

О. К. ЖИТОМИРСКИЙ, В. Д. ЛЬВОВСКИЙ, В. И. МИЛИНСКИЙ

# ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ

*ЧАСТЬ I*

I. ANALYSIS SITUS. II. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ  
III. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



ОНТИ • ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
ЛЕНИНГРАД 1935 МОСКВА



## ПРЕДИСЛОВИЕ.

Выпуская настоящую книгу, авторы имели в виду, с одной стороны, восполнить недостаток на русском языке руководств и сборников задач по некоторым отделам геометрии, с другой стороны, путем выбора более серьезных задач, способствовать повышению интереса к геометрии в более широких кругах советских математиков.

Последнее представляется тем более необходимым, что геометрическим дисциплинам все еще уделяется недостаточное внимание в нашей высшей школе. Это объясняется тем, что классики русской математики мало интересовались геометрией, что отразилось и на содержании университетского преподавания. Между тем значение геометрического метода не отрицается и теми математиками, которые сами работают в других областях.

Выпускаемая первая часть содержит следующие отделы: I. Analysis situs. — II. Проективная геометрия. — III. Кинематическая геометрия.

Отделам I и II предпосылается особое введение. В большинстве случаев даются также вступительные замечания к отдельным главам. Это сделано в виду отсутствия на русском языке соответствующих учебников. Многие необходимые предложения помещены в виде задач, в возможно систематическом порядке.

В конце книги даны решения большинства задач. Без решений оставлены частью более легкие задачи, частью те из более трудных задач, решение которых может быть осуществлено методами, примененными в предыдущих задачах.

*Авторы.*







## ВВЕДЕНИЕ.

Предмет Analysis situs составляет изучение инвариантных свойств пространств относительно гомеоморфизма. Гомеоморфными называются пространства, если между ними возможно установление одно-однозначного и взаимно непрерывного соответствия. Первой книгой, посвященной Analysis situs, была работа Листинга „Предварительные исследования по топологии“, изданная в Геттингене в 1848 г. (в 1932 г. перевод ее вышел в ГТТИ). В ней Листинг определял Analysis situs как учение о законах связи, расположении и последовательности точек, линий, поверхностей, тел и их частей в пространстве, независимо от метрических соображений, отвлекаясь от взаимных расстояний и размеров рассматриваемых объектов. Предметом Analysis situs или топологии (уместно сказать, что термин „топология“ был введен Листингом) с его точки зрения было изучение качественных свойств геометрических образов — kalkulatorische Bearbeitung der modalen Seite der Geometrie.

Эти нечеткие и расплывчатые концепции Листинга были впоследствии уточнены Клейном, определившим топологию в общих терминах теории групп и тем самым установившим ее место в ряду геометрических дисциплин; предмет топологии по Клейну составляло изучение свойств пространственных объектов, инвариантных относительно группы всех непрерывных преобразований пространства (Эрлангенская программа, 1872).

Работы по отдельным вопросам топологии появились гораздо раньше, так в 1736 г. Эйлер дал решение задачи „о кенигсбергских мостах“<sup>1)</sup>: спрашивалось, можно ли последовательно пройти все семь мостов через Прегель, проходя через каждый только по разу? В 1752 г. им была выведена известная формула<sup>2)</sup> для многогранников, составляющая содержание одной из основных теорем Analysis situs. Современный период топологии открывается работами Пуанкаре — „Analysis situs“ (Journ. de l'Es. polyt.) и пятью дополнениями, положившими основу алгебраической топологии; развитие топологии в других направлениях было дано работами Римана, Бетти, Мёбиуса, Дика, Тэта и др.

В 1907 г. была закончена для немецкой математической энциклопедии статья Дена и Хээгода, подводившая итоги тогдашнего состояния топологии. По Дену и Хээгоду объекты Analysis situs аксиоматически строились из конечного числа элементарных объектов, называемых точками,

<sup>1)</sup> Petrop. Comment. 8, 1741, стр. 128.

<sup>2)</sup> Petrop. Novj Comment. 4, 1752—53, стр. 109.

отрезками, двумерными кусками и т. д.. Введение внутреннего преобразования, состоящего в разбиении элементарных объектов на части (отрезка  $AB$ , введением точки  $C$ , на два отрезка  $AC$  и  $BC$ , и т. д.), позволяет совершать переходы от одного геометрического объекта к другому. Топологический объект, согласно такой аксиоматики, вполне определяется заданием составляющих его элементарных объектов и законом их соединения, например комбинаторная схема, дающая закон соединения точек, отрезков и двумерных кусков вида

$$\{P_0^1, P_0^2, P_0^3, P_0^4; S_1^{12}, S_1^{23}, S_1^{34}, S_1^{41}, S_2^{(12)(23)(34)(41)}, S_2^{(12)(24)(43)(31)}\},$$

представляет так называемую ленту Мёбиуса; здесь схема состоит из четырех точек  $P_0^1, P_0^2, P_0^3$  и  $P_0^4$ , шести отрезков  $S_1^{ik}$ , соединяющих точки  $P_0^i$  и  $P_0^k$  и по определению не имеющих других общих точек, и наконец двух двумерных кусков, ограниченных четырехсторонниками. По Дену и Хээгоду, комбинаторная топология в такой трактовке представляет отдел комбинаторики, имеющий геометрическую интерпретацию, и в этом отношении есть самый первоначальный отдел геометрии, в котором все не используется понятие предельного перехода, где все конечно.

Гомеоморфными по Дену будут комплексы, которые внутренними преобразованиями или даже просто изменением обозначений можно привести к тождественному виду. Гомеоморфизмом характеризуются внутренние, собственные свойства геометрических объектов; свойства относительные характеризуются изотопией. Рассмотрим например в трехмерном пространстве ( $E_3$ ) два узла, изображенные в проекции на рис. 1; оказывается, что никакими непрерывными деформациями трехмерного пространства нельзя один преобразовать в другой<sup>1)</sup>, другими словами: узлы не изотопны в  $E_3$ . Изотопия в данном случае характеризует различное расположение рассматриваемых кривых в трехмерном пространстве. Наглядно выражаясь, можно высказаться следующим образом: комплексы в  $E_3$  изотопны, если они превращаются друг в друга непрерывными деформациями изгиба, растяжения и сжатия без применения операции „прохождения сквозь“.

Деном введено также понятие гомотопии: две кривые гомотопны на поверхности, если непрерывными деформациями их на поверхности, причем они ее не покидают, достигается превращение одной в другую; аналогично строится гомотопия в пространстве — нетрудно убедиться например, что два узла, изображенные на рис. 1, гомотопны в  $E_3$ .

Для комбинаторной аксиоматики Дена и Хээгода характерно рассмотрение элементарных объектов: точек, отрезков и т. д. как неопределимых вещей, о которых известно лишь то, что говорится о них в аксиомах. В этом отношении другая точка зрения проводится в Analysis situs, основанном на теории множеств; в так называемой теоретико-множе-

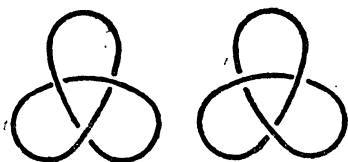


Рис. 1.

<sup>1)</sup> Dehn, Math. Ann. 75, 1914, стр. 402.



ственной топологии все геометрические объекты суть точечные множества и содержание топологии представляет по существу изучение свойств множеств и операций над ними, в частности над точечными множествами. Это направление в топологии прогрессировало весьма сильно в последнее время, обогнав по темпам развития комбинаторную топологию, причем приходится констатировать, что обе эти ветви *Analysis situs* в течение сравнительно долгого времени существовали изолированно друг от друга. В математической энциклопедии вопросу о взаимоотношениях различных направлений топологии посвящена специальная статья Тиче—Вьеториса (1929).

За последние 15—20 лет работами главным образом американских ученых оформилось третье направление в топологии (Броуэр, Веблен, Александер, Лефшец и др.); в комбинаторную топологию здесь вносятся элементарно-геометрические методы и элементы теоретико-множественной топологии; это направление иногда называют „*méthode mixte*“.

В развитии теоретико-множественной топологии большое участие принимала московская школа топологов во главе с покойным Урысоном и проф. П. С. Александровым. В настоящее время в работах московской школы намечилось новое течение, направленное к синтезированию и взаимопроникновению всех ветвей топологии. Крупнейшим достижением на этом пути явилось построение геометрической теории размерности Александрова — Понтрягина — Хопфа. Следует думать, что плодотворное развитие топологии несомненно будет связано с целесообразным ассимилированием и использованием приемов и результатов всех направлений *Analysis situs*.

Отдел посвящается комбинаторной топологии, он распадается на следующие главы:

1) отрезочные комплексы, где в частности разбираются задачи на деревья, графы, задачи о красках и т. д.; 2) двумерные многообразия — глава, включающая задачи на ленты, гомотопные преобразования поверхностей, поверхности Римана, кривые на поверхностях, сечения поверхностей; главное внимание здесь, как и в дальнейшем, уделено многообразиям; 3) трехмерные многообразия — здесь помещены задачи на изотопию в пространстве, узлы, гомеоморфизмы, симметричные, римановы пространства, диаграммы и 4) вопросы  $n$ -мерной топологии, куда включен материал  $n$ -мерной топологии в самом элементарном разрезе, имея в виду лишь введение читателя в круг общих идей комбинаторной топологии.

Основные понятия одно-, дву- и трехмерной комбинаторной топологии, комплексы, многообразия, границы, ориентация, гомеоморфизм, гомотопия и изотопия здесь иллюстрируются на материале, представляемом различными примерами на основе чисто интуитивно-геометрического подхода. В последней главе всем примененным понятиям дана система определений, следуя *méthode mixte*. Приводимые литературные указания не претендуют на полноту.

В составлении материала для задач принимали участие члены Ленинградского топологического кружка, в частности А. А. Марков и Н. Н. Худков.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Александров. Об основных направлениях современной топологии, Труды Московского математического съезда 1927 г., ГИЗ, 1927, стр. 65—89.
  - 1a. Alexandroff. Einfachste Gremdbegriffe der Topologie. Springer, 1932.
  2. Франкль. Московская топологическая школа. „Естествознание и Марксизм“, 1929, № 4, стр. 169—188.
  3. Кнесер. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jahresber. d. D. M. V. **34**, 1925, стр. 1—14.
  4. van der Waerden. Kombinatorische Topologie. Jahresber. d. D. M. V. **39**, 1930, стр. 121—139.
  5. Dehn & Heegaard. Analysis situs. Math. Enz. B. III, 1, 1, стр. 153—220.
- Имеется полная библиография до 1907 г., при использовании результатов этой работы необходим критический подход.
6. Tietze & Vietoris. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweige der Topologie. Math. Enz. B. III, 1, 2, стр. 145—238. (Обширная библиография до 1929 г.)
  7. Veblen. Analysis situs. The Cambridge Colloquium, Part II, 1 ed. 1922, 2 ed. 1931.
  8. Lefschetz. Topology. Am. Math. Soc. Colloquium publications vol. XII. 1930 (Имеется большая библиография).
  9. Seifert & Threlfall. Lehrbuch der Topologie. Teubner, 1934. Единственный пока учебник по комбинаторной топологии. Перевод этой книги подготавливается в Москве к изданию.
  10. Dehn. Topologie. Pascal-Repertorium der höheren Mathematik II, Geometrie, 2. Aufl. 1920, Kap. IX (Краткий элементарный очерк комбинаторной топологии).
  11. Чеботарев. Курс топологии. Казань, 1932 (литограф.).
  12. Чеботарьев. Курс топологии. Київ—Харків, 1934. Представляет элементарное введение в комбинаторную топологию, частично использован Veblen I. c.
  13. Рожанская и Степанов. Очерк развития топологии в СССР за 10 лет. Мат. сб., доп. том, 1928.
  14. Рожанская и Степанов. Топология. „Математика в СССР за 15 лет“, ГТТИ, 1932, стр. 191—225 (имеется библиографический указатель в 103 номера).

## ГЛАВА I.

## ОТРЕЗОЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ.

Будем предполагать известными свойства евклидова трехмерного пространства ( $E_3$ ); объекты наших рассмотрений будем считать принадлежащими ему; использована нами будет собственно часть трехмерного пространства, ее можно себе представить внутренностью тетраэдра (трехмерным симплексом) или, если угодно, внутренностью сферы. Заниматься мы будем с самыми простыми геометрическими объектами и самыми простыми их геометрическими свойствами.

Пусть в  $E_3$  дано конечное число  $a_0$  точек  $P^1, P^2, P^3, \dots, P^{a_0}$ ; пусть они попарно соединены произвольной конечной системой  $\alpha_1$  отрезков  $S_1^1, S_1^2, S_1^3, \dots, S_1^{\alpha_1}$ ; отрезки  $S_1^i$  необязательно следует представлять прямолинейными, они могут быть и криволинейными <sup>1)</sup>, но по определению принимаем, что они не имеют общих точек, кроме концов; две разные точки могут быть соединены более чем одним отрезком. Будем совокупность точек  $\{P\}$  и отрезков  $\{S_1\}$  называть отрезочным комплексом

<sup>1)</sup> Более точные не индуктивной природы определения даны в начале главы IV.

сом, если любая пара точек, принадлежащих  $\{P\}$ , может быть соединена отрезочным путем, принадлежащим  $\{S_1\}$ , т. е. последовательностью отрезков, тоже принадлежащих  $\{S_1\}$  вида

$$(P^i P^{i_1})(P^{i_1} P^{i_2}) \dots (P^{i_j} P^j) \quad (i \neq i_e \neq j), \quad (1)$$

где  $P^i$  и  $P^j$  — рассматриваемая пара точек. Отрезочный комплекс поэтому представляет связное множество. Отрезочный путь вида (1) есть также отрезочный комплекс; если в нем  $P^i = P^j$ , то такой комплекс называется одномерной сферой — окружностью, замкнутой кривой.

Пусть в  $E_3$  даны: 1) конечное число  $\alpha_0$  точек  $\{P\}$ , 2) конечная совокупность  $\alpha_1$  отрезков  $\{S_1\}$ , соединяющих попарно точки совокупности  $\{P\}$ , 3) конечная совокупность  $\alpha_2$  двумерных кусков  $\{S_2\}$ , определяемых каждый одномерной сферой, составленной из отрезков совокупности  $\{S_1\}$ ; эти одномерные сферы являются контурами или границами кусков; двумерные куски необязательно представлять плоскими, они могут быть и кривыми; по определению мы принимаем, что двумерные куски не имеют общих точек, линий или других частей, кроме точек и отрезков, принадлежащих их общим границам; одномерная сфера может быть общей границей более чем для одного двумерного куска. Будем совокупность точек  $\{P\}$ , отрезков  $\{S_1\}$  и двумерных кусков  $\{S_2\}$  называть двумерным комплексом, если совокупности  $\{P\}$  и  $\{S_1\}$  образуют отрезочный комплекс; последнее условие обеспечивает связность комплекса.

Частный случай двумерных комплексов составляют замкнутые двумерные многообразия — замкнутые поверхности. Примерами их могут быть поверхности шара, тора и др. Более подробно о них сказано в главе II. Здесь мы займемся главным образом различными понятиями, характеризующими как собственные свойства комплекса, так и несобственные, связанные с тем или иным расположением комплекса  $C_1$  в  $E_3$ .

Порядком комплекса называется число его вершин (точек)  $\alpha_0$ ; порядком точки называется число отрезков, сходящихся в ней.

Если расположить комплекс на замкнутой поверхности, то на ней комплекс выделит части поверхности — области, ограничиваемые его отрезками. Пусть  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно числа точек, отрезков и областей, получаемых от комплекса на поверхности.

Род комплекса есть род поверхности (см. определение рода поверхности в главе II), на которой можно без пересечений расположить комплекс.

Пусть комплекс  $C_1$  на поверхности имеет числа  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , тогда комплекс  $C_1'$ , у которого  $\alpha'_0 = \alpha_2$ ,  $\alpha'_1 = \alpha_1$  и  $\alpha'_2 = \alpha_0$ , называется обратным  $C_1$ .

Ранг комплекса есть наименьшее число классов, на которые разбиваются точки комплекса так, чтобы смежные точки (концы одного отрезка) были разных классов.

Однородный комплекс с точками одного порядка называется графом. Степенью графа называется порядок ее вершин; например

графы кубична, если в точках ее сходятся три отрезка, т. е. порядок ее точек равен трем. Графа порядка два называется одномерным многообразием; легко убедиться, что это также будет одномерная сфера. Нетрудно убедиться, что комплекс, обратный графе, состоит из одинаковых сторонних (одинаковоугольных) областей.

Хроматическое число комплекса — наименьшее число классов, на которые разбиваются области комплекса так, чтобы смежные области (имеющие общую отрезочную границу) были разных классов.

Если считать справедливой теорему о четырех красках, то ранг плоского комплекса  $\leq 4$ . Эта теорема заслуживает некоторого внимания; имея чисто эмпирическое происхождение (раскраска карт), она по своей истории аналогична большой теореме Ферма из теории чисел. Много доказательств давалось и все они оказывались недостаточными (Cayley 1878, Kempe 1879, Tait 1880 и т. д.; см. литературу).

Пока предельным достижением является установление хроматического числа 4 для комплекса рода 0 с числом областей не свыше 25 (1922, Franklin) и 27 (1926, Reynolds).

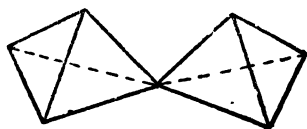


Рис. 2.



Рис. 3.

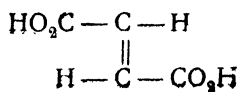
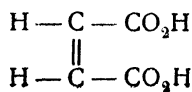
Отрезочный комплекс, у которого  $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$ , называется деревом. Центром называется точка дерева, отстоящая по крайней мере от двух его концов на одинаковое число отрезков  $N$ , причем нет других концов дерева, отстоящих на число отрезков  $M > N$ .

Скажем несколько слов о химических приложениях теории комплексов. Гипотезы о пространственных расположениях атомов в молекулах, особенно в органических соединениях (химия углерода), привели к оформлению стереохимических представлений. На том основании, что углерод четырехвалентен, было предложено геометрически изображать валентности в виде отрезков, направленных из центра тетраэдра в его вершины. Если углерод в молекуле связан с 4 различными группами, мы получаем так называемый асимметричный атом углерода; в этом случае изомерные модификации соединения обнаруживаются по их физическим свойствам.

Число стереомеров химического соединения, содержащего  $n$  асимметрических атомов углерода, будет  $2^n$ . Вследствие наличия внутренней симметрии оно в действительности меньше, и  $2^n$  есть только верхняя граница.

Два асимметричных атома (рис. 2) дают четыре изомера, попарно представляющие зеркальное отображение друг друга.

При ненасыщенном углероде, когда имеются двойные связи (рис. 3), изомерия также может иметь место; их примером являются малеиновая и фумаровая кислоты:



Аналогично будет в циклических соединениях углерода (рис. 4, 5 и 6).

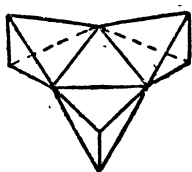


Рис. 4.

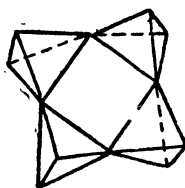


Рис. 5.

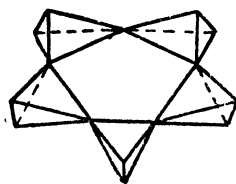


Рис. 6.

Схематизируя комплексом молекулярную формулу соединения, можно перевести на комбинаторный язык вопросы о существовании и количестве изомеров — это будет вопрос о негомеоморфных комплексах — вопрос об их количестве при взятых условиях задания.

### ЛИТЕРАТУРА.

1. Sainte-Laguë. Les Réseaux. Mém. S. M., f. XVIII, 1926.
  2. Sainte-Laguë. Géométrie de situations et jeux. Mém. S. M., f. XLI, 1929.
- В обеих брошюрах большая библиография.
3. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. B. I & II, 1921, 1918. Большая библиография.
  4. Игнатъев. В царстве смекалки. 3 тома. (Популярное изложение, не для математиков.)
  5. Успенский. Избранные математические развлечения. Изд. „Сеятель“, 1924.
  6. Errera. Du coloriage des cartes. Diss., 1921. (Указана библиография в 78 номерах.)
  7. Hunziker. Ueber das Kartenfärbungsproblem. Diss., 1924.
  8. Franklin. The Four Color Problem. Am. J. of Math. 14, 1922, стр. 225—236.
  9. Reynolds. On the Problem of Coloring Map in Four Colors. Ann. of Math. 28, 1927, стр. 1—15, 476—492.
  10. Hinrichsen, Mamlock & Study. Chemische Atomistik. Math. Enz. V, 6.
  11. Schoute, см. главу IV.

1. Найти отрезочные комплексы, обратные в  $E_2$  комплексам, изображенным на рис. 7—12.

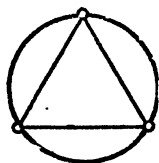


Рис. 7.

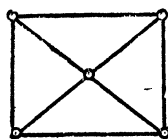


Рис. 8.

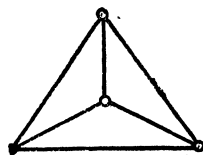


Рис. 9.

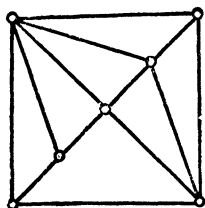


Рис. 10.

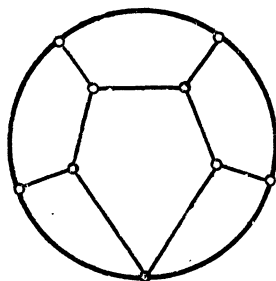


Рис. 11.

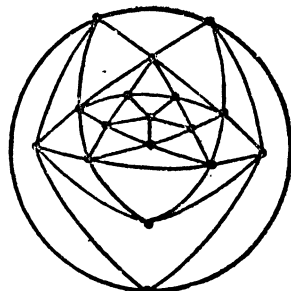


Рис. 12.

2. Найти комплексы, обратные в  $E_2$  графам, изображенным на рис. 13 и 14.

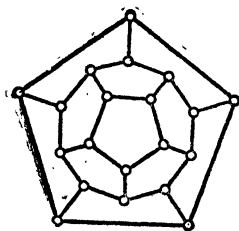


Рис. 13.

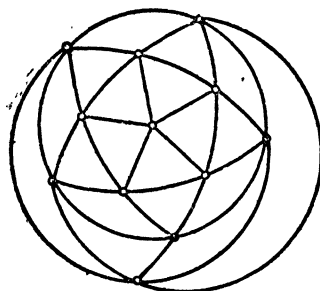


Рис. 14.

3. Определить ранги комплексов, изображенных на рис. 15—17.

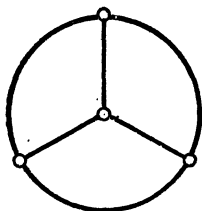


Рис. 15.

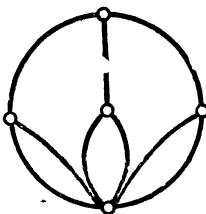


Рис. 16.

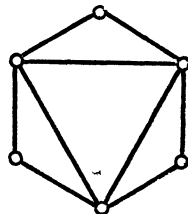


Рис. 17.

4. Показать, что комплексы, изображенные на рис. 18—20, рода нуль.

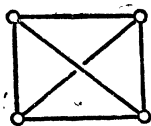


Рис. 18.

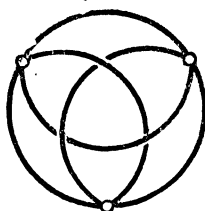


Рис. 19.

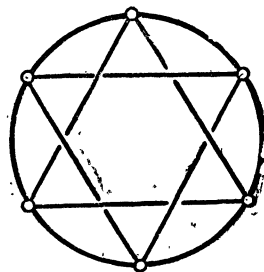


Рис. 20.

5. Найти род граф рис. 21 и 22.

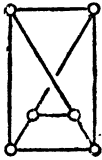


Рис. 21.

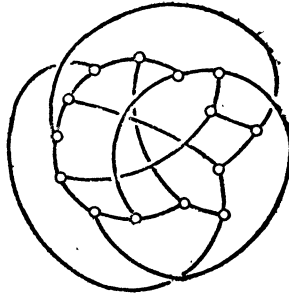


Рис. 22.

6. Найти род комплексов, изображенных на рис. 23 и 24.

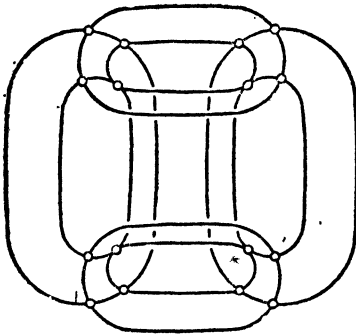


Рис. 23.

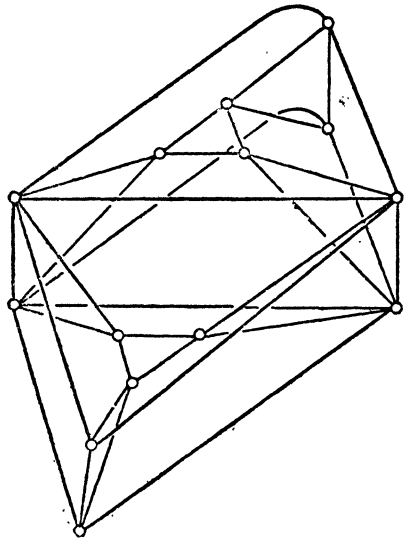


Рис. 24.

7. Доказать, что для обращения отрезочного комплекса в дерево достаточно изъять  $(\alpha_1 - \alpha_0 + 1)$  его отрезков, где  $\alpha_0$  — число точек,  $\alpha_1$  — число отрезков комплекса.

8<sup>1)</sup>. Доказать, что для комплекса рода 0 справедлива формула

$$\sum_{n=3}^{\alpha_0-1} n_n \alpha_n = 2\alpha_1 = \sum_{n=3}^{\alpha_2-1} n_n \alpha_n,$$

где  $n_n \alpha_n$  — число областей, ограниченных  $n$  отрезками,  
 $n_n \alpha_n$  — число точек, где сходится  $n$  отрезков.

<sup>1)</sup> Задачи 8—10 взяты у Schoute, I. с., В. II, стр. 55.

9. Доказать, что при соблюдении условий предыдущей задачи: 1) нет полиэдра только с шестиугольными гранями, а также полиэдра с семью ребрами, 2) число нечетных вершин, а также число нечетных граней, четно, 3) полиэдр будет пирамидой, если  $\alpha_2 - 1 \alpha_0$  или  $\alpha_0 - 1 \alpha_2$  отличны от нуля, 4) полиэдр с одним нечетным  $2k + 1 \alpha_0$  или  $2k + 1 \alpha_2$  имеет по крайней мере одно четное  $2k \alpha_0$  или соответственно  $2k \alpha_2$ .

10. Доказать, что если

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2;$$

$$\alpha_0 = \sum_{n=3}^{\alpha_0-1} n \alpha_n; \quad \alpha_2 = \sum_{n=3}^{\alpha_2-1} n \alpha_n,$$

то

$$3 \alpha_0 + 3 \alpha_2 = 8 + (5 \alpha_0 + 5 \alpha_2) + 2 (6 \alpha_0 + 6 \alpha_2) + \dots \quad (1)$$

$$3_3 \alpha_0 + 2_4 \alpha_0 + 5 \alpha_0 \geq 6 \alpha_0 - 2 \alpha_1 = 12 + 4 \alpha_1 - 6 \alpha_2. \quad (2)$$

$$3_3 \alpha_2 + 2_4 \alpha_2 + 5 \alpha_2 \geq 6 \alpha_2 - 2 \alpha_1 = 12 + 4 \alpha_1 - 6 \alpha_0. \quad (3)$$

$$3_3 \alpha_0 + 2_4 \alpha_0 + 5 \alpha_0 \geq 12. \quad (4)$$

$$3_3 \alpha_2 + 2_4 \alpha_2 + 5 \alpha_2 \geq 12. \quad (5)$$

$$4_3 \alpha_0 + 2_4 \alpha_0 + 3 \alpha_2 \geq 20. \quad (6)$$

$$4_3 \alpha_2 + 2_4 \alpha_2 + 3 \alpha_0 \geq 20. \quad (7)$$

Какие теоремы отсюда следуют?

11. Почему нельзя непрерывно обойти, не пройдя дважды, отрезки комплекса рис. 25 и почему это возможно для комплекса, изображенного на рис. 26?

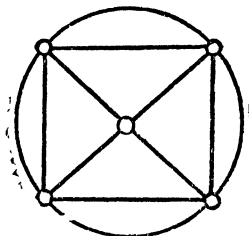


Рис. 25.

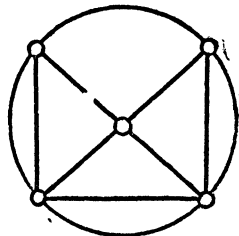


Рис. 26.

12<sup>1)</sup>. Известно, что при обходе вершин додекаэдра, если  $n$  число первых фиксированных вершин обхода, числа  $k$  различных путей, последовательно обходящих все вершины не более одного раза, имеют значения:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$k$	30	20	10	6; 4	4; 2	3; 2; 1; 0	2; 1; 0	1; 0

Найти эти пути.

<sup>1)</sup> См. Sainte-Laguë, Géometrie, 1. c., стр. 54.



13. Доказать, что у комплекса с четносторонними областями все замкнутые отрезочные пути состоят из четного числа отрезков.

14. Показать, что графы, изображенные на рис. 27, 29 и 31, соответственно гомеоморфны графам, изображенным на рис. 28, 30 и 32.

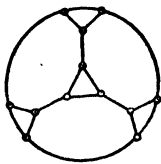


Рис. 27.

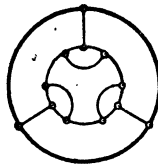


Рис. 28.

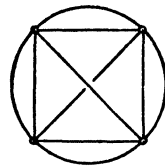


Рис. 29.

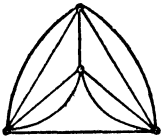


Рис. 30.

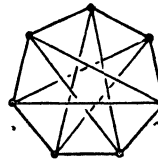


Рис. 31.

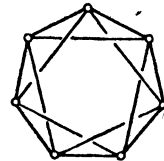


Рис. 32.

15<sup>1)</sup>. Гомотопно в  $E_2$  преобразовать дерево рис. 33 в дерево рис. 34.

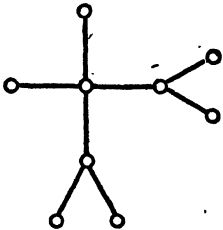


Рис. 33.

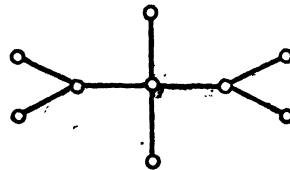


Рис. 34.

16. Показать, что гомеоморфные деревья рис. 35 и 36 неизотопны не только на  $E_2$ , но и на  $\Pi_2$ .

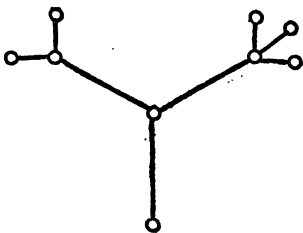


Рис. 35.

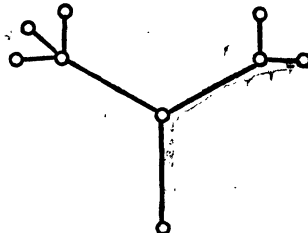


Рис. 36.

<sup>1)</sup> Задачи 15—18 даны Н. Н. Худековым.

17. Показать, что гомеоморфные, но неизотопные на  $E_3$  комплексы, изображенные на рис. 37 и 38, изотопны на  $\Pi_3$ .

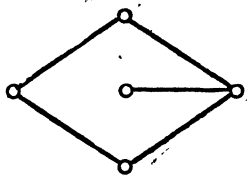


Рис. 37.

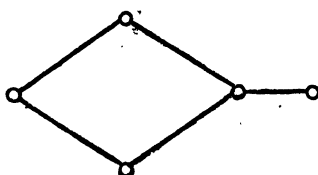


Рис. 38.

18. Показать, что на  $E_3$  все гомеоморфные комплексы, изображенные на рис. 39—41, неизотопны, а на  $\Pi_3$  первые два изотопны между собой и не изотопны третьему.

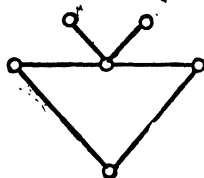


Рис. 39.

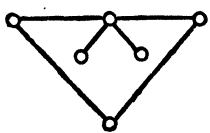


Рис. 40.

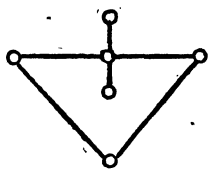


Рис. 41.

19. Доказать, что всякое дерево имеет или один или два центра.

20. Доказать, что минимальное число путей, обходящих дерево, равно половине числа точек нечетного порядка.

21. Доказать, что минимальное число путей, обходящих дерево, равно

$$\sum \left[ \frac{k+1}{2} \right] - \alpha_0 + 1 = \sum \left[ \frac{k-1}{2} \right] - 1,$$

где  $k$  — порядок точек.

22. Доказать, что существуют только два изомерных соединения с одним асимметричным углеродным атомом.

23<sup>1)</sup>. Число стереомеров  $N$  парафина  $C_n H_{2n+2}$  выражается таблицей:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$N$	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802

Построить деревья, им соответствующие, до  $n=10$ .

24. Число стереомеров спиртов  $C_n H_{2n+1} OH$  выражается таблицей:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$N$	1	1	2	4	8	17	39	89	211	507	1238	3057	7638

<sup>1)</sup> Задачи 23 и 24 взяты у Sainte-Laguë, l. c.

Построить деревья, им соответствующие, до  $n=7$ .

25<sup>1)</sup>. Доказать, что при  $\alpha_0=8$  имеется только семь деревьев с двумя центрами с числом  $N=2$ .

26. Доказать, что при  $\alpha_0=9$  имеется только три дерева с двумя центрами с числом  $N=3$ .

27. Доказать, что при  $\alpha_0=8$  имеется только три дерева с одним центром и  $N=3$ .

28. Доказать, что при  $\alpha_0=9$  имеется только одно дерево с одним центром и  $N=4$ .

29. Доказать, что комплекс, имеющий только четные  $\Pi_1$  (замкнутые отрезочные пути  $\Pi_1$  только с четным числом отрезков), имеет ранг 2.

30. Доказать, что комплекс с точками четного порядка имеет хроматическое число 2.

31. Доказать, что треугольный комплекс (с треугольными или что то же трехсторонними областями) имеет ранг 3.

32. Доказать, что кубический комплекс с четными  $\Pi_1$  имеет хроматическое число 3.

33. Построить четные треугольные комплексы ранга 3.

34<sup>2)</sup>. Доказать, что при числе областей большим четырех их нельзя так расположить на плоскости или сфере, чтобы у них попарно были общие границы.

35<sup>3)</sup>. Доказать, что если можно раскрасить в  $t$  цветов ( $t > 4$ ) всякую карту с  $n$  областями на плоскости, то можно раскрасить с тем же количеством цветов карту на плоскости, но с  $(n+1)$  областями, если одна из них  $k$ -угольник ( $k \leq 4$ ).

Доказать, что при  $t=4$  это имеет место и в том случае, когда  $k=4$ .

36<sup>4)</sup>. Карта называется нормальной, если в вершинах сходится три области; области односвязны и суммы любых двух или трех имеют пять и более сторон (ребер).

Доказать, что нормальная карта на сфере имеет не меньше 12 пятиугольников.

37. Доказать, что всякая нормальная карта на сфере может быть окрашена в пять цветов.

38<sup>5)</sup>. Доказать, что при разбиении поверхности тора на симплексы  $\alpha_0 \geq 7$ .

39. Доказать, что для поверхности тора хроматическое число равно 7.

40. Построить на ленте Мёбиуса комплекс с хроматическим числом, равным 6.

41. Доказать, что хроматическое число для областей трехмерного пространства может быть неограниченно велико.

<sup>1)</sup> Задачи 25—28 взяты у Cayley, Coll. Pap. 9.

<sup>2)</sup> См. Baltzer, Leipzig Ber. Math. Phys. Cl. XXXVII, стр. 16, 1885.

<sup>3)</sup> См. Errera, l. c., стр. 36—37.

