int_{S_1} D_n dS = - \int_{S_1} \vec{D} d\vec{S}. \quad (2)$$

Отсюда, имея в виду, что потенциал φ_1 постоянен на всей обкладке конденсатора, можно записать:

$$\Delta A = \varphi_1 \Delta e = - \int_{S_1} \varphi_1 \vec{\Delta} D d\vec{S} = - \oint_{S_0} \varphi_1 \vec{\Delta} D d\vec{S}, \quad (3)$$

где S_0 — замкнутая поверхность, охватывающая весь конденсатор и проходящая внутри второй обкладки немного

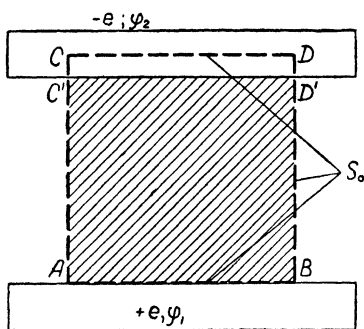


Рис. 40

выше границы раздела диэлектрика и этой обкладки (на рисунке 40 штриховой линией изображена проекция этой поверхности на плоскость, перпендикулярную к обкладкам конденсатора). Такой выбор поверхности S_0 оправдан тем, что на плоскостях AC и BD' произведение $\vec{\Delta} D d\vec{S} = 0$, так как $\vec{\Delta} \vec{D} \perp d\vec{S}$, а на плоскости CD вектор $\vec{\Delta} \vec{D} = 0$, так как все поле в конденсаторе сосредоточено между плоскостями AB и $C'D'$. Применяя к уравнению (3) теорему Остроградского — Гаусса, находим:

$$\Delta A = - \int \operatorname{div} (\varphi_1 \vec{\Delta} \vec{D}) dV, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всему объему диэлектрика. Как поле \vec{D} в начале процесса, так и измененное

поле $\vec{\Delta D}$ ввиду отсутствия объемно распределенных зарядов удовлетворяют уравнению Максвелла $\text{div } \vec{\Delta D} = 0$, поэтому

$$\text{div} (\varphi_1 \vec{\Delta D}) = \varphi_1 \text{div} \vec{\Delta D} + \vec{\Delta D} \text{grad } \varphi_1 = -\vec{E} \vec{\Delta D}$$

и, следовательно,

$$\Delta A = \int \vec{E} \vec{\Delta D} dV. \quad (5)$$

Но из термодинамики известно, что работа, произведенная над теплоизолированным телом, есть не что иное, как изменение внутренней энергии тела при постоянной энтропии (см.: В. Е. М и к р ю к о в. Курс термодинамики, Учпедгиз, 1956, стр. 92). Таким образом, искомое изменение внутренней энергии U диэлектрика равно:

$$(\Delta U)_\sigma = \Delta A = \int \vec{E} \vec{\Delta D} dV.$$

В общем случае (диэлектрик не теплоизолирован) изменение внутренней энергии $(\Delta U)_\sigma$ надо прибавить к изменению полной энергии тела, включающей в себя также тепловую энергию и энергию электростатического поля в вакууме; поэтому

$$\Delta U = T \Delta \sigma + \int \vec{E} \vec{\Delta D} dV. \quad (6)$$

Если воспользоваться определением свободной энергии $F = U - T\sigma$, то

$$\Delta F = -\sigma \Delta T + \int \vec{E} \vec{\Delta D} dV,$$

откуда видно, что

$$\int \vec{E} \cdot \vec{\Delta D} dV = (\Delta F)_T$$

представляет собой изменение свободной энергии диэлектрика при изотермическом изменении электрического поля.

Обозначим через f свободную энергию единицы объема диэлектрика; тогда

$$(\Delta f)_T = \vec{E} \cdot \vec{\Delta D},$$

откуда для изотропного диэлектрика с линейной связью между векторами \vec{E} и \vec{D} , т. е. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, получим:

$$f = f_0(T) + \frac{\epsilon}{2} E^2 = f_0(T) + \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}.$$

Полученное выражение показывает, что с точностью до некоторой (несущественной для задач электродинамики) функции температуры $\frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$ представляет собой свободную энергию диэлектрика. К тому же выводу можно прийти, рассматривая механизм поляризации диэлектриков (см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 31).

49. Диэлектрическая плоскопараллельная пластинка помещена в однородное электрическое поле E_0 . Сечение пластинки плоскостью чертежа таково (рис. 41), что размеры его длины значительно больше размеров ширины. Определить момент сил, действующих на пластинку со стороны внешнего электрического поля, а также указать положение устойчивого равновесия пластинки.

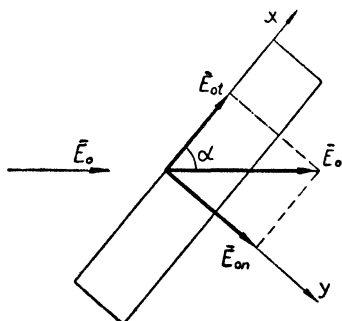


Рис. 41

Р е ш е н и е

Отметим прежде всего, что равнодействующая ponderomotorных сил, приложенных к пластинке со стороны поля,

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = 0.$$

Действительно, в силу однородности внешнего поляризующего поля и однородности самого диэлектрика, из которого изготовлена пластинка, можно считать, что электрическое поле внутри пластинки тоже будет однородным. Поэтому объемная плотность ponderomotorных сил

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (K - 1) \text{grad } E^2$$

и их равнодействующая оказываются равными нулю. Однако момент указанных сил отличен от нуля, чем и вызывается вращение пластинки при включении внешнего поля.

Известно, что на электрический диполь, помещенный в однородное поле, действует пара сил с моментом, равным

$$\vec{N}_0 = \left[\vec{p} \vec{E}_0 \right].$$

Отсюда, учитывая, что в силу однородности поля внутри пластинки все ее элементарные диполи (молекулы) ориентированы одинаково, мы можем сразу же написать момент сил, отнесенный к единице объема пластинки:

$$\vec{N}_{\text{ед. объема}} = \left[\vec{P} \vec{E}_0 \right] = \epsilon_0 (K - 1) \left[\vec{E} \vec{E}_0 \right],$$

где \vec{P} — вектор поляризации диэлектрика. Момент подемоторных сил, действующих со стороны поля на всю пластинку, очевидно, будет равен:

$$\vec{N} = V \vec{N}_{\text{ед. объема}} = \epsilon_0 (K - 1) V \left[\vec{E} \vec{E}_0 \right]. \quad (1)$$

Задача, таким образом, сводится к определению напряженности поля \vec{E} внутри пластинки.

Введем декартову систему координат (рис. 41) и запишем условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля и нормальной составляющей вектора электрической индукции на поверхности пластинки:

$$E_x = E_0 \cos \alpha; \quad KE_y = E_0 \sin \alpha,$$

откуда

$$E_x = E_0 \cos \alpha \quad \text{и} \quad E_y = \frac{E_0 \sin \alpha}{K}. \quad (2)$$

Момент сил, действующих на пластинку со стороны поля, оказывается равным:

$$\vec{N} = \epsilon_0 (K - 1) V E_0^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{K} & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon_0 (K - 1)^2 \sin 2\alpha}{2K} V E_0^2 \vec{k}.$$

Положениями равновесия пластинки являются положения, при которых угол α равен 90° или 0° . Согласно формуле (2) в первом случае напряженность поля внутри пластинки $E = \frac{E_0}{K}$, а ее электростатическая энергия

$$W_1 = \frac{\epsilon_0 K}{2} E^2 V = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2K} V.$$

Во втором случае ($\alpha = 0^\circ$) напряженность поля внутри диэлектрика $E = E_0$, а энергия электростатического поля в пластинке

$$W_2 = \frac{\epsilon_0 K E_0^2}{2} V = K^2 W_1.$$

Из термодинамики известно, что состоянию устойчивого равновесия системы (для процессов, происходящих подобно вращению пластинки во внешнем электрическом поле при постоянных температуре T и объеме V) соответствует минимум свободной энергии. В предыдущей задаче было показано, что при наличии в электростатическом поле диэлектриков W имеет смысл термодинамической свободной энергии. Поэтому устойчивым положением равновесия пластинки, очевидно, будет то положение, при котором пластинка перпендикулярна к направлению внешнего поля.

50. Диэлектрический шар (радиуса a), находящийся во внешнем однородном поле E_0 , разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу притяжения между полушариями.

Р е ш е н и е

Объемные пондеромоторные силы, действующие со стороны электрического поля на произвольное материальное тело, могут быть сведены к силам натяжения, испытываемым поверхностью тела (И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 32—34). Если обозначить через \vec{T}_n силу, действующую извне на единицу поверхности тела, внешняя нормаль к которой направлена по единичному вектору \vec{n} , то равнодействующую всех натяжений, испытываемых поверхностью тела в электрическом поле, можно представить в виде:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T}_n dS, \quad (1)$$

где

$$\vec{T}_n = \epsilon_0 \left\{ K \vec{E} (\vec{n} \vec{E}) - \frac{1}{2} E^2 \left(K - \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right) \vec{n} \right\}. \quad (2)$$

В формуле (2) \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности тела, \vec{E} — напряженность поля на поверхности тела и

ρ — плотность тела. Для однородного диэлектрика ($K = \text{const}$)

$$\vec{T}_n = \varepsilon_0 K \left\{ \vec{E} \left(\vec{n} \vec{E} \right) - \frac{1}{2} E^2 \vec{n} \right\}. \quad (3)$$

Обращаясь к стоящей перед нами задаче, можно утверждать, что сила притяжения между полушариями равна равнодействующей всех натяжений, испытываемых поверхностью каждого полушария в отдельности. Последняя на основании формул (1) и (3) может быть записана в виде:

$$\vec{F} = \varepsilon_0 K \int_{S_1} \left\{ \vec{E}_1 \left(\vec{n}_1 \vec{E}_1 \right) - \frac{1}{2} E_1^2 \vec{n}_1 \right\} dS + \varepsilon_0 K \int_{S_2} \left\{ \vec{E}_2 \left(\vec{n}_2 \vec{E}_2 \right) - \frac{1}{2} E_2^2 \vec{n}_2 \right\} dS, \quad (4)$$

где S_1 и S_2 — соответственно плоский и сферический участки поверхности полушария, \vec{E}_1 — напряженность поля в щели между полушариями и \vec{E}_2 — напряженность поля на сферическом участке поверхности полушария со стороны вакуума. Очевидно также, что ввиду симметрии полушарий сила (4) параллельна полярной оси Z , — систему координат выбираем так, чтобы направление оси Z совпадало с направлением внешнего поля \vec{E}_0 (рис. 42).

Известно, что внутри электрического шара, находящегося во внешнем поле \vec{E}_0 , поле однородно и равно $\vec{E}_i = \frac{3\vec{E}_0}{(K+2)}$ (см. задачу 41). Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора индукции на поверхности S_1 находим:

$$\vec{E}_1 = \frac{3K}{K+2} \vec{E}_0;$$

поэтому натяжение, испытываемое плоским участком S_1 поверхности полушария, оказывается равным:

$$(F_1)_z = \varepsilon_0 K \int_{S_1} \left(-E_1^2 + \frac{1}{2} E_1^2 \right) dS = -\frac{9\pi\varepsilon_0 K^3}{2(K+2)^2} a^2 E_0^2. \quad (5)$$

Далее из условий непрерывности нормальной составляющей вектора \vec{D} и тангенциальной составляющей вектора \vec{E} на поверхности S_2 находим следующие значения для

составляющих электрического поля на сферическом участке поверхности полушария:

$$(E_2)_r = \frac{3K}{K+2} E_0 \cos \theta \text{ и } (E_2)_\theta = -\frac{3}{K+2} E_0 \sin \theta,$$

откуда натяжение, испытываемое сферическим участком S_2 , оказывается равным:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 = & \frac{9\epsilon_0 K E_0^2}{2(K+2)^2} \int_{S_2} (K^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \vec{n}_2 dS - \\ & - \frac{9\epsilon_0 K^2 E_0^2}{(K+2)^2} \int_{S_2} \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta dS. \end{aligned}$$

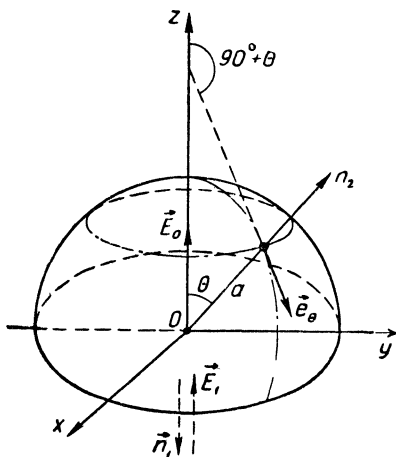


Рис. 42

Но, как указывалось выше, сила \vec{E} параллельна оси Z и поэтому

$$\begin{aligned} (F_2)_z = & \frac{9\epsilon_0 K E_0^2}{2(K+2)^2} \left\{ \int_{S_2} (K^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos(\vec{n}_2, \hat{z}) dS - \right. \\ & \left. - 2K \int_{S_2} \sin \theta \cos \theta \cos(\vec{e}_\theta, \hat{z}) dS \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда

$dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$; $\cos(\widehat{n_z, z}) = \cos \theta$; $\cos(\widehat{e_\theta, z}) = -\sin \theta$
и интегрируя по θ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, находим:

$$(F_2)_z = \frac{9\pi\epsilon_0}{4(K+2)^2} (K^3 + 2K^2 - K) a^3 E_0^2.$$

Сила притяжения между полушариями оказывается равной:

$$F = (F_1)_z + (F_2)_z = -\frac{9\pi\epsilon_0 K(K-1)^2}{4(K+2)^2} a^3 E_0^2.$$

51. Незаряженная проводящая сфера (весом P) плавает в диэлектрической жидкости (с относительной проницаемостью K), погрузившись в нее на одну четверть своего объема.

До какого потенциала следует зарядить сферу для того, чтобы она плавала, будучи погруженной наполовину? Считать, что зависимость относительной диэлектрической проницаемости жидкости от ее плотности выражается формулой Клаузиуса — Мосотти:

$$\frac{K-1}{K+2} = A\rho,$$

где A — постоянная величина.

Р е ш е н и е

Условие плавания заряженной проводящей сферы имеет вид:

$$F_1 + F_2 = P, \quad (1)$$

где F_1 — сила электростатического натяжения слоя жидкого диэлектрика, прилегающего к заряженной сфере; она направлена вдоль оси x (рис. 43); F_2 — выталкивающая сила, равная $\frac{1}{2} Vd$, где V — объем сферы и d — удельный вес жидкости, который нетрудно определить из условия плавания незаряженной сферы; он оказывается равным $\frac{4P}{V}$,

так что выталкивающая сила F_2 в (1) оказывается равной $2P$. Учитывая это, условие плавания заряженной сферы (1) можно окончательно записать в виде:

$$F_1 = P.$$

На единицу поверхности прилегающего к сфере слоя диэлектрика со стороны электрического поля заряженной сферы действует сила натяжения \vec{T}_n . В рассматриваемом случае поле \vec{E} параллельно нормали \vec{n} и поэтому из формулы (2) предыдущей задачи находим:

$$\vec{T}_n = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho K) \vec{n}. \quad (2)$$

Из формулы Клаузиуса — Мосотти, устанавливающей зависимость относительной диэлектрической проницаемости жидкости от ее плотности, находим:

$$\rho K = \frac{\rho + 2A\rho^2}{1 - A\rho}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho K) = \frac{1 + 4A\rho - 2(A\rho)^2}{(1 - A\rho)^2};$$

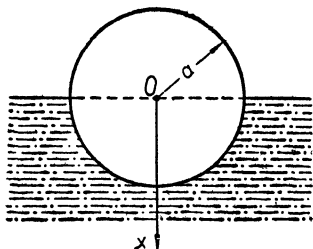


Рис. 43

правую часть полученного выражения можно преобразовать, воспользовавшись той же самой формулой Клаузиуса — Мосотти. Окончательно получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho K) = \frac{1}{3} (K^2 + 4K - 2). \quad (3)$$

Подстановка в (2) выражения (3) и $E = \frac{\Phi}{a}$, где a — радиус сферы и Φ — искомый потенциал, дает:

$$T_n = \frac{\varepsilon_0 \Phi^2}{6a^2} (K^2 + 4K - 2). \quad (2a)$$

Вследствие симметрии сила натяжения поверхностного слоя диэлектрика оказывается направленной вдоль оси X и равной:

$$F_1 = \int T_n \cos(\widehat{\vec{n}, x}) dS = \frac{1}{6} \pi \epsilon_0 \varphi^2 (K^2 + 4K - 2). \quad (4)$$

Как показывают уравнения (1а) и (4), заряженная проводящая сфера будет плавать в диэлектрической жидкости, погруженной в нее наполовину, лишь в том случае, если ее потенциал равен:

$$\varphi = \sqrt{\frac{6P}{\pi \epsilon_0 (K^2 + 4K - 2)}}. \quad (5)$$

Задачи для самостоятельного решения

53*. Конденсатор образован двумя параллельными пластинками, находящимися на расстоянии h друг от друга. Одна из пластин имеет нулевой потенциал (заземлена). Пространство между пластинами заполнено диэлектриком, относительная проницаемость которого линейно возрастает от одной пластины к другой, т. е. $K = ax + b$, причем $K = K_1$ на одной и $K = K_2$ на другой пластине. Найти емкость указанного конденсатора.

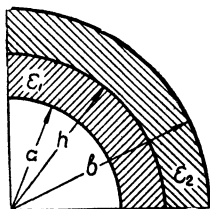


Рис. 44

54*. Два конденсатора одинаковой емкости соединены последовательно и подключены к источнику напряжения в φ вольт. На какую величину изменится потенциал провода, соединяющего конденсаторы, если один из них заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью K ?

55*. Определить емкость сферического конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено двумя слоями диэлектриков с относительными проницаемостями K_1 и K_2 . Расположение диэлектриков и все необходимые размеры указаны на рисунке 44.

56*. Показать, что внутри однородно поляризованного диэлектрического шара (в отсутствии внешнего поля) вектор электрической индукции связан с вектором напряженности поля соотношением:

$$\vec{D} + 2\varepsilon_0 \vec{E} = 0.$$

57*. Очень длинный тонкий стержень с относительной проницаемостью K помещен в однородное поле E_0 параллельно силовым линиям поля. Каковы (по величине) напряженность и индукция поля внутри стержня?

58*. В протяженном диэлектрике имеется однородное поле \vec{E}_0 . Какова величина напряженности поля и электрической индукции в полости, имеющей форму: а) достаточно длинного тонкого цилиндра, ось которого параллельна линиям поля; б) тонкого диска, перпендикулярного к линиям поля; в) шара радиуса R .

59*. Однородная диэлектрическая оболочка, внешний и внутренний радиусы которой соответственно равны a и b , помещена в однородное поле \vec{E}_0 . Определить поле внутри оболочки.

60*. Найти величину вектора поляризации бесконечно-го цилиндра радиуса R (из материала с относительной проницаемостью K), находящегося в однородном поперечном поле \vec{E}_0 .

61*. Определить поле внутри бесконечной цилиндрической трубы из диэлектрика с относительной проницаемостью K , находящейся в однородном поперечном поле \vec{E}_0 .

62*. Точечный заряд в $0,5 \text{ нКл}$ находится на расстоянии 1 м от большого куска вещества с плоской границей из: а) металла; б) стекла с относительной диэлектрической проницаемостью $K = 7$. Какова в обоих случаях сила, действующая на точечный заряд?

63*. В условиях задачи 43 определить поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела двух диэлектрических сред.

64*. Электрон, летящий первоначально в направлении оси X (рис. 45) со скоростью v_0 , должен пролететь в вакууме над плоской незаряженной поверхностью пластинки из диэлектрика. В начальный момент, когда электрон пролетает над краем пластинки, расстояние между ними

равно a . Показать, что под действием сил изображения электрон будет втянут в диэлектрик в точке B , если

$$a^3 = \frac{(K - 1) e^2 d}{2\pi\epsilon_0 (K + 1) v_0^3}.$$

(При решении задачи пренебречь краевым эффектом, т. е. считать пластинку достаточно большой.)

65*. Вычислить силу, действующую на единицу длины прямой и равномерно заряженной нити, параллельной бесконечному диэлектрическому цилиндру (радиуса a) и отстоящей от его оси на расстоянии $h > a$.

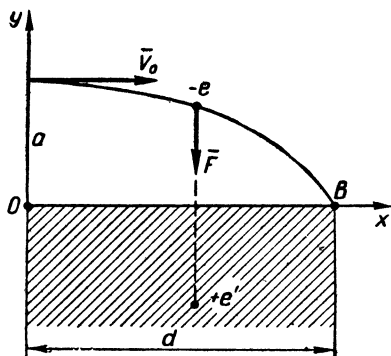


Рис. 45

66*. Показать, что энергия электрического поля в диэлектрике равна сумме собственной энергии свободных зарядов и половины энергии взаимодействия свободных и связанных зарядов.

67*. Вычислить количество тепла, выделяющегося в единице объема диэлектрика в процессе его изотермической поляризации (при возрастании напряженности поля от 0 до E), предполагая, что диэлектрическая проницаемость является функцией температуры, и пренебрегая изменением объема диэлектрика при его поляризации.

68*. Найти высоту поднятия уровня диэлектрической жидкости, втягиваемой в вертикальный плоский конденсатор, на обкладках которого поддерживается постоянная разность потенциалов.

§ 4. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

52. Элемент Даниэля состоит из двух концентрических цилиндров — медного и цинкового (с радиусами a и b и высотой h). Удельное сопротивление раствора медного купороса равно ρ . Каково внутреннее сопротивление элемента?

Р е ш е н и е

Первый способ. Сопротивление элемента входит в закон Ома (в интегральной форме):

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R}, \quad (1)$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ — разность потенциалов на электродах, а I — величина силы тока, текущего от одного электрода к другому. Величину тока и разность потенциалов в (1) можно определить независимо от интегрального закона Ома (1).

Действительно, поле в пространстве между электродами возбуждается лишь медным цилиндром, и оно, как это было показано в задаче 10, равно:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}. \quad (2)$$

Воспользовавшись далее законом Ома в дифференциальной форме, можно определить сначала плотность тока, а затем и весь ток, протекающий через раствор:

$$I = \int \vec{j} \vec{dS} = \int j dS = \frac{1}{\rho} \int E dS = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 \rho}. \quad (3)$$

Далее определяем разность потенциалов ($\varphi_2 - \varphi_1$), пользуясь уравнением

$$\vec{E} = - \frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r},$$

так как поле симметрично относительно углов Θ и координаты z . Подставляя сюда \vec{E} из (2) и интегрируя полученное уравнение, находим:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (4)$$

И, наконец, из выражений (1), (3) и (4) находим внутреннее сопротивление элемента:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{b}{a}.$$

Второй способ. Это чисто геометрический способ, основанный на использовании формулы сопротивления линейного проводника $R = \frac{\rho l}{S}$.

Проведем в пространстве между медным и цинковым электродами бесконечно тонкий цилиндрический слой с радиусом r и толщиной dr (см. рис. 46, 47). Ввиду того что

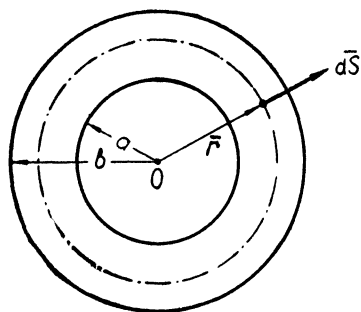


Рис. 46

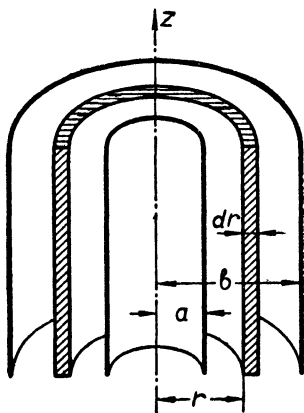


Рис. 47

объем такого слоя электролита будет также бесконечно мал, мы можем рассматривать указанный выше цилиндрический слой электролита как плоскую пластинку с высотой h , шириной $2\pi r$ и длиной dr . Сопротивление такого «линейного» проводника, очевидно, определяется формулой:

$$dR = \frac{\rho}{2\pi h} \cdot \frac{dr}{r}. \quad (6)$$

Произведя в формуле (6) интегрирование по r в пределах от a до b , находим:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{b}{a}.$$

53. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_i . С каждого электрода стекает ток I_i . Определить полное количество джоулева тепла, выделяющегося в среде в 1 сек.

Р е ш е н и е

Искомое тепло Q определяется интегралом

$$Q = \int \vec{j} \vec{E} dv = - \int \vec{j} \nabla \varphi dv = - \int \operatorname{div} (\varphi \vec{j}) dv,$$

взятым по объему среды (при этом мы воспользовались формулой (29) приложения 1 и уравнением непрерывности, принимающим в случае постоянного тока вид $\operatorname{div} \vec{j} = 0$). Преобразуем полученный интеграл в интеграл по поверхности электродов и внешней границы среды, учитывая, что на поверхностях электродов $\varphi = \text{const} = \varphi_i$, а на внешней границе среды $j_n = 0$. В результате получим:

$$Q = \sum_{i=1}^n \varphi_i \oint_{S_i} j_{ni} dS = \sum_{i=1}^n \varphi_i I_i.$$

54. Определить распределение потенциала внутри проводящего шара, в который ток I втекает через один полюс и вытекает через противоположный полюс.

Р е ш е н и е

Вблизи полюсов O_1 и O_2 (рис. 48) потенциал должен иметь вид:

$$\varphi_1 = \frac{\text{const}}{R_1} \text{ и } \varphi_2 = - \frac{\text{const}}{R_2}, \quad (1)$$

так как указанные функции являются решениями уравнения Лапласа. Постоянную, входящую в (1), можно определить исходя из того, что интегралы

$$- \lambda \int \nabla \varphi_{1,2} \vec{dS}_{1,2} \quad (2)$$

по бесконечно малым полусферам вокруг точек O_1 и O_2 должны быть равны $\pm I$. Подставляя в (2)

$$\nabla \varphi_1 = - \frac{\text{const}}{R_1^2} \vec{R}_1,$$

$$d\vec{S}_1 = dS_1 \frac{\vec{R}_1}{R_1} = 2\pi R_1^2 \sin\theta d\theta \cdot \frac{\vec{R}_1}{R_1},$$

находим:

$$I = 2\pi\lambda \cdot \text{const} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi\lambda \cdot \text{const},$$

откуда

$$\text{const} = \frac{I}{2\pi\lambda}.$$

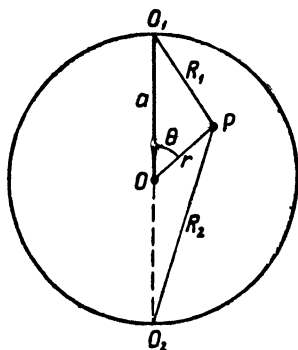


Рис. 48

Потенциал в какой-нибудь произвольной точке P внутри шара будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \psi = \\ &= \frac{I}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \psi, \end{aligned} \quad (3)$$

где ψ — решение уравнения Лапласа, зависящее только от r и θ и не имеющее особенностей как внутри, так и на поверхности шара;

кроме того, оно должно удовлетворять граничному условию $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=a} = 0$, которое, как нетрудно

показать, можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{I}{4\pi\lambda a} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right\}_{r=a}$$

или после подстановки разложений в ряд (справедливых для $r < a$):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos\theta}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра (см.: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, стр. 490),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=a} &= \frac{I}{4\pi\lambda a^2} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] P_n(\cos\theta) = \\ &= \frac{I}{2\pi\lambda a^2} \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Решение ψ уравнения Лапласа, удовлетворяющее всем указанным требованиям, будем искать в виде:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \quad (5)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta). \quad (6)$$

Сравнивая (4) и (6), находим:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{I}{4\pi\lambda} \cdot \frac{[1 - (-1)^n]}{na^{n+1}} \\ \text{и} \quad A_{2k} &= 0; \quad A_{2k+1} = \frac{I}{2\pi\lambda a^{2k+2}} \cdot \frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для распределения потенциала внутри шара можно представить в виде:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\lambda} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)a^{2k+2}} P_{2k+1}(\cos\theta) \right\}.$$

55. Вершины квадрата A, B, C, D соединены между собой и с центром O однородной проволокой, сопротивление которой на единицу длины равно r . В сторону AB включен гальванометр, а между вершиной C и центром O включена батарея элементов. Каким сопротивлением следует заменить проволоку OB , чтобы ток через гальванометр был равен нулю? (Сторона квадрата равна a .)

Решение

Заметим прежде всего, что (см. рис. 49)

$$\begin{aligned} R_{BC} = R_{CD} = R_{AD} = R_{AB} = ar; \quad R_{OC} = R_{OD} = R_{OA} = \frac{ar\sqrt{2}}{2}; \\ R_{OB} = x, \end{aligned}$$

а затем запишем первый закон Кирхгофа для узлов O , A , B , C и D :

$$I_1 + I_6 = I_2 + I_3 \quad (\text{для узла } O), \quad (1)$$

$$I_4 + I_5 = I_6 \quad (\text{для узла } A), \quad (2)$$

$$I_4 + I_7 = I_2 \quad (\text{для узла } B), \quad (3)$$

$$I_7 + I_8 = I_1 \quad (\text{для узла } C). \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что аналогичное уравнение для узла D является линейной комбинацией первых четырех уравнений; поэтому мы его отбрасываем.

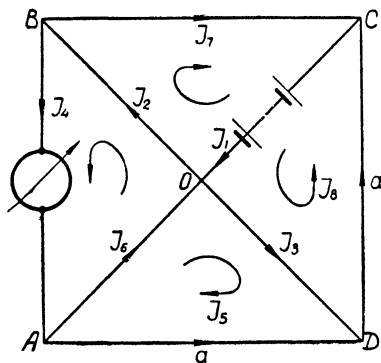


Рис. 49

Запишем также второй закон Кирхгофа для замкнутых контуров $OBCO$, $OCDO$, $OBAO$, $ODAO$ и $ABCD$:

$$ar\sqrt{2}I_1 + 2xI_2 + 2arI_7 = 2E, \quad (5)$$

$$ar\sqrt{2}(I_1 + I_3) + 2arI_8 = 2E, \quad (6)$$

$$2xI_2 + 2arI_4 + ar\sqrt{2}I_6 = 0, \quad (7)$$

$$2I_5 + \sqrt{2}I_3 + \sqrt{2}I_6 = 0, \quad (8)$$

$$I_5 + I_7 - I_4 - I_8 = 0. \quad (9)$$

Теперь в уравнениях (1) — (9) надо положить $I_4 = 0$; при этом находим, что

$$I_5 = I_6 = -\frac{\sqrt{2}x}{ar}I_2;$$

$$I_8 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}x}{ar}\right)I_2,$$

$$I_1 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}x}{ar}\right) I_2, \quad (10)$$

$$I_3 = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}x}{ar}\right) I_2, \quad I_7 = I_2.$$

Подставим равенства (10) в уравнения (5) и (6); это дает

$$(1 + \sqrt{2}) ar = \frac{E}{I_2};$$

$$\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) ar - (3 + \sqrt{2})x = \frac{E}{I_2},$$

откуда

$$x = ar(2 + 3\sqrt{2})^{-1}.$$

56. К батарее, имеющей постоянную электродвижущую силу E и внутреннее сопротивление r_i , подключены две параллельные ветви. Первая ветвь с полным сопротивлением R_1 содержит вольтметр, в котором имеется скачок потенциала такой величины, что протекающий через него единичный ток совершает в единицу времени ρ единиц работы. Сопротивление второй ветви равно R_2 . Определить силу тока, проходящего через батарею.

Р е ш е н и е

Из обобщенной формы закона Ома

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}^{cmp})$$

легко получить закон Ома для участка цепи в виде

$$I_{12}R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}^{cmp}$$

(см. по этому поводу § 38 книги И. Е. Тамма «Основы теории электричества»), откуда, разбивая замкнутую цепь на отдельные участки, можно записать закон Ома для замкнутой цепи в следующем виде:

$$\sum_{i,k} I_{ik}R_{ik} = \sum (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{i,k} E_{ik}^{cmp}. \quad (1)$$

Применим эту формулу к замкнутому контуру 1—2—3—4—5—1 (рис. 50):

$$I_{12}R_{12} + I_{23}R_{23} + I_{34}R_{34} + I_{45}R_{45} + I_{51}R_{51} = \varphi_2 - \varphi_3.$$

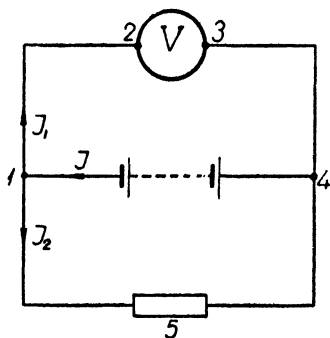


Рис. 50

Полученное уравнение можно записать гораздо проще, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} I_{12} &= I_{23} = I_{34} = I_1, \\ I_{45} &= I_{51} = -I_2 \end{aligned}$$

и

$$R_{12} + R_{23} + R_{34} = R_1,$$

$$R_{45} + R_{51} = R_2. \quad \text{Поэтому}$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3.$$

Но $\varphi_2 - \varphi_3 = -p$, где p — работа, совершаемая единичным током, протекающим через вольтметр, в единицу времени (знак минус взят нами потому, что работа p совершается силами поля). Окончательно рассматриваемое нами уравнение запишется в виде:

$$I_2 R_2 - I_1 R_1 = p. \quad (2)$$

Применение закона Ома в форме (1) к замкнутому контуру 1—2—3—4—1 приводит к уравнению

$$I_1 R_1 + I r_i = E - p,$$

или после подстановки $I = I_1 + I_2$:

$$I_1 (R_1 + r_i) + I_2 r_i = E - p. \quad (3)$$

Умножая уравнение (2) на r_i , а уравнение (3) — на R_2 и складывая полученные уравнения, находим:

$$I_1 = \frac{(E - p) R_2 - p r_i}{R_1 R_2 + r_i (R_1 + R_2)}.$$

При помощи уравнения (2) или (3) находим затем и I_2 . Величина тока, проходящего через батарею, оказывается равной

$$I = \frac{E (R_1 + R_2) - p R_2}{R_1 R_2 + r_i (R_1 + R_2)}.$$

57. Вывести закон нагревания постоянным током I цилиндрического провода с радиусом сечения r , длиной l и с постоянным удельным сопротивлением ρ в свободной атмосфере. Принять, что потери тепла проводником вследствие излучения в окружающую среду подчиняются за-

кону Ньютона, по которому эти потери прямо пропорциональны величине охлаждающейся поверхности проводника S , разности температур Θ проводника и окружающей среды и времени t , т. е. $dq = kS \cdot \Theta dt$.

Р е ш е н и е

При нагревании проводника часть тепловой энергии теряется им вследствие излучения в окружающую его среду. Допустим, что указанные потери тепла проводником подчиняются закону Ньютона.

Напишем уравнение, показывающее, что тепло, выделенное током за время dt , тратится на повышение температуры провода и на потери вследствие излучения в окружающую среду. Получим:

$$RI^2 dt = mcd\theta + kS \cdot \theta dt,$$

или

$$mc \frac{d\theta}{dt} + kS \cdot \theta = RI^2, \quad (1)$$

где θ — разность температур провода и окружающей среды.

Общий интеграл уравнения (1) имеет вид:

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{kS}{mc} t} + \frac{RI^2}{kS}.$$

Вспоминая, что θ равно нулю при $t = 0$, находим:

$$\theta_0 = -\frac{RI^2}{kS},$$

откуда

$$\theta = \frac{RI^2}{kS} (1 - e^{-\frac{kS}{mc} t}).$$

Заменяя R , m и S их выражениями

$$R = \frac{\rho l}{\pi r^2}; \quad m = \pi r^2 l \delta; \quad S = 2\pi r l,$$

окончательно получаем:

$$\theta = \frac{\rho l^2}{2k\pi^3 r^3} (1 - e^{-\frac{2k}{c\delta r} t}).$$

Форма кривой, выражающей θ как функцию от t , зависит только от коэффициента при t в показателе. Уместно отметить, что этот показатель зависит не только от радиуса провода и особых свойств вещества (удельной теплоемкости c и плотности δ), но и от состояния поверхности провода, характеризуемого коэффициентом теплопередачи k .

Температура проводника стремится к пределу

$$\theta_1 = \frac{\rho I^2}{2\pi^3 k r^3}.$$

Этот предел пропорционален квадрату силы тока, обратно пропорционален коэффициенту теплопередачи и кубу радиуса. Он не зависит от удельной теплоемкости: в самом деле, понятно, что удельная теплоемкость играет роль только в период, пока температура провода не установилась.

Задачи для самостоятельного решения

69*. Между обкладками сферического конденсатора находится проводящее вещество с электропроводностью σ . Определить сопротивление проводника, находящегося между обкладками конденсатора.

70*. Два конденсатора, емкости которых соответственно равны C_1 и C_2 , соединяются последовательно и подключаются к батарее элементов, полюса которой по отношению к земле имеют потенциалы φ_0 и $-\varphi_0$. Провод, соединяющий обкладки конденсаторов, отведен к земле. Какое количество электричества пройдет через провод к к земле?

71*. Показать, что на поверхности раздела двух проводников линии тока (т. е. линии вектора \vec{j}) испытывают преломление, причем

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \sigma_1 : \sigma_2,$$

где α_1 — угол между линией тока в первой среде и нормалью к поверхности раздела, σ_1 — электропроводность первой среды, а α_2 и σ_2 — соответствующие величины для второй среды.

72*. Показать, что нормальная составляющая вектора электрической индукции на поверхности проводника оп-

ределяется уравнением $D_n = \sigma$ даже и в том случае, если по проводнику течет постоянный ток, и, напротив, векторное уравнение $\vec{D} = \sigma \vec{n}$, справедливое для проводника, заряженного статически, в этом случае перестает быть справедливым.

73*. Цилиндрический сосуд наполнен жидкостью и имеет на концах два параллельных между собой кружка площадью S на расстоянии l друг от друга в качестве неполяризующихся электродов. Вдоль цилиндрического сосуда течет ток I . Определить силу электростатического взаимодействия между электродами.

74*. Некоторый аппарат заземлен с помощью полусферического металлического электрода (с радиусом, равным 10 см); шар опущен в землю так, что большой круг его лежит на поверхности земли. Каково сопротивление заземления, если известно, что удельное сопротивление земли составляет $100\text{ ом} \cdot \text{м}$?

75*. Внутренность плоского конденсатора с расстоянием d между пластинами состоит из двух слоев веществ, которые имеют толщины d_1 и d_2 , относительные диэлектрические проницаемости K_1 и K_2 и удельные электропроводности σ_1 и σ_2 , причем $d_1 + d_2 = d$. К пластинам конденсатора приложено напряжение V . Какова поверхностная плотность свободных и связанных зарядов на поверхности раздела диэлектриков? Какова величина силы тока, протекающего через конденсатор? Какова величина напряженности и индукции поля в обоих слоях?

76*. В круглый цилиндр радиуса r и длины L , изготовленный из проводника с электропроводностью σ , вставлены два электрода в виде тонких пластинок, края которых параллельны оси цилиндра. Оба электрода и ось цилиндра лежат в одной плоскости, причем расстояние между краем каждого из электродов и осью цилиндра a мало по сравнению с r . Определить (приблизительно) величину сопротивления между электродами.

77*. Ток I подводится к полюсу тонкой проводящей сферической пленки радиуса a (с удельным поверхностным сопротивлением τ) и отводится через противоположный полюс пленки. Найти распределение потенциала внутри пленки.

78*. На телеграфной линии возникло повреждение (рис. 51), вследствие которого в некотором месте между

линией и землей появилось сопротивление определенной величины R . Где должно находиться повреждение, чтобы на приемной станции телеграфной линии ток был наименьшим?

79*. Некоторый прибор должен работать от 6-вольтовой аккумуляторной батареи. Батарея, хотя и имеет весьма малое сопротивление, не может давать нужный ток достаточно продолжительное время. Чтобы преодолеть это затруднение, генератор постоянного тока, э.д.с. которого колеблется от 100 до 120 в, соединяют последовательно с сопротивлением, подобранным так, что, когда генератор с последовательно подключенным сопротивлением

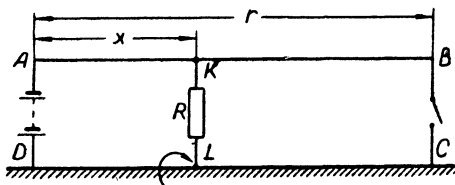


Рис. 51

присоединяется параллельно батарее, последняя не дает тока при наибольшем значении э.д.с. генератора.

Какую часть тока будет давать батарея, когда э.д.с. генератора имеет наименьшее значение?

80*. N ламп накаливания, каждая из которых имеет сопротивление r , питаются от генератора с постоянной э. д. с., равной E , и сопротивлением, равным R (включая и сопротивление проводки). Считая, что световой поток, излучаемый каждой лампой, пропорционален квадрату выделяемого тепла, показать, что для получения максимальной световой отдачи при заданном количестве горючего для двигателя следует соединять лампы в параллельные группы, каждая из которых содержит n ламп, где n — целое число, ближайшее к $\sqrt{NR/r}$

81*. Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно (рис. 52), во-первых, гальванометром с сопротивлением R и двумя проводами с сопротивлениями R_1 и R_2 ; во-вторых, проводом AKB , сопротивлением которого можно пренебречь. Точки K и F соединяются с полюсами батареи промежуточным проводом с весьма малым сопро-

тивлением, содержащим рубильник M . Собрав указанную цепь, ее замыкают рубильником.

Определить, пренебрегая наличием в цепи самоиндукции:

а) количество электричества, прошедшего через гальванометр;

б) мгновенные значения разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора;

в) мгновенные значения токов в проводах OO_1 , FO и FO_1 ;

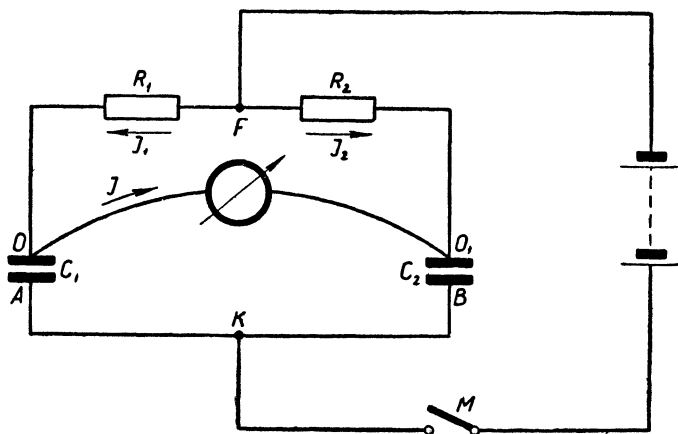


Рис. 52

г) количество джоулевого тепла, выделившегося в каждом проводе.

Показать также, что энергия, израсходованная батареей, делится поровну на джоулево тепло, выделяющееся в цепи, и на создание запаса электростатической энергии в конденсаторах.

82*. Какова длина вольфрамовой нити в лампе накаливания, если при 220 в лампа потребляет 50 вт, а диаметр нити составляет 25 мк? Удельное сопротивление вольфрама приблизительно принять пропорциональным абсолютной температуре; при 291°К оно равняется $0,56 \cdot 10^{-3} \text{ ом} \cdot \text{м}$. Температура нити равна 2500°К.

83*. В медный провод с поперечным сечением 1 мм² поставлен предохранитель из серебряной проволоки диа-

метром $0,2$ мм. Вычислить приближенно (пренебрегая теплоотдачей), сколько пройдет времени до момента, когда предохранитель переплавится, если при коротком замыкании идет ток силой 20 а; каково будет нагревание медного провода в этот момент? Теплоемкость серебра $0,23$ дж/град, удельное сопротивление $0,016 \cdot 10^{-8}$ ом \cdot м, точка плавления лежит при 1234°K . Медь имеет теплоемкость $0,38$ дж/град и удельное сопротивление $1,7 \cdot 10^{-8}$ ом \cdot м.

84*. Вычислить массу реостата на R ом для тока в I а, изготовляемого из металла с удельным сопротивлением ρ и плотностью d , если допустима разность температур между проводом и окружающей средой в T град. Из опыта известно, что провод из этого металла радиусом a под током I_0 а нагревается на Θ град выше температуры окружающей среды (изменениями сопротивления и плотности с изменением температуры пренебречь).

85*. Цилиндрический провод изготавливается из куска металла с массой M . Определить, как зависит от длины провода l : а) количество джоулевого тепла, выделяющегося в проводе за единицу времени; б) температура провода, если к его концам всякий раз прикладывать одну и ту же разность потенциалов U .

Г Л А В А П

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля в вакууме имеют вид:

В системе СИ

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

где

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

В абсолютной
системе

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3)$$

причем магнитная проницаемость вакуума принимается равной:

В системе СИ

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ гн/м.}$$

В абсолютной
системе

$$\mu_0 = 1. \quad (4)$$

Отсюда размерности магнитной индукции \vec{B} и напряженности магнитного поля \vec{H} в системе единиц СИ оказываются разными: магнитная индукция \vec{B} имеет размерность $[\text{вб/м}^2] = 1 \text{ тл}$, напряженность поля $\vec{H} — [a/м]$. В абсолютной гауссовой системе единиц размерности векторов \vec{B} и \vec{H} одинаковы.

Учитывая, что $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, магнитную индукцию \vec{B} можно выразить через векторный потенциал магнитного поля

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (5)$$

определяемый из уравнения:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид:

В системе СИ

В абсолютной системе

а) для объемно распределенных токов

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j} \frac{dv}{r}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \frac{dv}{r}, \quad (7)$$

б) для линейных токов

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}, \quad \vec{A} = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{l}}{r}. \quad (8)$$

Закон Био и Савара:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad d\vec{H} = \frac{I}{c} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (9)$$

Закон Эрстеда:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S j_n ds, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n ds, \quad (10)$$

или

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_t I_t, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_t I_t, \quad (11)$$

где под $\sum_t I_t$ понимается алгебраическая сумма токов, пронизывающих площадку S , натянутую на контур интегрирования L .

При расчете магнитного поля в магнетиках в формулах (3), (6), (7), (8) и (9) вместо μ_0 следует писать $\mu = \mu_0 K_m$, где μ — абсолютная, а K_m — относительная магнитные проницаемости магнетика.

а) Расчет магнитных полей с помощью закона Био и Савара¹

58. Вычислить индукцию магнитного поля, возбуждаемого бесконечным прямым током, на расстоянии r от его оси.

Решение

По закону Био и Савара индукция магнитного поля линейного тока

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[\vec{dl}, \vec{R}]}{R^3}, \quad (1)$$

где \vec{dl} — элемент тока, \vec{R} — радиус-вектор, соединяющий элемент тока с точкой наблюдения P , а интегрирование ведется вдоль контура тока. Для прямолинейного тока вектор $[\vec{dl}, \vec{R}]$, входящий в выражение (1), имеет одинаковое направление для всех элементов тока, так что вектор \vec{B} оказывается направленным по касательной к окружности, проходящей через точку наблюдения P (рис. 53), а его абсолютная величина

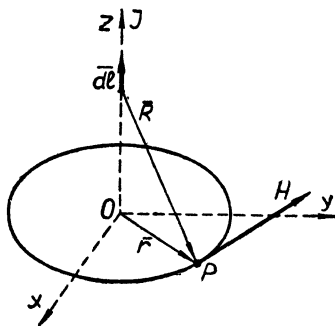


Рис. 53

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{R^3} \left| [\vec{dl}, \vec{R}] \right|. \quad (2)$$

Подставляя сюда

$$\vec{R} = \vec{r} - z \cdot \vec{k}; \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \vec{dl} = dz \cdot \vec{k}$$

и

$$\left| [\vec{dl}, \vec{R}] \right| = \left| [\vec{dl}, \vec{r}] \right| = rdz$$

¹ В задачах § 1 главы 2 всюду, если это специально не оговорено, магнитная проницаемость проводника, по которому течет ток, и магнитная проницаемость среды принимаются равными μ_0 .

и интегрируя по z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2a)$$

Интеграл, входящий в (2a), вычисляется следующим образом. Прежде всего, очевидно, что

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^2} \left\{ \int \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \int \frac{z^2 dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

применяя затем ко второму интегралу, стоящему в правой части этого равенства, правило интегрирования по частям, получим:

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в формулу (2a) приводит к окончательному результату:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4)$$

59. Ток $20a$ течет по бесконечно длинному проводу, согнутому под углом в 60° . Определить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от его вершины.

Р е ш е н и е

Индукция магнитного поля в точке P (рис. 54) перпендикулярна к плоскости чертежа, причем $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где \vec{B}_1 — поле, возбуждаемое в точке P током, текущим вдоль провода AB , а \vec{B}_2 — поле, создаваемое в той же точке током, текущим вдоль провода BC .

Аналогично предыдущей задаче

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-2a}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (2 + \sqrt{3}),$$

где $z_0 = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и

$r = \frac{a}{2}$. Отсюда

$$B = 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (2 + \sqrt{3}). \quad (1)$$

Подстановка в (1) числовых данных дает: $B = 2,986 \cdot 10^{-4} \text{ тл.}$

60. Линейный ток I циркулирует по окружности радиуса a . Вычислить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости тока на расстоянии x от центра тока.

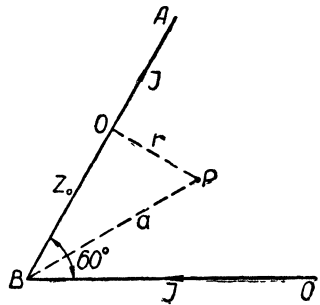


Рис. 54

Решение

Применим к решению задачи закон Био и Савара:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [\vec{dl}_1, \vec{R}].$$

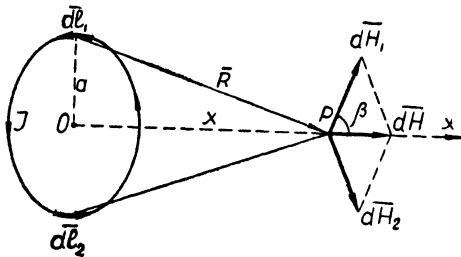


Рис. 55

Из рисунка 55 видно, что магнитное поле, возбуждаемое в точке наблюдения P двумя диаметрально противоположными элементами тока \vec{dl}_1 и \vec{dl}_2 , равно:

$$dB = 2dB_1 \cos \beta,$$

где

$$\cos \beta = \frac{a}{R} = \frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{и} \quad dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl_1.$$

Отсюда

$$dB = \frac{\mu_0 a I}{2\pi (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl_1.$$

Полную величину индукции магнитного поля в точке P найдем, интегрируя последнее уравнение по полуокружности. Находим:

$$B = \frac{\mu_0 a I}{2\pi (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl_1 = \frac{1}{2} \mu_0 I \cdot \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В частности, в центре кругового тока магнитная индукция будет равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

61. Определить магнитное поле в центре шара радиуса R , равномерно покрытого очень большим числом N параллельных витков, толщина которых τ такова, что $N\tau = 2R$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим виток AB , находящийся на расстоянии x от центра шара (рис. 56). Радиус этого витка $\rho = \sqrt{R^2 - x^2}$, а поле, возбуждаемое им в центре шара, равно:

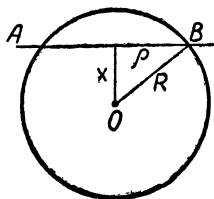


Рис. 56

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R^3} \rho^2.$$

Полное поле в центре шара, очевидно, будет равным:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R^3} \sum \rho^2. \quad (1)$$

Сумму, входящую в (1), преобразуем в интеграл. Для этого умножим и разделим (1) на τ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\tau R^3} \sum \rho^2 \tau = \frac{\mu_0 N I}{4R^4} \sum \rho^2 \tau.$$

Считая τ малым по сравнению с R , положим $\tau = dx$ и заменим сумму интегралом:

$$\sum \rho^2 \tau = \int_{-R}^{+R} \rho^2 dx = \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} R^3,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 N I}{3R}.$$

62. Провод образует плоскую спираль, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $r = R\varphi (2\pi N)^{-1}$, где N — число всех витков, а R — длина радиуса-вектора, проведенного из центра спирали к ее наружному концу. По спирали течет ток I . Определить аксиальную составляющую магнитной индукции вдоль оси спирали на расстоянии z от ее плоскости.