Кемпе, Am. J. of Math., II, 1879, стр. 193—200.

<sup>4)</sup> Кемпе, l. c., стр. 198.

<sup>5)</sup> Задача А. А. Маркова.

## ГЛАВА II.

## ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ.

Пусть двумерный комплекс определен совокупностью точек  $\{P\}$ , отрезков  $\{S_1\}$  и двумерных кусков  $\{S_2\}$ . Рассмотрим двумерные куски комплекса, сходящиеся в точке  $P'$  совокупности  $\{P\}$ ; возьмем один из них, например  $S_2'$ , к нему присоединим кусок, смежный с  $S_2'$  по отрезку совокупности  $\{S_1\}$ ; будем продолжать присоединение, пока не исчерпаем всех по отрезкам смежных с  $S_2'$  двумерных кусков; если еще останутся двумерные куски, сходящиеся в точке  $P'$ , не вошедшие в разобранную группу кусков куска  $S_2'$ , то операцию присоединения будем производить, взяв один из оставшихся двумерных кусков; таким образом все двумерные куски распадутся на смежные по отрезкам группы.

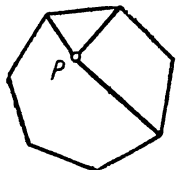


Рис. 42.

Если: 1) в каждой группе двумерных кусков, сходящихся в точке комплекса совокупности  $\{P\}$ , куски смежны последовательно, т. е. в каждом отрезке  $\{S_1\}$  их сходится не более двух, и 2) в каждой точке комплекса совокупности  $\{P\}$  сходящиеся двумерные куски образуют одну и только одну смежную по отрезкам группу, то двумерный комплекс называется **двумерным многообразием** — поверхностью.

Если, кроме того, в каждой точке многообразия, принадлежащей совокупности  $\{P\}$ , сходится замкнутая группа смежных двумерных кусков, т. е. первый кусок смежен с последним, то многообразие (поверхность) называется **замкнутым**. На рис. 42 изображена замкнутая группа смежных двумерных кусков, состоящая из треугольника, четырехугольника и шестиугольника, сходящихся в точке  $P$ .

Из определений вытекает, что у двумерного многообразия по каждому отрезку, принадлежащему совокупности  $\{S_1\}$ , смежными могут быть не более чем два двумерных куска; например изображенный в перспективе на рис. 43 двумерный комплекс из двух четырехугольников и одного треугольника не будет многообразием, потому что по отрезку 12 будут смежны три двумерных куска.

Если два тетраэдра склеить по вершине и рассмотреть комплекс, образованный их гранями, то окажется, что хотя по каждому ребру будут смежны две грани, однако в склеенной вершине будут сходиться две независимых замкнутых смежных группы двумерных кусков, каждая из трех граней; поэтому такой комплекс не есть многообразие.

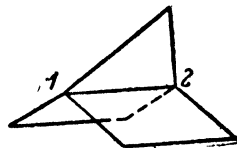


Рис. 43.

Если их склеить по ребру, то многообразия тоже не получится потому, что нельзя будет образовать смежные последовательно группы для концов склеенного ребра — в склеенном ребре будут смежны четыре грани.

Если двумерное многообразие незамкнуто, то совокупность отрезков, принадлежащих  $\{S_1\}$  и обладающих тем свойством, что в каждом сходится только один двумерный кусок, образует **границы его** — **контуры**.

Нетрудно убедиться, что если разбить поверхность шара  $\Pi_2$  отрезочным комплексом на области, то удовлетворяются все условия, приведенные в определении замкнутого многообразия; аналогично будет для поверхности тора. Это — простейшие примеры замкнутых поверхностей.

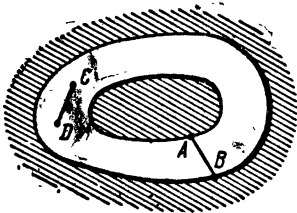


Рис. 44.

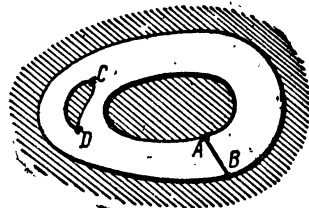


Рис. 45.

Если вырезать из поверхности шара одну или несколько несмежных областей, то мы получим двумерный комплекс, который будет удовлетворять всем условиям определения двумерного многообразия; это простейший пример незамкнутой поверхности, имеющей границы. Если вырезать один кусок, то мы получим поверхность, которую можно обозначить  $E_2$ , так как она будет гомеоморфна  $S_2$ .

Введем понятие связности; говорят, что связность поверхности будет равна  $k$ , если для обращения ее в элементарный двумерный кусок (в  $E_2$  или что то же в  $S_2$ ) достаточно  $(k - 1)$  сечений (разрезов); например поверхность, изображенная на рис. 44, двусвязна,  $k = 2$ , потому что если разрезать ее по линии  $AB$ , то сразу получим элементарный двумерный кусок; действительно, всякое последующее сечение будет его делить на части. Для замкнутых поверхностей вводят также род поверхности  $p$ , определяемый через связность  $k$  формулой

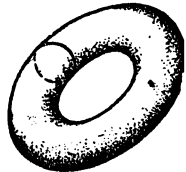


Рис. 46.



Рис. 47.

$$p = \frac{k - 1}{2}.$$

Проводимые для определения связности сечения должны быть таковы, чтобы: 1) поверхность не делилась ими на отдельные части, 2) не увеличивалась связность; последним свойством не обладает например сечение  $CD$  рис. 44, так как после него поверхность примет вид, изображенный на рис. 45, — связность ее увеличилась. Читатель легко проверит это.

Сечения, проводимые на поверхности, могут быть: 1) замкнутые неделяющие; на рис. 46 изображено такое кольцевое сечение на торе; результат после разреза изображен на рис. 47; на рис. 48 представлено неделяющее кольцевое сечение на незамкнутой поверхности; 2) замкнутые делящие; читатель легко их построит как для замкнутых, так и для незамкнутых поверхностей; 3) незамкнутые или

отрезочные сечения; если сечения имеют концы, расположенные внутри поверхности, их также называют пунктирными или точечными; на замкнутой поверхности отрезочное сечение всегда будет пунктирным; отрезочные сечения на незамкнутой поверхности могут одним или двумя концами принадлежать контурам ее; на рис. 49  $AB$  представляет сечение, одним концом упирающееся в контур (границу); очевидно, что такое сечение не представляет топологического интереса (здесь ни связность, ни число контуров не меняется). На рис. 44  $AB$  представляет сечение, обоими концами упирающееся в контуры — в этом случае

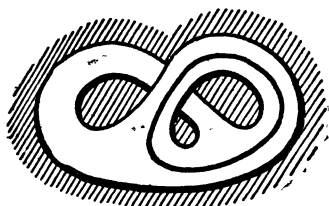


Рис. 48.

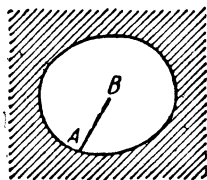


Рис. 49.

оно неделищее; если бы оно обоими концами упиралось в один контур, легко усмотреть, что оно стало бы делящим; однако, как показывает пример — сечение  $AB$  рис. 50 — отрезочное сечение, обоими концами упирающееся в один контур, может тем не менее оказаться неделищим.

При исследовании связности поверхностей обычно условливаются на замкнутых поверхностях предварительно делать, не принимаемое в счет, пунктирное сечение (вынуть точку) — получается таким образом незамкнутая поверхность; для дальнейшего исследования проводятся только незамкнутые сечения, обоими концами упирающиеся в „край“ поверхности<sup>1)</sup>.

При таких условиях действия с замкнутыми и незамкнутыми поверхностями производятся по одинаковым правилам.

Принимая во внимание сказанное, нетрудно видеть, что связность сферы  $P_2$  будет единица (для обращения в двумерный кусок достаточно пунктирное сечение), род  $p=0$ ; тор будет трехсвязен (не считая пунктирного, нужны два неделищих отрезочных сечения с обоими концами на контуре), род  $p=1$ .

После проведения сечений может меняться не только связность, но и число контуров. Неделящие отрезочные сечения могут как уменьшать, так и увеличивать число контуров; первое обстоятельство имеет место например при сечении  $AB$  рис. 44 — до того было два контура, после разреза останется один контур; увеличение контуров дает сечение  $CD$ , как это очевидно из рис. 45.

Существуют два совершенно различных вида поверхностей: ориентируемые и не ориентируемые. Рассмотрим в  $E_3$  например сфери-

<sup>1)</sup> Здесь нельзя сказать „контур“, потому что после изъятия точки получается открытое точечное множество.

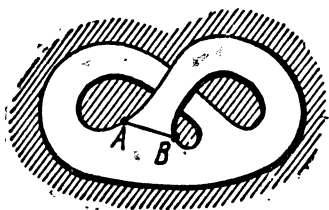


Рис. 50.

ческую поверхность или поверхность тора (рис. 51); мы можем на них различать две стороны, одну внутреннюю и другую наружную. Мы можем поэтому говорить, что нормаль к поверхности направлена внутрь ее или наружу. Две стороны можно также различать у всех ограниченных контуром частей сферической поверхности или поверхности тора. Однако это имеет место не для всех поверхностей. Первый такой пример был дан еще Мёбиусом <sup>1)</sup>; два двумерных куска, на контурах которых расположены точки  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  в указанном порядке, можно соединить в одну ленту двумя способами: или так, чтобы  $A$  совпало с  $A'$ ,  $B$  с  $B'$ ,  $C$  с  $C'$  и  $D$  с  $D'$  (рис. 52), или так, чтобы  $A$  совпало с  $A'$ ,  $B$  с  $B'$ ,  $C$  с  $D'$  и  $D$  с  $C'$  (рис. 53). В первом случае получаем ленту, гомеоморфную части сферической поверхности, ограниченной двумя окружностями; во втором случае получается лента только с одним контуром:  $AD (=C')$   $B' (=B) C (=D') A'$ .

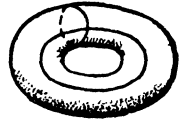


Рис. 51.

У первой ленты различимы две стороны, вторая имеет только одну сторону. Вторая лента называется лентой Мёбиуса — это неориентируемая поверхность.

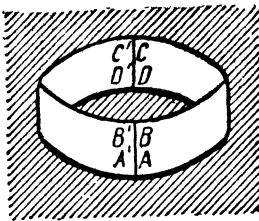


Рис. 52.

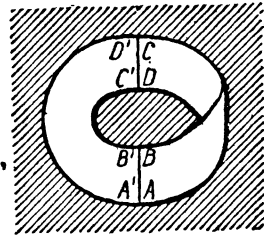


Рис. 53.

В  $E_3$  замкнутые неориентируемые поверхности в своем естественном виде не существуют, их геометрическая реализация возможна лишь в  $E_4$ . Для возможности их трехмерного представления, точнее представления в  $E_3$ , приходится допускать особенности, т. е. элементы (точки, отрезки), которые в трехмерном представлении ее совпадают, но при рассмотрении закона соединения частей поверхности считаются различными. Пользуясь таким приемом, можно получить представление в  $E_3$  произвольной поверхности, в частности замкнутой неориентируемой, как это показывает рис. 54 (поверхность Дика). Здесь мы имеем особый отрезок:  $AB$  — двойная линия поверхности. Эта поверхность весьма просто получается, если к единственному контуру ленты Мёбиуса приклеим элементарный двумерный кусок <sup>2)</sup>, и обратно, соответствующее кольцевое сечение поверхности Дика раз-

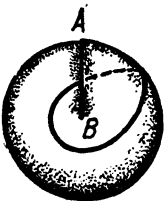


Рис. 54.

<sup>1)</sup> Werke II, 519, 1858.

<sup>2)</sup> В книге Hilbert & Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, стр. 276—280, рассматривается подробно способ ее построения и свойства ее.

бывает ее на ленту Мёбиуса и элементарно-связный двумерный кусок.

Как известно, лента Мёбиуса получается также, если идентифицировать диаметральные точки внешнего контура плоского кольца; идентифицируя диаметральные точки окружности круга, получим поверхность Дика — отсюда между прочим вытекает, что поверхность Дика гомеоморфна проективной плоскости.

Понятие ориентации вводится совершенно независимо от трехмерного представления поверхности, с которым связано понятие о стороне поверхности, нормали и т. п., так как ориентируемость или неориентируемость есть свойство самой поверхности, независимое от характера ее расположения в пространстве: в отношении расположения нет разницы между обоими видами поверхностей, именно свойство замкнутой ориентируемой поверхности быть границей части трехмерного пространства может иметь и неориентируемая поверхность при ее особом расположении в неориентируемом трехмерном пространстве; в этом случае говорят, что она двусторонне расположена в пространстве; когда это не имеет места, говорят, что она односторонне расположена.

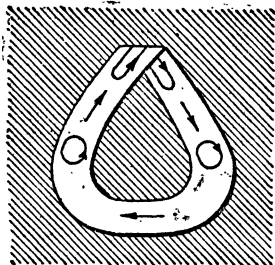


Рис. 55.

Рассмотрим разбиение поверхности на куски; для ориентируемой поверхности можно кускам дать такое направление обхода, такую ориентировку, что каждый отрезок, принадлежащий двум соседним кускам, имеет соответственно им две различных ориентировки. Для неориентируемой поверхности установление такой ориентировки невозможно. По существу в этой форме определение было дано Мёбиусом. Клейн <sup>1)</sup> ввел бесконечно малую окружность с указанным на ней направлением обхода (индикатриса), перемещающуюся по поверхности. Если индикатриса,

передвигаясь по поверхности, вернется в исходную точку с изменившимся направлением обхода (рис. 55), т. е. если на поверхности существует замкнутый путь, меняющий индикатрису, то поверхность неориентируемая.

Заметим относительно сечений неориентируемых поверхностей, что, в то время как на ориентируемой поверхности неделящее кольцевое сечение всегда увеличивает число контуров на 2, на неориентируемой поверхности такое неделящее сечение может увеличивать число контуров на 1, т. е. может быть одноконтурным; такое одноконтурное сечение дает всякий замкнутый путь неориентируемой поверхности, меняющий индикатрису.

Если  $\alpha_2$  — число двумерных кусков замкнутой поверхности связности  $k$ , полученных от расположения на ней отрезочного комплекса  $C_1$  ( $\alpha_0, \alpha_1$ ), то в случае ориентируемой поверхности имеет место формула

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p \quad \left( p = \frac{k-1}{2} \right),$$

<sup>1)</sup> Klein, Math. Ann. 7, 1871.



для неориентируемой — формула

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - k.$$

Эти формулы называются формулами Эйлера.

Если поверхность имеет  $r$  контуров, то в случае ориентируемой поверхности имеем

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p - r,$$

при неориентируемой

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - k - r.$$

Из этих формул вытекает теорема Пуанкаре: две поверхности гомеоморфны, если: 1)  $r=r'$ , 2) обе ориентируемы или обе неориентируемы и 3)  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2$ .

Род поверхности, связность, ориентация и вообще все топологические инварианты, характеризующие поверхность с точки зрения Analysis situs, не зависят от способа разбиения поверхности на двумерные куски; если например при некотором разбиении обнаружилось, что поверхность имеет род, равный двум, то это будет иметь место при всяком разбиении.

В заключение дадим определение римановых поверхностей: отметим на сферической поверхности  $n$  точек  $P^1, P^2, \dots, P^n$ , соединим их с точкой  $O$  непересекающимися линиями  $S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^n$ , разрежем поверхность вдоль этой системы линий, тогда получится элементарный двумерный кусок с контуром, составленным из отрезков  $'S_1^1, ''S_1^1, 'S_1^2, ''S_1^2, \dots, 'S_1^n, ''S_1^n$  (этой последовательности можно достичь соответствующим обозначением отрезков), где  $'S_1^i, ''S_1^i$  получены из одной „двойной“ линии  $S_1^i$  и точка  $O$  для этого куска есть „ $n$ -кратная“ точка. Вообразим себе сферическую поверхность покрытой  $n$  такими элементарными двумерными кусками —  $n$  листами  $S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^n$  с теми же особенностями, при этом установим определенное отождествление линий  $'S_1^i$  одного листа с линией  $''S_1^i$  того же или другого листа. При этом получится одна или несколько замкнутых ориентируемых поверхностей, где для каждой линии  $S_1^i$  (купюры) указан способ перехода из листа в лист подстановкой

$$\mathfrak{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Если группа образованная  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  транзитивна, то мы имеем одну поверхность; эта поверхность называется римановой поверхностью с точками разветвления  $P^1, P^2, \dots, P^n$  и купюрами  $S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^n$ .

Двулистная риманова поверхность задается более простым способом: именно достаточно на сферической поверхности указать  $2p$  точек разветвлений и  $p$  купюр линий перехода, соединяющих пары точек; в  $E_3$  двулистная риманова поверхность изобразится в виде двух concentрических сферических поверхностей, соединенных  $p$  двойными линиями (купюры),  $2p$  их концов суть точки разветвления. Область всякой точки разветвления (рис. 56), как нетрудно убедиться, гомеоморфна элементарному двумерному куску и характеризуется наличием двойной точки  $O$  (точки разветвления) и двойной линии  $OP$  — купюры. Наличие двойной линии

с определенным законом перехода есть следствие трехмерного представления поверхности и является особенностью, связанной с этим представлением; точки двойной линии  $OP$  (линии перехода) принадлежат двум листам в том смысле, что двойная линия отнюдь не получилась от соединения поверхности по способу рис. 57 путем совмещения линий  $OP'$  и  $OP''$ , а напротив, надо себе представить получение ее по рис. 58 совмещением линий  $OP'$  и  $OP''$ .

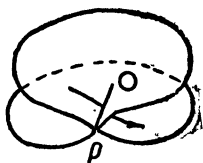


Рис. 56.

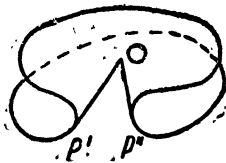


Рис. 57.

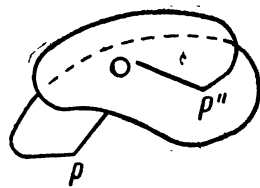


Рис. 58.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Koenig. Az analysis situs elemei. Budapest, 1918.
2. Reidemeister. Einführung in die kombinatorische Topologie. Vieweg, 1932.
3. Brückner. Vielecke und Vielfache. Teubner, 1900, 44—78.
4. Levi. Geometrische Konfigurationen. Hirzel, 1929, 40—91.
5. Коебе. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. Sitzungsber. preuss. Akad. 1927—28.
6. Hofmann. Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemannschen Flächen. Halle, 1888.
7. Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques.
8. Graf. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Fläche. Diss., 1878.
9. В о у. Ueber die Curvatura integra. Diss., 1901.
10. Львовский В. О построении замкнутых односторонних поверхностей с замкнутыми двойными линиями. Мат. сборник, 32, 1925, 353—356.
11. Dingley. Topologische Studien. Teubner, 1890.
12. Simon y. Ueber eine Reihe neuen Tatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Math. Ann. 19, 1881, 110—120, 24, 1884; 253—281.
13. Hilbert & Cohn-Vossen. Anschauliche Geometrie, 1932.

42. Показать, что лента, изображенная на рис. 59, в  $E_3$  не изотопная ленте, изображенной на рис. 60, гомеоморфна ей; преобразовать гомотопно в  $E_3$  первую ленту во вторую<sup>1)</sup>.

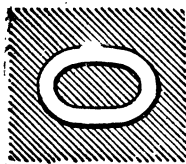


Рис. 59.

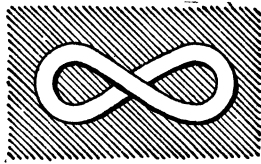


Рис. 60.

<sup>1)</sup> Взято из Math. Enz., I. c., V. III, 1, 1, стр. 167.

43. Показать, что ленты, изображенные на рис. 61 и 62, гомеоморфны.

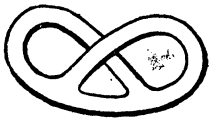


Рис. 61.

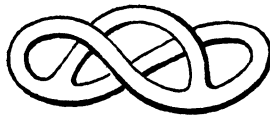


Рис. 62.



Рис. 63.

44. Показать, что четыре ленты, изображенные на рис. 63—66, суть изотопные в  $E_3$  формы одной и той же ленты рис. 67.



Рис. 64.

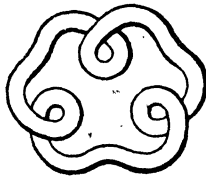


Рис. 65.



Рис. 66.



Рис. 67.

45. Показать, что ленты, изображенные на рис. 68, 69 и 70, в  $E_3$  изотопны<sup>1)</sup>. Показать изотопию в  $E_3$  лент рис. 71 и 72.



Рис. 68.

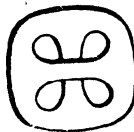


Рис. 69.

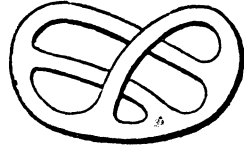


Рис. 70.

46. Показать, что неориентируемая поверхность, показанная на рис. 73, гомеоморфна ленте Мёбиуса.

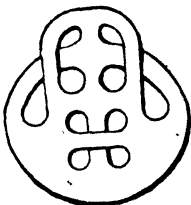


Рис. 71.

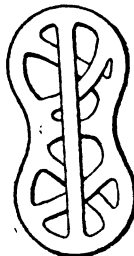


Рис. 72.



Рис. 73.

<sup>1)</sup> Поверхность рис. 68 взята у Дика (D u s k. Ber. Sächs. Ges.; Math. Cl. 7, 3, 1887, рис. 8).

47. Показать гомеоморфизм лент, показанных на рис. 74—76.



Рис. 74.



Рис. 75.

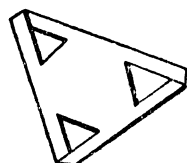


Рис. 76.

48. Показать гомеоморфизм лент, изображенных на рис. 77 и 78.

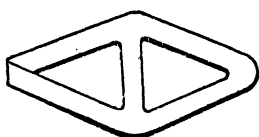


Рис. 77.

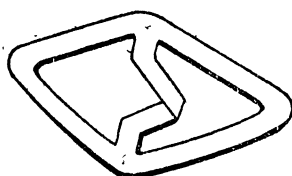


Рис. 78.

49. Показать, что ленты рис. 79 и 80 изотопны в  $E_3$ .

50. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 81 и 82, гомеоморфны.



Рис. 79.

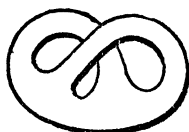


Рис. 80.



Рис. 81.



Рис. 82.



Рис. 83.



Рис. 84.



Рис. 85.



Рис. 86.

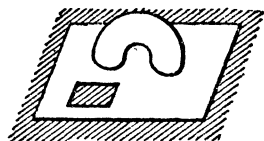


Рис. 87.

51. Показать, что ленты рис. 83 и 84 негомеоморфны.

52. Показать, что поверхности рис. 85, 87, 89 и 91 соответственно гомеоморфны лентам, изображенным на рис. 86, 88, 90 и 92; показать, что они не только гомеоморфны, но и изотопны в  $E_3$ .

Поверхность рис. 85 представляет кусок плоскости, ограниченной контурами  $\Pi^1$ ,  $\Pi^2$  и  $\Pi^3$  (рис. 93), к которому приклеен кусок цилиндрической поверхности (рис. 94) так, чтобы контуры  $\Pi^1$  и  $\Pi^2$  совмещались с сохранением указанной ориентировки. Такую часть поверхности называют ручкой.

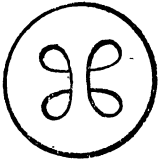


Рис. 88.

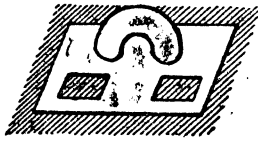


Рис. 89.

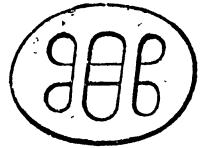


Рис. 90.

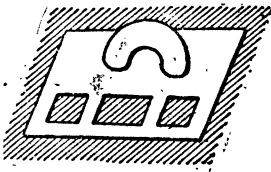


Рис. 91

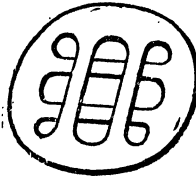


Рис. 92.

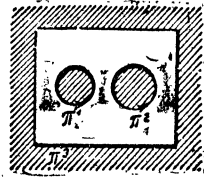


Рис. 93.



Рис. 94.

53. Показать, что поверхность с двумя ручками и одним контуром (рис. 95) изотопна в  $E_3$  лентам, изображенным на рис. 96<sup>1)</sup> и 97.



Рис. 95.



Рис. 96.

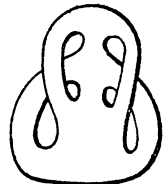


Рис. 97.

54. Показать, что неориентируемые поверхности рис. 98 и 99 изотопны в  $E_3$ .

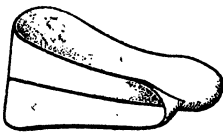


Рис. 98.



Рис. 99.

<sup>1)</sup> Поверхность рис. 96 взята у Дика (D u s k. Ber. Sächs. Ges.; Math. Cl. 7, 3, 1887, рис. 7).

55. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 100—102, гомеоморфны поверхности рис. 103.

Первые две поверхности (рис. 100 и 101) представляют часть сферической поверхности с одним контуром, причем первая имеет две двой-



Рис. 100.



Рис. 101.



Рис. 102.



Рис. 103.

ных линии, вторая одну; третья поверхность (рис. 102) представляет часть поверхности тора с одним контуром, имеющая одну двойную линию.

56. Показать, что можно изотопно в  $E_3$  преобразовать неориентируемую поверхность с одним контуром  $\Pi$  и двойной линией  $AB$  от положения, изображенного на рис. 104, к виду рис. 105.

Таким образом можно считать оба конца двойной линии топологически эквивалентными (в данном случае эквивалентность изотопная).

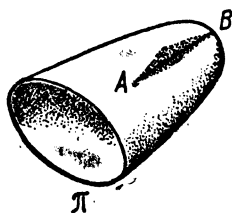


Рис. 104.

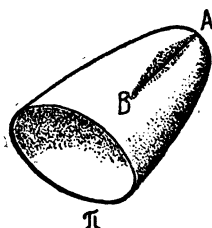


Рис. 105.

56 bis. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 106 и 107, гомеоморфны <sup>1)</sup>.

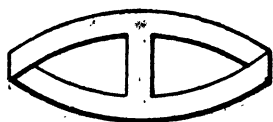


Рис. 106.

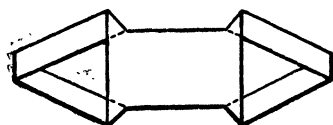


Рис. 107.

57<sup>2)</sup>. Расположим в  $E_3$  прямолинейный отрезочный комплекс с характеристикой  $N$ . Пусть шарик достаточно малого радиуса центром опишет отрезочный комплекс; обертка всех шариков образует замкнутую поверхность. Показать, что ее характеристика равна  $2N$ .

57 bis. Пусть незамкнутая поверхность  $M_2$  имеет контуры  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ,

<sup>1)</sup> König, l. c., стр. 77.

<sup>2)</sup> Задачи №№ 57 и 57 bis взяты у Seifert & Threlfall, l. c.

возьмем гомеоморфную ей поверхность  $M_2'$  с контурами  $a_1', a_2' \dots a_r'$ ; идентифицируя контуры  $a_i$  и  $a_i'$ , склеим  $M_2$  и  $M_2'$ ; склеивание даст замкнутую поверхность; показать, что если она и исходное  $M_2$  ориентируемы, причем связность  $M_2$  будет  $2p + 1$ , то род новой поверхности будет  $2p + r - 1$ ; если обе поверхности неориентируемы, то связность новой поверхности  $2k + 2r - 1$ , где  $k + 1$  связность  $M_2$ .

58<sup>1)</sup>. Рассмотрим на плоскости область между четырьмя окружностями, из которых три попарно друг друга касаются; на рис. 108 эта область заштрихована; образуем комплекс  $K_2'$  из нее, присоединяя сверху по окружностям  $\Pi^1$  и  $\Pi^2$  и снизу по окружностям  $\Pi^2$  и  $\Pi^3$  куски  $K_2$  тора, ограниченные двумя окружностями (рис. 109); эти куски получатся,

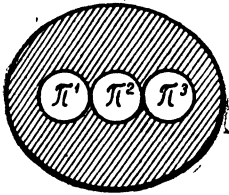


Рис. 108.

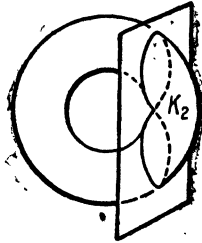


Рис. 109.

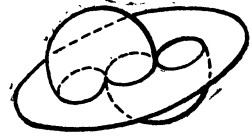


Рис. 110.

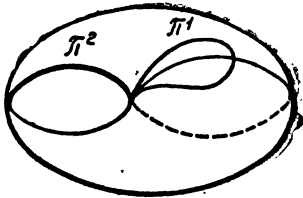


Рис. 111.

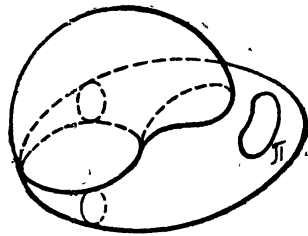


Рис. 112.

если плоскость сечения провести через одну из точек малого экватора перпендикулярно его плоскости; две „окружности“, ограничивающие такие куски тора, имеют одну общую точку; на рис. 110 изображен общий вид комплекса  $K_2'$ .

Возьмем теперь поверхность тора, стянем в точку один из его меридианов, — получится поверхность, изображенная на рис. 111 („циклида“); на ней отмечены две кривые  $\Pi^1$  и  $\Pi^2$ ; удалим из поверхности кусок, ограничиваемый кривой  $\Pi^1$ ; приклеим теперь к поверхности кусок  $K_2$  (рис. 109) так, чтобы его окружности были соответственно присоединены к кривым  $\Pi^1$  и  $\Pi^2$ ; получится комплекс, изображенный на рис. 112; вырежем из него кусок, ограниченный кривой  $\Pi$ ; получим тогда комплекс  $K_2''$ .

Показать, что комплексы  $K_2'$  и  $K_2''$  не только гомеоморфны, но и изотопны в  $E_3$ .

<sup>1)</sup> Взято у Hopf & Pannwitz. Math. Ann. 108, 1933, стр. 448.

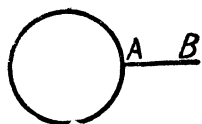


Рис. 113.

59<sup>1)</sup>. Возьмем в плоскости линейный комплекс  $K_1$  (рис. 113), составленный из окружности и исходящего из нее наружу отрезка  $AB$ . Построим двумерный комплекс  $K_2$  вращением плоскости около прямой, не имеющей с  $K_1$  общих точек.

В каких неизотопных формах возможно расположение этого комплекса  $K_2$  в  $E_3$ ?

60. Показать, что четыре замкнутые неориентируемые поверхности, изображенные на рис 114—117, гомеоморфны<sup>2)</sup>.

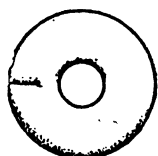


Рис. 114.

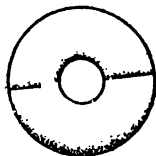


Рис. 115.



Рис. 116.



Рис. 117.

61. Показать, что неориентируемые замкнутые поверхности рис. 118—120 гомеоморфны.

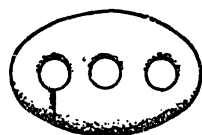


Рис. 118.

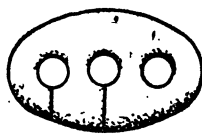


Рис. 119.

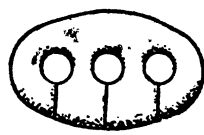


Рис. 120.

62. Показать, что в  $E_3$  две неориентируемые поверхности, изображающие с особенностями проективную плоскость, изотопны<sup>3)</sup> (рис. 121 и 122).



Рис. 121.

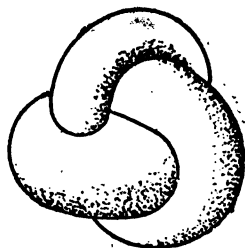


Рис. 122.

<sup>1)</sup> Задача Н. Н. Худекова.

<sup>2)</sup> Пример взят у Дика (Math. App. 32, табл. II, рис. 10).

<sup>3)</sup> См. В о у. Diss., 1901; относительно второй нужно сказать, что прекрасные фотографии проволочной модели ее помещены у Hilbert & Cohn-Vossen I. c., стр. 282—283, там же дан несколько иной способ построения этой поверхности.



Для того чтобы ясней представить структуру их, на рис. 123 даны сечения первой поверхности (рис. 121); если отсекаать последовательно, начиная от точки *A*, куски поверхности горизонтальной плоскостью и смотреть сверху (из точки *A* вниз) на образовавшийся срез, то получатся соответственно изображенные на рис. 123 слева направо кривые.

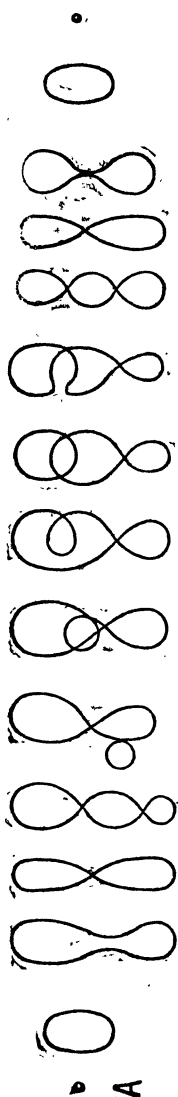


Рис. 123.

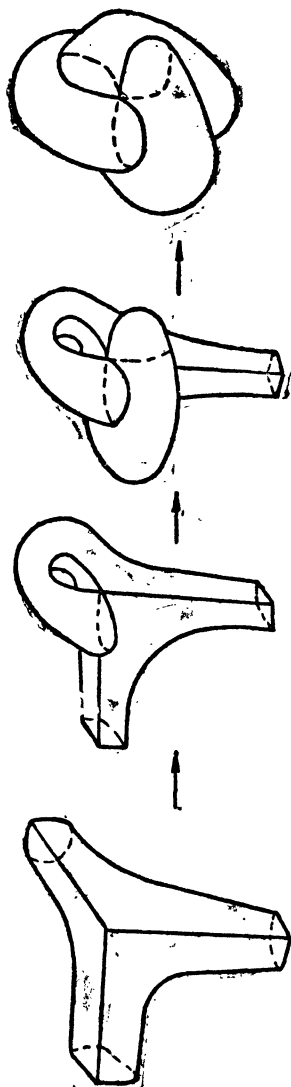


Рис. 124.

В пояснение второй поверхности дадим способ ее построения; поверхность получается (рис. 124) по стрелке путем соответственного изгиба ножек исходной „треноги“; „тренога“ гомеоморфна сферической поверхности; после изгибов, концы ножек нужно переклестить соответственно обычным правилам для римановых двойных линий — крест-накрест (рис. 56 и 58).

63 <sup>1)</sup>. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 125—127, изотопны в  $E_3$ .

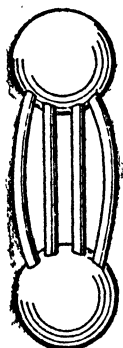


Рис. 125.

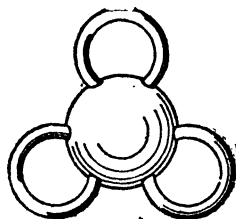


Рис. 126.



Рис. 127.

64. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 128 и 129, гомотопны в  $E_3$ .

65 <sup>2)</sup>. Пусть комплекс  $K'_2$  представляет поверхность тетраэдра, а комплекс  $K_2$  — поверхность тетраэдра, к которой приклеен по одному из ребер двумерный кусок.

Показать, что непрерывным преобразованием комплекса  $K_2$  в себе можно обратить его в комплекс  $K'_2$ .

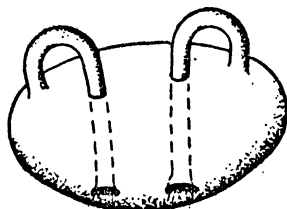


Рис. 128.

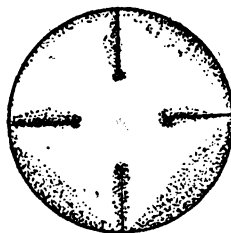


Рис. 129.

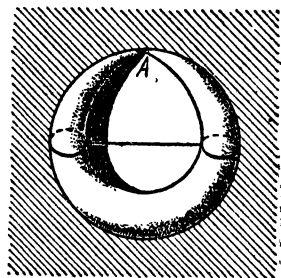


Рис. 130.

66. Пусть комплекс  $K_2$ , изображенный на рис. 130, представляет тор, у которого один меридиан стянут в точку  $A$ , а малый экватор затянут „пленкой“ — элементарным двумерным куском; пусть комплекс  $K'_2$  отличается от  $K_2$  только тем, что „пленка“ отсутствует.

Доказать, что непрерывным преобразованием комплекса  $K_2$  в себе можно его обратить в комплекс  $K'_2$ .

<sup>1)</sup> Примеры для 63 и 64 взяты у König, 1. с., стр. 108 и 110.

<sup>2)</sup> Все содержание задач 65—68 взято из работы Hopf & Pannwitz, помещенной в Math. Ann. 108, 1933, стр. 433—465. Заметим, что непрерывные преобразования, рассматриваемые здесь, не одно-однозначны.

67. Возьмем поверхность тора  $T_2$ ; пусть  $\Pi_1'$  — один из его меридианов,  $\Pi_1''$  — малый экватор; пусть  $S_2'$  и  $S_2''$  — двумерные куски, контурами которых будут соответственно  $\Pi_1'$  и  $\Pi_1''$ , других общих точек с  $T_2$  у них нет;  $S_2'$  и  $S_2''$  имеют лишь одну общую точку, точку пересечения  $\Pi_1'$  и  $\Pi_1''$ .

Доказать, что можно непрерывным преобразованием в себе комплекса  $K_2' = T_2 + S_2' + S_2''$  обратить его в комплекс  $K_2'' = T_2 + S_2'$ .

68. Рассмотрим комплекс, определенный в задаче 58 (рис. 112).

Доказать, что непрерывным преобразованием в себе он сводится в точку.

69<sup>1)</sup>. Двойной сферой с двумя отверстиями назовем поверхность, получаемую следующим образом: возьмем цилиндрическую поверхность (рис. 131), преобразуем ее, как указано на рис. 132, затем растянем края, как показано стрелками на рис. 133; тогда получим поверхность,



Рис. 131.



Рис. 132.



Рис. 133.

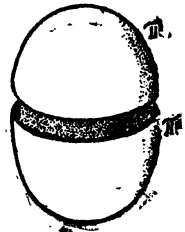


Рис. 134.

изображенную на рис. 134. Склеим окружности  $\Pi'$  и  $\Pi''$ , тогда получим двойную сферу с двумя отверстиями.

Показать, что двойная сфера с одним отверстием изотопна в  $E_3$  сфере  $\Pi_2$ , а двойная сфера с  $n$  отверстиями изотопна в  $E_3$  сфере с  $(n - 1)$  ручками.

70<sup>2)</sup>. Преобразовать гомотопно в  $E_3$  двойной шар с одним отверстием в двулистную риманову поверхность с одной парой точек разветвления.

71<sup>3)</sup>. Преобразовать гомотопно в  $E_3$  сферу с двумя ручками в двулистную риманову поверхность с тремя парами точек разветвления.

72. Пусть  $n$  — число листов римановой поверхности,  $p$  — род ее,  $k_i$  — кратность  $i$ -ой точки разветвления. Доказать, что

$$\sum k_i - 2n = 2(p - 1).$$

73<sup>4)</sup>. Показать, что поверхности, изображенные на рис. 135, 137 и 139, соответственно гомеоморфны поверхностям рис. 136, 138 и 140.

<sup>1)</sup> См. Н о ф ш а п п, I. с., стр. 12 (рис. 13—16).

<sup>2)</sup> См. Н о ф ш а п п, I. с., стр. 9—11.

<sup>3)</sup> Пример взят у Н о ф ш а п п, I. с., стр. 23—25, см. также G r a f, I. с., стр. 36.

<sup>4)</sup> Задача А. А. Маркова.



Рис. 135.



Рис. 136.

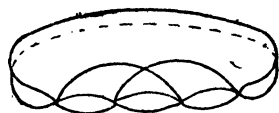


Рис. 137.



Рис. 138.

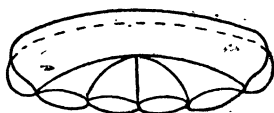


Рис. 139.

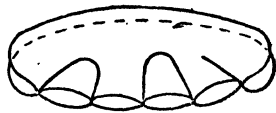


Рис. 140.

74 <sup>1)</sup>. Преобразовать в сферу с ручками трехлистную риманову поверхность с восемью точками разветвления; закон соединения листов дан на рис. 141 в сечении, проходящем через все четыре линии перехода.

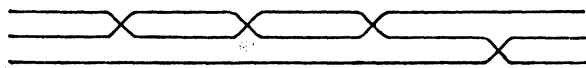


Рис. 141.

75. Преобразовать в сферу с ручками шестилистную риманову поверхность с десятью парами точек разветвления; закон соединения листов дан на рис. 142 в сечении, проходящем через все десять линий перехода.

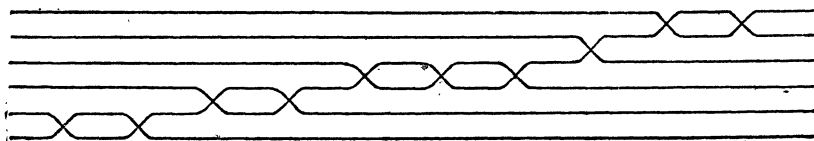


Рис. 142.

76 <sup>2)</sup>. Показать, что поверхность, полученная из двух коаксиальных поверхностей шара, связанных линией перехода, идущей по меридиану или по экватору, гомеоморфна поверхности тора (рис. 143а).

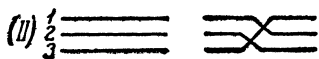
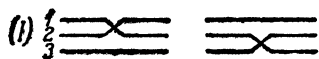


Рис. 143а.

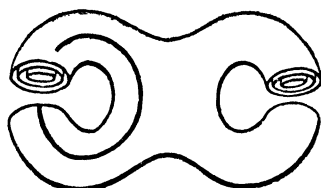


Рис. 143б.

<sup>1)</sup> Задачи 74 и 75 взяты у Graf, l. c.

<sup>2)</sup> Задача взята у Seifert & Threlfall, l. c.

**76 bis.** Показать, что поверхности, полученные из трех concentрических сфер, каждая с двумя коаксиально расположенными ручками, гомеоморфны, если линии перехода, идущие по экваторам ручек, в одном случае связывают листы согласно варианту (I), во втором — согласно (II) (рис. 143b). Найти род поверхностей.

**77.** Показать, что если тор пунктирован, т. е. из него вынут один кусок (имеется один контур  $\Pi$ ), то его можно преобразовать из положения рис. 144 в положение, изображенное на рис. 145, причем это достижимо изотопно в  $E_3$ .

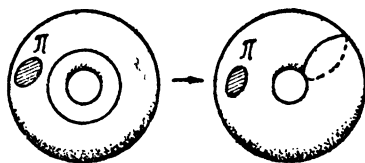


Рис. 144.

Рис. 145.

**78.** Известно, что поверхности, изображенные на рис. 146 и 147, гомеоморфны; произвести гомотопное в  $E_3$  преобразование одной в другую таким образом, чтобы при этом кривая  $A$  перешла в кривую  $B$ .

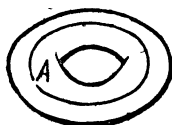


Рис. 146.

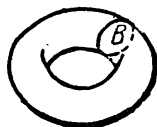


Рис. 147.

**79.** Показать, что гомотопными в  $E_3$  преобразованиями тора можно обратить кривую рис. 148 в кривую, изображенную на рис. 149.

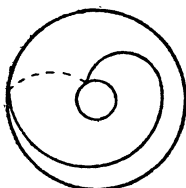


Рис. 148.

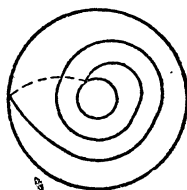


Рис. 149.

**80.** Гомеоморфным преобразованием тора обратить кривую рис. 150 в кривую рис. 151.

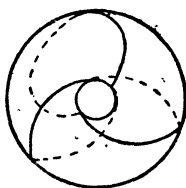


Рис. 150.

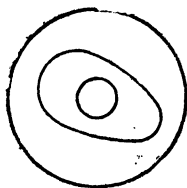


Рис. 151.

81. Гомеоморфным преобразованием поверхности обратить кривую рис. 152 в кривую рис. 153.

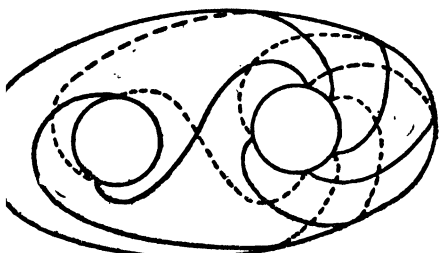


Рис. 152.

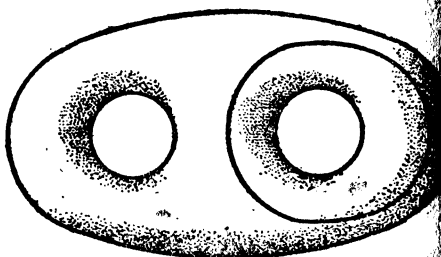


Рис. 153.

82. Не преобразуя поверхности, обратить кривую 154 в кривую, изображенную на рис. 155.

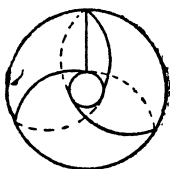


Рис. 154.

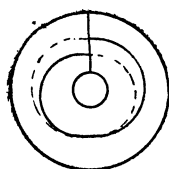


Рис. 155.

83. Показать, что без преобразования поверхности можно кривую рис. 156 обратить в кривую, изображенную на рис. 157.

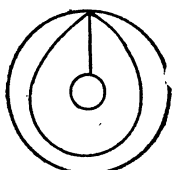


Рис. 156.

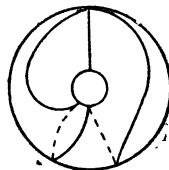


Рис. 157.

84. Преобразовать замкнутую поверхность с двумя ручками таким образом, чтобы кривые на ней, изображенные на рис. 158, при этом перешли в положение, указанное на рис. 159.

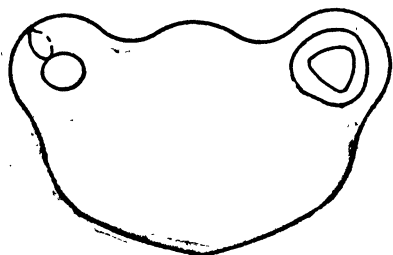


Рис. 158.

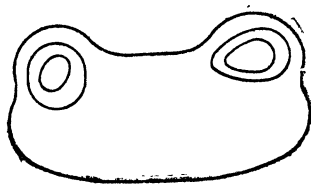


Рис. 159

85. Преобразовать гомеоморфными преобразованиями неориентируемого тора кривые на поверхностях рис. 160—162. То же произвести с поверхностями рис. 163—166.

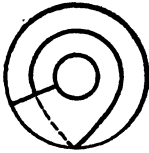


Рис. 160.

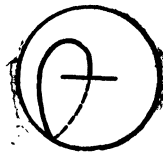


Рис. 161.

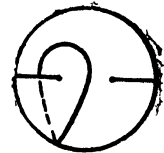


Рис. 162.



Рис. 163.

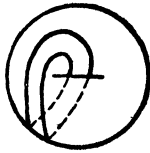


Рис. 164.

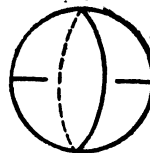


Рис. 165.

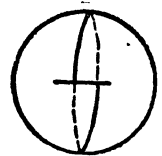


Рис. 166.

86. На обыкновенном торе кривая рис. 167 преобразованиями тора может быть переведена в положение, указанное на рис. 168; доказать, что для неориентируемого тора это невозможно, т. е. невозможен переход от поверхности рис. 169 к рис. 170 при условии совмещения обозначенных кривых.

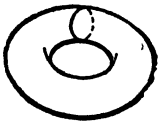


Рис. 167.

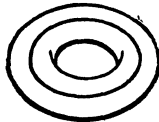


Рис. 168.

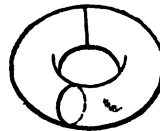


Рис. 169.

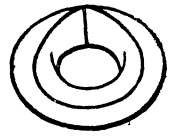


Рис. 170.

87. Показать, что ни преобразованиями кривой на поверхности, ни преобразованием самой поверхности нельзя кривую рис. 171 обратить ни в кривую рис. 172, ни в кривую рис. 173 в противоположность обстоятельствам, имеющим место для обыкновенного тора.

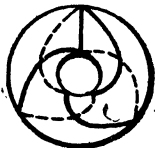


Рис. 171.

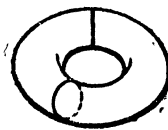


Рис. 172.

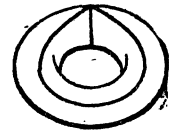


Рис. 173.

88. Гомеоморфными преобразованиями неориентируемой поверхности рода 2 обратить кривые, изображенные на рис. 174, в кривые рис. 175.

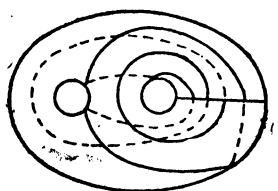


Рис. 174.

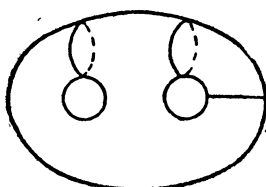


Рис. 175.

89 <sup>1)</sup>. Показать, что если ленту Мёбиуса разрезать по средней линии, то получим ориентируемую ленту; если последнюю еще раз разрезать по средней линии, получим две заплетенные ориентируемые ленты.

90. Показать, что если ленту Мёбиуса разрезать по линии, идущей вдоль контура, то получим ориентируемую ленту, зацепленную за неориентируемую ленту (за новую ленту Мёбиуса).

91. Доказать, что на ориентируемой замкнутой поверхности связности  $k$  существует не более  $p$  неделающих замкнутых кривых без общих точек.

92. Доказать, что система кривых предыдущей задачи, рассматриваемая как система сечений, не делит поверхность на отдельные изолированные части.

93. Доказать, что если система кольцевых сечений предыдущей задачи имеет одну общую точку, то после разреза поверхность обратится в элементарно-связный кусок.

94 <sup>2)</sup>. Найти характеристику поверхности, которая после соответствующих разрезов обращается в полигон

$$c_1 c_2 \dots c_{2k+1} c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{2k+1}^{-1}.$$

Показать, что поверхности, дающие после соответствующих разрезов полигоны

$$c_1 c_2 c_3 c_1^{-1} c_2^{-1} c_3^{-1} \text{ и } c_1 c_1 c_2 c_2 c_3 c_3,$$

гомеоморфны.

94 bis. Доказать, что на замкнутой неориентируемой поверхности связности  $k$  существует не более  $k$  неделающих замкнутых кривых без общих точек.

95. Найти на неориентируемой поверхности рис. 176 неделающие кольцевые сечения: 1) увеличивающие число контуров на две единицы (двуконтурное) и 2) увеличивающие их число на одну (одноконтурное).

96. Показать, что если применить к тору сечения, указанные на поверхности рис. 177, 179 и 181, то соответственно получим ленты, изображенные на рис. 178, 180 и 182.

<sup>1)</sup> Задачи 89 и 90 предложены В. И. Милинским,

<sup>2)</sup> Взята у Seifert & Threlfall, I. с.



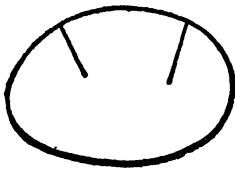


Рис. 176.

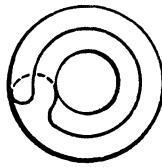


Рис. 177.

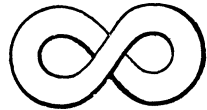


Рис. 178.

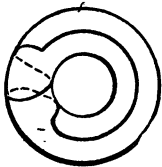


Рис. 179.

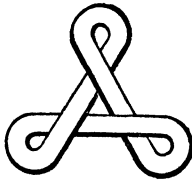


Рис. 180.

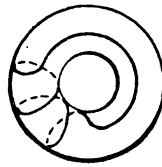


Рис. 181.

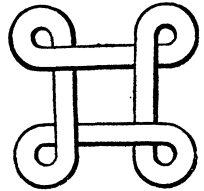


Рис. 182.

97. Показать, что если применить к тору сечения двумя заплетенными окружностями, показанными соответственно на рис. 183, 185 и 187, то получим пары лент, изображенные на рис. 184, 186 и 188.

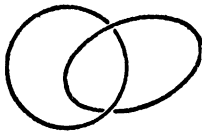


Рис. 183.



Рис. 184.

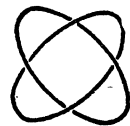


Рис. 185.

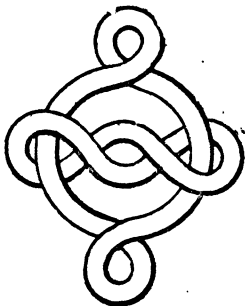


Рис. 186.

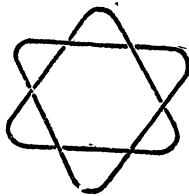


Рис. 187.

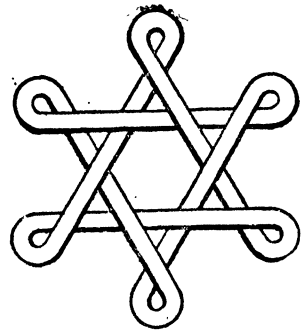


Рис. 188.

98. Провести на ленте, имеющей два контура (рис. 189), такое сечение, чтобы полученная в результате лента имела бы один контур.



Рис. 189.

99. Какое сечение нужно провести на неориентируемой ленте, изображенной на рис. 190, для изотопного в  $E_3$  обращения ее в ориентируемую ленту, данную на рис. 191.



Рис. 190.



Рис. 191.

100. Убедиться, что указанные на поверхностях Дика и Боя (рис. 192—194) кривые — сечения обращают их в элементарно-связные куски.

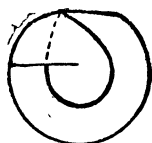


Рис. 192.



Рис. 193.



Рис. 194.

101. Рассмотрим узлы вида, указанного на рис. 195—197, отличающиеся различным количеством „областей  $A$ “; у первого узла число их равно 0, у второго равно 1, у третьего число их  $m=2$ . Будем вписывать эти узлы на ориентируемую замкнутую поверхность с двумя ручками так, чтобы дырки поверхности оказались в местах  $B$  и  $C$ . Требуется

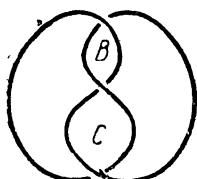


Рис. 195.

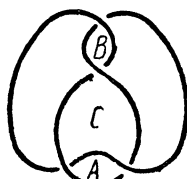


Рис. 196.

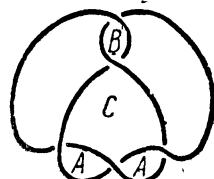


Рис. 197.

доказать, что при четном  $m$  узел делит поверхность с двумя ручками на два куска, при  $m$  нечетном не делит.

102. Провести на замкнутой неориентируемой поверхности (рис. 198) одно кольцевое сечение, которое ориентирует поверхность.

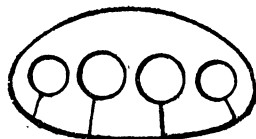


Рис. 198.

## ГЛАВА III.

## ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ.

Определения для трехмерных комплексов и трехмерных многообразий можно построить совершенно подобно тому, как это выше сделано для двумерных комплексов; для возможности проведения всего хода рассуждений совершенно аналогично нужно предположить известными свойства четырехмерного евклидова пространства, и тогда без затруднений можно интерпретировать все вводимые понятия на геометрических образах. Оговорим здесь, что геометрическая реализация может потребовать пятимерного евклидова пространства (в частности при построении замкнутых неориентируемых многообразий).

Итак, применяя наш обычный прием, кроме совокупности  $\alpha_0$  — точек  $\{P\}$ ,  $\alpha_1$  — отрезков  $\{S_1\}$ ,  $\alpha_2$  — двумерных кусков  $\{S_2\}$ , нужно будет ввести совокупность  $\alpha_3$  — трехмерных кусков  $\{S_3\}$ ; последние определяются двумерной сферой, составленной из двумерных кусков совокупности  $\{S_2\}$ . Совокупность точек  $\{P\}$ , отрезков  $\{S_1\}$ , двумерных кусков  $\{S_2\}$  и трехмерных кусков  $\{S_3\}$  называется трехмерным комплексом, если совокупности  $\{P\}$ ,  $\{S_1\}$  и  $\{S_2\}$  образуют двумерный комплекс.

Трехмерный комплекс будет замкнутым многообразием (замкнутым пространством), если выполнены определенные условия, совершенно аналогичные сказанным выше для поверхностей; здесь мы для краткости выразимся иначе: совокупность трехмерных кусков, сходящихся в точке, принадлежащей  $\{P\}$ , должна быть гомеоморфна внутренности двумерной сферы  $P_2$  в  $E_3$ .

Если из замкнутого трехмерного пространства удалить один или несколько несмежных трехмерных кусков, мы получим незамкнутое трехмерное пространство.

Простейший пример замкнутого трехмерного пространства представляет трехмерная сфера. Ее уравнение в  $E_4$  ( $x, y, z, t$ )

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2. \quad (1)$$

Легко убедиться, что это многообразие и притом замкнутое. Также не представляет затруднений убедиться, что если вырезать из этого пространства сферический кусочек, т. е. ввести ограничивающее неравенство, чтобы при положительном  $t$  сумма левой части (1) не превосходила бы  $r$ , где  $r < R$ , то мы получим незамкнутое пространство.

Остановимся теперь на определении трехмерных римановых пространств и определении диаграмм Хэега для трехмерных пространств.

Римановы пространства представляют непосредственное обобщение римановых поверхностей<sup>1)</sup>. Для определения их рассмотрим инверсионное трехмерное пространство, имеющее одну бесконечно удаленную точку; представим себе его заполненным  $n$  раз, т. е. представим  $n$  инверсионных пространств ( $n$  листов), наложенных одно на другое; поместим в нем конечное количество простых замкнутых кривых на конечном расстоянии от начала; будем считать, что эти кривые суть геометрические места точек, где два определенных листа склеиваются; для каждой кривой — линии разветвления — введем купюру — поверхность перехода, т. е. двумерный кусок, определяемый соответствующей линией разветвления, ограниченный ею, при пересечении которого совершается переход из одного листа в другой. Если при этих условиях все  $n$  листов окажутся связанными, то будет получено  $n$ -листное риманово пространство, определяемое системой линий, разветвлений и купюр. Для пояснения сказанного рассмотрим двулистное риманово

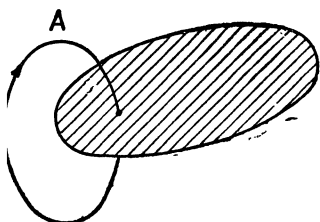


Рис. 199.

пространство с одной линией разветвления окружностью, которая одновременно является контуром купюры (рис. 199, купюра заштрихована); всякий замкнутый путь, не пересекающий купюру, не меняет листов пространства, это имеет место лишь для такого пути, при котором имеется нечетное число пересечений его с купюрой (см. путь А).

По теореме Дена<sup>2)</sup> всякое замкнутое трехмерное пространство можно разбить замкнутой поверхностью рода  $p$  на две области типа сферы с ручками; таким образом задание этих областей и закона их соединения

вполне определяет структуру исходного пространства. Эти элементы и составляют так называемую диаграмму пространства<sup>3)</sup>, введенную Хэгодом.

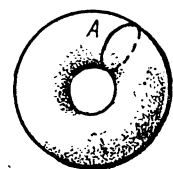


Рис. 200.

Закон соединения обычно задается указанием на границе области кривых, которые требуется совместить со стандартными кривыми границы другой

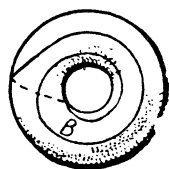


Рис. 201.

области, например если дана диаграмма рис. 200, то это означает, что к этому трехмерному куску, ограниченному тором, нужно приклеить по его границе другой такой же кусок, но чтобы при этом кривая А совпала бы с кривой А (в данном случае эта последняя кривая совпала бы со стандартной); при диаграмме, изображенной на рис. 201, склеивание нужно так произвести, чтобы при этом произошло совмещение кривой В со стандартной кривой А.

Один из способов представления некоторых замкнутых трехмерных

<sup>1)</sup> См. Heegaard в списке литературы, а также там же Hotelling.

<sup>2)</sup> См. литературные указания Дена.

<sup>3)</sup> См. Heegaard, l. c.

пространств дают симметричные пространства. Вообразим себе замкнутую поверхность  $M_2$  в  $E_3$ , наполненную два раза, содержащую, подобно римановым пространствам, два листа, причем переход из листа в лист совершается на взятой замкнутой поверхности  $M_2$ , на так называемом ограничении; таким образом определенное пространство будет замкнутым, — это и есть симметричное пространство. В более сложных случаях может иметься несколько ограничений, которые могут быть весьма произвольно расположены, т. е. быть заузлены, заплетены и т. д.)<sup>1)</sup>.

Совершенно аналогично определениям, данным для двух измерений, вводится понятие ориентации и для трех измерений; неориентируемые трехмерные пространства без затруднений строятся, если применить определения, данные для симметричных пространств; достаточно взять одно или несколько соответственно выбранных неориентируемых ограничений неориентируемыми.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. P. Heegaard. Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske fladers sammenhaeng. Diss. København, 1898.
  2. P. Heegaard. Sur l'analysis situs. Bd. 1. 5. M.d.F., 44, стр. 161 — 242.
  3. Dehn. Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. 69, 1910, стр. 137 — 168.
  4. Singer. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. Am. Math. Soc. 35, 1933, стр. 88—111.
  5. Goeritz. Die Heegaard. Diagramme des Torus Hamb. Abh. 9, 1932, стр. 187—188.
  6. Reidemeister. Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten. Hamd. Abh. 10.
  7. Hottelling. Three-dimensional manifolds of States of Motion. Trans. Am. Math. 27, 1925, стр. 329—341, 28, 1926, стр. 479—490.
  8. Львовский В. О замкнутых трехмерных пространствах. Журнал ЛФМО, т. I, 1927, стр. 169—181, т. 2, 1929, стр. 104—122.
  9. Львовский В. О риманизации замкнутых трехмерных пространств. Доклад на Математическом съезде в Харькове 1930 г. Бюллетень № 1, стр. 35.
  10. Львовский В. Диаграмма трехмерного пространства и фундаментальная группа. Доклад на Математическом съезде в Ленинграде в 1934 г. Бюллетень, стр. 56.
  11. Seifert. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume. Diss. Dresden, 1931.
  12. Artin. Theorie der Zöpfe. Hamb. Abh. 4, 1925, стр. 47—72.
  13. Reidemeister. Knotentheorie, 1932.
- Указана библиография, целиком относящаяся к современной литературе (после 1900 г.).
14. Листинг. Предварительное исследование по топологии. ГТТИ, 1932. Имеет историческое значение; некоторый интерес представляют места, относящиеся к разбору узлов.

<sup>1)</sup> Журнал ЛФМО, т. I, стр. 169—такое пространство симметрично в смысле Кнезера: при обращении ориентации остается гомеоморфным исходному (Kneser, Jahresber., d. D. Math. Ver. 38, 1929), стр. 256.

103. Показать, что заплетения, изображенные на рис. 202—205, в  $E_3$  изотопны.

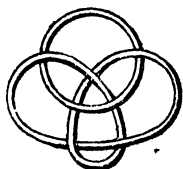


Рис. 202.

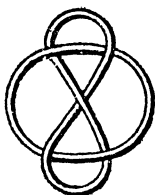


Рис. 203.

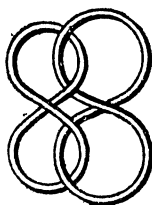


Рис. 204.

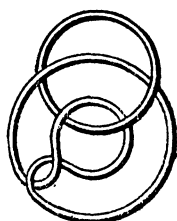


Рис. 205.

104. Показать, что можно в  $E_3$  изотопно перейти от заплетения рис. 206 к заплетению, изображенному на рис. 207.

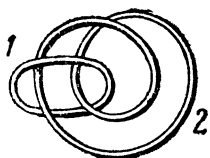


Рис. 206.

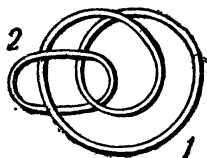


Рис. 207.

105. Показать, что заплетения, изображенные на рис. 208 и 209, в  $E_3$  изотопны.

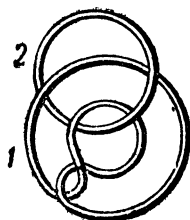


Рис. 208.

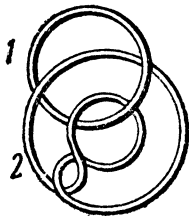


Рис. 209.

106. Показать, что заплетения, изображенные на рис. 210, в  $E_3$  изотопны.

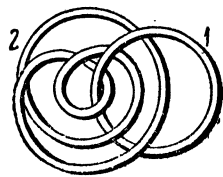
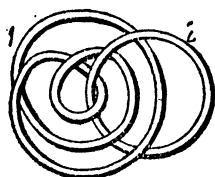


Рис. 210.

Показать, что узлы, изображенные на рис. 211а изотопны в  $E_3$ ; показать, что заплетения рис. 211б изотопны в  $E_3$ .

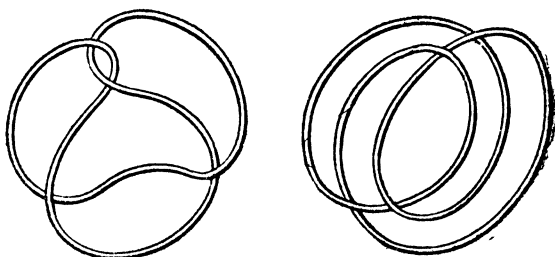


Рис. 211а.

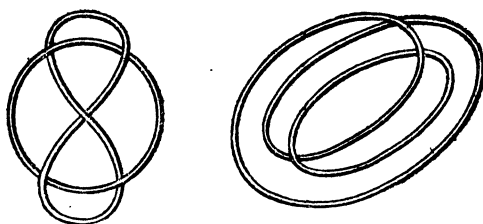


Рис. 211б.

107<sup>1)</sup>. Показать, что заузления, изображенные на рис. 212—214, изотопны в  $E_3$ .

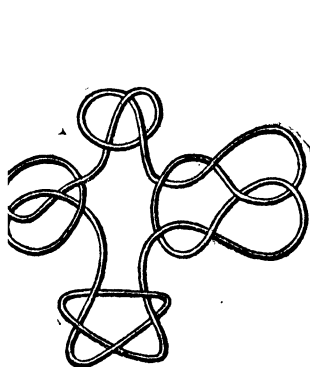


Рис. 212.

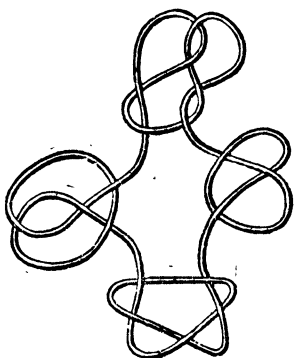


Рис. 213.

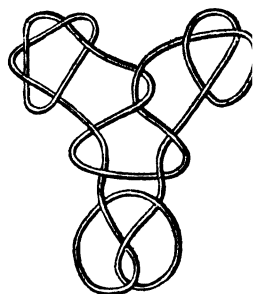


Рис. 214.

107 bis. Рассмотрим в  $E_3$  ( $x, y, z$ ) замкнутую кривую без кратных точек, расположенную около оси  $OZ$  так, что радиус-вектор  $MA$  из

<sup>1)</sup> Пример Н. Н. Худекова.

точки кривой  $M$ , проведенный до точки  $A$  оси  $OZ$ , имеет все время монотонное изменение угла с осью  $OX$  ( $OX, MA$ ) при монотонном движении точки  $M$  по кривой.

Такую замкнутую кривую назовем замкнутой косой.

Показать, что всякий узел можно изотопно в  $E_3$  деформировать в замкнутую косу.

**108.** Показать, что системы кривых, изображенных на рис. 215 и 217, соответственно изотопны в  $E_3$  кривым рис. 216 и 218.

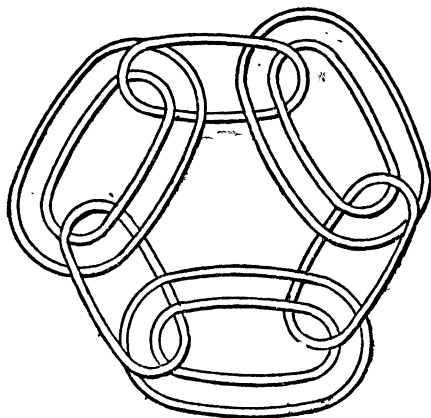


Рис. 215.

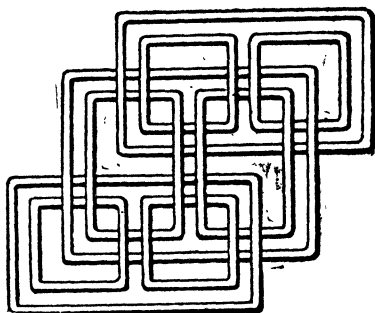


Рис. 216.

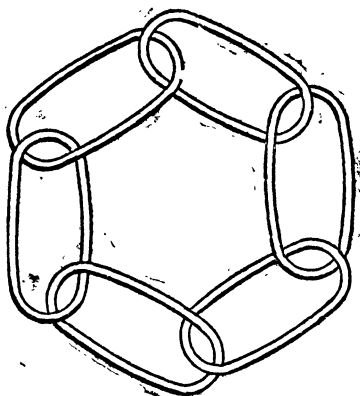


Рис. 217.

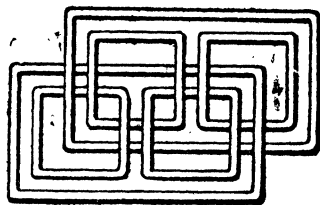


Рис. 218.

**108 bis.** Найти разбиение шара в  $E_3$  на три элементарно связанных полиэдра так, чтобы сумма любых двух из них была гомеоморфна тору.

**109** <sup>1)</sup> Показать, что трехмерные куски, ограниченные поверхностями, изображенными на рис. 219—220, изотопны в  $E_3$ .

<sup>1)</sup> Сообщена А. А. Марковым.



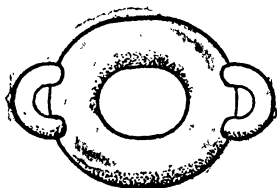


Рис. 219.

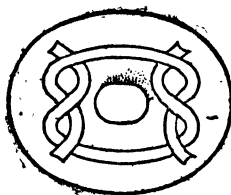


Рис. 220.

110. Показать, что трехмерные куски, ограниченные поверхностями снаружи — шара с тремя дырками, изнутри — тора, в расположениях, указанных на рис. 221—223, в  $E_3$  изотопны.

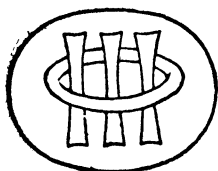


Рис. 221.

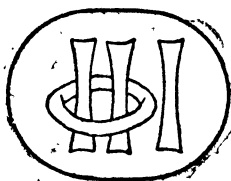


Рис. 222.

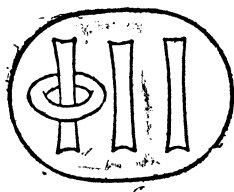


Рис. 223.

111. Показать, что трехмерные куски, ограниченные поверхностями, изображенными на рис. 224—228, изотопны в  $E_3$ .

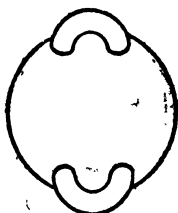


Рис. 224.



Рис. 225.

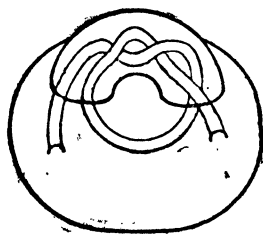


Рис. 226.