Решение

По закону Био и Савара индукция магнитного поля от элемента тока, текущего вдоль спирали, равна:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \left[\vec{dl}, \vec{R} \right].$$

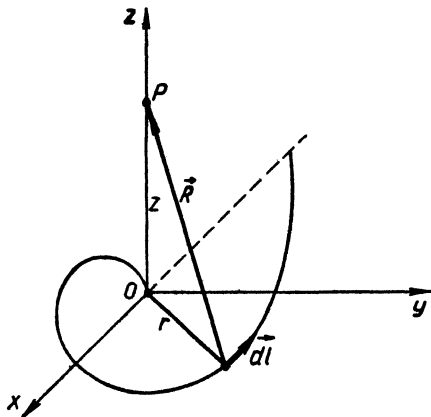


Рис. 57

Если выбрать систему декартовых и цилиндрических координат так, как это показано на рисунке 57, то

$$[\vec{dl}, \vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ -r \cos \varphi & -r \sin \varphi & z \end{vmatrix} =$$

$$= z dx \cdot \vec{i} - z dy \cdot \vec{j} + (r \cos \varphi dy - r \sin \varphi dx) \vec{k},$$

откуда для аксиальной составляющей магнитной индукции в точке P находим следующее выражение:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} (r \cos \varphi dy - r \sin \varphi dx), \quad (1)$$

входящие в (1) dx и dy можно найти из формул преобразования $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, после чего выражение (1) принимает вид:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r^2 d\varphi}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1a)$$

Далее, из уравнения спирали, приводимого в тексте задачи, находим:

$$d\varphi = \frac{2\pi N}{R} dr;$$

подстановка $d\varphi$ в уравнение (1a) и интегрирование полученного уравнения по r в пределах от 0 до R приводят к окончательному результату:

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right].$$

63. Найти уравнение силовых линий магнитного поля двух бесконечных прямых параллельных токов I , протекающих в противоположных направлениях (расстояние между токами принять равным $2a$).

Р е ш е н и е

Выбираем систему декартовых координат так, как это показано на рисунке 58. Тогда магнитную индукцию в точке P (для удобства выбранной в координатной плоскости XOY) можно записать в виде:

$$B_x = \frac{\mu_0 a I}{\pi r_1^2 r_2^2} (y^2 - x^2 - a^2); \quad B_y = -\frac{2\mu_0 a I}{\pi r_1^2 r_2^2} xy.$$

откуда дифференциальное уравнение силовых линий $B_y dx - B_x dy = 0$ принимает вид:

$$2xydx + (y^2 - x^2 - a^2) dy = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) заменой переменной по формуле $x^2 + a^2 = u^2$ приводится к однородному уравнению, интегрирование которого не представляет особой сложности. В результате интегрирования находим:

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2 - a^2.$$

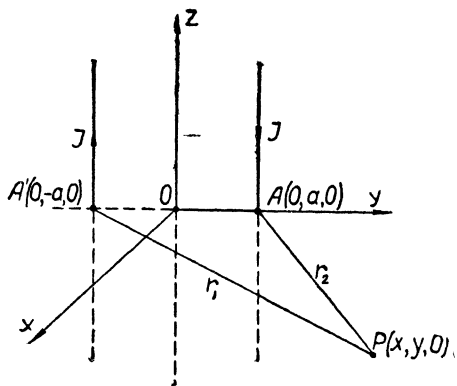


Рис. 58

Картину силовых линий магнитного поля двух антипараллельных токов воспроизводит, таким образом, однопараметрическое семейство окружностей с центрами, лежащими на оси Y (рис. 59). На том же рисунке изображено другое семейство окружностей (ортогональное к первому семейству) с центрами на оси X и проходящих через точки пересечения проводов с координатной плоскостью XOY . Указанное семейство окружностей представляет собой картину силовых линий электростатического поля, которое возбуждалось бы в том случае, если провода зарядить статически равными, но разноименными зарядами. Нетрудно видеть, что в этом случае первое семейство окружностей представляло бы собой картину эквипотенциальных поверхностей электростатического поля.

Задачи для самостоятельного решения

86*. Вычислить индукцию магнитного поля в центре тяжести равностороннего треугольника, по сторонам которого течет ток I .

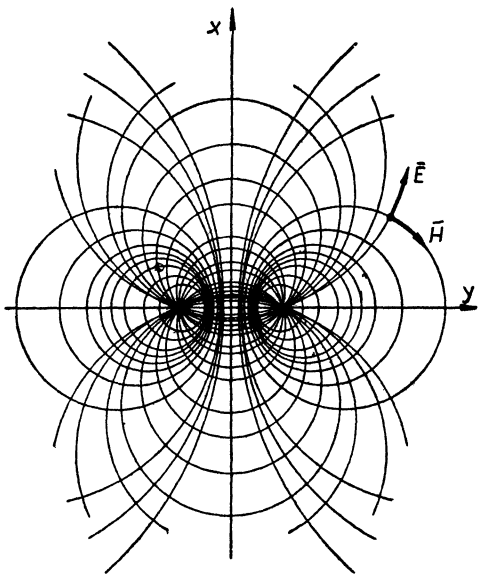


Рис. 59

87*. Вычислить магнитное поле в центре правильного многоугольника с n сторонами, вдоль которого циркулирует ток I .

88*. По бесконечному полому цилиндру параллельно его оси течет ток I , равномерно распределенный по его поверхности. Показать, не пользуясь законом Эрстеда, что магнитное поле в любой точке внутри цилиндра равно нулю.

89*. В контуре, изображенном на рисунке 60, ветви AN и BM расходятся радиально на бесконечность. Показать, что в центре круга магнитное поле равно нулю.

90*. На рисунке 61 представлена система из бесконечного прямолинейного тока, согнутого под прямым уг-

лом, и равного по силе кругового тока, для которого одна из ветвей прямолинейного тока является осью. Определить индукцию магнитного поля в точке A , считая отрезок AO равным $2a$.

91*. Вдоль контура $ABCD$ (рис. 62) циркулирует ток силой $I = 10$ а, причем $R_1 = 10$; $R_2 = 10\sqrt{10}$ и $AB = CD = 30$ см. Определить магнитную индукцию в точке O .

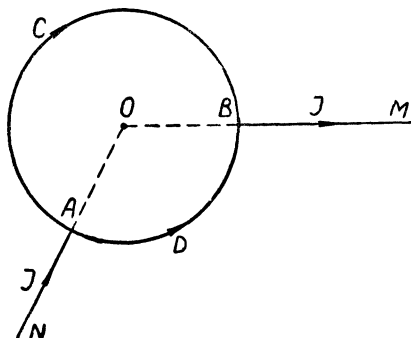


Рис. 60

Как изменится решение задачи, если дугу AD снять, а прямолинейные участки контура BA и CD продолжить до бесконечности?

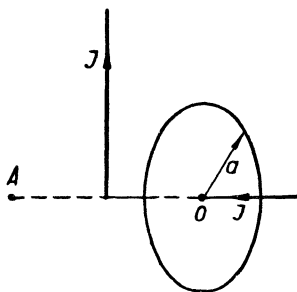


Рис. 61

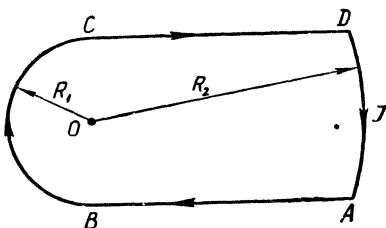


Рис. 62

92*. Из провода диаметром a , по которому течет ток I , изготовлена плоская спираль в N витков так, что витки касаются друг друга. Радиус спирали R . Определить ин-

дукцию магнитного поля в точке, лежащей на оси спирали на расстоянии x от ее центра.

93*. Определить магнитное поле на оси кругового однослойного соленоида (радиуса a), имеющего длину l и N витков на единицу длины.

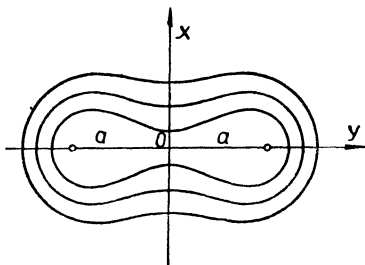


Рис. 63

94*. Ток I течет вдоль контура, имеющего форму эллипса, длина которого равна l , а площадь — S . Вычислить индукцию магнитного поля в центре эллипса.

95*. Найти уравнение силовых линий магнитного поля двух параллельных бесконечных прямых токов, текущих в одном и том же направлении. Расстояние между токами принять равным $2a$ (рис. 63).

б) Расчет магнитных полей с помощью закона Эрстеда

64. Вдоль бесконечного цилиндрического проводника (радиуса a) течет постоянный ток I , равномерно распределенный по сечению проводника. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндра.

Р е ш е н и е

Применение к расчету магнитных полей закона Эрстеда

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \int_S j_n dS \quad (1)$$

во многом аналогично решению задач электростатики при помощи электростатической теоремы Гаусса. Важнейшим моментом при решении любой магнитостатической задачи

с помощью закона Эрстеда является рациональный выбор контура интегрирования L . Этот выбор должен быть произведен с учетом всех свойств симметрии поля, — и только в этом случае применение закона Эрстеда может оказаться полезным.

Начнем с вычисления поля вне цилиндрического провода (в точке P на рис. 64).

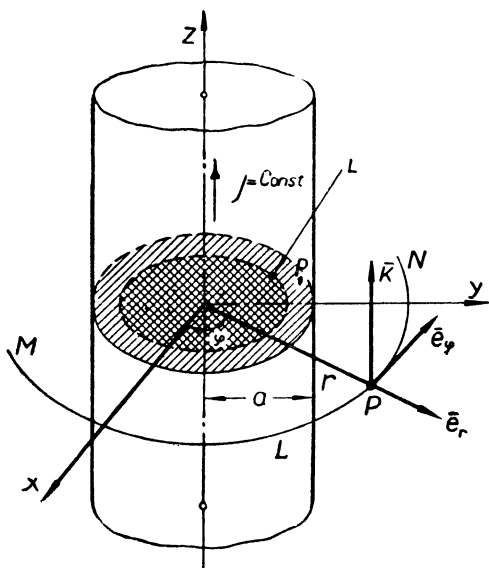


Рис. 64

Выбираем контур интегрирования L в законе Эрстеда (1) в виде окружности с центром O на оси цилиндра (ось Z), лежащей в координатной плоскости XOY (на рис. 64 изображена лишь часть контура L — дуга MPN). Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Тогда

$$\vec{H} = H_r \cdot \vec{e}_r + H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + H_z \vec{k}; \quad d\vec{L} = dL \cdot \vec{e}_\varphi$$

и

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \oint_L H_\varphi dL = H_\varphi \oint_L dL = 2\pi r \cdot H_\varphi,$$

так как во всех точках контура L составляющая поля $H_\varphi = \text{const}$. Закон Эрстеда (1) можно теперь записать в виде:

$$2\pi r \cdot H_\varphi = I,$$

откуда

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}. \quad (2)$$

Докажем, что $H_z = H_r = 0$ и, следовательно, $H = H_\varphi$. Первое из указанных равенств — это следствие закона Био и Савара. Действительно,

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R^3} [\vec{j}, \vec{R}]_z dv = 0,$$

так как $[\vec{j}, \vec{R}]_z = 0$ в силу того, что вектор \vec{j} параллелен оси z . Для доказательства второго равенства ($H_r = 0$) воспользуемся уравнением Максвелла $\text{div} \vec{B} = 0$ или $\text{div} \vec{H} = 0$ (так как $\mu_0 = \text{const}$); которое в цилиндрических координатах [см. приложение 1, формулу (12)] имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

или, так как $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} (rH_r) = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$H_r = \frac{\text{const}}{r}, \quad (3)$$

причем оно справедливо как для поля вне цилиндра, так и для поля внутри его. Отсюда, в частности, при $r \rightarrow 0$ следовало бы $H_r \rightarrow \infty$. Однако последнее не может иметь места, так как это противоречило бы закону сохранения энергии (вместе с обращением в бесконечность H_r при $r = 0$ обращалась бы в бесконечность и плотность энергии магнитного поля $\frac{1}{2} \mu_0 H^2$). Поэтому мы должны в формуле (3) положить константу равной нулю.

Таким образом, напряженность магнитного поля вне цилиндра

$$H_e = H_{e\varphi} = \frac{I}{2\pi r}, \quad (r \geq a).$$

Она равна напряженности поля, которое создавал бы бесконечно тонкий прямой ток I , текущий вдоль оси цилиндра.

Для точки P_1 , находящейся внутри цилиндра, закон Эрстеда (1) принимает вид:

$$2\pi r H_{i\varphi} = I_1, \quad (4)$$

где I_1 — ток, пересекающий площадку, ограниченную контуром интегрирования L_1 (часть сечения проводника, отмеченная на рис. 64 двойной штриховкой); он равен:

$$I_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{a^2} I.$$

Из уравнения (4) получаем:

$$H_i = H_{i\varphi} = \frac{1}{2\pi a^2} \cdot r, \quad (r \leq a).$$

65. Вычислить поле внутри достаточно длинной, тонкой цилиндрической катушки, на единицу длины которой приходится n витков проволоки с током I .

Р е ш е н и е

Из соображений симметрии следует, что поле как внутри, так и вне катушки параллельно ее оси и не зависит от координат z и φ (рис. 65), т. е. $H = H(r)$. Далее, нетрудно видеть, что циркуляция вектора \vec{H} вдоль контура $ABCD$, замыкающегося на бесконечности,

$$C = \oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{L} = 0,$$

так как площадка $ABCD$ пересекается каждым витком тока два раза в противоположных направлениях и, следовательно, $\sum_i I_i = 0$.

С другой стороны, циркуляция вектора \vec{H} вдоль контура $ABCD$

$$C = H_e(r) - H_e(\infty) = 0,$$

откуда, принимая $H_e(\infty) \equiv 0$, находим: $H_e(r) = 0$, т. е. поля вне катушки нет.

Циркуляция вектора \vec{H} вдоль контура $CNMB$

$$\oint_{CNMB} \vec{H} d\vec{L} = H_i(NM) = H_i; \quad \sum_i I_i = nI,$$

откуда с помощью закона Эрстеда находим:

$$H_i = nI.$$

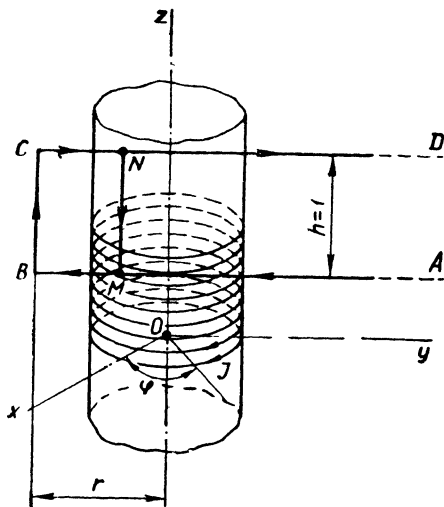


Рис. 65

66. На тор радиуса R (с круговым сечением радиуса a) намотано N витков проволоки, по которой течет ток I . Считая проволоку достаточно тонкой, определить напряженность магнитного поля указанного соленоида.

Решение

Введем цилиндрическую систему координат (рис. 66, 67) и запишем закон Эрстеда в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \sum_i I_i,$$

где $\sum_i I_i$ — алгебраическая сумма токов, пересекающих поверхность, натянутую на контур интегрирования L . Под-

ставляя сюда $\vec{dL} = dL \cdot \vec{e}_\varphi$ и $\vec{H} = H_r \cdot \vec{e}_r + H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + H_z \cdot \vec{k}$, получим (см. рис. 66):

а) для поля внутри соленоида (точка P , контур интегрирования L)

$$\oint_L \vec{H}_i \cdot \vec{dL} = 2\pi r \cdot H_{i\varphi} = NI,$$

откуда

$$H_{i\varphi} = \frac{NI}{2\pi r};$$

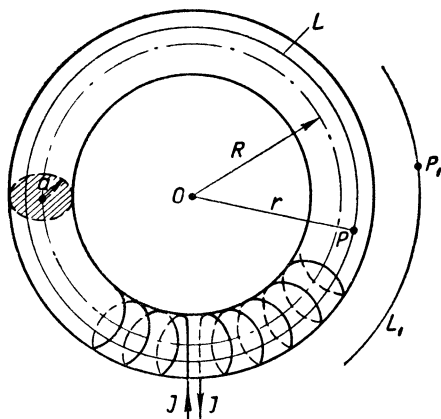


Рис. 66

б) для поля вне соленоида (точка P_1 , контур интегрирования L_1)

$$\oint_{L_1} \vec{H}_e \cdot \vec{dL} = 2\pi r H_{e\varphi} = 0 \text{ и } H_{e\varphi} = 0.$$

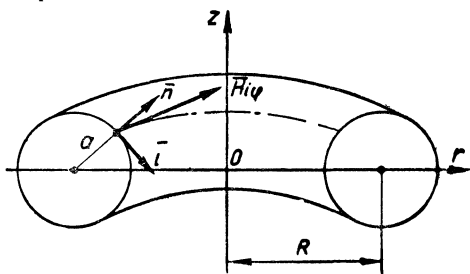


Рис. 67

Докажем теперь, что $H_{er} = H_{ez} = H_{ir} = H_{iz} = 0$. С этой целью будем рассматривать соленоид как тороидальную поверхность, обтекаемую поверхностными токами с плотностью

$$i = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Магнитное поле, возбуждаемое такими токами, должно удовлетворять уравнениям $\mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ и граничному условию

$$[\vec{n}, \vec{H}_e - \vec{H}_i] = i\vec{\tau},$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности соленоида (рис. 67). Нетрудно проверить, что все три условия действительно будут удовлетворены при сделанных нами предположениях о характере поля.

Таким образом,

$$H_i = H_{i\varphi} = \frac{NI}{2\pi r} \text{ и } \vec{H}_e = 0. \quad (1)$$

Следует заметить, что полученное решение справедливо и для кольцеобразного соленоида с сечением произвольной формы.

В частном случае, когда $a \ll R$, поле внутри соленоида можно считать однородным и равным значению поля на осевой линии тора, т. е.

$$H_i = \frac{NI}{2\pi R}. \quad (2)$$

Задачи для самостоятельного решения

96*. Какова величина циркуляции вектора \vec{H} вдоль трех указанных на рисунке 68 контуров интегрирования, если сила тока в каждом проводнике равна $5a$?

97*. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечной цилиндрической трубы, вдоль которой течет ток I , равномерно распределенный по ее сечению.

98*. То же для полого цилиндра кругового сечения, по поверхности которого течет равномерно распределенный ток I , параллельный его оси.

99*. Внутри бесконечного цилиндра радиуса a , вдоль которого течет ток I , равномерно распределенный по се-

чению проводника, имеется цилиндрическая бесконечная полость радиуса b , ось которой параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстоянии d . Определить поле внутри полости.

100*. Имеется бесконечный прямолинейный соленоид радиуса R , намотанный из провода диаметром d , причем d очень мало по сравнению с R . Вынуть из соленоида один виток, не разрывая при этом его обмотку, и определить напряженность магнитного поля в центре вынутого витка. По обмотке соленоида течет ток I .

101*. На железное кольцо (с относительной магнитной проницаемостью $K_m = 500$) с радиусом $R = 10$ см и поперечным сечением $a = 1,3$ см намотано 600 витков тонкой проволоки.

Какова величина магнитного потока в кольце, если по обмотке течет ток в 1 а? Рассчитать с помощью формул (1)

и (2) задачи 66. Сравнить полученные результаты и указать относительную ошибку, допускаемую при расчете магнитного потока при использовании приближенной формулы (2) задачи 66 для напряженности магнитного поля внутри кольца.

102*. Железное кольцо предыдущей задачи имеет воздушный зазор шириной в δ см, однако не настолько широкий, чтобы учитывать рассеяние силовых линий поля в зазоре. Как зависит магнитный поток от ширины зазора δ ? Какова величина магнитного потока при следующих значениях ширины воздушного зазора: $\delta = 0,1; 1$ и 5 мм?

в) Векторный и скалярный потенциалы магнитного поля. Магнитный момент тока

67. Рассчитать магнитное поле бесконечного прямого тока I , вычисляя сначала векторный потенциал \vec{A} , а затем и индукцию поля по формуле $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Найти уравнение силовых линий поля.

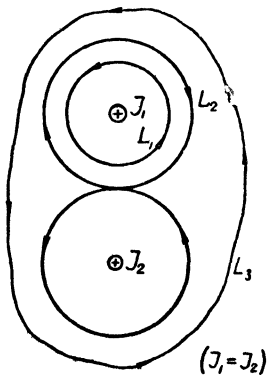


Рис. 68

Решение

Из соображений симметрии ясно, что поле будет одинаковым во всех плоскостях, перпендикулярных к оси z (рис. 69); поэтому точку наблюдения P удобнее всего выбрать в координатной плоскости XOY . По определению, векторный потенциал магнитного поля линейного тока

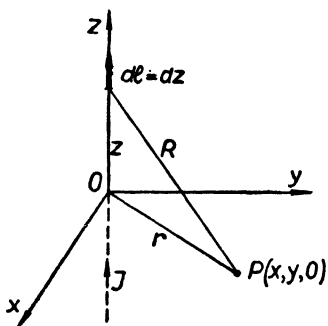


Рис. 69

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{R}$$

В рассматриваемом случае $A_x = A_y = 0$, а

$$A_z = A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

где $L \rightarrow \infty$. В результате несложного интегрирования находим:

$$A = A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(L + \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (1)$$

Из полученного выражения (1) видно, что $A \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow \infty$, но это не должно нас смущать, так как обращение в бесконечность векторного потенциала еще не представляет собой никакой опасности. Реальный физический смысл имеет не вектор \vec{A} , а индукция поля \vec{B} , им определяются силы, действующие со стороны магнитного поля на движущиеся в нем заряды и проводники. Поэтому если при $L \rightarrow \infty$ индукция магнитного поля \vec{B} стремится к конечному пределу, хотя при этом $\vec{A} \rightarrow \infty$, то все обстоит вполне благополучно.

Индукцию магнитного поля определяем по формуле $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, или в развернутом виде:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{j},$$

откуда

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{и} \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (2)$$

причем производные в формулах (2) должны быть взяты при $L \rightarrow \infty$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \left[\frac{y}{(L + \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + L^2}} \right]_{L \rightarrow \infty} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} = \\ &= -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2}. \end{aligned}$$

Аналогично: $\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}$. Следовательно,

$$B_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

т. е. получен тот же самый результат, что и в задаче 58.

Произведенные вычисления показывают, что в векторном потенциале (1) следует сохранить лишь второе слагаемое; что же касается первого слагаемого, логарифмически расходящегося на нижнем и верхнем пределах интегрирования и несущественного при вычислении индукции поля, то его можно просто отбросить. Окончательно векторный потенциал бесконечного прямого тока принимает вид:

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r. \quad (1a)$$

После подстановки значений B_x и B_y в дифференциальное уравнение силовых линий оно принимает вид: $x dx + y dy = 0$, интегрируя которое находим: $x^2 + y^2 = C^2$. Таким образом, силовые линии поля представляют собой (в сечении плоскостью XOY) семейство концентрических окружностей с центрами на оси тока.

68. Вычислить векторный потенциал и индукцию магнитного поля кругового (радиуса a) тока I на больших расстояниях от него, т. е. на расстояниях $R \gg a$.

Р е ш е н и е

По определению, векторный потенциал магнитного поля линейного кругового тока

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{R_i}, \quad (1)$$

где L — контур тока. Из рисунка 70 видно, что $\vec{R}_i = \vec{R} - \vec{a}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} - \frac{2\vec{a}\vec{R}}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Так как $a \ll R$, то в полученном выражении можно ограничиться первыми двумя членами разложения в ряд, т. е. можно записать

$$\frac{1}{R_i} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{\vec{a}\vec{R}}{R^2} \right).$$

Подставляя это в формулу (1), находим:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) \oint_L \vec{dl} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint_L (\vec{R}\vec{a}) \vec{dl}.$$

Очевидно, далее, что $\oint_L \vec{dl} = 0$ и поэтому

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint_L (\vec{R}\vec{a}) \vec{dl}. \quad (2)$$

Подставляя в (2)

$$\vec{dl} = -dl \cdot \sin \varphi \cdot \vec{i} + dl \cos \varphi \cdot \vec{j} = (-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) a d\varphi,$$

$\vec{a} = a(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j})$ и $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, находим:

$$A_x = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x \cos \varphi \sin \varphi + y \sin^2 \varphi) d\varphi = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4R^3} \cdot y,$$

$$A_y = \frac{\mu_0 a^2 I}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x \cos^2 \varphi + y \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 a^2 I}{4R^3} x \text{ и } A_z = 0.$$

Можно показать, что точно такие же составляющие имеет вектор

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [\vec{S}, \vec{R}],$$

где $\vec{S} = \pi a^2 \cdot \vec{k}$; отсюда, вводя магнитный момент тока $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$, получаем окончательное выражение для вектор-

ного потенциала кругового тока на больших расстояниях от него:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (3)$$

Вычисление индукции магнитного поля:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{B} = \frac{4\pi}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R^3}, [\vec{m}, \vec{R}] \right] + \frac{1}{R^3} \operatorname{rot} [\vec{m}, \vec{R}].$$

Далее, на основании формул (5), (22) и (32) приложения 1 находим:

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R}, [\vec{m}, \vec{R}] \right] &= \frac{3(\vec{m}, \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{3\vec{m}}{R^3}, \quad \operatorname{rot} [\vec{m}, \vec{R}] = \\ &= (\vec{R}\nabla)\vec{m} - \vec{R} \operatorname{div} \vec{m} + \vec{m} \operatorname{div} \vec{R} - (\vec{m}\nabla)\vec{R}. \end{aligned}$$

Заметим, что дифференцирование в последнем выражении производится по координатам точки наблюдения P , а так как вектор \vec{m} не зависит от них, то

$$(\vec{R}\nabla)\vec{m} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{m} = 0, \quad (\vec{m}\nabla)\vec{R} = \vec{m}$$

и

$$\operatorname{rot} [\vec{m}, \vec{R}] = 2\vec{m}.$$

В результате всех указанных преобразований для индукции магнитного поля кругового тока на больших расстояниях получаем следующее выражение:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{m}\vec{R})\vec{R}}{R^2} - \vec{m} \right\}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) показывают, что круговой ток на больших расстояниях ведет себя как магнитный диполь с моментом $m = I \cdot \pi a^2$.

Для точек наблюдения, лежащих на оси Z , радиус-вектор $\vec{R} = z\vec{k}$ и поэтому векторный потенциал $\vec{A} = 0$, а индукция магнитного поля

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{a^2}{z^3} \vec{k}. \quad (5)$$

Сравнение с результатом задачи 60 показывает, что формула (5) оказывается справедливой лишь в том случае,

если $z \gg a$. Это лишний раз указывает на приближенный характер выражений (3) и (4).

Любопытно отметить, что несмотря на то, что во всех точках на оси Z векторный потенциал $\vec{A} = 0$, $\text{rot } \vec{A} = \vec{B} \neq \neq 0$. Отсюда видно, что $\text{rot } \vec{A} = 0$ лишь в том случае, если $\vec{A} \equiv 0$ во всех точках пространства; локальное же обращение векторного потенциала \vec{A} в нуль еще не означает, что и $\vec{B} = 0$ (см. также следующую задачу).

69. Вычислить магнитное поле линейного кругового тока в произвольной точке наблюдения.

Р е ш е н и е

Поместим начало цилиндрической системы координат r, φ, z в центре кругового тока, причем угол φ будем отсчитывать от плоскости, проходящей через ось z и точку наблюдения P (произвольный выбор начала отсчета углов φ оправдан независимостью поля от φ).

Заметим, что непосредственно из самого определения векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R_i}$$

следует $A_z = 0$. Нетрудно также показать, что и $A_r = 0$. Действительно, рассмотрим два элемента тока $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$, симметрично расположенные относительно плоскости, проходящей через ось z и точку P . Они возбуждают в этой точке магнитные поля с потенциалами

$$\vec{dA}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1} d\vec{l}_1 \quad \text{и} \quad \vec{dA}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2} d\vec{l}_2,$$

причем $dA_1 = dA_2$ в силу того, что $dl_1 = dl_2$ и $R_1 = R_2$. Направления векторов \vec{dA}_1 и \vec{dA}_2 показаны на рисунке 71, представляющем собой проекцию пространственного рисунка на плоскость кругового тока. Из рисунка 71 видно, что для каждой пары элементов тока, симметричных относительно плоскости XOZ , составляющая векторного потенциала вдоль единичного вектора \vec{e}_r , равна нулю, так что и в целом составляющая $A_r = 0$.

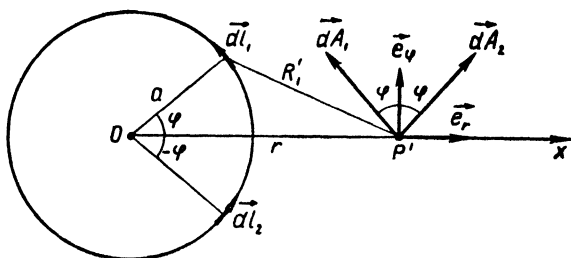


Рис. 71

Из того же рисунка видно, что составляющая векторно-го потенциала поля, возбуждаемого отдельным элементом тока \vec{dl} , вдоль единичного вектора \vec{e}_φ , равна $dA_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_i} \cos \varphi \times dl$, так что в целом

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\cos \varphi \cdot dl}{R_i} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi}}. \quad (1)$$

Путем замены φ на новую переменную θ , определяемую по формуле $\varphi = \pi + 2\theta$, выражение (1) можно привести к виду:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi n} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(1 - \frac{n^2}{2}\right) K(n) - E(n) \right],$$

где

$$K(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} d\theta -$$

полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода модуля n , определяемого соотношением:

$$n^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}.$$

Для составляющих вектора магнитной индукции по формулам (15) приложения 1 находим:

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K(n) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(n) \right],$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[K(n) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(n) \right],$$

$$B_\varphi = 0,$$

при этом мы воспользовались следующими соотношениями между полными эллиптическими интегралами K и E :

$$n(1 - n^2) \frac{dK}{dn} = E - (1 - n^2)K; \quad n \frac{dE}{dn} = E - K.$$

70. Вычислить векторный потенциал магнитного поля тока, текущего вдоль бесконечного цилиндрического провода (радиуса a) и равномерно распределенного по его сечению.

Р е ш е н и е

Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью цилиндра-провода. Нетрудно видеть, что единственной отличной от нуля компонентой векторного потенциала будет A_z , причем в силу симметрии поля $A_z = f(r)$.

Для определения A_z используем уравнения Пуассона и Лапласа, принимающие в цилиндрических координатах (и с учетом симметрии поля) следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{iz}}{dr} \right) = -\mu_0 j, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{ez}}{dr} \right) = 0. \quad (2)$$

Общие решения уравнений (1) и (2) можно представить в виде:

$$\begin{cases} A_{iz} = -\frac{1}{4} \mu_0 j r^2 + C_1 \ln r + C_2, \\ A_{ez} = C_3 \ln r + C_4. \end{cases} \quad (3)$$

По тем же соображениям, что и в задаче 14, принимаем $C_1 = 0$ и $C_2 = A_0$, где A_0 — векторный потенциал на оси провода. Постоянные C_3 и C_4 должны быть определены из граничных условий:

$$A_{iz}(a) = A_{ez}(a) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dA_{iz}}{dr} \right)_{r=a} = \left(\frac{dA_{ez}}{dr} \right)_{r=a}$$

(последнее условие равносильно требованию непрерывности тангенциальной составляющей вектора H на поверхности цилиндра). Вычисления показывают, что

$$C_3 = -\frac{1}{2} \mu_0 j a^2 \quad \text{и} \quad C_4 = A_0 - \frac{1}{4} \mu_0 j a^2 (1 - 2 \ln a),$$

после чего искомые потенциалы принимают вид:

$$\begin{cases} A_{iz} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r^2 + A_0, \\ A_{ez} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a}\right) + A_0. \end{cases} \quad (4)$$

71. В однородное магнитное поле \vec{B}_0 вносится шар (радиуса a), изготовленный из материала с относительной магнитной проницаемостью K_m , благодаря чему однородное поле \vec{B}_0 искажается. Определить магнитное поле внутри и вне шара. Найти также вектор намагничения (т. е. магнитный момент, приходящийся на единицу объема шара).

Р е ш е н и е

Первый способ. Исходя из того, что равномерно намагниченный шар ведет себя по отношению к внешнему пространству как магнитный диполь с магнитным моментом \vec{m} , пока нам неизвестным (вернее, нам неизвестна величина вектора \vec{m} ; что же касается его направления, то очевидно, что он направлен так же, как и внешнее поле \vec{B}_0). Поле внутри шара также является однородным и параллельным внешнему полю \vec{B}_0 , однако нам пока неизвестна его величина. Приведенные рассуждения дают нам право записать индукцию магнитного поля внутри и вне шара в следующем виде:

$$\begin{cases} \vec{B}_i = B_i \cdot \vec{i}, \\ \vec{B}_e = B_0 \vec{i} + \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{m} \vec{R}) \vec{R}}{R^2} - \vec{m} \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

при этом система сферических координат выбрана так, как это показано на рисунке 72.

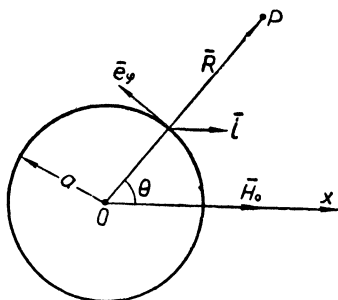


Рис. 72

Для определения m и B_i обратимся к граничным условиям

$$(B_{in})_{R=a} = (B_{en})_{R=a} \text{ и } (H_{it})_{R=a} = (H_{et})_{R=a}, \quad (2)$$

представляющим собой требования непрерывности нормальной составляющей вектора магнитной индукции и тангенциальной составляющей вектора напряженности. Нетрудно видеть, что

$$(B_{in})_{R=a} = B_i \cos \Theta; \quad (B_{en})_{R=a} = B_0 \cos \Theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} \cos \Theta,$$

$$(H_{it})_{R=a} = \left(\vec{H}_i \vec{e}_\varphi \right) = H_i \left(\vec{i} \vec{e}_\varphi \right) = -H_i \sin \Theta = -\frac{B_i}{\mu_0 K_m} \sin \Theta,$$

$$(H_{et})_{R=a} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \Theta + \frac{m}{4\pi a^3} \sin \Theta,$$

поэтому граничные условия (2) принимают вид:

$$B_i = B_0 + \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} \text{ и } B_i = K_m \left(B_0 - \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} \right),$$

откуда

$$B_i = \frac{3K_m}{K_m + 2} B_0 \text{ и } m = \frac{4\pi a^3}{\mu_0} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 2} \right) B_0.$$

Вектор намагничивания

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{v} = \frac{3}{\mu_0} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 2} \right) \vec{B}_0.$$

Таким образом, поле внутри и вне намагниченного шара определяется формулами:

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \frac{3K_m}{K_m + 2} \vec{B}_0, \\ \vec{B}_e = \vec{B}_0 + \frac{a^3}{R^3} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 2} \right) \left\{ \frac{3(\vec{B}_0 \vec{R}) \vec{R}}{R^2} - \vec{B}_0 \right\}. \end{cases}$$

Второй способ. В отсутствие источников, каковыми для магнитного поля являются токи, постоянное магнитное поле удовлетворяет уравнению $\text{rot } \vec{H} = 0$, показывающему, что магнитное поле в этом случае является потенциальным и поэтому вектор напряженности \vec{H} можно представить в виде:

$$\vec{H} = -\text{grad } \psi, \quad (3)$$

где функцию $\psi = \psi(x, y, z)$ называют скалярным потенциалом магнитного поля. Подставляя (3) в уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, приходим в случае однородной неферромагнитной среды к уравнению Лапласа для скалярного потенциала магнитного поля

$$\Delta\psi = 0. \quad (4)$$

Скалярный потенциал постоянного магнитного поля во многих отношениях аналогичен электростатическому потенциалу ϕ . Так, в частности, скалярный потенциал ψ однородного магнитного поля по аналогии с электростатическим потенциалом ϕ однородного электрического поля имеет вид:

$$\psi = -H_0 x = -H_0 R \cos \Theta$$

(см. рис. 72); скалярный потенциал поля магнитного диполя на больших расстояниях имеет вид: $\psi = \frac{\vec{m} \vec{R}}{4\pi R^3}$ (легко проверить, что при этом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = -\operatorname{grad} \psi = \frac{1}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{m} \vec{R}) \vec{R}}{R^2} - \vec{m} \right\}.$$

Из сказанного следует, что решение данной задачи ничем не должно отличаться от решения задачи 15 о проводящем шаре, находящемся в однородном электрическом поле. Так же, как и в задаче 15, скалярный потенциал магнитного поля внутри и вне шара-магнетика, помещенного в однородном магнитном поле H_0 , будем искать в виде:

$$\begin{cases} \psi_i = -H_i R \cos \Theta, \\ \psi_e = -H_0 R \cos \Theta + \frac{m}{4\pi R^2} \cos \Theta, \end{cases} \quad (5)$$

где пока неизвестные H_i и m должны быть определены из следующих граничных условий:

$$\psi_i(a) = \psi_e(a) \quad \text{и} \quad K_m \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial R} \right)_{R=a} = \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial R} \right)_{R=a},$$

которые эквивалентны граничным условиям (2).

Таков второй путь решения данной задачи.

72. Вычислить магнитный момент равномерно вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ заряженного шара, считая постоянными плотность заряда и плотность массы внутри шара.

Р е ш е н и е

Магнитный момент системы движущихся точечных зарядов

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i e_i [r_i \vec{v}_i]$$

(см.: А. С. К о м п а н е е ц, Теоретическая физика, ГИТТЛ, 1957, стр. 129). В рассматриваемом случае заряд распределен равномерно по всему объему шара. Чтобы воспользоваться приведенной выше формулой для вычисления магнитного момента вращающегося шара, разбиваем шар на элементарные объемы $d\tau$; на каждый такой объем приходится элементарный заряд de , который можно считать точечным.

Элементарный магнитный момент, соответствующий вращающемуся заряду de , можно записать в виде:

$$d\vec{m} = \frac{1}{2} [\vec{r}, \vec{v}] de = \frac{1}{2} \rho [\vec{r}, \vec{v}] d\tau,$$

где ρ — объемная плотность заряда шара. Отсюда магнитный момент всего шара оказывается равным:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \rho \int [\vec{r}, \vec{v}] d\tau. \quad (1)$$

Аналогично механический момент вращающегося шара можно записать в виде:

$$\vec{M} = \delta \int [\vec{r}, \vec{v}] d\tau, \quad (2)$$

где δ — плотность вещества, из которого изготовлен шар.

Сравнивая выражения (1) и (2) находим:

$$\vec{m} = \frac{\rho}{2\delta} \vec{M}.$$

Подставляя сюда $\rho = e/V$ и $\delta = m/V$ (V — объем шара), находим:

$$\vec{m} = \frac{e}{2m} \vec{M}.$$

Но механический момент (момент импульса) равномерно вращающегося шара $\vec{M} = J \vec{\omega}$, где J — момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр. Можно показать, что $J = \frac{2}{5} ma^2$, где a — ра-

диус шара (см.: А. А. Космодемьянский. Курс теоретической механики. М., Учпедгиз, 1949, стр. 270).

Таким образом, магнитный момент равномерно вращающегося заряженного шара оказывается равным:

$$\vec{m} = \frac{1}{5} ea^2 \vec{\omega}.$$

Задачи для самостоятельного решения

103*. Определить векторный потенциал магнитного поля системы токов, представленной на рисунке 73, в точке $P(x, y, z)$.

104*. Вычислить векторный потенциал магнитного поля тока, циркулирующего вдоль проволочной рамки, имеющей форму квадрата со стороной, равной $2a$. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 74.

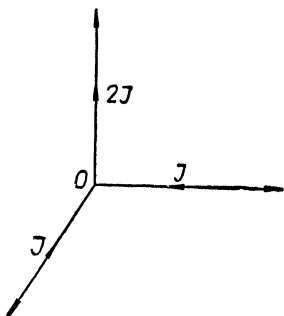


Рис. 73

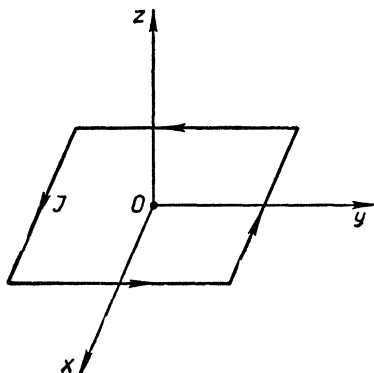


Рис. 74

105*. Вычислить векторный потенциал на большом расстоянии от системы двух бесконечных антипараллельных токов (расстояние между токами принять равным $2a$).

106*. Показать, что векторный потенциал однородного магнитного поля может быть записан в виде:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}, \vec{r}]. \quad (1)$$

Написать составляющие векторного потенциала (1) в сферических и цилиндрических координатах (направление вектора \vec{B} принять за полярную ось).

107*. Вычислить векторный потенциал равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.

108*. Вычислить векторный потенциал тока, текущего вдоль бесконечной цилиндрической трубы ($b \leq r \leq a$) и распределенного равномерно по ее сечению.

109*. Показать, что индукция и напряженность магнитного поля внутри однородно намагниченного шара удовлетворяют равенству

$$\vec{B}_i + 2\mu_0\vec{H}_i = 0.$$

110*. Решить задачу магнитостатики для однородной полой сферы из магнетика с относительной проницаемостью K_m , помещенной в однородное магнитное поле \vec{H}_0 .

111*. Вычислить скалярный потенциал магнитного поля линейного кругового тока I (радиуса a) на его оси.

112*. То же для бесконечной цилиндрической трубы ($a \leq r \leq b$), изготовленной из материала с относительной магнитной проницаемостью K_m и помещенной в однородное поперечное поле \vec{H}_0 .

113*. Магнитное поле Земли приближенно может быть представлено как поле магнитного диполя. Какова величина момента этого диполя, если за среднее значение горизонтальной составляющей вектора магнитной индукции на магнитной широте 45° принять $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ тл}$? Во сколько раз индукция магнитного поля Земли на магнитном полюсе больше, чем на магнитном экваторе?

114*. Определить отношение магнитного момента к механическому моменту для системы, состоящей из двух частиц с зарядами e_1 и e_2 и массами m_1 и m_2 .

§ 2. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНДУКЦИИ

Закон Ампера: сила, действующая на замкнутый контур с током со стороны внешнего магнитного поля, равна:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\vec{F} = I \oint_L [\vec{dl}, \vec{B}].$$

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \oint_L [\vec{dl}, \vec{B}]. \quad (1)$$

Поток индукции магнитного поля, возбуждаемого током I_1 , через контур тока I_2 :

В системе СИ

$$\Phi_{12} = I_1 L_{12},$$

В абсолютной системе

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} I_1 L_{12}, \quad (2)$$

где L_{12} — коэффициент взаимной индукции токов I_1 и I_2 , определяемый (в случае линейных токов) по формуле:

В системе СИ

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r_{12}}.$$

В абсолютной системе

$$L_{12} = L_{21} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r_{12}}. \quad (3)$$

Силовая функция тока во внешнем магнитном поле:

В системе СИ

$$U = -I\Phi,$$

В абсолютной системе

$$U = -\frac{1}{c} I\Phi, \quad (4)$$

где Φ — магнитный поток внешнего магнитного поля через контур тока I .

Энергия магнитного поля, возбуждаемого постоянным током I :

В системе СИ

$$W = \frac{1}{2} I^2 L_{11}$$

В абсолютной системе

$$W = \frac{1}{2c^2} I^2 L_{11} \quad (5)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \vec{j} dv.$$

$$W = \frac{1}{2c} \int \vec{A} \vec{j} dv. \quad (6)$$

Формула (5) следующим образом обобщается для системы, состоящей из нескольких взаимодействующих между собой замкнутых токов:

В системе СИ

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i I_j L_{ij}$$

В абсолютной системе

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,j} I_i I_j L_{ij}. \quad (7)$$

Наконец, если известны индукция и напряженность магнитного поля во всем пространстве, то энергию магнитного поля можно вычислить, пользуясь формулой:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \vec{B} dv.$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H} \vec{B} dv. \quad (8)$$

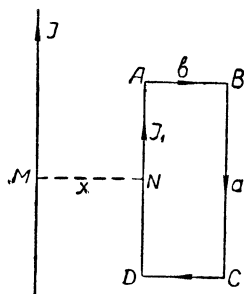


Рис. 75

73. Определить силу, с которой бесконечный прямой ток I действует на прямоугольный контур $ABCD$, лежащий с ним в одной плоскости и несущий ток I_1 (рис. 75).

Решение

Первый способ. По закону Ампера, сила, с которой бесконечный прямой ток I взаимодействует со стороной DA прямоугольного контура (с током I_1), параллельна прямой NM и равна

$$F_1 = I_1 \int_D^A |[\vec{dl}, \vec{B}]| = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi x} \int_D^A dl = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi x}.$$

Аналогично, сила взаимодействия тока I со стороной BC прямоугольного контура антипараллельна прямой NM и равна:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi (x+b)} \int_B^C dl = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi (x+b)}.$$

Силы, с которыми ток I взаимодействует со сторонами AB и CD , равны по абсолютной величине и противоположны по направлению; эти силы перпендикулярны к прямой MN и параллельны току I .

Суммарная сила, действующая со стороны тока I на прямоугольный контур с током I_1 , параллельна прямой NM (рамка с током I_1 притягивается к бесконечному прямому току I) и равна:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 a b I I_1}{2\pi x (x+b)}.$$

Второй способ. Известно, что энергия тока I_1 , внесенного в магнитное поле другого тока I , определяется так называемой силовой функцией

$$U = -I_1\Phi,$$

где Φ — магнитный поток поля, возбуждаемого током I , сквозь контур тока I_1 (см.: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 50).

Сила, действующая на ток I_1 со стороны тока I , равна:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1)$$

Легко видеть, что

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot a dx = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{x+b}{x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\mu_0 a b I}{2\pi x(x+b)}.$$

Подставляя значение производной $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ в формулу (1), находим:

$$F = -\frac{\mu_0 a b I I_1}{2\pi x(x+b)}$$

(знак минус указывает, что контур $ABCD$ с током I_1 притягивается током I).

74. Гальванометр представляет собой квадратную катушку со стороной $a = 2$ см, вращающуюся вокруг вертикальной оси; на катушке имеется 100 витков проволоки. Вертикальные стороны катушки находятся во внешнем магнитном поле $B = 0,01$ тл, которое по отношению к оси вращения является радиальным. Какова величина углового отклонения описанной системы при прохождении по катушке тока силой в 1 ма, если коэффициент кручения подвеса системы равен $9,81 \cdot 10^{-8}$ н · м/рад? Какому току соответствует отклонение зайчика на 1 см на шкале, находящейся на расстоянии 2 м от такого зеркального гальванометра?

Решение

В отличие от осесимметричного электрического поля (картина силовых линий которого представлена на рис. 76, а), силовые линии осесимметричного магнитного поля

справа от некоторой плоскости MN , содержащей ось симметрии, расходятся от оси симметрии, а слева от плоскости — сходятся к ней (рис. 76, б). Этим объясняется возникновение пары сил, действующих на вертикальные стороны катушки (рис. 77). Момент пары сил равен (для катушки с одним витком)

$$N_1 = I \oint \left| \left[\vec{r} \left[\vec{dl}, \vec{B} \right] \right] \right| = I B a^2;$$

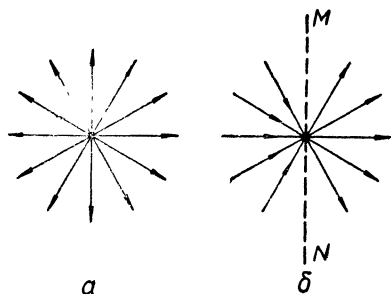


Рис. 76

и для катушки с n витками

$$N = I B a^2 n.$$

С другой стороны, при малых углах отклонения

$$N = k\varphi,$$

где $k = 9,81 \cdot 10^{-8} \text{ н} \cdot \text{м/рад}$. Приравнявая оба выражения для N , находим:

$$\varphi = \frac{na^2 I B}{k}.$$

Подстановка в полученную формулу числовых данных дает

$$\varphi \approx 0,2336^\circ \text{ на } 1 \text{ ма.}$$

Если рассматриваемая система используется как зеркальный гальванометр, то величину тока, соответствующего отклонению зайчика на шкале на 1 см , можно подсчитать так. Пусть d — отклонение зайчика от нулевого положения, R — расстояние от гальванометра до шкалы

и α — угол поворота гальванометра, тогда $\text{tg } \alpha \cong \frac{d}{R}$, откуда в силу того, что $d \ll R$,

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \frac{d}{R} = 0,005 \text{ рад} = 0,29^\circ.$$

Следовательно, ток, соответствующий отклонению зайчика на 1 см , равен

$$I_1 = \frac{\alpha}{\varphi} = 1,24 \text{ ма.}$$

75. Показать, что коэффициент взаимной индукции бесконечного прямого провода и копланарного с ним равностороннего проволочного треугольника равен:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{\pi \sqrt{3}} \left[(a + b) \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) - a \right],$$

где a — высота треугольника, b — расстояние от провода до ближайшей параллельной ему стороны треугольника (рис. 78)

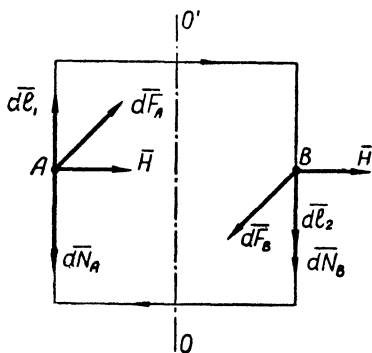


Рис 77

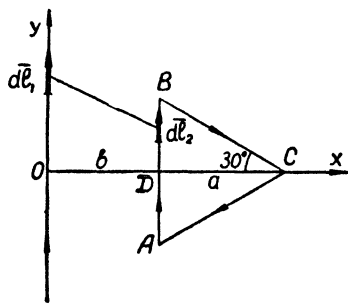


Рис. 78

Р е ш е н и е

Первый способ. Заметим, что сторона треугольника равна $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, а его вершины имеют координаты (см. рис. 78):

$$A \left(b, -\frac{a}{\sqrt{3}} \right); \quad B \left(b, \frac{a}{\sqrt{3}} \right); \quad C (a + b, 0).$$

По определению, коэффициент взаимной индукции двух токов

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r_{12}},$$

где L_1 — контур прямого тока, а L_2 — контур тока, циркулирующего вдоль проволочного треугольника ABC .

Однако вычисление L_{12} удобно провести в три этапа, положив:

$$L_{12} = (L_{12})_{AB} + (L_{12})_{BC} + (L_{12})_{CA}. \quad (1)$$

Вычисление $(L_{12})_{AB}$.