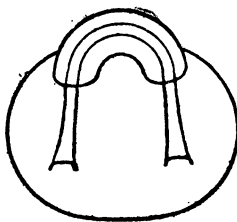


Рис. 227.

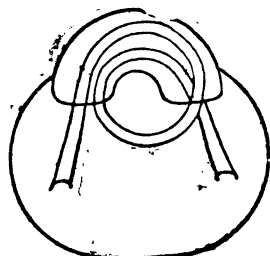


Рис. 228.

112. Известно, что трехмерный кусок, снаружи ограниченный тором, а изнутри шаром, гомеоморфен куску  $E_3$  внутри шара, изнутри ограни-

ченному тором <sup>1)</sup>; показать, что можно, преобразуя эти куски, кривую *A* рис. 229 обратить в кривую *B* рис. 230—232.

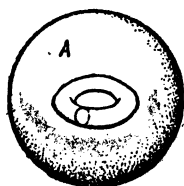


Рис. 229.

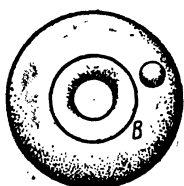


Рис. 230.

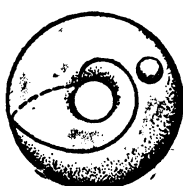


Рис. 231.

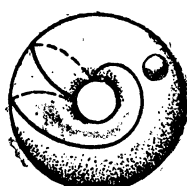


Рис. 232.

113. Показать, что трехмерные куски, ограниченные с одной стороны сферической поверхностью, с другой — заузленным тором, как это изображено на рис. 233 и 234, гомеоморфны.

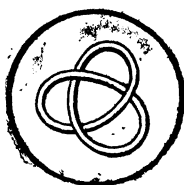


Рис. 233.

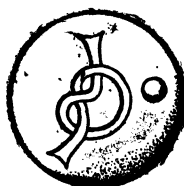


Рис. 234.

114. Показать, что трехмерные куски, ограниченные двумя торами (рис. 235—237), гомеоморфны инверсионному трехмерному пространству, ограниченному двумя торами, заплетенными способом, изображенным на рис. 238, а также куску на рис. 239.

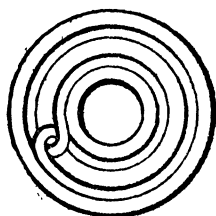


Рис. 235.



Рис. 236.



Рис. 237.

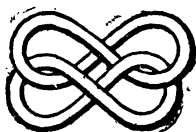


Рис. 238.



Рис. 239.

<sup>1)</sup> Lefschetz, Analysis situs. 1924, стр. 149.

115. Показать, что трехмерные куски, ограниченные двумя торами, как это изображено на рис. 240—242: 1) гомеоморфны инверсионному пространству, ограниченному заплетенными торами рис. 243, 2) гомеоморфны куску, ограниченному поверхностями рис. 244.



Рис. 240.



Рис. 241.



Рис. 242.



Рис. 243.



Рис. 244.

116. Показать, что трехмерные куски, ограниченные тремя торами, изображенными на рис. 245, 245 а, 245 б, гомеоморфны инверсионному пространству, ограниченному тремя заплетенными торами рис. 246.

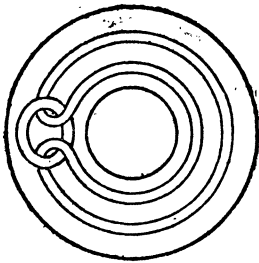


Рис. 245.

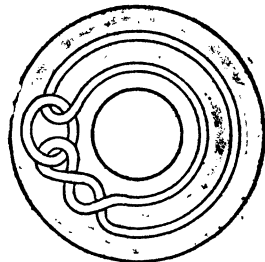


Рис. 245а.

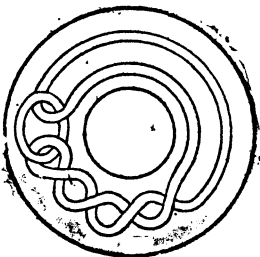


Рис. 245б.

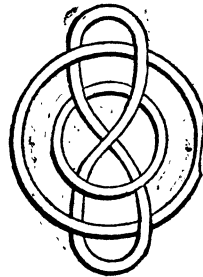


Рис. 246.

117. Показать, что трехмерные куски, ограниченные тремя торами, изображенными на рис. 247—249, гомеоморфны инверсионному пространству, ограниченному тремя баромейски <sup>1)</sup> заплетенными торами (рис. 250).

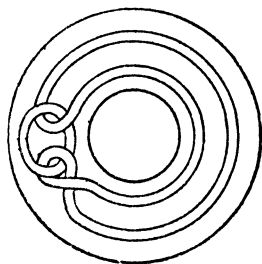


Рис. 247.

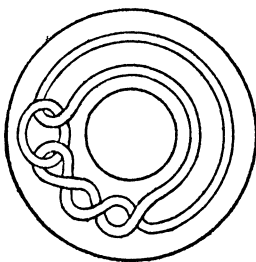


Рис. 248.

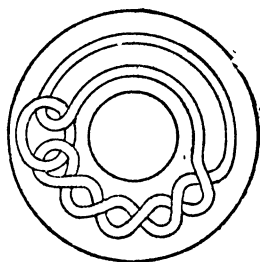


Рис. 249.

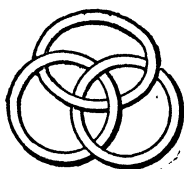


Рис. 250.

118. Показать, что трехмерный кусок рис. 251 гомеоморфен инверсионному пространству, ограниченному баромейски расположенными поверхностями (рис. 252).

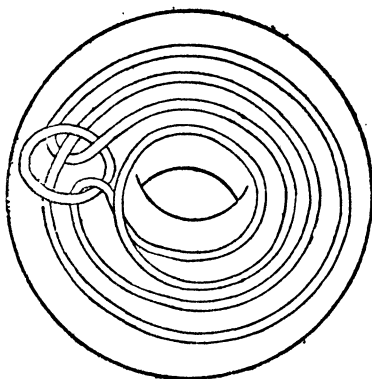


Рис. 251.

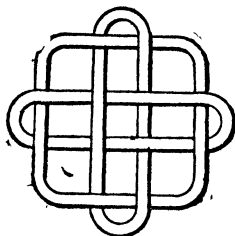


Рис. 252.

<sup>1)</sup> Баромейским заплетением, по предложению Н. Н. Худекова, здесь называется расположение в  $E_3$  кривых, расплетающихся, если одну из них вынуть.

**119.** Показать, что инверсионные пространства, ограниченные системами торов, изображенных на рис. 253 и 255, соответственно гомеоморфны инверсионным пространствам, ограниченным системами торов, изображенных на рис. 254 и 256.

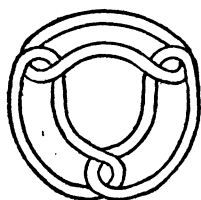


Рис. 253.

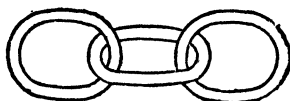


Рис. 254.

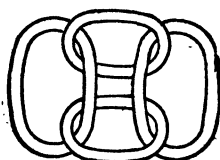


Рис. 255.

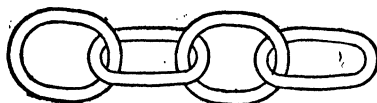


Рис. 256.

**120.** Показать, что инверсионные пространства, ограниченные системами торов (рис. 257 и 258), гомеоморфны, что то же обстоятельство имеет место и для пространств рис. 259 и 260.



Рис. 257.

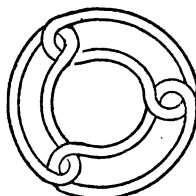


Рис. 258.

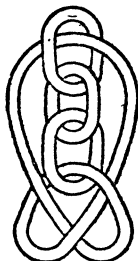


Рис. 259.

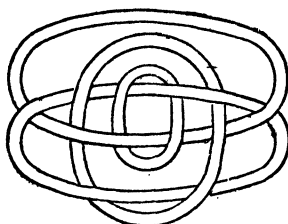


Рис. 260.

121. Показать, что инверсионные пространства, ограниченные системами торов (рис. 261 и 262), гомеоморфны, что так же гомеоморфны пространства рис. 263 и 264, а также рис. 265 и 266.

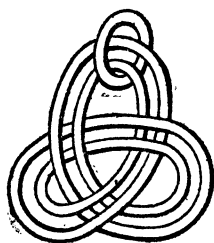


Рис. 261.

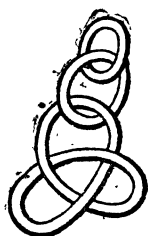


Рис. 262.

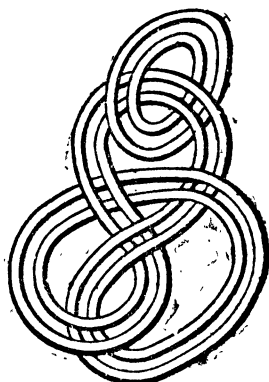


Рис. 263.

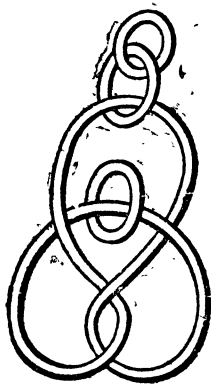


Рис. 264.

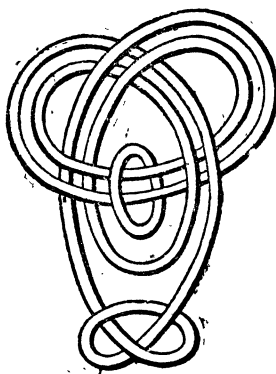


Рис. 265.

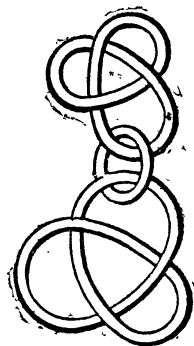


Рис. 266.

122<sup>1)</sup>. Показать, что инверсионные пространства, ограниченные поверхностями, изображенными на рис. 267 и 268, гомеоморфны, и что то же обстоятельство имеет место для поверхностей рис. 269 и 270.

123. Показать, что симметричное трехмерное пространство, определяемое ограничением тора, при помощи соответственно расположенного сферического сечения может быть обращено в кусок трехмерного пространства между двумя концентричными сферами.

124. Показать, что симметричное пространство, определяемое двумя концентричными сферами, соответственно расположенным линейным сечением может быть обращено в кусок трехмерного пространства, ограниченный тором.

<sup>1)</sup> Задача А. А. Маркова (1929).

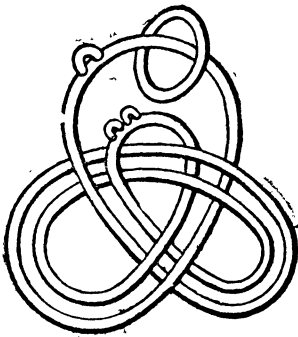


Рис. 267.

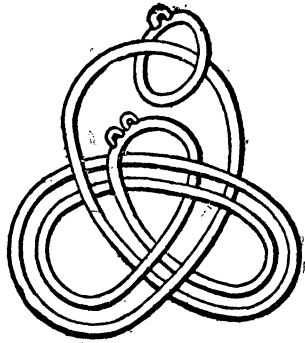


Рис. 268.

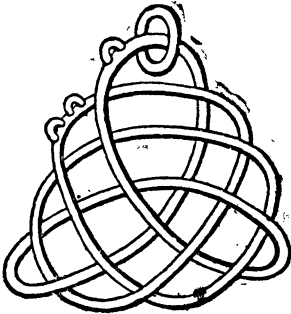


Рис. 269.

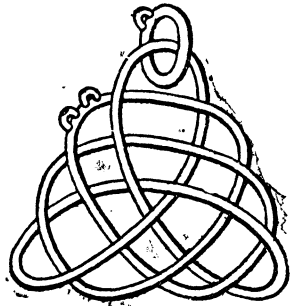


Рис. 270.

125. Показать, что два указанные в задачах 123 и 124 сечения представляют вместе систему сечений, обращающих эти симметричные пространства в элементарно-связанный трехмерный кусок, и что в исходном пространстве сфера и окружность так расположены, что окружность пересекает сферу только в одной точке.

126. Показать, что симметричные пространства с ограничениями сферой и тором (рис. 271 и 272) гомеоморфны.

127. Показать, что симметричные пространства рис. 273—277 гомеоморфны; какие еще гомеоморфизмы здесь возможны?

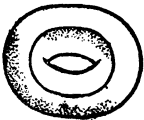


Рис. 271.

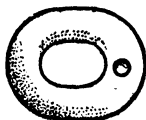


Рис. 272.



Рис. 273.



Рис. 274.



Рис. 275.



Рис. 276.



Рис. 277.

128. Показать, что симметричные пространства рис. 278 и 279 гомеоморфны.

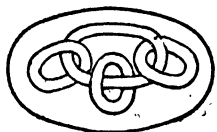


Рис. 278.

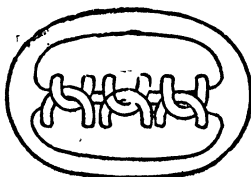


Рис. 279.

129. Показать, что симметричные пространства рис. 280—282 гомеоморфны симметричному пространству рис. 283.

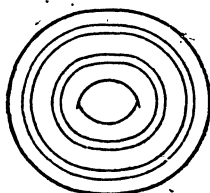


Рис. 280.

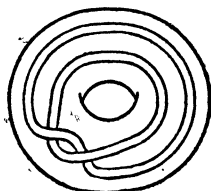


Рис. 281.

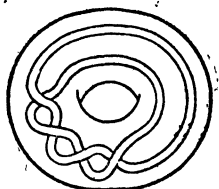


Рис. 282.

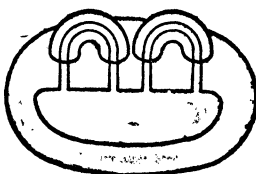


Рис. 283.

130. Показать, что возможно для симметричного пространства, определяемого сферой (трехмерная сфера  $\Pi_3$ ), двулистное риманово представление с одной простой линией разветвления, соединяющей листы, и простой купурой, ограниченной этой линией разветвления.

131. Показать, что симметричное пространство с ограничением в виде тора может быть представлено в двулистной форме с двумя линиями разветвления  $\Pi_1'$  и  $\Pi_1''$  (рис. 284) и купурой  $k$ .

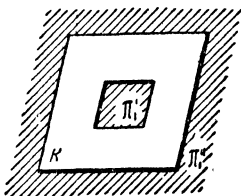


Рис. 284.



132. Найти для симметричных пространств рис. 285—287 римановы представления.

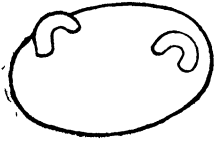


Рис. 285.

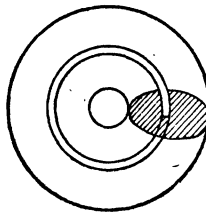


Рис. 286.

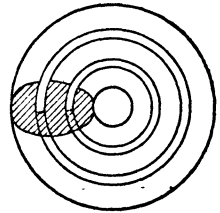


Рис. 287.

133. Показать, что трехмерные пространства, имеющие диаграммы вида рис. 288—290, гомеоморфны.



Рис. 288.

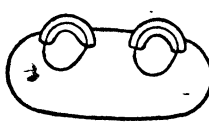


Рис. 289.

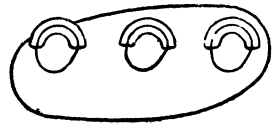


Рис. 290.

134. Показать, что два трехмерных пространства, заданные диаграммами рис. 291 и 292, имеют двулистное представление с одной простой линией разветвления. В чем различие этих представлений? Установить, что эти пространства гомеоморфны.

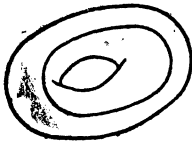


Рис. 291.

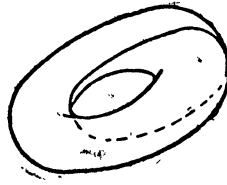


Рис. 292.

135. Показать, что пространства, заданные диаграммами, изображенными на рис. 293 и 294, гомеоморфны.

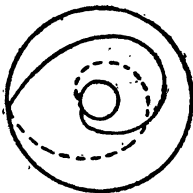


Рис. 293.

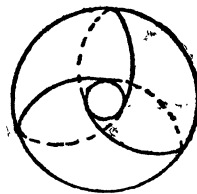


Рис. 294.

136. Показать, что пространства, заданные диаграммами, изображенными на рис. 295 и 296, гомеоморфны (цифрами отмечены две кривые диаграммы). Показать, что оба пространства кроме того гомеоморфны трехмерной сфере<sup>1)</sup>.

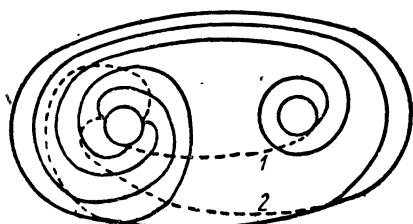


Рис. 295.

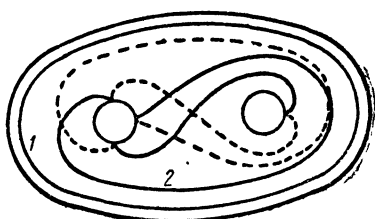


Рис. 296.

137. Показать, что пространства, заданные диаграммами рис. 297 и 298, гомеоморфны<sup>2)</sup>.

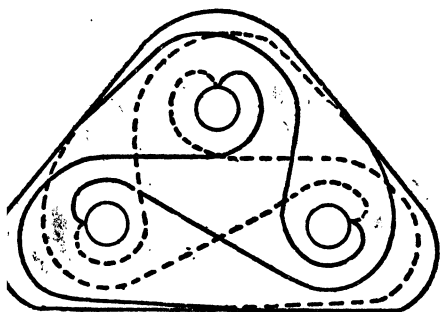


Рис. 297.

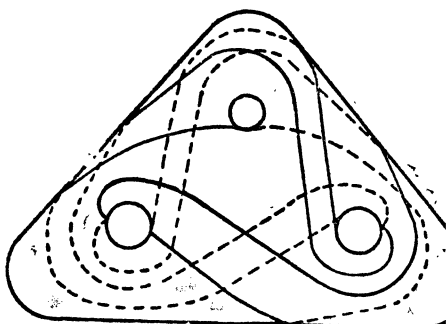


Рис. 298.

138. Показать, что пространства, определенные диаграммами изображенными на рис. 299 и 300, гомеоморфны.

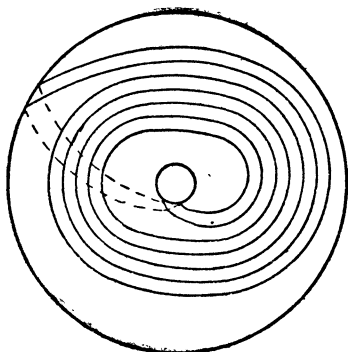


Рис. 299.

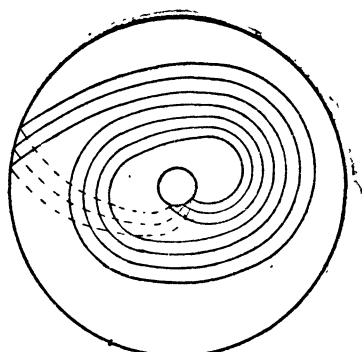


Рис. 300.

<sup>1)</sup> Последнее обстоятельство было установлено А. А. Марковым.

<sup>2)</sup> Задача А. А. Маркова.

139. Найти римановы представления пространств, заданных диаграммами рис. 301—303.



Рис. 301.

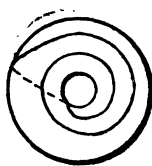


Рис. 302.

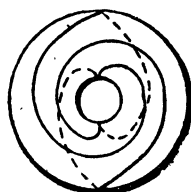


Рис. 303.

140<sup>1)</sup>. Найти диаграмму двулистного риманова пространства с двумя заплетенными линиями разветвления (на рис. 304 — изображена купюра, на рис. 305 — линии разветвления).

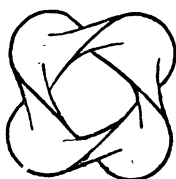


Рис. 30

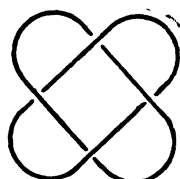


Рис. 305.

141. Возьмем в  $E_3$  куб; образуем из него замкнутое трехмерное пространство простым отождествлением противоположных граней. Найти диаграмму его.

142. Найти диаграмму трехлистного риманова пространства, купюры разветвления которого изображены на рис. 306.

143. Найти риманово представление для пространства с диаграммой, изображенной на рис. 307.

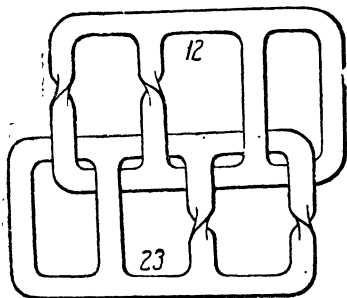


Рис. 306.

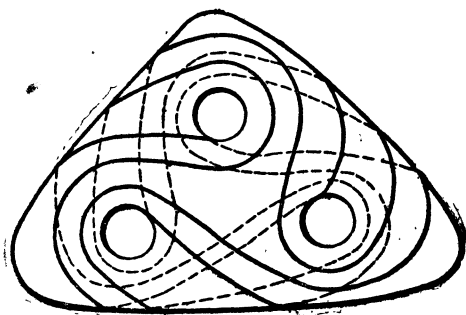


Рис. 307.

<sup>1)</sup> Заимствовано у Hotelling, l. c.

144. Если склеить симметричные относительно центра шара точки его поверхности, то получим пространство, гомеоморфное проективному трехмерному пространству; доказать, что оно ориентируемо. Найти его диаграмму<sup>1)</sup>.

144 bis<sup>2)</sup>). Построим замкнутое трехмерное пространство из шара путем следующего отождествления точек его поверхности. Разобьем ее на четыре части (рис. 308) — 0123498, 8076549, 01267 и 32654; склеивание их определим заданием закона отождествления контуров

$$0123498 = 8076549,$$

$$01267 = 32654.$$

Найти диаграмму этого пространства.

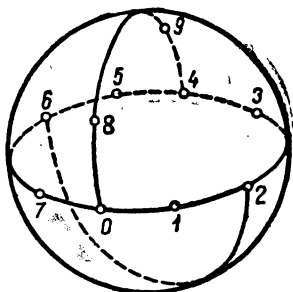


Рис. 308.

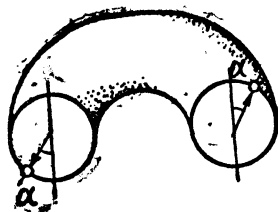


Рис. 309.

145. Установим закон склеивания поверхности тора следующим образом: рассматриваем его меридиональное сечение — оно дает две окружности; точки их подлежат склеиванию соответственно схеме рис. 309; указанным способом склеиваются точки каждого меридионального сечения. Показать, что после склеивания из пространства внутри тора получим двойное (симметричное) пространство, притом такое, что кривая  $A$ , расположенная до склеивания, как указано на рис. 310 а, после склеивания примет вид, указанный на рис. 310 б<sup>3)</sup>.

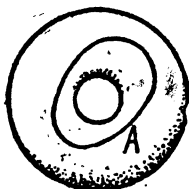


Рис. 310а.

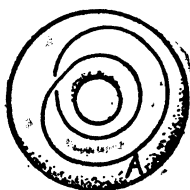


Рис. 310б.

<sup>1)</sup> Задача Hotelling, l. c.

<sup>2)</sup> Построение взято из статьи Kreines, Zur Konstruktion der Poincaré-Räume. Pal. Rend. 56, 1932, стр. 277 — 280.

<sup>3)</sup> Задача А. А. Маркова.

146. Найти диаграмму трехмерного пространства, полученного из трехмерной полости, ограниченной двумя concentричными сферами, склеиванием диаметрально расположенных точек их поверхности согласно схемы, рис. 311.

147. Построим замкнутое трехмерное пространство из внутренности тора следующим образом: склеим диаметрально расположенные точки меридиональных круговых сечений его поверхности. Найти диаграмму его.

148<sup>1)</sup>. Рассмотрим кусок трехмерного пространства между двумя коаксиальными торами (рис. 312); обратим его в замкнутое простран-

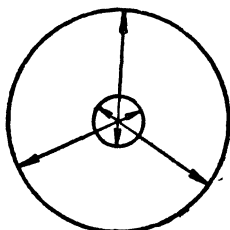


Рис. 311.

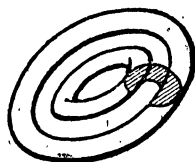


Рис. 312.

ство путем склеивания границ его способом, схематически изображенным на рис. 313: кривые  $\alpha$  склеиваются с  $\alpha'$ ,  $\beta$  с  $\beta'$ ; существенно то, что направление в обоих случаях обратное. Найти риманову форму полученного пространства.

149. Возьмем исходным такой же трехмерный кусок; закон склеивания возьмем другой (рис. 314). Найти, какова в этом случае будет риманова форма полученного замкнутого пространства.

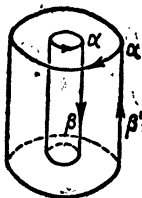


Рис. 313.

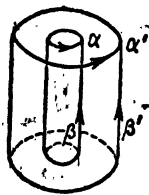


Рис. 314.

150. Установить гомеоморфизм римановых пространств с простыми купюрами, линии разветвлений которых изображены на рис. 315—318; первое пространство двулистно, второе трехлистно и т. д.



Рис. 315.

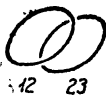


Рис. 316.

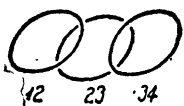


Рис. 317.

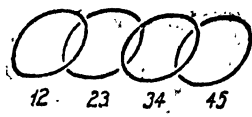


Рис. 318.

<sup>1)</sup> Задачи 148 и 149 заимствованы у Hotelling, l. c.

151. Убедиться, что римановы пространства, купюры которых изображены на рис. 319 и 321, гомеоморфны. Линии их разветвлений соответственно даны на рис. 320 и 322; первое трехлистное, второе двулистное.



Рис. 319.

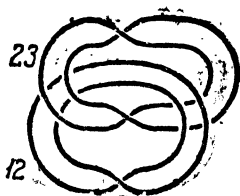


Рис. 320.

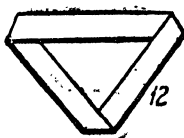


Рис. 321.

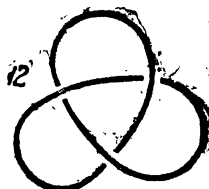


Рис. 322.

152. Показать, что римановы пространства, линии разветвления которых даны на рис. 322 а, 324 и 326, купюры соответственно на рис. 323, 325 и 327 — гомеоморфны.

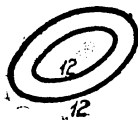


Рис. 322а.



Рис. 323.

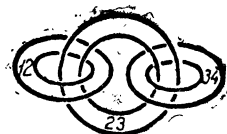


Рис. 324.

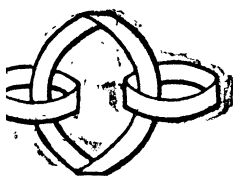


Рис. 325.

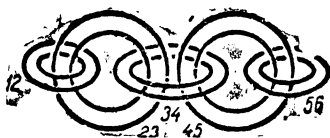


Рис. 326.

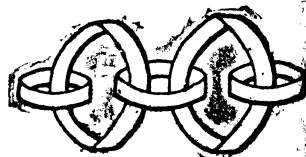


Рис. 327.

153. Установить гомеоморфизм римановых пространств с купюрами рис. 328 и 330; линии разветвления соответственно даны на рис. 329 и 331.

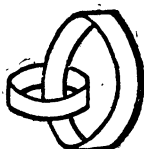


Рис. 328.

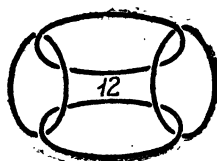


Рис. 329.

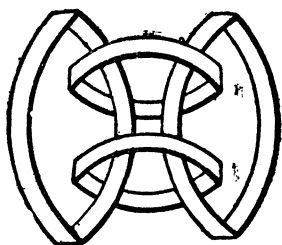


Рис. 330.

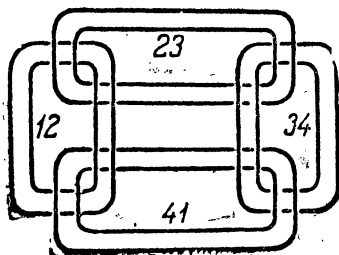


Рис. 331.

154. Показать, что двулистное риманово пространство с купюрами рис. 332 гомеоморфно двулистному пространству рис. 334; линии разветвлений соответственно даны на рис. 333 и 335.

Купюра рис. 334 состоит из двух поверхностей вида рис. 336, вложенных одна в другую.

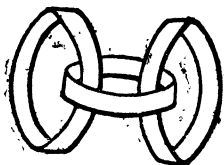


Рис. 332.

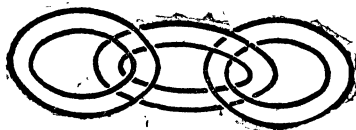


Рис. 333.

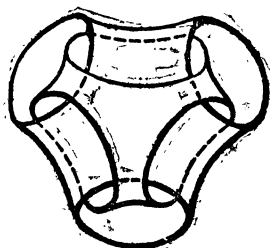


Рис. 334.

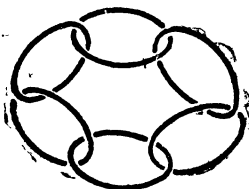


Рис. 335.



Рис. 336.

155. Найти другое двулистное риманово представление двулистного риманового пространства, линии разветвления которого даны на рис. 337, а купюра — на рис. 338.

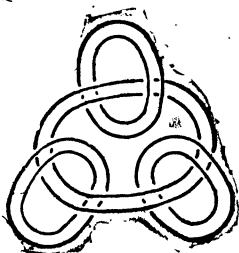


Рис. 337.

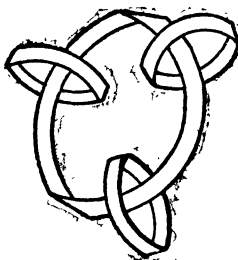


Рис. 338.

156. Показать, что два четырехлистных римановых пространства, купюры разветвлений которых даны на рис. 339 и на рис. 340 и 341, гомеоморфны.

У последнего для ясности отдельно изображены на рис. 340 купюры, соединяющие первый-второй и второй-третий листы, и на рис. 341 купюры второго, третьего и четвертого листов.

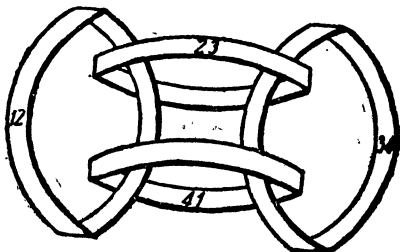


Рис. 339.

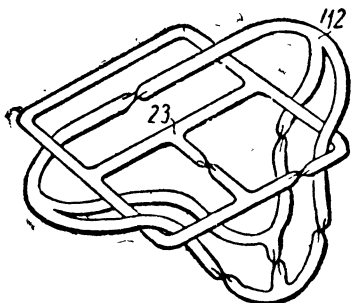


Рис. 340.

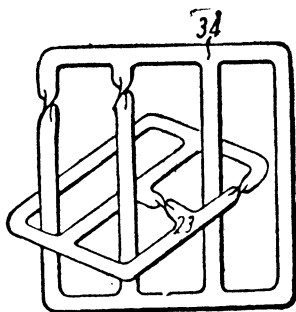


Рис. 341.

157. Показать, что два четырехлистных римановых пространства, имеющие купюры рис. 342 и 343, гомеоморфны.

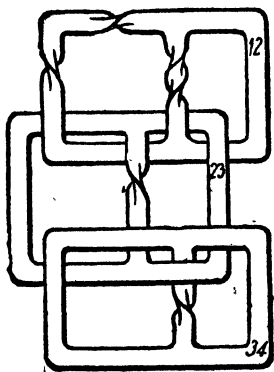


Рис. 342.

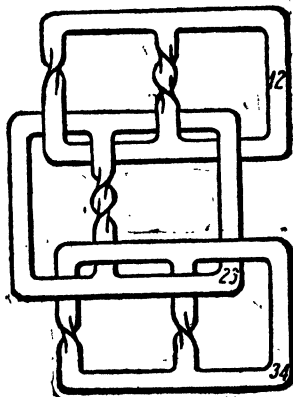


Рис. 343.



ГЛАВА IV.

ВОПРОСЫ  $n$ -МЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ.

В задачах этой главы в первой части рассматриваются основные понятия так называемой алгебраической топологии: понятие алгебраического комплекса, цикла, гомологии и фундаментальной группы. Остановимся сначала на определениях.

Пусть дано  $m$ -мерное евклидово пространство  $\mathcal{E}_m$  с декартовыми координатами  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ; пусть имеем  $k + 1$

$$P^j (a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}, \dots, a_{m,j}) \quad (j = 1, 2, \dots, k + 1)$$

независимых точек пространства  $\mathcal{E}_m$ , не лежащих в одном  $\mathcal{E}_{k-1}$ ; тогда для точек  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , принадлежащих  $\mathcal{E}_m$ , для которых система уравнений

$$\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} y_j = x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} y_j = 1$$

разрешима относительно  $y_j$ , будет определена система  $(k + 1)$  независимых вещественных чисел  $y_j$ , которые представляют барицентрические координаты точки  $(x_i)$  пространства  $\mathcal{E}_m$  относительно точек  $P^j$ .

Назовем  $k$ -симплексом  $S_k$ , определяемым точками  $P^j (j = 1, 2, \dots, k + 1)$ , множество всех точек пространства  $\mathcal{E}_m$ , барицентрические координаты которых относительно точек  $P^j$  положительны;  $l$ -мерной гранью ( $l \leq k$ ) симплекса  $S_k$ , определяемого точками  $P^j (j = 1, 2, \dots, k + 1)$ , будем называть всякий симплекс, определяемый системой  $(l + 1)$  точек  $P^j$ ; 0-мерные грани будем называть вершинами; 1-мерные грани — ребрами. Совокупность точек, принадлежащих граням симплекса размерности меньших  $k$ , образует его границу.

Назовем  $n$ -клеткой  $E_n$  множество, гомеоморфное  $n$ -симплексу;  $(n - 1)$ -сферой  $\Pi_{n-1}$  назовем множество, гомеоморфное границе  $n$ -симплекса;  $n$ -элементом назовем множество, гомеоморфное замыканию  $n$ -симплекса <sup>1)</sup>.

Назовем симплицеальным полиэдром такую конечную совокупность симплексов в  $\mathcal{E}_m$ , что: 1) никакие два симплекса этой совокупности не имеют общих точек, 2) если какой-либо симплекс принадлежит совокупности, то и все его грани принадлежат совокупности; симплексы симплицеального полиэдра называют его гранями. Симплицеальным комплексом называют всякое пространство, гомеоморфное симплицеальному полиэдру. Топологическое отображение полиэдра на комплексе определяет разбиение последнего на клетки,

<sup>1)</sup> Введенные ранее элементарные куски  $S_1, S_2$  и  $S_3$  суть в сущности одномерные, двумерные и трехмерные элементы. Определения сферы в обоих случаях совпадают.

соответствующие граням полиэдра. Говоря об элементах комплекса, будем иметь в виду некоторое его разбиение подобного типа.

Пусть  $E_n$  и  $E_{n-k}$  — клетки комплекса; будем говорить, что  $E_{n-k}$  ограничивает клетку  $E_n$ , если симплекс полиэдра, соответствующий клетке  $E_{n-k}$ , является гранью симплекса, соответствующего клетке  $E_n$ . Симплициальный комплекс вполне определяется заданием всех таких пар  $(E_n, E_{n-k})$ , что  $E_{n-k}$  ограничивает  $E_n$  — заданием отношения ограничения.

Определим элементарное подразделение симплициального полиэдра. Возьмем точку  $P$  полиэдра  $\mathfrak{F}$ , принадлежащую симплексу  $S$ , определяемому точками  $(P^1, P^2, \dots, P^{k+1})$ ; рассмотрим один из симплексов  $S^i$ , ограничиваемых симплексом  $S$ ; пусть он определяется точками

$$(P^1, P^2, \dots, P^{k+1}, Q^1, Q^2, \dots, Q^r);$$

построим  $(k+1)$  симплексов

$$(P^1, \dots, P^{i-1}, P, P^{i+1}, \dots, P^{k+1}, Q^1, Q^2, \dots, Q^r);$$

каждый симплекс из совокупности  $S^i$  заменим  $(k+1)$  симплексами этого вида; присоединяя грани новых симплексов, получим новый симплициальный полиэдр  $\mathfrak{F}'$ , совпадающий со старым  $\mathfrak{F}$  как точечное множество. Операцию перехода от  $\mathfrak{F}$  к  $\mathfrak{F}'$  будем называть элементарным подразделением полиэдра.

Внутренним преобразованием полиэдра назовем последовательность элементарных подразделений и действий, обратных им. Топологическое отображение полиэдра на комплексе дает возможность перенести эти операции на последний.

Назовем размерностью полиэдра наивысшую из размерностей его симплексов. Размерностью комплекса назовем размерность гомеоморфного ему полиэдра; по теореме об инвариантности числа измерений, комплексу будет таким образом всегда соответствовать одна и та же размерность.

Комплекс называется связным, если он не может быть представлен как сумма двух (не пустых) комплексов без общих точек.

Будем говорить, что  $n$ -клетка  $E_n (P^1, P^2, \dots, P^{n+1})$  комплекса  $C_n$  противоположит вершине  $P$  этого комплекса, если комплекс  $C_n$  содержит  $(n+1)$ -клетку  $E_{n+1} (P^1, P^2, \dots, P^{n+1}, P)$ .

Будем называть  $n$ -мерным многообразием связный  $n$ -мерный комплекс, если клетки, противоположные любой его вершине, образуют или  $(n-1)$ -сферу, или  $(n-1)$ -элемент. Если клетки, противоположные любой его вершине, образуют  $(n-1)$ -сферу, то  $n$ -мерное многообразие называют замкнутым. Одномерная сфера есть единственное замкнутое одномерное многообразие<sup>1)</sup>.

Пусть  $f$  есть однозначное и непрерывное отображение комплекса  $C'$  в комплекс  $C$ ; будем рассматривать такие отображения, когда каждая клетка комплекса  $C'$  топологически отображается на клетку комплекса  $C$ .

Рассмотрим два отображения  $f$  и  $f'$  одного комплекса  $C'$  в ком-

<sup>1)</sup> Отрезочные комплексы суть связные одномерные комплексы; поверхности суть двумерные многообразия.

плекс  $C$ ; пусть всякому значению параметра  $t$  между 0 и 1 соответствует отображение  $f_t$  такое, что  $f_0 = f$  и  $f_1 = f$ , и что  $f_t(x)$  непрерывно зависит от параметра  $t$  и от точки  $x$  комплекса  $C'$ . Если существует такое семейство отображений, то мы будем говорить, что отображения  $f$  и  $f'$  гомотопны в  $C$ .

Всякое топологическое отображение комплекса  $C$  на самого себя будем называть автоморфизмом комплекса  $C$ . Будем говорить, что автоморфизм  $f$  комплекса  $C$  есть автоморфизм типа тождества, если существует система автоморфизмов  $f_t$ , где  $t$  — параметр, принимающий значения от 0 до 1, причем  $f_0$  тождественное отображение,  $f_1 = f$  и  $f_t(x)$  непрерывно зависит от параметра  $t$  и от точки  $x$  комплекса  $C$ . Пусть  $C'$  и  $C''$  — подкомплексы комплекса  $C$ ; будем говорить, что комплексы  $C'$  и  $C''$  изотопны в  $C$ , если существует автоморфизм комплекса  $C$  типа тождества, переводящий  $C'$  в  $C''$ .

Рассмотрим симплициальный комплекс  $K$ ; клетки его будем считать как-то ориентированными; ориентацию определим следующим образом: рассмотрим всевозможные последовательности вершин  $q$ -клетки; при  $q > 0$  они разбиваются на два класса последовательностей; последовательности одного класса получаются друг из друга путем четной перестановки, последовательности разных классов — путем нечетной перестановки. Эти классы последовательностей вершин назовем ориентациями  $q$ -клетки. Ориентированной клеткой будем называть клетку с указанием ориентации. Для единообразия терминологии под ориентированной  $0$ -клеткой будем понимать вершину комплекса.

Будем говорить, что  $E_q$  ограничивает  $\pm E_{q+1}$ , если последовательность вершин  $q$ -клетки  $E_q(P^1, P^2, \dots, P^{q+1})$  вместе с принадлежащей ему вершиной  $P$  клетки  $E_{q+1}$  образует последовательность  $(P, P^1, P^2, \dots, P^{q+1})$ , являющуюся соответственно  $+$  или  $-$  последовательностью вершин клетки  $E_{q+1}$ .

Из ориентированных клеток будем составлять целочисленные формы. Алгебраическим комплексом назовем

$$C_q = \sum t_i E_q^i.$$

Простейший алгебраический комплекс есть ориентированный симплекс.

Всякая ориентированная клетка  $E_q$  определяется последовательностью своих вершин  $(P^1, P^2, \dots, P^{q+1})$ , условимся записывать это так:

$$E_q = (P^1, P^2, \dots, P^{q+1}).$$

Границей клетки  $E_q$ , определяемой этим условным равенством, будем называть алгебраический комплекс

$$R(E_q) = \sum_{i=1}^{q+1} (P^1, \dots, P^{i-1}, P^{i+1}, \dots, P^{q+1}) (-1)^{i+1};$$

границей алгебраического  $q$ -комплекса  $C_q = \sum t_i E_q^i$  назовем  $(q-1)$  комплекс

$$R(C_q) = \sum t_i R(E_q^i).$$

Из определений непосредственно вытекает, что сумма границ есть граница. Заметим, что здесь граница определена в несколько ином смысле и притом как комбинаторно-алгебраическое понятие; выше граница была определена как точечное множество.

Алгебраический  $q$ -комплекс называется  $q$ -циклом, если его граница равна нулю; граница  $q$ -клетки, а также граница алгебраического  $q$ -комплекса есть  $(q-1)$ -цикл; сумма циклов есть цикл; если кратное комплекса цикл, то и сам комплекс цикл.

Алгебраический  $q$ -комплекс  $D_q$  называется делителем границы, если  $tD_q$  есть граница. Всякий делитель границы есть цикл. Сумма делителей границы — также делитель границы. Простейший пример делителя границы представляет прямая проективной плоскости; нетрудно убедиться, что на ней цикл  $\Gamma$  представляет делитель границы, так как цикл  $2\Gamma$  образует границу (рис. 344).

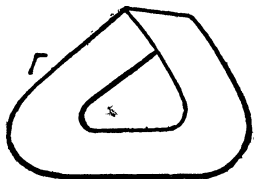


Рис. 344.

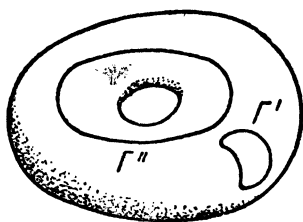


Рис. 345.

Если  $q$ -цикл  $\Gamma_q$  в  $K$  есть граница, то говорят, что цикл гомологичен нулю:

$$\Gamma_q \sim 0,$$

например на поверхности тора (рис. 345) цикл  $\Gamma'$  гомологичен нулю,  $\Gamma''$  не гомологичен нулю. На сферической поверхности всякий цикл гомологичен нулю. Если  $q$ -циклы таковы, что  $\Gamma_q' - \Gamma_q'' \sim 0$ , то говорят, что циклы гомологичны  $\Gamma_q' \sim \Gamma_q''$ ; циклы  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  на поверхности тора (рис. 345) негомологичны; циклы  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  на поверхности, изображенной на рис. 346, удовлетворяют гомологии

$$\Gamma \sim \Gamma' + \Gamma''.$$

Рассматривая линейные формы в ориентированных симплексах, коэффициенты которых суть вычеты по модулю  $m$ , совершенно аналогичным образом можно определить понятия алгебраического комплекса, границы, цикла и гомологии по модулю  $m$ . Интересно, что при модуле  $m=2$  понятия алгебраического комплекса и границы можно ввести, не пользуясь ориентированными клетками<sup>1)</sup>.

Естественно, что при введении модуля топологические отношения могут изменяться; например по модулю 2 цикл  $\Gamma$  (рис. 344) уже будет гомологичен нулю  $\Gamma \sim 0 \pmod{2}$ . Если взять круг и склеить точки окружности его так, чтобы на отрезок ее  $AB$  наложились все осталь-

<sup>1)</sup> Этот прием проведен у Veblen, I. с.

ные  $k$  частей окружности (рис. 347), отождествляя систему вершин всякого правильного  $k$ -угольника, вписанного в круг, то получим комплекс (это не будет многообразие, потому что по ребру  $AB$  сходится  $k$  2-клеток) с циклом например  $CC'$ , гомологичным нулю по модулю  $k$  и негомологичным нулю по всякому модулю, взаимно простому с  $k$ <sup>1)</sup>.

Алгебраические комплексы  $C_q$  как линейные формы образуют абелеву группу  $\mathfrak{K}_q$ , имеющую конечную производящую систему элементов (ориентированные  $q$ -клетки  $E_q$ ). Если элементы не связаны линейным отношением, будем их называть независимыми. Наибольшее число независимых элементов группы называется рангом. Группа  $\mathfrak{K}_q$  имеет конечный ранг.

$q$ -циклы также образуют группу  $\mathfrak{G}_q$ , подгруппу группы  $\mathfrak{K}_q$ ; делители границ — группу  $\mathfrak{D}_q$ , подгруппу группы  $\mathfrak{G}_q$ , и наконец границы — группу  $\mathfrak{R}_q$ , которая является подгруппой группы  $\mathfrak{D}_q$ ; таким образом получается, что

$$\mathfrak{R}_q \subset \mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{G}_q \subset \mathfrak{K}_q$$

элементы всех этих групп бесконечного порядка. Ранги групп  $\mathfrak{R}_q$  и  $\mathfrak{D}_q$  равны.

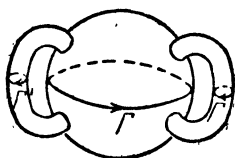


Рис. 346.

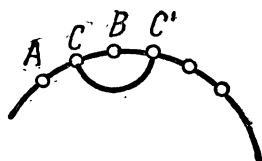


Рис. 347.

Как известно, абелеву группу конечного ранга можно разложить по своей подгруппе, причем получающаяся система вычетов образует абелеву группу с конечным числом производящих элементов. Разлагая группу  $\mathfrak{G}_q$  по ее подгруппе  $\mathfrak{R}_q$ , мы получим группу гомологии

$$\mathfrak{H}_q = \frac{\mathfrak{G}_q}{\mathfrak{R}_q},$$

элементами которой будут классы вычетов по группе  $\mathfrak{R}_q$ . Назовем базой систему производящих элементов группы; на плоском кольце всякий одномерный алгебраический цикл с некоторыми коэффициентами гомологичен внешнему контуру его и никакое кратное контура негомологично нулю. Одномерная группа гомологии — свободная циклическая группа с базой гомологии из одного элемента. Проективная плоскость имеет также базу из одного элемента — проективной прямой; на проективной плоскости два класса одномерной гомологии. На поверхности, изображенной на рис. 348, все одномерные циклы можно разбить на классы гомологий с базой, состоящей из двух производящих элементов, например  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ ; цикл  $\Gamma \sim 2\Gamma''$ , цикл  $\Gamma''' \sim \Gamma' + \Gamma''$  и т. д.

<sup>1)</sup> См. задачу 173 bis.

Классы гомологий  $q$ -циклов комплекса  $K$  образуют  $q$ -мерную группу

$$\mathfrak{B}_q = \frac{\mathfrak{B}_q}{\mathfrak{D}_q}$$

группу Бетти; ранг этой группы называется  $q$ -мерным числом Бетти.

Одномерное число Бетти для замкнутой поверхности рода  $p$  равно  $p - 1$ ; двумерное число Бетти для замкнутой поверхности рода  $p$  будет 1 или 0 в зависимости от того, будет

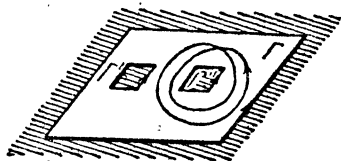


Рис. 348.

ли поверхность ориентируема или нет, например для поверхности тора  $p_0 = 1$ ;  $p_1 = 2$ ;  $p_2 = 1$ ; аналогичное имеет место и для  $n$ -мерных замкнутых многообразий, для  $\Pi_n$ :  $p_0 = 1$ ;  $p_n = 1$ , остальные нули. Одномерное число Бетти для  $(p + 1)$ -связной плоской области (рис. 348, где  $p = 2$ ) равно  $p$ . Для замкнутой ориентируемой

поверхности рода  $p$  одномерная группа Бетти есть группа с базой из  $2p$  классов гомологий системы канонических кольцевых сечений.

Разлагая группу  $\mathfrak{D}_q$  по ее подгруппе  $\mathfrak{R}_q$ , мы определим группу кручения

$$\mathfrak{T}_q = \frac{\mathfrak{D}_q}{\mathfrak{R}_q};$$

эта группа конечная; инварианты ее — элементарные делители — называются коэффициентами кручения. Группа кручения состоит из всех элементов группы гомологии конечного порядка.

Группа гомологии представляется как прямая сумма группы кручения и группы, изоморфной группе Бетти; отсюда следует, что структура группы гомологии вполне определяется соответственным числом Бетти и коэффициентами кручения.

Неориентируемые замкнутые поверхности имеют отличную от нуля одномерную группу кручения, что представляет частный случай теоремы:  $(n - 1)$ -мерная группа кручения замкнутого неориентируемого  $n$ -мерного многообразия представляет конечную группу порядка 2, в то время как ориентируемое  $M_n$  не имеет  $(n - 1)$ -мерного кручения.

Назовем непрерывным путем в комплексе  $K$  непрерывное отображение ориентированного 1-элемента; образы начала и конца элемента будем называть началом и концом пути.

Пусть  $O$  — произвольно фиксированная точка связного комплекса  $K$ ; рассмотрим непрерывные пути, начало и конец которых расположены в точке  $O$ ; множество этих путей делится на классы гомотопных непрерывных путей; построим из классов гомотопных путей группу; умножение классов определим следующим образом: пусть  $A$  и  $B$  — классы гомотопных путей; возьмем путь  $a$  из  $A$  и путь  $b$  из  $B$ , причем пусть  $a$  отображение 1-элемента  $\alpha$ ,  $b$  — 1-элемента  $\beta$ ; возьмем ориентированный 1-элемент  $\gamma$ ; внутренней точкой  $P$  разобьем его на две части  $\alpha'$  и  $\beta'$ , которые также будем рассматривать как ориентированные элементы; ориентацию их

согласуем с ориентацией  $\gamma$  так, чтобы начало  $\alpha'$  совпало с началом  $\gamma$ , а конец  $\beta'$  с концом  $\gamma$ . Определим топологическое отображение  $f$  1-элементов  $\alpha'$  на  $\alpha$  и топологическое отображение  $g$  1-элементов  $\beta'$  на  $\beta$ , сохраняющее ориентацию. Теперь определим непрерывное отображение  $c$  ориентированного 1-элемента  $\gamma$  в комплекс  $K$  так: при  $x$ , принадлежащем  $\alpha'$ ,

$$c(x) = a(f(x)),$$

при  $x$ , принадлежащем  $\beta'$ ,

$$c(x) = b(g(x));$$

принимая во внимание, что концы и начала непрерывных путей  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают с точкой  $O$ , нетрудно убедиться, что определенное таким образом отображение  $c$  однозначно и непрерывно, т. е. является непрерывным путем в комплексе  $K$ , причем начало и конец этого пути также совпадают с точкой  $O$ . Этот путь принадлежит некоторому классу гомотопных непрерывных путей  $C$ . Легко показать, что полученный таким образом класс путей  $C$  зависит только от классов  $A$  и  $B$  и не зависит от выбора „представителей“ этих классов  $\alpha$  и  $\beta$ ; класс  $C$  назовем произведением классов  $A$  и  $B$ .

При таком определении произведения классы гомотопных непрерывных путей образуют группу. Каков бы ни был связный комплекс  $K$ , группа не зависит от выбора точки  $O$ . Эта группа называется фундаментальной группой комплекса  $K$  или группой Пуанкаре.

Роль единицы в ней играет класс непрерывных путей, сводящихся в точку; перемена ориентации превращает всякий класс непрерывных путей в обратный ему класс. В простейших случаях, например симплекса  $S_n$ , клетки  $E_n$  или сферы  $P_n$ , группа Пуанкаре состоит только из единицы. Для поверхности тора фундаментальная группа бесконечная абелева с базой из двух производящих элементов; для ориентируемой поверхности рода больше единицы она перестает быть коммутативной, но производящие элементы группы связываются соотношением

$$\prod a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1.$$

Назовем комбинаторным путем конечную последовательность ориентированных замыканий ребер  $E_1^i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ) комплекса  $K$  такую, что при всяком  $i$  от 1 до  $q$ , конец  $E_1^i$  совпадает с началом  $E_1^{i+1}$ . Всякий такой комбинаторный путь может быть рассматриваем и как непрерывный путь; для этого надо подразделить ориентированный 1-элемент  $\alpha$  на 1-элементы  $\alpha^i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ), расположенные на  $\alpha$  в порядке возрастания  $i$  и ориентированные так, что при всяком  $i$  от 1 до  $q-1$ , конец  $\alpha^i$  совпадает с началом  $\alpha^{i+1}$  и начало  $\alpha^q$  совпадает с началом  $\alpha$ . Пусть  $a^i$  — топологическое отображение  $\alpha^i$  на замыкание  $E_1^i$ , сохраняющее ориентацию; определим отображение  $a$  1-элемента  $\alpha$  в комплексе  $K$  так: при  $x$ , принадлежащем  $\alpha^i$ ,  $a(x) = a^i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ). Отображение  $a$  однозначно и непрерывно и является непрерывным путем в комплексе  $K$ .

Возьмем теперь точку  $O$  в одной из вершин комплекса  $K$ , тогда нетрудно убедиться, что всякий непрерывный путь гомотопен комбинатор-

ному пути и поэтому при построении фундаментальной группы достаточно ограничиться рассмотрением только комбинаторных путей. Необходимые и достаточные условия гомотопии комбинаторных путей  $a$  и  $b$  состоят в том, что от пути  $a$  к пути  $b$  можно перейти конечной последовательностью преобразований трех типов: 1) заменой замыкания ребра  $E_1$ , последовательностью двух ориентированных замыканий ребер  $E_1'$  и  $E_1''$ , где алгебраический комплекс  $(E_1 - E_1' - E_1'')$  является границей 2-клетки, 2) отбрасыванием пары последовательных ребер  $E_1'$  и  $E_1''$ , совпадающих и противоположно ориентированных, 3) преобразованием обратным (2).

Фундаментальная группа окружности свободная и циклическая; такая же группа у плоского кольца, у внутренности тора<sup>1)</sup>.

Фундаментальная группа характеризует гомотопные свойства путей.

Переходя к дальнейшему, необходимо сказать, что хотя все эти понятия фундаментальной группы, группы гомологии и т. д. представляют инварианты комплекса, однако они не образуют полной их системы; так Пуанкаре дал пример трехмерного пространства с группой гомологии как у сферы, но с фундаментальной группой, отличной от единицы; Александер дал пример двух негомеоморфных трехмерных пространств с одинаковыми фундаментальными группами.

Дальнейшие задачи этой главы имеют содержанием определение топологических свойств пространств, заданных различными способами — определение замкнутости, связности, ориентации и т. д., наконец помещены задачи, где рассматриваются вопросы, касающиеся узлов и заплетений в  $E_n$  при  $n > 3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Alexander. Combinatorial Analysis Situs. Trans. Am. Math. Soc. 28, 1926, стр. 301—329.
2. Hopf. Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel. Gött. Nach. Math. Phys. Kl., 1928, H. 2.
3. Poincaré. Analysis situs. J. d. l'Ec. polyt. (2) 1, 1895.
4. Artin. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R. Hamb. Abh. 4, 1926, стр. 174.
5. van Kampen. Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen in R. Hamb. Abh. 6, 1928, стр. 216.
6. Худеков Н. Н. Неопубликованная переписка 1925 г. и другие материалы.
7. Fischer. Gruppen und Verkettungen. Comment. math. helv. 2, 1930, стр. 253—268.
8. Seifert. Verschlingungsinvarianten. Sitzber. Preus. Ak., 1933; Phys. Math. Kl., стр. 811—828.
9. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. Sammlung Schubert 35, 36. I und II Bd.

158. Доказать, что на замкнутой ориентируемой поверхности рода  $p$  ( $p > 1$ ) кривые  $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$  гомологичны нулю, но в точку не сводятся.

На поверхности тора они в точку сводятся или, другими словами, гомотопны нулю.

<sup>1)</sup> И вообще у топологического произведения окружности и  $n$ -элемента.



**158 bis.** Показать, что на замкнутой ориентируемой поверхности с тремя дырками, изображенной на рис. 349, имеет место гомология  $a \sim b$ .

**159.** На поверхности тора цикл  $\Gamma$  не  $\sim 0$  (рис. 350). К тору (рис. 350а) с вырезанным куском, ограниченным кривой 2, по кривым 1 и 2 присоединяется трубка так, что получается комплекс, изображенный на рис. 351.

Показать, что на таком комплексе цикл  $\Gamma$  гомологичен нулю.

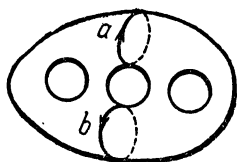


Рис. 349.



Рис. 350.

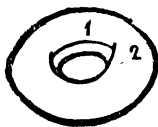


Рис. 350а.



Рис. 351.

**160.** Поверхность тора превращается в комплекс присоединением трубки иначе: один конец как в предыдущей задаче, а другой к меридиональной кривой тора.

Показать, что циклы  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  (рис. 352) гомотопны, но в точку не сводятся.

**160 bis <sup>1)</sup>** Построим пространство из октаэдра, склеивая противоположные грани его соответственно рис. 352 а, где в стереографической проекции дано изображение поверхности октаэдра.

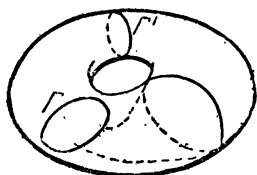


Рис. 352.

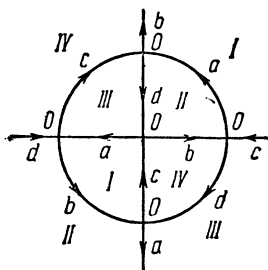


Рис. 352а.

Показать, что ребра  $a, b, c, d$  гомологичны друг другу и не гомологичны нулю, но что каждое трижды повторенное гомологично нулю.

**161.** Показать, что в трехмерном симметричном пространстве, определяемом ограничениями  $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^n$ , при соответствующей ориентации 2-циклы  $\Gamma^i$  удовлетворяют гомологии

$$\Sigma \Gamma^i \sim 0.$$

<sup>1)</sup> Задачи №№ 160 bis, 173 bis, 173 bb, 177 заимствованы у Seifert & Threlfall, I, с.

162. Показать, что 2-цикл  $\Gamma$  в симметричном  $M_3$  (рис. 353), концентричный внутреннему ограничению и расположенный в одной из его полостей, не гомологичен нулю.

163. Показать, что в двулистном римановом пространстве с купюрой лентой Мёбиуса 2-циклы  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  (рис. 354 и 355) гомологичны нулю.

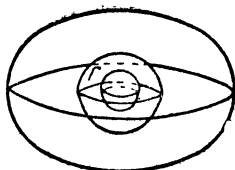


Рис. 353.

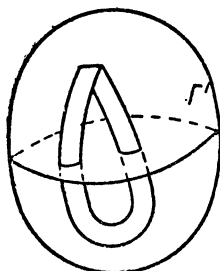


Рис. 354.

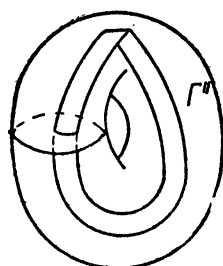


Рис. 355.

164. Найти базы гомологии для пространств дополнительных к кривым, изображенным на рис. 356—359.



Рис. 356.

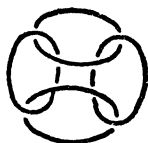


Рис. 357.



Рис. 358.



Рис. 359.

165. Найти одномерное число Бетти для трехмерного пространства дополнительного к  $(p+1)$ -связной плоской области.

166. Найти числа Бетти для трехмерных пространств: 1) ограниченного двумя концентричными сферами, 2) ограниченного двумя коаксиальными торами.

167. Найти числа Бетти для замкнутого пространства, определение которого дано в задаче 147.

167 bis. Построим замкнутое  $M_3$  из додекаэдра, отождествляя его грани, как указано на рис. 360, где в стереографической проекции дано изображение поверхности додекаэдра.

Найти числа Бетти и фундаментальную группу.

168 <sup>1)</sup>. Найти числа Бетти для симметричных трехмерных пространств 1) между двумя концентричными сферами, 2) между двумя коаксиальными торами.

169. Найти базу гомологии для симметричного трехмерного пространства, определяемого двумя коаксиальными торами.

170. Доказать, что пространство, заданное диаграммой рис. 361, не гомеоморфно сфере.

<sup>1)</sup> Задачи 165—168 взяты у Alexandroff, l. c., стр. 44—46.

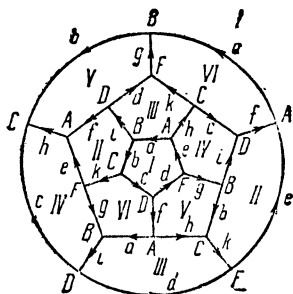


Рис. 360.

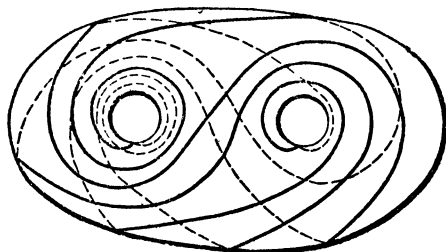


Рис. 361.

171<sup>1)</sup>. Пусть многообразие  $M_2$  определяется диаграммой, представляющей тор с характеристической кривой  $ab^k$  (на рис. 362 изображена диаграмма, соответствующая случаю  $k=3$ ).

Определить кручение многообразия  $M_2$ .

172<sup>2)</sup>. Установим следующий закон отождествления поверхности тора. Возьмем меридиональное сечение тора плоскостью  $P$  (рис. 363). Скле-

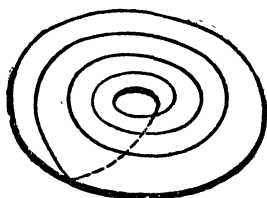


Рис. 362.

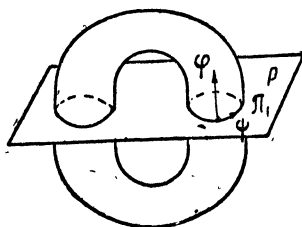


Рис. 363.

вать будем меридианы тора, симметрично расположенные относительно плоскости  $P$ . Пусть  $\varphi$  — долгота тора, отсчитываемая по стрелке от меридиана  $\Pi_1$ ,  $\psi$  — широта тора, отсчитываемая вдоль меридиана, как показано стрелкой на рис. 363; началом широт можно взять например один из экваторов тора; отождествление симметричных меридианов будем производить с поворотом так, чтобы совпадали точки  $(\varphi, \psi)$  и  $(-\varphi, \psi + \frac{2\varphi}{k})$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi$  и  $k$  — целое число.

Показать, что после склеивания из пространства внутри тора получится замкнутое трехмерное многообразие. Определить его кручение.

173<sup>3)</sup>. Построим в  $E_3(x, y, z)$  куб с вершинами  $A, B, C, D, A', B', C', D'$ , имеющими координаты:

$A(0,0,0),$	$A'(0,0,1),$
$B(0,1,0),$	$B'(0,1,1),$
$C(1,0,0),$	$C'(1,0,1),$
$D(1,1,0),$	$D'(1,1,1).$

<sup>1)</sup> Lefschetz, L'Analysis situs, 1924, стр. 9.

<sup>2)</sup> Задача А. А. Маркова.

<sup>3)</sup> Пример взят у Poincaré, 1, с., пример 3, стр. 66.

Найти коэффициенты кручения и числа Бетти для замкнутого трехмерного пространства, которое получается следующим отождествлением граней куба:

$$ABDC = B'D'C'A'; \quad ABB'A' = C'CDD'; \quad ACC'A' = DD'B'B.$$

**173 bis.** Построим из круга на  $E_2$  комплекс, склеивая в одну  $k$  точек окружности его, отстоящих на расстоянии  $\frac{2\pi}{k}$ ; показать, что фундаментальная группа комплекса будет циклическая порядка  $k$  и что комплекс гомеоморфен комплексу, имеющему комбинаторную схему

$$\{P^1, P^2; S_1^1 = (P^1, P^2)', S_1^2 = (P^1, P^2)''; S_2^1 = (S_1^1, S_1^2)', S_2^2 = (S_1^1, S_1^2)'', \dots, S_2^k = (S_1^1, S_1^2)^{(k)}\}.$$

**173 bb.** Показать, что группа с соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$$

изоморфна группе с соотношением

$$c_1 c_2 \dots c_{2p} c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{2p}^{-1} = 1.$$

**174.** Построить для пространств, заданных диаграммами, изображенными на рис. 364 и 365, фундаментальные группы.

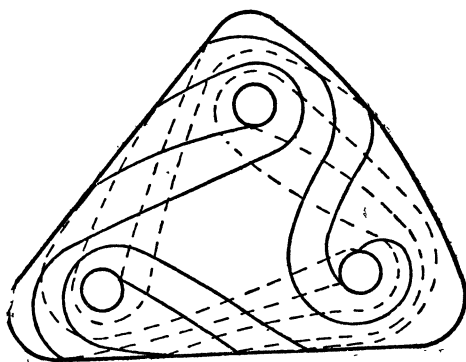


Рис. 364.

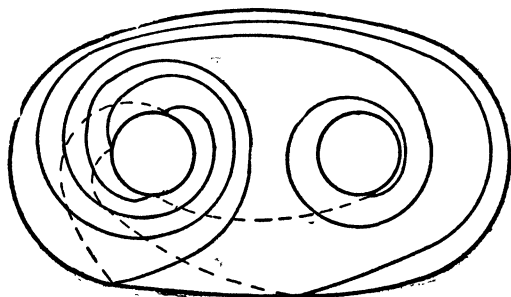


Рис. 365.

175. Показать, что негомеоморфные пространства, заданные диаграммами, изображенными на рис. 366 и 367, имеют изоморфные фундаментальные группы.

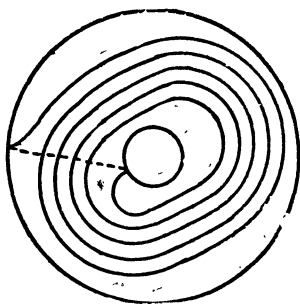


Рис. 366.

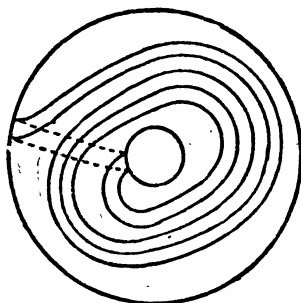


Рис. 367.

176. Построить фундаментальную группу для пространства, заданного диаграммой рис. 368. Найти для него группу гомологии.

177. Построим правильную пирамиду на  $p$ -угольник; приклеим к ней снизу по основанию такую же пирамиду. Отождествим боковые грани верхней и нижней пирамид, идентифицируя точки верхней грани с симметричными, относительно общего основания пирамид, точками той нижней грани, которая окажется под верхней после поворота пирамиды около ее вертикальной оси на угол  $\frac{2\pi q}{p}$ , где  $(p, q) = 1$ .

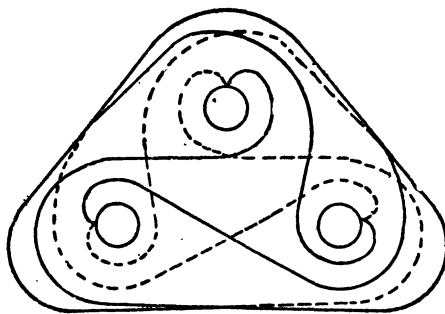


Рис. 368.

Найти фундаментальную группу такого бипирамидального пространства.

178. Доказать, что поверхность тора в  $E_4(x, y, z, t)$

$$x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

разбивает трехмерную сферу в  $E_4$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

на два конгруэнтные тора

$$1) x^2 + y^2 \leq z^2 + t^2;$$

$$2) x^2 + y^2 \geq z^2 + t^2.$$

179. Доказать, что поверхность, заданная в декартовой прямолинейной прямоугольной координатной системе в  $E_4(x, y, z, t)$  уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 + t^2} = 2z, \\ \frac{x}{t} = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

замкнутая и неориентируемая и имеет связность 2.

180. Доказать, что поверхность, заданная в  $E_4(x, y, z, t)$  системой уравнений

$$\begin{cases} y^2 z^2 + y^2 t^2 + z^2 t^2 = yzt, \\ y(z^2 - t^2) = xzt, \end{cases}$$

гомеоморфна поверхности задачи 179<sup>1)</sup>

181. Доказать, что поверхность  $M_2$ , заданная в  $E_4(x, y, z, t)$  системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = \sqrt{(x^2 + y^2)(1 - z^2)}, \\ \frac{y}{t} = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

замкнутая и неориентируемая и имеет связность 3.

182. Доказать, что  $M_3$ , заданная в  $E_6(x, y, z, u, v, t)$  системой

$$\begin{cases} x^2 = u - v = 1 - z^2, \\ y^2 = u + v = 1 - t^2, \end{cases}$$

замкнутая, ориентируемая и имеет связность 3.

183. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ t^2 = yz, \\ u^2 = xz, \\ v^2 = xy \end{cases}$$

в  $E_6$  изображает проективную плоскость<sup>2)</sup>.

184. Построить риманову поверхность для функции

$$t = \arcsin z = \frac{1}{i} \lg \left( z + \sqrt{1 + z^2} \right).$$

Показать, что поверхность имеет исчислимое количество листов и точек разветвления; найти закон соединения листов.

185. Доказать, что трехмерное пространство  $M_3$ , заданное в  $E_5$  уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5z^2 + 4v^2 = 6(1 - u^2) + 4u^2(v^2 + z^2), \\ \frac{y}{u} = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

замкнутое и неориентируемое.

<sup>1)</sup> См. Hilbert & Cohn-Vossen, l. c., стр. 301.

<sup>2)</sup> Пример Poincaré, l. c., стр. 87.

186. Доказать, что пространство предыдущего примера гомеоморфно симметричному пространству, имеющему ограничением неориентируемый тор (рис. 160).

187<sup>1)</sup>. Доказать, что характеристики  $N'$   $n$ -мерной сферы и  $N''$   $n$ -мерного проективного пространства связаны соотношением  $N' = 2N''$ .

188<sup>2)</sup>. Доказать, что многообразие пар точек на прямой гомеоморфно плоскости.

189. Доказать, что многообразие приложенных отличных от нуля векторов на прямой гомеоморфно плоскости без прямой.

190. Доказать, что многообразие прямых на плоскости гомеоморфно внутренности ленты Мёбиуса (множеству точек ленты, исключая контур его).

191. Доказать, что многообразие окружностей  $\Pi_1$  на плоскости ( $E_2$ ) гомеоморфно трехмерному пространству ( $E_3$ ).

192. Доказать, что многообразие  $\Pi_{n-1}$  в  $E_n$  гомеоморфно  $E_{n+1}$ .

193. Доказать, что на плоскости многообразие всех ненаправленных конечных отрезков гомеоморфно многообразию направленных.

194. Доказать, что в трехмерном пространстве многообразия конечных отрезков, направленных и ненаправленных, негомеоморфны.

195. Доказать неориентируемость многообразия всех прямых проективного трехмерного пространства.

196. Доказать неориентируемость многообразия окружностей трехмерного пространства.

197. Доказать, что многообразие троек точек на прямой гомеоморфно  $E_3$ .