В этом случае $\vec{dl}_1 \vec{dl}_2 = dy_1 dy_2$ и $r^2_{12} = b^2 + (y_1 - y_2)^2$, так что

$$(L_{12})_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} dy_2 \int_{-L}^{+L} \frac{dy_1}{\sqrt{b^2 + (y_1 - y_2)^2}},$$

где после вычисления интеграла следует положить $L = \infty$. В интеграле

$$\int_{-L}^{+L} \frac{dy_1}{\sqrt{b^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

заменяем переменную интегрирования по формуле $y_1 - y_2 = u$; тогда

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} \frac{dy_1}{\sqrt{b^2 + (y_1 - y_2)^2}} &= \int_0^{L+y_2} \frac{du}{\sqrt{b^2 + u^2}} + \int_0^{L-y_2} \frac{du}{\sqrt{b^2 + u^2}} = \\ &= -2 \ln b + \ln [L + y_2 + \sqrt{b^2 + (L + y_2)^2}] + \ln [L - \\ &\quad - y_2 + \sqrt{b^2 + (L - y_2)^2}], \end{aligned}$$

поэтому

$$(L_{12})_{AB} = -\frac{\mu_0 a}{\pi \sqrt{3}} \ln b + G_1 + G_2,$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \ln [L + y_2 + \sqrt{b^2 + (L + y_2)^2}] dy_2, \\ G_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \ln [L - y_2 + \sqrt{b^2 + (L - y_2)^2}] dy_2. \end{aligned}$$

Интеграл G_1 вычисляем по частям, полагая $u = \ln [L + y_2 + \sqrt{b^2 + (L + y_2)^2}]$ и $dv = dy_2$, откуда $v = y_2$ и

$$du = \frac{dy_2}{\sqrt{b^2 + (L + y_2)^2}} = 0, \text{ так как } L = \infty.$$

Поэтому

$$G_1 = \frac{\mu_0 a}{4\pi \sqrt{3}} \ln \left\{ \left[L + \frac{a}{\sqrt{3}} + \sqrt{b^2 + \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[L - \frac{a}{\sqrt{3}} + \sqrt{b^2 + \left(L - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \right\}.$$

Далее можно показать, что $G_2 = G_1$.

Таким образом,

$$(L_{12})_{AB} = -\frac{\mu_0 a}{\pi \sqrt{3}} \ln b + \frac{\mu_0 a}{2\pi \sqrt{3}} \ln \left\{ \left[L + \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{b^2 + \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \left[L - \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{b^2 + \left(L - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \right\}. \quad (2)$$

Вычисление $(L_{12})_{BC}$.

В этом случае $\vec{dl}_1 \vec{dl}_2 = \vec{j} dy_1 (\vec{i} dx_2 + \vec{j} dy_2) = dy_1 dy_2$ и $r_{12}^2 = (y_1 - y_2)^2 + x_2^2$. Из треугольника BCD следует, что

$$\frac{y_2}{a + b - x_2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$x_2 = a + b - \sqrt{3} y_2 \text{ и } r_{12}^2 = (a + b - \sqrt{3} y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

После этого

$$(L_{12})_{BC} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^0 dy_2 \int_{-L}^{+L} \frac{dy_1}{\sqrt{(a + b - \sqrt{3} y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

Вычисление двойного интеграла дает:

$$\begin{aligned}
 (L_{12})_{BC} = & \frac{\mu_0(a+b)}{2\pi\sqrt{3}} \ln(a+b) - \frac{\mu_0 b}{2\pi\sqrt{3}} \ln b - \frac{\mu_0 a}{2\pi\sqrt{3}} - \\
 & - \frac{\mu_0 a}{4\pi\sqrt{3}} \ln \left\{ \left[L + \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\
 & + \left. \sqrt{b^2 + \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \left[L - \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{b^2 + \left(L - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \right\}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Вычисление $(L_{12})_{CA}$.

Так же, как и в первых двух случаях, $\vec{dl}_1 \vec{dl}_2 = dy_1 dy_2$, а

$$r_{12}^2 = (a + b + \sqrt{3} y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

откуда

$$(L_{12})_{CA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^0 dy_2 \int_{-L}^{+L} \frac{dy_1}{\sqrt{(a + b + \sqrt{3} y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
 (L_{12})_{CA} = & \frac{\mu_0(a+b)}{2\pi\sqrt{3}} \ln(a+b) - \frac{b\mu_0}{2\pi\sqrt{3}} \ln b - \frac{\mu_0 a}{2\pi\sqrt{3}} - \\
 & - \frac{\mu_0 a}{4\pi\sqrt{3}} \ln \left\{ \left[L + \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \right. \\
 & + \left. \sqrt{b^2 + \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \left[L - \frac{a}{\sqrt{3}} + \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{b^2 + \left(L - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \right\}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Подстановка выражений (2) — (4) в формулу (1) дает:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}} \left[(a+b) \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) - a \right].$$

Второй способ. Другой способ расчета L_{12} основан на том, что поток магнитного поля, возбуждаемого

одним каким-нибудь током, через площадку, ограниченную контуром другого тока,

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2, \quad (5)$$

как известно, может быть записан в виде:

$$\Phi_{12} = I_1 \cdot L_{12}. \quad (6)$$

Магнитный поток прямого тока через площадь треугольника ABC (т. е. через площадку, ограниченную контуром второго тока)

$$\Phi_{12} = \int B_1 dS_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} \int_{y_1}^{y_2} dy, \quad (7)$$

где $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - a - b)$ и $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - a - b) -$

уравнения прямых AC и BC , в которые упираются своими концами бесконечно узкие (заштрихованные на рис. 79) полоски, по которым в (7) ведется интегрирование. Произведя указанное в (7) интегрирование, получим:

$$\Phi_{12} = I_1 \cdot \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}} \left[(a + b) \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) - a \right],$$

откуда

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}} \left[(a + b) \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right) - a \right]. \quad (8)$$

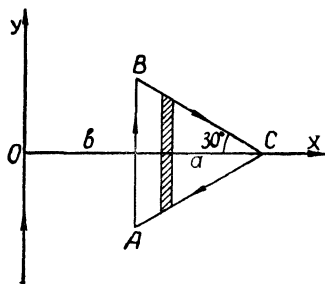


Рис. 79

76. Внутри бесконечной проводящей цилиндрической оболочки радиуса a_1 находится коаксиальный с ней провод радиуса a_2 . По оболочке течет ток I , равномерно распределенный по ее поверхности; по проводу течет равный, но противоположно направленный ток, равномерно распределенный по сечению провода.

Определить энергию магнитного поля и самоиндукцию единицы длины указанного кабеля, считая его достаточно длинным.

Р е ш е н и е

Поле внутри оболочки ($0 \leq r \leq a_1$) возбуждается лишь током, текущим по проводу, причем

$$\begin{cases} H_i = \frac{I}{2\pi a_2^2} r, & (0 \leq r \leq a_2); \\ H_e = \frac{I}{2\pi r}, & (a_2 \leq r \leq a_1). \end{cases}$$

Вне оболочки поля нет, так как токи, текущие по проводу и оболочке, вне кабеля возбуждают равные и противоположно направленные поля.

Собственная энергия магнитного поля кабеля может быть записана в виде:

$$W = \frac{1}{2} I^2 L_{11}.$$

С другой стороны, принимая относительную магнитную проницаемость провода $K_m = 1$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \int_0^{a_2} H_i^2 \cdot 2\pi r dr + \int_{a_2}^{a_1} H_e^2 \cdot 2\pi r dr \right\} l = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{a_1}{a_2} \right) l. \end{aligned}$$

Сравнивая оба выражения для энергии магнитного поля, находим:

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{a_1}{a_2} \right) l,$$

откуда для самоиндукции единицы длины кабеля

$$L_{11}^* = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{a_1}{a_2} \right).$$

77. Определить самоиндукцию единицы длины бесконечной прямой двойной проводки, состоящей из двух параллельных проводов кругового сечения (радиуса a), по которым текут равные и противоположно направленные токи. Расстояние между осями проводов принять равным d .

Р е ш е н и е

При расчете L_{11}^* будем исходить из формул:

$$\text{и } W = \frac{1}{2} I^2 L_{11}^* \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{j} \vec{A} dv, \quad (2)$$

где интегрирование производится по объему единицы длины двойной проводки.

Векторный потенциал \vec{A} суммарного магнитного поля складывается из векторных потенциалов магнитных полей, возбуждаемых каждым током в отдельности, причем век-

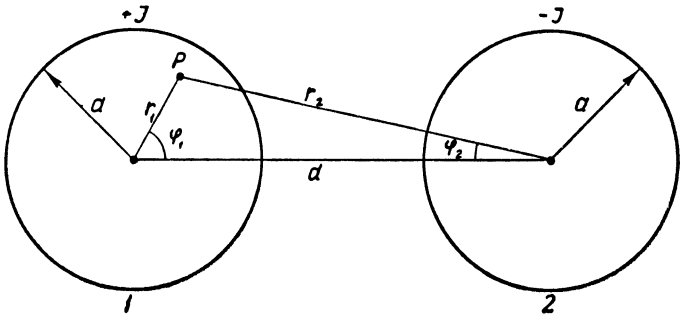


Рис. 80

торный потенциал магнитного поля тока $+I$, текущего вдоль провода 1 (рис. 80), имеет вид (см. задачу 70):

$$\begin{cases} A_x^{(1)} = A_y^{(1)} = 0, \\ A_{iz}^{(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(k - \frac{r_1^2}{a^2} \right) \text{ при } r_1 \leq a, \\ A_{ez}^{(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(k - 1 - 2 \ln \frac{r_1}{a} \right) \text{ при } r_1 \geq a, \end{cases} \quad (3)$$

где k — произвольная постоянная, подбираемая так, чтобы на границе провода $A_z^{(1)}$ было непрерывно. Составляющая $A_z^{(2)}$ векторного потенциала магнитного поля провода 2 получается из (3) путем замены r_1 на r_2 и изменения знака у тока.

Подставляя (3) в формулу (2) и заменяя интегрирование по объему на интегрирование по сечениям проводов, находим:

$$W = \frac{I}{2\pi a^2} \left\{ \int_{S_1} (A_{iz}^{(1)} + A_{ez}^{(2)}) dS_1 - \int_{S_2} (A_{ez}^{(1)} + A_{iz}^{(2)}) dS_2 \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (A_{iz}^{(1)} + A_{ez}^{(2)}) dS_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\left(k - \frac{r_1^2}{a^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(k - 1 - 2 \ln \frac{r_1}{a} \right) \right] r_1 dr_1 d\varphi_1 = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln \frac{d^2 + r_1^2 - 2r_1 d \cos \varphi_1}{a^2} \right) r_1 dr_1 d\varphi_1 = \\ &= \frac{1}{8} \mu_0 a^2 I \left(1 + 4 \ln \frac{d}{a} \right), \\ \int_{S_2} (A_{ez}^{(1)} + A_{iz}^{(2)}) dS_2 &= -\frac{1}{8} \mu_0 a^2 \left(1 + 4 \ln \frac{d}{a} \right) I \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$W = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{d}{a} \right). \quad (4)$$

Сравнивая (1) и (4), находим:

$$L_{11}^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{d}{a} \right).$$

78. Бесконечный прямой ток I помещен внутри цилиндрической полости (радиуса a), вырезанной в бесконечно большом куске мягкого железа с относительной магнитной проницаемостью K_m , и смещен на расстояние b от оси полости. Какова сила, действующая со стороны полости на единицу длины прямого тока?

Р е ш е н и е

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z , совпадающей с осью полости, причем угол φ будем отсчитывать от плоскости, проходящей через ось z и ток I (рис. 81).

Применяя метод магнитных изображений, будем искать поле внутри полости ($0 \leq r \leq a$) как поле реального тока I и некоторого фиктивного линейного тока I_1 , параллельного току I и проходящего через точку B , положение которой определяется соотношением $OB = h = a^2/b$, т. е.

$$A_{iz} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln R_1 + \text{const.} \quad (1)$$

Поле вне полости ($a \leq r \leq \infty$) будем искать в виде поля тока I_1 , текущего вдоль оси полости, и другого фиктив-

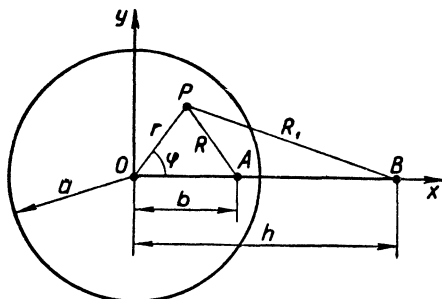


Рис. 81

ного линейного тока I_2 , текущего в том месте, где в действительности течет реальный ток I , т. е.

$$A_{ez} = -\frac{\mu_0 K_m I_1}{2\pi} \ln r - \frac{\mu_0 K_m I_2}{2\pi} \ln R + \text{const.}, \quad (2)$$

причем

$$\text{rot } \vec{A}_i = \vec{B}_i, \text{ а } \text{rot } \vec{A}_e = \vec{B}_e.$$

Подставляя в (1) и (2)

$$R = (r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi)^{1/2} \text{ и } R_1 = \left(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2ra^2}{b} \cos \varphi \right)^{1/2},$$

получим:

$$\left\{ \begin{aligned} A_{iz} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln (r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi) - \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln \left(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2ra^2}{b} \cos \varphi \right) + \text{const.}, & (1a) \\ A_{ez} &= -\frac{\mu_0 K_m I_1}{2\pi} \ln r - \frac{\mu_0 K_m I_2}{4\pi} \ln (r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi) + \text{const.} & (2a) \end{aligned} \right.$$

В выражениях (1а) и (2а) токи I_1 и I_2 должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия:

$$(H_{lt})_{r=a} = (H_{et})_{r=a}, \quad (B_{ln})_{r=a} = (B_{en})_{r=a},$$

которые с помощью формул (15) приложения 1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A_{lz}}{\partial r}\right)_{r=a} &= \frac{1}{K_m} \left(\frac{\partial A_{ez}}{\partial r}\right)_{r=a}, \\ \left(\frac{\partial A_{lz}}{\partial \varphi}\right)_{r=a} &= \left(\frac{\partial A_{ez}}{\partial \varphi}\right)_{r=a}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\begin{cases} I + I_1 = K_m I_2, \\ I - I_1 = I_2, \end{cases}$$

откуда

$$I_1 = \frac{K_m - 1}{K_m + 1} I \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{2}{K_m + 1} I.$$

Таким образом, магнитное поле внутри и вне полости определяется векторными потенциалами:

$$\begin{aligned} A_{lz} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi) - \\ &- \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1}\right) \ln\left(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2ra^2}{b} \cos \varphi\right) + \text{const}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A_{ez} &= -\frac{\mu_0 K_m I}{2\pi} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1}\right) \ln r - \\ &- \frac{\mu_0 K_m I}{2\pi (K_m + 1)} \ln(r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi) + \text{const}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выпишем также поляризационный потенциал, т. е. векторный потенциал магнитного поля, возбуждаемого в полости молекулярными токами, циркулирующими в магнетике, окружающей полость:

$$A_{iz}^* = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1}\right) \ln\left(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - \frac{2ra^2}{b} \cos \varphi\right). \quad (3)$$

Силу притяжения реального тока I к полости можно рассматривать как силу его взаимодействия с фиктивным током I_1 . Ее можно определить, исходя из закона Ампера:

$$\vec{F} = I \oint [\vec{dl}, \vec{B}_{iA}^*],$$

где \vec{B}_{iA}^* — индукция магнитного поля, возбуждаемого молекулярными токами магнетика (или фиктивным током I_1) в том месте, где течет реальный ток I . Пользуясь выражением (3) для векторного потенциала указанного поля и формулами (15) приложения 1, можно показать, что

$$(B_{iz}^*)_A = (B_{ir}^*)_A = 0, (B_{i\varphi}^*)_A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1} \right) \frac{b}{a^2 - b^2}.$$

Отсюда сила, действующая со стороны полости на единицу длины тока I , оказывается параллельной прямой OA и равной:

$$f = I \int dl \cdot (B_{i\varphi}^*)_A = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{K_m - 1}{K_m + 1} \right) \frac{b}{a^2 - b^2}.$$

79. Шар (радиуса a), изготовленный из магнетика с относительной магнитной проницаемостью K_m и находящийся во внешнем однородном поле B_0 , разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу взаимодействия между полушариями.

Р е ш е н и е

Так же, как и в электрическом поле, объемные механические силы, действующие на материальное тело со стороны магнитного поля, могут быть сведены к натяжениям, испытываемым поверхностью этого тела.

Силу взаимодействия между полушариями намагниченного шара, внесенного в однородное поле \vec{B}_0 и разрезанного на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению линий поля, можно рассматривать как равнодействующую всех натяжений, испытываемых поверхностью каждого полушария в отдельности, т. е.

$$\vec{F} = \int_S \vec{T}_n \cdot df,$$

где \vec{T}_n — проекция тензора натяжений магнитного поля на внешнюю нормаль к поверхности тела.

При линейности связи $\vec{B} = \mu_0 K_m H$ и в отсутствии токов проводимости в среде ($\vec{j} = 0$) тензор натяжений магнитного поля может быть получен из тензора натяжений электрического поля путем замены $\epsilon_0 K$ и E на $\mu_0 K_m$ и H (см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 83).

Обращаясь к задаче 50 (см. формулу (3)), мы можем для однородного магнитного тела ($K_m = \text{const}$) написать:

$$\vec{T}_n = \mu_0 K_m \left\{ \vec{H} (\vec{n} \vec{H}) - \frac{1}{2} H^2 \vec{n} \right\},$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела.

Все дальнейшие вычисления вполне аналогичны вычислениям, проделанным в задаче 50; поэтому мы их опускаем и приводим только окончательное выражение для силы взаимодействия между полушариями однородного магнитного шара (но не ферромагнитного!), помещенного в однородное поле B_0 :

$$F = - \frac{9\pi K_m (K_m - 1)^2}{4\mu_0 (K_m + 2)^2} a^2 B_0^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

115*. Определить силу, с которой бесконечный прямой ток I взаимодействует с круговым током I_1 , циркулирующим в осевой плоскости бесконечного прямого тока (рис. 82).

116*. Прямоугольный контур $ABCD$, рассматриваемый в задаче 73, повернут вокруг прямой AD на угол φ .

Определить момент сил, стремящихся вернуть контур $ABCD$ в равновесное положение.

117*. Провод протянут по окружности радиуса a всюду за исключением дуги с углом 2α , где он следует вдоль хорды. Указанная проволочная петля подвешивается в точке, противоположной центру хорды, так что плоскость петли при этом оказывается перпендикулярной к

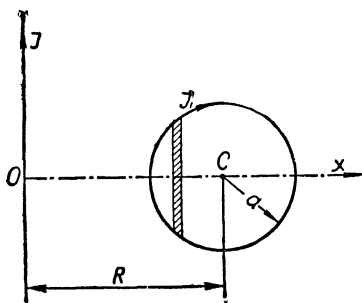


Рис. 82

другому прямолинейному проводу, проходящему через ее центр. Токи в петле и проводе соответственно равны I_1 и I_2 .

Вычислить момент сил, действующих на петлю.

118*. Катушка гальванометра, состоящая из 600 витков очень тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас (длиной 4 см и шириной 1 см), подвешена на кварцевой нити в однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,05 тл.

Каков момент сил, действующих на катушку гальванометра, в положении, перпендикулярном к полю, если по каждому витку течет ток, равный 10^{-8} а?

119*. Магнитная стрелка с моментом $m = 100 \text{ а} \cdot \text{м}^2$ плавает в горизонтальном положении на пробке в океане. Где она будет находиться в более устойчивом положении и где в менее устойчивом? Какова величина разности энергий стрелки в двух указанных положениях?

120*. Определить коэффициент взаимной индукции между бесконечным прямым проводом и круговым проволочным контуром радиуса a , расположенным в осевой плоскости прямого провода (рис. 82).

121*. Вычислить коэффициент взаимной индукции между круговым током радиуса R и бесконечным прямым соленоидом кругового сечения (радиуса a), расположенным вдоль оси кругового тока и имеющим n витков на единицу длины.

122*. Вычислить коэффициент взаимной индукции между тором любого сечения, содержащим n витков, и бесконечным прямым током, текущим вдоль оси тора. Провести до конца вычисление для трех систем, представленных на рисунке 83 (а, б, в).

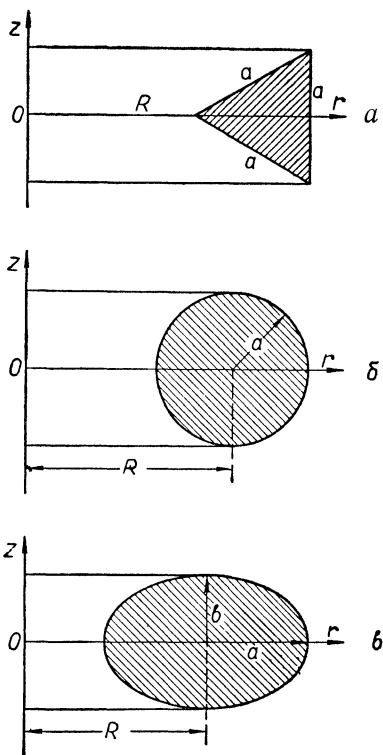


Рис. 83

123*. Вычислить коэффициент взаимной индукции для двух окружностей, которые расположены в параллельных плоскостях, имеют совпадающие оси и одна из них очень мала по сравнению с другой.

124*. То же для двух коаксиальных круговых токов, лежащих в одной плоскости.

125*. То же для двух соленоидов, намотанных на одном и том же сердечнике длины l .

126*. Исходя из выражения для плотности энергии магнитного поля, определить энергию системы проводников, несущих постоянные токи.

127*. Как можно вычислить работу, затрачиваемую при перемагничивании единицы объема стального сердечника?

128*. Вычислить энергию магнитного поля в прорезанном железном кольце, рассматриваемом в задаче 101*, и в воздушном зазоре, полную энергию магнитного поля и самоиндукцию кольца для трех указанных в задаче 101* значений ширины зазора. Найти также силу, с которой притягиваются полюса прорезанного железного кольца.

129*. Определить самоиндукцию тороидального соленоида, у которого радиус сечения мал по сравнению с радиусом тора.

130*. Вычислить самоиндукцию цилиндрического провода (с относительной магнитной проницаемостью K_m и радиусом r_0), согнутого в тор радиуса R , причем $r_0 \ll R$.

131*. Определить самоиндукцию единицы длины кабеля, оболочка которого представляет собой цилиндрическую трубу ($r_2 \leq r \leq r_1$), а жила — цилиндрический провод радиуса a . При расчете считать, что оболочка и жила изготовлены из одного и того же материала.

132*. Как изменится самоиндукция двойной проводки, описанной в задаче 77, если в ней сплошные провода заменить цилиндрическими трубками (с радиусами a и b , $a > b$)?

133*. Бесконечный прямой ток силы I находится в вакууме и течет параллельно плоской поверхности однородного магнетика с относительной проницаемостью K_m .

С какой силой (рассчитанной на единицу длины) бесконечный прямой ток I притягивается к магнетику?

Г Л А В А И I I I

П Е Р Е М Е Н Н О Е Э Л Е К Т Р О М А Г Н И Т Н О Е П О Л Е

§ 1. Э Л Е К Т Р О М А Г Н И Т Н А Я И Н Д У К Ц И Я

Сила, действующая на движущийся электрический заряд со стороны магнитного поля (сила Лоренца):

В системе СИ

В абсолютной
системе

$$\vec{F} = e [\vec{v}, \vec{B}]. \qquad \vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}]. \qquad (1)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

В системе СИ

В абсолютной
системе

а) дифференциальная форма

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (2)$$

б) интегральная форма

$$E_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (3)$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий площадку, натянутую на замкнутый контур интегрирования.

80. Прямой провод длины и направления \vec{S} движется со скоростью \vec{u} в однородном магнитном поле \vec{B} ; его концы соединены посредством подвижных контактов с неподвижным проводником, который вместе с ним образует замкнутую цепь. Какова э.д.с. индукции в этой цепи?

Р е ш е н и е

На электрон, движущийся вдоль провода AB (рис. 84) со скоростью $\vec{v} \parallel \vec{S}$, действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = e [\vec{v} + \vec{u}, \vec{B}].$$

Другими словами, движущийся электрон подвержен воздействию электрического поля с напряженностью:

$$\vec{E} = \vec{F}/e = [\vec{v} + \vec{u}, \vec{B}]. \quad (1)$$

Согласно второму закону Кирхгофа, в результате воздействия электрического поля (1), эквивалентного магнитному полю \vec{B} , в замкнутом контуре должен возникнуть ток I , величина которого определяется из соотношения:

$$IR = \oint_L \vec{E} d\vec{L} = E^{\text{инд}}.$$

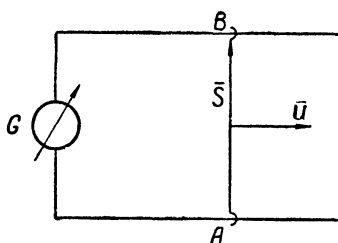


Рис. 84

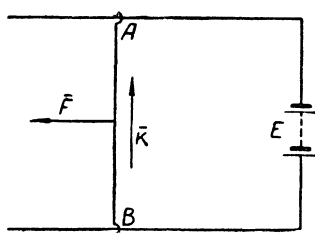


Рис. 85

Следовательно, э. д. с. индукции

$$\begin{aligned} E^{\text{инд}} &= \oint_L [\vec{v} + \vec{u}, \vec{B}] d\vec{L} = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{L} + \\ &+ \oint_L [\vec{u}, \vec{B}] d\vec{L} = \oint_L [\vec{u}, \vec{B}] d\vec{L}, \end{aligned}$$

так как вдоль всего замкнутого контура $\vec{v} \parallel d\vec{L}$ и поэтому всюду:

$$[\vec{v}, \vec{B}] d\vec{L} = 0.$$

Окончательно выражение для э.д.с. индукции можно записать в виде:

$$E^{\text{инд}} = [\vec{u}, \vec{B}] \vec{S},$$

так как для всех элементов контура, кроме отрезка S , скорость $\vec{u} = 0$, магнитная индукция \vec{B} постоянна на всем отрезке \vec{S} .

81. В системе (рис. 85), образованной двумя параллельными рельсами и поперечным проводником AB (длина которого равна l , а масса m) и находящейся в однородном магнитном поле B , перпендикулярном к плоскости чертежа (и направленном за чертеж), желают установить при помощи подходящей э.д.с. постоянный ток I , направленный по стрелке. Считая сопротивление системы постоянным, определить: а) закон движения проводника AB ; б) электродвижущую силу E как функцию времени. Проверить выполнение закона сохранения энергии.

Р е ш е н и е

Так как по предположению ток I поддерживается постоянным, то сила $F = BIl$, действующая на стержень AB , также постоянна. Поэтому движение стержня будет равнопеременным с ускорением, равным BIl/m . Если в начальный момент стержень был пущен со скоростью v_0 , то закон движения стержня выразится формулой (положительным направлением движения считается направление справа налево):

$$v = v_0 + \frac{BIl}{m} t.$$

Э. д. с. индукции, возникающая при этом в стержне AB , равна Blv и по закону Ленца противоположна электродвижущей силе E , включенной в цепь. На основании обобщенного закона Ома

$$IR = E - Blv,$$

откуда

$$E = IR + Bl \left(v_0 + \frac{BIl}{m} t \right). \quad (2)$$

Таков искомый закон изменения электродвижущей силы E , как функции времени.

Чтобы проверить согласие с законом сохранения энергии, умножим обе части уравнения (2) на $I dt$:

$$E I dt = I^2 R dt + BIl \left(v_0 + \frac{BIl}{m} t \right) dt = I^2 R dt + F dS, \quad (3)$$

где dS — элемент пути стержня.

Левая часть уравнения (3) представляет собой энергию, доставляемую источником тока за время dt ; первое слагаемое правой части — джоулево тепло, а второе слагаемое — прирост кинетической энергии стержня за время dt , или работу электродинамической силы F .

Если v_0 отрицательно, т. е. если бы в начальный момент стержень имел скорость, противоположную той, которую он получает свободно под действием электродинамической силы F , то могло бы случиться, что электродвижущая сила E была бы отрицательна, другими словами, источник тока мог бы стать потребителем тока. Если v_0 отрицательно, т. е. движение стержня вначале направлено вправо, то такое направление его движения сохранится до момента $t_1 = -\frac{BlI}{mv_0}$, потом его скорость изменит знак и стержень будет двигаться влево (аналогично тяжелому телу, брошенному кверху, а затем падающему вниз).

82. Кольцо из медной проволоки с радиусом $r = 10$ см и поперечным сечением $S = 1$ мм² вращается в магнитном поле Земли вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром кольца, делая 300 об/мин. Сколько джоулева тепла выделяется в кольце за 1 сек? Горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли принять равной $2,3 \cdot 10^{-5}$ т.

Р е ш е н и е

За 1 сек в кольце выделяется следующее количество джоулева тепла:

$$Q = \frac{\nu}{R} \int_0^T (E^{\text{инд}})^2 dt, \quad (1)$$

где ν — число оборотов кольца в сек, T — время одного оборота. Основная задача, следовательно, состоит в отыскании $E^{\text{инд}}$. Согласно задаче 80

$$E^{\text{инд}} = \oint [\vec{u}, \vec{B}] d\vec{L}. \quad (2)$$

Для того чтобы вычислить интеграл, входящий в формулу (2), обратимся к рисунку 86. На рисунке 86 точка A принадлежит вращающемуся кольцу. Система координат выбрана так, что у вектора индукции \vec{B} магнитного поля Земли $B_x = 0$, $B_y = B$, $B_z = B_1$, где B — горизонталь-

ная и B_1 — вертикальная составляющие магнитного поля Земли.

Пользуясь рисунком 86, находим:

$$\begin{cases} u_x = -u \sin \omega t, & u_y = u \cos \omega t; & u_z = 0, \\ d\vec{L}_x = -dL \sin \varphi \cos \omega t, & dL_y = -dL \sin \varphi \sin \omega t, & (3) \\ dL_z = dL \cos \varphi. \end{cases}$$

В формулах (3) надо положить $u = \omega r \cos \varphi$ и $dL = r d\varphi$.

Раскрывая смешанное произведение $[\vec{u}, \vec{B}] d\vec{L}$ по формуле (4) приложения 1, находим:

$$[\vec{u}, \vec{B}] d\vec{L} = -B_1 \omega r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - B \omega r^2 \sin \omega t \cdot \cos^2 \varphi d\varphi,$$

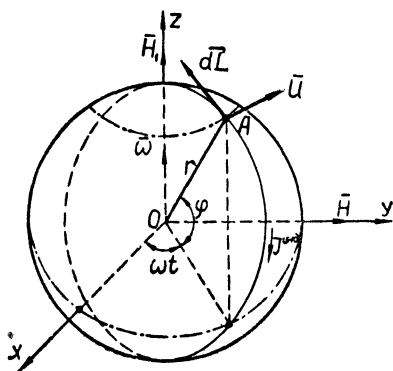


Рис. 86

$$E_{\text{инд}} = -B_1 \omega r^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - B \omega r^2 \sin \omega t \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Произведя здесь интегрирование по φ , окончательно находим:

$$E_{\text{инд}} = -\omega \pi r^2 B \sin \omega t. \quad (4)$$

Знак минус у э.д.с. индукции показывает, что ток индукции направлен против вектора $d\vec{L}$.

Подстановка выражения (4) в формулу (1) дает:

$$Q = \frac{\nu \omega^2 \pi^2 r^4 B^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Стоящий здесь интеграл равен $\frac{T}{2}$; подставляя сюда также

и $v = \frac{1}{T}$ получим:

$$Q = \frac{\omega^2 \pi^2 r^4 B^2}{2R},$$

или, так как

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{2\pi r \rho}{S},$$

$$Q = \frac{\omega^2 \pi r^3 S B^2}{4\rho}. \quad (5)$$

Подстановка в формулу (5) числовых данных ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ ом · м) дает:

$$Q = 2,444 \cdot 10^{-9} \text{ вт.}$$

83. Исходя из обобщенной формы закона Ома, показать, что плотность магнитной энергии внутри тороидального соленоида радиуса R (с круговым сечением радиуса $r_0 \ll R$) с N витками тонкой проволоки, по которой течет переменный ток I , равна $\frac{1}{2} \mu H^2$, где μ — магнитная проницаемость сердечника соленоида.

Р е ш е н и е

Запишем обобщенный закон Ома

$$IR = E_{\text{стр}} - N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

здесь $\frac{d\Phi}{dt}$ — скорость изменения магнитного потока, пронизывающего какой-нибудь один виток соленоида. Умножая уравнение (1) на $I dt$, получаем:

$$I E_{\text{стр}} dt = I^2 R dt + NI \cdot d\Phi. \quad (2)$$

По формуле (2) задачи 66, справедливой при $r_0 \ll R$,

$$I = \frac{2\pi R H}{N} \text{ и } d\Phi = \pi r_0^2 \mu dH. \quad (3)$$

Пользуясь формулами (3), можно показать, что

$$NI \cdot d\Phi = 2\pi R \cdot \pi r_0^2 \cdot \mu H dH = V \cdot d\left(\frac{1}{2} \mu H^2\right),$$

где $V = 2\pi R \cdot \pi r_0^2$ — объем кольца. После этого уравнение (2) принимает вид:

$$I E^{\text{ср}} dt = I^2 R dt + V d\left(\frac{1}{2} \mu H^2\right). \quad (2a)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2a) представляет собой джоулево тепло, выделяемое во всех витках проволоки, а второе слагаемое — изменение магнитной энергии соленоида. Величина $\frac{1}{2} \mu H^2$ является, следовательно, плотностью энергии магнитного поля.

84. Показать, что при изменении во времени радиального магнитного поля, у которого

$$B_x = B_y = 0; B_z = B(r, t),$$

возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

Р е ш е н и е

Радиальные магнитные поля находят широкое применение при конструировании ускорителей заряженных элементарных частиц (например, при устройстве бетатрона); практически такие поля осуществляются при помощи специальных систем электромагнитов (см.: Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. 2, ГИТТЛ, 1950, § 277).

Обратимся теперь к уравнению Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

представляющему собой закон электромагнитной индукции Фарадея (в дифференциальной форме).

Если ввести цилиндрическую систему координат с осью Z , направленной вдоль оси магнитного поля, то уравнение (1) примет вид (см. формулу (15) приложения 1):

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = 0, & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = - \frac{\partial B(r, t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (2)$$

Полученной системе уравнений можно удовлетворить, положив: $E_r = E_z = 0$ и $E_\theta = E_\theta(r, t)$ (такой вид решения системы (2) следует из соображений симметрии). Легко

видеть, что первые два уравнения системы (2) при этом удовлетворяются тождественно, а из последнего уравнения находим:

$$E_{\theta} = \frac{1}{r} \left\{ - \int \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} r dr + f(t) \right\}, \quad (3)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени t .

Выражение (3) показывает, что в плоскости, перпендикулярной к оси магнитного поля, силовые линии вихревого электрического поля представляют систему концентрических окружностей с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

Задачи для самостоятельного решения

134*. Железнодорожные рельсы изолированы друг от друга и от земли и соединены через милливольтметр. Каково показание прибора, если по рельсам проходит поезд со скоростью 100 км/ч? Вертикальную составляющую вектора индукции магнитного поля Земли принять равной $1,5 \times 10^{-5}$ тл, а расстояние между рельсами — 1540 мм.

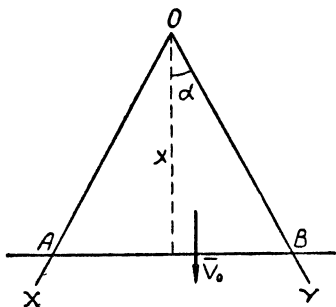


Рис. 87

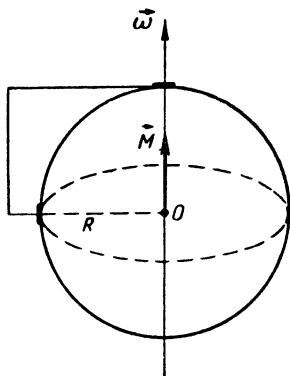


Рис. 88

135*. Проводящий угол XOY (рис. 87) помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное к его плоскости; проводник AB , перпендикулярный к биссектрисе угла XOY , движется равномерно со скоростью v_0 . Определить величину тока, наводимого в контуре AOB , если все проводники обладают сопротивлением r ом на единицу длины.

136*. Стержень AB перемещается, скользя по проводящей окружности радиуса R , находящейся в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости круга, с постоянной скоростью v_0 . В начальный момент стержень касается окружности, а во время движения остается параллельным самому себе. Определить э.д.с. индукции, наводимую в контуре, содержащем стержень и дугу окружности, находящуюся под ним.

137*. Определить полное количество электричества, протекающего по замкнутому линейному проводнику при изменении по какой-либо причине магнитного потока через его контур от одного постоянного значения Φ_1 до другого Φ_2 .

138*. Решить задачу 81, полагая, что э.д.с. источника постоянна, а ток в цепи переменный.

139*. Как зависит сила тока в медном кольце, рассматриваемом в задаче 82, от угла поворота ωt (рис. 86)? Определить величину вектора индукции магнитного поля, возбуждаемого этим током в центре кольца, как функцию ωt . Найти величину и направление вектора индукции результирующего магнитного поля в центре кольца в зависимости от ωt .

140*. Определить э.д.с. униполярной индукции, возникающей между полюсом и экватором однородно намагниченного шара (рис. 88) равномерно с угловой скоростью ω вращающегося вокруг оси, совпадающей с направлением намагничивания шара (полученный результат выразить через магнитный момент шара m).

141*. Две параллельные круглые пластинки (радиуса R), изготовленные из проводника, насажены на общую (непроводящую) ось на расстоянии a одна от другой и вращаются в противоположные стороны с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле B , перпендикулярном к их плоскостям. Пренебрегая краевым эффектом, определить заряд полученного таким образом конденсатора и силу взаимодействия между его обкладками.

142*. Определить полный заряд, протекающий по тонкому проводящему кольцу при остановке его равномерно-го вращения (с угловой скоростью ω) вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости.

143*. Какова сила тока, возникающего в сверхпроводящем круговом кольце при остановке его равномерного вращения вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости?

У к а з а н и я:

а) Использовать свойство сверхпроводящего кольца: при любом изменении внешнего магнитного поля или тока в кольце полный магнитный поток через кольцо остается постоянным и равным:

$$L_{11} I + \Phi_e = \text{const.}$$

б) Самоиндукция тонкого сверхпроводящего кольца совпадает с внешней частью самоиндукции обычного, несверхпроводящего кольца (см. задачу 130*) и равна:

$$L_{11} = \mu_0 a \left(\ln \frac{8a}{b} - 2 \right),$$

где a — радиус кольца; b — радиус сечения.

§ 2. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

85. Источник с постоянной электродвижущей силой E соединяют с магнитоэлектрической машиной, способной вращаться без трения. Полное сопротивление и самоиндукция цепи тока соответственно равны R и L , а момент инерции якоря машины относительно оси вращения равен M . Известно, что в машине с постоянным возбуждением отношение между э.д.с. машины и угловой скоростью вращения ее якоря постоянно и равно отношению вращающего момента, действующего на якорь машины, к величине тока в цепи.

Р е ш е н и е

Пусть e — собственная э.д.с. машины, I — сила тока в цепи и $M \frac{d\omega}{dt}$ — вращающий момент, действующий на якорь машины; тогда на основании сказанного в условии задачи о режиме работы машины можно записать:

$$\frac{e}{\omega} = - \frac{M \frac{d\omega}{dt}}{I} = -k. \quad (1)$$

Знак минус в (1) перед k показывает, что направление собственной э.д.с. машины противоположно тому действию, ко-

торым она наводится (закон Ленца). Из формулы (1) находим:

$$e = -k\omega \text{ и } M \frac{d\omega}{dt} = kI. \quad (2)$$

Далее, записываем закон сохранения энергии:

$$EIdt = I^2Rdt + M\omega d\omega + LI dl. \quad (3)$$

Выражение (3) показывает, что энергия $EIdt$, затраченная источником тока за время dt , частично расходуется на нагревание проводов цепи, частично идет на увеличение кинетической энергии машины и частично превращается в энергию магнитного поля тока.

Запишем также обобщенный закон Ома:

$$IR = E + E^{\text{инд}} + e,$$

или

$$IR = E - L \frac{dl}{dt} - k\omega. \quad (4)$$

Исключая из уравнений (3) и (4) ток I , получаем следующее уравнение для определения угловой скорости якоря:

$$L \frac{d^2\omega}{dt^2} + R \frac{d\omega}{dt} + \frac{k^2}{M} \omega = \frac{kE}{M}; \quad (5)$$

а исключая ω , — уравнение для определения тока в цепи:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{k^2}{M} I = 0. \quad (6)$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (5) имеет вид:

$$\omega = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + \frac{E}{k}, \quad (7)$$

где

$$r_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{k^2}{ML}} \quad \text{и} \quad r_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{k^2}{ML}}.$$

В наиболее интересном случае, когда

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{k^2}{ML} < 0,$$

решение (7) можно переписать в виде:

$$\omega = ae^{-\alpha t} \sin(\gamma t + \beta) + \frac{E}{k}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k^2}{ML} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Решение уравнения (6) с учетом условия (2) можно записать в виде:

$$I = \frac{Ma}{k} e^{-\alpha t} [\gamma \cos(\gamma t + \beta) - \alpha \sin(\gamma t + \beta)]. \quad (9)$$

В решениях (8) и (9) постоянные α и β должны быть определены из следующих начальных условий: в момент включения источника тока, т. е. при $t = 0$,

$$\omega = 0 \quad \text{и} \quad I = 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что условия (10) принимают вид:

$$a \sin \beta = -\frac{E}{k} \quad \text{и} \quad a \cos \beta = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{E}{k},$$

откуда

$$a = -\frac{E}{\gamma \sqrt{ML}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{\gamma \sqrt{ML}}{k}. \quad (11)$$

Окончательно решения (8) и (9) можно записать в виде:

$$I = \frac{E}{k\gamma} \sqrt{\frac{M}{L}} e^{-\alpha t} \sin \gamma t \quad (12)$$

и

$$\omega = \frac{E}{k} \left[1 - \frac{k}{\gamma \sqrt{ML}} e^{-\alpha t} \sin(\gamma t + \beta) \right]. \quad (13)$$

Угловая скорость якоря и величина тока в цепи колеблются с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LM}{k^2}} \left(1 - \frac{R^2 M}{4k^2 L} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Выражение (14) показывает, что величина $\frac{M}{k^2}$ играет роль емкости в цепи с конденсатором, самоиндукцией и сопротивлением (см. книгу И. Е. Тамма, § 89), а машина выполняет роль конденсатора. Это видно из того, что в рассматриваемой нами цепи происходят взаимные превращения энергии магнитного поля тока в кинетическую энергию вращения якоря машины. Однако наличие в цепи сопротивления делает этот процесс быстро затухающим.

86. Конденсатор с емкостью C присоединен параллельно катушке с сопротивлением R и самоиндукцией L при помощи проводников, обладающих сопротивлением r . Полученный контур включается в цепь с э.д.с., равной $E_0 \cos pt$. Показать, что этот контур эквивалентен проводу без самоиндукции, если

$$R^2 - \frac{L}{C} = p^2 LC \left(r^2 - \frac{L}{C} \right).$$

Найти сопротивление указанного провода.

Решение

Пусть I_1 — ток в ветви с катушкой (рис. 89), I_2 — ток в ветви с конденсатором и I — общий ток, протекающий через обе ветви, причем

$$I = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Пусть общее сопротивление обеих ветвей равно R' , оно будет также и сопротивлением эквивалентного провода, которым при выполнении некоторого условия можно заменить обе ветви. Очевидно также, что

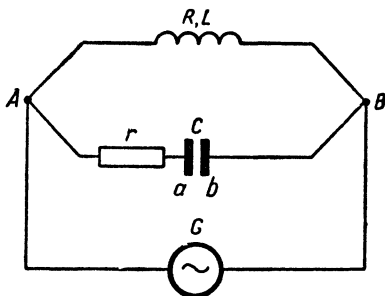


Рис. 89

$$I = \frac{E_0}{R'} \cos pt. \quad (2)$$

Ток I_1 , протекающий через катушку, определяется уравнением:

$$I_1 R + L \frac{dI_1}{dt} = E_0 \cos pt. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что частное решение уравнения (3) имеет вид:

$$I_1 = \frac{E_0 R}{R^2 + p^2 L^2} \cos pt + \frac{E_0 p L}{R^2 + p^2 L^2} \sin pt. \quad (4)$$

При определении тока I_2 в ветви с конденсатором исходим из того, что падение напряжения на участке $aAGBb$

$$rI_2 = \int_{aAGBb} E_S dS, \quad (5)$$

где

$$\int_{aAGBb} E_S dS = \oint_{aAGBbGa} E_S dS - \int_{bCa} E_S dS = E^{стp} + \int_{aCb} E_S dS.$$

В случае квазистационарного тока последний интеграл можно положить равным той разности потенциалов ($\varphi_a - \varphi_b$), которая существовала бы на обкладках конденсатора в статическом случае. Поэтому уравнение (5) можно переписать в виде:

$$rI_2 = E^{стp} + (\varphi_a - \varphi_b)$$

или, так как $E^{стp} = E_0 \cos pt$ и $\varphi_a - \varphi_b = \frac{e}{C}$:

$$rI_2 - \frac{e}{C} = E_0 \cos pt.$$

Продифференцировав последнее уравнение по времени t , получим:

$$r \frac{dI_2}{dt} - \frac{1}{C} \frac{de}{dt} = -pE_0 \sin pt$$

или, так как

$$-\frac{de}{dt} = I_2$$

[сила тока I_2 равна убыли (или прибыли) заряда на одной из обкладок конденсатора]:

$$r \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C} = -pE_0 \sin pt. \quad (6)$$

Частное решение уравнения (6) имеет вид:

$$I_2 = \frac{E_0 r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} \cos pt - \frac{E_0 p C}{1 + r^2 p^2 C^2} \sin pt. \quad (7)$$

Запишем теперь первый закон Кирхгофа (1), используя (2) (4) и (7):

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{R'} \cos pt = E_0 \left(\frac{R}{R^2 + p^2 L^2} + \frac{r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} \right) \cos pt + \\ + E_0 \left(\frac{pL}{R^2 + p^2 L^2} - \frac{pC}{1 + r^2 p^2 C^2} \right) \sin pt, \end{aligned}$$

откуда, приравнявая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, находим:

$$\begin{cases} \frac{L}{R^2 + p^2 L^2} - \frac{C}{1 + r^2 p^2 C^2} = 0, & (8) \\ \frac{R}{R^2 + p^2 L^2} + \frac{r p^2 C^2}{1 + r^2 p^2 C^2} = \frac{1}{R'}. & (9) \end{cases}$$

Из уравнения (8) находим условие, при выполнении которого рассматриваемую цепь с разветвлениями можно заменить эквивалентным проводом без самоиндукции

$$R^2 - \frac{L}{C} = p^2 LC \left(r^2 - \frac{L}{C} \right), \quad (10)$$

а из уравнения (9), учитывая условие (10), находим сопротивление указанного провода:

$$R' = \frac{R^2 + p^2 L^2}{R + r^2 p^2 LC}. \quad (11)$$

87. Определить частоты свободных электрических колебаний в системе из двух индуктивно связанных контуров, содержащих самоиндукции L_1 и L_2 и емкости C_1 и C_2 ; сопротивлениями R_1 и R_2 пренебрегаем.

Р е ш е н и е

Известно (см., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 89), что свободные электрические колебания в контуре, содержащем самоиндукцию L , емкость C и сопротивление R , описываются уравнением

$$L \frac{dl}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = 0. \quad (1)$$

Это уравнение следующим образом обобщается на случай n индуктивно связанных контуров:

$$\sum_b \left(L_{ab} \frac{dl_b}{dt} + R_a I_a + \frac{1}{C_a} \int_0^t I_a dt \right) = 0; \quad (a, b = 1, 2, \dots, n)$$

(тем самым учитывается, что э.д.с. индукции в любом контуре возникает как в результате изменения собственного тока, так и благодаря изменению токов, циркулирующих во всех остальных контурах) или

$$\sum_b \left[L_{ab} \frac{dI_b}{dt} + \delta_{ab} \left(R_a I_b + \frac{1}{C_a} \int_0^t I_b dt \right) \right] = 0, \quad (2)$$

где

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{при } a = b, \\ 0 & \text{при } a \neq b. \end{cases}$$

Для периодических токов (типа $I = I_0 e^{-i\omega t}$) система дифференциальных уравнений (2) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\sum_b Z_{ab} I_b = 0, \quad (3)$$

где элементы матрицы Z_{ab} определяются формулой

$$Z_{ab} = \delta_{ab} \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) - i\omega L_{ab}. \quad (4)$$

(Заметим, что диагональные матричные элементы

$$Z_{aa} = R_a - i \left(\omega L_a - \frac{1}{\omega C_a} \right)$$

называются импедансами контуров или их комплексными сопротивлениями.)

В рассматриваемом случае система однородных алгебраических уравнений (3) имеет вид (после умножения на $\frac{1}{\omega}$):

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\omega^2 C_1} - L_1 \right) I_1 - L_{12} I_2 = 0, \\ -L_{12} I_1 + \left(\frac{1}{\omega^2 C_2} - L_2 \right) I_2 = 0. \end{cases} \quad (3a)$$

Чтобы система (3a) оказалась совместной, необходимо, чтобы был равен нулю ее определитель, т. е. чтобы

$$\left(\frac{1}{\omega^2 C_1} - L_1 \right) \left(\frac{1}{\omega^2 C_2} - L_2 \right) = L_{12}^2. \quad (5)$$

Решая уравнение (5), находим частоты свободных электрических колебаний в связанных контурах:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \left[(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}. \quad (6)$$

88. По малому участку внутри однородного проводника в начальный момент распределен заряд с объемной плотностью $\rho_0(x, y, z)$; предоставленный потом самому себе заряд стекает на поверхность проводника. Как будет при этом изменяться плотность заряда в указанном участке? Каково время релаксации процесса растекания заряда в проводнике?

Р е ш е н и е

Подставляя $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ (в такой форме закон Ома справедлив как для постоянных, так и для переменных токов) в уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) и уравнения для источников электрического поля $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ получаем уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \cdot \rho, \quad (2)$$

интегрируя которое, находим:

$$\rho = \rho_0(x, y, z) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\epsilon_0} t}. \quad (3)$$

Выражение (3) показывает, что за время

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\lambda} \quad (4)$$

заряд в рассматриваемом участке проводника уменьшается в e раз. Время τ и есть время релаксации процесса растекания заряда в проводнике.

89. Показать, что при релаксации зарядов в однородной проводящей среде ток смещения точно компенсирует ток проводимости, так что магнитное поле в процессе релаксации зарядов не создается.

Р е ш е н и е

Используя результат, полученный в задаче 88, плотность тока проводимости, очевидно, можно представить в виде:

$$\vec{j}_{\text{пров}} = \lambda \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{\lambda}{\epsilon_0} t} \int_V \frac{\rho_0(x, y, z) \vec{r}}{r^3} dV,$$

а плотность тока смещения в виде:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{\lambda}{\epsilon_0} t} \int_V \frac{\rho_0(x, y, z) \vec{r}}{r^3} dV.$$

Следовательно, в процессе релаксации зарядов

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{см}} = 0. \quad (1)$$

Учтем также, что и

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ или } \text{div } \vec{H} = 0. \quad (2)$$

Решением системы уравнений (1) и (2) является постоянное поле. Поэтому если до начала растекания зарядов никакого магнитного поля не было, то его также не будет как во время релаксации зарядов, так и после прекращения указанного процесса.

90. Вдоль бесконечной проводящей полосы течет переменный синусоидальный ток высокой частоты. Найти распределение тока по сечению проводника и вычислить сопротивление куска проводника шириной $2a$ м и объемом $2a$ м³.

Р е ш е н и е

В металлах плотность тока смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ исчезающе мала по сравнению с плотностью тока проводимости. Поэтому при рассмотрении процессов, связанных с распределением и распространением электромагнитного поля в металлах, токами смещения можно пренебрегать. Нетрудно показать (исходя из уравнений Максвелла), что вектора \vec{E} и \vec{H} электромагнитного поля в металлах удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\lambda \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

(см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 90).