198. Четырехмерный симплекс имеет  $\alpha_0 = 5$ ;  $\alpha_1 = 10$ ;  $\alpha_2 = 10$  и  $\alpha_3 = 5$ , где  $\alpha_0$  — число точек,  $\alpha_1$  — число ребер и т. д.; обратным ему в  $E_4$  будет также симплекс. Найти комплекс, обратный в  $E_4$  политопу с  $\alpha_0 = 16$ ,  $\alpha_1 = 32$ ,  $\alpha_2 = 24$ ;  $\alpha_3 = 8$  (четырёхмерному кубу, рис. 371).

199. Найти другой (кроме симплекса) четырехмерный политоп при условиях: 1)  $\alpha_0 = \alpha_3$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2$ ; 2) линейный комплекс политопы должен быть графом, двумерные грани — с одинаковым числом точек в ребрах (одинаковое число сходящихся двумерных граней), трехмерные грани — с одинаковым числом двумерных граней, 3) гомеоморфный симплексу.

200. Доказать, что обратным в  $E_n$   $n$ -мерному симплексу будет  $n$ -мерный симплекс  $S_n$ .

201<sup>3)</sup>. Доказать, что для построения  $S_n$  в  $E_n$  требуется  $2^{n+1} - n - 3$  операций, если даны  $n + 1$  вершин и соединения двух вершин отрезком,

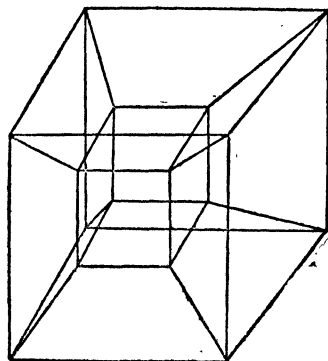


Рис. 371.

<sup>1)</sup> Взята из книги Seifert & Threlfall.

<sup>2)</sup> Задачи 188—197 даны Н. Н. Худековым.

<sup>3)</sup> Задачи 198—201 взяты у Schoute, l. c.

трех вершин гранью и т. д. считаются операциями построения симплекса.

202<sup>1)</sup>. Возьмем циклическую группу из  $n$  точек; будем на них как на вершинах строить тетраэдры; предварительно циклически строим на парах точек ребра и на части троек ребер те грани, которые будут нужны; пусть  $n=6$ , берем ребро 12; строим тетраэдры 1234, 1245, 1256 и 6213; берем ребро 23; строим тетраэдры 2345, 2356 (2361 и 1234 уже есть), ребро 34 даст тетраэдры 3456 и 3461 (3412 и 2345 уже есть), ребро 45 даст только 4561 (4512, 4523 и 3456 есть), ребра 56 и 61 новых тетраэдров уже не дадут; будем считать у тетраэдров общими ребра и грани, ограниченные соответственно одноименными точками и ребрами.

Если будет  $n$  точек, то аналогичным способом построим  $\frac{n(n-3)}{2}$  тетраэдров.

Требуется доказать, что тетраэдры образуют трехмерную сферу.

Доказать, что это построение дает симплициальное разбиение сферы с диэдрической группой преобразований ее самое в себя.

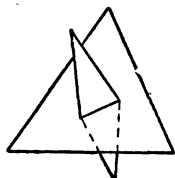


Рис. 372.

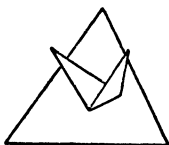


Рис. 373.

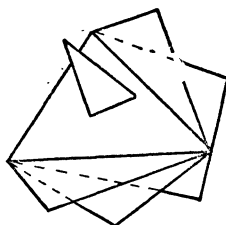


Рис. 374.

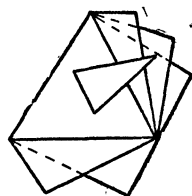


Рис. 375.

203. Возьмем две циклических группы из  $p$  и  $q$  точек; каждую пару смежных точек  $p$  группы вместе с каждой парой смежных  $q$  точек примем за вершины тетраэдров; итого получим  $pq$  тетраэдров; будем у них общими считать ребра и грани, ограниченные соответственно одноименными точками и ребрами.

Требуется доказать, что тетраэдры образуют трехмерную сферу.

Доказать, что это построение дает симплициальное разбиение сферы с группой преобразований ее самое в себя, представляющей прямое произведение двух диэдрических групп порядков  $p$  и  $q$ .

204. Для поверхностей легко дать примеры неизотопных деревьев, которые изотопны своему зеркальному отображению или не изотопны ему (рис. 372 и 373 — изотопные образцы, рис. 374 и 375 — неизотопные).

Построить такие примеры для трехмерных и для четырехмерных комплексов.

205. Как в  $E_4$  расположить окружность  $\Pi_1$ , чтобы она в одной точке пересекла двумерную сферу  $\Pi_2$ .

206. Построить в  $E_4$  окружность  $\Pi_1$ , зацепляющую  $\Pi_2$ ; осуществить простейшее взаимное их расположение, не изотопное изолированному.

<sup>1)</sup> Отсюда и до конца все задачи 202—215 даны Н. Н. Худековым.



207. Построить в  $E_3$  зацепление двух двумерных сфер  $\Pi_2$  и  $\Pi_2'$ .

208. Построить в  $E_3$  двумерный узел  $K_2$  гомеоморфный сфере  $\Pi_2$ , но не изотопный ей в  $E_4$ .

209. Построить в  $E_4$  узел  $K_2$ , гомеоморфный тору.

210. На зацепленных в  $E_3$  окружностях  $\Pi_1'$  и  $\Pi_1''$  (рис. 376) построить в  $E_3$  ленту  $M_2^0$ , и в  $E_4$  из точки  $P'$  конус  $M_2'$  на  $\Pi_1'$ , и из точки  $P''$  конус  $M_2''$  на  $\Pi_1''$ . Доказать, что поверхность  $M_2 = M_2^0 + M_2' + M_2''$ .

1) гомеоморфна сфере и 2) незаузлена в  $E_4$ .



Рис. 376.

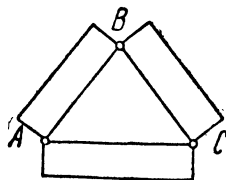


Рис. 377.

211. Простейший в  $E_3$  линейный узел можно построить, исходя из треугольника  $ABC$  (рис. 377), пристраивая к его сторонам  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  прямоугольники и устанавливая в точках  $A, B, C$  определенный способ перехода с ветви на ветвь.

Доказать, что, исходя из тетраэдра в  $E_4$ , нельзя аналогичным путем получить двумерный узел, но из куба например можно.

212. Построить в  $E_4$  заплетение двух торов.

213. Доказать, что в  $E_{n+2}$  существуют узлы  $K_n$  и  $K_{n+1}$ , а также заплетения этой размерности.

214. Построить в  $E_4$  баромейское заплетение окружности и двух двумерных сфер.

215. Построить заплетение двух двумерных сфер в  $E_4$ .

ГЛАВА I.  
МЕТОД ПРОЕКЦИЙ.

Проективная геометрия, зачатки которой имеются уже у греческих геометров, обязана своим возникновением перспективе, или центральной проекции.

Проекцией данной фигуры из центра  $S$  (центр проекции) на плоскость  $\sigma$ , не проходящую через  $S$  (плоскость проекции), называется фигура в плоскости  $\sigma$ , всякая точка которой лежит с соответственной точкой данной фигуры на одной прямой, проходящей через  $S$  (проектирующая прямая или луч).

Вообще говоря, проекцией точки будет точка, проекцией прямой, не проходящей через центр проекции, будет прямая; точки, лежащие на одной прямой, и прямые, проходящие через одну точку, сохраняют эти свойства и в проекции. Однако, если проектирующий луч данной точки окажется параллельным плоскости проекции, то в проекции не получается никакой точки, и точно так же, если проектирующая плоскость данной прямой окажется параллельной плоскости проекции, то в проекции не получится никакой прямой. Если несколько прямых сходятся в точке, проектирующий луч которой параллелен плоскости проекции, то в проекции получатся прямые, параллельные между собою.

Это обстоятельство привело Дезарга (Désargues (1593—1661) к введению понятия бесконечно удаленных точек и прямых. Две параллельные прямые, а также плоскость и параллельная ей прямая считаются сходящимися в бесконечно удаленной точке. Две параллельные плоскости считаются сходящимися в бесконечно удаленной прямой. При таком соглашении проекцией точки всегда будет точка (возможно, бесконечно удаленная) и проекцией прямой всегда будет прямая (возможно, бесконечно удаленная). Впоследствии условились еще считать совокупность всех бесконечно удаленных точек за плоскость.

У Понселе (Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822) эта идея превратилась в плодотворный способ изучения плоских фигур, известный под названием метода проекций. Сущность его заключается в следующем. Пусть требуется доказать некоторое свойство плоской фигуры, сохраняющееся и в проекции, например, что некоторые точки этой фигуры лежат на одной прямой. Тогда стараются подобрать положение центра и плоскости проекции так, чтобы в проекции получалась более простая фигура, для которой доказательство требуемого свойства не представляет затруднений. Так как исходная фигура в свою очередь представляет собой проекцию новой фигуры, то тем самым требуемое свойство оказывается доказанным и для исходной фигуры.

Применение метода проекций предполагает знание таких свойств плоских фигур, которые сохраняются при замене фигуры ее проекцией. Понселе такие свойства назвал *проективными*. Эти свойства, к которым в дальнейшем прибавились другие, аналогичные им, и составляют в настоящее время предмет проективной геометрии.

Нижеследующие задачи служат для ознакомления с простейшими проективными свойствами и для упражнения в применении метода проекций. Попутно даются необходимые определения.

Плоскость проектируемой фигуры и плоскость проекции всегда предполагаются не проходящими через центр проекции.

1. Что представляет собой проекция прямолинейного отрезка? Обобщить понятие отрезка так, чтобы оно стало проективным.

2. Что представляет собой проекция плоской треугольной области? Обобщить понятие треугольной области проективно.

3. На сколько отрезков две точки разбивают прямую? На сколько треугольных областей три непересекающиеся прямые разбивают плоскость?

4. Точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ . Показать, что это свойство не проективно, т. е. что проекция  $C'$  точки  $C$  может не лежать между проекциями  $A'$  и  $B'$  точек  $A$  и  $B$ .

5. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $d$ . Показать, что это свойство не проективно, т. е. что проекции точек  $A, B$  могут не лежать по разные стороны от проекции прямой  $d$ .

6. Две прямые вращаются вокруг неподвижных точек на плоскости в одинаковом направлении. Показать, что это свойство не проективно, т. е., что проекции этих прямых могут вращаться в неодинаковых направлениях.

7. Говорят, что точки  $A, B$  разделяют точки  $C, D$ , если из двух отрезков, на которые точки  $A, B$  разбивают прямую, один заключает точку  $C$ , а другой — точку  $D$ . Это понятие очевидно проективно. Показать, что свойство точки лежать между двумя другими сводится к свойству деления, если в качестве четвертой точки привлечь бесконечно удаленную точку той же прямой. Показать, что свойство деления взаимно, т. е. если точки  $A, B$  разделяют точки  $C, D$ , то и точки  $C, D$  разделяют точки  $A, B$ .

8. Говорят, что прямые  $a, b$  разделяют точки  $C, D$ , если точки пересечения прямых  $a, b$  с прямой  $CD$  разделяют точки  $C, D$ . Это понятие, очевидно, проективно. Показать, что свойство двух точек лежать по разные стороны от прямой сводится к этому понятию, если в качестве второй прямой привлечь бесконечно удаленную прямую той же плоскости.

9. Две прямые вращаются вокруг двух неподвижных точек на плоскости, каждая в определенном направлении. Показать, что точки пересечения вращающихся прямых с неподвижной прямой, не проходящей через неподвижные точки, описывают эту прямую в одинаковых или противоположных направлениях, смотря по тому, который из двух отрезков, определяемых неподвижными точками, пересекает неподвижная прямая. Показать, что эта теорема сохраняет силу и в том случае, когда данные точки или прямые бесконечно удаленные, если проективно обобщить

понятие вращения прямой вокруг точки в определенном направлении и понятие движения точки по прямой в определенном направлении. Объяснить, почему одинаковость направлений вращения вокруг двух точек на плоскости не есть проективное свойство.

10. Показать, что проекция касательной к плоской кривой есть либо касательная к проекции кривой, либо ее асимптота, либо бесконечно удаленная прямая.

11. Принимая определение кривой 2-го порядка как сечения поверхности прямого или наклонного кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину, т. е. как проекции окружности, показать, что кривая 2-го порядка пересекает в конечных точках либо все образующие конической поверхности (эллипс), либо все, кроме одной (парабола), либо все, кроме двух (гипербола). Показать, что эллипс не содержит бесконечно удаленных точек, что парабола содержит одну бесконечно удаленную точку, причем касательная в этой точке есть бесконечно удаленная прямая, и что гипербола содержит две бесконечно удаленные точки, причем касательные в этих точках суть асимптоты гиперболы. Какие части окружности дают в проекции две ветви гиперболы? Как движется точка гиперболы, когда соответствующая точка окружности описывает эту окружность в определенном направлении?

12. Показать, что кривая 2-го порядка разбивает плоскость на две области, имеющие следующие свойства: из всякой точки одной области (ее называют внешней) можно провести к кривой две касательные; из всякой точки другой области (ее называют внутренней) нельзя провести к кривой ни одной касательной; отрезок, соединяющий точку внешней области с точкой внутренней области, всегда пересекает кривую в одной точке; один из отрезков, соединяющих две точки кривой, лежит во внутренней области, другой во внешней. Имеются ли бесконечно удаленные точки внутри эллипса или параболы? Имеются ли таковые внутри гиперболы? В которой из областей лежат асимптоты гиперболы, внешней или внутренней? В какой области лежит конечный отрезок, соединяющий две конечные точки эллипса или параболы? При каких условиях конечный отрезок, соединяющий две точки гиперболы, будет внешним, и при каких условиях он будет внутренним?

13. Точки  $A, B$  симметричны относительно точки  $C$ . Показать, что их проекции  $A', B'$  на прямую, не параллельную  $AB$ , делят отрезок, концами которого служат проекция  $C'$  точки  $C$  и проекция  $D'$  бесконечно удаленной точки  $D$  прямой  $AB$ , внутренним и внешним образом в одинаковом отношении.

14. Точки  $A, B$  называются гармонически сопряженными относительно точек  $C, D$ , если они делят отрезок  $CD$  внутренним и внешним образом в одинаковом отношении (когда точки  $C, D$  обе конечные), или если они симметричны относительно одной из точек  $C, D$  (когда вторая бесконечно удаленная). Показать, что свойство гармонической сопряженности проективно. Показать, что это свойство взаимно, т. е., если точки  $A, B$  гармонически сопряжены относительно точек  $C, D$ , то и точки  $C, D$  гармонически сопряжены относительно точек  $A, B$ .

15. Две пары прямых  $a, b$  и  $c, d$  одного и того же пучка прямых называются гармонически сопряженными между собой, если

всякая прямая той же плоскости, не проходящая через центр пучка, пересекает эти две пары прямых в двух парах точек, гармонически сопряженных между собой. Показать, что это определение не содержит противоречия. Каково взаимное положение прямых  $a, b, c$ , если прямая  $d$  бесконечно удаленная?

16. Фигура, состоящая из четырех прямых, из которых никакие три не проходят через одну точку, и шести точек пересечения этих прямых, называется полным четырехсторонником. Прямые называются сторонами, а точки — вершинами полного четырехсторонника. Две вершины, не лежащие на одной стороне, называются противоположными. Прямые, соединяющие противоположные вершины, называются диагоналями, а точки пересечения диагоналей — диагональными точками. Показать, что пара вершин и пара диагональных точек, лежащих на одной диагонали, гармонически сопряжены между собой.

17. Фигура, состоящая из четырех точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шести прямых, соединяющих эти точки, называется полным четырехугольником. Точки называются вершинами, а прямые сторонами. Две стороны, не проходящие через одну вершину, называются противоположными. Точки пересечения противоположных сторон называются диагональными точками, а прямые, соединяющие диагональные точки, диагоналями. Показать, что пара сторон и пара диагоналей, проходящих через одну диагональную точку, гармонически сопряжены между собой.

18. На прямой даны три конечные точки  $A, B, C$ . Построить с помощью одной линейки точку  $D$ , гармонически сопряженную с точкой  $C$  относительно точек  $A, B$ .

19. Даны три прямые  $a, b, c$ , проходящие через одну точку. Построить с помощью одной линейки прямую  $d$ , гармонически сопряженную с прямой  $c$  относительно прямых  $a, b$ .

20. Пусть  $K$  будет кривая 2-го порядка;  $P$  — точка той же плоскости;  $M, N$  — точки пересечения кривой с произвольной секущей, проведенной через точку  $P$ ;  $Q$  — точка, гармонически сопряженная с точкой  $P$  относительно точек  $M, N$ ;  $R$  — точка пересечения касательных к кривой  $K$  в точках  $M$  и  $N$ . Линия, всякая точка которой есть либо одна из точек  $Q$ , либо одна из точек  $R$ , либо то и другое, называется полярной точки  $P$  относительно кривой  $K$ , а точка  $P$  называется полюсом этой линии. Найти полярю, если  $K$  есть окружность, а точка  $P$  — бесконечно удаленная, или совпадает с центром  $K$ , или лежит на  $K$ .

21. Пользуясь тем, что стереографическая проекция окружности есть также окружность, спроектировать данную окружность так, чтобы ее проекция также была окружностью, и чтобы, сверх того, проекция данной прямой, лежащей в плоскости данной окружности и не имеющей с нею общих точек, была бесконечно удаленной прямой.

22. Показать, пользуясь результатами двух предыдущих задач, что полярю всякой точки относительно круга есть прямая, и распространить эту теорему на любую кривую 2-го порядка.

23. Доказать теорему: когда точка описывает прямую, ее полярю относительно данной кривой 2-го порядка вращается вокруг полюса этой

прямой, и обратно, когда прямая вращается вокруг точки, ее полюс описывает полярю этой точки.

24. Точка  $A$  называется сопряженной с точкой  $B$  относительно данной кривой 2-го порядка, если она лежит на поляре точки  $B$ ; точно так же прямая  $a$  называется сопряженной с прямой  $b$ , если она проходит через полюс этой прямой. Показать, что свойство сопряженности двух точек или прямых относительно кривой 2-го порядка есть взаимное свойство, т. е. если точка или прямая сопряжена с другой точкой или прямой, то и последняя сопряжена с первой.

25. Прямые  $a$ ,  $b$  суть поляры точек  $A$ ,  $B$  относительно данной кривой 2-го порядка. Показать, что точка пересечения прямых  $a$ ,  $b$  есть полюс прямой, соединяющей точки  $A$ ,  $B$ .

26. Доказать теорему: поляры вершин и полюсы сторон полного четырехугольника суть, соответственно, стороны и вершины полного четырехсторонника.

27. Показать, что поляры двух пар гармонически сопряженных точек представляют собой две пары гармонически сопряженных прямых.

28. Показать, что диагональ полного четырехугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, есть полярю точки пересечения двух других диагоналей.

29. По отношению к данной кривой 2-го порядка построить с помощью одной линейки: полярю данной точки, не лежащей на кривой; касательные к кривой из данной внешней точки; полюс данной прямой; касательную в данной точке кривой.

30. Показать: 1) что пары сопряженных точек, лежащих на прямой, пересекающей кривую 2-го порядка, гармонически сопряжены относительно точек пересечения; 2) что пары сопряженных прямых, проходящих через точку, внешнюю относительно кривой 2-го порядка, гармонически сопряжены относительно касательных из этой точки к кривой; 3) что точки кривой и касательные к ней суть самосопряженные точки и прямые.

31. Диаметрами кривой 2-го порядка называются поляры бесконечно удаленных точек, не лежащих на кривой, а центром — полюс бесконечно удаленной прямой, если она не касается кривой. Какие свойства центра и диаметров вытекают из данных выше определений полюса и поляры? Какие кривые имеют центр? Каково относительное положение центра и диаметров для этих кривых? Каково положение центра относительно кривой в случае эллипса и в случае гиперболы? Для каких кривых диаметры попарно сопряжены? Каково положение диаметров относительно кривой?

32. Обобщить проективно свойство угла, вписанного в круг и опирающегося на диаметр, и применить полученный результат к вписанному углу, опирающемуся на диаметр для любой кривой 2-го порядка.

33. Осями кривой 2-го порядка называются ее оси симметрии, т. е. диаметры, перпендикулярные к хордам, сопряженным с ними. Пользуясь свойством вписанного угла, опирающегося на диаметр, построить оси кривых 2-го порядка с помощью циркуля и линейки.

34. Доказать теорему Паскаля (Pascal): во всяком шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

35. Доказать теорему Бриансона (Brianchon): во всяком шести-

угольнике, описанном около кривой 2-го порядка, прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

36. Доказать теорему Дезарга: если прямые, соединяющие одноименные вершины двух треугольников  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , пересекаются в одной точке, то точки пересечения одноименных сторон лежат на одной прямой, и обратно.

## ГЛАВА II.

### ПРОЕКТИВНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ.

Основная мысль труда Понселе заключалась в систематическом применении преобразования фигур для вывода свойств одних фигур из свойств других, определенным образом соответствующих им. Мы уже познакомились с двумя видами таких соответствий между плоскими фигурами — перспективностью, при которой фигуры лежат в разных плоскостях и прямые, соединяющие соответствующие точки их, сходятся в одной точке (центре проекции), и полярностью, при которой фигуры лежат в одной плоскости и точкам одной фигуры соответствуют прямые другой, а прямым — точки (поляры и полюсы их относительно кривой 2-го порядка). Кроме того Понселе обобщил перспективное соответствие на случай плоских фигур, лежащих в одной плоскости, а также на случай пространственных фигур. Следует отметить, что последнее преобразование, названное им рельефной перспективой, он рассматривал уже не как способ упрощения фигур, а как способ изображения их, полезный при построении барельефов, сценических макетов и т. п.

Применение полярности для преобразования одних теорем в другие обнаружило существование в проективной геометрии особого закона, так называемого принципа двойственности, который вскоре после появления книги Понселе (1822) был сформулирован Жергоном во всей своей общности (Gergonne, *Annales des Mathématiques*, 1825—26).

В плоской проективной геометрии принцип двойственности состоит в том, что всякое положение остается верным при замене в нем слова „точка“ словом „прямая“, и наоборот, выражения „прямая проходит через точку“ выражением „точка лежит на прямой“, и наоборот, и соответственной замене других терминов, как например, слова „четырёхугольник“ словом „четырёхсторонник“, и наоборот. В проективной геометрии пространства подобным же образом можно менять местами слова „точка“ и „плоскость“, оставляя без изменения слово „прямая“. Двойственность проявляется уже в простейших положениях проективной геометрии, как например, „через две точки проходит одна и только одна прямая“ и „две плоскости проходят через одну и только одну прямую“. Именно это, а не полярное соответствие, Жергон признал за истинную причину проявления принципа двойственности и в более сложных положениях.

Теория преобразований также вскоре сделала значительный шаг вперед.

Мёбиус (Möbius, *Der barycentrische Calcul*, 1828) получил более общие преобразования с помощью нового метода. Подобно тому как равные фигуры можно определить как такие, соответствующие точки которых имеют

равные координаты относительно двух различных прямоугольных систем, Мёбиус определяет коллинеарные фигуры как такие, соответствующие точки которых имеют равные координаты относительно двух систем более общего характера. Частным случаем коллинеарности оказывается не только равенство, но и перспективность. Чтобы обобщить подобным же образом полярность, приходится ввести на плоскости координаты прямой, а в пространстве — координаты плоскости, по аналогии с координатами точки. После этого коррелятивность двух плоских фигур определяется как такое соответствие между точками одной фигуры и прямыми другой, при котором соответствующие элементы имеют равные координаты относительно двух координатных систем, и аналогично определяется коррелятивность двух пространственных фигур.

Указанными обобщениями отнюдь не ограничивается значение труда Мёбиуса. Некоторых других идей, выдвинутых этим сочинением, мы еще коснемся в дальнейшем.

Следующие задачи служат для ознакомления с обоими типами преобразований на основе идеи Мёбиуса с той разницей, что мы применяем несколько более общие координатные системы, имея в виду будущие приложения таковых.

Прежде чем перейти к задачам, введем некоторые термины, имеющие целью устранить неудобство, возникающее от того, что прямая и плоскость в силу принципа двойственности иногда рассматриваются не как совокупности точек, а как нечто неделимое, на подобие самих точек. Условимся называть: точку, прямую и плоскость — элементами; совокупность точек на прямой — рядом точек; совокупность прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну точку — пучком прямых; совокупность плоскостей, проходящих через одну прямую — пучком плоскостей; совокупность точек и прямых на плоскости — плоской системой; совокупность плоскостей и прямых, проходящих через точку, — связкой; совокупность точек, прямых и плоскостей в пространстве — пространственной системой. При этих обозначениях ясно например, что в плоском принципе двойственности прямой соответствует точка, а ряду точек — пучок прямых, и т. п. Указанные основные совокупности элементов классифицируются еще по числу измерений или, как принято выражаться в проективной геометрии, по ступеням. К первой ступени относятся ряд точек, пучок прямых и пучок плоскостей, ко второй — плоская система и связка, к третьей — пространственная система.

37. В ряде точек отношением переменной точки  $M$  к неподвижным точкам  $P, Q$  называется отношение расстояний точки  $M$  от точек  $P, Q$ ; при этом каждому расстоянию приписывается знак в зависимости от того, с какой стороны от точки  $P$  или  $Q$  находится точка  $M$ , по какому-нибудь определенному соглашению для каждой из точек  $P$  и  $Q$ . В пучке прямых отношением переменной прямой  $m$  к неподвижным прямым  $p, q$  называется отношение расстояний произвольной точки прямой  $m$  от прямых  $p, q$ , причем расстояниям точек, расположенных по разные стороны от прямой, приписываются противоположные знаки, по определенному соглашению для каждой из прямых  $p, q$ . Совершенно аналогично определяется отношение переменной плоскости  $\mu$



от неподвижных плоскостей  $\pi, \kappa$  в пучке плоскостей. Далее, во всех трех совокупностях 1-ой степени двойным отношением двух элементов к двум другим называется отношение простых отношений первых элементов ко вторым. Например двойное отношение точек  $M, N$  к точкам  $P, Q$  в ряде точек будет

$$(PQMN) = \frac{PM}{QM} : \frac{PN}{QN} = \frac{PM \cdot QN}{QM \cdot PN}.$$

Доказать теоремы:

1. Если прямые  $p, q, m, n$  пучка прямых пересечены прямой, не проходящей через центр пучка, соответственно в точках  $P, Q, M, N$ , то двойные отношения  $(pqmn)$   $(PQMN)$  равны.

2. Если плоскости  $\pi, \kappa, \mu, \nu$  пучка плоскостей пересечены прямой, не пересекающей ось пучка, в точках  $P, Q, M, N$ , то двойные отношения  $(\pi\kappa\mu\nu)$   $(PQMN)$  равны.

3. Если плоскости  $\pi, \kappa, \mu, \nu$  пучка плоскостей пересечены плоскостью, не проходящей через ось пучка, по прямым  $p, q, m, n$ , то двойные отношения  $(\pi\kappa\mu\nu)$   $(pqmn)$  равны.

4. Если две плоские фигуры расположены перспективно, то соответственные двойные отношения точек и прямых в этих фигурах равны между собой.

38. Во что обращается двойное отношение  $(PQMN)$ , когда одна из точек  $P, Q, M, N$  удаляется в бесконечность?

39. Дано значение  $\lambda$  двойного отношения четырех элементов совокупности 1-ой степени, взятых в определенном порядке. Определить значения двойного отношения тех же элементов, взятых во всевозможных порядках. Воспользоваться методом проекций для упрощения вычислений.

40. Доказать теорему: для того, чтобы две пары элементов совокупности 1-ой степени были гармонически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы перестановка элементов одной пары не влияла на величину двойного отношения обеих пар. Предполагается, что в каждой паре элементы различны между собой.

41. Вывести из предыдущей теоремы гармонические свойства полного четырехугольника или четырехсторонника.

42. Из теоремы о влиянии перестановок на значение двойного отношения вывести соотношение

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

между отрезками, соединяющими четыре произвольные точки прямой, и соотношение

$$\sin(ab) \sin(cd) + \sin(ac) \sin(db) + \sin(ad) \sin(bc) = 0.$$

Из последнего соотношения вывести тождество

$$\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0$$

и затем формулы сложения и вычитания для синусов и косинусов, считая формулы приведения известными.

43. Показать, что абсциссу точки на числовой прямой можно представить в виде двойного отношения

$$x = (OXME),$$

где  $O$  — начало абсцисс,  $X$  — бесконечно удаленная точка,  $E$  — точка, абсцисса которой принята за единицу, и  $M$  — точка, абсциссу которой мы определяем.

44. Двойное отношение

$$x = (OXME)$$

называется обобщенной абсциссой точки  $M$ , если точки  $O, X, E$  произвольные различные между собой точки прямой. Выразить двойное отношение  $(OXM_1M_2)$  через обобщенные абсциссы точек  $M_1, M_2$ . Выразить двойное отношение  $(M_1M_2M_3M_4)$  через обобщенные абсциссы точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .

45. Отношения

$$x_1 = \frac{m_1}{l_1} = \frac{A_1M}{A_1E}; \quad x_2 = \frac{m_2}{l_2} = \frac{A_2M}{A_2E},$$

где  $A_1, A_2, E$  — неподвижные точки прямой, различные между собой, и  $M$  — переменная точка, или числа, пропорциональные этим отношениям, называются однородными координатами точки  $M$  по отношению к основным точкам  $A_1, A_2$  и единичной точке  $E$ . Выразить обобщенную абсциссу точки  $M$

$$x = (A_1A_2ME)$$

через ее однородные координаты.

Выразить двойное отношение  $(MNPQ)$  через однородные координаты точек  $M, N, P, Q$ . Из теоремы о влиянии перестановок на двойное отношение вывести соотношение

$$\left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z_1 & t_1 \\ z_2 & t_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} t_1 & y_1 \\ t_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right| = 0.$$

между минорами матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{array} \right\|.$$

46. Показать, что однородные координаты произвольной точки прямой связаны соотношением

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} = 1,$$

где  $h_1$  — первая координата точки  $A_2$  и  $h_2$  — вторая координата точки  $A_1$ .

47. Однородные координаты на прямой можно обобщить проективно, заменяя бесконечно удаленную точку прямой конечной. Во что обратится тогда соотношение предыдущей задачи?

48. Декартову систему координат на плоскости можно задать началом  $O$ , бесконечно удаленными точками осей  $X, Y$  и точкой  $E$ , координаты которой равны единице. Представить координаты произвольной

точки  $M$  в виде двойных отношений точек, которые можно построить с помощью точек  $O, X, Y, M, E$ . Обобщить декартову систему проективно, заменяя бесконечно удаленную прямую конечной. Представить обобщенные координаты в виде двойных отношений прямых.

49. Прямая, не проходящая через вершины координатного треугольника  $OXY$ , пересекает стороны  $OX, OY$  в точках  $A(a, 0), B(0, b)$ . Вывести уравнение прямой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

50. Применяя к обобщенным координатам точки на плоскости принцип двойственности, построить координаты прямой на плоскости.

51. Показать, что коэффициенты  $u, v$  в уравнениях прямой вида

$$ux + vy = 1 \quad \text{или} \quad ux + vy + 1 = 0$$

относительно обобщенных координат точки можно рассматривать как обобщенные координаты этой прямой.

52. Пусть будет  $A_1A_2A_3$  треугольник,  $E$  — точка той же плоскости, не лежащая на его сторонах,  $M$  — переменная точка плоскости. Отношения

$$x_1 = \frac{p_1}{l_1}; \quad x_2 = \frac{p_2}{l_2}; \quad x_3 = \frac{p_3}{l_3},$$

где  $p_1, p_2, p_3$  и  $l_1, l_2, l_3$  суть соответственно расстояния точек  $M$  и  $E$  соответственно от сторон  $A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2$ , или числа, пропорциональные этим отношениям, называются однородными координатами точки  $M$ . Выразить неоднородные координаты точки  $M$  по отношению к тому же треугольнику и единичной точке через однородные. Ввести по аналогии однородные координаты прямой. Переписать второе уравнение предыдущей задачи в однородных координатах точки и прямой.

53. Показать, что однородные координаты произвольной точки на плоскости связаны соотношением

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1,$$

где  $h_1, h_2, h_3$  — не равные нулю координаты точек  $A_1, A_2, A_3$ .

54. Однородные координаты на плоскости можно обобщить проективно, заменяя бесконечно удаленную прямую плоскости конечной. Во что обратится тогда соотношение предыдущей задачи?

55. Обобщить проективно декартову систему координат в пространстве и построить с помощью принципа двойственности аналогичную систему координат плоскости.

56. Вывести уравнение плоскости

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

в обобщенных координатах точки, применяя соотношение задачи 54 к треугольнику, по которому плоскость пересекает оси  $OX, OY, OZ$ , и прямой, по которой она пересекает плоскость  $XYZ$ .

57. Показать, что коэффициенты  $u, v, w$  в уравнении плоскости вида

$$ux + vy + wz = 1 \quad \text{или} \quad ux + vy + wz + 1 = 0$$

относительно обобщенных координат точки можно рассматривать как обобщенные координаты этой плоскости.

58. По аналогии с координатами на плоскости ввести однородные координаты точки и плоскости в пространстве. Переписать второе уравнение предыдущей задачи в однородных координатах точки и плоскости. Написать соотношение между однородными координатами произвольной точки.

59. По аналогии с предыдущими случаями ввести обобщенные координаты: прямой в пучке прямых; плоскости в пучке плоскостей; прямой и плоскости в связке.

60. Проективностью между двумя совокупностями 1-ой степени называется такое соответствие между ними, при котором соответствующими считаются те элементы, которые имеют равные неоднородные (или пропорциональные однородные) координаты относительно систем отсчета, произвольно, но определенно выбранных в каждой совокупности.

Показать, что в проективных совокупностях 1-ой степени двойные отношения любых соответствующих элементов равны.

Показать, что существует одна и только одна проективность, при которой данным трем различным элементам одной совокупности соответствуют данные три различных элемента другой.

61. Если две разнородные совокупности 1-ой степени (ряд точек и пучок прямых или плоскостей, пучок прямых и пучек плоскостей) расположены так, что каждый элемент одной инцидентен с одним и только одним элементом другой, и мы условимся считать инцидентные элементы соответствующими, то такое соответствие называется перспективностью. Если две однородные совокупности 1-ой степени приведены в перспективное соответствие с третьей совокупностью 1-ой степени (например два ряда точек с пучком прямых), и мы условимся считать соответствующими любые два элемента первых двух совокупностей, которые соответствуют одному и тому же элементу третьей, то такое соответствие также называется перспективностью.

Из задачи 37 ясно, что всякая перспективность есть проективность. Доказать, что проективность есть перспективность, если требуемое для этого относительное положение имеет место для трех пар соответствующих элементов и в частности в следующих случаях:

- 1) между двумя рядами точек на скрещивающихся прямых — всегда;
- 2) между двумя рядами точек на пересекающихся прямых — если общая точка их сама себе соответствует;
- 3) между двумя пучками плоскостей, оси которых скрещиваются, — всегда;
- 4) между двумя пучками плоскостей, оси которых пересекаются, — если общая плоскость их сама себе соответствует;
- 5) между двумя пучками прямых в одной плоскости и с разными центрами или с одним центром и в разных плоскостях — если их общая прямая сама себе соответствует.

62. Между точками двух плоскостей установлено соответствие, при

котором соответствующие точки имеют равные неоднородные (или пропорциональные однородные) координаты относительно некоторых систем отсчета. Показать, что точкам одной плоскости, лежащим на одной прямой, соответствуют точки другой плоскости, также лежащие на одной прямой. Показать, что соответствующие ряды точек и пучки прямых обеих плоскостей проективны. Показать, что существует одно и только одно соответствие этого рода между двумя плоскостями, в котором данным четырем точкам одной плоскости, не лежащим по три на одной прямой, соответствуют данные четыре точки другой плоскости, не лежащие по три на одной прямой. Показать, что то же самое соответствие можно определить двойственным путем, исходя не из точек, а из прямых.

63. По аналогии с предыдущей задачей определить такое соответствие между двумя плоскими системами, при котором точкам одной плоскости соответствуют прямые другой, а прямым — точки.