Обращаясь к решению задачи, введем систему декартовых координат так, как это указано на рисунке 90. Пусть переменный синусоидальный ток течет вдоль оси Z , причем $j_x = j_y = 0, j_z = j(x, t) = j(x) \cdot e^{i\omega t}$ и, следовательно,

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \lambda j(x) \cdot e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) приводит к новому уравнению

$$\frac{d^2 j(x)}{dx^2} = 2ip^2 \cdot j(x), \quad (4)$$

где

$$p^2 = \frac{1}{2} \mu \lambda \omega. \quad (5)$$

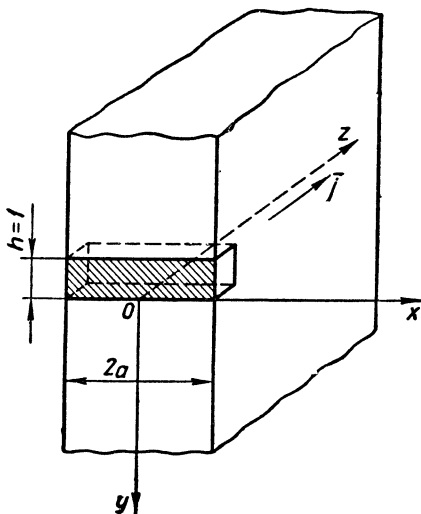


Рис. 90

Общее решение уравнения (4) имеет, как известно, вид линейной комбинации двух частных решений типа e^{kx} , где k —корень характеристического уравнения $k^2 = 2ip^2$, т. е.

$$k_{1,2} = \pm p \sqrt{2i} = \pm (1+i)p = \pm i\gamma; \quad \gamma = (1-i)p. \quad (6)$$

Следовательно,

$$j(x) = C_1 e^{i\gamma x} + C_2 e^{-i\gamma x} = A \cos \gamma x + B \sin \gamma x. \quad (7)$$

Пусть плотность тока на обеих поверхностях полосы

$$j(-a) = j(+a) = j_0;$$

тогда нетрудно показать, что в решении (7)

$$A \cos \gamma a = j_0 \text{ и } B = 0.$$

Таким образом, распределение тока в проводнике определяется действительной частью выражения

$$j(x, t) = j_0 \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma a} e^{i\omega t}, \quad (8)$$

т. е.

$$j_1(x, t) = \frac{j_0}{\cos \gamma a \cdot \cos \gamma^* a} \operatorname{Re} (\cos \gamma x \cdot \cos \gamma^* a \cdot e^{i\omega t}).$$

Пользуясь формулами

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ и } \sin z = \frac{i(e^{-iz} - e^{iz})}{2},$$

находим:

$$j_1(x, t) = j_0 \left\{ \frac{\operatorname{ch} p(x-a) \cos p(x+a) + \operatorname{ch} p(x+a) \cos p(x-a)}{\cos 2pa + \operatorname{ch} 2pa} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sh} p(x-a) \sin p(x+a) + \operatorname{sh} p(x+a) \sin p(x-a)}{\cos 2pa + \operatorname{ch} 2pa} \sin \omega t \right\}. \quad (9)$$

Переходя к определению сопротивления проводника, докажем одну очень важную для последующих вычислений теорему: «средний за период квадрат действительного тока (9) равен половине модуля комплексного тока (8), т. е.

$$\overline{[j_1(x, t)]^2} = \frac{1}{2} j(x, t) \cdot j^*(x, t).$$

Действительно, переписав (9) в виде:

$$j_1(x, t) = j_0 \{ \varphi_1(x) \cos \omega t - \varphi_2(x) \sin \omega t \},$$

получим:

$$[j_1(x, t)]^2 = j_0^2 \{ \varphi_1^2 \cos^2 \omega t + \varphi_2^2 \sin^2 \omega t - 2\varphi_1 \varphi_2 \sin \omega t \cos \omega t \},$$

откуда

$$\overline{[j_1(x, t)]^2} = \frac{1}{2} j_0^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

С другой стороны, представив (8) в виде:

$$j(x, t) = j_0 [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] e^{i\omega t},$$

находим:

$$j \cdot j^* = j_0^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

что и доказывает сформулированную выше теорему.

Полный «комплексный» ток, протекающий в некоторый момент времени t через полосу шириной $2a$ и высотой,

равной единице (на рис. 90 указанная полоска заштрихована), равен:

$$I = \int_{-a}^{+a} j(x, t) dx = \frac{2j_0 \sin \gamma a}{\gamma \cos \gamma a} e^{i\omega t}.$$

Средний за период квадрат действительного тока, протекающего через эту полоску, на основании доказанной теоремы будет равен:

$$\overline{I_1^2} = \frac{1}{2} II^* = \frac{2j_0^2 \sin \gamma a \cdot \sin \gamma^* a}{\gamma \gamma^* \cos \gamma a \cdot \cos \gamma^* a}. \quad (10)$$

Среднее за период тока количество джоулевого тепла, выделяющегося в проводнике (в объеме параллелепипеда, основанием которого служит указанная выше полоска, а высота равна единице), равно:

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= \frac{1}{T} \int_{-a}^{+a} \int_0^T \frac{[I_1(x, t)]^2}{\lambda} dx dt = \\ &= \frac{j_0^2}{\lambda T} \int_{-a}^{+a} dx \int_0^T (\varphi_1^2 \cos^2 \omega t + \varphi_2^2 \sin^2 \omega t - 2\varphi_1 \varphi_2 \sin \omega t \cos \omega t) dt = \\ &= \frac{j_0^2}{\lambda} \int_0^a (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^a j(x, t) \cdot j^*(x, t) dx = \\ &= \frac{j_0^2}{\lambda \cos \gamma a \cdot \cos \gamma^* a} \int_0^a \cos \gamma x \cdot \cos \gamma^* x \cdot dx. \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в последнее выражение, берется путем двукратного интегрирования по частям. Вычисления показывают, что

$$\int_0^a \cos \gamma x \cdot \cos \gamma^* x \cdot dx = \frac{\gamma \sin \gamma a \cdot \cos \gamma^* a - \gamma^* \sin \gamma^* a \cos \gamma a}{\gamma^2 - (\gamma^*)^2}$$

и, следовательно,

$$\overline{Q} = \frac{j_0^2 (\gamma \sin \gamma a \cos \gamma^* a - \gamma^* \sin \gamma^* a \cos \gamma a)}{\lambda [\gamma^2 - (\gamma^*)^2] \cos \gamma a \cdot \cos \gamma^* a}. \quad (11)$$

Сопrotивление участка проводника (с объемом, равным $2a \text{ см}^3$) определяется формулой

$$R_{\omega} = \frac{\overline{Q}}{I_1^2} = \frac{\gamma \gamma^*}{2\lambda [\gamma^2 - (\gamma^*)^2]} (\gamma \operatorname{ctg} \gamma^* a - \gamma^* \operatorname{ctg} \gamma a)$$

или

$$R_{\omega} = \frac{\rho}{2\lambda} \left(\frac{\sin 2pa - \operatorname{sh} 2pa^*}{\operatorname{ch} 2pa - \cos 2pa} \right), \quad (12)$$

откуда видно, что при достаточно большой частоте тока $\omega \rightarrow \infty$ (и, следовательно, при $\rho \rightarrow \infty$)

$$R_{\omega} \rightarrow \frac{\rho}{2\lambda} = ap R_0,$$

где $R_0 = \frac{1}{2a\lambda}$ сопротивление проводника при постоянном токе. Из уравнения (8) при $\omega \rightarrow \infty$ находим:

$$j(x, t) \rightarrow j_0 e^{-(a-x)\rho} \cos \omega t.$$

Задачи для самостоятельного решения

144*. Дроссель с коэффициентом самоиндукции $L = 1 \text{ гн}$ и сопротивлением $R = 1 \text{ ом}$ подключается в момент времени $t = 0$ к батарее с постоянной э.д.с. в $V \text{ в}$. Определить, как будет изменяться ток в цепи. Сколько пройдет времени до момента, когда ток разовьется до 1% к своему максимальному значению?

145*. Конденсатор емкости C , заряженный до заряда q_0 , замыкают на проводник с сопротивлением R и самоиндукцией L . Показать, что в любой момент в течение всего времени разрядки конденсатора сумма электростатической энергии конденсатора, энергии магнитного поля разрядного тока и энергии, выделяющейся в проводе в виде джоулева тепла, есть величина постоянная, и вычислить эту постоянную.

146*. Сопротивление 10 ом , катушка с самоиндукцией $0,5 \text{ гн}$ и конденсатор емкостью $0,5 \text{ мкф}$ присоединены последовательно к переменному, синусоидальному напряжению, эффективное значение которого — 220 в , а частота — 50 гц . Какова величина эффективного тока, каков сдвиг фазы тока относительно напряжения и какова величина эффективной и безваттной мощности тока?

147*. В постоянном однородном магнитном поле \vec{B} равномерно (с угловой скоростью ω) вращается замкнутый не-

деформирующийся плоский контур с площадью S , сопротивлением R и самоиндукцией L . Ось вращения контура перпендикулярна к направлению магнитного поля и лежит в плоскости контура; сторонние электродвижущие силы отсутствуют. Определить величину тока, индуцированного в контуре.

148*. Показать, что для трансформатора в случае, когда коэффициент связи $k = \frac{L_{12}}{L_1 L_2} = 1$, а сопротивлением R_2 вторичной обмотки можно пренебречь, отношения сил токов и э.д.с. в первичной и вторичной обмотках трансформатора приблизительно равны:

$$\frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{E_{10}}{E_{20}} = \frac{n_1}{n_2},$$

где n_1 и n_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках.

149*. Ток $I \sin \omega t$, циркулирующий в катушке A , индуцирует ток в катушке B . Найти среднюю по времени силу, стремящуюся увеличить любую обобщенную координату q_α катушки B .

150*. Резонатор состоит из кольца (радиуса $R = 5$ см), изготовленного из медной проволоки с диаметром $2r = 1$ мм. В кольце сделан прорез и к обоим концам проволоки припаяны круглые, параллельные между собой, металлические пластинки (с диаметром $a = 5$ см), которые в качестве обкладок плоского конденсатора представляют емкость цепи. Если такой резонатор находится в переменном электромагнитном поле, частота которого равна частоте собственных колебаний резонатора, то между пластинками будут проскакивать искры.

Каким должно быть расстояние d между пластинками, чтобы с помощью указанного резонатора можно было обнаружить электромагнитные колебания с длиной волны $\lambda = 10$ м?

151*. Показать, что при параллельном соединении элементов цепи переменного тока с комплексными сопротивлениями Z_1, Z_2, \dots, Z_n их «комплексные» проводимости $\frac{1}{Z_1}, \frac{1}{Z_2}, \dots, \frac{1}{Z_n}$ складываются.

152*. Определить собственную частоту электрических колебаний в цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления R , емкости C и самоиндукции L .

153*. Найти время установления электростатического равновесия зарядов в меди, платине и висмуте (их удельные сопротивления соответственно равны $1,7 \cdot 10^{-8}$; $10,7 \cdot 10^{-8}$ и $120 \cdot 10^{-8}$ ом · м).

154*. Полый шар (внутренний и внешний радиусы которого соответственно равны a и b) изготовлен из металла с электропроводностью λ . В начальный момент $t = 0$ на внутренней поверхности шара равномерно распределен заряд q_0 . Вычислить выделяющееся при растекании этого заряда джоулево тепло и показать, что оно равно уменьшению электростатической энергии, происходящему вследствие растекания заряда.

155*. Вдоль коаксиального кабеля, рассматриваемого в задаче 76, течет синусоидальный ток высокой частоты ω . Указать предел, к которому будет стремиться (при $\omega \rightarrow \infty$) самоиндукция единицы длины кабеля.

§ 3. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Полная система уравнений Максвелла для переменного электромагнитного поля:

В системе СИ	В абсолютной системе	
$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	(1)

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	(2)
---	--	-----

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$	$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho,$	(3)
--------------------------------------	--	-----

$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$	(4)
-----------------------------------	-----------------------------------	-----

Плотность энергии электромагнитного поля:

В системе СИ	В абсолютной системе	
$w = \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}).$	$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}).$	(5)

Плотность потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга):

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (6)$$

Плотность электромагнитного импульса:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\vec{g} = \varepsilon\mu \vec{S}. \quad \vec{g} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \vec{S}. \quad (7)$$

Связь векторов \vec{B} и \vec{E} с электромагнитными потенциалами φ и \vec{A} :

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (8)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (9)$$

Для однородных изотропных сред электромагнитные потенциалы φ и \vec{A} определяются из следующих уравнений Даламбера:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad (10)$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}, \quad \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}, \quad (11)$$

при условии, что потенциалы φ и \vec{A} калиброваны по Лоренцу, т. е.

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (10) и (11) при $\rho = j = 0$ описывают свободные электромагнитные волны, распространяющиеся с фазовой скоростью:

В системе СИ

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0 \cdot \sqrt{KK_m}}} = \frac{c}{n},$$

В абсолютной системе

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (13)$$

где c — скорость света в вакууме; n — показатель преломления, определяемый

В системе СИ

$$n = \sqrt{KK_m},$$

В абсолютной системе

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (14)$$

причем, как это видно из уравнения (13), в системе единиц СИ имеет место следующее соотношение: $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

91. Показать, что уравнение $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ может быть получено из уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, закона сохранения заряда и дополнительного условия, которое требуется установить.

Решение

Пользуясь тождеством $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0$, из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

находим:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

или

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = 0. \quad (1)$$

Используя закон сохранения заряда $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, уравнение (1) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho + f(x, y, z). \quad (2)$$

Чтобы отсюда получить уравнение $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, следует потребовать, чтобы в электрическом поле не было никаких других источников, кроме свободных зарядов (или чтобы $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ в вакууме, где $\rho = 0$). Тогда $f(x, y, z) \equiv 0$, и уравнение (2) принимает вид: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

92. Показать, что в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в однородной среде, векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к направлению распространения волны. Показать также, что у плоской электромагнитной волны $\sqrt{\varepsilon} |E| = \sqrt{\mu} |H|$.

Р е ш е н и е

У плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль оси X ,

$$\vec{E} = \vec{E}(x - vt); \quad \vec{H} = \vec{H}(x - vt), \quad (1)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — скорость распространения волны.

Для того чтобы доказать перпендикулярность векторов \vec{E} и \vec{H} к направлению распространения волны, обратимся к уравнениям:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Учитывая выражения (1), эти уравнения, очевидно, можно представить в виде:

$$\frac{\partial E_x(x - vt)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial H_x(x - vt)}{\partial x} = 0,$$

или, так как $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE_x}{d(x - vt)} \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = \frac{dE_x}{d(x - vt)}$,

$$\frac{dE_x}{d(x - vt)} = 0, \quad \frac{dH_x}{d(x - vt)} = 0,$$

откуда $E_x = \text{const}$ и $H_x = \text{const}$. Однако полученный результат противоречит действительности, так как электромагнитное поле волны должно быть переменным полем. Поэтому мы должны положить $E_x = 0$ и $H_x = 0$, но это

и доказывает перпендикулярность векторов \vec{E} и \vec{H} к направлению распространения плоской волны.

Выберем теперь ось Y так, чтобы $H_y = H$, и обратимся к уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (2)$$

Так как

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{k}; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{j} \frac{\partial H_y}{\partial t},$$

уравнение (2) можно представить в виде системы двух уравнений:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

или

$$\frac{dE_z}{d(x-vt)} = -\mu v \frac{dH_y}{d(x-vt)} \quad \text{и} \quad \frac{dE_y}{d(x-vt)} = 0,$$

откуда $E_y = 0$ и $\sqrt{\epsilon} |E| = \sqrt{\mu} |H|$.

93. Перпендикулярно к поверхности проводника с электропроводностью λ и магнитной проницаемостью μ падает плоская электромагнитная волна частоты ω . Пренебрегая токами смещения по сравнению с токами проводимости, определить, на какой глубине внутри проводника электромагнитное поле волны ослабевает в e раз (e — основание натуральных логарифмов).

Решение

Выбрав систему координат так, как это показано на рисунке 91, можно записать для электромагнитного поля плоской волны в вакууме:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0, \quad E_y = E(x) \cdot e^{i\omega t}, \\ H_x = H_y = 0, \quad H_z = H(x) \cdot e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Электромагнитное поле в проводнике определяется уравнениями:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \lambda \vec{E} \quad (1)$$

(токами смещения $\frac{\varepsilon \partial \vec{E}}{\partial t}$ в (1) мы пренебрегаем по сравнению с токами проводимости \vec{j}),

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{rot } \vec{H} = -\vec{j} e^{i\omega t} \frac{dH}{dx}, \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{k} e^{i\omega t} \frac{dE}{dx}$$

и, следовательно, уравнения (1) и (2) можно переписать в виде:

$$\frac{dH}{dx} = -\lambda E, \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dx} = -i\omega\mu H. \quad (4)$$

Продифференцировав уравнение (3) еще один раз по x и

подставив $\frac{dE}{dx}$ из (4), получим

уравнение для определения амплитуды магнитного поля волны:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - i\lambda\mu\omega H = 0. \quad (5)$$

Тем же способом получается аналогичное уравнение для определения амплитуды электрического поля.

Корни характеристического уравнения $k^2 - i\lambda\mu\omega = 0$, соответствующего уравнению (5), равны:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda\mu\omega} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Однако условию задачи удовлетворяет лишь второй корень k_2 (корню k_1 соответствует волна, амплитуда которой возрастает по мере продвижения в глубь проводника).

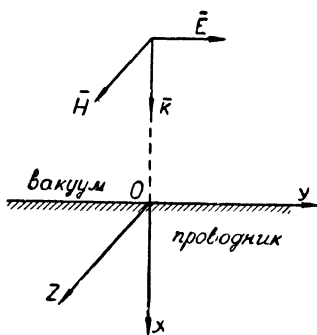


Рис. 91

Таким образом, решения уравнений (3) и (4) мы должны записать в виде:

$$\begin{cases} E(x) = E(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x, \\ H(x) = H(0) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x} \cos \sqrt{\frac{\lambda\mu\omega}{2}} x, \end{cases} \quad (6)$$

где $E(0)$ и $H(0)$ — амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля волны при $x = 0$, т. е. на поверхности проводника.

Выражения (6) показывают, что электромагнитная волна ослабляется в e раз на глубине

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda\mu\omega}}.$$

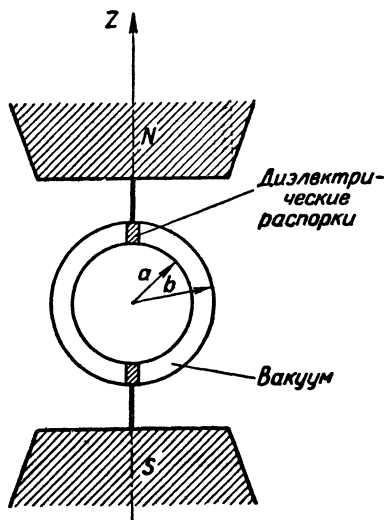


Рис. 92

94. Сферический конденсатор, размеры и устройство которого показаны на рисунке 92, помещен в однородное постоянное магнитное поле \vec{B}_0 , параллельное оси Z , вокруг которой он может свободно вращаться. На обкладки

покоящегося в начале конденсатора наносятся заряды e и $-e$. С какой угловой скоростью будет вращаться конденсатор после разрядки, если его момент инерции равен I ? Процесс разрядки конденсатора считать происходящим без вмешательства внешних сил.

Р е ш е н и е

Для замкнутой системы (конденсатор + окружающее его электромагнитное поле) имеет место закон сохранения момента импульса:

$$\vec{K}_{\text{эл}} + \vec{K}_{\text{мех}} = \text{const}, \quad (1)$$

где $\vec{K}_{\text{эл}}$ — момент импульса электромагнитного поля, а $\vec{K}_{\text{мех}}$ — момент импульса конденсатора.

В начальный момент, когда конденсатор только что заряжен и покоится

$$\vec{K}_{\text{эл}}^{(0)} \neq 0, \text{ а } \vec{K}_{\text{мех}}^{(0)} = 0.$$

Наоборот, после разрядки конденсатора

$$\vec{K}_{\text{эл}}^{(1)} = 0, \text{ а } \vec{K}_{\text{мех}}^{(1)} = I\omega \neq 0.$$

В силу закона сохранения (1)

$$I\omega = \left| \vec{K}_{\text{эл}}^{(0)} \right|,$$

откуда угловая скорость вращения конденсатора после разрядки оказывается равной

$$\omega = \frac{1}{I} K_{\text{эл}}^{(0)}. \quad (2)$$

Задача, таким образом, сводится к вычислению момента импульса статического электромагнитного поля рассматриваемой системы в начальный момент времени, когда конденсатор покоился.

По определению (см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 104), момент импульса электромагнитного поля равен:

$$\vec{K}_{\text{эл}}^{(0)} = \int \left[\vec{r}, \vec{g} \right] dV, \quad (3)$$

где

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\vec{E}, \vec{H}_0 \right] = \varepsilon_0 \left[\vec{E}, \vec{B}_0 \right] \quad (4)$$

— плотность электромагнитного импульса, а интегрирование в (3) ведется по всему объему, занимаемому электромагнитным полем.

Как известно, электрическое поле сферического конденсатора полностью сконцентрировано между его обкладками и равно:

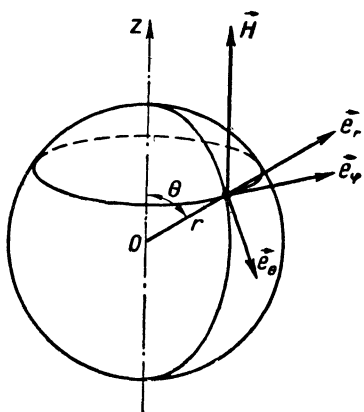


Рис. 93

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (a \leq r \leq b),$$

откуда

$$\vec{g} = \frac{e}{4\pi r^3} [\vec{r}, \vec{B}_0],$$

$$(a \leq r \leq b). \quad (5)$$

Введя сферическую систему координат с полярной осью, параллельной магнитному полю (рис. 93), находим:

$$\vec{g} = \frac{e}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & e_\theta & e_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ B_0 \cos \Theta & -B_0 \sin \Theta & 0 \end{vmatrix} = -\frac{eB_0}{4\pi r^2} \sin \Theta \cdot \vec{e}_\varphi, \quad (6)$$

откуда видно, что силовые линии вектора \vec{g} (а следовательно, и вектора Пойнтинга) — замкнутые окружности, перпендикулярные оси Z . Таким образом, в статическом электромагнитном поле энергия постоянно циркулирует по замкнутым линиям и поэтому не может излучаться.

Подстановка (6) в (3) дает:

$$\vec{K}_{\text{эл}}^{(0)} = \vec{e}_\theta \cdot \frac{eB_0}{4\pi} \int \frac{\sin \Theta}{r} dV. \quad (7)$$

Спроецируем далее вектор $\vec{K}_{\text{эл}}^{(0)}$ на ось Z и на направление, перпендикулярное к оси Z , получим:

$$(K_{\text{эл}}^{(0)})_z = -\frac{eB_0}{4\pi} \int \frac{\sin^2 \Theta}{r} dV.$$

$$(K_{\text{эл}}^{(0)})_\perp = \frac{eB_0}{4\pi} \int \frac{\sin \Theta \cdot \cos \Theta}{r} dV. \quad (8)$$

Подставляя в (8) $dV = r^2 dr \cdot \sin \Theta d\Theta d\varphi$ и выполняя интегрирование по r , Θ и φ (по r в пределах от a до b ; по Θ — от 0 до π и по φ — от 0 до 2π), находим:

$$(K_{\text{эл}}^{(0)})_\perp = 0; \quad (K_{\text{эл}}^{(0)})_z = -\frac{eB_0}{3} (b^2 - a^2),$$

откуда

$$\omega = \frac{eB_0}{3I} (b^2 - a^2), \quad (9)$$

причем конденсатор будет вращаться по часовой стрелке.

95. Плоская электромагнитная волна, у которой

$$E_x = E_z = H_x = H_y = 0; \quad E_y = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_z = a \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

падает при $x = 0$ на нормальную к оси X плоскую поверхность проводника, простирающегося вправо до бесконечности. Пренебрегая отражением, определить производимое электромагнитной волной световое давление.

Р е ш е н и е

Проводник, простирающийся вправо от координатной плоскости YOZ до бесконечности, при указанном выше допущении будет полностью поглощать электромагнитную энергию падающей на его поверхность световой волны — это классический пример абсолютно черной поверхности. Поэтому величина светового давления, оказываемого волной на поверхность проводника, будет равна:

$$p = \frac{1}{c} (S_{x=0})_{\text{средн}},$$

где $(S_{x=0})_{\text{средн}}$ — среднее за период волны значение вектора Пойнтинга, взятое при $x = 0$. Нетрудно видеть, что

$$S_{x=0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} a^2 \sin^2 2\pi\nu t$$

и, следовательно,

$$(S_{x=0})_{\text{средн}} = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} a^2 \sin^2 2\pi\nu t \cdot dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} a^2.$$

откуда световое давление

$$p = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} a^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 a^2.$$

96. Плоскополяризованная электромагнитная волна падает на границу раздела двух прозрачных ($\mu \cong \mu_0$) сред с

показателями преломления n_1 и n_2 . Электрический вектор волны параллелен плоскости раздела сред. Найти коэффициент прохождения света во вторую среду.

Решение

Обозначив через \vec{E}_0 , \vec{E}_1 и \vec{E}_2 напряженности электрического поля соответственно в падающей, отраженной и преломленной волнах, запишем закон сохранения энергии

и граничное условие $E_{1t} = E_{2t}$.

Граничное условие $E_{1t} = E_{2t}$, как показывает рисунок 94, можно записать в виде:

$$E_0 + E_1 = E_2. \quad (1)$$

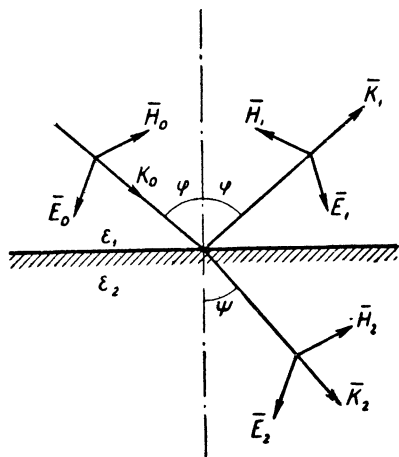


Рис. 94

Закон сохранения энергии требует, чтобы количество энергии, уносимой с единицы поверхности раздела сред отраженной волной, и энергии, проходящей во вторую среду из первой, было равно энергии, доставляемой указанной площадке падающей волной, т. е.

$$S_0 \cos \varphi = S_1 \cos \varphi + S_2 \cos \psi, \quad (2)$$

где S — вектор Пойнтинга. Подставляя в (2)

$$S_0 = \sqrt{\varepsilon_1} E_0^2; \quad S_1 = \sqrt{\varepsilon_1} E_1^2; \quad S_2 = \sqrt{\varepsilon_2} E_2^2,$$

находим:

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_0^2 - E_1^2) \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} E_2^2 \cos \psi,$$

откуда, используя закон преломления $\sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \psi$, окончательно получаем:

$$E_0^2 - E_1^2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} E_2^2. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3), находим:

$$E_1 = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} E_0. \quad (4)$$

Подставляя в (4) $E_0 = \frac{H_0}{\sqrt{\epsilon_1}}$, $E_1 = \frac{H_1}{\sqrt{\epsilon_1}}$ и $E_2 = \frac{H_2}{\sqrt{\epsilon_2}}$, находим далее:

$$H_1 = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} H_0, \quad H_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} H_0 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \psi)} H_0. \quad (5)$$

С помощью выражений (4) и (5) находим следующие выражения для плотности потока энергии в отраженной и преломленной волне:

$$S_1 = E_1 H_1 = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} S_0,$$

$$S_2 = E_2 H_2 = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)} S_0,$$

откуда искомые коэффициенты отражения и прохождения оказываются равными:

$$r = \frac{S_1}{S_0} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}, \quad d = \frac{S_2}{S_0} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (6)$$

97. Плоский конденсатор состоит из двух параллельных слоев различных веществ. Первый слой толщиной d имеет диэлектрическую проницаемость ϵ и электропроводность, равную нулю; для другого слоя толщиной kd диэлектрическая проницаемость $\epsilon_2 = 0$, а электропроводность λ имеет конечное значение. Показать, что в отношении распространения монохроматических плоских волн этот конденсатор ведет себя так, как если бы все пространство между его пластинами было заполнено однородной средой с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon^* = \epsilon (1 + k) \left(1 + i \frac{\epsilon \omega k}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Р е ш е н и е

Каждый слой веществ, находящихся между обкладками конденсатора, будем рассматривать как отдельные кон-

денсаторы с емкостями C_1 и C_2 . Тогда емкость заданного конденсатора, рассматриваемого в качестве батареи двух последовательно соединенных конденсаторов, будет равна:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1)$$

С другой стороны, рассматривая описанный выше конденсатор как плоский, между обкладками которого находится однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ^* , можно записать:

$$C = \frac{\epsilon^* S}{(1+k)d}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\epsilon^* = \frac{(1+k) d C_1 C_2}{(C_1 + C_2) S}, \quad (3)$$

где

$$C_1 = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (4)$$

Чтобы найти C_2 , учтем, что в отношении распространения монохроматических плоских волн проводник с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ϵ ведет себя как диэлектрик с комплексной проницаемостью

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{\lambda}{\omega} i. \quad (5)$$

Чтобы доказать последнее утверждение, посмотрим, какой вид принимает уравнение

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

для плоской монохроматической волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x) e^{i\omega t},$$

распространяющейся в диэлектрике и в проводнике.

Очевидно, что в диэлектрике плотность токов проводимости $\vec{j} = 0$; кроме того,

$$\text{rot} \vec{H} = e^{i\omega t} \text{rot} \vec{H}_0 \text{ и } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i\omega t},$$

и поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = i\varepsilon\omega \vec{E}_0.$$

В проводнике $\vec{j} = \lambda \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, и поэтому уравнение (6) следует записывать в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = (\lambda + i\varepsilon\omega) \vec{E}_0$$

или

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = i\omega \left(\varepsilon - \frac{\lambda}{\omega} i \right) \vec{E}_0,$$

откуда видно, что проводник с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью ε в отношении процесса распространения плоских монохроматических волн ведет себя как идеальный диэлектрик с комплексной диэлектрической проницаемостью ε' , определяемой по формуле (5).

Очевидно, что проводящее вещество второго слоя рассматриваемого нами конденсатора ведет себя как диэлектрик с чисто мнимой проницаемостью

$$\varepsilon' = -\frac{\lambda}{\omega} i$$

(так как у вещества второго слоя $\varepsilon = 0$). Поэтому

$$C_2 = \frac{\varepsilon' S}{kd} = -\frac{i\lambda S}{\omega kd}. \quad (7)$$

Подставляя выражения (4) и (7) в формулу (3), находим:

$$\varepsilon^* = \varepsilon (1 + k) \left(1 + i \frac{\varepsilon\omega k}{\lambda} \right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

98. Определить напряженности электрического и магнитного поля E - TM волны, бегущей вдоль волновода прямоугольного сечения (рис. 95) с идеально проводящими стенками. Найти также уравнения силовых линий электрического и магнитного поля в сечении XOY волновода.

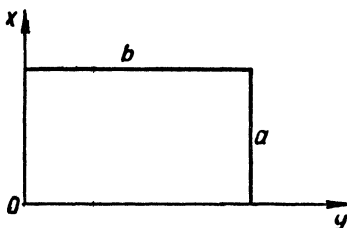


Рис. 95

Р е ш е н и е

Неоднородные уравнения Даламбера

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2)$$

для электромагнитных потенциалов \vec{A} и φ , калиброванных условием Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

допускают следующие два решения:

$$1) \vec{A} = \mu \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}, \quad \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{\Pi}_e, \quad (4)$$

где

$$\vec{\Pi}_e = \int \frac{\vec{P} dv}{4\pi r} \quad (5)$$

вектор Герца для излучающей системы с отличным от нуля вектором поляризации \vec{P} ; при этом напряженности электрического и магнитного полей определяются соотношениями:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_e - \mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}; \quad (6)$$

$$2) \vec{A} = \mu \operatorname{rot} \vec{\Pi}_m, \quad \varphi = 0, \quad (7)$$

где

$$\vec{\Pi}_m = \int \frac{\vec{M} dv}{4\pi r} \quad (8)$$

вектор Герца для излучающей системы с отличным от нуля вектором намагничения \vec{M} ; векторы \vec{E} и \vec{H} в этом случае определяются из соотношений:

$$\vec{E} = -\mu \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}_m}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}_m. \quad (9)$$

Можно показать, что в первом случае система уравнений (1), (2), (3) сводится к уравнению

$$\Delta \vec{\Pi}_e - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\vec{P}, \quad (10)$$

а во втором — к уравнению:

$$\Delta \vec{\Pi}_m - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_m}{\partial t^2} = -\vec{M}. \quad (11)$$

В случае отсутствия всяких источников электромагнитного поля ($\vec{P} = \vec{M} = 0$) уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\Delta \vec{\Pi} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

где под $\vec{\Pi}$ следует понимать и $\vec{\Pi}_e$ и $\vec{\Pi}_m$. Поэтому уравнение (12) допускает одновременно оба указанных выше решения.

Электромагнитные волны типа (6), распространяющиеся вдоль волновода, принято называть волнами поперечно-магнитного типа (*E-TM*), а волны типа (9) — волнами поперечно-электрического типа (*H-TE*).

Для монохроматической волны типа *E-TM* с неизменным направлением вектора Герца $\vec{\Pi}$ вдоль оси волновода можно написать:

$$P_z = \psi(x, y) \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \quad P_x = P_y = 0. \quad (13)$$

Подстановка (13) в уравнение (12) приводит к новому уравнению для определения функции ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (\epsilon \mu \omega^2 - k^2) \psi = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) должно удовлетворять граничному условию:

$$E_t = 0 \quad (\text{на поверхности волновода}),$$

которое, как нетрудно показать, будет выполняться, если всюду на поверхности волновода

$$\psi \equiv 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (14), удовлетворяющее условию (15), имеет вид:

$$\psi = \Pi_0 \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (16)$$

где n, m — целые числа, удовлетворяющие следующему дисперсионному соотношению:

$$\varepsilon\mu\omega^2 = k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \quad (17)$$

Таким образом,

$$\Pi_z = \Pi_0 \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в формулы (6) дает:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{ik\Pi_0}{\varepsilon} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \\ E_y &= -\frac{ik\Pi_0}{\varepsilon} \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \\ E_z &= \frac{\Pi_0}{\varepsilon} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \quad (19) \\ H_x &= i\omega\Pi_0 \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \\ H_y &= -i\omega\Pi_0 \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}. \end{aligned}$$

Подставляя E_x и E_y , взятые из (19), в дифференциальное уравнение силовых линий электрического поля $E_y dx = E_x dy$ и выполняя несложное интегрирование, находим уравнение силовых линий электрического поля E - TM волны в сечении XOY волновода:

$$y = \frac{b}{m\pi} \arccos C_1 \left(\cos \frac{n\pi}{a} x \right)^{\left(\frac{ma}{nb}\right)^2}. \quad (20)$$

Аналогичным образом получаем и уравнение силовых линий магнитного поля:

$$y = \frac{b}{m\pi} \arcsin \left(\frac{C_2}{\sin \frac{n\pi}{a} x} \right). \quad (21)$$

99. Найти плотность поверхностного заряда и плотность поверхностного тока на стенках прямоугольного волновода (рис. 95), вдоль которого бежит волна $E-T_{11}M$ частоты ω .

Р е ш е н и е

Плотность поверхностного заряда, находящегося на стенках волновода, можно найти из граничного условия

$$\varepsilon E_n/s = \sigma,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma(x, 0, z) = \varepsilon (E_y)_{y=0}, \quad \sigma(x, b, z) = -\varepsilon (E_y)_{y=b}, \quad (1) \\ \sigma(0, y, z) = \varepsilon (E_x)_{x=0}, \quad \sigma(a, y, z) = -\varepsilon (E_x)_{x=a}. \end{aligned}$$

Подставляя в формулы (1) значения составляющих E_x и E_y напряженности электрического поля волны из формул (19) предыдущей задачи (в них надо положить $n = m = 1$, что соответствует волне $E-T_{11}M$), получим:

$$\begin{aligned} \sigma(0, y, z) = \sigma(a, y, z) = \frac{k\pi\Pi_0}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - kz); \\ \sigma(x, 0, z) = \sigma(x, b, z) = \frac{k\pi\Pi_0}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz). \quad (2) \end{aligned}$$

Плотность i поверхностного тока на стенках волновода определяется из граничного условия

$$H_t/s = i,$$

откуда

$$\begin{aligned} i(0, y, z) = (H_y)_{x=0}, \quad i(a, y, z) = -(H_y)_{x=a}, \quad (3) \\ i(x, 0, z) = -(H_x)_{y=0}, \quad i(x, a, z) = (H_x)_{y=b}. \end{aligned}$$

Подстановка в (3) значений H_x и H_y дает:

$$\begin{aligned} i(0, y, z) = i(a, y, z) = \frac{\omega\pi\Pi_0}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - kz), \\ i(x, 0, z) = i(x, a, z) = \frac{\omega\pi\Pi_0}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz). \quad (4) \end{aligned}$$

На рисунке 96 представлен вид силовых линий электрического и магнитного поля волны $E-T_{11}M$, наглядно иллюстрирующий распределение поверхностного заряда и поверхностного тока на стенках волновода.

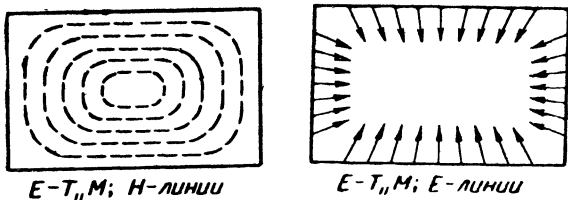


Рис. 96

Задачи для самостоятельного решения

156*. Показать, что уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ может быть получено из уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и дополнительного условия, которое следует установить.

157*. Вывести из граничных условий закон преломления векторов \vec{E} и \vec{D} , \vec{B} и \vec{H} и \vec{j} на границе раздела двух сред.

158*. Определить величину электродвижущей силы, наводимой в квадратной рамочной антенне (со стороной, равной 5 м) плоской электромагнитной волной с частотой 10^8 гц и амплитудой напряженности электрического поля, равной 50 мкв/м.

159*. Сравнить силы (F_E и F_H), действующие на свободный электрон со стороны электрической и магнитной составляющей плоской световой волны

$$(v = 5 \cdot 10^{14} \text{ гц}; E_0 \sim 3 \cdot 10^4 \text{ в/м}).$$

160*. Плоская электромагнитная волна задана векторным потенциалом

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \varphi = 0.$$

Найти напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля волны.

161*. Написать однородное волновое уравнение в сферических координатах и исследовать смысл решений, зависящих только от r и t .

162*. Энергия солнечной радиации, падающая в 1 мин на площадку земной поверхности в 1 м², нормальную к лучу, составляет $9,2 \cdot 10^4$ дж. Вычислить средние квадратичные значения напряженности электрического и магнитного поля в солнечном свете.

163*. То же для 75-ваттной лампы накаливания на расстоянии 1 м в предположении, что только около 15% подводимой к ней энергии лампа отдает в виде лучеиспускания.

164*. Показать, что количество тепла, выделяющегося в цилиндрическом проводнике, вдоль оси которого течет постоянный ток I , равномерно распределенный по сечению проводника, точно соответствует потоку электромагнитной энергии, втекающей в проводник через его боковую поверхность.

165*. Рассчитать величину давления солнечных лучей на поверхность Земли в случае нормального падения при следующих предположениях: а) поверхность Земли абсолютно черная; б) поверхность Земли абсолютно зеркальная.

166*. Внутри поглощающего тела вектор \vec{E} световой волны создает ток с плотностью \vec{j} , так что на единицу объема поглощающего тела со стороны магнитной составляющей световой волны действует сила Лоренца $\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}]$.

Показать, что величина светового давления, полученная в задаче 95, равна интегралу от $(F_x)_{\text{средн.}}$ по объему столбика поглощающего вещества с поперечным сечением в 1 м², т. е.

$$p = \int_0^{\infty} (F_x)_{\text{средн.}} \cdot dx$$

(под $(F_x)_{\text{средн.}}$ следует понимать среднее за период волны значение силы Лоренца).

167*. В воде ($\epsilon = 81 \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ и $\lambda = 10^{-3} \text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) распространяется плоская монохроматическая световая волна, частота которой может принимать значения: $\nu_1 = 10^5$ гц, $\nu_2 = 10^8$ гц и $\nu_3 = 10^{10}$ гц. В каком из трех указанных случаев вода может считаться проводником, полупроводником или диэлектриком? Условно можно считать, что если отношение плотности тока смещения к плотности тока проводимости больше 100, то среда — диэлектрик, а если это отношение меньше 0,01, то среда — проводник.

168*. Решить задачу 96 для случая, когда плоскости раздела двух сред параллельны магнитный вектор падающей, плоскополяризованной электромагнитной волны.

169*. Два самолета летят на расстоянии d друг от друга на высоте h над плоской поверхностью воды. С одного самолета на другой послан радиосигнал. Приемная и передающая антенны на самолетах представляют собой короткие металлические стержни длиной l , ориентированные вертикально. Считая $h \gg l$, $d \gg l$ и $\lambda \gg l$ и принимая диэлектрическую проницаемость воды равной ϵ , найти отношение мощности сигнала, принятого после отражения от воды, к мощности прямого сигнала.

170*. Показать, что если относительная магнитная проницаемость проводника отлична от единицы, то коэффициент отражения света при нормальном падении равен:

$$r = \frac{(n - K_m)^2 + \kappa^2}{(n + K_m)^2 + \kappa^2},$$

где n — показатель преломления, а κ — коэффициент затухания.

171*. Коэффициент отражения от поверхности меди при нормальном падении на нее монохроматического света, соответствующего желтой линии в спектре парообразного натрия (длина волны $\lambda = 5889,96 \text{ \AA}$), равен 0,74. Определить относительную диэлектрическую проницаемость меди, соответствующую частоте указанной линии натрия.

172*. В коаксиальном цилиндрическом кабеле пространство между жилой и оболочкой заполнено веществом с относительной диэлектрической проницаемостью $K = 5,76$ ($K_m = 1$). Не учитывая дисперсии, найти скорость распространения электромагнитных волн в кабеле.

173*. Определить частоту стоячей электромагнитной волны в бесконечной призме квадратного сечения с идеально отражающими стенками, считая электрическое поле волны постоянным вдоль всей призмы (принять $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ внутри призмы).

174*. Рассматривая тепловое равновесное излучение в кубической полости (с длиной ребра a), окруженной идеально проводящими стенками ($\lambda \rightarrow \infty$), как систему стоячих электромагнитных волн, вычислить число стоячих электромагнитных волн с частотами, содержащимися в интервале от ν до $\nu + d\nu$.

175*. Получить уравнения

$$\Delta \vec{P}_e - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{P}_e}{\partial t^2} = - \vec{P}$$

и

$$\Delta \vec{P}_m - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{P}_m}{\partial t^2} = - \vec{M}$$

для поляризационных потенциалов \vec{P}_e и \vec{P}_m , исходя из неоднородных волновых уравнений Даламбера для электромагнитных потенциалов \vec{A} и ϕ и из условия их калибровки (условия Лоренца).

176*. То же, что и в задаче 98, для волны поперечно-электрического типа H - TE .

177*. То же, что и в задаче 99, для волны H - $T_{11}E$.

178*. Определить наибольшую критическую длину волны типа H - TE , бегущей вдоль бесконечно длинного волновода прямоугольного сечения ($a = 2$ см, $b = 4$ см).

179*. Выразить фазовую скорость волны, бегущей вдоль волновода прямоугольного сечения через критическую длину волны.

§ 4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Электромагнитное поле переменного электрического диполя, находящегося в произвольной материальной среде, на больших расстояниях (или в так называемой волновой зоне) имеет вид сферической волны:

В системе СИ

$$E_{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{\alpha} = \frac{\mu \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right),$$

$$E_r = E_{\alpha} = H_r = H_{\theta} = 0, \quad (1a)$$

где $v = (\epsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$.

В абсолютной системе

$$E_{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_{\alpha} = \frac{\mu \sin \theta}{c^2 r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right),$$

$$E_r = E_{\alpha} = H_r = H_{\theta} = 0, \quad (16)$$

где $v = c (\epsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$, откуда поток электромагнитной энергии и интенсивность излучения переменного электрического дipoля оказываются равными:

В системе СИ

$$S = E_{\Theta} H_{\alpha} = \frac{1}{16\pi^2 r^2} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} \sin^2 \Theta}{\epsilon^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{3}{2}}} |\ddot{p}|^2, \quad I = \frac{\mu \sqrt{\epsilon \mu}}{6\pi} |\ddot{p}|^2. \quad (2a)$$

В абсолютной системе

$$S = \frac{c}{4\pi} E_{\Theta} H_{\alpha} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} \sin^2 \Theta}{\epsilon^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{3}{2}}} |\ddot{p}|^2, \quad I = \frac{2\mu \sqrt{\epsilon \mu}}{3c^3} |\ddot{p}|^2, \quad (2б)$$

в частности, интенсивность излучения электродипольной системы, находящейся в вакууме:

В системе СИ

В абсолютной системе

$$I = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\ddot{p}|^2, \quad I = \frac{2}{3c^3} |\ddot{p}|^2. \quad (3)$$

100. Электрический диполь с моментом \vec{p} , лежащий в плоскости XOY в начале координат, вращается вокруг оси Z с постоянной угловой скоростью ω в произвольной материальной среде. В начальный момент диполь ориентирован вдоль оси X .

Определить поле диполя в волновой зоне, т. е. на расстояниях $r \gg a$, где a — длина диполя.

Решение

Введем вектор Герца \vec{N} , при помощи которого напряженности магнитного и электрического полей осциллятора определяются по формулам:

$$\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{N}) \quad (1)$$

и

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi} \quad (2)$$

[см. задачу 98, формулы (6)]. Введем также сферическую систему координат с началом в центре диполя и полярной осью, направленной вдоль оси вращения диполя (рис. 97).

По определению, вектор Герца

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi r} \vec{p} \left(t - \frac{r}{v} \right).$$

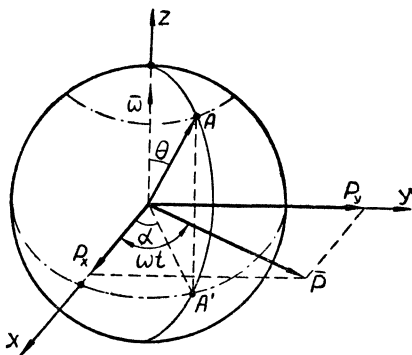


Рис. 97

В рассматриваемом случае диполь, оставаясь все время в плоскости XOY , вращается вокруг оси Z , так что вектор \vec{p} имеет компоненты:

$$p_x = p \cos \omega t, \quad p_y = p \sin \omega t, \quad p_z = 0$$

и, следовательно, вектор Герца принимает вид:

$$\vec{\Pi} = \frac{p}{4\pi} (\Phi_1 \vec{i} + \Phi_2 \vec{j}), \quad (3)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}, \quad \Phi_2 = \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \quad (3a)$$

и $k = \frac{\omega}{v} = (\epsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Приступим теперь к вычислению $\text{rot } \vec{\Pi}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\Pi} &= \frac{\rho}{4\pi} \{ \text{rot } (\varphi_1 \vec{i}) + \text{rot } (\varphi_2 \vec{j}) \} = \frac{\rho}{4\pi} \{ [\text{grad } \varphi_1, \vec{i}] + \\ &+ \varphi_1 \text{rot } \vec{i} + [\text{grad } \varphi_2, \vec{j}] + \varphi_2 \text{rot } \vec{j} \} = \\ &= \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} [\vec{r} \vec{i}] + \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} [\vec{r} \vec{j}]; \end{aligned} \quad (4)$$

при этом мы воспользовались тем, что $\rho = \text{const}$, $\text{grad } \varphi_1(r) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$ и $\text{rot } \vec{i} = \text{rot } \vec{j} = 0$ (см. формулы (30) и (22) приложения 1).

Нас интересуют составляющие вектора $\text{rot } \vec{\Pi}$ в сферических координатах, т. е. $\text{rot}_r \vec{\Pi}$, $\text{rot}_\Theta \vec{\Pi}$ и $\text{rot}_\alpha \vec{\Pi}$. Для этого, очевидно, следует найти $[\vec{r} \vec{i}]_r$, $[\vec{r} \vec{i}]_\Theta$ и т. д.

Из рисунка 97 находим:

$$\begin{aligned} i_r &= \cos \alpha \sin \Theta, \quad i_\Theta = \cos \alpha \cos \Theta, \quad i_\alpha = -\sin \alpha, \\ j_r &= \sin \alpha \sin \Theta, \quad j_\Theta = \sin \alpha \cos \Theta, \quad j_\alpha = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [\vec{r} \vec{i}] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\Theta & \vec{e}_\alpha \\ r & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \Theta & \cos \alpha \cos \Theta & -\sin \alpha \end{vmatrix} = \\ &= r \sin \alpha \vec{e}_\Theta + r \cos \alpha \cdot \cos \Theta \cdot \vec{e}_\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$[\vec{r} \vec{i}]_r = 0, \quad [\vec{r} \vec{i}]_\Theta = r \sin \alpha, \quad [\vec{r} \vec{i}]_\alpha = r \cos \alpha \cdot \cos \Theta. \quad (5)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} [\vec{r} \vec{j}] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\Theta & \vec{e}_\alpha \\ r & 0 & 0 \\ \sin \alpha \sin \Theta & \sin \alpha \cos \Theta & \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= -r \cos \alpha \cdot \vec{e}_\Theta + r \sin \alpha \cos \Theta \vec{e}_\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$[\vec{r} \vec{j}]_r = 0, \quad [\vec{r} \vec{j}]_\Theta = -r \cos \alpha, \quad [\vec{r} \vec{j}]_\alpha = r \sin \alpha \cos \Theta. \quad (6)$$

Из формул (4), (5) и (6) находим:

$$\text{rot}_r \vec{\Pi} = 0, \quad \text{rot}_\Theta \vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \rho \left(\sin \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \cos \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right),$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi} p \left(\cos \alpha \cos \Theta \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \sin \alpha \cos \Theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right).$$

Подставляя в полученные выражения

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} [\cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr)],$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} [\sin(\omega t - kr) + kr \cos(\omega t - kr)],$$

находим:

$$\operatorname{rot}_r \vec{\Pi} = 0, \quad (7a)$$

$$\operatorname{rot}_\Theta \vec{\Pi} = \frac{p}{4\pi r^2} [kr \cos(\omega t - kr - \alpha) + \sin(\omega t - kr - \alpha)], \quad (7b)$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi} = \frac{p}{4\pi r^2} [kr \sin(\omega t - kr - \alpha) - \cos(\omega t - kr - \alpha)] \cos \Theta. \quad (7b)$$

Отсюда по формуле (1) находим составляющие напряженности магнитного поля вращающегося диполя:

$$H_r = 0, \quad (8a)$$

$$H_\Theta = -\frac{p\omega}{4\pi r^2} [kr \sin(\omega t - kr - \alpha) - \cos(\omega t - kr - \alpha)], \quad (8b)$$

$$H_\alpha = \frac{p\omega \cos \Theta}{4\pi r^2} [kr \cos(\omega t - kr - \alpha) + \sin(\omega t - kr - \alpha)]. \quad (8b)$$

Несколько сложнее вычислить составляющие напряженности электрического поля. Прежде всего, пользуясь формулами (14) приложения 1, находим:

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon r \sin \Theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \cdot \operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi}) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (\operatorname{rot}_\Theta \vec{\Pi}) \right\},$$

$$E_\Theta = -\frac{1}{\varepsilon r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \Theta \cdot \operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi}),$$

$$E_\alpha = \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \operatorname{rot}_\Theta \vec{\Pi}).$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta \cdot \operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi}) &= \frac{p \cos 2\Theta}{4\pi r^2} [kr \sin(\omega t - kr - \alpha) - \\ &\quad - \cos(\omega t - kr - \alpha)], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\operatorname{rot}_\Theta \vec{\Pi}) = \frac{p}{4\pi r^2} [kr \sin(\omega t - kr - \alpha) - \cos(\omega t - kr - \alpha)],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \Theta \cdot \text{rot} \alpha \cdot \vec{\Pi}) &= -\frac{\rho k^2}{4\pi} \sin \Theta \cos \Theta \cos(\omega t - kr - \alpha) + \\ &+ \frac{\rho \sin \Theta \cos \Theta}{4\pi r^2} \cos(\omega t - kr - \alpha) - \frac{\rho k \sin \Theta \cos \Theta}{4\pi r} \sin(\omega t - kr - \alpha), \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \text{rot}_{\Theta} \vec{\Pi}) &= \frac{\rho k^2}{4\pi} \sin(\omega t - kr - \alpha) - \frac{\rho}{4\pi r^2} \sin(\omega t - kr - \alpha) - \\ &- \frac{\rho k}{4\pi r} \cos(\omega t - kr - \alpha), \end{aligned}$$

находим:

$$E_r = -\frac{\rho \sin \Theta}{2\pi \epsilon r^3} [kr \sin(\omega t - kr - \alpha) - \cos(\omega t - kr - \alpha)], \quad (9a)$$

$$E_{\Theta} = \frac{\rho \cos \Theta}{4\pi \epsilon r^3} [(k^2 r^2 - 1) \cos(\omega t - kr - \alpha) + kr \cdot \sin(\omega t - kr - \alpha)], \quad (9б)$$

$$E_{\alpha} = \frac{\rho}{4\pi \epsilon r^3} [(k^2 r^2 - 1) \sin(\omega t - kr - \alpha) - kr \cos(\omega t - kr - \alpha)]. \quad (9в)$$

В волновой зоне, т. е. на больших расстояниях от диполя, в формулах (8а, б, в) и (9 а, б, в) надо сохранить лишь члены, пропорциональные первой степени $1/r$; это приводит к следующим значениям составляющих поля вращающегося диполя в волновой зоне:

$$\begin{aligned} E_r &= 0, \quad E_{\Theta} = \frac{\mu \rho \omega^2}{4\pi r} \cos(\omega t - kr - \alpha) \cdot \cos \Theta. \\ E_{\alpha} &= \frac{\mu \rho \omega^2}{4\pi r} \sin(\omega t - kr - \alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} H_r &= 0, \quad H_{\Theta} = -\frac{\rho \omega^2 \sqrt{\epsilon \mu}}{4\pi r} \sin(\omega t - kr - \alpha), \\ H_{\alpha} &= \frac{\rho \omega^2 \sqrt{\epsilon \mu} \cos \Theta}{4\pi r} \cos(\omega t - kr - \alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

101. Определить полную среднюю интенсивность дипольного излучения вибратора Герца, дипольный момент которого изменяется со временем по закону: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$.

Р е ш е н и е

Как показывает теория [см.: А. С. Компанец. Теоретическая физика, ГИТТЛ, 1957, стр. 177, формула (19.28)], полная энергия, излучаемая системой зарядов

в единицу времени по всем направлениям (в дипольном приближении), равна:

$$\frac{dW}{dt} = I = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \ddot{\vec{p}} \right|^2.$$

В рассматриваемом случае $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos \omega t$ и, следовательно,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega^4 p_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega t.$$

Нам требуется вычислить среднюю интенсивность излучения. Для этого полученное выражение следует усреднить по периоду колебания вибратора, т. е. найти

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)} = \frac{\omega^4 p_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \overline{\cos^2 \omega t},$$

где

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)} = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2.$$

Полученное выражение показывает, что средняя интенсивность излучения вибратора прямо пропорциональна четвертой степени частоты колебаний дипольного момента вибратора.

102. Оценить, за какое время электрон, обращающийся в атоме водорода вокруг ядра по круговой орбите, упадет на ядро вследствие излучения электромагнитных волн.

Р е ш е н и е

Если W — полная энергия электрона, обращающегося по круговой орбите, а $-\frac{dW}{dt}$ — количество электромагнитной энергии, излучаемой электроном за 1 сек, то искомое время можно оценить, поделив W на $-\frac{dW}{dt}$, т. е.

$$\tau \sim \frac{W}{\left(-\frac{dW}{dt}\right)}. \quad (1)$$

Полная энергия электрона, вращающегося вокруг ядра по круговой орбите,

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ — потенциальная энергия электростатического взаимодействия электрона с ядром. На электрон со стороны поля ядра действует сила, равная $eE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. С другой стороны, указанную силу можно записать в виде: $eE = \frac{mv^2}{r}$ (центростремительная сила). Отсюда:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{и} \quad W = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (2)$$

Центростремительное ускорение электрона

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2},$$

а интенсивность его электромагнитного излучения

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \ddot{p} \right|^2 = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 m^2 c^3 r^4}. \quad (3)$$

Подстановка выражений (2) и (3) в формулу (1) дает:

$$\tau \sim \frac{12\pi^2 \epsilon_0^3 c^3 m^2 r^3}{e^4} = \frac{3}{4} \frac{r^3}{c} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m c^2}{e^2} \right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{r^3}{c r_0^2}, \quad (4)$$

где r_0 — классический радиус электрона (см. задачи 121 и 114). Нас интересует порядок τ , т. е. показатель степени n в выражении $\tau \sim 10^n$; поэтому мы отбросим в формуле (4) числовой коэффициент и подставим туда $r \sim 10^{-10}$ м, $r_0 \sim 10^{-15}$ м и $c \sim 10^8$ м/сек. Это дает:

$$t \sim 10^{-8} \text{ сек.}$$

103. Определить интенсивность электродипольного излучения системы двух заряженных частиц (с зарядами e_1 и e_2 и массами m_1 и m_2), взаимодействующих по закону Кулона.

Р е ш е н и е

Дипольный момент системы двух заряженных частиц равен:

$$\vec{p} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2, \quad (1)$$

где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 — радиусы-векторы частиц.

В механике показывается (см.: А. С. К о м п а н е е ц. Теоретическая физика, ГИТТЛ, 1957, стр. 23), что движение системы двух частиц может быть разложено на движение системы как единого целого (определяемое движением ее центра инерции) и относительное движение частиц. Действительно, введем радиус-вектор центра инерции

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

и вектор \vec{r} , соединяющий первую частицу со второй,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (3)$$

и характеризующий относительное движение частиц.

Из (2) и (3) находим:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{cases} \quad (4)$$

Движение системы зарядов как единого целого не представляет собой никакого интереса, так как оно не приводит к излучению. Действительно, система как целое движется равномерно и прямолинейно, т. е. $\ddot{\vec{R}} = 0$. Поэтому движение системы зарядов как единого целого не вносит вклада в вектор \vec{p} , а следовательно, и не вызывает излучения.

Учитывая это обстоятельство, поместим начало координат в центре инерции; тогда, полагая в формуле (4) $\vec{R} = 0$, получим:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

откуда

$$\vec{p} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

и

$$\ddot{\vec{p}} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}. \quad (5)$$

Ускорение относительного движения частиц определяется из дифференциального уравнения движения

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F},$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ и $\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}$,

откуда

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

и интенсивность излучения

$$I = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left| \ddot{\vec{p}} \right|^2 = \frac{e_1^2 e_2^2}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 r^4} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2. \quad (6)$$

104. Определить полную среднюю интенсивность дипольного излучения электрона при его эллиптическом движении относительно протона в атоме водорода.

Р е ш е н и е

Полная интенсивность дипольного излучения двух взаимодействующих по закону Кулона зарядов была найдена в предыдущей задаче. Полная средняя интенсивность

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt$$

с учетом формулы (6) предыдущей задачи может быть записана в виде:

$$\bar{I} = \frac{e_1^2 e_2^2}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^4}. \quad (1)$$

Для нахождения функции $r = r(t)$ надо решить так называемую задачу Кеплера (см.: А. С. К о м п а н е е ц, Теоретическая физика, стр. 42), т. е. задачу о движении фиктивной частицы с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в кулоновом поле притяжения $U = -\frac{\alpha}{r}$, где $\alpha = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0}$.

В математическом отношении указанная задача сводится к нахождению решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}, \\ M = \mu r^2 \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

где первое уравнение представляет собой закон сохранения энергии системы частиц, а второе — закон сохранения момента импульса частиц относительно их центра инерции.

Из второго уравнения системы (2)

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{\mu r^2} \quad \text{и} \quad dt = \frac{\mu r^2}{M} d\varphi, \quad (3)$$

а подстановка $\dot{\varphi}$ в первое уравнение системы (2) приводит к уравнению

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r},$$

откуда

$$dt = \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2\alpha\mu}{r}}}. \quad (4)$$

Приравнивая правые части уравнений (3) и (4), находим:

$$d\varphi = \frac{\frac{M}{r^2} \cdot dr}{\sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2\alpha\mu}{r}}},$$

откуда

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\frac{M}{r^2} \cdot dr}{\sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} + \frac{2\alpha\mu}{r}}}.$$

Выбирая φ_0 за начало отсчета углов, т. е. принимая $\varphi_0 = 0$, и вводя новую переменную интегрирования $x = \frac{1}{r}$, получим:

$$\varphi = - \int \frac{M dx}{\sqrt{2\mu E - M^2 x^2 + 2\alpha\mu x}} = \arccos \frac{Mx - \frac{\mu\alpha}{M}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}}},$$

откуда, возвращаясь к старой переменной r , находим:

$$\frac{M}{r} = \frac{\mu\alpha}{M} + \sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}} \cos \varphi$$

или

$$\frac{p}{r} = 1 + \beta \cos \varphi, \quad (5)$$

где

$$p = \frac{M^2}{\mu\alpha} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (6)$$

Уравнение (5) совпадает с уравнением эллипса лишь в том случае, если $\beta < 1$ (или $E < 0$). Поэтому введем обозначение: $E = -\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} > 0$.

В интеграле, стоящем в правой части (1), выгодно от интегрирования по t перейти к интегрированию по φ . Это можно сделать, воспользовавшись формулой (3). Получаем:

$$\int_0^T \frac{dt}{r^4} = \frac{\mu}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^2}.$$

Далее, воспользовавшись (5), находим:

$$\int_0^T \frac{dt}{r^4} = \pi \frac{\mu^3 e^{\frac{3}{2}} \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}}{16\pi^2 e_0^{\frac{3}{2}} M^5} \left(3 - \frac{2\mathcal{E} M^2}{\mu\alpha^2} \right). \quad (7)$$

В формуле (1) остается неизвестным только период T эллиптического движения зарядов. Его можно найти, интегрируя уравнение (4). Указанное интегрирование приводит к выражению

$$t + \text{const} = \frac{1}{2\mathcal{E}} \sqrt{2\mu\alpha r - M^2 - 2\mu\mathcal{E}r^2} - \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{\mu}{2\mathcal{E}} \right)^{\frac{3}{2}} \arcsin \frac{1 - \frac{2\mathcal{E}}{\alpha} r}{\sqrt{1 - \frac{2\mathcal{E} M^2}{\mu\alpha^2}}}. \quad (8)$$

При полном обороте электрона по орбите первое слагаемое в правой части уравнения (8) остается неизменным, а \arcsin изменяется на 2π . Поэтому

$$T = 2\pi \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{\mu}{2\mathcal{E}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

С помощью (7) и (9) полную среднюю интенсивность дипольного излучения при эллиптическом движении двух зарядов, притягивающихся по закону Кулона, можно записать:

$$\bar{I} = \frac{1}{384\pi^4 \epsilon_0^4 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \cdot \frac{\mu^{\frac{5}{2}} \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}}{M^5} \left(3 - \frac{32\pi^2 \epsilon_0^{\frac{5}{2}} \mathcal{E} M^2}{\mu e_1^2 e_2^2} \right). \quad (10)$$

Подставляя в (10)

$$e_1 = e_2 = e, \quad m_1 = m_0, \quad m_2 = 1837 m_0, \\ \mu = m_0 \left(1 + \frac{m_0}{1837 m_0} \right)^{-1} \approx m_0, \quad 1 - \frac{m_0}{m_2} \approx 1,$$

где m_0 — масса покоя электрона, находим:

$$\bar{I} = \frac{e^8 (2\mathcal{E} m_0)^{\frac{3}{2}}}{768\pi^4 \epsilon_0^4 m_0 c^3 M^5} \left[3 - \frac{32\pi^2 \epsilon_0^{\frac{5}{2}} \mathcal{E} M^2}{m_0 e^4} \right].$$

Такова полная средняя интенсивность дипольного излучения электрона при его эллиптическом движении относительно протона в атоме водорода.

105. В радиотехнике потери энергии какой-либо системой на излучение характеризуют волновым сопротивлением, определяемым из соотношения:

$$\left(\frac{dW}{dt} \right) = R_\omega \bar{I}^2,$$

где \bar{I}^2 — средний квадрат тока в системе.

Определить волновое сопротивление вибратора Герца.

Р е ш е н и е

Представим, что вибратор Герца состоит из двух заряженных шаров (с переменными зарядами e и $-e$, изменяющимися по закону $e = e_0 \sin \omega t$), находящихся на неизменном расстоянии L друг от друга. Тогда

$$\vec{p} = e \vec{L} = e_0 \vec{L} \sin \omega t = \vec{p}_0 \sin \omega t.$$

Сила тока в вибраторе

$$I = \frac{de}{dt},$$

откуда

$$I\vec{L} = \vec{L} \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{eL}) = \dot{\vec{p}} = \omega \vec{p}_0 \cos \omega t,$$
$$\overline{I^2 L^2} = p_0^2 \omega^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} p_0^2 \omega^2$$

и

$$\overline{I^2} = \frac{p_0^2 \omega^2}{2L^2}. \quad (1)$$

С другой стороны (см. задачу 101),

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)} = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \cdot \overline{I^2},$$

откуда волновое сопротивление вибратора оказывается равным:

$$R_\omega = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \text{ ом} = 20 \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \text{ ом}.$$

106. Вычислить вектор Пойнтинга и построить полярную диаграмму направленности электродипольного излучения на больших расстояниях от линейной антенны (длины l), вдоль которой распределен ток в виде косинусоидальной стоячей волны

$$I = I_0 \cos \frac{\omega Z}{c} \cdot \cos \omega t,$$

где $\frac{\omega l}{c} = \pi$.

Р е ш е н и е

В волновой зоне электромагнитное поле точечного электрического диполя имеет вид сферической волны:

$$E_\Theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\Phi = \frac{\mu_0 \sin \Theta}{4\pi r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c}\right),$$
$$E_r = E_\Phi = H_r = H_\Theta = 0. \quad (1)$$

Разобьем линейную антенну на элементарные квази-точечные диполи с длиной dZ (рис. 98). Каждый такой ди-

поль создает на большом расстоянии от антенны поле с компонентами

$$dE_{\theta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} dH_{\varphi} = \frac{\mu_0 \sin \theta_i}{4\pi r_i} \Delta \ddot{p} \left(t - \frac{r_i}{c} \right), \quad (2)$$

где Δp — величина дипольного момента отдельного квазиточечного элементарного диполя. Величину $\Delta \dot{p}$ можно найти следующим образом: как было показано в предыдущей задаче,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta p) = \Delta \dot{p} = IdZ,$$

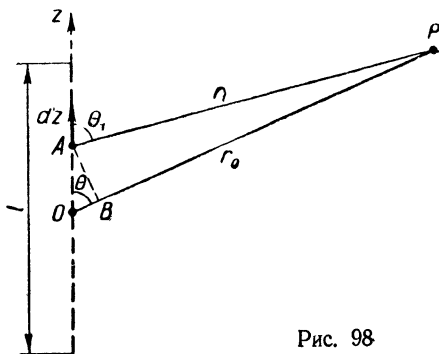


Рис. 98

откуда

$$\Delta \dot{p} \left(t - \frac{r_i}{c} \right) = I_0 \cos \frac{\omega Z}{c} \cos \omega \left(t - \frac{r_i}{c} \right) dZ$$

и

$$\Delta \ddot{p} \left(t - \frac{r_i}{c} \right) = -\omega I_0 \cos \frac{\omega Z}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r_i}{c} \right) dZ. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (2) и интегрируя его, находим:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{\varphi} = -\frac{\mu_0 \omega I_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\sin \theta_i}{r_i} \cos \frac{\omega Z}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r_i}{c} \right) \cdot dZ = \\ &= \frac{l \mu_0 \omega I_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\sin \theta_i}{r_i} \cos \frac{\omega Z}{c} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{r_i}{c} \right)} dZ. \quad (4) \end{aligned}$$

Так как наблюдение ведется на больших расстояниях от антенны, отношения $\frac{\sin \Theta_i}{r_i}$ для различных квазиточечных диполей можно считать приблизительно одинаковыми и равными

$$\frac{\sin \Theta_i}{r_i} \approx \frac{\sin \Theta}{r_0}. \quad (5)$$

Далее опустим из точки A перпендикуляр на прямую OP и будем приближенно считать, что $BP \approx r_i$; тогда

$$r_0 = OB + BP = Z \cos \Theta + r_i,$$

откуда

$$r_i = r_0 - Z \cos \Theta. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в формулу (4), получим:

$$E_{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{\varphi} = \frac{i\mu_0\omega I_0}{4\pi r_0} \sin \Theta e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \frac{\omega Z}{c} \cdot e^{i\frac{\omega Z}{c} \cos \Theta} dZ$$

или

$$E_{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{\varphi} = \frac{\mu_0\omega I_0}{4\pi r_0} \sin \Theta \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)} \{iK_1 - K_2\}, \quad (7)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \frac{\omega Z}{c} \cos \left[Z \frac{\omega}{c} \cos \Theta \right] dZ, \\ K_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \frac{\omega Z}{c} \sin \left[Z \cdot \frac{\omega}{c} \cos \Theta \right] dZ. \end{array} \right. \quad (8)$$

Интегралы (8) легко вычисляются и оказываются равными:

$$K_1 = \frac{2c}{\omega} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \Theta\right)}{\sin^2 \Theta}, \quad K_2 = 0. \quad (9)$$

Подстановка (9) в выражение (7) дает:

$$E_{\theta} = H_{\varphi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cdot \sin \omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right),$$

откуда для абсолютной величины вектора Пойнтинга получаем выражение:

$$S = E_{\theta} H_{\varphi} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi^2 r_0^2} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right),$$

а среднее значение потока энергии

$$S_{\text{средн}} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r_0^2} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}. \quad (10)$$

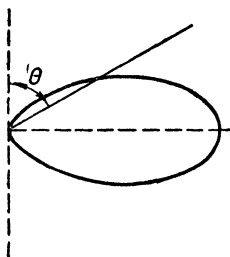


Рис. 99

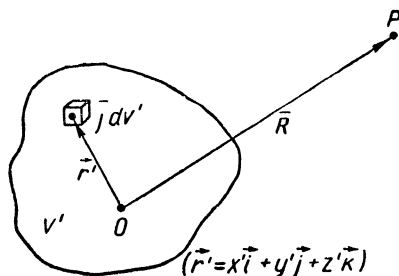


Рис. 100

На рисунке 99 представлена полярная диаграмма направленности антенны (на каждом луче, исходящем из середины антенны, откладывается соответствующее углу θ значение среднего потока энергии $S_{\text{средн}}$ в единицах $\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r_0^2}$).

Задачи для самостоятельного решения

180*. Доказать, что запаздывающие потенциалы

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x', y', z', t') dV'}{|\vec{R} - \vec{r}'|}, \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t') dV'}{|\vec{R} - \vec{r}'|},$$

где

$$t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}'|}{v},$$

а смысл векторов \vec{R} и \vec{r}' виден из рисунка 100, удовлетворяют условию калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

181*. Показать, исходя лишь из требования выполнения закона сохранения энергии, что для любой излучающей системы напряженности электрического и магнитного поля в волновой зоне обратно пропорциональны расстоянию от точки наблюдения до центра системы.

182*. Написать составляющие электромагнитного поля вибратора Герца в волновой зоне в декартовых координатах, выбрав за ось Z направление вектора $\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)$.

183*. В некоторый момент времени на оси кольцевого заряда Q (радиуса a) на расстоянии h от его центра помещают электрон. Предоставленный затем самому себе электрон совершает колебания вдоль указанной оси. Найти среднюю за период колебания интенсивность дипольного излучения электрона. Затуханием колебаний вследствие излучения пренебречь.

184*. Во сколько раз средняя интенсивность излучения вращающегося диполя, описанного в задаче 100, больше интенсивности излучения вибратора Герца и почему? Как это можно наглядно объяснить?

185*. Определить полную интенсивность дипольного излучения электрона, движущегося по окружности в постоянном и однородном магнитном поле B_0 с постоянной скоростью v_0 .

186*. Трубка Кулиджа работает при разности потенциалов в 50 кв. Электроны, ударяющиеся о серебряный антикатод с максимальной кинетической энергией, полностью тормозятся в слое $l = 10^{-7}$ м серебра. Предположив, что ускорение электрона при торможении постоянно, подсчитайте количество электромагнитной энергии, излучаемой отдельным электроном за 1 сек. Как долго продолжается процесс излучения электроном электромагнитных волн?

187*. Выразить среднюю интенсивность дипольного излучения упруго связанного электрона как функцию его полной энергии E .

188*. Каково волновое сопротивление вращающегося электрического диполя, рассматриваемого в задаче 100?

189*. Частица с зарядом e и массой m пролетает со скоростью v на расстоянии ρ (рис. 101) мимо другой, значительно более тяжелой заряженной частицы с зарядом e_1 , которая при этом остается неподвижной. Пренебрегая искривлением траектории легкой частицы, вычислить теряемую ею на излучение энергию.

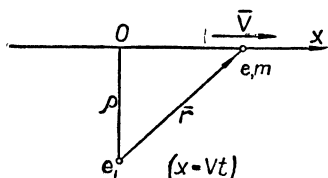


Рис. 101



Рис. 102

190*. Показать, что в волновой зоне поле переменного магнитного диполя с моментом \vec{m} отличается от поля переменного электрического диполя с моментом \vec{p} заменой E_Θ на $-E_\alpha$; H_α на H_Θ и ρ на $\sqrt{\epsilon\mu} r$, т. е. в волновой зоне магнитного диполя

$$E_r = E_\Theta = H_r = H_\alpha = 0,$$

$$E_\alpha = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\Theta = -\frac{\mu \sqrt{\epsilon\mu} \sin \Theta}{4\pi r} \ddot{m} \left(t - \frac{r}{v} \right).$$

Показать также, что интенсивность магнитнодипольного излучения

$$I = \frac{\mu(\epsilon\mu)^{\frac{3}{2}}}{6\pi} \left| \ddot{m} \right|^2.$$

191*. Средняя интенсивность магнитнодипольного излучения рамочной антенны равна 256 *вт*. Найти длину волны, излучаемой антенной, если известно, что по ней

циркулирует синусоидальный переменный ток, максимальная величина которого достигает 10 а , а площадь антенны равна 90 м^2 .

192*. Объяснить, почему столкновение двух заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе и взаимодействующих по закону Кулона не вызывает ни электродипольного, ни магнитнодипольного излучения?

193*. Указать зависимость интенсивности электродипольного и магнитнодипольного излучений системы зарядов, погруженной в однородную изотропную среду, от относительных проницаемостей K и K_m среды.

194*. То же, что и в задаче 106, для тока, распределенного вдоль антенны в виде синусоидальной стоячей волны

$$I = I_0 \sin \frac{\omega Z}{c} \cos \omega t,$$

где $\frac{\omega l}{c} = 2\pi$. Построить, выбрав соответствующий масштаб, диаграмму направленности излучения антенны (рис. 102).

Г Л А В А IV

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

§ 1. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

107. Электрон влетает в однородное магнитное поле B со скоростью v , направление которой образует угол α с направлением линий поля. Показать, что время, в течение которого электрон описывает один виток винтовой траектории, не зависит ни от скорости v , ни от угла α .

Р е ш е н и е

Введем декартову систему координат с осью Z , направленной вдоль поля \vec{B} . Тогда $B_x = B_y = 0$ и $B_z = B$, а уравнение движения электрона в магнитном поле

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e [\vec{v} \vec{B}]$$

можно будет представить в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\begin{cases} m \dot{v}_x = ev_y B, \\ m \dot{v}_y = -ev_x B, \\ m \dot{v}_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Умножая первое из этих уравнений на v_x , второе — на v_y и складывая почленно полученные в результате умножения уравнения, имеем:

$$m(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y) = 0,$$

откуда

$$v_x^2 + v_y^2 = C_1 = v_1^2. \quad (2)$$

Выражение (2) показывает, что проекция электрона на плоскость XOY движется по окружности с постоянной скоростью $v_1 = v \sin \alpha$. Радиус указанной окружности

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}.$$

Третье уравнение системы (1) дает:

$$v_z = C_2 = v_{II}, \quad (3)$$

где $v_{II} = v \cos \alpha$ — проекция скорости электрона на направление поля.

Таким образом, электрон одновременно участвует в двух движениях: равномерном вращательном движении по окружности радиуса R со скоростью v_1 и в равномерном поступательном движении вдоль оси z со скоростью v_{II} ; электрон, следовательно, описывает винтовую линию.

Введем угол φ , характеризующий поворот электрона относительно оси z . Нетрудно видеть, что

$$\varphi = \omega t = \frac{v \sin \alpha}{R} t,$$

откуда время, в течение которого электрон описывает один виток винтовой линии,

$$\tau = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Оно действительно не зависит ни от скорости электрона v , ни от угла α , образуемого вектором скорости с направлением магнитного поля.

108. С катода плоского магнетрона (рис. 103) вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Определить: а) траекторию электрона; б) критическое значение напряженности магнитного поля, при котором траектории электронов касаются поверхности анода, а ток через магнетрон становится равным нулю.

Р е ш е н и е

Движение отдельного электрона в плоском магнетроне, изображенном на рисунке 103, определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{z} = 0; \quad \ddot{x} = \omega \dot{y}; \quad \ddot{y} = \frac{eE}{m} - \omega \dot{x}, \quad (1)$$

где введено обозначение

$$\omega = \frac{eB}{m} = \frac{e\mu_0 H}{m}.$$

Уравнения (1) должны быть проинтегрированы при следующих начальных условиях: при $t = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$.

Очевидно, прежде всего, что $z \equiv 0$. Второе уравнение системы (1) $\ddot{x} = \omega \dot{y}$ продифференцируем еще один раз по времени t и в полученное уравнение подставим \dot{y} из треть-

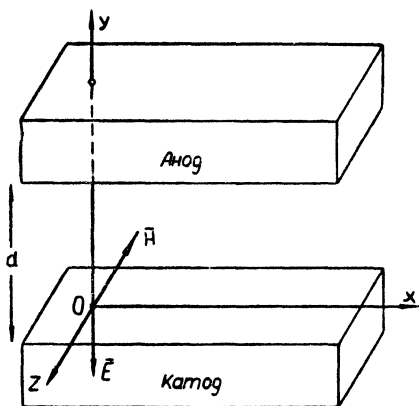


Рис. 103

его уравнения; в результате для определения x находим уравнение:

$$\ddot{\ddot{x}} + \omega^2 \dot{x} = \frac{eE\omega}{m},$$

откуда

$$x = A_1 + A_2 e^{i\omega t} + A_3 e^{-i\omega t} + \frac{E}{B} t$$

и

$$y = iA_2 e^{i\omega t} - iA_3 e^{-i\omega t} + A_4.$$

Начальные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0, & i\omega(A_2 - A_3) + \frac{E}{B} &= 0, \\ i(A_2 - A_3) + A_4 &= 0, & \omega(A_2 + A_3) &= 0. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{cases} x = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t), \\ y = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t). \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Уравнения (2) и (3) — это параметрические уравнения циклоиды — кривой, описываемой какой-либо точкой окружности радиуса $\frac{E}{\omega B}$, катящейся без скольжения вдоль горизонтальной прямой (оси X). Циклоида касается анода, если

$$\frac{2E}{\omega_k B_k} = d, \quad (4)$$

где d — расстояние между катодом и анодом. Подставляя в выражение (4),

$$\omega_k = \frac{eB_k}{m} \text{ и } E = \frac{U}{d},$$

где U — разность потенциалов на катоде и аноде магнетрона, получим:

$$H_k = \frac{1}{\mu_0 d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}. \quad (5)$$

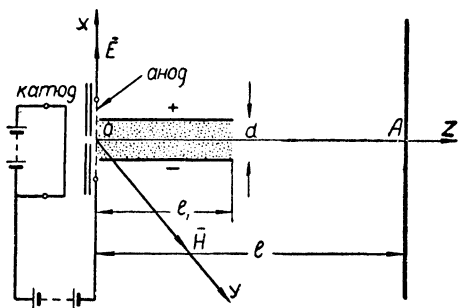


Рис. 104

Таково критическое значение напряженности магнитного поля, при котором прекращается прохождение тока через магнетрон.

109. В балансном методе определения отношения заряда электрона к его массе, схема которого указана на рисунке 104, между пластинами конденсатора прикладывалось напряжение в 2800 в, а напряженность однородного магнитного поля равнялась 652,53 а/м. При включении одного только магнитного поля отклонение электронного пучка на флуоресцирующем экране равнялось 2,4 см.

Определить отношение $\frac{e}{m}$, если известно, что в катодной трубке расстояние от анода до экрана $l = 33$ см, длина пластин конденсатора $l_1 = 7,8$ см, расстояние между пластинами $d = 2,4$ см. Пластины конденсатора примыкают непосредственно к аноду.

Р е ш е н и е

В балансном методе определения отношения заряда электрона к его массе оба поля — и электрическое и магнитное — вызывают отклонения электрона вдоль оси X : электрическое поле отклоняет частицу вверх, а магнитное — вниз. Путем подбора специального режима работы катодной трубки добиваются, чтобы при одновременно включенных полях пучок электронов не испытывал отклонения, а попадал в точку A на экране. Поэтому прежде всего, очевидно, следует выяснить, при каком условии отклонения электронного пучка электрическим и магнитным полями будут взаимно компенсировать друг друга.

С этой целью исследуем движение отдельного электрона пучка в одновременно включенных электрическом и магнитном полях. Дифференциальные уравнения движения электрона, очевидно, имеют в этом случае вид:

$$m\ddot{r} = e\vec{E} + e\mu_0 [\dot{v}\vec{H}]$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_L E}{\mu_0 H} - \omega_L \dot{z}, & (1) \\ \ddot{y} = 0, & (2) \\ \ddot{z} = \omega_L \cdot x, & (3) \end{cases}$$

где $\omega_L = \frac{e\mu_0 H}{m}$ — удвоенная частота Лармора (см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 68). Уравнения

(1)–(3) должны быть проинтегрированы при начальных условиях: при $t = 0$, $x = y = z = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ и $\dot{z} = v_0$.

Решение уравнения (2) при указанных начальных условиях имеет вид: $y \equiv 0$; движение электрона происходит в координатной плоскости XOZ . Далее поступаем следующим образом: продифференцируем (1) еще раз по времени t и в полученное уравнение подставим \ddot{z} из уравнения (3). Тем самым мы приходим к уравнению:

$$\ddot{x} + \omega_L^2 \dot{x} = 0,$$

решение которого записывается в виде:

$$x = C_1 + a \cos(\omega_L t + \alpha). \quad (4)$$

Дифференцируя выражение (4) два раза по времени t и подставляя найденное \ddot{x} в уравнение (1), получаем следующее уравнение для определения z :

$$\dot{z} = \frac{E}{\mu_0 H} + a \omega_L \cos(\omega_L t + \alpha).$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$z = \frac{Et}{\mu_0 H} + a \sin(\omega_L t + \alpha) + C_2. \quad (5)$$

Используя указанные выше начальные условия, находим:

$$\alpha = 0, \quad a = -C_1 = \frac{1}{\omega_L} \left(v_0 - \frac{E}{\mu_0 H} \right), \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, окончательно выражения (4) и (5) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\omega_L} \left(v_0 - \frac{E}{\mu_0 H} \right) (\cos \omega_L t - 1), \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{Et}{\mu_0 H} + \frac{1}{\omega_L} \left(v_0 - \frac{E}{\mu_0 H} \right) \sin \omega_L t. \end{array} \right. \quad (5a)$$

Для того чтобы электрон не отклонялся полями и попадал в точку A на экране, необходимо, чтобы во все время движения его координата x равнялась нулю. Последнее возможно лишь в том случае, если в уравнении (4a)

$$v_0 = \frac{E}{\mu_0 H},$$

или так как $E = \frac{U}{d}$, где U — разность потенциалов на обкладках конденсатора,

$$v_0 = \frac{U}{\mu_0 H d}. \quad (6)$$

Такая скорость электронов пучка в момент их вступления в зону действия полей достигается наложением между катодом и анодом разности потенциалов φ , определяемой соотношением

$$\frac{mv_0^2}{2} = e\varphi.$$

После того как режим работы катодной трубки, определяемый условием (6), установлен, электрическое поле выключается и остается лишь магнитное поле. Измеряя наблюдаемое при этом отклонение электронного пучка вдоль оси X , можно определить частоту ω_L , а затем и отношение $\frac{e}{m}$.

Уравнения движения электрона в однородном магнитном поле, параллельном оси Y , имеют вид:

$$\ddot{x} = -\omega_L \dot{z}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = \omega_L \dot{x}$$

[начальные условия — те же, что и для системы уравнений (1) — (3)]. В результате интегрирования, аналогичного интегрированию, проведенному в первой части задачи, находим:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_L} (\cos \omega_L t - 1), \\ z = \frac{v_0}{\omega_L} \sin \omega_L t. \end{cases}$$

Далее находим момент времени, когда электрон выходит из зоны действия магнитного поля; для этого, очевидно, мы должны положить $z = l_1$. Указанный момент времени

$$t_1 = \frac{1}{\omega_L} \arcsin \frac{l_1 \omega_L}{v_0}.$$

Определяем далее координаты точки выхода электрона из зоны действия магнитного поля (точка B на рис. 105) и составляющие его скорости в этой точке

$$\begin{cases} x_B = \frac{1}{\omega_L} \left(\sqrt{v_0^2 - l_1^2 \omega_L^2} - v_0 \right), & z_B = l_1, \\ \dot{x}_B = -l_1 \omega_L, & \dot{z}_B = \sqrt{v_0^2 - l_1^2 \omega_L^2}. \end{cases} \quad (7)$$

В формулах (7), однако, $v_0 \gg l_1 \omega_L$ и поэтому можно записать приближенные значения x_B и \dot{z}_B , незначительно отличающиеся от точных значений (7):

$$x_B = -\frac{l_1^2 \omega_L}{2v_0} \quad \text{и} \quad \dot{z}_B = v_0. \quad (7a)$$

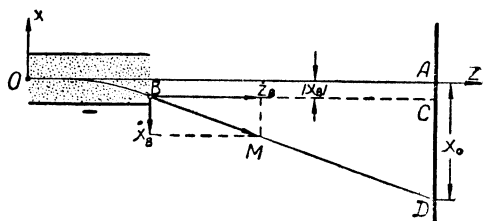


Рис. 105

После выхода из зоны действия магнитного поля электрон продолжает двигаться по инерции вдоль прямой BD . Из рисунка 105 видно, что $BK = v_0$, $KM = l_1 \omega_L$, $BC = l - l_1$ и $CD = x_0 - |x_B|$, где x_0 — смещение электронного пучка, указанное в условии задачи. В подобных треугольниках BKM и BKD :

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{KM}$$

или

$$(l - l_1) : \left(x_0 - \frac{l_1^2 \omega_L}{2v_0} \right) = \frac{v_0}{l_1 \omega_L},$$

откуда

$$\omega_L = \frac{2x_0 v_0}{l_1 (2l - l_1)}$$

и

$$\frac{e}{m} = \frac{2x_0 U}{\mu_0^2 H^2 d l_1 (2l - l_1)} = 1,8347 \cdot 10^{11} \text{ к/кг},$$

что примерно на 4% больше значения $1,7592 \cdot 10^{11}$, получаемого с помощью более совершенных методов.

110. В цилиндрический конденсатор (рис. 106) впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с массой m , зарядом e и скоростью, составляющей небольшой угол с касательной к центральной окружности AB радиуса r_0 . Показать, что пучок снова будет сфокусирован в точке B , радиус-вектор которой составляет с радиусом-вектором OA угол $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

откуда находим уравнения движения иона:

Решение

Функцию Лагранжа для отдельного иона можно записать в виде:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - e\psi(r),$$

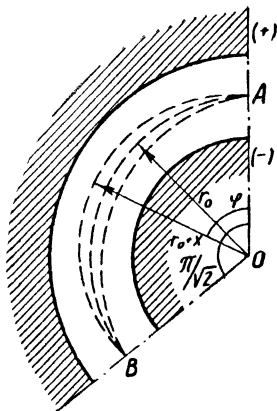


Рис. 106

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -e \frac{d\psi}{dr}, \quad mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

или

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{eE_0 r_0}{mr}, \quad (1)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = r_0^2 \omega_0, \quad (2)$$

так как

$$-\frac{d\psi}{dr} = E(r), \quad E(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{E_0 r_0}{r},$$

где $E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_0}$ и ω_0 — частота, определяемая так, чтобы в начальный момент времени

$$eE_0 = mr_0 \omega_0^2, \quad (3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{eE_0}{mr_0}}. \quad (4)$$

Введем параметр

$$x = r - r_0, \quad r = r_0 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right), \quad (5)$$

характеризующий отклонение траектории рассматриваемого иона от окружности AB , вдоль которой движется ион, имеющий начальную скорость, совпадающую по направлению с касательной к окружности AB . Подставляя в уравнение (1) $\dot{\varphi}$ из уравнения (2) и заменяя r через x по формуле (5), получим:

$$\ddot{x} - r_0 \omega_0^2 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-3} = -\frac{eE_0}{m} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-}$$

или с точностью до членов первого порядка по $\frac{x}{r_0}$

$$\ddot{x} - r_0 \omega_0^2 + 3\omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} + \frac{eE_0}{mr_0} x,$$

откуда, учитывая (3), окончательно находим:

$$\ddot{x} + 2\omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию: $x = 0$ при $t = 0$, имеет вид:

$$x = x_0 \sin \omega_0 \sqrt{2} t. \quad (7)$$

Параметр x обращается в нуль (не считая начального момента времени $t = 0$) при $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{2}}$, откуда иско-
мый угол

$$\varphi = \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ 17'. \quad (8)$$

111. Длинный цилиндрический катод (радиуса a), по которому течет постоянный ток I , испускает электроны с ничтожно малой начальной скоростью. Под действием разности потенциалов V эти электроны приобретают ускорение по направлению к коаксиальному с катодом, цилиндрическому аноду радиуса b . Пренебрегая зависимостью массы электрона от скорости, определить то напряжение, при котором электроны перестают попадать на анод.

Р е ш е н и е

Функция Лагранжа для электрона, движущегося в электромагнитном поле, имеет вид (см. задачу 202*):

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + e\varphi - eA\vec{v}.$$

Вводя систему цилиндрических координат r, θ, z с осью z , направленной вдоль оси катода, и имея в виду, что в пространстве между катодом и анодом

$$\varphi = N \cdot \ln r + \varphi_0; \quad N = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \quad (1)$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + A_0 \quad (2)$$

(см. задачу 70), получим:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + eN \ln r + e\varphi_0 + \frac{e\mu_0 I}{2\pi} \dot{z} \ln r - eA_0 \dot{z}$$

или, отбрасывая несущественные для функции Лагранжа члены $e\varphi_0$ и $-eA_0 \dot{z}$ (см.: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика, § 3):

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mu_0 I}{2\pi} \dot{z} \ln r + eN \ln r. \quad (3)$$

Как показывает функция Лагранжа (3), для движущегося между катодом и анодом электрона имеют место следующие законы сохранения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = C_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} + \frac{e\mu_0 I}{2\pi} \ln r = C_2, \quad (5)$$

$$E = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - eN \ln r, \quad (6)$$

где постоянные C_1, C_2 и E должны быть определены из начальных условий: $v_0 = 0, \dot{r}_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{z}_0 = 0$ при $r = a$. Нетрудно видеть, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{e\mu_0 I}{2\pi} \ln a, \quad E = -eN \cdot \ln a,$$

после чего уравнения (4) — (6) принимают вид:

$$\dot{\theta} = 0, \quad (4a)$$

$$\dot{z} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m} \ln \frac{r}{a}, \quad (5a)$$

$$-eN \ln a = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{e^2 \mu_0^2 I^2}{8\pi^2 m} \left(\ln \frac{r}{a} \right)^2 - eN \ln r. \quad (6a)$$

Уравнение (4а) показывает, что во все время движения составляющая вектора скорости электрона $v_\varphi = r \dot{\Theta} \equiv 0$, и поэтому его траектория оказывается полностью лежащей в плоскости, проходящей через ось катода (см. рис. 107). Из рисунка 107 следует также, что условием, при котором электроны перестают попадать на анод, является требование, чтобы $\dot{r} = 0$ при $r = b$. Отсюда, подставляя в (6а)

$r = b$ и $\dot{r} = 0$, находим искомую разность потенциалов:

$$V = \frac{e\mu_0^2 I^2}{8\pi^2 m} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \quad (7)$$

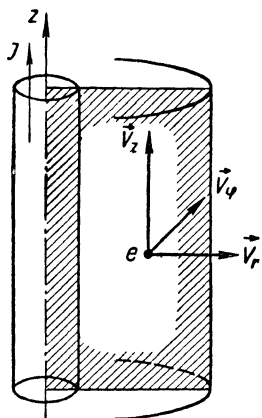


Рис. 107

112. Показать, что условием стабильности круговой электронной орбиты в бетатроне является равенство в любой момент времени напряженности магнитного поля на орбите половине средней (по площади всей орбиты) напряженности.

Р е ш е н и е

Величина импульса электрона, обращающегося в бетатроне по круговой орбите, определяется из удвоенной ларморовой частоты для свободного электрона, т. е.

$$\omega_L = \frac{e\mu H}{m}; \quad \omega_L = \frac{v}{R},$$

откуда

$$P = mv = e\mu HR, \quad (1)$$

где H — величина напряженности магнитного поля на орбите в произвольный момент времени t .

Изменение импульса со временем определяется уравнением

$$\frac{dP}{dt} = -eE \quad (2)$$

(силу Лоренца в правую часть уравнения (2) писать не следует, так как она не может изменить абсолютную величину импульса электрона).

Величину напряженности электрического поля на орбите E можно вычислить из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint \vec{E} d\vec{L} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как в бетатроне магнитное поле обладает осевой симметрией, поэтому силовые линии вихревого электрического поля являются окружностями с центрами, лежащими на оси магнитного поля. Одна из силовых линий электрического поля с радиусом R и есть орбита электрона. Очевидно также, что напряженность электрического поля во всех точках орбиты одинакова и, кроме того, $\vec{E} \parallel d\vec{L}$. Отсюда

$$\oint \vec{E} d\vec{L} = 2\pi RE$$

и

$$E = - \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (2), получаем:

$$dP = \frac{e}{2\pi R} d\Phi.$$

Интегрируя это уравнение при $R = \text{const}$ от момента времени $t_0 = 0$ до некоторого произвольного момента t , получим:

$$P - P_0 = \frac{e}{2\pi R} (\Phi - \Phi_0). \quad (4)$$

Легко видеть, что Φ и Φ_0 можно записать в виде:

$$\Phi = \mu\pi R^2 \cdot (H)_{\text{средн}} \text{ и } \Phi_0 = \mu\pi R^2 (H_0)_{\text{средн}},$$

где $(H)_{\text{средн}}$ — среднее значение напряженности магнитного поля, вычисляемое для всей площади орбиты в произвольный момент времени t , а $(H_0)_{\text{средн}}$ — среднее значение напряженности в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ положить

$$P_0 = \frac{e}{2\pi R} \Phi_0 = \frac{1}{2} e\mu R (H_0)_{\text{средн}}, \quad (5)$$

то из формулы (4) следует:

$$P = \frac{1}{2} e_{\gamma} R (H)_{\text{средн.}} \quad (6)$$

Сравнивая выражения (1) и (6), находим:

$$H = \frac{1}{2} (H)_{\text{средн.}} \quad (7)$$

Это и есть искомое условие стабильности электронной орбиты. Легко видеть, что выбор начального условия (5) подчиняется условию стабильности орбиты (7), т. е. что и при $t_0 = 0$

$$H_0 = \frac{1}{2} (H_0)_{\text{средн.}}$$

113. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле при наличии в нем различных возмущений (таких, как электрическое или гравитационное поле, небольшая пространственная неоднородность самого магнитного поля или его медленное изменение во времени) может быть представлено как вращение частицы вокруг некоторой движущейся точки. Мгновенный центр вращения принято называть ведущим центром, а движение ведущего центра в направлении, перпендикулярном к магнитному полю \vec{B} , называют дрейфом частицы.

Определить скорость дрейфа частицы с зарядом e в однородном магнитном поле \vec{B} при наличии перпендикулярного к нему постоянного электрического поля \vec{E} . Каким по величине должно быть E , чтобы скорость дрейфа частицы в магнитном поле $B = 0,1$ тл не превышала скорости света?

Р е ш е н и е

Векторное уравнение движения заряженной частицы имеет вид:

а) относительно неподвижной системы отсчета

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e \left[\vec{v} \vec{B} \right]; \quad (1)$$

б) относительно подвижной системы отсчета, связанной с ведущим центром

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = e [\vec{v}' \vec{B}]. \quad (2)$$

При написании уравнения (2) учтено, что на движение частицы относительно ведущего центра действие электрического поля не сказывается.

Представляя скорость \vec{v} частицы относительно неподвижной системы отсчета в виде:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\text{дрейфа}}, \quad (3)$$

где $\vec{v}_{\text{дрейфа}}$ — постоянная скорость дрейфа частицы, и подставляя (3) в (1), получаем:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = e\vec{E} + e [\vec{v}' \vec{B}] + e [\vec{v}_{\text{дрейфа}}, \vec{B}],$$

откуда

$$\vec{E} = - [\vec{v}_{\text{дрейфа}}, \vec{B}]. \quad (4)$$

Умножая (4) векторно на \vec{B} , получаем:

$$[\vec{B} \vec{E}] + [\vec{B} [\vec{v}_{\text{дрейфа}}, \vec{B}]] = 0$$

или, раскрыв двойное векторное произведение,

$$- [\vec{E} \vec{B}] + B^2 \vec{v}_{\text{дрейфа}} - \vec{B} (\vec{B} \vec{v}_{\text{дрейфа}}) = 0;$$

откуда, учитывая, что $\vec{B} \vec{v}_{\text{дрейфа}} = 0$ (дрейф частицы направлен вдоль поля \vec{E} , перпендикулярного полю \vec{B}), находим скорость дрейфа

$$\vec{v}_{\text{дрейфа}} = \frac{[\vec{E} \vec{B}]}{B^2}$$

или

$$v_{\text{дрейфа}} = \frac{E}{B}. \quad (5)$$

Для того чтобы при движении частицы в магнитном поле $B = 0,1$ тл скорость дрейфа не превышала скорости света, необходимо, чтобы

$$E \leq 3 \cdot 10^7 \text{ в/м.}$$

114. Какую работу следует затратить на то, чтобы покоящийся вначале электрон разогнать до скорости $v =$

$= 10^6$ м/сек. Электрон рассматривать как шарик радиуса $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м, по поверхности которого равномерно распределен заряд e .

Р е ш е н и е

Если покоящийся вначале электрон разогнать до скорости v (малой по сравнению со скоростью света), то затраченная работа внешней силы пойдет не только на увеличение кинетической энергии электрона от 0 до mv^2 , но и на создание магнитного поля, обладающего энергией W , т. е.

$$A = \frac{1}{2} mv^2 + W. \quad (1)$$

Чтобы вычислить энергию магнитного поля, надо прежде всего определить величину напряженности H магнитного поля, возбуждаемого движущимся электроном (при этом мы будем иметь в виду, что скорость электрона $v \ll c$).

Рассмотрим отрезок прямого провода длиной dl с током I . Согласно закону Био и Савара, этот отрезок возбуждает в некоторой точке, удаленной на расстояние r , магнитное поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \Theta.$$

Выразим силу тока через плотность тока j и сечение провода S . Тогда $I dl = j S dl = j dV$. Известно также, что $j = nev$ и, следовательно, $I dl = ev \cdot ndV$, или, обозначая $ndV = dN$ — число носителей тока в элементе длины провода, $I dl = ev \cdot dN$. Напряженность магнитного поля, возбуждаемого отрезком провода, будет равна:

$$dH = dN \cdot \frac{ev}{4\pi r^2} \sin \Theta,$$

откуда напряженность магнитного поля движущегося электрона

$$H_e = \frac{ev}{4\pi r^2} \sin \Theta,$$

где Θ — угол между \vec{r} и \vec{v} , а \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из центра электрона-шарика в точку наблюдения (см. рис. 108).

Энергия магнитного поля движущегося электрона

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int H_e^2 dV.$$

Вводя сферическую систему координат r , Θ , φ с началом в центре движущегося электрона, записывая элемент объема в виде:

$$dV = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi dr$$

и интегрируя по Θ и φ в обычных пределах и по r в пределах от r_0 до ∞ (внутри движущегося заряженного шарика магнитное поле отсутствует), найдем:

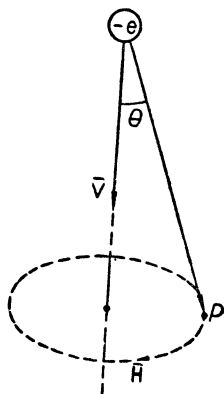


Рис. 108

$$W = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{32\pi^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi r_0}.$$

Таким образом, работа, произведенная внешними силами в процессе разгонки электрона,

$$A = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi r_0}. \quad (2)$$

Подставляя сюда числовые данные, находим:

$$A = 3,093 \cdot 10^{-19} \text{ дж} = 1,93 \text{ эв},$$

где 1 эв — энергия, приобретаемая электроном под действием ускоряющего потенциала в 1 в (единица энергии, которой обычно пользуются в атомной и ядерной физике).

Представим уравнение (2) в виде:

$$A = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi r_0} \right).$$

Полученное выражение показывает, что по сравнению с покоящимся электроном масса движущегося электрона увеличивается на величину

$$\Delta m = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi r_0}.$$

Задачи для самостоятельного решения

195*. Определить траекторию частицы (с массой m и зарядом e), движущейся в переменном однородном электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$, если в начальный момент $t=0$ скорость частицы $v = v_0$, а направление ее движения перпендикулярно силовым линиям поля (скорость частицы мала по сравнению со скоростью света c).

196*. Электрон, испущенный нитью накала, ускоряется по направлению к аноду разностью потенциалов в 300 в, приложенной между нитью и анодом. Определить кинетическую энергию и скорость электрона в тот момент, когда он достигает анода.

197*. Электрон влетает со скоростью v_0 в однородное магнитное поле B_0 и движется перпендикулярно силовым линиям поля. Найти радиус кривизны траектории электрона и магнитный момент создаваемого им тока.

198*. Однократно заряженные ионы лития с атомными весами 6 и 7 испускаются подогретым анодом и ускоряются разностью потенциалов в 400 в, приложенной между анодом и катодом. Затем через отверстие в катоде они попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к их скорости. Определить радиусы траекторий этих ионов, если индукция магнитного поля равна 0,08 тл.

199*. В трубке (см. задачу 109) при использовании только магнитного отклонения ускоряющий потенциал между анодом и катодом равнялся 32 500 в, а магнитное поле в $5,6 \cdot 10^{-4}$ тл вызывало смещение электронного пучка на 2,1 см. Определить удельный заряд электрона.

200*. Объяснить, почему нельзя определить отношение $\frac{e}{m}$, исследуя отклонение заряженной частицы в двух скрещенных электрических или магнитных полях?

201*. Определить удельный заряд электрона из критического значения напряженности однородного магнитного поля в цилиндрическом магнетроне. Магнитное поле в таком магнетроне параллельно его оси, а размеры магнетрона указаны на рисунке 109.

202*. Проверить справедливость представления функции Лагранжа для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, в виде:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + e\vec{A} \vec{v},$$

где φ и \vec{A} — электромагнитные потенциалы.

203*. Написать функцию Гамильтона для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле.

204*. При измерении масс на масс-спектрографе Астона по методу совпадений было замечено, что при неизменном магнитном поле однозарядные ионы азота ${}^7\text{N}^{12+}$ и однозарядные ионы неизвестной массы фокусируются в одной точке при напряжениях на обкладках конденсатора 210 и 120 в соответственно. Найти массовое число неизвестного изотопа.

205*. Частота генератора переменного электрического поля в циклотроне $\nu = 10 \text{ МГц}$, а максимальная разность потенциалов между его дуантами $U_{\text{max}} = 80 \text{ кв}$. В циклотроне ускоряются α -частицы. Определить: а) величину напряженности магнитного поля, при котором имеет место синхронизм между последовательными прохождениями α -частицей пространства между дуантами и изменением электрического поля; б) энергию α -частицы после 25 полных ее оборотов в циклотроне; в) радиус траектории α -частицы после n полных оборотов.