64. Рассмотренные в двух предыдущих задачах соответствия между плоскими системами называются проективными, и в частности первое — коллинеарным, а второе — коррелятивным. По аналогии определить и рассмотреть проективность, коллинеарность и коррелятивность между двумя связками, а также два вида проективности между плоскостью и связкой.

65. Связка называется перспективной с плоской системой, если центр связки не принадлежит плоской системе, и прямые связки проходят через соответствующие точки плоской системы. Две связки называются перспективными, если они перспективны одной и той же плоской системе, и две плоские системы называются перспективными, если они перспективны одной и той же связке. Показать, что перспективность между двумя совокупностями 2-ой ступени есть проективность. Показать, что коллинеарность между двумя плоскими системами в разных плоскостях есть перспективность, если общие точки плоских систем соответствуют сами себе, и что коллинеарность между двумя связками с разными центрами есть перспективность, если общие плоскости связок соответствуют сами себе.

66. По аналогии с предыдущим определить и рассмотреть два вида проективных соответствий пространственной системы с самой собой, т. е. двух пространственных систем, совпадающих в целом, но необязательно соответствующими элементами.

### ГЛАВА III.

## ПРОЕКТИВНОСТЬ МЕЖДУ СОВОКУПНОСТЯМИ 1-ой СТУПЕНИ.

Следующие задачи служат для более детального ознакомления с проективностью между совокупностями только 1-ой ступени.

67. Два ряда точек на пересекающихся прямых проективны, но не перспективны. Показать, что пучки прямых, проектирующих первый ряд из какой-нибудь точки второго, и второй ряд из соответствующей точки первого, перспективны.

68. Проективность между двумя неперспективными рядами точек

на пересекающихся прямых задана тремя парами соответствующих точек. По данной четвертой точке одного ряда построить соответствующую точку другого ряда.

69. Показать, что положение прямой, на которой расположен ряд точек, перспективный с обоими пучками предыдущих задач, не зависит от выбора пары соответствующих точек заданных рядов, принимаемых за центры этих пучков. Иными словами, показать, что прямая, соединяющая произвольные точки этих рядов, не соответствующие друг другу, и прямая, соединяющая точки рядов, соответствующие первым, пересекаются на вполне определенной прямой (так называемой оси коллинеации).

70. Вывести из предыдущей задачи, что в шестиугольнике, последовательные вершины которого попеременно расположены на двух пересекающихся прямых, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой.

71. Руководствуясь принципом двойственности, получить для пучков прямых результаты, аналогичные указанным в четырех предыдущих задачах для рядов точек.

72. Дано проективное соответствие между элементами совокупности 1-ой ступени, т. е. между двумя совокупностями 1-ой ступени, совпадающими в целом, но необязательно соответствующими элементами. Как известно, обобщенные координаты соответствующих элементов по отношению к соответствующим системам отсчета равны между собой. Найти зависимость между обобщенными координатами соответствующих элементов по отношению к одной из этих систем отсчета, зная обобщенные координаты элементов, образующих вторую систему отсчета, по отношению к первой. Найти обобщенные координаты двойных элементов проективного соответствия, т. е. тех элементов, которые сами себе соответствуют. Найти условия того, чтобы двойные элементы были вещественными различными (гиперболическая проективность), вещественными совпадающими (параболическая проективность) и мнимыми сопряженными (эллиптическая проективность).

73. Чтобы придать геометрический смысл мнимым обобщенным координатам, принимаются следующие соглашения:

1. Считается, что мнимой обобщенной координате в совокупности 1-ой ступени соответствует мнимый элемент совокупности.

2. При изменении системы отсчета тому же элементу приписывается координата, выраженная через первоначальную по той же формуле, что и для вещественных элементов.

3. Мнимые элементы двух проективных совокупностей 1-ой ступени считаются соответствующими, если их координаты по отношению к каким-нибудь двум соответствующим системам равны.

4. Мнимые элементы двух разнородных совокупностей 1-ой ступени считаются инцидентными, если они соответствуют друг другу в перспективности между этими совокупностями.

Развитие теории мнимых элементов можно продолжать тем же путем. Ограничиваясь уже введенными соглашениями, показать, что инцидентность мнимых элементов друг с другом или с вещественными элементами и соответствие мнимых элементов в проективностях не зависят от вы-

бора систем отсчета, с помощью которых эти элементы определены. В частности показать, что проективность между элементами совокупности 1-ой ступени имеет вполне определенные двойные элементы также и в том случае, когда соответствующее квадратное уравнение имеет мнимые корни.

74. Дана проективность между двумя рядами точек  $u$  и  $u'$ , причем бесконечно удаленные точки этих рядов не соответствуют друг другу. Пусть будет:  $O$  — точка в ряде  $u$ , соответствующая бесконечно удаленной точке  $X'$  ряда  $u'$ ;  $O'$  — точка в ряде  $u'$ , соответствующая бесконечно удаленной точке  $X$  ряда  $u$ ;  $M$ ,  $M'$  — любые две точки соответственно в рядах  $u$ ,  $u'$ , соответствующие друг другу. Показать, что абсциссы  $x$ ,  $x'$  точек  $M$ ,  $M'$ , отсчитанные от начал  $O$ ,  $O'$ , обратно пропорциональны:

$$OM \cdot O'M' = k = \pm c^2.$$

Предполагая, что ряды  $u$ ,  $u'$  лежат на одной прямой, и что обе абсциссы отсчитываются в одном и том же направлении, построить двойные точки проективности по данным точкам  $O$ ,  $O'$  и отрезку  $c$ , и исследовать решение в зависимости от значений постоянной  $k$  и расстояния  $2a$  между точками  $O$ ,  $O'$ .

75. Дана проективность между двумя рядами точек  $u$ ,  $u'$ , в которой бесконечно удаленные точки рядов соответствуют друг другу. Пусть будут  $O$ ,  $O'$  две неподвижные соответствующие точки и  $M$ ,  $M'$  две переменные соответствующие точки в рядах  $u$ ,  $u'$ . Показать, что абсциссы точек  $M$ ,  $M'$ , отсчитанные от начал  $O$ ,  $O'$ , прямо пропорциональны:

$$O'M' : OM = k = \pm m' : m.$$

Предполагая, что ряды  $u$ ,  $u'$  лежат на одной прямой, и что обе абсциссы отсчитываются в одном и том же направлении, построить двойные точки проективности по данным точкам  $O$ ,  $O'$  и отрезкам  $m$ ,  $m'$ , и исследовать решение в зависимости от значения постоянной  $k$ . Показать, что при  $k \neq 1$  зависимость между абсциссами можно представить в виде

$$OM' : OM = k.$$

76. Дана проективность между элементами совокупности 1-ой ступени, т. е. между двумя совокупностями, совпадающими в целом, но обязательно соответствующими элементами. В зависимости от того, к которой из двух вспомогательных совокупностей мы причисляем некоторый элемент данной совокупности, ему будут вообще говоря соответствовать два различных элемента данной совокупности. Если однако данному элементу соответствует один и тот же элемент к какой бы совокупности его ни причислять, то говорят, что эти элементы соответствуют друг другу вдвойне. Если же все соответствующие элементы соответствуют друг другу вдвойне, то данная проективность называется инволюторной проективностью или инволюцией. Доказать следующие свойства инволюции:

Если в проективности между элементами совокупности 1-ой ступени два различных элемента соответствуют друг другу вдвойне, то соответ-

ствие будет двойным для любой пары соответствующих элементов, т. е. проективность будет инволюцией.

Инволюция в совокупности 1-ой степени вполне определяется двумя парами соответствующих элементов, не имеющими между собой общих элементов.

Двойные элементы инволюции гармонически сопряжены относительно всякой пары соответствующих элементов и всегда различны между собой.

77. Показать, что зависимость между абсциссами точек, соответствующих друг другу в инволюции на прямой, можно представить в одном из двух видов

$$OM \cdot OM' = \pm c^2, \quad OM + OM' = 0.$$

78. Показать, что зависимость между обобщенными координатами элементов, соответствующих друг другу в инволюции между элементами совокупности 1-ой степени, можно представить в любом из двух видов

$$xx' = \pm c^2; \quad x + x' = 0.$$

79. На прямой задана двойная точка  $A$  и две пары соответствующих точек  $M, M'$  и  $N, N'$  некоторой проективности. Построить вторую двойную точку  $B$ , проектируя один из совпадающих в целом проективных рядов на прямую, пересекающую данную в двойной точке  $A$ .

80. На чертеже, служащем для решения предыдущей задачи, имеются в случае гиперболической проективности две прямые, пересекающие данную соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Меняя ролями эти прямые, показать, что точка  $A$  есть вторая двойная точка проективности, заданной двойной точкой  $B$  и двумя парами соответствующих точек  $M, N$  и  $M', N'$ .

81. Вывести из предыдущей задачи, что для любой пары  $M, M'$  соответствующих точек гиперболической или параболической проективности на прямой с двойными точками  $A, B$  двойное отношение  $(ABMM')$  имеет одно и то же значение. Проверить этот результат с помощью метода проекций.

82. Показать аналитически, что результат предыдущей задачи имеет место независимо от характера двойных точек проективности.

83. Показать, что результаты двух предыдущих задач имеют место и для проективностей в пучке прямых или в пучке плоскостей.

84. Двойное отношение пары соответствующих элементов к паре двойных элементов в проективности между элементами совокупности 1-ой степени носит название инварианта. Произвести классификацию таких проективностей по значениям инварианта, различая при этом:

1) проективности инволюторные и не инволюторные;  
2) проективности гиперболические, параболические и эллиптические;

3) проективности прямые и обратные, т. е. такие, в которых соответствующие элементы, одновременно описывая совокупность, движутся в одинаковых направлениях, и такие, в которых направления движения соответствующих элементов противоположны.

85. Доказать теорему: если  $A, B$  — двойные элементы, а  $M, M'$  и



$N, N'$  — две пары соответствующих элементов не параболической проективности в совокупности 1-ой ступени, то  $AB, MN', M'N$  суть три пары некоторой инволюции в этой совокупности.

86. Из сопоставления предыдущего результата и построения задачи 79 вывести теорему Дезарга: всякая прямая пересекает три пары противоположных сторон полного четырехугольника в трех парах инволюции на этой прямой. Вывести двойственную теорему о полном четырехстороннике. С помощью предыдущей теоремы обобщить теорему задачи 85 на параболические проективности.

87. По двум парам инволюции на прямой построить точку, соответствующую в этой инволюции любой заданной точке.

88. По двойной точке гиперболической проективности на прямой и двум парам соответствующих точек построить точку, соответствующую любой заданной точке.

89. По двойной точке параболической проективности на прямой и одной паре соответствующих точек построить точку, соответствующую любой заданной точке.

90. Соответствие между двумя рядами точек называется **подобием**, если соответствующие точки одновременно описывают в них пропорциональные отрезки, и **равенством**, если эти отрезки равны. Найти условие, чтобы проективность между двумя рядами точек была подобием. Найти условие, чтобы проективность между двумя рядами точек на одной прямой была равенством, и показать, что обратное равенство есть симметрия относительно точки.

91. Соответствие между двумя пучками прямых называется **равенством**, если соответствующие прямые одновременно описывают в них равные углы. Показать, что равенство пучков есть проективность. Показать, что обратное равенство между двумя пучками прямых, совпадающими в целом, есть симметрия, а прямое — имеет мнимые двойные прямые с угловыми коэффициентами  $\pm i$  (изотропные прямые).

92. Поскольку двойные элементы прямого равенства в пучке всегда известны, оно вполне определяется инвариантом. С другой стороны, это равенство вполне определяется углом между соответствующими прямыми. Ясно поэтому, что между углом и инвариантом должна иметь место зависимость, которая и была указана Лагерром (Laguerre, 1853). Найти эту зависимость.

93. Показать, что в каждой данной плоскости изотропные прямые всех пучков проходят через две вполне определенные бесконечно удаленные точки (циклические точки).

94. Показать, что изотропные прямые, проходящие через точку, изображающую на комплексной плоскости комплексное число  $a$ , пересекают вещественную ось в точках, абсциссы которых равны  $a, \bar{a}$ .

95. Построить точки, изображающие на комплексной плоскости двойные точки эллиптической проективности на вещественной оси, по точкам  $O, O'$ , соответствующим бесконечно удаленной точке, и по отрезку  $c$  в уравнении  $OM \cdot O'M' = -c^2$  для соответствующих точек  $M, M'$ .

## ГЛАВА IV.

## ОБРАЗОВАНИЕ КРИВЫХ, КОНУСОВ И ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ 2-го ПОРЯДКА ПО ШТЕЙНЕРУ.

В то время как Понселе применял проективные соответствия только как метод преобразования фигур, Штейнер (Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, 1832) впервые применил эти соответствия для образования кривых, конусов и линейчатых поверхностей 2-го порядка и таким образом превратил проективные соответствия в основу проективной геометрии.

Нижеследующие задачи служат для ознакомления с методом Штейнера и результатами его применения.

**96.** Рядом точек 2-го порядка называется совокупность точек пересечения соответствующих прямых двух неконцентрических и неперспективных проективных пучков прямых в одной плоскости. Касательной прямой к ряду точек 2-го порядка в данной точке ряда называется прямая той же плоскости, проходящая через ту же точку, но не имеющая с рядом других общих точек.

Пучком прямых 2-го порядка называется совокупность прямых, соединяющих соответственные точки двух нележащих на одной прямой и неперспективных проективных рядов точек в одной плоскости. Характеристической точкой данной прямой ряда прямых 2-го порядка называется точка, лежащая на этой прямой, но не лежащая ни на какой другой прямой ряда.

Решить следующие задачи:

1. Показать, что центры проективных пучков прямых, определяющих ряд точек 2-го порядка, сами принадлежат этому ряду, и что касательной прямой в центре каждого из этих пучков служит прямая пучка, соответствующая прямой другого пучка, соединяющей центры обоих пучков.

2. Даны центры определяющих пучков, касательные в них, и еще одна точка ряда; построить произвольное количество точек ряда.

3. С помощью предыдущего построения показать, что пучок, описываемый прямой, соединяющей произвольную неподвижную точку ряда с движущейся точкой того же ряда, проективен пучкам, описываемым прямыми, соединяющими центры определяющих пучков с той же движущейся точкой.

Показать, что прямые, соединяющие две произвольные неподвижные точки ряда с движущейся точкой, описывают проективные пучки прямых, т. е., что за центры определяющих пучков ряда можно принять любые две его точки.

4. Исходя из того же соображения, показать, что касательная в произвольной точке ряда и прямая, соединяющая ее с точкой пересечения касательных в двух других точках ряда, пересекают прямую, соединяющую эти две точки, в точках, гармонически сопряженных относительно этих двух точек.

5. По трем точкам ряда и касательным в двух из них построить

касательную в третьей точке, не пользуясь при этом никакими произвольными точками или линиями.

6. Показать, что точки пересечения сторон треугольника, вписанного в ряд, с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

7. С помощью предыдущей теоремы показать, что точки пересечения касательной в неподвижной точке ряда с касательной в движущейся точке и с прямой, соединяющей движущуюся точку с другой неподвижной точкой ряда, описывают на касательной в неподвижной точке проективные ряды точек. Найти инвариант проективности.

8. Вывести из предыдущей теоремы; что касательные к ряду точек 2-го порядка образуют пучок прямых 2-го порядка.

Провести рассуждения, двойственные предыдущим:

I'. Показать, что прямые, несущие на себе проективные ряды точек, определяющие пучок прямых 2-го порядка, сами принадлежат этому пучку, и что характеристической точкой носительницы каждого ряда служит точка ряда, соответствующая той точке другого ряда, в которой пересекаются носительницы обоих рядов.

И т. д., до 8'.

97. Определим кривую 2-го порядка как линию, несущую ряд точек 2-го порядка (Штейнер). По предыдущему, кривую 2-го порядка можно также определить как линию, касательную к пучку прямых 2-го порядка. Показать, что эти определения равносильны принятому ранее определению кривой 2-го порядка как проекции круга.

98. Четыре точки кривой 2-го порядка приняты за вершины полного четырехугольника, а касательные в этих точках — за стороны полного четырехсторонника. С помощью построения 2 задачи 96 показать, что диагональные треугольники четырехугольника и четырехсторонника совпадают.

99. Дана кривая 2-го порядка, точка, не лежащая на ней, и секущая, проходящая через эту точку. С помощью предыдущей теоремы показать, что точка, гармонически сопряженная с данной точкой относительно точек пересечения кривой и секущей, и точка пересечения касательных к кривой в тех же точках лежат на прямой, положение которой вполне определяется данной кривой и данной точкой и не зависит от выбора секущей (поляра точки относительно кривой); если данная точка внешняя, то точки касания касательных, проходящих через нее, также лежат на поляре.

100. Доказать двойственную теорему: дана кривая 2-го порядка, прямая, не касательная к ней, и внешняя точка, лежащая на этой прямой; тогда прямая, гармонически сопряженная с данной прямой относительно касательных, проходящих через данную внешнюю точку, и прямая, соединяющая точки касания этих касательных, проходят через точку, положение которой вполне определяется данной кривой и данной прямой и не зависит от выбора внешней точки (полюс прямой относительно кривой); если данная прямая — секущая, то касательные в точках пересечения ее с кривой также проходят через полюс.

101. Показать, что определение поляры применимо и к тому случаю, когда данная точка лежит на кривой, а определение полюса применимо

и к тому случаю, когда данная прямая касательна к кривой, и что полярна точки кривой есть касательная в этой точке, а полюс касательной есть точка касания.

102. Треугольник изменяется так, что стороны его вращаются вокруг трех неподвижных точек, не лежащих на одной прямой, а две вершины скользят по неподвижным прямым. Найти геометрическое место третьей вершины. Во что обращается это геометрическое место, если три неподвижные точки лежат на одной прямой?

103. Треугольник изменяется так, что вершины его скользят по трем неподвижным прямым, не пересекающимся в одной точке, а две стороны вращаются вокруг неподвижных точек. Найти огибающую третьей стороны. Во что обращается эта огибающая, если три неподвижные прямые пересекаются в одной точке?

104. Заменить в задаче 102 вращение одной из сторон вокруг неподвижной точки качением по неподвижной кривой 2-го порядка, касательной к неподвижным прямым, а в задаче 103 скольжение одной из вершин по неподвижной прямой — скольжением по неподвижной кривой 2-го порядка, проходящей через неподвижные точки.

105. Два угла, постоянных по величине, вращаются вокруг своих вершин так, что точка пересечения двух из их сторон описывает прямую. Какую линию описывает точка пересечения двух других сторон?

106. Две прямые вращаются вокруг неподвижных точек с одинаковой угловой скоростью в одинаковых или противоположных направлениях. Какую линию описывает в каждом случае точка пересечения прямых?

107. Основание треугольника неподвижно, а вершина описывает прямую. Какую линию описывает точка пересечения высот?

108. Отрезок постоянной длины скользит по неподвижной прямой. Какую линию описывает точка пересечения прямых, соединяющих его концы с двумя неподвижными точками? Применить результат к построению гиперболы по асимптоте и трем точкам.

109. По асимптотам и одной точке гиперболы построить произвольное число точек.

110. По диаметру и касательной параболы, проходящим через одну точку ее, и еще по одной ее точке построить произвольное число точек.

111. Показать, что касательная к гиперболе отсекает от угла между асимптотами треугольник постоянной площади.

112. Показать, что отрезки между точками касания двух параллельных касательных к эллипсу или гиперболе и точками пересечения этих касательных с движущейся касательной обратно пропорциональны.

113. Показать, что подвижная касательная к параболе делит отрезки двух неподвижных касательных от точек касания до точки пересечения в обратных отношениях.

114. Показать, что отрезок касательной к гиперболе между асимптотами делится точкой касания пополам.

115. Показать, что касательная к параболе и произвольная прямая не диаметрального направления, проходящая через точку касания, пере-

секают диаметр, сопряженный с этой прямой, в точках, симметричных относительно точки пересечения диаметра с параболой.

116. По асимптотам и точке гиперболы построить касательную в этой точке.

117. По диаметру и касательной, проходящим через одну точку параболы, построить касательную в произвольной точке.

118. С помощью построения 2 задачи 96 доказать теоремы Штаудта (Staudt).

Прямая, сопряженная с одной из сторон треугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, пересекает две другие стороны в сопряженных точках; и обратно, прямая, пересекающая две стороны треугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, в сопряженных точках, сопряжена с третьей стороной. Доказать также двойственную теорему.

119. Показать, что на всякой прямой, не касательной к кривой 2-го порядка, пары сопряженных точек образуют инволюцию; вывести отсюда, что когда точка описывает ряд точек на прямой, не касательной к кривой 2-го порядка, то поляра этой точки описывает проективный этому ряду пучок прямых вокруг полюса этой прямой; показать, что эта теорема верна и в том случае, когда данная прямая касательна к кривой 2-го порядка; вывести двойственные теоремы.

120. Двойные точки инволюции сопряженных точек на прямой, не касательной к кривой 2-го порядка, суть очевидно точки пересечения этой прямой с кривой, если эти двойные точки вещественны. Показать, что это верно и в том случае, когда двойные точки мнимы, понимая под мнимой точкой кривой 2-го порядка точку пересечения соответствующих мнимых прямых двух проективных пучков прямых, определяющих эту кривую. Показать, что определяющие пучки можно выбирать произвольно, как и в случае вещественной точки. Доказать также двойственную теорему.

121. Показать, что эллипс пересекает бесконечно удаленную прямую в двух мнимых точках.

122. Показать, что круг пересекает бесконечно удаленную прямую в циклических точках, и обратно, что кривая 2-го порядка, пересекающая бесконечно удаленную прямую в циклических точках, есть круг.

123. В курсах аналитической геометрии доказывается, что движущаяся точка  $M$ , расстояния которой от неподвижной точки  $F$  и неподвижной прямой  $d$  сохраняют постоянное отношение, описывает кривую 2-го порядка  $K$ ; доказать то же самое на основе определения Штейнера кривых 2-го порядка, пользуясь следующей схемой рассуждений:

1. Показать, что кривая  $K$  симметрична относительно перпендикуляра  $FQ$ , опущенного из точки  $F$  на прямую  $d$ .

2. Предполагая отношение  $e$  расстояний  $MF$ ,  $MP$  точки  $M$  от точки  $F$  и от прямой  $d$  не равным единице, найти точки пересечения  $A$ ,  $B$  кривой  $K$  с прямой  $FQ$ , и показать, что точка  $F$  лежит на отрезке  $AB$  при  $e < 1$  и вне отрезка  $AB$  при  $e > 1$ , а точка  $Q$  — наоборот.

3. Показать, что прямые, соединяющие точку  $F$  и точки пересечения  $A'$ ,  $B'$  прямой  $d$  с прямыми  $MA$ ,  $MB$ , суть биссектрисы углов между прямыми  $AB$  и  $FM$ .

4. Показать, что кривая  $K$  есть кривая 2-го порядка, а именно, эллипс при  $e < 1$ , гипербола при  $e > 1$ .
5. Показать, что при  $e = 1$  кривая  $K$  есть парабола.
124. Точка  $F$  предыдущей задачи называется фокусом кривой  $K$ , а прямая  $d$  — директрисой. Показать, что директриса  $d$  есть поляра фокуса  $F$ , прямая  $FB'$  — поляра точки  $A'$  и прямая  $FA'$  — поляра точки  $B'$ .
125. Показать, что касательные к кривой 2-го порядка из фокуса суть изотропные прямые, и обратно, такая точка, что касательные из нее к кривой 2-го порядка суть изотропные прямые, есть фокус (Plücker).
126. Показать, что отрезок движущейся касательной к кривой 2-го порядка, заключенный между двумя неподвижными касательными, виден из фокуса под постоянным углом; показать, что этот угол прямой, если неподвижные касательные проведены в концах оси кривой, проходящей через фокус; вывести отсюда построение фокусов.
127. Показать, что угол между прямыми, соединяющими фокус с двумя точками кривой, делится пополам прямой, соединяющей тот же фокус с точкой пересечения касательных в этих двух точках.
128. Показать, что касательная к эллипсу или гиперболе делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания с фокусами; видоизменить эту теорему для случая параболы.
129. Показать, что для эллипса сумма расстояний от фокусов есть величина постоянная.
130. Показать, что существует одна и только одна кривая 2-го порядка, проходящая через пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, или касательная к пяти прямым, из которых никакие три не проходят через одну точку.
131. Даны пять точек кривой 2-го порядка. Принимая две из этих точек за центры проективных пучков, определяющих кривую, и пересекая каждый пучок одной из прямых, соединяющих две из остальных точек с третьей, показать, что в сечении получатся два перспективных ряда точек, и воспользоваться этим для построения второй точки пересечения кривой с произвольной прямой одного из пучков.
132. Вывести из предыдущего построения теорему Паскаля и аналогичным путем вывести теорему Брианшона.
133. Показать, что теорема Паскаля не теряет силы, когда одна, две или три различные пары соседних вершин состоят из совпадающих точек, если за сторону, соединяющую две вершины, сливающиеся в одну, считать касательную в этой вершине, и точно так же, что теорема Брианшона не теряет силы, когда одна, две или три различные пары сторон состоят из совпадающих прямых, если за точку пересечения двух сторон, сливающихся в одну, считать точку касания этой стороны.
134. С помощью теорем Паскаля и Брианшона построить произвольное число точек и касательных кривой 2-го порядка по следующим данным:
1. По пяти точкам или по пяти касательным.
  2. По четырем точкам и касательной в одной из них или по четырем касательным и точке касания одной из них.
  3. По трем точкам и касательным в двух из них или по трем касательным и точкам касания двух из них.

**135.** Доказать теорему Дезарга: всякая прямая, не проходящая через вершины четырехугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, пересекает кривую и пары противоположных сторон вписанного четырехугольника в парах точек одной и той же инволюции.

Доказать также двойственную теорему.

**136.** С помощью теоремы Дезарга доказать следующие теоремы:

1. Точка пересечения высот треугольника, вписанного в равнобочную гиперболу, лежит на той же гиперболе.

2. Биссектрисы углов между парами противоположных сторон полного четырехугольника, вписанного в круг, параллельны.

**137.** Рядом прямых 2-го порядка называется совокупность линий пересечения соответствующих плоскостей двух неперспективных и несоосных проективных пучков плоскостей в одной связке. Касательной плоскостью к ряду прямых 2-го порядка вдоль данной прямой называется плоскость, проходящая через эту прямую, но не имеющая с рядом других общих прямых.

Пучком плоскостей 2-го порядка называется совокупность плоскостей, соединяющих соответствующие прямые двух неперспективных и нележащих в одной плоскости пучков прямых в одной связке. Характеристической прямой данной плоскости пучка плоскостей 2-го порядка называется прямая связки, лежащая на этой плоскости, но не лежащая ни на какой другой плоскости пучка.

Доказать следующие теоремы:

1. Плоскость, не проходящая через центр связки, пересекает всякий ряд прямых 2-го порядка этой связки в ряде точек 2-го порядка и всякий пучок плоскостей 2-го порядка этой связки по пучку прямых 2-го порядка; и обратно, всякий ряд точек 2-го порядка проектируется из точки, не лежащей в его плоскости, рядом прямых 2-го порядка, и всякий пучок прямых 2-го порядка проектируется из точки, не лежащей в его плоскости, пучком плоскостей 2-го порядка.

2. За оси пучков плоскостей, определяющих ряд прямых 2-го порядка, можно принять любые две прямые ряда, и аналогично для пучка плоскостей 2-го порядка.

3. Касательные плоскости ряда прямых 2-го порядка образуют пучок плоскостей 2-го порядка, и аналогично, характеристические прямые пучка плоскостей 2-го порядка образуют ряд прямых 2-го порядка.

**138.** Совокупность точек, принадлежащих прямой ряда прямых 2-го порядка, называется конической поверхностью или конусом 2-го порядка; центр связки, которой принадлежит ряд, называется вершиной конуса; прямые ряда — образующими конуса; касательные плоскости ряда — касательными плоскостями конуса.

Показать, что плоскость, не проходящая через вершину конуса 2-го порядка, пересекает его по кривой 2-го порядка, а его касательные плоскости — по касательным к этой кривой, и обратно, что кривая 2-го порядка проектируется из точки, не лежащей в ее плоскости, конусом 2-го порядка, а ее касательные — касательными плоскостями конуса; показать, что проекция кривой 2-го порядка есть кривая 2-го порядка.

Перенести на конус теорию полюсов и поляр, заменив полярю точки полярной плоскостью прямой и полюс прямой — полярю плоскости.

Перенести на конус теоремы Паскаля и Брианшона, Штаудта, Дезарга.

139. Показать, что среди плоских сечений конуса 2-го порядка с конечной вершиной имеются и эллипсы и гиперболы и параболы.

140. Конус с бесконечно удаленной вершиной называется цилиндром. Показать, что сечения цилиндра 2-го порядка плоскостями, не параллельными образующим, могут быть либо только эллипсами, либо только гиперболами, либо только парабололами.

141. Линейчатым рядом называется совокупность прямых, пересекающих три скрещивающиеся прямые; эти три прямые называются направляющими ряда; вообще, направляющей называется всякая прямая, пересекаемая всеми прямыми ряда.

Доказать следующие теоремы:

1. Вместо данного определения можно принять за определение линейчатого ряда каждое из следующих двух:

Линейчатый ряд есть совокупность прямых, соединяющих соответствующие точки двух проективных рядов точек на скрещивающихся прямых; за носительницы проективных рядов можно принять любые две направляющие линейчатого ряда.

Линейчатый ряд есть совокупность линий пересечения соответствующих плоскостей двух проективных пучков плоскостей со скрещивающимися осями; за оси проективных пучков можно принять любые две направляющие линейчатого ряда.

2. Направляющие линейчатого ряда в свою очередь образуют линейчатый ряд, а направляющие последнего образуют первый.

142. Совокупность точек, принадлежащих прямым линейчатого ряда, называется линейчатой поверхностью 2-го порядка; по отношению к этой поверхности прямые линейчатого ряда называются образующими, и сам линейчатый ряд называется системой образующих. Доказать теоремы:

1. Линейчатая поверхность 2-го порядка содержит две системы образующих.

2. Две образующие одной системы скрещиваются, две образующие разных систем пересекаются.

3. Каждая точка, лежащая на образующей одной системы, лежит на определенной образующей другой системы; каждая плоскость, проходящая через образующую одной системы, проходит через определенную образующую другой системы.

143. Прямая, имеющая с линейчатой поверхностью 2-го порядка одну общую точку, называется касательной к поверхности в этой точке. Показать, что все касательные к поверхности в одной точке лежат в одной плоскости, а именно в плоскости, соединяющей образующие, проходящие через эту точку, причем все прямые, лежащие в этой плоскости и проходящие через эту точку, за исключением образующих, суть касательные.

144. Плоскость, соединяющая образующие линейчатой поверхности 2-го порядка, пересекающиеся в данной точке, называется касательной плоскостью поверхности в этой точке.

Показать, что всякая плоскость, не касательная к линейчатой поверхности, пересекает ее по кривой 2-го порядка, и обратно через всякую



кривую 2-го порядка можно провести линейчатую поверхность 2-го порядка; аналогично показать, что касательные плоскости к линейчатой поверхности, проходящие через всякую точку, не лежащую на поверхности, огибают конус 2-го порядка, и обратно, ко всякому конусу 2-го порядка можно провести касательную линейчатую поверхность 2-го порядка.

145. Линейчатая поверхность 2-го порядка называется однополым гиперболоидом или гиперболическим параболоидом смотря по тому, принадлежит ли бесконечно удаленная плоскость к числу ее касательных плоскостей или нет. Доказать теоремы:

1. Все образующие параболоида, принадлежащие к одной системе, параллельны одной плоскости; никакие три образующие гиперболоида не параллельны одной плоскости.

2. Плоские сечения гиперболоида суть эллипсы, гиперболы, параболы и пары пересекающихся прямых; плоские сечения параболоида суть гиперболы, параболы и пары пересекающихся прямых.

3. Проективные ряды, по которым образующие одной системы пересекают две образующие другой системы, в случае параболоида не подобны и не равны.

4. Всякая образующая гиперболоида, принадлежащая одной системе, параллельна одной образующей другой системы; две образующие параболоида не могут быть параллельны.

146. Показать, что прямая, вращающаяся вокруг неподвижной прямой, скрещивающейся с нею и не перпендикулярной к ней, описывает однополый гиперболоид.

147. Дан шестиугольник, вписанный в кривую 2-го порядка. Показать, что около этого шестиугольника можно описать неплоский шестиугольник, сторонами которого служат образующие линейчатой поверхности, проходящей через кривую, и воспользоваться этим неплоским шестиугольником для наглядного доказательства теоремы Паскаля.

148. Найти уравнение кривой 2-го порядка в однородных координатах, приняв за вершины координатного треугольника две точки кривой и точку пересечения касательных в этих точках, а за единичную точку какую-нибудь третью точку. Видоизменить это уравнение для случая, когда единичная точка не лежит на кривой. Вывести уравнение гиперболы, отнесенное к асимптотам, и уравнение параболы, отнесенное к касательной и диаметру, проходящему через точку касания.

149. Найти уравнение кривой 2-го порядка в однородных координатах, приняв за вершины координатного треугольника три попарно сопряженные точки, а за единичную точку — точку пересечения касательных в точках пересечения кривой с двумя сторонами треугольника. Видоизменить это уравнение для случая произвольного выбора единичной точки. Вывести уравнения эллипса и гиперболы, отнесенные к сопряженным диаметрам.

150. Найти уравнение линейчатой поверхности 2-го порядка, приняв за вершины координатного тетраэдра точки пересечения двух пар образующих разных систем. Вывести уравнение гиперболического параболоида, отнесенное к паре образующих разных систем и прямой, соединяющей точку пересечения их с точкой пересечения бесконечно удаленных образующих,

## ГЛАВА V.

## ОБОСНОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

По мере развития проективной геометрии, все более подтверждалась мысль Понселе, что теоремы элементарной геометрии суть частные случаи теорем проективной геометрии. Хотя основные положения проективной геометрии в свою очередь были выведены из элементарной геометрии, но понятием меры при этом приходилось пользоваться в незначительной степени — уже у Штейнера все свелось к применению свойств двойных отношений. В 1847 г. Штаудт (Staudt) в сочинении "Die Geometrie der Lage" добился в основном полного освобождения проективной геометрии от понятия меры. В 1856, 1857 и 1860 гг. вышли три дополнения к этому сочинению под названием „Beiträge zur Geometrie der Lage“, в которых Штаудт, развивая свой метод далее, показал: 1) что даже мнимые элементы могут быть введены в геометрию помимо понятия меры; 2) что двойные отношения можно определить независимо от понятия меры, и 3) что их можно рассматривать не как числа, а как особые фигуры, и арифметические действия над ними, как особые геометрические операции. В основу своих рассуждений Штаудт кладет систему положений, вполне достаточную для логического вывода проективных свойств фигур, относящихся к инцидентности и расположению элементов, но вывод свойств, основанных на непрерывности этого расположения, нельзя признать строгим, в виду отсутствия в числе основных положений какой-либо логической формулировки этой непрерывности. Если принять во внимание, что строгое обоснование теории иррациональных чисел, впервые выработанное Дедекиндом (Dedekind) в 1858 г., было опубликовано лишь в 1872 г., то нужно признать, что для своего времени изложение Штаудта могло служить образцом математической строгости, тем более, что в этом отношении геометрия в течение долгого времени отставала от анализа. Указанный пробел в изложении Штаудта был впоследствии устранен рядом авторов путем введения тех или иных аксиом непрерывности, а прочие основные положения подверглись значительному упрощению.

Нижеследующие задачи имеют своей целью, во-первых, выяснить связь системы Штаудта с идеями уже содержавшимися в работах Понселе, Мёбиуса и Штейнера, во-вторых, дать понятие о построении проективной геометрии в духе Штаудта, для чего применяется некоторая система определений и аксиом. Вопросов, составляющих предмет „Beiträge“, мы однако не можем здесь коснуться.

В дальнейшем мы называем чисто проективными такие понятия, положения и рассуждения проективной геометрии, которые не зависят от понятия меры, а метрическими те, которые связаны с этим понятием. Термин „чисто проективное“ не следует смешивать с термином „проективное“, например двойное отношение есть понятие проективное, так как оно не изменяется при проектировании, но оно не чисто проективное, а метрическое.