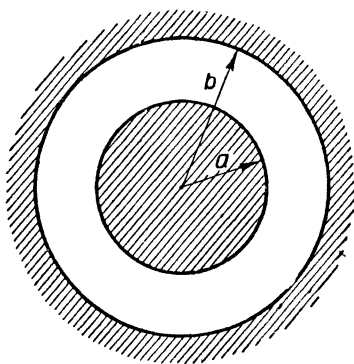


Рис. 109

206*. При удалении от оси бетатрона к его периферии (в плоскости стационарной электронной орбиты) мгновенная напряженность магнитного поля убывает по закону:

$$H = \begin{cases} H_0(t), & 0 \leq r \leq r_0, \\ \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{7}{8}} H_0(t), & r \geq r_0. \end{cases}$$

Каким должно быть r_0 , чтобы радиус устойчивой электронной орбиты был равен a ? Допустимо ли убывание магнитного поля по закону:

$$H = \left(\frac{r_0}{r}\right)^n H_0(t),$$

где $n > 1$? Если нет, то почему?

207*. Определить скорость дрейфа частицы (с зарядом e и массой m) в горизонтальном однородном магнитном поле \vec{B} при наличии возмущения в виде однородного гравитационного поля.

208*. Вычислить электромагнитный импульс равномерно (со скоростью v , малой по сравнению со скоростью света) и прямолинейно движущегося электрона, заряд q которого распределен в пространстве с объемной плотностью

$$\rho = -\frac{q}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r},$$

где r_0 — эффективный радиус электрона.

§ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

115. Исходя из уравнения Максвелла для макрополя $\text{div} \vec{D} = \rho$, где ρ — макроскопическая объемная плотность свободных зарядов, найти среднюю (по физически бесконечно малому объему) плотность связанных зарядов путем усреднения уравнения Лоренца

$$\text{div} \vec{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{микро}}$$

для электрического микрополя. Найти также плотность тока поляризации.

Р е ш е н и е

Приступая к решению данной (а также и следующей) задачи, читатель должен хорошо разобраться в основах классической электронной теории Лоренца по следующим источникам:

1) И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Гостехиздат, 1958, § 25, 26, 60—62 и 67;

2) А. С. К о м п а н е е ц. Теоретическая физика. М., Гостехиздат, 1957, стр. 134—139, обратив особое внимание на определение макроскопических значений физических величин и на способ их получения из микроскопических величин путем усреднения по физически бесконечно малому объему.

Обратимся теперь к решению поставленной выше задачи.

Прежде всего, усредняя по физически бесконечно малому объему уравнение Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{микро}}$$

для электрического микрополя, получим:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \overline{\rho_{\text{связ}}}), \quad (1)$$

так как по определению макроскопическое значение напряженности электрического поля $\vec{E} = \vec{e}$ и, кроме того, $\overline{\rho_{\text{микро}}} = \rho + \overline{\rho_{\text{связ}}}$, где ρ — объемная плотность свободных зарядов и $\overline{\rho_{\text{связ}}}$ — средняя плотность связанных зарядов, обязанных своим происхождением поляризации вещества.

Далее следует воспользоваться известной из макроскопической электродинамики связью вектора электрической индукции с вектором поляризации, т. е.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2)$$

Подстановка выражения (2) в формулу (1) дает:

$$\operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div} \vec{P} = \rho + \overline{\rho_{\text{связ}}},$$

откуда, используя макроскопическое уравнение Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, находим:

$$\overline{\rho_{\text{связ}}} = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (3)$$

Полный связанный заряд, находящийся внутри физически бесконечно малого объема,

$$e = \int \overline{\rho_{\text{связ}}} dV = - \int \operatorname{div} \vec{P} \cdot dV$$

или, применяя теорему Остроградского — Гаусса

$$e = - \oint \vec{P} d\vec{S},$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности, охватывающей физически бесконечно малый объем. Изменение величины связанного заряда в указанном объеме в единицу времени

$$\frac{de}{dt} = - \oint \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (4)$$

С другой стороны, изменение связанного заряда в том же объеме в единицу времени можно также представить в виде:

$$\frac{de}{dt} = - \oint \vec{j}_{\text{поляр}} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

(необходимость знака минус перед интегралом в выражении (5) объясняется рис. 110 а, б).

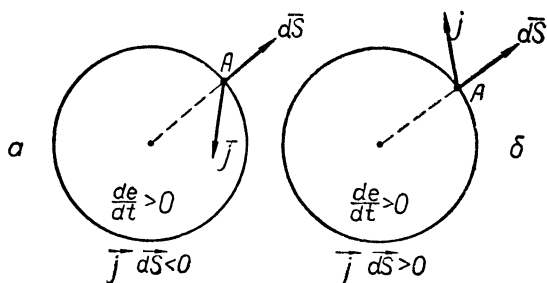


Рис. 110

Сравнивая правые части выражений (4) и (5), находим:

$$\vec{j}_{\text{поляр}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

116. При расчете электрического поля, действующего на отдельную молекулу в диэлектрике, вокруг рассматриваемой молекулы строят сферу, радиус которой велик по сравнению с расстояниями между молекулами, при этом указанная сфера не должна пересекать ни одной молекулы. Тогда поле \vec{E}^* , действующее на молекулу, находящуюся в центре сферы, можно представить в виде суммы полей:

$$\vec{E}^* = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

где \vec{E}_0 — электрическое поле внешних по отношению к диэлектрику источников; \vec{E}_1 — поле, обусловленное связанными зарядами, появившимися в результате поляризации на внешней поверхности диэлектрика; \vec{E}_2 — поле связанных зарядов, находящихся на внутренней поверхности сферической полости, и \vec{E}_3 — поле всех молекул, находящихся внутри сферы. Поле \vec{E}_2 впервые было вычислено Лоренцом; оно оказалось равным $\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$, где \vec{P} — вектор поляризации.

Однако полость внутри диэлектрика не обязательно выбирать в виде сферы: ее можно, например, выбрать в виде куба с гранями, соответственно нормальными и параллельными вектору поляризации. В этом случае плотность связанных зарядов на верхней и нижней гранях куба постоянна и равна $\pm P$, в то время как на других гранях связанные заряды отсутствуют.

Вычислить величину поля \vec{E}_2 для кубической полости.

Решение

Из рисунка 111 видно, что поля, возбуждаемые в центре O кубической полости связанными зарядами элементарных площадок dS_1 и dS_2 , равны между собой и одинаково направлены, так что величина напряженности их общего поля

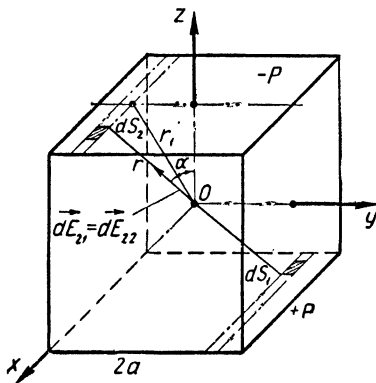


Рис. 111

$$dE'_2 = 2dE_{21} = \frac{PdS}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx dy}{r^2},$$

а составляющая этого поля вдоль оси Z (именно она нас и интересует) оказывается равной

$$dE_2 = dE'_2 \cdot \cos \alpha = \frac{aP}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx dy}{r^3}$$

или

$$dE_2 = \frac{aP}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1) по x и y в пределах от $-a$ до $+a$, находим:

$$E_2 = \frac{2aP}{\pi\epsilon_0} \int_0^a dx \int_0^a \frac{dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Интеграл по y в (2) довольно просто вычисляется с помощью подстановки $y = \sqrt{a^2 + x^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$; он оказывается равным

$$\int_0^a \frac{dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(a^2 + x^2) \sqrt{2a^2 + x^2}}$$

и, следовательно, выражение (2) принимает вид:

$$E_2 = \frac{2a^2P}{\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2) \sqrt{2a^2 + x^2}}. \quad (3)$$

Интеграл в (3) вычисляется с помощью подстановки Эйлера

$$\sqrt{2a^2 + x^2} = t - x.$$

Далее нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2) \sqrt{2a^2 + x^2}} &= \frac{i}{2a^2} \left\{ \int \frac{2t dt}{t^2 + 2ia^2} - \int \frac{2t \cdot dt}{t^2 - 2ia^2} \right\} = \\ &= \frac{i}{2a^2} \{ \ln(t^2 + 2ia^2) - \ln(t^2 - 2ia^2) \}, \end{aligned}$$

откуда в силу того, что

$$\ln(t^2 \pm 2ia^2) = \frac{1}{2} \ln(t^4 + 4a^4) \pm i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2a^2}{t^2}$$

(см.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 2), получаем:

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2) \sqrt{2a^2 + x^2}} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6a^2}. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) приводит к искомому результату

$$E_2 = \frac{1}{3\epsilon_0} P, \quad (5)$$

т. е. к точно такому же значению поля E_2 , что и для сферической полости.

117. Определить диэлектрическую проницаемость эмульсии с малой объемной концентрацией C , зная диэлектрические проницаемости среды ϵ_1 и диспергированной фазы ϵ_2 (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1957).

Р е ш е н и е

Метод усреднения микроскопических физических величин по физически малому объему (метод Лоренца) можно обобщать на случай мелкодисперсных систем (эмульсии, порошковые смеси и т. п.). Однако в этом случае усреднение физических величин должно проводиться по объему, достаточно большому по сравнению с размерами неоднородностей в диспергированной среде, а не по сравнению с размерами молекул среды.

Допустим, что \vec{D} и \vec{E} — усредненные указанным способом напряженность и индукция электрического поля в эмульсии; тогда коэффициент пропорциональности между \vec{D} и \vec{E} можно назвать диэлектрической проницаемостью эмульсии, т. е.

$$\vec{D} = \epsilon_{\text{смеси}} \cdot \vec{E}. \quad (1)$$

Обратимся теперь к рассмотрению интеграла

$$\frac{1}{V} \int (\vec{D} - \epsilon_1 \vec{E}) dV,$$

где интегрирование производится по достаточно большому объему эмульсии. По определению средних значений физических величин в диспергированной системе

$$\frac{1}{V} \int (\vec{D} - \epsilon_1 \vec{E}) dV = \vec{D} - \epsilon_1 \vec{E} = (\epsilon_{\text{смеси}} - \epsilon_1) \cdot \vec{E}. \quad (2)$$

С другой стороны, в силу того, что вне частиц эмульсии $\vec{D} = \epsilon_1 \vec{E}$, интеграл (2) оказывается равным:

$$\frac{1}{V} \int (\vec{D} - \varepsilon_1 \vec{E}) dV = \frac{1}{V} \int_{V_2} (\vec{D}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_2) dV = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{V} \int_{V_2} \vec{E}_2 dV, \quad (3)$$

где \vec{E}_2 и \vec{D}_2 — напряженность и индукция электрического поля внутри частиц эмульсии, V_2 — объем, занимаемый ими. Заметим также, что если N — число частиц эмульсии и V_0 — объем, занимаемый отдельной частицей, то концентрация

$$C = \frac{V_2}{V} = \frac{NV_0}{V}. \quad (4)$$

В первом приближении, оказывающимся справедливым для эмульсий с малыми объемными концентрациями, частицы можно считать сферическими и находящимися во внешнем электрическом поле, равном среднему полю \vec{E} . Как известно, поле внутри однородного диэлектрического шара, находящегося во внешнем электрическом поле, однородно и равно:

$$\vec{E}_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \vec{E} \quad (5)$$

(см. задачу 41; следует учесть, что во всех формулах задачи 41 принято $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, так как диэлектрический шар считался находящимся в вакууме). Подстановка (5) и (4) в выражение (3) дает:

$$\frac{1}{V} \int (\vec{D} - \varepsilon_1 \vec{E}) dV = C \cdot \frac{3\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \vec{E}. \quad (6)$$

И, наконец, сравнивая выражения (2) и (6), находим диэлектрическую проницаемость эмульсии

$$\varepsilon_{\text{см}} = \varepsilon_1 + C \cdot \frac{3\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}. \quad (7)$$

118. Определить электронную поляризуемость нейтрального атома, находящегося во внешнем однородном поле \vec{E}_0 . Найти величину коэффициента упругой связи электронов в атоме гелия, если из опыта известно, что его электронная поляризуемость $\alpha_{\text{эл}} = 2,23 \cdot 10^{-41} \text{ ф} \cdot \text{м}^2$.

Р е ш е н и е

Полную поляризуемость атома или иона в общем случае можно представить состоящей из трех частей: электронной, ионной и ориентационной. Электронная часть поляризуемости атома обусловлена смещениями электронов в атоме относительно ядра, т. е. деформацией электронной оболочки атома. Ионная часть поляризуемости связана со смещениями одних заряженных ионов молекулы относительно других ее ионов. Ориентационная (или диполь-

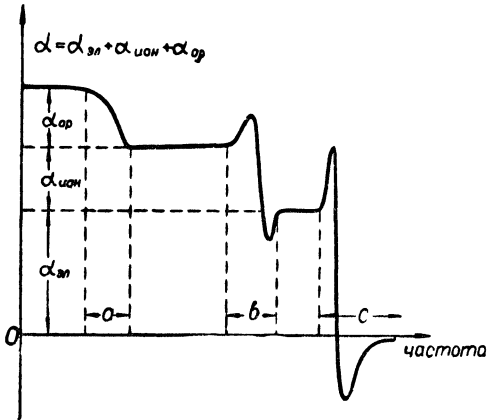


Рис. 112

ная) поляризуемость возникает только в тех случаях, когда молекулы какого-либо вещества обладают готовыми электрическими дипольными моментами даже в отсутствии внешнего поля; ее возникновение связано с переориентацией дипольных моментов молекул при включении внешнего электрического поля.

Полная поляризуемость атома или молекулы зависит от частоты внешнего поля. На рисунке 112 схематически изображена частотная зависимость полной поляризуемости атома. Указанной зависимостью поляризуемости от частоты внешнего поля на практике пользуются для разделения полной поляризуемости на ее составные части. Из рисунка 112 видно, что в оптической части спектра (между областью инфракрасных и областью ультрафиолетовых частот) полная поляризуемость совпадает с электронной

поляризуемостью и практически не зависит от частоты внешнего поля. Электронная поляризуемость в этом случае называется статической ($2,23 \cdot 10^{-41} \text{ ф} \cdot \text{м}^2$ — статическая электронная поляризуемость атома He).

Покажем, что статическую электронную поляризуемость атома можно представить в виде:

$$\alpha_{\text{эл}} = \sum_i \frac{N_i e^2}{m \omega_{0i}^2}, \quad (1)$$

где ω_{0i} и N_i — частота собственных колебаний и число электронов i -го сорта.

Действительно, пусть \bar{x} — смещение электрона относительно ядра атома, вызываемое действием электрического поля. Тогда, чтобы электрон находился в равновесии, необходимо, чтобы

$$eE_0 = k\bar{x} = m\omega_0^2\bar{x}, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

С другой стороны, если дипольный момент электрона, смещенного относительно ядра, равен $p = e\bar{x}$, то

$$(\alpha_{\text{эл}})_i = \frac{p}{E_0} = \frac{e^2}{k_i} = \frac{e^2}{m\omega_{0i}^2}. \quad (2)$$

Объединив все электроны атома, имеющие одинаковый коэффициент упругой связи с ядром k_i в группы и произведя суммирование выражений (2) по всем таким группам электронов, мы и приходим к формуле (1) для полной электронной поляризуемости нейтрального атома.

На самом деле, электронная поляризуемость атома зависит также и от частоты внешнего поля; согласно результатам задачи 216* она имеет вид:

$$\alpha_{\text{эл}} = \sum_i \frac{N_i e^2}{m (\omega_{0i}^2 - \omega^2)},$$

где ω — частота внешнего поля. Однако в оптической области спектра зависимость электронной поляризуемости широкого класса диэлектриков от частоты поля ω несущественна и ею можно пренебречь.

В электронной оболочке атома гелия имеются два одинаково связанных с ядром электрона; поэтому $\alpha_{\text{эл}} = \frac{2e^2}{k}$,

откуда $k = \frac{2e^2}{\alpha_{\text{эл}}} = 2,298 \cdot 10^3 \text{ н/м}.$

119. У хлористого натрия показатель преломления $n = 1,5$ и, следовательно, $K_{\text{опт}} = 2,25$. В то же время значение статической диэлектрической проницаемости хлористого натрия равно 5,62. Различие в значениях статической и оптической диэлектрической проницаемости в случае ионных кристаллов, к каковым относится и кристаллический NaCl, приписывают ионной поляризуемости: при наложении внешнего однородного поля E_0 в кристалле хлористого натрия увеличивается расстояние между ионами Na^+ и Cl^- .

Определить величину той части диэлектрической проницаемости хлористого натрия, которая обусловлена ионной поляризацией молекул NaCl. Расчет произвести, используя следующие экспериментальные данные: собственная частота колебаний молекулы хлористого натрия $\omega_0 = 3,2 \cdot 10^{13}$ *гц*; объем, приходящийся в кристалле на одну молекулу, $V = 4,485 \cdot 10^{-29}$ *м*³.

Р е ш е н и е

При наложении внешнего однородного поля E_0 на кристаллы хлористого натрия ионы Na^+ в каждой молекуле смещаются из своих положений равновесия в направлении поля на отрезок $x_1 = \frac{eE_0}{M_1\omega_0^2}$, а ионы Cl^- смещаются в противоположном направлении на расстояние $x_2 = -\frac{eE_0}{M_2\omega_0^2}$ (M_1 и M_2 — массы ионов Na^+ и Cl^-). Полное относительное смещение ионов будет равно:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{eE_0}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right).$$

Дополнительный дипольный момент, приходящийся на единицу объема диэлектрика и связанный со смещениями ионов, очевидно, будет равен:

$$\Delta P = \frac{e(x_1 - x_2)}{V} = \frac{e^2 E_0}{V \omega_0^2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right). \quad (1)$$

С другой стороны, из формулы $P = \varepsilon_0(K - 1)E$, связывающей вектор поляризации с величиной поля в диэлектрике, находим:

$$\Delta P = \varepsilon_0 E \Delta K. \quad (2)$$

Как известно, поле E внутри диэлектрика определяется не только внешним полем E_0 , но и распределением связанных зарядов, и поэтому выражается через E_0 сложным образом. Ограничиваясь лишь грубой оценкой приращения ΔK , обязанного своим происхождением ионной поляризации кристаллического NaCl, мы примем в формуле (2) $E \approx E_0$; тогда из формул (1) и (2) следует, что

$$\Delta K = \frac{e^2}{\epsilon_0 \omega_0^2 V} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right). \quad (3)$$

Подстановка в формулу (3) числовых данных дает:

$$\Delta K = 2,70.$$

Это значение достаточно близко к значению 3,27, наблюдаемому экспериментально.

120. Найти относительную диэлектрическую проницаемость и показатель преломления среды, содержащей N свободных электронов на единицу объема в поле световой волны с частотой ω . Такое представление о дисперсионных свойствах среды, как показывает опыт, справедливо для больших частот. Так, показатель преломления для рентгеновских лучей, как правило, лишь ничтожно мало отличается от единицы: для кальцита, например, при $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ разность $n - 1 = -8,8 \cdot 10^{-6}$.

Сколько при указанных условиях приходится свободных электронов на 1 м^3 кальцита?

Р е ш е н и е

В задачах 118 и 119 рассматривался процесс поляризации вещества в постоянных электрических полях. В данной задаче рассматривается поляризация в переменном электрическом поле. Поэтому, прежде чем приступить к ее решению, читатель должен ознакомиться с вопросом о дисперсии электромагнитных волн по учебнику А. С. К о м п а н е й ц а (стр. 190—197, изд. 1955 г.) и только после этого приступить к разбору решения данной задачи.

1. При определении относительной диэлектрической проницаемости среды K будем исходить из того, что, по определению, вектор поляризации

$$\vec{P} = N \vec{p} = N e \vec{r}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (K - 1) \vec{E}. \quad (2)$$

В поле световой волны вектор напряженности электрического поля изменяется со временем по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, а движение свободного электрона определяется уравнением:

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$, где неизвестным является \vec{r}_0 ; его мы определим из условия обращения уравнения (3) в тождество при подстановке в него $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$. Имеем:

$$- \omega^2 m \vec{r}_0 \equiv e \vec{E}_0,$$

откуда

$$\vec{r} = - \frac{e \vec{E}_0}{m \omega^2} e^{i\omega t} = - \frac{e}{m \omega^2} \vec{E}.$$

Подстановка вектора \vec{r} в уравнение (1) дает:

$$\vec{P} = - \frac{Ne^2}{m \omega^2} \vec{E}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с (2), находим:

$$K = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$

и

$$n = \sqrt{K} = \left(1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2}, \quad (5)$$

где, воспользовавшись тем, что по условию задачи $\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \ll 1$, мы произвели разложение в ряд, ограничившись двумя первыми членами этого разложения.

2. Переходим теперь к ответу на второй вопрос задачи. Из выражения (5) находим:

$$N = \frac{2\varepsilon_0 m \omega^2 (1 - n)}{e^2} = \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 m c^2 (1 - n)}{e^2 \lambda^2}.$$

Подстановка сюда числовых данных дает:

$$N = 8,28 \cdot 10^{27} \text{ электронов/м}^3.$$

121. Под действием падающей на электрон плоской монохроматической световой волны последний становится источником вторичного излучения — происходит рассеяние света. Вычислить эффективный поперечник для рассеяния монохроматического света свободными электронами, определяемый как отношение средней интенсивности рассеянного излучения к среднему потоку энергии в падающей световой волне.

Р е ш е н и е

Уравнение движения электрона в поле световой волны имеет вид:

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 \cos \omega t + e [\vec{v} \vec{B}_0] \cos \omega t.$$

Однако вторым слагаемым в правой части этого уравнения можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым, так как оно заведомо меньше первого слагаемого (см. задачу 160*). Поэтому уравнение движения электрона можно переписать в виде:

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 \cos \omega t,$$

откуда

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e \vec{E}_0}{m} \cos \omega t.$$

Средняя интенсивность рассеянного излучения

$$I_{\text{средн}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \ddot{\vec{r}} \right|^2 = \frac{e^4 E_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

Средняя за период волны величина вектора Пойнтинга в падающей световой волне

$$S_{\text{средн}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2,$$

а поэтому эффективный поперечник для рассеяния монохроматического света свободными электронами оказывается равным:

$$\sigma = \frac{I_{\text{средн}}}{S_{\text{средн}}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2,$$

где $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ — так называемый классический радиус электрона.

122. Определить среднее за период изменение момента импульса электрона, обращающегося по эллиптической орбите вокруг ядра в атоме водорода.

Р е ш е н и е

Обратное воздействие излучения на излучающий электрон («лучистое трение») приводит к тому, что со временем изменяется и момент импульса электрона $\vec{M} = [\vec{r} \vec{p}]$. Действительно, уравнение движения электрона с учетом силы лучистого трения имеет вид:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}}.$$

Подставляя это выражение в

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r} \dot{\vec{p}}],$$

получаем:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\vec{r}, \ddot{\vec{r}} \right]. \quad (1)$$

Уравнение (1) необходимо усреднить по периоду невозмущенного силами лучистого трения эллиптического движения электрона. Заметим с этой целью, что

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{r}, \ddot{\vec{r}} \right] = \left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \right] + \left[\vec{r}, \dddot{\vec{r}} \right] = 0,$$

откуда

$$\left[\vec{r}, \ddot{\vec{r}} \right] = \left[\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \right].$$

Для невозмущенного силами трения движения электрона в атоме водорода

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3} \vec{r}$$

и

$$\overline{\left[\begin{matrix} \vec{r} & \dot{\vec{r}} \\ \vec{r} & \dot{\vec{r}} \end{matrix} \right]} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \overline{\left(\frac{\left[\begin{matrix} \vec{r} & \dot{\vec{r}} \\ \vec{r} & \dot{\vec{r}} \end{matrix} \right]}{r^3} \right)} = - \frac{e^2 \vec{M}}{4\pi\epsilon_0 m^2} \left(\frac{1}{r^3} \right)_{\text{средн}}, \quad (2)$$

так как

$$\left[\begin{matrix} \vec{r} & \dot{\vec{r}} \\ \vec{r} & \dot{\vec{r}} \end{matrix} \right] = \frac{\vec{M}}{m},$$

при этом принимается, что за время одного оборота момент импульса электрона почти не изменяется.

Подстановка (2) в (1) дает:

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_{\text{средн}} = - \frac{e^4 M}{24\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3} \left(\frac{1}{r^3} \right)_{\text{средн}}. \quad (3)$$

Далее, по определению среднего

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3};$$

подставляя сюда

$$dt = \frac{mr^2}{M} d\varphi, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + \beta \cos \varphi), \quad p = 4\pi\epsilon_0 \frac{M^2}{me^2},$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 \mathcal{E} M^2}{me^4}}, \quad T = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m} \left(\frac{m}{2\mathcal{E}} \right)^{3/2}$$

(см. задачу 104), находим:

$$\overline{r^{-3}} = \frac{m}{pMT} \int_0^{2\pi} (1 + \beta \cos \varphi) d\varphi = \frac{(2m\mathcal{E})^{3/2}}{M^3}$$

и, следовательно, уравнение (3) окончательно принимает вид:

$$\overline{\left(\frac{dM}{dt} \right)} = - \frac{me^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 M^2} \left(\frac{2\mathcal{E}}{m} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

Таково среднее за период обращения электрона по орбите изменение его момента импульса.

123. Вдоль однородной металлической пластинки (с шириной a и толщиной b) течет постоянный ток I . Пластинку снизу вверх пересекает постоянное однородное магнитное поле B . Определить возникающую при этом раз-

ность потенциалов на стенках пластинки, параллельных плоскости, содержащей векторы \vec{B} и \vec{j} (эффект Холла).

Р е ш е н и е

На движущийся со скоростью v вдоль оси Y электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца

$$\vec{F} = e[\vec{v} \vec{B}] = evB \cdot \vec{i};$$

поэтому на стенке 2 пластинки (рис. 113) будут накапливаться электроны, причем процесс накопления электро-

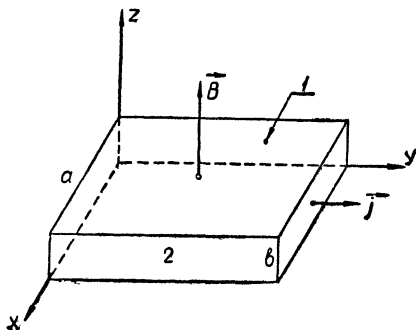


Рис. 113

нов на стенке 2 будет происходить до тех пор, пока возникшее между стенками 1 и 2 электростатическое поле \vec{E} не уравновесит силу Лоренца, т. е.

$$-eE_x = evB,$$

откуда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = aE_x = -vaB. \quad (1)$$

Подставляя в формулу (1) скорость электрона v , определяемую из соотношений $j = \frac{I}{ab}$ и $j = env$, получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{1}{en} \cdot \frac{IB}{b},$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = R_H \cdot \frac{IB}{b}, \quad (2)$$

где

$$R_H = -\frac{1}{en},$$

так называемая постоянная Холла. Для свободных электронов постоянная Холла отрицательна и имеет для большинства металлов величину порядка $10^{-10} \text{ м}^3/\text{к}$. Однако для Be, Zn и Gd обнаружен знак постоянной Холла, обратный предсказываемому приведенной выше теорией; этот факт заставил исследователей предположить, что носителями тока в указанных металлах являются положительные заряды. Указанное явление объясняется в рамках зонной теории металлов, где наряду с проводимостью, обусловленной свободными электронами, рассматривается также проводимость, обусловленная положительно заряженными дырками. Эффект Холла наблюдается также и в полупроводниках (см.: А. Ф. Иоффе. Физика полупроводников. Изд. АН СССР, 1957).

124. Система состоит из заряженных частиц с одинаковым отношением $\frac{e}{m}$. Потенциальная энергия системы зависит лишь от взаимного расположения частиц. На систему действует слабое однородное магнитное поле \vec{B} .

Вычислить лагранжиан указанной системы частиц, пользуясь подвижной системой координат, вращающейся вокруг вектора \vec{B} с угловой скоростью $\vec{\omega}_L$ ларморовой прецессии. Показать, что с точностью до членов второго порядка малости по B лагранжиан системы не зависит от \vec{B} , доказав тем самым, что действие слабого магнитного поля проявляется лишь в прецессии системы в целом относительно вектора \vec{B} .

Р е ш е н и е

Лагранжиан рассматриваемой системы заряженных частиц относительно неподвижной системы координат можно представить в виде:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m v_i^2 + e \sum_i \vec{A}_i \vec{v}_i - U(r_{ij}),$$

где r_{ij} — расстояние между i -й и j -й частицами системы, или

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m v_i^2 + \frac{e}{2} \sum_i [\vec{B} \vec{r}_i] \vec{v}_i - U(r_{ij}), \quad (1)$$

так как векторный потенциал однородного магнитного поля в точке, где находится i -я частица, может быть записан в виде (см. задачу 106*)

$$\vec{A}_i = \frac{1}{2} [\vec{B} \vec{r}_i].$$

Пусть \vec{v}'_i — скорость i -й частицы относительно подвижной системы координат, вращающейся вокруг вектора \vec{B} с угловой скоростью $\vec{\omega}_L$; тогда, по теореме сложения скоростей,

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + [\vec{\omega}_L \vec{r}_i] = \vec{v}'_i - \frac{e}{2m} [\vec{B} \vec{r}_i],$$

откуда

$$v_i^2 = (v'_i)^2 - \frac{e}{m} [\vec{B} \vec{r}_i] \vec{v}'_i + \frac{e^2}{4m^2} [\vec{B} \vec{r}_i]^2$$

и лагранжиан системы частиц относительно подвижной системы координат

$$L' = \frac{1}{2} \sum_i m (v'_i)^2 - U(r_{ij}) - \frac{e^2}{8m} \sum_i [\vec{B} \vec{r}_i]^2. \quad (2)$$

Если магнитное поле \vec{B} достаточно слабое, то последним слагаемым в выражении (2) можно пренебречь, и тогда

$$L' = \frac{1}{2} \sum_i m (v'_i)^2 - U(r_{ij}), \quad (3)$$

откуда и видно, что вращающаяся как единое целое (с частотой $\vec{\omega}_L$) система заряженных частиц ведет себя по отношению к подвижной системе отсчета так, как если бы магнитное поле отсутствовало.

125. Считая, что в состоянии теплового равновесия в атомах любого вещества электроны удерживаются на строго фиксированных расстояниях r_i от ядра, и применяя для описания движения электронов в атоме законы классической статистики Больцмана, вычислить среднее значение квадрата магнитного момента атома, подставить полу-

ченное выражение в формулу Ланжевена для парамагнитной восприимчивости, сравнить полученный результат с выражением

$$\chi_{\text{диам}} = - \frac{\mu_0 Z e^2 L}{6m} \frac{1}{r_i^2}$$

для диамагнитной восприимчивости и показать, что в указанном классическом приближении полная магнитная восприимчивость вещества оказывается равной нулю.

З а м е ч а н и я. Прежде чем приступить к решению данной задачи, необходимо сделать следующие замечания, связанные с использованием Международной системы единиц СИ.

Во-первых, в Международной системе единиц СИ несколько изменяется по сравнению с абсолютной гауссовой системой единиц определение вектора намагничения \vec{M} :

В системе СИ В абсолютной системе

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + 4\pi \vec{M}) \\ \text{или } \vec{M} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H}, & \vec{M} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$$

где

$$\mu_0 = 1$$

(см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 63). Определение диа- и парамагнитной восприимчивости χ при переходе от абсолютной системы единиц к системе СИ формально (но не по существу!) не изменяется; и в той и в другой системах единиц оно имеет вид:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}, \quad (2)$$

откуда, имея в виду, что $\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}$, находим:

В системе СИ В абсолютной системе

$$\chi = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \quad \chi = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi\mu_0}. \quad (3)$$

Из формул (1) и (3) видно, что намагниченность \vec{M} и магнитная восприимчивость χ в системе СИ оказываются в 4π раз большими по сравнению с теми же величинами в абсолютной гауссовой системе единиц. Поэтому при срав-

нении теоретических значений M и κ , выраженных в единицах системы СИ, с экспериментальными значениями, записанными в абсолютной гауссовой системе единиц, к последним следует добавлять множитель 4π .

Во-вторых, при выводе расчетных формул для диа- и парамагнитной восприимчивости [см.: И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 69 и 70, формулы (69.4) и (70.5)] следует учесть различную запись в двух рассматриваемых нами системах единиц выражений для магнитного момента \vec{m} системы заряженных частиц, их энергии U во внешнем магнитном поле (в вакууме) и для частоты ω_L ларморовой прецессии:

В системе СИ В абсолютной системе

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i e_i [\vec{r}_i \vec{v}_i], \quad \vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i [\vec{r}_i \vec{v}_i], \quad (4)$$

$$U = -\vec{m} \vec{B} = -\mu_0 \vec{m} \vec{H}, \quad U = -\vec{m} \vec{H}, \quad (5)$$

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e \vec{B}}{2m} = -\frac{e \mu_0}{2m} \vec{H}, \quad \vec{\omega}_L = -\frac{e}{2mc} \vec{H}, \quad (6)$$

после чего формулы (69.4) и (70.5) книги И. Е. Тамма, записанные в абсолютных единицах, принимают вид:

В системе СИ

$$\kappa_{\text{диам}} = -\frac{\mu_0 Z e^2 L}{6m} \overline{r_i^2}, \quad (7)$$

$$\kappa_{\text{парам}} = \frac{\mu_0 L \overline{m^2}}{3kT}. \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) магнитная восприимчивость κ [если под L понимать число атомов (или молекул) в 1 м^3 вещества] — безразмерная величина. Умножая (7) и (8) на объем V одного килограмм-моля вещества и принимая во внимание, что $LV = \overline{N}$ (число Авогадро), получим молярные диа- и парамагнитные восприимчивости:

$$\kappa'_{\text{диам}} = -\frac{\mu_0 Z e^2 \overline{N}}{6m} \overline{r_i^2}, \quad (9)$$

$$\kappa'_{\text{парам}} = \frac{\mu_0 \overline{N} \overline{m^2}}{3kT}. \quad (10)$$

Р е ш е н и е

Прежде всего заметим, что если m — магнитный момент атома с номером Z , а m_0 — магнитный момент отдельного электрона атома (связанный с его орбитальным движением), то

$$\vec{m}^2 = Z \cdot \vec{m}_0^2. \quad (1)$$

Магнитный момент отдельного электрона

$$\vec{m}_0 = \frac{e}{2m} \vec{K}, \quad (2)$$

где \vec{K} — механический, орбитальный момент электрона.

Предполагая, что электрон в атоме движется, находясь все время на неизменном расстоянии r_i от ядра, мы тем самым утверждаем, что он движется по поверхности сферы радиуса r_i и, следовательно, имеет две степени свободы. Такой электрон можно назвать пространственным ротатором, движение которого можно представить себе в виде сложного вращательного движения, состоящего из двух вращений с частотами ω_1 и ω_2 , причем $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$. Поэтому механический момент электрона-ротатора можно записать в виде:

$$\vec{K} = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2, \quad (3)$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции ротатора относительно двух указанных выше осей вращения. Кинетическая энергия ротатора

$$E = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2).$$

Вероятность того, что угловые скорости ω_1 и ω_2 отдельного электрона лежат в интервалах $(\omega_1, \omega_1 + d\omega_1)$ и $(\omega_2, \omega_2 + d\omega_2)$, согласно статистике Больцмана, равна:

$$dW = A \cdot e^{-\frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{2kT}} \cdot d\omega_1 d\omega_2. \quad (4)$$

Нормируя распределение вероятностей на единицу, получим:

$$\int dW = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{I_1 \omega_1^2}{2kT}} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{I_2 \omega_2^2}{2kT}} d\omega_2 = 1. \quad (5)$$

Каждый из двух интегралов, стоящих в (5), представляет собой так называемый интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (6)$$

(см.: В. Г. Л е в и ч. Введение в статистическую физику. М., Гостехиздат, 1954, приложение 1), так что выражение (5) принимает вид:

$$A \cdot \frac{2\pi kT}{\sqrt{I_1 I_2}} = 1,$$

откуда получаем нормированное распределение электронов по угловым скоростям:

$$dW = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{2\pi kT} \cdot e^{-\frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{2kT}} d\omega_1 d\omega_2. \quad (4a)$$

Далее, пользуясь формулами (2), (3) и (4a), находим среднее значение квадрата магнитного момента отдельного электрона в атоме:

$$\begin{aligned} \overline{m^2}_0 &= \int m^2_0 dW = \frac{e^2}{4m^2} \int (I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2) dW = \\ &= \frac{e^2 \sqrt{I_1 I_2}}{8\pi m^2 kT} \left\{ I_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 e^{-\frac{I_1 \omega_1^2}{2kT}} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{I_2 \omega_2^2}{2kT}} d\omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + I_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{I_1 \omega_1^2}{2kT}} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2^2 \cdot e^{-\frac{I_2 \omega_2^2}{2kT}} d\omega_2 \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Стоящие в (7) интегралы типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-\alpha \omega^2} d\omega$$

вычисляются путем дифференцирования интеграла Пуассона (6) по параметру α . Действительно, дифференцируя (6) по α , находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-3/2},$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_i^2 e^{-\frac{I_i \omega_i^2}{2kT}} d\omega_i = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2kT}{I_i} \right)^{3/2}, \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Подстановка интегралов (6) и (8) в формулу (7) дает:

$$\overline{m_0^2} = \frac{e^2 kT}{4m^2} (I_1 + I_2)$$

или, так как $I_1 = I_2 = \overline{mr_i^2}$ (две главные оси вращения электрона-ротатора ничем одна от другой не отличаются),

$$\overline{m_0^2} = \frac{e^2 kT}{2m} \overline{r_i^2}$$

и

$$\overline{m^2} = Z \cdot \overline{m_0^2} = \frac{Ze^2 kT}{2m} \overline{r_i^2}. \quad (9)$$

И, наконец, подставляя $\overline{m^2}$ в формулу Ланжевена, находим, что

$$\kappa_{\text{парам}} = \frac{\mu_0 Ze^2 L}{6m} \overline{r_i^2}. \quad (10)$$

Следовательно, полная магнитная восприимчивость вещества в указанном выше классическом приближении оказывается равной:

$$\kappa = \kappa_{\text{динам}} + \kappa_{\text{парам}} = 0. \quad (11)$$

На самом деле вещество может быть или диамагнитным, или парамагнитным (если из рассмотрения исключить ферромагнитные вещества). Поэтому полученный нами результат (11) свидетельствует о непригодности чисто классических представлений для описания диа- и парамагнитных свойств реальных веществ. Последовательное описание указанных свойств вещества может быть построено лишь в рамках квантовой теории.

126. Бензол обладает заметной анизотропией молярной диамагнитной восприимчивости: при измерении в направлении, перпендикулярном к плоскости молекулы, восприимчивость оказывается большей, чем при ее измерении в направлении, лежащем в плоскости молекулы.

Вычислить анизотропию молярной диамагнитной восприимчивости бензола, считая ее возникновение обязанным тому, что в молекуле бензола 6 слабо связанных с

углеродными ядрами электронов (так называемые π -электроны) могут свободно перемещаться вдоль бензольного кольца (рис. 114). Расстояние от ядер углерода до оси молекулы, перпендикулярной к ее плоскости, принять равным $R = 1,39 \text{ \AA}$.

Р е ш е н и е

Как показывает элементарная теория диамагнитного эффекта (см.: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 69), вклад, вносимый в диамагнитную восприимчивость отдельным прецессирующим вокруг направления внешнего магнитного поля \vec{H} электроном, равен:

$$-\frac{\mu_0 e^2}{4m} \overline{r^2}, \quad (1)$$



Рис. 114

где $\overline{r^2}$ — среднее значение квадрата расстояния электрона от оси вращения. Отсюда вклад, вносимый в анизотропию молярной диамагнитной восприимчивости отдельной молекулой бензола, должен быть в 6 раз больше вклада отдельного π -электрона (1), т. е.

$$-\frac{3\mu_0 e^2}{2m} \overline{r^2}. \quad (2)$$

Если теперь умножить (2) на число Авагадро N , то мы и получим величину полной анизотропии молярной диамагнитной восприимчивости бензола

$$\Delta\kappa' = \kappa'_\perp - \kappa'_\parallel = -\frac{3\mu_0 e^2 N}{2m} \overline{r^2}, \quad (3)$$

где κ'_\perp и κ'_\parallel — диамагнитные восприимчивости бензола, измеренные соответственно в направлении, перпендикулярном к плоскости молекулы, и направлении, лежащем в ее плоскости.

Принимая в (3) $\overline{r^2} = R^2$, находим:

$$\Delta\kappa' = -617,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Это значение достаточно хорошо согласуется с экспериментальным значением $-678,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$.

127. Классический осциллятор в отсутствие поля колеблется с частотой ω_0 . Найти изменение частоты колебаний осциллятора при включении постоянного однородного магнитного поля B . Указать результат решения задачи для случая слабого магнитного поля.

Р е ш е н и е

Уравнение движения осциллятора, совершающего свободные гармонические колебания, как известно из механики, имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0.$$

При включении постоянного магнитного поля уравнение движения осциллятора принимает иной вид:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} [\vec{v} \vec{B}]. \quad (1)$$

Введем систему декартовых координат, направив ось Z вдоль магнитного поля, так чтобы $B_x = B_y = 0$ и $B_z = B$. Тогда уравнение (1) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eB}{m} \dot{y}, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eB}{m} \dot{x}, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0. & (4) \end{cases}$$

Решение уравнения (4) имеет вид: $z = z_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$.

Для того чтобы проинтегрировать уравнения (2) и (3), умножим уравнение (3) на i и почленно сложим его с уравнением (2); в результате получим:

$$(\ddot{x} + i\dot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = -i \frac{eB}{m} (\dot{x} + i\dot{y}).$$

Вводя новую переменную $\xi = x + iy$, последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\ddot{\xi} + 2i \cdot \omega_L \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (5)$$

где $\omega_L = \frac{eB}{2m}$ — абсолютная величина угловой скорости ларморовой прецессии.

Решение уравнения (5) будем искать в виде $\xi = e^{i\omega t}$. Как нетрудно показать, подстановка ξ в уравнение (5) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\omega^2 + 2\omega_L \cdot \omega - \omega_0^2 = 0,$$

корни которого равны:

$$\omega_1 = -\omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} \quad \text{и} \quad -\omega_2 = \omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}.$$

Решения уравнений (2) и (3) после несложных преобразований можно представить в виде:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega_1 t + B \cos |\omega_2| t, \\ y = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \sin |\omega_2| t. \end{cases}$$

Таким образом, осциллятор, как показывает решение уравнения (1), участвует одновременно в трех колебаниях с частотами.

$$\omega_0, \quad -\omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} \quad \text{и} \quad \omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}, \quad (6)$$

так что в его спектре обнаруживаются три линии вместо одной, соответствующей частоте свободных колебаний. Явление, состоящее в возникновении двух смещенных линий в спектре гармонического осциллятора при включении однородного постоянного магнитного поля наряду с основной линией, соответствующей собственным свободным колебаниям осциллятора, известно в оптике под названием эффекта Зеемана.

В слабых магнитных полях ларморова частота ω_L , как правило, мала по сравнению с частотой свободных колебаний осциллятора ω_0 . Поэтому в выражениях (6) величиной ω_L^2 можно пренебречь по сравнению с ω_0^2 . Отсюда при наличии слабого постоянного магнитного поля в спектре осциллятора будут наблюдаться линии, соответствующие частотам:

$$\omega_0, \quad (\omega_0 - \omega_L) \quad \text{и} \quad (\omega_0 + \omega_L). \quad (7)$$

Задачи для самостоятельного решения

209*. Исходя из уравнения Максвелла для макрополя $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, где \vec{j} — плотность тока проводимости, и зная определение векторов электрической и магнитной

индукции \vec{D} и \vec{B} , найти среднюю (по физически бесконечно малой площадке) плотность тока намагничения путем усреднения уравнения Лоренца

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \vec{j}_{\text{микро}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}.$$

210*. Показать, что в неферромагнитной среде плотность тока намагничения пропорциональна сумме плотностей тока проводимости, тока поляризации и тока смещения в вакууме, т. е.

$$\vec{j}_{\text{мол}} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{поляри}} + \vec{j}_{\text{см}}).$$

211*. Атом водорода помещен в однородное электрическое поле, перпендикулярное к плоскости электронной орбиты. Показать, что его поляризуемость $\alpha \cong 4\pi\epsilon_0 a^3$, где a — радиус электронной орбиты.

212*. Для изготовления линз, предназначенных для проведения опытов с сантиметровыми электромагнитными волнами, был предложен искусственный диэлектрик, представляющий собой кубическую решетку из проводящих сфер радиуса a . Какой диэлектрической проницаемостью обладает такой диэлектрик, если на единицу его объема приходится N сфер? Решить задачу двумя способами: 1) используя данные задачи 15 о поляризуемости проводящей сферы внешним однородным полем; 2) рассматривая описанный выше диэлектрик в качестве мелкодисперсной системы и используя формулу (7) задачи 117 для диэлектрической проницаемости смеси.

213*. Вычислить дипольные моменты молекул полярных газов HCl и HBr, молярные поляризуемости которых при $T_1 = 300^\circ\text{K}$ и $T_2 = 1000^\circ\text{K}$ соответственно равны: $3,22 \cdot 10^{-12}$ и $1,67 \cdot 10^{-12}$; $2,28 \cdot 10^{-12}$ и $1,39 \cdot 10^{-12}$ $\text{ф} \cdot \text{м}^2/\text{моль}$.

214*. Определить энергию взаимодействия двух дипольных молекул с моментами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 с учетом теплового движения, препятствующего их взаимной ориентации.

215*. Пользуясь результатами задачи 120, рассмотреть влияние отрицательных значений ϵ на распространение электромагнитных волн. Считая, что на каждый атом в кристаллическом натрии приходится один свободный электрон, найти критическую частоту, т. е. ту частоту, при которой $K = 0$. Плотность натрия $\rho = 9,7 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$.

216*. Найти поляризуемости электрона, упруго связанного с ядром, в поле световой волны с частотой ω : а) без учета сил лучистого трения; б) с учетом торможения электрона вследствие излучения.

217*. Определить эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной световой волны электроном, упруго связанным с ядром: а) без учета сил лучистого трения; б) с учетом торможения электрона вследствие излучения.

218*. Торможение в веществе заряженных частиц, движущихся прямолинейно и равномерно и, следовательно, не способных излучать (рассматриваются движения со скоростями, меньшими скорости света в веществе, при которых излучение Вавилова — Черенкова не возникает), объясняется потерями энергии у таких частиц в результате их электродинамического взаимодействия с электронами вещества (ионизационные потери).

Пусть тяжелая заряженная частица с зарядом e_1 пролетает со скоростью v на расстоянии a от электрона. Определить величину энергии, получаемой электроном и соответственно теряемой тяжелой частицей в результате их взаимодействия.

219*. По медному проводу течет постоянный ток с плотностью, равной 10^4 а/м². Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов, считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Какова при этом средняя длина свободного пробега электрона при комнатной температуре 300°К?

220*. Исходя из основных представлений классической электронной теории металлов, объяснить, почему разность потенциалов между непосредственно соприкасающимися металлами A и B равна разности потенциалов между теми же металлами, соединенными между собой металлическим проводом C .

221*. Две бесконечные металлические пластины, к которым приложена постоянная разность потенциалов V , помещены в вакуум. Отрицательно заряженная пластина (катод) накаляется, становясь источником свободных электронов, — между пластинами течет термоэлектронный ток. Определить зависимость плотности термоэлектронного тока от величины приложенной разности потенциалов.

222*. Показать, что если заданы концентрации электронов n_- и дырок n_+ , то постоянная Холла оказывается пропорциональной величине

$$\frac{n_- a^2 - n_+}{e (n_- a + n_+)^2},$$

где $a = \frac{\mu_-}{\mu_+}$ — отношение подвижностей электронов и дырок.

223*. В образце германия подвижности электронов и дырок соответственно равны $0,36$ и $0,16 \text{ м}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$. Какая часть тока переносится дырками, если в этом образце эффект Холла не наблюдается?

224*. Доказать теорему Лармора для электрона, обращающегося по круговой орбите вокруг ядра в атоме водорода, находящемся в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости электронной орбиты.

225*. Источник света помещен в магнитное поле напряженностью в $3 \cdot 10^6 \text{ а/м}$. Вычислить ларморову частоту прецессии электронных орбит и определить длину волны, соответствующую этой частоте.

226*. Экспериментальное значение молярной диамагнитной восприимчивости гелия равно $-1,9 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$. На каком расстоянии от ядра обращаются (в среднем) электроны в атоме гелия?

227*. Определить величину диамагнитного тока, возникающего в атоме с порядковым номером Z вследствие прецессии электронных орбит.

228*. Атом со сферически симметричным распределением электронов помещен в однородное магнитное поле H_0 . Показать, что добавочное магнитное поле вблизи ядра, обусловленное диамагнитными токами, равно:

$$\Delta H = -\frac{eH_0}{3mc^2} \Phi(0),$$

где $\Phi(0)$ — электростатический потенциал, создаваемый вблизи ядра атомными электронами. Оценить приближенно величину $\frac{\Delta H}{H_0}$ для атома с $Z = 50$, приняв, что все электроны атома находятся на расстоянии

$$r = \frac{e_0 h^2}{Z \pi m e^2}$$

от ядра, где h — постоянная Планка.

229*. Если принять за основу величину анизотропии молярной диамагнитной восприимчивости бензола ($-678,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{моль}$), то анизотропию диамагнитных

свойств ароматических соединений, молекулы которых построены из бензольных колец, можно оценить с помощью следующего приема: изготавливается проволочная модель, имеющая форму, подобную структурной формуле молекулы, которую располагают в магнитном поле так, чтобы ее плоскость оказалась перпендикулярной к направлению поля. Магнитный момент такой модели пропорционален диамагнитной анизотропии.

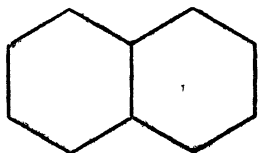


Рис. 115

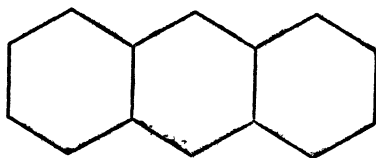


Рис. 116

Показать, что для молекулы нафталина (рис. 115) индуцированный π -электронный ток составляет $\frac{6}{5}$ тока, циркулирующего в молекуле бензола, так что оцененная указанным образом анизотропия магнитного момента у нафталина будет в $\frac{12}{5}$ раза больше, чем у бензола.

230*. Пользуясь законами Кирхгофа для разветвленных контуров с током, показать, что анизотропия магнитного момента у антрацена в $\frac{66}{17}$ раза больше, чем у бензола, применив для этой цели указанный в предыдущей задаче метод к молекуле антрацена, структурная формула которой изображена на рисунке 116.

231*. Найти первые два члена в разложении парамагнитной восприимчивости в ряд по степеням малого отношения $\frac{\mu_0 m H}{kT}$.

232*. Парамагнитная соль содержит 10^{23} ионов/ m^3 . Магнитный момент каждого иона равен 1 магнетону Бора

$$\left(m_B = \frac{eh}{4\pi m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ а} \cdot \text{м}^2 \right).$$

Вычислить, на сколько число ионов с магнитными моментами, параллельными магнитному полю, будет превышать число ионов, у которых магнитные моменты

антипараллельны полю, если величина напряженности поля составляет $8 \cdot 10^5 \text{ а/м}$, а температура равна 300° К .

233*. Вычислить (для случая магнитного насыщения) магнитный момент 1 килограмм-моля парамагнитного газа, считая известной постоянную Кюри C .

234*. Между полюсами электромагнита помещена кальциевая дуга. Ее спектральная линия с длиной волны $\lambda = 4226,7 \text{ \AA}$ испытывает при этом нормальный эффект Зеемана. Определить разность длин волн смещенной и несмещенной линий, если поле между полюсами электромагнита однородно и равно $2 \cdot 10^6 \text{ а/м}$.

ГЛАВА V

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

128. Система координат K' движется относительно системы K со скоростью \vec{v} , направленной произвольным образом. Найти формулу преобразования радиуса-вектора \vec{r}' какой-либо материальной точки в системе K' к радиусу-вектору \vec{r} той же точки в системе K .

Решение

Если рассматривать проекции векторов \vec{r} и \vec{r}' на направление скорости системы отсчета K' , т. е.

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} \text{ и } \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v}$$

и их проекции на направление, перпендикулярное к вектору скорости системы K' , т. е. r_{\perp} и r'_{\perp} , то указанные величины можно рассматривать в качестве координат x и x' ; y и y' в обычной схеме движения системы K' относительно системы K , используемой при выводе преобразований Лоренца, когда система K' движется относительно системы K так, как это показано на рисунке 117.

Полагая поэтому

$$x = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v} \text{ и } x' = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}}{v}$$

и используя преобразование Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

находим:

$$\frac{\vec{r}' \vec{v}}{v} = \frac{\vec{r} \vec{v} - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Считая $r_1 = y$ и $r'_1 = y'$ и используя преобразования Лоренца, находим:

$$r'_1 = r_1. \quad (2)$$

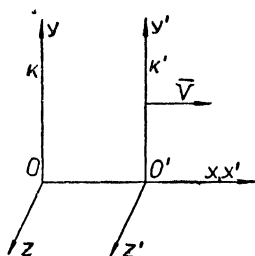


Рис. 117

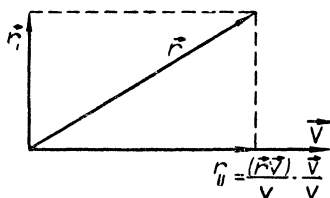


Рис. 118

Последнее равенство представим в таком виде, чтобы в него входили векторы \vec{r} и \vec{r}' . Для этого обратимся к рисунку 118; так как $\vec{r}_I + \vec{r}_{II} = \vec{r}$, то

$$\vec{r}_I = \vec{r} - \vec{r}_{II} = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \vec{v}) \vec{v}}{v^2}$$

и аналогично

$$\vec{r}'_I = \vec{r}' - \frac{(\vec{r}' \vec{v}) \vec{v}}{v^2}.$$

Так как векторы \vec{r}_I и \vec{r}'_I параллельны между собой, то, очевидно, можно вместо равенства модулей этих векторов записать равенство самих векторов, т. е.

$$\vec{r}' - \frac{(\vec{r}' \vec{v}) \vec{v}}{v^2} = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \vec{v}) \vec{v}}{v^2}. \quad (2a)$$

Далее, умножим равенство (1) на единичный вектор $\frac{\vec{v}}{v}$; это дает:

$$\frac{(\vec{r}' \vec{v}) \vec{v}}{v^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(\vec{r} \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \vec{v}t \right\}. \quad (1a)$$

Складывая (1a) с (2a), получаем искомую формулу преобразования:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \vec{v}) \vec{v}}{v^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(\vec{r} \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \vec{v}t \right\}.$$

129. π -мезон, образовавшийся во время столкновения космической частицы высокой энергии с ядром, обладает энергией в 5000 Мэв. Среднее время жизни π -мезона τ в системе отсчета, в которой π -мезон покоится, равно 10^{-8} сек. Определить время жизни τ' мезона в лабораторной системе отсчета. Какой путь может пройти π -мезон с момента своего возникновения до распада? Массу π -мезона принять равной 276 электронным массам

Р е ш е н и е

а) Время жизни τ' мезона в лабораторной системе

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m_{\pi} c^2} \tau, \quad (1)$$

так как $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_{\pi} \frac{c^2}{E}$. Энергия покоя π -мезона

$$m_{\pi} c^2 = 276 m_e c^2,$$

или так как $m_e c^2 = 0,5108$ Мэв, то $m_{\pi} c^2 = 141$ Мэв. Отсюда

$$\tau' = \frac{5000}{141} \cdot 10^{-8} \text{ сек} = 3,546 \cdot 10^{-7} \text{ сек}.$$

б) Путь, проходимый π -мезоном с момента его возникновения до распада. Из формулы Эйнштейна

$$E = m_{\pi} c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

нетрудно определить скорость, с которой движется мезон:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}}.$$

Считая движение мезона равномерным, находим:

$$S = v\tau' = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} \cdot \frac{E}{m_0 c^2} = 106,3 \text{ м.}$$

130. Написать формулы преобразования Лоренца для составляющих вектора ускорения релятивистской частицы.

Р е ш е н и е

Исходим из закона сложения скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (1)$$

и из определения составляющих вектора ускорения частицы

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} \quad (\text{в системе } K) \quad \text{и} \quad W'_x = \frac{dv'_x}{dt'} \quad (\text{в системе } K') \quad \text{и т. д.}$$

Дифференцируя первое из соотношений (1) по времени t системы K , находим:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) \frac{dv'_x}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} - (v'_x + V) \frac{V}{c^2} \frac{dv'_x}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt}}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)^2}$$

или

$$W_x = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) W'_x}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{dt'}{dt}. \quad (2)$$

Далее, продифференцируем одну из основных формул преобразования Лоренца

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Находим:

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}}. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в формулу (2), окончательно находим:

$$W_x = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)^3} \cdot W'_x.$$

Аналогичным образом поступаем и в двух других случаях (мы приводим лишь окончательные результаты, предоставляя возможность читателю проделать все необходимые выкладки самому):

$$W_y = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left[\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) W'_y - \frac{v'_y V}{c^2} W'_x \right]}{\left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)^3},$$

$$W_z = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left[\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) W'_z - \frac{v'_z V}{c^2} W'_x \right]}{\left(1 + v'_x \frac{V}{c^2}\right)^3}.$$

131. Частица движется со скоростью $\vec{v}(t)$ относительно неподвижной системы отсчета K . Определить мгновенное значение a_0 ускорения частицы в подвижной системе отсчета K' , относительно которой ее скорость в некоторый момент времени t'_0 равна нулю, в случае, если: а) скорость \vec{v} меняется только по направлению; б) \vec{v} меняется только по величине.

Р е ш е н и е

Обратимся к рассмотрению составляющих четырехмерного вектора ускорения частицы ($W_i = \frac{du_i}{dS}$):

$$W_\alpha = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (1)$$

$$W_4 = \frac{i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

или

$$\begin{cases} W_\alpha = \frac{1}{c^2 - v^2} \frac{dv_\alpha}{dt} + \frac{vv_\alpha}{(c^2 - v^2)^2} \frac{dv}{dt} \\ W_4 = \frac{icv}{(c^2 - v^2)^2} \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

где W_α — пространственные и W_4 — временная составляющие 4-вектора ускорения (о 4-векторах см.: Ю. Б. Р у м е р, М. С. Р ы в к и н. Теория относительности. М., Учпедгиз, 1960).

Составляющие 4-вектора ускорения относительно системы отсчета K' в момент времени t'_0 :

$$W'_\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{dv'_\alpha}{dt'}; \quad W'_4 = 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^4 (W'_i)^2 = \frac{1}{c^4} \left[\left(\frac{dv'_x}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dv'_y}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dv'_z}{dt'} \right)^2 \right] = \frac{a_0^2}{c^4}. \quad (2)$$

Величина (2) не изменяется при переходе от системы отсчета K' к любой другой инерциальной системе отсчета, являясь инвариантом преобразований Лоренца.

Составляющие 4-вектора ускорения частицы в системе отсчета K : а) в случае, когда скорость \vec{v} частицы меняется только по направлению,

$$W_\alpha = \frac{1}{c^2 - v^2} \frac{dv_\alpha}{dt}, \quad W_4 = 0,$$

и

$$\sum_{i=1}^4 W_i^2 = \frac{1}{(c^2 - v^2)^2} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|^2, \quad (3)$$

откуда, сравнивая (3) с (2), находим:

$$a_0 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|; \quad (4)$$

б) в случае, когда \vec{v} меняется только по величине, подставляя в (1) $v_\alpha = v \cos \gamma_\alpha$, где $\gamma_\alpha = (\vec{v}, \hat{x}_\alpha)$, и дифференцируя; считая направление скорости неизменным, находим:

$$W_\alpha = \frac{\cos \gamma_\alpha}{c^2 - v^2} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v^2 \cos \gamma_\alpha}{(c^2 - v^2)^2} \frac{dv}{dt} = c^2 \frac{\cos \gamma_\alpha}{(c^2 - v^2)^2} \cdot \frac{dv}{dt},$$

$$W_4 = \frac{icv}{(c^2 - v^2)^2} \frac{dv}{dt},$$

откуда, учитывая $\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1$,

$$\sum_{i=1}^4 W_i^2 = \frac{c^2}{(c^2 - v^2)^3} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|^2 \quad (5)$$

и, следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|. \quad (6)$$

132. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 , причем обе частицы соединяются в одну сложную частицу. Определить массу M и скорость V этой сложной частицы.

Р е ш е н и е

Запишем законы сохранения энергии и количества движения:

$$E_1 + E_2 = E \quad \text{и} \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

или, так как

$$E_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_2 = m_2 c^2 \quad (\text{энергия покоя});$$

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \vec{p}_1 = \frac{m_1 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \vec{p} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_2 c^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ \frac{m_1 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \end{array} \right.$$

откуда после возведения обеих частей написанных выше уравнений в квадрат получим:

$$\frac{\left(m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{c^2 - v^2} = \frac{M^2}{c^2 - V^2}, \quad (1)$$

$$\frac{m_1^2 v^2}{c^2 - v^2} = \frac{M^2 V^2}{c^2 - V^2}. \quad (2)$$

В результате почленного деления уравнения (2) на уравнение (1) получаем:

$$V^2 = \frac{m_1^2 v^2}{\left(m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2},$$

откуда

$$V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Такова скорость образовавшейся после соединения частиц m_1 и m_2 сложной частицы.

Далее, из уравнения (1) находим:

$$M^2 = (c^2 - V^2) \cdot \frac{\left(m_1 + m_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{c^2 - v^2}.$$

Подставляя сюда скорость V по формуле (3), после ряда несложных преобразований получим:

$$M = \left(m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

133. π -мезон с массой $m_\pi = 276 m$, находящийся в состоянии покоя, распадается на μ -мезон с массой $m_\mu = 216 m$ и нейтрино ν с нулевой массой покоя. Определить кинетическую энергию μ -мезона и нейтрино.

Р е ш е н и е

Используем законы сохранения энергии и импульса системы:

$$\begin{cases} m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu, \\ \vec{P}_\mu + \vec{P}_\nu = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu, \\ P_\mu^2 = P_\nu^2. \end{cases}$$

Далее, воспользуемся тем, что $\frac{E_\mu^2}{c^2} = P_\mu^2 + m_\mu^2 c^2$ и $\frac{E_\nu^2}{c^2} = P_\nu^2$.

После этого уравнение (2) принимает вид: $E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4 = E_\nu^2$, откуда

$$E_\nu = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}. \quad (3)$$

Подстановка выражения (3) в уравнение (1) дает:

$$m_\pi c^2 = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4},$$

откуда полная энергия μ -мезона

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2) c^2}{2m_\pi} = 113,67 \text{ Мэв}$$

и его кинетическая энергия

$$T_\mu = E_\mu - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi} = 3,34 \text{ Мэв.}$$

Кинетическая энергия нейтрино совпадает с его полной энергией

$$T_\nu = E_\nu = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} = \sqrt{T_\mu^2 + 2m_\mu c^2 T_\mu} = 27,35 \text{ Мэв.}$$

134. Согласно классическому определению фотон представляет собой частицу, не имеющую массы покоя, но обладающую импульсом $\frac{h\nu}{c}$ и энергией $h\nu$. При соударении с покоящимся электроном массы m_0 фотон отклоняется на некоторый угол θ и движется с новой энергией $h\nu'$. Показать, что связь между изменением длины волны фотона и углом θ определяется формулой:

$$\lambda' - \lambda = 2 \cdot \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Найти также кинетическую энергию, приобретаемую электроном после соударения.

Р е ш е н и е

а) Запишем законы сохранения энергии и импульса системы:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

$$\frac{\vec{h\nu}}{c} = \frac{\vec{h\nu'}}{c} + \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Последнее уравнение преобразуем, воспользовавшись тем, что по теореме косинусов из векторного треугольника (рис. 119)

$$\frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h^2 \nu^2}{c^2} + \frac{h^2 (\nu')^2}{c^2} - 2h^2 \frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \theta,$$

или

$$\frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = h^2 \nu^2 + h^2 (\nu')^2 - 2h^2 \nu\nu' \cos \theta. \quad (3)$$

Перепишем теперь уравнение (1) в виде:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h\nu - h\nu' + m_0 c^2$$

и полученное уравнение возведем в квадрат

$$\frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = h^2 v^2 + h^2 (v')^2 + m_0^2 c^4 + 2 h v m_0 c^2 - 2 h v' m_0 c^2 - 2 h^2 v v'. \quad (4)$$

Из уравнения (4) вычтем уравнение (3); это дает:

$$m_0^2 c^4 = m_0^2 c^4 + 2 h m_0 c^2 (v - v') - 2 h^2 v v' (1 - \cos \theta)$$

или

$$m_0 c^2 (v - v') = h v v' (1 - \cos \theta). \quad (5)$$

Разделив уравнение (5) на

$v v'$ и учтя, что $\frac{c}{v} = \lambda$ и $\frac{c}{v'} = \lambda'$, получим:

$$m_0 c (\lambda' - \lambda) = 2 h \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

откуда

$$\lambda' - \lambda = 2 \cdot \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

б) Кинетическая энергия электрона после соударения с фотоном будет согласно формуле (1) равна:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = h (v - v').$$

Частоту фотона v' после соударения можно определить из уравнения (5). Она оказывается равной:

$$v' = \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + 2 h v \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}} v.$$

Отсюда кинетическая энергия электрона

$$T = \frac{2 (h v)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{m_0 c^2 + 2 h v \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

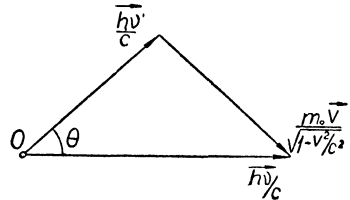


Рис. 119

135. Пользуясь формулой преобразования Лоренца для энергии частицы, получить релятивистскую формулу эффекта Доплера.

Решение

В собственной координатной системе атом излучает фотон с частотой ν' и импульсом $\frac{h\nu'}{c}$, составляющим угол φ' с направлением движения атома (рис. 120).

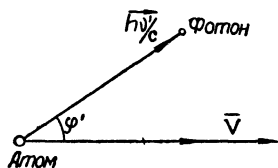


Рис. 120

Для определения частоты ν фотона в лабораторной (неподвижной) системе отсчета обратимся к формуле преобразования Лоренца для энергии [см.: А. С. К о м п а н е е ц. Теоретическая физика, 1957, стр. 205, формула (21, 18)]:

$$E = (E' + p'_x V) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставляя сюда $E = h\nu$, $E' = h\nu'$ и $p'_x = \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi'$, получим:

$$h\nu = \frac{h\nu' + h\nu' \frac{V}{c} \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

откуда после сокращения на h получаем искомую формулу:

$$\nu = \nu' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

136. Определить скорость той системы отсчета, в которой общий импульс системы из n частиц равен нулю.

Решение

Пусть \vec{p}_i — импульс i -й частицы относительно неподвижной системы отсчета K , а $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ — их общий им-

пульс; и пусть $\vec{P}' = \sum_i \vec{p}'_i$ — общий импульс системы частиц относительно подвижной системы отсчета K' . Выберем ось X вдоль вектора \vec{P} (и, следовательно, вдоль вектора \vec{P}') и воспользуемся формулой преобразования Лоренца для x -й составляющей вектора импульса (см. задачу 247*)

$$P'_x = \frac{P_x - \frac{V}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда $\vec{P}'_x = \vec{P}'$, $\vec{P}_x = \sum_i \vec{p}_i$ и приравнявая полученное выражение нулю, находим:

$$\vec{P}' = \frac{\left(\sum_i \vec{p}_i - \frac{\vec{V}}{c^2} E \right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0.$$

откуда скорость системы отсчета K' , относительно которой импульс системы частиц равен нулю, оказывается равной:

$$\vec{V} = c^2 \cdot \frac{\sum_i \vec{p}_i}{E}$$

или

$$\vec{V} = c^2 \cdot \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i \vec{E}_i}. \quad (1)$$

Чтобы получить из выражения (1) нерелятивистскую формулу для скорости центра инерции

$$\vec{V} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i},$$

необходимо положить в (1): $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ и $E_i = m_i c^2$.

137. Показать, что если учитывать релятивистский эффект зависимости массы от скорости, то движение электрона в поле ядра с зарядом Ze оказывается происходящим по эллипсу, медленно поворачивающемуся в своей плоскости (или по «розетке»).

Решение

При решении задачи мы не будем учитывать движение самого ядра, считая ядро достаточно тяжелым, а его центр примем за полюс полярной системы координат (r, φ) .

Исходим из законов сохранения энергии и момента импульса:

$$\begin{cases} E = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} + \frac{\alpha}{r}; & \alpha = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}, \\ M = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad \quad \quad (2)$$

Так же как и в классической механике

$$p^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2},$$

где

$$p_r = \frac{m \dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) дает:

$$\left(E - \frac{\alpha}{r}\right)^2 = c^2 \left(p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) + m^2 c^4,$$

откуда

$$p_r = \sqrt{\frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} + \frac{\frac{\alpha^2}{c^2} - M^2}{r^2} - \frac{2\alpha E}{c^2 r}}. \quad (4)$$

С другой стороны, исключая время t из уравнений (2) и (3), находим:

$$d\varphi = \frac{M dr}{r^2 p_r}$$

и

$$p_r = \frac{M dr}{r^2 d\varphi}. \quad (5)$$

Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), приходим к дифференциальному уравнению траектории электрона в полярных координатах:

$$d\varphi = \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{D - \frac{A^2}{r^2} - \frac{2B}{r}}}, \quad (6)$$

где

$$A^2 = \frac{c^2 M^2 - \alpha^2}{c^2}; \quad B = \frac{\alpha E}{c^2}; \quad D = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2}. \quad (6a)$$

Вводя новую переменную $x = \frac{1}{r}$ и выполняя интегрирование уравнения (6), получаем:

$$\varphi = \frac{M}{A} \operatorname{arccos} \frac{\frac{A}{r} + \frac{B}{A}}{\sqrt{D + \frac{B^2}{A^2}}}, \quad (7)$$

причем постоянная интегрирования оказывается равной нулю в силу того, что мы принимаем $\varphi = 0$ при $r = r_{\min}$.

Решая уравнение (7) относительно $\frac{1}{r}$, находим уравнение траектории электрона:

$$\frac{1}{r} = K + L \cos \gamma \varphi. \quad (8)$$

Уравнение (8) отличается от соответствующего нерелятивистского уравнения эллиптической орбиты электрона (см. задачу 104) наличием множителя γ в аргументе косинуса. Этот множитель равен:

$$\gamma = \frac{A}{M} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{cM}\right)^2}, \quad (9)$$

откуда видно, что $\gamma \rightarrow 1$ при $c \rightarrow \infty$, и уравнение (8) тем самым переходит в обычное уравнение эллипса. Как правило $\alpha \ll cM$ и поэтому γ очень мало отличается от единицы.

Форма релятивистской орбиты электрона показана на рисунке 121; точка O обозначает полюс, в котором находится ядро; точка P — начальное положение перигелия орбиты. Угол φ отсчитывается от прямой OP .

Если электрон в начальный момент находился в перигелии, то следующий раз он оказывается в перигелии не в тот момент, когда угол $\varphi = 2\pi$, а в момент, когда $\gamma\varphi = 2\pi$, т. е. при повороте на угол

$$\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} > 2\pi. \quad (10)$$

Таким образом, большая полуось эллипса, по которому обращается электрон, вращается в свою очередь вокруг точки O , причем угловой сдвиг перигелия орбиты электрона за один период оказывается равным

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right). \quad (11)$$

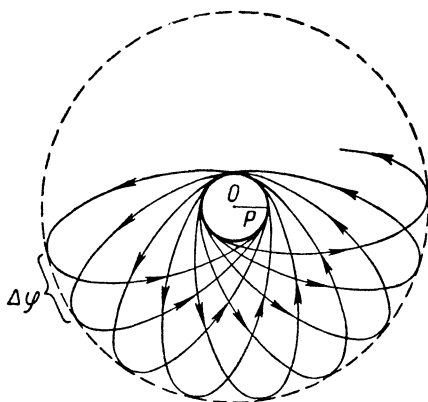


Рис. 121

В заключение представим уравнение релятивистской орбиты электрона в явном виде, подставив в (8) постоянные K , L и γ из (6а):

$$(c^2 M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = -\alpha E + c \sqrt{E^2 M^2 - m^2 c^2 (c^2 M^2 - \alpha^2)} \cdot \cos \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}} \varphi. \quad (12)$$

Любопытно отметить, что уравнение (12) представляет собой уравнение эллипса лишь в том случае, если $E < mc^2$ и $\alpha < 0$.

Чтобы от уравнения (12) перейти к нерелятивистскому случаю, необходимо положить в нем $E = -\mathcal{E} + mc^2$, где

$0 < \mathcal{E} < mc^2$, и произвести предельный переход при $c \rightarrow \infty$. Подставляя в (12) $E = -\mathcal{E} + mc^2$, находим:

$$\begin{aligned} & \left(M^2 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right) \frac{1}{r} = \\ & = \sqrt{\frac{M^2(\mathcal{E}^2 + m^2c^4 - 2\mathcal{E} \cdot mc^2) - m^2c^2M^2 + m^2\alpha^2 \cdot \cos \varphi}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2M^2}} \varphi + \\ & \quad + \frac{(\mathcal{E} - mc^2)\alpha}{c^2}, \end{aligned}$$

откуда при $c \rightarrow \infty$ получаем:

$$\frac{1}{r} = \frac{mZe^2}{4\pi\epsilon_0 M^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{32\pi^2\epsilon_0^2 \mathcal{E} M^2}{mZ^2e^4} \cos \varphi}\right). \quad (13)$$

Уравнение (13) совпадает с уравнением, полученным в задаче 104, для эллиптической орбиты нерелятивистского электрона.

Задачи для самостоятельного решения

235*. Круговой цилиндр, движущийся так, как это показано на рисунке 122, в собственной системе отсчета имеет объем Ω_0 . Найти объем цилиндра в лабораторной (неподвижной) системе отсчета.

236*. Получить закон сложения скоростей Эйнштейна из формул преобразования Лоренца для четырехмерного вектора скорости $u_i = c \frac{dx_i}{dS}$.

237*. Найти, исходя из закона сложения скоростей в релятивистской кинематике, скорость света в движущейся жидкости в условиях опыта Физо (скорость жидкости $v \ll c$) (рис. 123).

238*. Два наблюдателя, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью v , принимают световой луч, идущий от какой-нибудь звезды. Какова относительная скорость наблюдателей v , если световой луч в собственной системе отсчета первого наблюдателя составляет с направлением относительно скорости v угол α , а в собственной системе отсчета второго наблюдателя — угол α' ?

239*. Рассмотреть уравнение движения $\vec{p} = \vec{F}$ релятивистской частицы и показать, что ее ускорение параллельно силе лишь в тех случаях, когда скорость частицы и внеш-

ная сила параллельны или перпендикулярны друг к другу. Найти коэффициенты пропорциональности между силой и ускорением в этих двух случаях.

240*. Вывести релятивистские выражения для кинетической энергии и полной энергии из дифференциального уравнения движения $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.

241*. Электрон движется в продольном электрическом поле и проходит разность потенциалов в φ вольт. Найти скорость электрона, считая ее сравнимой со скоростью света.

Указать приближенное выражение для скорости электрона в случае, когда кинетическая энергия электрона много меньше его энергии покоя.

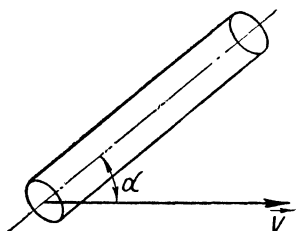


Рис. 122

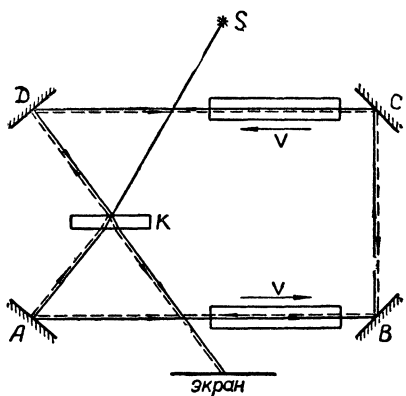


Рис. 123

242*. Оценить ежесекундный расход массы Солнца вследствие излучения, приняв среднее расстояние от Земли до Солнца равным 150 млн. км.

243*. В так называемой полевой теории материи вся энергия покоящегося электрона считается полностью связанной своим происхождением электростатическому полю, возбуждаемому электроном. В такой теории электрон рассматривается как протяженная частица, занимающая в пространстве некоторый объем, в противовес обычному представлению об электроне как о точечном образовании.

Считая электрон шариком радиуса r_0 , определить величину этого радиуса для двух случаев: а) заряд электрона распределен равномерно по поверхности шара; б) заряд

электрона распределен равномерно по объему шара. Заряд и масса электрона считаются известными.

244*. Покоящееся тело с массой M распадается на две части с массами M_1 и M_2 . Определить энергии E_1 и E_2 этих частей.

245*. Исходя из законов сохранения энергии и импульса, показать, что при каждом акте спонтанного (самопроизвольного) распада π -мезона должно выбрасываться не менее двух частиц.

246*. Написать выражения для импульса и энергии релятивистской частицы через интервал dS и показать, что составляющие вектора импульса \vec{p} и $\frac{i}{c}E$ образуют четырехмерный вектор.

247*. Написать формулы преобразования Лоренца для составляющих импульса и энергии релятивистской частицы, применяя общее правило преобразования составляющих четырехмерного вектора.

$$a_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} a'_k,$$

где α_{ik} — тензор преобразования Лоренца:

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

248*. Выразить ускорение заряженной релятивистской частицы, движущейся в электромагнитном поле, через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей.

249*. Параллельный пучок электронов, ускоряемый разностью потенциалов φ , создает ток, равный I . Сечение электронного пучка представляет собой круг радиуса a . Определить величину нормального к пучку ускорения электрона, находящегося на поверхности пучка.

250*. Показать, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета K к другой K' фаза $(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$ плоской монохроматической волны является инвариантом.

§ 2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Формулы преобразования Лоренца для составляющих электромагнитного поля в произвольной материальной среде:

В системе СИ

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z + V \cdot B_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2)$$

или

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{V} \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{V} \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (4)$$

где \vec{V} — скорость системы отсчета K' относительно системы K ; \vec{E}_{\parallel} , \vec{B}_{\parallel} — составляющие поля, параллельные скорости \vec{V} и \vec{E}_{\perp} , \vec{B}_{\perp} — составляющие поля, перпендикулярные к скорости \vec{V} .

В абсолютной системе

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - \frac{V}{c} B_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z + \frac{V}{c} B_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1a)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2a)$$

или

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3a)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4a)$$

Формулы преобразования Лоренца для составляющих векторов \vec{D} , \vec{H} , \vec{P} и \vec{M} можно получить из формул (3) и (4), воспользовавшись соотношениями $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$ и $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ (или из формул (3a) и (4a) с помощью соотношений $\vec{E} = \vec{D} - 4\pi\vec{P}$ и $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, — в абсолютной системе единиц), при этом следует помнить, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой вектор \vec{D} преобразуется через вектор \vec{H} , а вектор \vec{P} — через вектор \vec{M} . В результате находим следующие формулы преобразования Лоренца для векторов \vec{D} , \vec{H} , \vec{P} и \vec{M} :

В системе СИ

$$\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}, \quad \vec{D}'_{\perp} = \frac{\vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{H}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5)$$

$$\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}, \quad \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp} - [\vec{v} \vec{D}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (6)$$

$$\vec{P}'_{\parallel} = \vec{P}_{\parallel}, \quad \vec{P}'_{\perp} = \frac{\vec{P}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \cdot \vec{M}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (7)$$

$$\vec{M}'_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}, \quad \vec{M}'_{\perp} = \frac{\vec{M}_{\perp} + [\vec{v} \vec{P}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (8)$$

В абсолютной системе

$$\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}, \vec{D}'_{\perp} = \frac{\vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{H}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5a)$$

$$\vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}, \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{D}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (6a)$$

$$\vec{P}'_{\parallel} = \vec{P}_{\parallel}, \vec{P}'_{\perp} = \frac{\vec{P}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{M}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (7a)$$

$$\vec{M}'_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}, \vec{M}'_{\perp} = \frac{\vec{M}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{P}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (8a)$$

138. Определить электромагнитное поле точечного заряда e , движущегося в вакууме с постоянной скоростью \vec{v} , близкой к скорости света c .

Решение

В собственной системе отсчета K' , т. е. в системе, относительно которой заряд покоится, электрическое поле точечного заряда определяется формулами:

$$E'_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E'_y = \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E'_z = \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0(r')^3},$$

а магнитное поле отсутствует.

В лабораторной системе отсчета K по формулам преобразования Лоренца (1) — (2) находим:

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}, \quad E_y = \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{\mu_0 e v z'}{4\pi(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{\mu_0 e v y'}{4\pi(r')^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Здесь
$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Подставляя в r' выражения для x' , y' и z' , записанные через нештрихованные величины, определяемые из формул преобразования Лоренца для четырехмерного радиус-вектора, т. е.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z;$$

получим:

$$r' = \frac{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

где мы ввели обозначение

$$R = \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}.$$

Используя выражение (1), составляющие напряженности электрического поля заряда в лабораторной системе отсчета K можно представить в виде:

$$E_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (x - vt), \quad E_y = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) y,$$

$$E_z = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) z$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{r},$$

где $\vec{r} = (x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Составляющие вектора индукции магнитного поля движущегося заряда можно представить в виде:

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{\mu_0 e v}{4\pi R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) z = -\frac{v}{c^2} E_z,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 e v}{4\pi R^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) y = \frac{v}{c^2} E_y$$

или в векторной форме

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}].$$

139. В лабораторной системе отсчета K электрическое и магнитное поля направлены под углом α друг к другу. Определить скорость движущейся перпендикулярно к обоим полям системы отсчета K' , в которой электрическое и магнитное поля оказываются между собой параллельными.

Р е ш е н и е

Выбираем ось X (общую для систем отсчета K и K') вдоль вектора относительной скорости систем отсчета \vec{V} . Тогда, как сказано в условии задачи,

$$\begin{cases} E_x = 0, E_y \neq 0, E_z \neq 0, \\ B_x = 0, B_y \neq 0, B_z \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Нам требуется выбрать такую систему отсчета K' , в которой $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$, а для этого необходимо, чтобы

$$[\vec{E}', \vec{B}'] = 0. \quad (2)$$

С учетом условий задачи (1) уравнение (2) принимает вид:

$$(E_y - VB_z) \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) - (E_z + VB_y) \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) = 0,$$

откуда, воспользовавшись формулами преобразования Лоренца для составляющих электромагнитного поля, получаем:

$$|[\vec{E} \vec{B}]| \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{V}{c^2} (E^2 + c^2 B^2)$$

или

$$\left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) EB \sin \alpha = \frac{V}{c^2} (E^2 + c^2 B^2),$$

откуда

$$V^2 - \frac{E^2 + c^2 B^2}{EB \sin \alpha} \cdot V + c^2 = 0. \quad (3)$$

Решая уравнение (3) относительно V , находим:

$$V = \frac{E^2 + c^2 B^2 \pm \sqrt{E^4 + c^4 B^4 + 2c^2 E^2 B^2 \cos 2\alpha}}{2EB \sin \alpha}, \quad (4)$$

причем из двух возможных корней должен быть выбран тот, для которого $V < c$.

140. Частица, заряд которой равен e , а масса покоя — m , влетает с начальной скоростью v_0 в однородное и постоянное электрическое поле \vec{E} , перпендикулярное к \vec{v}_0 . Найти траекторию частицы и показать, что при $c \rightarrow \infty$ она принимает вид параболы.

Р е ш е н и е

Если оси декартовой системы координат выбрать так, как это показано на рисунке 124, то релятивистское уравнение движения частицы $\dot{\vec{p}} = e\vec{E}$ принимает вид:

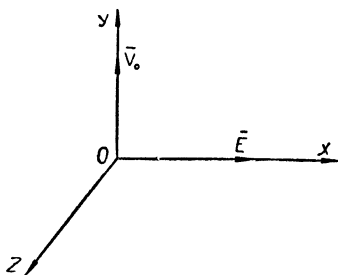


Рис. 124

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

откуда после интегрирования находим:

$$p_x = eEt + C_1; \quad p_y = C_2; \quad p_z = C_3.$$

Из начальных условий ($v_{x0} = v_{z0} = 0$, $v_{y0} = v_0$ при $t = 0$) имеем:

$$C_1 = C_3 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = p_0.$$

Таким образом,

$$p_x = eEt; \quad p_y = p_0; \quad p_z = 0. \quad (1)$$

Из последнего уравнения непосредственно следует, что $z_y = C_4 = 0$ (так как $z_0 = 0$ при $t = 0$), т. е. движение частицы происходит в координатной плоскости XOY .

Для определения функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ воспользуемся соотношением между релятивистским импульсом и энергией

$$\vec{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \vec{p}, \quad (2)$$

где $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$ — кинетическая энергия частицы. Так как

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = p_0^2 + (eEt)^2$$

и начальная кинетическая энергия частицы

$\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}$, то

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (3)$$

Из соотношения (2), используя формулы (1) и (3), находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}$$

Элементарное интегрирование дает:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} + C_5, \\ y = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0} + C_6. \end{cases}$$

Далее, из начальных условий ($x_0 = y_0 = 0$ при $t = 0$) находим:

$$C_5 = -\frac{\mathcal{E}_0}{eE} \quad \text{и} \quad C_6 = 0,$$

после чего выражения для x и y принимают вид:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{eE} [\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - \mathcal{E}_0] \\ y = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}. \end{cases} \quad (4)$$

Исключая из уравнений (4) время t , находим уравнение траектории частицы:

$$x + \frac{\mathcal{E}_0}{eE} = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{cp_0} \quad (5)$$

(о преобразованиях с гиперболическими и обратными гиперболическими функциями см.: И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., Физматгиз, стр. 193—197).

Решение (5) показывает, что в однородном электростатическом поле заряженная релятивистская частица движется по цепной линии.

Чтобы перейти от решения (5) к классическому случаю, разложим $\operatorname{ch} \frac{eEy}{cp_0}$ в ряд по степеням отношения $\frac{1}{c}$, ограничившись в этом разложении первыми двумя членами. Это разложение имеет вид:

$$\operatorname{ch} \frac{eEy}{cp_0} \approx 1 + \frac{e^2 E^2 y^2}{2c^2 p_0^2} \quad (6)$$

(см.: И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, стр. 329). Подстановка формулы (6) в уравнение (5) дает:

$$x = \frac{eE \cdot \mathcal{E}_0 y^2}{2c^2 p_0^2}. \quad (5a)$$

Положим в (5a), кроме того, $p_0 = mv_0$ (классический импульс частицы) и $\mathcal{E}_0 = mc^2$ (как видите, при переходе от релятивистских формул к классическим обязателен также и учет энергии покоя частицы); тогда

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} \cdot y^2.$$

Такой результат мы получили бы в том случае, если с самого начала решали данную задачу методами классической механики.

141. Электрон влетает в однородное и постоянное магнитное поле с начальной скоростью v_0 , перпендикулярной к направлению поля. Найти траекторию электрона.

Р е ш е н и е

Прежде всего покажем, что энергия электрона при его движении в магнитном поле сохраняется неизменной. Это видно из того, что

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = e [\vec{v} \vec{B}] \vec{v} = 0.$$

Следовательно, во все время движения электрона его энергия оказывается равной

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2}.$$

Выбирая направление поля \vec{B} за ось Z , уравнения движения электрона можно записать в виде:

$$\frac{dp_x}{dt} = eBv_y; \quad \frac{dp_y}{dt} = -eBv_x; \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

или

$$dp_x = eBdy; \quad dp_y = -eBdx; \quad dp_z = 0,$$

откуда

$$p_x = eBy; \quad p_y = -eBx; \quad p_z = A.$$

Воспользовавшись соотношением между импульсом и энергией частицы (см. предыдущую задачу), можно, далее, записать следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}_0} = \frac{c^2 eB}{\mathcal{E}_0} y, \quad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{c^2 p_y}{\mathcal{E}_0} = -\frac{c^2 eB}{\mathcal{E}_0} x, \quad (2)$$

$$\dot{z} = \frac{c^2 p_z}{\mathcal{E}_0} = \frac{c^2 A}{\mathcal{E}_0} = \text{const}, \quad (3)$$

причем очевидно, что в уравнении (3) константа должна быть равна 0, ибо в момент $t = 0$ скорость электрона перпендикулярна к направлению поля, а следовательно, и к оси Z . Это показывает, что движение электрона происходит в плоскости $z = z_0$, перпендикулярной к направлению поля.

Продифференцируем уравнение (1) еще раз по времени t ; это дает:

$$\ddot{x} = \frac{c^2 eB}{\mathcal{E}_0} \dot{y};$$

подставляя сюда \dot{y} из уравнения (2), получаем новое уравнение для определения зависимости $x = x(t)$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{c^2 e B}{\mathcal{E}_0} \right)^2 x = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$x = a \sin \left(\frac{c^2 e B}{\mathcal{E}_0} t + \alpha \right). \quad (4)$$

Подставляя отсюда x в уравнение (2) и интегрируя, находим:

$$y = a \cos \left(\frac{c^2 e B}{\mathcal{E}_0} t + \alpha \right). \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) показывают, что электрон обращается по окружности радиуса a с частотой

$$\omega = \frac{c^2 e B}{\mathcal{E}_0}. \quad (6)$$

Чтобы определить радиус окружности, найдем скорость электрона. Она оказывается равной

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{c^2 e B}{\mathcal{E}_0} a.$$

С другой стороны, скорость электрона остается во все время его движения неизменной и равной v_0 ; отсюда радиус орбиты электрона во внешнем однородном магнитном поле оказывается равным:

$$a = \frac{v_0 \mathcal{E}_0}{c^2 e B}. \quad (7)$$

В заключение заметим, что для того чтобы перейти к классическому случаю, необходимо в формулах (6) и (7) положить $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

142. Определить угол отклонения релятивистской α -частицы, пролетающей в поле ядра с зарядом Ze .

Р е ш е н и е

Из рисунка 125 видно, что угол отклонения α -частицы $\Theta = \pi - 2\varphi_0$ и, следовательно, задача сводится к вычисле-

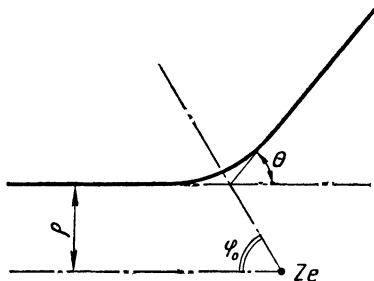


Рис. 125

нию угла φ_0 . Для его определения обратимся к формуле (7) задачи 137. Нетрудно видеть, что, для того чтобы получить интересующее нас значение угла φ_0 , в указанной формуле достаточно положить $r = \infty$. Тогда

$$c \sqrt{M^2 \mathcal{E}^2 - m^2 c^2 (c^2 M^2 - \alpha^2)} \cdot \cos \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}} \varphi_0 = \alpha,$$

откуда после подстановки значений полной энергии частицы \mathcal{E} и ее момента импульса M , определяемых из начальных условий, т. е.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad M = \frac{mv_0 \rho}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

где v_0 — скорость α -частицы на бесконечно большом расстоянии от ядра, а ρ — ее прицельный параметр, находим:

$$\varphi_0 = \frac{mc^2 v_0 \rho}{\sqrt{m^2 c^4 v_0^2 \rho^2 - \alpha^2 (c^2 - v_0^2)}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{m^2 c^4 v_0^2 \rho^2 - \alpha^2 (c^2 - v_0^2)}}{\alpha c \sqrt{c^2 - v_0^2}}$$

и

$$\Theta = \pi - \frac{2mc^2 v_0 \rho}{\sqrt{m^2 c^4 v_0^2 \rho^2 - \alpha^2 (c^2 - v_0^2)}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{m^2 c^4 v_0^2 \rho^2 - \alpha^2 (c^2 - v_0^2)}}{\alpha c \sqrt{c^2 - v_0^2}},$$

где константу потенциальной энергии α -частицы следует принять равной

$$\alpha = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$$

143. Вычислить интенсивность дипольно электрического излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся в однородном и постоянном электрическом поле \vec{E} , перпендикулярном к направлению ее начальной скорости \dot{v}_0 .

Р е ш е н и е

Интенсивность дипольно электрического излучения релятивистской частицы определяется выражением

$$I = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} [\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}]^2}{(1 - \beta^2)^3} \quad (1)$$

[см.: Р. Б е к к е р, Электронная теория, ОНТИ, 1936, § 59, формулу (59.16)], в которой коэффициент $\frac{2e^2}{3c^3}$ нами изменен на $e^2(6\pi\epsilon_0 c^3)^{-1}$ в связи с переходом к Международной системе единиц СИ].

Если выбрать систему координат так же, как и при решении задачи 140, то формулу (1) можно представить в виде:

$$I = \frac{ce^2}{6\pi\epsilon_0} \cdot \frac{c^2 (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) - \dot{x}^2 \ddot{y}^2 - \dot{y}^2 \ddot{x}^2 + 2\dot{x} \dot{y} \ddot{x} \ddot{y}}{(c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)^3} \quad (2)$$

Воспользовавшись далее формулами (4) и (5) задачи 140, которыми определяется движение заряженной частицы в однородном электростатическом поле \vec{E} , находим:

$$\dot{x} = \frac{c \sqrt{(\mathcal{E}_0 + eEx)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{\mathcal{E}_0 + eEx}; \quad \dot{y} = \frac{c^2 p_0}{\mathcal{E}_0 + eEx} \quad (3)$$

и

$$\ddot{x} = \frac{eE}{\mathcal{E}_0 + eEx} (c^2 - \dot{x}^2); \quad \ddot{y} = -\frac{eE \dot{x} \dot{y}}{\mathcal{E}_0 + eEx} \quad (4)$$

Подстановка значений \ddot{x} и \ddot{y} из (4) в формулу (2) приводит к выражению

$$I = \frac{e^4 E^2 c^3}{6\pi\epsilon_0 (\mathcal{E}_0 + eEx)^2} (\dot{x}^4 + \dot{x}^2 \dot{y}^2 - 2c^2 \dot{x}^2 - c^2 \dot{y}^2 + c^4), \quad (5)$$

откуда после подстановки \dot{x} и \dot{y} из (3) находим окончательный результат:

$$I = \frac{e^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^6 c^{11}} \{ (\mathcal{E}_0 + eEx)^4 - (1 + \mathcal{E}_0^2)(\mathcal{E}_0 + eEx)^2 + (1 + m^2 c^4) \mathcal{E}_0^2 \}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что для того чтобы от выражения (6) перейти к классическому выражению для интенсивности излучения заряженной частицы, движущейся в однородном электростатическом поле, необходимо в (6) положить $\mathcal{E}_0 = mc^2$ и перейти к пределу при $c \rightarrow \infty$; произведя указанный предельный переход, получаем:

$$I_{\text{нерел}} = \frac{e^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}. \quad (7)$$

144. Определить разность потенциалов на стенках однородной, намагниченной ленты (прямоугольного сечения), движущейся со скоростью, малой по сравнению со скоростью света (рис. 126).

Р е ш е н и е

Пусть \vec{M}' — вектор намагничивания ленты в собственной системе отсчета K' , т. е. в системе отсчета, жестко связанной с движущейся лентой; пусть также лента не поляри-

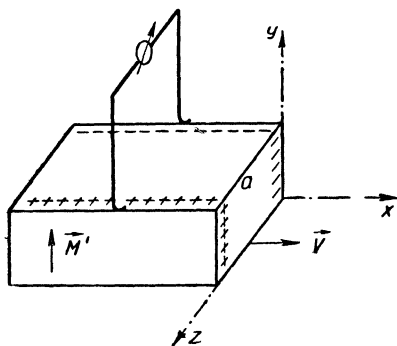


Рис. 126

зована (т. е. в собственной системе отсчета, т. е. $\vec{P}' = 0$). Тогда, воспользовавшись формулами преобразования Лоренца для составляющих векторов поляризации и намагничивания, можно показать, что по отношению к неподвижной системе отсчета лента оказывается и намагниченной и поляризованной. Действительно

$$P_x = 0,$$

$$P_y = \frac{P'_y - \frac{V}{c^2} M'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{VM'_z}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$P_z = \frac{P'_z + \frac{V}{c^2} M'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{VM'_y}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$M_x = M'_x$$

$$M_y = \frac{M'_y + VP'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{M'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$M_z = \frac{M'_z - VP'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{M'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, так как $V \ll c$,

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \vec{M}'] \text{ и } \vec{M} = \vec{M}'. \quad (1)$$

В силу эффекта поляризации движущейся намагниченной ленты на ее стенках, параллельных координатной плоскости XOY , возникает разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$, которую можно определить следующим образом. Для неподвижной намагниченной ленты в отсутствии внешнего электромагнитного поля

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{M}' \text{ и } \vec{E}' = 0,$$

так как $\vec{H}' = 0$, $\vec{D}' = 0$ и $\vec{P}' = 0$. Напротив, для движущейся ленты (при $V \ll c$)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{M}'$$

и

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left[\vec{V} \vec{M}' \right], \quad (2)$$

так как векторы \vec{D} и \vec{H} остаются равными нулю и в подвижной системе отсчета K (подвижной по отношению к ленте).

Уравнение (2) показывает, что, с точки зрения наблюдателя системы K , на движущиеся вместе с лентой электроны действует сила Лоренца, а поэтому на одной из стенок ленты возникает избыток электронов, а на противоположной стенке — их недостаток. Что же касается разности потенциалов на стенках движущейся ленты, то она оказывается равной:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_2^1 \left[\vec{V} \vec{M}' \right] \cdot d\vec{l} = \mu_0 V M' a. \quad (3)$$

Задачи для самостоятельного решения

251*. Векторный потенциал постоянного магнитного поля имеет вид:

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = A_z(x, y) \neq 0.$$

В указанном поле движется ион с зарядом e и массой покоя m_0 . Известно, что в точке, где векторный потенциал магнитного поля равен A_1 , составляющая скорости иона вдоль оси z равна v_z . Найти составляющую скорости иона v_z' в той точке поля, где векторный потенциал равен A_2 .

252*. Показать, что в системе отсчета K' , движущейся со скоростью

$$\vec{v}_{\text{дрейфа}} = \frac{1}{B^2} \left[\vec{E} \vec{B} \right]$$

(см. задачу 113), электрическое поле отсутствует, если в неподвижной системе отсчета K электрическое поле перпен-

дикулярно магнитному, т. е. если $\vec{E}\vec{B}=0$. Показать также, что наблюдатель, находящийся в системе отсчета K' , видит, что заряженные частицы вращаются по окружностям вокруг силовых линий магнитного поля.

253*. Бесконечно длинный прямой провод (радиуса a), по которому течет постоянный ток I , окружен коаксиальной цилиндрической оболочкой радиуса b . Между проводом и оболочкой поддерживается постоянная разность потенциалов φ .

Определить скорости двух систем отсчета, движущихся параллельно оси провода и таких, что в этих системах отсчета соответственно исчезают: 1) магнитное поле; 2) электрическое поле. Указать условия, связывающие φ и I , при которых возможен выбор указанных систем отсчета.

254*. Показать, что поле плоской монохроматической световой волны одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

255*. В бетатроне магнитный поток изменяется со временем по закону $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$. Найти зависимость скорости электрона, находящегося на равновесной орбите радиуса r , от времени t .

256*. Найти законы отражения света от плоского зеркала, движущегося с постоянной скоростью v нормально к своей плоскости.

257*. Вычислить интенсивность дипольно электрического излучения релятивистского электрона, вращающегося по окружности в однородном, постоянном магнитном поле B_0 .

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

$$1^*. \varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right); \quad \vec{E}_i = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \vec{r} \text{ при } r \leq a,$$

$$\varphi_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad \vec{E}_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \text{ при } r \geq a.$$

2*. Вектор напряженности поля в точке O антипараллелен оси Z , а его абсолютная величина равна:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$4^*. E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right); \quad \varphi = \varphi_0 +$$

$$+ \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z - a \right), \text{ где}$$

φ_0 — потенциал поля в центре пластинки.

$$5^*. \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right).$$

6*. Вектор напряженности направлен вдоль перпендикуляра к плоскости кольца, а его абсолютная величина

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0} (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$7^*. \varphi = \frac{\vec{p} \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{3(\vec{p} \vec{R}) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3} \right\}.$$

$$9^*. \varphi = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (1 - 3 \cos^2 \Theta).$$

$$11^*. \left(\frac{a}{b} \right)_{\text{Lu}} = 1,28; \quad \left(\frac{a}{b} \right)_J = 0,97.$$

$$12^*. (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = Cx^2.$$

$$13^*. E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0} |x|, |x| \leq a;$$

$$E_e = \frac{\rho}{\varepsilon_0} a, |x| \geq a.$$

$$14^*. \vec{E}_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r} \text{ при } r < a; \quad \vec{E}_e = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \text{ при } r > a, \text{ где}$$

a — радиус цилиндра.

$$15^*. \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} e^{-ar} (1 + ar) \vec{r}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot e^{-ar}.$$

$$16^*. E_x = E_z = 0; \quad E_y = \frac{ed}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

$$17^*. \text{ а) } E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \sqrt{r^2 + h^2 + 2rh \cos \Theta};$$

$$\text{ б) } E_x = \frac{2\rho}{3\varepsilon_0} x; \quad E_y = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} (y - h); \quad E_z = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} z.$$

$$19^*. \varphi = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} \left\{ 1 - \left(1 + \sqrt{\frac{r}{a}} \right) e^{-\sqrt{\frac{r}{a}}} \right\}.$$

Указание: в уравнении Пуассона $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

перейти к переменной x и только после этого приступить к его интегрированию.

$$20^*. \varphi = -E_0 r \cos \Theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + C; \quad P = 2\pi\varepsilon_0 R^2 E_0;$$

$$\sigma = 2\varepsilon_0 E_0 \cos \Theta.$$

Указание: при вычислении дипольного момента, приходящегося на единицу длины цилиндра, воспользоваться результатами задачи 6.

21*. На плоском участке проводника

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right),$$

где σ_0 — плотность зарядов вдали от выступа; на поверхности выступа $\sigma = 2\sigma_0 x/a$.

22*. Распределение зарядов на плоском участке проводника такое же, как и в задачах 16 и 21, а распределение зарядов на поверхности вмятины имеет вид:

$$\sigma = -\sigma_0 \frac{3x}{a} \text{ в случае (а)}$$

и

$$\sigma = -\sigma_0 \frac{2x}{a} \text{ в случае (б),}$$

где σ_0 — плотность зарядов вдали от вмятины.

23*. Потенциал φ_1 создается точечным диполем, а φ_2 — точечным квадруполем (или системой двух точечных диполей с антипараллельными дипольными моментами).

$$25^*. \varphi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{ch \frac{2n+1}{b} \pi x}{ch \frac{2n+1}{2b} \pi a} \cdot \frac{\cos \frac{2n+1}{b} \pi y}{(2n+1)}.$$

$$26^*. \varphi = \text{const} \cdot z \left(r^m - \frac{a^{2m}}{r^m} \right) \cos m \Theta + \varphi_0,$$

где φ_0 — потенциал на поверхности проводника, а m — наименьший корень уравнения $\cos m\alpha = 0$.

$$27^*. \varphi(r, \Theta) = \frac{1}{2} \varphi_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} \text{arctg} \frac{ar \cos \Theta}{a^2 - r^2} \right), (r \leq a).$$

У к а з а н и е: для представления решения в конечном виде воспользоваться следующим разложением:

$$\text{arctg} \left(\frac{ar \cos \alpha}{a^2 - r^2} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} \cdot \cos(2n+1)\alpha \text{ для } r \leq a.$$

28*. Заряд притягивается к вершине трехгранного угла с силой

$$F = \frac{e^2}{96\pi\epsilon_0 a^2} (2 + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{6}) \approx \frac{0,0525}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a^2}.$$

$$30^*. \sigma = \frac{e}{4\pi a R} - \frac{e(a^2 - R^2)}{4\pi R} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \Theta)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$31^*. F = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a^2} - \frac{eR^3}{a^3} \cdot \frac{2a^2 - R^2}{(a^2 - R^2)^2} \right].$$

У к а з а н и е: собственный заряд шара q следует считать сосредоточенным в центре.

32*. У к а з а н и е: считая радиус сферы $R \ll a$, пренебречь в условии равновесия зарядов всеми высшими степенями отношения $\frac{R}{a}$, начиная со второй.

$$33^*. -r_0^2 \left[E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r_0^3} \right) - 2q \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \cdot \frac{2r_0^2 - a^2}{(r_0^2 - a^2)^2} \right].$$

$$34^*. \varphi = -\frac{\lambda + \beta}{2\pi\epsilon_0} \ln r - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(r^2 + h^2 - 2rh \cos \Theta) + \\ + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(r^2 + \frac{R^4}{h^2} - \frac{2rR^2}{h} \cos \Theta \right) + \text{const},$$

где λ и β — заряды, приходящиеся соответственно на единицу длины нити и цилиндра; R — радиус цилиндра; \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения и Θ — угол между радиусом-вектором точки наблюдения и прямой, соединяющей точки пересечения оси цилиндра и нити плоскостью чертежа;

$$\sigma = \frac{\lambda + \beta}{2\pi R} - \frac{\lambda(h^2 - R^2)}{2\pi R(h^2 + R^2 - 2hR \cos \Theta)}; F = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \left[\beta - \frac{\lambda R^2}{(h^2 - R^2)} \right].$$

$$35^*. \varphi = -E_0 r \cos \Theta + \frac{E_0 R^2 \cos \Theta}{r} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(r^2 + \frac{R^4}{h^2} - \right. \\ \left. - \frac{2rR^2}{h} \cos \Theta \right) - \frac{\lambda + \beta}{2\pi\epsilon_0} \ln r - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(r^2 + h^2 - 2rh \cos \Theta) + \text{const};$$

$$\sigma = 2\epsilon_0 E_0 \cos \Theta + \frac{\lambda + \beta}{2\pi R} - \frac{\lambda(h^2 - R^2)}{2\pi R(h^2 + R^2 - 2hR \cos \Theta)};$$

$$F = \lambda E_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \left[\beta - \frac{\lambda R^2}{h^2 - R^2} \right].$$

$$36^*. \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 r_0}.$$

$$37^*. \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

$$38^*. -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \text{ для } r \leq R;$$

$$-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ для } r \geq R.$$

$$39^*. \frac{Z^2 e^2}{64\pi\epsilon_0 a}.$$

$$40^*. -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + (Z - 1) \left(1 + \sqrt{\frac{r}{a}} \right) e^{-\sqrt{\frac{r}{a}}} \right].$$

$$41^*. \text{Для плоского конденсатора: } W = \frac{e^2 d}{2\epsilon_0 S}; C = \frac{\epsilon_0 S}{d};$$

$$\text{для цилиндрического конденсатора: } W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r_2}{r}$$

$$\text{и } C = 2\pi\epsilon_0 L \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)^{-1}.$$

$$42^*. e_1 = qe(q - e)^{-1}.$$

$$43^*. 0,046 \text{ Дж/м}^2.$$

$$44^*. 0,016 \text{ Дж/м}^3; 1,92 \cdot 10^{-13} \text{ н.}$$

$$45^*. \varphi = 0,11 \sqrt{\frac{1,962P}{\epsilon_0 S}}.$$

$$46^*. \frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}.$$

$$48^*. \vec{F} = (\vec{\rho} \nabla) \vec{E}; \vec{N} = \left[\vec{\rho} \vec{E} \right].$$

$$49^*. \sigma = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ К/м}^2; F = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ н/м}^3.$$

$$50^*. F = \frac{\pi \epsilon_0 e^2}{2a^2}.$$

$$51^*. \frac{16}{3} \epsilon_0 a E^2, \text{ где } a \text{ — радиус цилиндра.}$$

$$52^*. F \cong - \frac{3ha^3 P^2}{2\pi \epsilon_0 (h^2 - a^2)^4}.$$

$$53^*. C = \frac{\epsilon_0 (K_2 - K_1) S}{h} \left(\ln \frac{K_2}{K_1} \right)^{-1}.$$

$$54^*. \text{На } \frac{K-1}{2(K+1)} \varphi \text{ в.}$$

$$55^*. \frac{4\pi \epsilon_0}{C} = \frac{1}{K_1} \left(\frac{1}{a} \right) - \frac{1}{K_2} \left(\frac{1}{b} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 K_2} \right).$$

$$57^*. E_i = E_0; D_i = \epsilon_0 K E_0.$$

$$58^*. \text{а) } E_i = E_0; D_i = \epsilon_0 E_0; \text{ б) } E_i = K E_0; D_i = \epsilon_0 K E_0;$$

$$\text{в) } E_i = \frac{3K}{1+2K} E_0; D_i = \frac{3\epsilon_0 K}{1+2K} E_0.$$

$$59^*. \vec{E}_i = \frac{9b^3 K}{(K+2)(2K+1)b^3 - 2(K-1)^2 a^3} \vec{E}_0.$$

$$60^*. P = 2\epsilon_0 \frac{K-1}{K+1} E_0.$$

$$61^*. \vec{E}_i = \frac{4KR_2^2}{(K+1)^2 R_2^2 - (K-1)^2 R_1^2} \vec{E}_0.$$

$$62^*. \text{а) } 5,625 \cdot 10^8 \text{ н; б) } 4,21875 \cdot 10^8 \text{ н.}$$

$$63^*. \sigma_{\text{связ}} = \frac{2\epsilon_0 a (K_2 - K_1) e}{K_2 (K_1 + K_2)} (\rho^3 + a^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$65^*. F = - \frac{\lambda^2 (K-1) a^2}{2\pi \epsilon_0 (K+1) h (h^2 - a^2)}.$$

$$67^*. Q = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 T \frac{\partial K}{\partial T}.$$

68*. $\frac{1}{2} \varepsilon_0 (K - 1) \cdot \frac{E^2}{\rho g}$, где ρ — плотность жидкости.

69*. $R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, где R_1 и R_2 — радиусы обкладок.

70*. $(C_2 - C_1) \varphi_0 \kappa$.

73*. $F = \frac{\varepsilon_0 K \rho^2 l^2}{2S}$, где ρ и K — удельное сопротивление и относительная диэлектрическая проницаемость электролита.

76*. $R = \frac{\pi\sigma}{2L} \left(\ln \frac{2r}{a} \right)^{-1}$.

77*. $V = \frac{\tau l}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta)$.

78*. Повреждение находится посередине линии.

79*. 10/57.

81*. а) $q = \frac{C_2 R_2 - C_1 R_1}{R + R_1 + R_2} E$;

б) $\begin{cases} \varphi_1 = S_1 e^{-k_1 t} + S_2 e^{-k_2 t} + E, \\ \varphi_2 = D_1 e^{-k_1 t} + D_2 e^{-k_2 t} + E, \end{cases}$

где

$$k_{1,2} = \frac{N \pm \sqrt{N^2 - 4MP}}{2M};$$

$$S_1 = -S_2 = \frac{2BR - N - \sqrt{N^2 - 4MP}}{2 \sqrt{N^2 - 4MP}} E;$$

$$D_1 = -D_2 = \frac{2AR - N - \sqrt{N^2 - 4MP}}{2 \sqrt{N^2 - 4MP}} E;$$

$$A = C_1 R_1; B = C_2 R_2; M = ABR; P = R + R_1 + R_2;$$

$$N = A(R + R_2) + B(R + R_1)$$

и E — э.д.с. батареи.

82*. Около 1 м.

83*. За 0,35 сек; нагревание медной проволоки составляет 0,7° К.

$$84*. m = \frac{\pi^2 a^4 R d}{\rho} \left(\frac{l^2 \theta}{l_0^2 T} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

$$85*. а) Q = \frac{U^2 M}{\rho l^2 d}; б) \theta = A \cdot l^{-\frac{5}{2}}; A = \frac{U^2}{2\rho k} \sqrt{\frac{M}{\pi d}},$$

где ρ и d — удельное сопротивление и плотность металла, а k — коэффициент теплопередачи.

$$86^*. B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}, \text{ где } a \text{ — сторона треугольника.}$$

87*. $B = \frac{\mu_0 n I}{\pi a} \left(\sec \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right)$, где a — сторона многоугольника.

$$90^*. B \cong 0,287 \cdot \frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

91*. $5,25 \cdot 10^{-5} \text{ тл}$; если дугу AD снять, а прямолинейные участки контура BA и CD продолжить до бесконечности, то магнитная индукция в точке O будет равна $5,14 \times 10^{-5} \text{ тл}$.

$$92^*. B = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x^2}}{x} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right].$$

У к а з а н и е: спираль рассматривать как совокупность большого числа круговых токов, тесно соприкасающихся друг с другом.

$$93^*. \begin{cases} B_e = \frac{1}{2} \mu_0 N I \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l+x}{\sqrt{a^2 + (l+x)^2}} \right\}; \\ B_i = \frac{1}{2} \mu_0 N I \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} \right\}, \end{cases}$$

где x — расстояние от точки наблюдения до какого-нибудь конца соленоида.

$$94^*. B = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 I}{S}.$$

95*. Семейство кривых $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 - y^2) = C$ (несколько кривых этого семейства изображено на рис. 63).

$$97^*. H = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r \leq a \\ \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r} & \text{при } a \leq r \leq b \\ I(2\pi r)^{-1} & \text{при } r \geq b, \end{cases}$$

где a, b — внутренний и внешний радиусы трубы.

$$98^*. H_i = 0; H_e = \frac{I}{2\pi r}.$$

99*. Поле внутри полости однородно, перпендикулярно к прямой, соединяющей ось цилиндра с осью полости, и равно:

$$H = \frac{Id}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

$$100*. H = \frac{1}{2} I \cdot \frac{2R - d}{Rd}.$$

101*. а) При расчете с помощью формулы (1) задачи 66

$$\Phi = \mu_0 K_m N I (R - \sqrt{R^2 - a^2}) = 3,199 \cdot 10^{-4} \text{ вб};$$

б) при расчете с помощью приближенной формулы (2) задачи 66

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 K_m N I a^2}{R} = 3,186 \cdot 10^{-4} \text{ вб}.$$

$$102*. \Phi = \frac{\pi \mu_0 K_m N I a^2}{2\pi R + (K_m - 1) \delta}.$$

$$103*. A_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(r - x); \quad A_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(r - y);$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r - z), \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (в выражениях}$$

для A_x , A_y и A_z отброшены слагаемые, логарифмически расходящиеся на верхних пределах интегрирования и несущественные при вычислении индукции магнитного поля).

104*.

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(a - x + \sqrt{(x-a)^2 + (y+a)^2 + z^2})(\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2} - x)}{(a - x + \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2})(\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2} - x)};$$

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(a - y + \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2})(\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} - y)}{(a - y + \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2 + z^2})(\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} - y)};$$

$$A_z = 0.$$

$$105*. A_z = \frac{\mu_0 a I}{\pi r} \cos \varphi$$

(система координат выбрана так же, как и в задаче 63 (см. рис. 58); φ — угол между векторами \vec{r} и $2\vec{a}$; вектор $2\vec{a}$ направлен от тока, текущего вдоль оси z , к току, текущему в противоположном направлении).

106*. а) В сферических координатах (r , Θ , α)

$$A_r = A_\Theta = 0; \quad A_\alpha = \frac{1}{2} r B \sin \Theta.$$

б) В цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$A_r = A_z = 0; \quad A_\varphi = \frac{1}{2} r B \sin \Theta,$$

где $\Theta = \left(\widehat{\vec{r} \vec{B}} \right)$.

107*. $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi$, где φ — скалярный потенциал электрического поля заряда в системе координат, относительно которой заряд покоится.

У к а з а н и е: для представления решения в окончательном виде учесть, что $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, где c — скорость света в вакууме.

108*.

$$A_z = \begin{cases} \frac{A_0}{2\pi(a^2 - b^2)} \ln r - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi(a^2 - b^2)} + B_0 & \text{при } 0 \leq r \leq b; \\ -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln r + C_0 & \text{при } b \leq r \leq a; \\ & \text{при } r > a, \end{cases}$$

где

$$B_0 = A_0 + \frac{\mu_0 b^2 I}{4\pi(a^2 - b^2)} (1 - 2 \ln b);$$

$$C_0 = A_0 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} (1 - 2 \ln a) + \frac{\mu_0 b^2 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \ln \frac{a}{b}$$

и A_0 — векторный потенциал на оси трубы.

109*. У к а з а н и е: скалярный потенциал магнитного поля внутри однородно намагниченного шара (в отсутствие внешнего поля) следует записать в виде:

$$\psi_i = \frac{1}{3} M x, \quad (1)$$

где \vec{M} — вектор намагничения шара (ср. написанное выражение с электростатическим потенциалом φ_i для равномерно поляризованного диэлектрического шара (задача 40); на первый взгляд, это сравнение показывает, что в выражении (1), казалось бы, следовало написать еще один множитель $\frac{1}{\mu_0}$; однако, сравнивая электростатический потенциал электрического диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}$$

со скалярным потенциалом магнитного поля магнитного диполя

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

следует признать запись потенциала (1) правильной).

Далее, пользуясь выражением (1), находим:

$$H_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{3} M$$

или

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{3} \vec{M}.$$

Теперь, чтобы доказать сформулированную в задаче 109 теорему, следует воспользоваться определением вектора намагничения \vec{M} . Вектор намагничения, как известно, определяется соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

(см. А. З о м м е р ф е л ь д. Электродинамика, ИЛ, 1958, стр. 119).

$$110^*. \vec{H}_1 = A \cdot \vec{i}, \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\vec{H}_2 = B \vec{i} + \frac{1}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{m}_1 \vec{R}) \vec{R}}{R^2} - \vec{m}_1 \right\}, \quad (a \leq r \leq b);$$

$$\vec{H}_3 = H_3 \vec{i} + \frac{1}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{m}_2 \vec{R}) \vec{R}}{R^2} - \vec{m}_2 \right\}, \quad (r \geq b),$$

где

$$A = \frac{9K_m b^3}{(2K_m + 1)(K_m + 2)b^3 - 2(K_m - 1)^2 a^3} H_0;$$

$$B = \frac{3(2K_m + 1)b^3}{(2K_m + 1)(K_m + 2)b^3 - 2(K_m - 1)^2 a^3} H_0;$$

$$\vec{m}_1 = -\frac{12\pi(K_m - 1)a^3 b^3}{(2K_m + 1)(K_m + 2)b^3 - 2(K_m - 1)^2 a^3} \vec{H}_0;$$

$$\vec{m}_2 = \frac{4\pi b^3(2K_m + 1)[(K_m + 5)b^3 - (K_m - 1)a^3]}{(2K_m + 1)(K_m + 2)b^3 - 2(K_m - 1)^2 a^3} \vec{H}_0.$$

$$111^*. \psi = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right),$$

где x — расстояние от точки наблюдения до центра кругового тока.

112*.

$$\begin{cases} \psi_1 = -H_1 r \cos \Theta, & (0 \leq r \leq a), \\ \psi_2 = -H_2 r \cos \Theta + \frac{\alpha_1 H_0}{r} \cos \Theta, & (a \leq r \leq b), \\ \psi_3 = -H_0 r \cos \Theta + \frac{\alpha_2 H_0}{r} \cos \Theta, & (r \geq b), \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = -2A(K_m - 1)a^2b^2; \quad \alpha_2 = A(K_m^2 - 1)(b^2 - a^2)b^2;$$

$$H_1 = 4AK_m b^2 H_0; \quad H_2 = 2A(K_m + 1)b^2 H_0;$$

$$A = \frac{1}{(K_m + 1)^2 b^2 - (K_m - 1)^2 a^2} \quad \Theta = \left(\vec{r} \hat{H}_0 \right).$$

113*. Магнитный момент $m = 8,41 \cdot 10^{22} a \cdot m^2$; индукция магнитного поля Земли на магнитном полюсе в два раза больше, чем на магнитном экваторе.

$$114*. \vec{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}.$$

$$115*. F = -\mu_0 I I_1 \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - R^2}} - 1 \right).$$

$$116*. N = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} a b \sin \varphi (x^2 + b^2 + 2bx \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$117*. N = \frac{\mu_0 a}{\pi} I_1 I_2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha).$$

$$118*. 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}.$$

119*. На магнитном экваторе стрелка будет находиться в более устойчивом положении, чем на магнитных полюсах. Разность энергий стрелки в указанных положениях равна 32,52 Дж (значение горизонтальной составляющей вектора индукции магнитного поля Земли на магнитной широте 45° принять равным $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ тл}$).

$$120*. L_{12} = \mu_0 (R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

$$121*. L_{12} = \pi \mu_0 n a^2.$$

$$122*. L_{12} = \frac{n\mu}{2\pi} \int \frac{dS}{x} \text{ в общем случае.}$$

а) Для тора, изображенного на рисунке 83,а

$$L_{12} = \frac{n\mu}{2\pi} \left[a - \frac{2\sqrt{3}}{3} R \ln \left(1 + \frac{a\sqrt{3}}{2R} \right) \right];$$

б) для тора, изображенного на рисунке 83,б

$$L_{12} = \mu_0 (R - \sqrt{R^2 - a^2});$$

в) для тора, изображенного на рисунке 83,в

$$L_{12} = \frac{\mu_0 n b}{a} (R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

123*. $L_{12} = \frac{\mu_0 S R^2}{2(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$, где R — радиус большого тока, S — площадь меньшего кругового тока, a — расстояние между плоскостями, в которых лежат токи.

124*. $L_{12} = \mu_0 \sqrt{a_1 a_2} \left\{ \left(\frac{2}{n} - n \right) K(n) - \frac{2}{n} E(n) \right\}$,

где $K(n)$ и $E(n)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода модуля

$$n = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}$$

(a_1, a_2 — радиусы токов).

125*. $L_{12} = \frac{\mu_0 S N_1 N_2}{l}$, где N_1, N_2 — числа витков; S — площадь сечения сердечника.

128*.

$$W_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \pi \mu_0 \cdot \frac{a^2 K_m N^2 / 2 (2\pi R - \delta)}{[2\pi R + (K_m - 1)\delta]^2}; W_3 = \frac{1}{2} \pi \mu_0 \cdot \frac{K_m^2 N^2 I^2 \delta a^2}{[2\pi R + (K_m - 1)\delta]^2};$$

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \pi \mu_0 \cdot \frac{a^2 K_m N^2 I^2}{2\pi R + (K_m - 1)\delta}; L_{11} = \frac{\pi \mu_0 a^2 K_m N^2}{2\pi R + (K_m - 1)\delta}.$$

$$F = - \frac{\partial W_{\text{полн}}}{\partial \delta} = \frac{\pi \mu_0 a^2 K_m (K_m - 1) N^2 I^2}{2[2\pi R + (K_m - 1)\delta]^2}.$$

Зависимость $W_{\text{ж}}$, W_3 , $W_{\text{полн.}}$, L_{11} и F от ширины зазора δ иллюстрируется приводимой ниже таблицей:

δ	0,1 мм	1 мм	5 мм
Энергия магнитного поля в кольце	0,0820	0,0297	0,0038
Энергия магнитного поля в зазоре	0,0065	0,0237	0,0154
Полная энергия магнитного поля	0,0885	0,0534	0,0192
Самоиндукция кольца (в генри)	0,1772	0,1066	0,0384
Сила притяжения полюсов кольца (в ньютонах)	65,14	23,58	3,07

129*. $L_{11} = \frac{\mu a^2 N}{2R}$, где R — радиус тора; a — радиус сечения.

$$130*. L_{11} = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r_0} - 2 + \frac{1}{4} K_m \right).$$

У к а з а н и е: о двух различных методах решения данной задачи см.:

а) И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 81;

б) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, § 33.

$$131*. L_{11} = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{a} + \frac{\mu}{2\pi(r_1^2 - r_2^2)^2} \left[r_1^4 \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{4} (3r_1^2 - r_2^2) (r_1^2 - r_2^2) \right].$$

132*. Самоиндукция проводки изменится на величину

$$\frac{\mu_0 b^2}{4\pi (a^2 - b^2)^2} \left[b^2 \ln \frac{a}{b} - 2(a^2 - b^2) \right].$$

134*. 0,64 мВ.

$$135*. I = \frac{B v_0 \sin \alpha}{r (1 + \sin \alpha)}.$$

$$136*. E_{\text{инд}} = 2v_0 B \sqrt{v_0 t (2R - v_0 t)}.$$

137*. $q = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$, где R — сопротивление контура.

$$138*. v = \frac{E}{Bl} + \left(v_0 - \frac{E}{Bl} \right) e^{-\alpha t}, \quad \text{где } \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR}.$$

139*. Величина тока индукции, наводимого в кольце,

$$I = \frac{\omega \pi r^2 B}{R} \sin \omega t = 0,338 \sin \omega t \text{ (мА)};$$

магнитное поле, возбуждаемое в центре кольца током индукции, нормально к плоскости кольца и равно:

$$B' = \frac{\mu_0 \omega \pi r B}{2R} \sin \omega t = 2,125 \cdot 10^{-9} \sin \omega t \text{ (мТл)};$$

вектор индукции результирующего магнитного поля в центре кольца имеет составляющие:

$$B_x = \frac{\mu_0 \pi \omega r B}{2R} \sin^2 \omega t;$$

$$B_y^r = B \left(1 + \frac{\mu_0 \pi \omega r}{2R} \sin \omega t \cos \omega t \right); B_z^r = B_1,$$

где B — горизонтальная и B_1 — вертикальная составляющие магнитного поля земли.

$$140^*. E = \frac{\mu_0 \omega m}{4\pi R}, \text{ где } R \text{ — радиус шара.}$$

$$141^*. q = \frac{\epsilon \pi \omega B R^4}{2a}; F = \frac{\epsilon \pi \omega^2 B^2 R^6}{6a^2},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами.

У к а з а н и е. Учесть эффект возникновения при вращении проводника вокруг какой-либо оси с угловой скоростью ω однородного магнитного поля с индукцией

$$\vec{B}' = -\frac{2m}{e} \vec{\omega}$$

(где e , m — заряд и масса электрона). Поэтому на отдельный электрон вращающегося проводника воздействует эффективное магнитное поле с индукцией

$$\vec{B}_{\text{эф}} = \vec{B} - \frac{2m}{e} \vec{\omega}$$

(см.: Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц. Электродинамика сплошных сред, § 49, или Р. Б е к к е р. Теория электронов, ОНТИ, 1936, стр. 31—36).

Это приводит к возникновению разности потенциалов между центром и точками на расстоянии r от него, равной

$$\varphi_1 = \left(\frac{2m\omega^2}{e} - B\omega \right) \frac{r^2}{2} + \text{const}$$

(для одного диска) и

$$\varphi_2 = \left(\frac{2m\omega^2}{e} + B\omega \right) \frac{r^2}{2} + \text{const}$$

(для другого). Отсюда разность потенциалов между соответствующими точками обоих дисков оказывается равной $\varphi_2 - \varphi_1 = B\omega r^2$.

Далее следует воспользоваться определением емкости конденсатора и формулой емкости плоского конденсатора.

$$142^*. q = \frac{m\sigma V\omega}{2\pi e}, \text{ где } e, m \text{ — заряд и масса электрона;}$$

V и σ — объем и электропроводность кольца.

$$143^*. I = \frac{2\pi a^2 m \omega}{eL_{11}} = \frac{2\pi a m \omega}{e\mu_0} \left(\ln \frac{8a}{b} - 2 \right)^{-1}.$$

$$144^*. I = \frac{eL_{11}(1 - e^{-t})}{R}; \text{ величина тока оказывается равной}$$

0,01 от номинального значения через 0,01 сек после включения в цепь э.д.с.

$$145^*. \text{const} = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t RI^2 dt.$$

146*. 1) $I_{\text{эф}} = 0,354 \text{ а}$; 2) ток опережает по фазе напряжение на $\varphi \approx 89^\circ 54,5'$; 3) эффективная мощность тока

$$\frac{1}{2} E_0 I_0 \cos \varphi = 0,0125 \text{ вт};$$

безваттная мощность

$$\frac{1}{2} E_0 I_0 \sin \varphi = 6,77 \text{ вт}.$$

$$147^*. I = \frac{\omega BS}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi); \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

$$149^*. Q_\alpha = \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial q_\alpha} \right)_I = \frac{3}{2} \cdot \frac{I^2 \omega^2 L_B L_{AB}}{(R^2 + \omega^2 L_B^2)} \left(\frac{\partial L_{AB}}{\partial q_\alpha} \right)_I,$$

где \bar{W} — среднее значение магнитной энергии катушек A и B .

$$150^*. d = \frac{\pi^3 a^2 R}{\lambda^2} \left(\ln \frac{8R}{r} - \frac{7}{4} \right) = 0,19 \text{ мм}.$$

$$152^*. \omega = -\frac{i}{2RC} \pm \frac{1}{2RC} \sqrt{\frac{4R^2 C}{L} - 1}.$$

$$153^*. 0,15 \cdot 10^{-18}; \quad 0,95 \cdot 10^{-18} \text{ и } 10,6 \cdot 10^{-18} \text{ сек}.$$

$$154^*. Q = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

$$155^*. L^*_{11} \rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a}{b}.$$

$$159^*. \frac{F_H}{F_E} \sim \frac{eE_0}{mc\omega} \sim 10^{-8}.$$

У к а з а н и е. Для определения скорости электрона записать и решить дифференциальное уравнение движения электрона в первом приближении, не учитывая силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля волны.

$$160^*. \vec{E} = -i\omega \vec{A}; \quad \vec{B} = -i \left[\vec{k}, \vec{A} \right].$$

$$162^*. \sqrt{E^2} \approx 760 \text{ в/м}; \quad \sqrt{H^2} \approx 2,02 \text{ а/м}.$$

$$163^*. \sqrt{E^2} \approx 7,11 \text{ в/м}; \quad \sqrt{H^2} \approx 0,018 \text{ а/м}.$$

165*. $5,115 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$, если считать поверхность Земли абсолютно черной, и $10,23 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$, если поверхность Земли принять за абсолютно зеркальную.

167*. При частоте волны, равной ν_1 , вода — проводник; при ν_2 — полупроводник и при ν_3 — диэлектрик.

$$168^*. r = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)}; \quad d = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi \cdot \sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi + \psi) \cos^2(\varphi - \psi)}.$$

$$169^*. \frac{d^6}{(d^2 + 4h^2)^3} \left\{ \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0) d^2 + 4\varepsilon h^2 - 2\varepsilon\varepsilon_0 \frac{-1}{2} h}}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0) d^2 + 4\varepsilon h^2 + 2\varepsilon\varepsilon_0 \frac{-1}{2} h}} \right\}^2,$$

171*. $K \approx 1,3 \cdot 10^4$ (относительная магнитная проницаемость меди принята равной единице).

$$172^*. v = 1,25 \cdot 10^8 \text{ м/сек.}$$

У к а з а н и е. По поводу распространения электромагнитных волн вдоль кабеля см.: А. А. В л а с о в. Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, глава 8, § 4.

173*. $\omega^2 = \frac{2\pi^2}{a^2} c^2$, где a — сторона квадрата, лежащего в сечении призмы.

$$174^*. N(\nu) d\nu = \frac{8\pi a^3 \nu^2}{c^3} d\nu.$$

У к а з а н и е. Записывая для стоячей электромагнитной волны

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z \cdot \cos 2\pi \nu t$$

и подставляя это выражение в однородное волновое уравнение, можно получить условие, которому должны удовлетворять тройки чисел n_1 , n_2 и n_3 ;

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a\nu}{c} \right)^2;$$

далее следует учесть, что каждой тройке чисел n_1 , n_2 и n_3 соответствует одна стоячая электромагнитная волна, а поэтому указанные тройки чисел для всех электромагнит-

ных волн, у которых частоты лежат в интервале $(\nu, \nu + d\nu)$, находятся внутри первого октанта шарового слоя, находящегося между сферами с радиусами $r = \frac{2a\nu}{c}$ и $r + dr$; чтобы получить окончательный результат, следует также учесть возможность двух различных поляризаций электромагнитных волн.

176*.

$$E_x = i\mu\omega\Pi_0 \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)};$$

$$E_y = -i\mu\omega\Pi_0 \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)};$$

$$H_x = ik\Pi_0 \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)};$$

$$H_y = ik\Pi_0 \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)};$$

$$H_z = \left\{ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right\} \Pi_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i(\omega t - kz)}.$$

Уравнения силовых линий:

а) электрического поля

$$y = \frac{b}{m\pi} \arccos \left(\frac{C_1}{\cos \frac{n\pi}{a} x} \right);$$

б) магнитного поля

$$y = \frac{b}{m\pi} \arcsin \left\{ C_2 \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\frac{ma}{nb} \right)^2 \right\}.$$

177*.

$$\sigma(x, 0, z) = \sigma(x, b, z) = \frac{\varepsilon\mu\omega\Pi_0}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz);$$

$$\sigma(0, y, z) = \sigma(a, y, z) = -\frac{\varepsilon\mu\omega\Pi_0}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - kz);$$

$$i(x, 0, z) = i(x, a, z) = \frac{k\Pi_0}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz);$$

$$i(0, y, z) = i(a, y, z) = -\frac{k\Pi_0}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - kz).$$

178*. $\lambda_{кр} = 8$ см (для волны Н — T_{01} Е) и $\lambda_{кр} = 4$ см (для волны Н — T_{10} Е).

У к а з а н и е. Переписать дисперсионное уравнение, которому удовлетворяют числа n и m (см. формулу (17) задачи 98), в виде:

$$k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{c^2},$$

где

$$\omega_0^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right). \quad (1)$$

Так как $k^2 \geq 0$, то и $\omega^2 \geq \omega_0^2$; поэтому формула (1) определяет критическую частоту волны, бегущей по волноводу.

$$179^*. v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}.$$

182*.

$$E_x = \frac{\mu}{4\pi r} \sin \Theta \cos \Theta \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right);$$

$$E_y = \frac{\mu}{4\pi r} \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot \sin \alpha \cdot \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right);$$

$$E_z = -\frac{\mu}{4\pi r} \sin^2 \Theta \cdot \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right);$$

$$H_x = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi r} \sin \Theta \sin \alpha \cdot \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right);$$

$$H_y = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi r} \sin \Theta \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{p} \left(t - \frac{r}{v} \right); \quad H_z = 0.$$

183*. Мгновенная интенсивность излучения электрона

$$I = \frac{dW}{dt} = \frac{e^4 Q^2}{6\pi \varepsilon_0 m^2 c^3} \cdot \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3},$$

где x — расстояние от электрона до центра кольцевого заряда;

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt} \right)} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} I dx = \frac{e^4 Q^2}{48\pi \varepsilon_0 m^2 c^3 a^3 h} \left[\arctan \frac{h}{a} - \frac{(a^2 - h^2) ah}{(a^2 + h^2)^2} \right].$$

184*. В два раза.

$$185^*. \frac{e^4 v_0^2 B_0^2}{6\pi \varepsilon_0 m^2 c^3}.$$

186*. $4,4 \cdot 10^{-8}$ Дж/сек.

$$187^*. I_{\text{средн}} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \varepsilon_0 m c^3} \cdot E.$$

У к а з а н и е. Электрон в атоме называют упруго связанным, если его потенциальную энергию в поле ядра можно представить в виде:

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2,$$

где ω — частота собственных колебаний электрона в атоме, а x — параметр, характеризующий отклонение электрона от его равновесного положения. Наглядным прообразом упруго связанного электрона может служить электрон в модели атома водорода Томсона (см. задачу 12).

188*. Такое же, что и у вибратора Герца.

$$189*. \Delta E = \frac{1}{12} \cdot \frac{e^2 e_1^2}{\epsilon_0 m^2 c^3 \rho^3 v}.$$

191*. 83,8 м.

$$194*. S_{\text{средн}} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r_0^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi \cos \Theta)}{\sin^2 \Theta}.$$

$$195*. x = \frac{eE_0}{m\omega^2} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) \right] \text{ (направление оси } X \text{ совпа}$$

дает с направлением однородного электрического поля \vec{E}_0).

196*. $4,8 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$; $1,03 \cdot 10^7 \text{ м/сек}$.

197*. Траекторией электрона является окружность радиуса $R = \frac{mv_0}{eB_0}$; магнитный момент тока, создаваемого движущимся по этой окружности электроном, параллелен полю B_0 и равен $m = \frac{mv_0^2}{2B_0}$ (при вычислении магнитного момента воспользоваться соотношением, связывающим магнитный момент электрона с его механическим моментом, — см. задачу 72).

198*. 8,83 см и 9,54 см.

$$199*. \frac{e}{m} = 1,7742 \cdot 10^{11} \text{ К/кг}.$$

$$201*. \frac{e}{m} = \frac{8b^2 U^2}{\mu_0^2 (b^2 - a^2)^2 H^2}, \text{ где } U \text{ — разность потенциалов}$$

катода и анода.

У к а з а н и е. Начальную скорость электронов принять равной нулю.

202*. У к а з а н и е. Требуется показать, что уравнения Лагранжа совпадают с уравнениями движения, вытекающими из второго закона Ньютона.

$$203^*. H = \frac{1}{2m} (\vec{P} - e\vec{A})^2 + e\varphi,$$

где $\vec{P} = m\vec{v} + e\vec{A}$ — обобщенный импульс частицы.

204*. 21.

У к а з а н и е. Совпадение линий для ионов одинакового заряда, но разных масс в масс-спектрографе Астона достигается лишь в том случае, если при неизменном магнитном поле напряжения на обкладках конденсатора обратно пропорциональны массам изотопов (см.: Р. Б е к е р. Электронная теория, ОНТИ, 1936, гл. А, § 4).

205*. а) $H = 1037,22 \text{ а/м}$; б) $E = 8 \text{ Мэв}$;

в) $R_n = 0,06296 \sqrt{n} \text{ м}$.

$$206^*. r_0 = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{8}{9}} a.$$

$$207^*. \vec{v}_{\text{дрейф}} = \frac{m [\vec{g} \vec{B}]}{eB^2}; v_{\text{дрейф}} = \frac{mg}{eB}.$$

208*. Плотность электромагнитного импульса электрона

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 r^4} \left(\vec{v} - v \cos \Theta \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \\ \times \left[1 - 2 \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) e^{-\frac{r}{r_0}} + \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} \right],$$

где Θ — угол между радиусом-вектором точки наблюдения и вектором скорости электрона; полный электромагнитный импульс электрона равен:

$$\vec{G} = \int_{v_\infty}^{\vec{v}} \vec{g} dv = \frac{\mu_0 q^2}{8\pi r_0^2} \cdot \vec{v}$$

(значок v_∞ , стоящий у интеграла, означает, что интегрирование должно быть произведено по всему бесконечно большому объему пространства).

209* $\dot{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{M}$, где \vec{M} — вектор намагничивания.

У к а з а н и е. При усреднении уравнения Лоренца $\text{rot } \vec{h} = \vec{j}_{\text{микро}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$ учесть, что $(\vec{h})_{\text{средн}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

212*. $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + 4\pi a^3 N)$.

213*. $6,76 \cdot 10^{-30}$ и $5,12 \cdot 10^{-30}$ *к · м*.

214*. $U = - \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 kT} \cdot \frac{1}{r^6}$, где r — расстояние между

центрами молекул.

У к а з а н и е. Воспользоваться выражением $U = - \frac{1}{2} \alpha E^2$

для энергии поляризации.

215*. $\omega_{\text{кр}} = 8,95 \cdot 10^9$ *Мгц*.

216*. а) $\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$; б) $\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{e^2 \omega^3}{6\pi \varepsilon_0 m c^3})}$,

где ω_0 — частота собственных колебаний электрона.

217*. а) $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$; б) $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m c^2}; \quad \gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \varepsilon_0 m c^3}$$

и ω_0 — частота собственных колебаний упруго связанного электрона.

У к а з а н и е. Силу лучистого трения определить из невозмущенных собственных колебаний электрона.

218*. $\Delta \mathcal{E} = \frac{e^2 e_1^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 a^2 m v^2}$.

У к а з а н и е. При вычислении импульса

$$p = p_{\perp} = e \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} dt,$$

сообщаемого электрону тяжелой частицей (p_{\perp} и E_{\perp} — составляющие импульса электрона и напряженности электростатического поля тяжелой частицы в направлении, перпендикулярном к ее скорости), использовать теорему

Гаусса, выбрав надлежащим образом поверхность интегрирования.

$$219^*. 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ м/сек.}$$

$$221^*. j = \frac{4e_0}{9L^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot V^{\frac{3}{2}},$$

где L — расстояние между катодом и анодом.

У к а з а н и е. Потенциал катода принять равным нулю, а плотность электронов в пространстве между электродами считать функцией расстояния до катода. Искомое решение должно удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

являющемуся выражением того факта, что перед катодом находится отрицательный объемно распределенный заряд, тормозящий эмиссию электронов из катода.

222*. У к а з а н и е. Подвижностью носителей тока принято называть величину $\mu = \frac{j}{enE}$, измеряемую в $\text{м}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$. Подвижность связана с электропроводностью соотношением $\lambda = en\mu$.

$$223^*. \frac{9}{13}.$$

$$225^*. \mu_L = 3,313 \cdot 10^5 \text{ Мгц}; \lambda = 5,69 \text{ мм.}$$

$$226^*. 0,57 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

$$227^*. I = - \frac{Ze^2 \mu_0 H}{4\pi m}.$$

$$228^*. \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{Z^2 e^4}{12e_0^2 h^2 c^2} = 4,43 \cdot 10^{-2}.$$

$$231^*. \kappa_{\text{парам}} = \frac{\mu_0 L m^2}{3kT} \left\{ 1 - \frac{1}{15} \left(\frac{\mu_0 m H}{kT} \right)^2 + \dots \right\}.$$

$$232^*. \text{На } 7,50 \cdot 10^{24} \text{ ионов/м}^3.$$

233*. Магнитный момент 1 килограмм-моля парамагнитного газа равен:

$$\sqrt{\frac{3kNC}{\mu_0}},$$

где k — постоянная Больцмана, N — число Авогадро.

$$234^*. 0,2 \text{ \AA}.$$

$$235^*. \Omega = \Omega_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{2c^4} \sin 2\alpha}.$$

$$237^*. c' \cong \frac{c}{n} \mp v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \text{ причем знак } (+) \text{ следует}$$

брать для луча SKDCBAKP и знак (-) для луча SKABCDKP (см. рис. 123).

$$238^*. v = c \cdot \frac{\cos \alpha - \cos \alpha'}{1 - \cos \alpha \cdot \cos \alpha'}.$$

$$239^*. 1) m_t = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \text{ — продольная масса;}$$

$$2) m_t = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ — поперечная масса.}$$

$$241^*. v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m_0} \left(1 + \frac{e\varphi}{2m_0c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{e\varphi}{m_0c^2} \right)^{-1}}.$$

В частном случае, когда кинетическая энергия электрона много меньше его энергии покоя, т. е. когда $e\varphi \ll m_0c^2$, скорость электрона можно вычислять, пользуясь следующей приближенной формулой:

$$v \cong \sqrt{\frac{2e\varphi}{m_0} \left(1 - \frac{3e\varphi}{4m_0c^2} \right)}.$$

$$242^*. \Delta m = 4,4 \cdot 10^6 m.$$

$$243^*. \text{ а) } 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м; б) } 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

$$244^*. E_1 = c^2 \frac{M^2 + M_1^2 - M_2^2}{2M}; E_2 = c^2 \cdot \frac{M^2 - M_1^2 + M_2^2}{2M}.$$

245*. У к а з а н и е. Предположить, что при распаде мезона с массой m_1 возможно образование лишь одной частицы с массой m_2 , отличной от m_1 , и показать, применяя законы сохранения энергии и импульса, что это допущение невозможно.

$$246^*. \vec{p} = mc \frac{\vec{dr}}{dS}; E = mc^3 \frac{dt}{dS}.$$

$$248^*. \dot{\vec{v}} = \frac{e}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}] - \frac{1}{c^2} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \right\}.$$

$$249^*. W_n = \frac{\mu_0 l}{4\pi a\varphi} \left(\frac{2e\varphi}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{e\varphi}{2m_0c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{e\varphi}{m_0c^2} \right)^{-2}.$$

$$251^*. v'_z = v_z - \frac{e}{m_0c} (c^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} (A_2 - A_1).$$

$$255^*. v = c \left[1 + \left(\frac{2\pi r m c}{e \Phi_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \omega t} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$256^*. \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_0 \cos \alpha_0 - \frac{v \omega_0}{c^2}}{k_0 \cos \alpha_0 + \frac{v \omega_0}{c^2}} \operatorname{tg} \beta;$$

$$\omega_{\text{отр}} = \omega_{\text{п}} - \frac{2v k_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где α — угол падения, β — угол отражения, $\omega_{\text{п}}$ — частота падающей волны и $\omega_{\text{отр}}$ — частота отраженной волны в лабораторной системе отсчета; α_0 — угол падения и отражения, k_0 — волновое число и ω_0 — частота падающей и отраженной волн в собственной системе отсчета движущегося зеркала.

$$257^*. I = \frac{e^4 c v^2}{24 \pi \epsilon_0 E_0^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-2} B_0^2,$$

где E_0 — полная энергия электрона.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

а. Векторная алгебра

1. Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{A} \vec{B} = AB \cos(\widehat{AB}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (1)$$

2. Проекция вектора на направление, задаваемое единичным вектором \vec{l} :

$$A_l = \vec{A} \vec{l} = A_x \cos(\widehat{l, i}) + A_y \cos(\widehat{l, j}) + A_z \cos(\widehat{l, k}). \quad (2)$$

3. Векторное произведение двух векторов:

$$[\vec{A} \vec{B}] = -[\vec{B} \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}; \quad |[\vec{A} \vec{B}]| = AB \sin(\widehat{AB}). \quad (3)$$

4. Смешанное произведение трех векторов:

$$\vec{A} [\vec{B} \vec{C}] = -\vec{B} [\vec{A} \vec{C}] = \vec{C} [\vec{A} \vec{B}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (4)$$

5. Двойное векторное произведение трех векторов:

$$[\vec{A} [\vec{B} \vec{C}]] = \vec{B} (\vec{A} \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \vec{B}). \quad (5)$$

6. Правило дифференцирования векторного произведения.

$$\frac{d}{dt} [\vec{A} \vec{B}] = \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \vec{B} \right] + \left[\vec{A} \frac{d\vec{B}}{dt} \right]. \quad (6)$$

б. Векторный анализ

1. Градиент скалярного поля ($\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{r}}$):

а) декартовы координаты:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}; \quad (7)$$

б) сферические координаты (R, Θ, α):

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{\vec{e}_\theta}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \quad (8)$$

в) цилиндрические координаты (r, Θ, z):

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (9)$$

2. Дивергенция вектора ($\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$):

а) декартовы координаты:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (10)$$

б) сферические координаты (R, Θ, α):

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \quad (11)$$

в) цилиндрические координаты (r, Θ, z):

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (12)$$

3. Ротор (или вихрь) вектора ($\text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}]$):

а) декартовы координаты:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}; \quad (13)$$

б) сферические координаты (R, Θ, α) :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_R \vec{A} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\alpha \cdot \sin \theta) - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha}; \\ \operatorname{rot}_\theta \vec{A} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha); \\ \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{1}{R} \frac{\partial A_R}{\partial \theta}; \end{cases} \quad (14)$$

в) цилиндрические координаты (r, Θ, z) :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_\theta \vec{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\ \operatorname{rot}_z \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

4. Оператор «набла»:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (16)$$

5. Оператор Лапласа $(\Delta = \nabla^2)$:

а) декартовы координаты:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (17)$$

б) сферические координаты (R, Θ, α) :

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; \quad (18)$$

в) цилиндрические координаты (r, Θ, z) :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (19)$$

6. Операция $(\vec{A} \nabla) \vec{B}$:

$$(\vec{A} \nabla) \vec{B} = A_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (20)$$

$$(\vec{A} \nabla) \vec{R} = \vec{A}. \quad (21)$$

7. Операции векторного анализа для полей, обладающих шаровой симметрией [$\varphi = \varphi(R)$; $\vec{A} = \vec{A}(R)$]:

$$\text{grad } \varphi(R) = \frac{d\varphi}{dR} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{d\varphi}{dR} \cdot \nabla R; \quad (22)$$

$$\text{div } \vec{A}(R) = \frac{d\vec{A}}{dR} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{d\vec{A}}{dR} \cdot \nabla R; \quad (23)$$

$$\text{rot } \vec{A}(R) = [\nabla \vec{A}(R)] = \left[\Delta R, \frac{d\vec{A}}{dR} \right]. \quad (24)$$

8. Интегральные теоремы:

а) Теорема Остроградского — Гаусса

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_V \text{div } \vec{A} \, dv, \quad (25)$$

где V — объем, охватываемый замкнутой поверхностью S .

б) Теорема Стокса:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f}, \quad (26)$$

где S — поверхность, натянутая на замкнутый контур L .

в) Теорема Грина:

$$\int \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) df = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, dv. \quad (27)$$

9. Дифференцирование произведений:

$$\text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi; \quad (28)$$

$$\text{div } (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ div } \vec{A}; \quad (29)$$

$$\text{rot } \varphi \vec{A} = [\text{grad } \varphi \vec{A}] + \varphi \text{ rot } \vec{A}; \quad (30)$$

$$\text{div } [\vec{A}\vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}; \quad (31)$$

$$\text{rot } [\vec{A}\vec{B}] = (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B} + \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A}; \quad (32)$$

$$\text{grad } (\vec{A}\vec{B}) = (\vec{A}\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\nabla)\vec{A} + [\vec{A} \text{ rot } \vec{B}] + [\vec{B} \text{ rot } \vec{A}]. \quad (33)$$

10. Повторное дифференцирование:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = 0; \quad (34)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla [\nabla \vec{A}] = 0; \quad (35)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi; \quad (36)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \quad (37)$$

2. ПЕРЕВОД ОБОЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ИЗ АБСОЛЮТНОЙ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ В МЕЖДУНАРОДНУЮ СИСТЕМУ СИ

При переходе от абсолютной гауссовой системы единиц к Международной системе единиц СИ или наоборот необходимо произвести следующие подстановки:

	Абсолютная система единиц Гаусса	Международная система единиц СИ
Напряженность электрического поля		$\vec{E} \rightarrow \vec{E}$
Магнитная индукция		$\vec{B} \rightarrow c \vec{B}$
Электрическая индукция		$\vec{D} \rightarrow 4\pi \vec{D}$
Напряженность магнитного поля . .		$\vec{H} \rightarrow \frac{4\pi}{c} \vec{H}$
Диэлектрическая проницаемость . . .		$\epsilon \rightarrow 4\pi \epsilon$
Магнитная проницаемость		$\mu \rightarrow \frac{c^2}{4\pi} \mu$
Плотность заряда		$\rho \rightarrow \rho$
Сила тока		$I \rightarrow I$
Скалярный потенциал электрического поля		$\varphi \rightarrow \varphi$
Векторный потенциал магнитного поля		$\vec{A} \rightarrow c \vec{A}$
Вектор Пойнтинга		$\vec{S} \rightarrow \vec{S}$
Вектор Герца		$\vec{P} \rightarrow 4\pi \vec{P}$
Емкость		$C \rightarrow 4\pi C$
Индуктивность		$L \rightarrow cL$

3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ СИ И ЕДИНИЦАМИ АБСОЛЮТНОЙ ГАУССОВОЙ СИСТЕМЫ

	Единицы в системе СИ	Единицы в абсолютной системе
Время t	1 сек	1 сек
Длина l	1 м	10^2 см
Масса m	1 кг	10^3 г
Сила F	1 н	10^5 дин
Энергия W	1 дж	10^7 эрг
Мощность p	1 вт	10^7 эрг/сек
Заряд e	1 к	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ
Напряженность электрического поля \vec{E}	1 в/м	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ ед. СГСЭ/см
Электрическая индукция \vec{D}	1 к/м	$4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ ед. заряда СГСЭ/см ²
Потенциал ϕ	1 в	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$ ед. СГСЭ
Емкость C	1 ф	$9 \cdot 10^{11}$ см
Сила тока I	1 а	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ
Сопротивление R	1 ом	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ ед. СГСЭ
Напряженность магнитного поля \vec{H}	1 а/м	$4\pi \cdot 10^{-3}$ э
Магнитная индукция \vec{B}	1 тл	10^4 гс
Магнитный поток Φ	1 вб	10^8 макс
Индуктивность L	1 гн	10^9 ед. СГСЭ

4. ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

Диэлектрическая проницаемость вакуума

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$$

Магнитная проницаемость вакуума

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$$

Постоянная Авогадро (число молекул в 1 килограмм-моле)

$$N = 6,025 \cdot 10^{26}$$

Заряд электрона

$$e = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ к}$$

Масса электрона

$$m = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

Масса протона

$$m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Масса α -частицы

$$m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Постоянная Планка

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек}$$

Скорость света в вакууме

$$c = 2,99776 \cdot 10^8 \text{ м/сек} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$$

Число молекул в 1 м^3 при нормальных условиях

$$L = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ дж} \cdot \text{град}^{-1}$$

Энергия, соответствующая 1 эв ,

$$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ дж}$$

Энергия, соответствующая массе покоя электрона,

$$0,5108 \text{ Мэв.}$$

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие ко второму изданию	3
Из предисловия к первому изданию	—

Г Л А В А I

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 1. Методы решения электростатических задач	5
а) Метод, основанный на использовании принципа суперпозиции полей	6
б) Расчет электрических полей при помощи теоремы Гаусса	21
в) Интегрирование уравнений Лапласа и Пуассона.	29
г) Метод электрических изображений	42
§ 2. Энергия электростатического поля. Емкость проводников и конденсаторов. Силы, действующие на заряды и проводники в электрическом поле	57
§ 3. Электростатическое поле в диэлектриках	75
§ 4. Постоянный электрический ток	105

Г Л А В А II

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Методы расчета магнитных полей	119
а) Расчет магнитных полей с помощью закона Био и Савара	121
б) Расчет магнитных полей с помощью закона Эрстеда	130
в) Векторный и скалярный потенциалы магнитного поля. Магнитный момент тока	137
§ 2. Энергия магнитного поля. Коэффициенты индукции.	150

Г Л А В А III

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Электромагнитная индукция	169
§ 2. Квазистационарное электромагнитное поле	178
§ 3. Полная система уравнений Максвелла. Плоские электромагнитные волны	192
§ 4. Излучение электромагнитных волн	213

ГЛАВА IV

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях	233
§ 2. Электрические и магнитные свойства вещества	252

ГЛАВА V

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Релятивистская механика	283
§ 2. Релятивистская электродинамика	302
Ответы и указания	318

Приложения:

1. Важнейшие формулы векторной алгебры и векторного анализа	342
2. Перевод обозначений физических величин из абсолютной системы единиц в Международную систему СИ	346
3. Соотношение между единицами Международной системы СИ и единицами абсолютной гауссовой системы	347
4. Значения некоторых физических постоянных	—

Николай Иванович Жирнов

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Редактор *Л. М. Котова*

Художественный редактор *А. В. Сафонов*

Технические редакторы

В. Ф. Коскина и И. В. Квасницкая

Корректоры

К. А. Иванова и Р. Б. Штутман

Сдано в набор 18/XII 1969 г. Подпи-
сано к печати 11/VIII 1970 г.
84×108^{1/32}. Бумага тип. № 3. Печ. л. 11.
Усл. л. 18,48. Уч.-изд. л. 14,59.
Тираж 15 тыс. экз. (План 1970 г.). А 03780.
Заказ № 541.

Издательство «Просвещение» Комитета по
печати при Совете Министров РСФСР.

Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Рос-
главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров РСФСР.

Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 41 коп., переплет 10 коп.

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИИ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Н. И. ЖИРНОВ

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

ПРОСВЕЩЕНИЕ

1970