151. Сетью Мёбиуса на плоскости называется совокупность точек и прямых, которые можно построить по четырем заданным точкам, не лежащим по три на одной прямой, применяя любое количество раз

только две операции, а именно, соединение заданных или ранее построенных точек прямыми и определение точек пересечения ранее построенных прямых.

Пользуясь методом проекций Понселе, показать, что сеть Мёбиуса состоит из точек и прямых, координаты которых (или отношение координат, когда координаты бесконечны или неопределенны) по отношению к системе отсчета, составленной из заданных четырех точек, суть числа рациональные.

152. Показать, что по трем заданным точкам прямой, применяя любое количество раз построение четвертой гармонической точки к трем заданным или ранее построенным точкам, можно построить все точки, координаты которых по отношению к системе отсчета, составленной из заданных точек, суть числа рациональные, и что никаких других точек таким путем построить нельзя.

153. Показать чисто проективно с помощью теоремы Дезарга, изложенной в задаче 36, что построение четвертой гармонической к трем заданным точкам с помощью полного четырехсторонника, указанное в задаче 18, приводит к вполне определенной точке, как бы ни был выбран этот четырехсторонник.

154. Показать, что теорема Дезарга, упомянутая в предыдущей задаче, может быть выведена чисто проективно, если предварительно доказать ее для треугольников, не лежащих в одной плоскости.

155. Штаудт определяет четвертую гармоническую точку следующим образом: если точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой и точки  $A, C$  суть точки пересечения противоположных сторон простого плоского четырехугольника, а точка  $B$  есть точка пересечения прямой  $AC$  с одной из диагоналей этого четырехугольника, то точка пересечения  $D$  прямой  $AC$  со второй диагональю того же четырехугольника называется четвертой гармонической к точкам  $A, B, C$ . Показать чисто проективным путем, что это определение однозначно определяет точку  $D$  по заданным точкам  $A, B, C$  и что оно согласно с принятым в задаче 14 метрическим определением гармонической сопряженности.

156. Проективным соответствием между двумя рядами точек называется по Штаудту такое одно-однозначное соответствие между ними, при котором всякой гармонической группе точек одного ряда соответствует гармоническая группа точек другого ряда. Показать, что это определение согласно с данным в задаче 60, по крайней мере по отношению к точкам с рациональными абсциссами относительно соответствующих систем отсчета.

157. Коллинеарное соответствие между двумя плоскими системами Штаудт определяет, следуя Мёбиусу, как также одно-однозначное соответствие между ними, при котором точкам соответствуют точки, прямым прямые, и притом инцидентным точкам и прямым соответствуют инцидентные точки и прямые.

Показать, что это определение согласно с данным в задаче 62, по крайней мере по отношению к точкам и прямым с рациональными координатами относительно соответствующих систем отсчета.

158. Показать, что определения задач 156, 157 равносильны соответствующим определениям задач 60, 62, если добавить условие, что определяемые соответствия непрерывны.

**159.** При самостоятельном построении проективной геометрии мы будем называть точкой элемент, образующий совокупности, называемые прямыми, плоскостями и пространством. Для общности можно и точку рассматривать как совокупность точек, содержащую одну точку. Относительно прямой мы допустим, напротив, что она содержит не менее двух точек, относительно плоскости — что она содержит не менее трех точек, не содержащихся в одной прямой, относительно пространства, что оно содержит не менее четырех точек, не содержащихся в одной плоскости или в одной прямой.

Чтобы не выходить за пределы трехмерной геометрии, мы допустим, что все точки, а потому и все прямые и плоскости, принадлежат одному пространству. Далее примем следующие связи между точками, прямыми и плоскостями:

А) существует только одна прямая, содержащая две заданные различные точки;

Б) существует только одна плоскость, содержащая заданную прямую и заданную точку, не содержащуюся в этой прямой;

В) существует только одна прямая, содержащаяся в двух заданных различных плоскостях;

Г) существует только одна точка, содержащаяся в заданной прямой и заданной плоскости, не содержащей этой прямой.

Мы употребили здесь выражения „содержать“ и „содержаться“, применимые к совокупностям всякого рода, но в дальнейшем будем употреблять выражения „проходить через“ и „лежать на“, принятые в геометрии. Далее, совокупность, определяемую несколькими другими, содержащимися в ней, будем называть „соединяющей“ эти последние, совокупность, определяемую несколькими другими, содержащими ее, будем называть „пересечением“ последних, и т. п.

Исходя из принятых определений и допущений, доказать теоремы:

1. Прямая, соединяющая две точки плоскости, лежит на этой плоскости.

2. Всякая общая точка двух плоскостей лежит на прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.

4. Три плоскости, не проходящие через одну прямую, проходят через одну точку.

5. Через каждую прямую проходит не менее двух плоскостей.

6. Через каждую точку проходит не менее трех плоскостей, не проходящих через одну прямую.

7. Две различные прямые, проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

8. Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, проходят через одну точку.

**160.** Условимся считать точки и прямые, лежащие на некоторой определенной плоскости, бесконечно удаленными, т. е. будем считать две прямые параллельными, если они пересекают эту плоскость в одной и той же точке, и т. д.

Исходя из этого соглашения доказать теоремы:

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.
2. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.
3. Плоскость, параллельная одной из двух параллельных прямых, параллельна и другой.
4. Прямая, параллельная одной из двух параллельных плоскостей, параллельна и другой.
5. Две плоскости, параллельные двум не параллельным прямым, параллельны между собой.
6. Две прямые, параллельные двум не параллельным плоскостям, параллельны между собой.

**161.** В дополнение к ранее принятым, примем еще следующие допущения, касающиеся расположения и числа точек на прямой:

По отношению к любым двум точкам  $A, B$  любой прямой прочие ее точки распределяются между двумя классами (открытыми отрезками  $AB$ ) со следующими свойствами:

- Па) всякий открытый отрезок содержит по крайней мере одну точку;
- Пб) если  $C$  — точка открытого отрезка  $AB$ , то прочие его точки распределяются между определенными открытыми отрезками  $AC, CB$ ;
- Пс) всякая проекция открытого отрезка  $AB$  есть открытый отрезок  $A'B'$ , где точки  $A', B'$  суть проекции точек  $A, B$ .

Точки  $A, B$  называются концами открытого отрезка  $AB$ . Согласно определению, концы не входят в открытый отрезок. Если же к открытому отрезку  $AB$  присоединить концы, то получится замкнутый отрезок  $AB$ .

Доказать теоремы:

1. Прямая содержит бесчисленное множество точек.
2. По отношению к конечному числу точек прочие точки прямой распределяются между таким же числом открытых отрезков, концами которых служат эти точки, причем каждая служит концом двух отрезков. Новые отрезки, появляющиеся при добавлении новых точек, суть подразделения прежних отрезков.
3. Сказанное о числе и расположении точек на прямой можно перенести на расположение прямых в пучке прямых и на расположение плоскостей в пучке плоскостей.

**162.** Последовательность положений переменного элемента  $M$ , описывающего заданную совокупность, считается заданной, если для любых двух элементов  $A, B$  указано определенным образом, который из них представляет собой предшествующее, который последующее положение элемента  $M$ , и притом так, что из трех элементов  $A, B, C$  только один будет представлять собою положение элемента  $M$ , промежуточное между двумя остальными. Доказать теоремы:

1. Элемент  $M$  отрезка  $AB$  совокупности 1-ой ступени может описывать этот отрезок только в двух определенных последовательностях (направлениях), если требуется, чтобы из любых трех положений элемента  $M$  промежуточное положение принадлежало отрезку, концами которого служат крайние положения.

Эти направления противоположны друг другу. Если отрезок  $AB$  закрытый, то каждый из концов служит при одном из направлений начальным, а при другом — конечным положением элемента  $M$ . Если отре-

зок  $AB$  открытый, то начального и конечного положения не существует.

2. Элемент  $M$  совокупности 1-ой ступени может описывать ее только в двух противоположных направлениях, начиная с заданного положения  $A$ , если сохранено требование предыдущей теоремы относительно любых трех последовательных положений. Конечного положения ни при одном из этих направлений не существует. При замене начального положения  $A$  новым начальным положением  $B$  каждому направлению описывания, начиная с  $A$ , соответствует одно из направлений описывания, начиная с  $B$ , при котором открытый отрезок  $AB$  описывается в прежнем направлении.

163. Направления описывания совокупности 1-ой ступени, начиная с различных элементов  $A, B$ , называются согласными между собой, если при обоих начальных элементах открытые отрезки  $AB$  описываются в одинаковых направлениях. Показать, что два направления, согласные с третьим, согласны между собой. Показать, что при замене какого-либо направления согласным последовательность конечного числа элементов либо не меняется, либо подвергается круговой перестановке.

164. Все согласные между собой направления при различных начальных элементах рассматриваются как различные представления одного и того же направления описывания совокупности 1-ой ступени, независимо от выбора начального элемента. Показать, что последовательность любых трех элементов  $A, B, C$  вполне определяет направление описывания совокупности 1-ой ступени, причем последовательности  $ABC, BCA, CAB$ , отличающиеся друг от друга круговой перестановкой, определяют одно и то же направление описывания, а последовательности  $CBA, ACB, BAC$ , противоположные предыдущим, определяют противоположное направление.

165. Показать, что по отношению к двум прямым  $a, b$  на плоскости все нележащие на них точки плоскости распределяются на два класса (открытые угловые области  $ab$ ) со следующими свойствами: один из открытых отрезков, соединяющих две точки одной из угловых областей, весь содержится в этой области; каждый из открытых отрезков, соединяющих две точки разных угловых областей, пересекает одну из прямых  $a, b$ .

166. Прямые  $a, b$  предыдущей задачи называются сторонами угловой области. Если стороны включаются в угловую область, то она называется замкнутой. Показать, что замкнутая область сохраняет свойства открытой по отношению к замкнутым отрезкам, концы которых не лежат на одной стороне.

167. Показать, что по отношению к треугольнику  $ABC$  точки плоскости, не лежащие на его сторонах, распадаются на четыре класса (открытые треугольные области  $ABC$ ), каждый из которых состоит из точек, принадлежащих определенным открытым угловым областям, сторонами которых служат пары сторон треугольника.

168. Замкнутой треугольной областью  $ABC$  называется совокупность точек, которая получается при присоединении к открытой области открытых отрезков  $AB, AC, BC$ , содержащихся соответственно в тех же угловых областях, что и открытая треугольная область  $ABC$ ,

и точек  $A, B, C$ . Замкнутые отрезки  $AB, AC, BC$  называются сторонами замкнутой треугольной области, а точки  $A, B, C$  — ее вершинами. Доказать следующие теоремы о замкнутых треугольных областях  $ABC$  и замкнутых отрезках.

1. Сторонами четырех треугольных областей, определяемых треугольником  $ABC$ , служат все шесть отрезков  $AB, AC, BC$ , причем каждая сторона — общая для двух треугольников.

2. Один из отрезков, соединяющих две точки треугольной области, весь принадлежит ей.

3. Один из отрезков, соединяющих две точки разных треугольных областей, пересекает их общую сторону.

4. Прямая, не проходящая через вершины треугольной области и пересекающая одну из ее сторон, пересекает еще одну сторону и не пересекает третьей.

**169.** Доказать теорему: когда одна из точек  $M, N$ , гармонически сопряженных относительно неподвижных точек  $A, B$ , описывает прямую  $AB$  в определенном направлении, другая точка описывает ту же прямую в противоположном направлении.

**170.** В дополнение к принятым ранее, примем еще следующее допущение, характеризующее непрерывность расположения точек на прямой:

III. Если прямолинейный отрезок  $AB$  содержит отрезок  $CD$ , то точки  $M, N$ , одновременно описывающие эти отрезки, совпадают по крайней мере один раз, причем, если совпадений не одно, то одно из них предшествует всем остальным.

Доказать теоремы:

1. Если направления движения точек  $M, N$  противоположны, то они совпадают только один раз.

2. Если пары точек  $AB, CD$  разделяют друг друга, то не существует пары точек, гармонически сопряженных относительно обеих пар  $AB, CD$ ; если же пары  $AB, CD$  разделяют друг друга, то такая пара существует.

3. Принятое допущение и вытекающие из него следствия можно распространить и на пучок прямых или плоскостей.

**171.** Принимая определение проективности, данное в задаче 156, и притом для любых совокупностей 1-ой ступени, показать чисто проективно, что существует одна и только одна проективность, при которой заданным трем элементам одной совокупности соответствуют заданные три элемента другой.

**172.** Принимая определение коллинеарности, данное в задаче 157, показать чисто проективно, что существует одна и только одна коллинеарность, при которой заданным четырем точкам одной системы, не лежащим по три на одной прямой, соответствуют заданные четыре точки другой системы, не лежащие по три на одной прямой.

## ВЕДЕНИЕ.

При решении многих геометрических задач и доказательствах теорем, часто приходится пользоваться перемещением (движением) как отдельных частей, так и целых фигур. При этом, кроме выигрыша в смысле наглядности и простоты, нередко удается значительно сократить необходимые вычисления и преобразования. И даже более того, подчас это представляет собой единственный, практически осуществимый путь решения.

Можно сказать, что идея движения в геометрии появилась очень давно, едва ли не с возникновением самой геометрии, но попытки систематического применения этого метода к исследованию геометрических вопросов начались сравнительно недавно.

Один из первых шагов в этом направлении был сделан Декартом при решении задачи о построении касательной к циклоиде. Не останавливаясь на второстепенных работах, не имевших существенного влияния на развитие интересующих нас вопросов, отметим мемуар Бернулли „De centro spontaneo rotatione“, Opera, t. IV, 1742 и Коши (Cauchy) „Sur le mouvement que peut prendre un système invariable libre, ou assujetti à certaines conditions“, 1827. В этом мемуаре Коши дает начало общей теории центроидов.

В 1843 г. Шаль опубликовал свой знаменитый мемуар о геометрических свойствах бесконечно малых перемещений свободного твердого тела в пространстве („Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petits d'un corps solide libre dans l'espace“. Comptes Rendus, 1843). Эта замечательная работа положила начало многочисленным исследованиям геометрических свойств движения как самого Шала, так и многочисленной школы его последователей. Особенно следует отметить большую роль Манхейма (Mannheim) в развитии и углублении этих методов. Результаты своих многолетних исследований, а также все наиболее интересные достижения других геометров в этой области, он собрал в фундаментальном сочинении „Principes et développements de géométrie cinématique“, 1894.

Термин „кинематическая геометрия“ требует некоторого пояснения. Прежде всего нужно установить, что в понятии движения является существенным для геометрических приложений. Манхейм так определяет кинематическую геометрию: „la géométrie cinématique étudie les propriétés intrinsèques des déplacements des figures“.

В области механики (точнее в динамике) изучение движения тел теснейшим образом связано с понятиями времени и силы. Если исключить



из рассмотрения понятие силы, то мы будем иметь задачу кинематики, где по существу изучаются законы движения геометрических фигур. Наконец, если исключить из рассмотрения и понятие времени, то остается движение в чистом виде (по терминологии Манхейма) или, точнее говоря, остается от движения то, что является основным и наиболее важным в геометрических рассуждениях.

Этим последним требованием об исключении времени <sup>1)</sup> и определяется название настоящего отдела. Именно под кинематической геометрией мы будем в основном понимать совокупность вопросов о движении геометрических фигур, не принимая во внимание время и силы.

Следует иметь в виду, что если исключить только понятие силы и оставить время, то естественно придется принять во внимание скорость и ускорение движения. Тем самым мы получаем возможность охватить более широкий круг задач. Но решение таких задач получается несравненно проще и изящнее, если пользоваться методами дифференциальной геометрии. Поэтому такие задачи даны в части II (отдел „Дифференциальная геометрия“).

О том, что движение (или во всяком случае некоторые его свойства) можно изучать независимо от понятия силы и времени, говорил еще Эйлер в своем мемуаре „Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum“ (Novi Com. Acad. Petrop., t. XX).

Достаточно ясные указания на это обстоятельство можно найти и у Ampère, „Essai sur la philosophie des sciences“ 1833 г.; Carnot, „Essai pour les machines en générales“, 1786; Wronski, „Système architectonique absolu de l'encyclopédie du savoir humain“, и др.

Рассмотрим сначала движение неизменяемых плоских фигур в своей плоскости. Основой всех рассуждений будет являться теорема Шаля: <sup>2)</sup>

При каком бы то ни было движении неизменной плоской фигуры в ее плоскости, переход из начального положения в конечное может быть осуществлен простым вращением фигуры около неподвижного центра (в случае параллельного перемещения за центр принимается бесконечно удаленная точка перпендикуляра к направлению движения).

Для бесконечно малых движений <sup>3)</sup> эта теорема принимает следующий более простой вид:

Всякое бесконечно малое движение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости есть вращение около некоторого центра (так называемый мгновенный центр вращения).

<sup>1)</sup> Точнее говоря исключается только измерение времени, а последовательность во времени остается.

<sup>2)</sup> Эта теорема значительно раньше была найдена Эйлером и Бернулли, см. задачу I.

<sup>3)</sup> Применение „бесконечно малых“ в кинематической геометрии имеет тот же смысл, что и замена приращения переменной ее дифференциалом в анализе. Обоснование такой замены можно найти например в курсе Э. Че з а р о, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, том II, § 590. В дальнейшем мы не будем рассматривать этого вопроса подробно, ограничиваясь по примеру основоположников кинематической геометрии наглядными рассуждениями.

Если сообщить какой-нибудь фигуре бесконечно малое перемещение, то каждая из ее точек опишет бесконечно малую траекторию. Все нормали к этим траекториям очевидно пройдут через мгновенный центр. Изучая такие совокупности нормалей и их расположение относительно подвижной фигуры, можно установить много весьма общих теорем кинематической геометрии, Манхейм даже ввел специальный термин „метод нормалей“. В задачах этого отдела метод нормалей разобран на большом количестве примеров. Во всех курсах кинематики доказывается теорема о том, что всякое движение плоской фигуры (неизменной формы) в своей плоскости можно осуществить посредством качения одной кривой (подвижная центроида) по другой (неподвижная центроида). Отсюда видна важность изучения таких движений. Но помимо приложений к кинематике, эти движения представляют и сами по себе чрезвычайно много интересного, в особенности в своих приложениях к геометрии.

Стоит отметить также и кинематическую геометрию изменяемых фигур. В этом случае уже не приходится говорить о мгновенном центре вращения, но зато тем ярче выступает метод нормалей, который и помогает справиться со многими трудностями задачи. Первое систематическое исследование движения плоских фигур было проделано Шалем. Первое его сообщение об этом было сделано в 1829 г. и опубликовано затем в „Bulletin de la Société math. de France“, 1878.

Несравненно более сложным является движение в пространстве.

Исследуем сначала перемещение точки. Пусть точка переместилась из своего начального положения  $M_0$  в бесконечно близкое  $M$ . Проведем через  $M_0$  плоскость  $\pi$ , ортогональную к траектории  $M_0M$ . Очевидно, что такое бесконечно малое смещение точки можно осуществить вращением вокруг произвольной прямой, лежащей в плоскости  $\pi$ , конечно при условии, что эта прямая не проходит через точку  $M_0$ .

Обратимся теперь к движению прямой в пространстве и докажем предварительно теорему, аналогичную теореме Эйлера — Шаля:

Отрезок прямой постоянной длины можно переместить из его начального положения во всякое другое (не параллельное начальному) посредством вращения около некоторой определенной прямой.

Пусть  $AB$  и  $A_1B_1$ —два положения одного и того же отрезка, и следовательно  $AB = A_1B_1$ . Соединим их концы  $A$  с  $A_1$  и  $B$  с  $B_1$  прямыми и построим плоскость, параллельную  $AA_1$  и  $BB_1$ . Проектируя на эту плоскость отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$ , получим:

$$\text{пр. } (AB) = \text{пр. } (A_1B_1).$$

Но по теореме Эйлера — Шаля на этой плоскости существует некоторая определенная точка, вращая вокруг которой одну из проекций (вместе с неизменно связанным с ней проектируемым отрезком) можно совместить ее с другой проекцией. Очевидно при этом должны совеститься и проектируемые ими отрезки. Другими словами, при вращении отрезка  $AB$  около прямой, перпендикулярной плоскости проекций, он совместится с отрезком  $A_1B_1$ . Но принимая во внимание известный способ

построения мгновенного центра, из этих рассуждений видим, что найденная ось вращения определяется пересечением двух плоскостей, ортогональных к отрезкам  $AA_1$  и  $BB_1$  и проходящих через их середины.

Эти рассуждения очевидно остаются приложимыми и к бесконечно малым перемещениям отрезка. В этом случае ось вращения называется мгновенной осью вращения. Далее, отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  будут эквивалентны бесконечно малым траекториям точек  $A$  и  $B$ . Следовательно плоскости, определяющие ось вращения, будут ортогональны к траекториям концов отрезка  $AB$ .

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. В то время как бесконечно малое перемещение точки не имеет определенной мгновенной оси вращения, бесконечно малое смещение отрезка прямой имеет вполне определенную ось<sup>1)</sup>.

Движение твердого тела вполне определено, если известно движение какой-нибудь плоскости, неизменно с ним связанной. Вследствие этого во многих случаях бывает возможно заметить изучение очень сложных движений геометрических фигур изучением движений некоторых связанных с ними плоскостей. Поэтому движение плоскости заслуживает особенно внимательного изучения.

Рассмотрим общий случай перемещения плоскости. Пусть дано начальное ее положение  $\pi$  и смещенное  $\pi_1$  (рис. 1). Для возвращения ее к начальному положению необходимо сначала сделать поворот около их линии пересечения (характеристика плоскости  $\pi$ ) для совмещения  $\pi_1$  с  $\pi$ , а затем поворотом вокруг некоторой точки  $F$ , определяемой теоремой Эйлера—Шалля, вернуться к исходному положению. Пусть  $A$  — фиксированная точка на плоскости  $\pi$ . Перевести ее в новое положение  $A_1$  можно двумя вращениями: одно — вокруг точки  $F$ , при этом  $A$  перейдет в  $A'$ ; затем — вокруг линии пересечения  $\pi$  и  $\pi_1$ , тогда  $A'$  перейдет в  $A_1$ . Плоскость треугольника  $AA_1A'$  перпендикулярна плоскости  $\pi$ . Поэтому  $AF$  будет перпендикулярна  $AA_1A'$ . Следовательно  $AF$  можно рассматривать как линию пересечения плоскости  $\pi$  с плоскостью, ортогональной прямой  $AA_1$ . Так как мы рассматриваем бесконечно малые перемещения, то очевидно  $AA_1$  определяет элемент траектории точки  $A$ . Следовательно плоскость, ортогональная к траектории точки  $A$  (а следовательно и всякой другой точки  $\pi$ ), проходит через определенную точку  $F$  плоскости. Эта точка называется фокусом движущейся плоскости  $\pi$ . Итак мы имеем основную теорему:

Плоскости, ортогональные к траекториям всех точек подвижной плоскости, проходят через одну точку этой плоскости.

Применения этой теоремы и следствия из нее будут даны в задачах этого отдела.

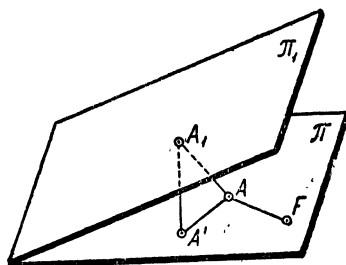


Рис. 1.

<sup>1)</sup> Если отрезок ортогонален к траекториям своих концов, касательные к которым не лежат в одной плоскости, то такой оси не будет.

Рассмотрим теперь бесконечно малое смещение твердого тела (неизменяемой геометрической фигуры). Каждая его точка опишет при этом бесконечно малую траекторию. Построим касательные ко всем таким траекториям. Очевидно мы будем иметь для каждого бесконечно малого перемещения бесконечную совокупность прямых (касательных и нормалей). Поэтому, чтобы разобраться во всех особенностях движения геометрических фигур в пространстве, нужно предварительно познакомиться с основными свойствами различных совокупностей прямых.

Как известно, прямая линия вполне определяется четырьмя условиями. Следовательно совокупность всех прямых пространства представляет собой многообразие четырех измерений. Из этой совокупности можно выделить различные частные совокупности, в которых прямые располагаются в пространстве по определенному закону.

Рассмотрим одну из таких совокупностей. Пусть все ее прямые так расположены в пространстве, что через всякую данную точку пространства проходит бесконечное множество прямых этой совокупности, образуя коническую поверхность. В этом случае говорят, что прямые данной совокупности образуют комплекс. Если этот конус будет алгебраическим, то и комплекс называется алгебраическим. Например в случае конуса второго порядка комплекс будет называться алгебраическим комплексом второго порядка. Примером такого комплекса будет совокупность прямых, пересекающихся круг. Возьмем какую-нибудь плоскость. В ней будет лежать бесконечное множество прямых комплекса, которые будут огибать некоторую кривую. Легко убедиться в том, что в случае алгебраического комплекса эта кривая будет такого же класса, как и порядок комплекса. Действительно, если из любой точки этой плоскости провести касательные к кривой (она называется „кривой комплекса“), то очевидно они будут линиями пересечения соответствующего конуса с этой плоскостью. Значит число их будет равно, вообще говоря, порядку конуса.

Совокупность прямых, общих двум данным комплексам, образует так называемую конгруэнцию. Очевидно, что через произвольную точку пространства проходит конечное число прямых конгруэнции. Число таких прямых называется порядком конгруэнции (в случае, если комплексы алгебраические).

Классом конгруэнции называется число ее прямых, лежащих в произвольной плоскости.

Для кинематической геометрии особенное значение имеет алгебраический комплекс первого порядка или, как его иначе называют, „линейный комплекс“. Очевидно в этом случае конус комплекса будет плоскостью, а прямые комплекса, лежащие в произвольной плоскости, все пересекаются в одной точке этой плоскости. Такая точка называется фокусом плоскости, а сама плоскость — фокальной плоскостью точки<sup>1)</sup>.

Плоскость, фокус которой бесконечно удален, называется диаметральной плоскостью комплекса.

<sup>1)</sup> Такую систему плоскостей и точек Мёбиус назвал „нулевой системой“ (Nullsystem). Мы будем придерживаться французского термина „фокальная система“.

Фокус бесконечно удаленной плоскости определяется направлением прямой. Это направление называется аксиальным направлением комплекса.

Другие свойства линейных комплексов и конгруэнций, имеющие большое значение для кинематической геометрии, помещены в части II в виде задач.

Рассматривая движение фигуры неизменной формы, мы можем мыслить все точки пространства неизменно связанными с ней. Другими словами, мы можем считать все пространство участвующим в движении, аналогично движению одной плоскости (пространство двух измерений) по другой плоскости (тоже пространство двух измерений). Следовательно, рассматривая например движение прямой в пространстве, можно всегда считать ее неизменно связанной с движущимся пространством и применять некоторые общие соображения о движении фигур неизменной формы, а значит и относящиеся сюда свойства конгруэнций и комплексов. Это замечание полезно иметь в виду при решении некоторых задач настоящего отдела.

Весь отдел разбит на три главы: геометрия на плоскости, геометрия в пространстве и смешанные задачи.

Первые две главы имеют сравнительно элементарный характер. В главу III отнесены более трудные задачи.

Задачи, помещенные в начале глав, ставят своей целью познакомить с основными положениями кинематической геометрии и имеют в виду главным образом читателя, недостаточно ориентированного в этой области. Поэтому и решения к ним изложены наиболее подробно. Настоящий отдел конечно не может служить систематическим курсом по кинематической геометрии, поэтому и в задачах его не всегда выдерживается постепенность и непрерывность перехода от одной к другой. К тому же многие задачи по методу решения могут быть отнесены к различным типам. Во всяком случае в начальных задачах, как наиболее важных для начинающего читателя, эта последовательность выдержана. В главе III (смешанные задачи), имеющей в виду подготовленного читателя, задачи снабжены только ответами и лишь иногда краткими указаниями на путь решения.

Ниже помещен список литературы, использованной при составлении настоящего отдела.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Лигин, В. Геометрическая теория абсолютного движения неизменяемой системы.
2. Огиевецкий, И. Е. Основы плоской кинематической геометрии, 1931.
3. Сомов. Кинематика подобноизменяемых систем двух измерений.
4. Aronhold, S. Vorlesungen über kinematischen Geometrie, 1872.
5. Brisse. Ch. Sur le déplacement fini quelconques d'une figure de forme invariable. Journal de math. pure et appl. 1874, 1875.
6. Chasles. Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques. Bull. Soc. math. de France, 1878.
7. Chasles. Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Paris, Comptes Rendus, 1843.

8. Chasles. Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable. Paris, Comptes Rendus, 1860, 1861.

9. Mannheim, A. Cours de géométrie descriptive.

10. Mannheim, A. Principes et développements de géométrie cinématique.

11. Schoenflies, A. La géométrie du mouvement.

## ГЛАВА I.

### ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

1. На плоскости даны две равные (и конгруэнтные) фигуры. Показать, что они могут быть совмещены посредством вращения вокруг одной определенной точки этой плоскости. (Эйлер — Шаль).

2. При бесконечно малом перемещении фигуры в своей плоскости все нормали к траекториям всех точек этой фигуры проходят через одну и ту же точку этой плоскости (так называемый мгновенный центр вращения).

3. Треугольник  $ABC$  перемещается в своей плоскости так, что его вершины  $A$  и  $B$  описывают две данные прямые  $a$  и  $b$ . Построить нормаль к траектории его третьей вершины  $C$ .

4. Треугольник перемещается так, что две из его вершин описывают соответственно кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Построить касательную к траектории его третьей вершины.

5. Прямая с тремя помеченными на ней точками движется так, что две из них описывают стороны прямого угла. Построить касательную к траектории третьей точки.

6. Отрезок постоянной длины движется так, что оба его конца описывают две данные кривые. Найти на нем точку касания с его огибающей.

7. Кривая неизменной формы перемещается в своей плоскости. Доказать, что точки касания ее со своей огибающей суть основания нормалей, проведенных к ней из соответствующего мгновенного центра.

8. Дана алгебраическая кривая  $n$ -го порядка и некоторая точка  $O$ . Определить число нормалей к этой кривой, проходящих через  $O$  (Штейнер).

9. Хорда постоянной длины скользит своими концами по кривой. Доказать, что точка касания с огибающей делит ее на части, пропорциональные тангенсам углов между этой хордой и касательными в ее концах.

10. Доказать, что при бесконечно малом перемещении неизменяемого пучка прямых точки касания всех этих прямых со своими огибающими лежат на окружности. Построить центр этой окружности.

11. Определить траекторию середины отрезка постоянной длины, концы которого скользят по сторонам прямого угла.

12. Плоскость движется по самой себе так, что две ее точки описывают данные прямолинейные траектории. Доказать, что на ней существует бесконечное множество точек с прямолинейными траекториями, проходящими через точку пересечения данных траекторий. Определить геометрическое место таких точек.

13. Две плоских фигуры  $\pi$  и  $\pi'$  движутся в одной плоскости. Доказать, что мгновенный центр  $\pi$  относительно  $\pi'$  тождествен мгновенному центру  $\pi'$  относительно  $\pi$ .

14. Три плоских фигуры  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  движутся в одной плоскости. Доказать, что три мгновенных центра:  $\pi$  относительно  $\rho$ ,  $\rho$  относительно  $\sigma$ ,  $\sigma$  относительно  $\pi$  лежат на одной прямой. (Теорема Аронгольд — Кеннеди).

15. Даны две кривые произвольной формы ( $C$ ) и ( $C_1$ ). В их общей плоскости движется кривая ( $\Gamma$ ) (неизменной формы) так, что ее общие хорды с кривыми ( $C$ ) и ( $C_1$ ) сохраняют постоянную длину. Найти мгновенный центр вращения для кривой ( $\Gamma$ ).

16. Построить касательную в произвольной точке конхоиды Никомеда.

17. Построить касательную в произвольной точке обобщенной конхоиды (с не прямолинейным основанием).

18. Кривая проходит через неподвижную точку плоскости. Зная траекторию одной из ее точек, построить мгновенный центр.

19. Прямая, проходящая через данную неподвижную точку плоскости, движется так, что одна из ее точек описывает прямую. Определить геометрическое место мгновенных центров.

20. Одна из точек прямой движется по конхоиде Никомеда. Определить геометрическое место мгновенных центров при условии, что эта прямая пересекает ось симметрии конхоиды в ее полюсе.

21. Из некоторой точки окружности проведены лучи пучка прямых, и на каждом из них отложен (считая от второй точки пересечения с окружностью) отрезок постоянной длины. Построить нормаль к геометрическому месту концов этого отрезка (улитка Паскаля).

22. Дана произвольная кривая  $\Gamma$  и некоторая точка  $O$ . Опуская перпендикуляры из  $O$  на касательную к кривой  $\Gamma$ , получим новую кривую (геометрическое место оснований перпендикуляров), называемую подэрой кривой  $\Gamma$ . Построить нормаль к этой кривой.

23. Угол неизменной величины движется в своей плоскости так, что одна из его сторон проходит через данную неподвижную точку, а другая сторона огибает данную неподвижную кривую.

Построить нормаль к траектории вершины угла.

24. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокусов конического сечения на его касательные, есть окружность, описанная из центра конического сечения радиусом, равным половине фокальной оси.

25. Прямая линия получила бесконечно малое перемещение. Определить огибающую касательных к траекториям всех ее точек.

26. Окружность сместилась бесконечно мало в своей плоскости. Определить огибающую касательных к траекториям всех ее точек.

27. Дан шарнирный четырехугольник  $ABCD$ , у которого сторона  $AB$  неподвижна,  $AB = AD$  и  $BC = CD$ . Доказать, что при движении сторон  $AD$ ,  $BC$  и  $DC$  любая точка  $M$  отрезка  $DC$  описывает подэру конического сечения.

Построить нормаль в точке  $M$  к подэре.

28. В шарнирном четырехугольнике  $ABCD$ , у которого  $AB = AD$  и

$BC = CD$ , некоторая точка  $M$  неизменно связана со стороной  $CD$ . Определить траекторию этой точки  $M$  при условии, что сторона  $AB$  неподвижна. (Манхейм).

29. Угол постоянной величины движется в своей плоскости так, что его стороны в своем пересечении с двумя данными кривыми образуют хорды постоянной длины. Построить нормаль к траектории вершины этого угла.

30. Прямой угол перемещается в своей плоскости так, что его стороны касаются двух неподвижных кривых. Доказать, что нормаль траектории его вершины проходит через середину прямой, соединяющей обе точки касания.

31. Доказать, что геометрическое место вершин прямого угла, описанного около эллипса, есть окружность, концентричная этому эллипсу.

32. Коническое сечение (с центром) неизменной формы перемещается в своей плоскости, касаясь обеих сторон неподвижного прямого угла. Определить траекторию его центра.

33. Прямой угол движется в плоскости параболы, касаясь ее обеими сторонами. Определить траекторию его вершины.

34. Кривая неизменной формы движется в своей плоскости так, что постоянно проходит через две неподвижные точки плоскости.

Определить ее точки касания с огибающей.

35. Кривая неизменной формы движется в своей плоскости, касаясь в фиксированной точке данной неподвижной кривой.

Доказать, что нормаль к траектории любой точки подвижной кривой проходит через ее центр кривизны, соответствующий точке касания.

Определить ее точки касания со своей огибающей.

36. Кривая, перемещаясь в своей плоскости, остается касательной к двум данным кривым. Построить нормали к траектории какой-нибудь точки, неизменно связанной с этой кривой.

37. Кривая неизменной формы движется в своей плоскости, касаясь некоторой данной кривой и проходя через данную точку. Построить нормаль к траектории любой точки движущейся кривой.

38. Угол постоянной величины движется в своей плоскости так, что обе его стороны касаются двух данных окружностей. Найти траекторию его вершины и построить к ней касательную.

39. Фокус эллипса неизменной формы движется по одной из сторон прямого угла. При этом сам эллипс касается другой стороны этого угла.

Определить траекторию центра эллипса.

40. Прямой угол движется так, что одна из его сторон проходит через постоянную точку  $P$ . На другой его стороне отложен от вершины отрезок постоянной длины  $l$ . Конец этого отрезка движется по прямой, расстояние которой от точки  $P$  равно  $l$ .

Определить траекторию середины этого отрезка и построить к ней нормаль.

41. Треугольник неизменной формы перемещается в своей плоскости так, что две из его сторон касаются двух данных неподвижных окружностей.

Определить огибающую третьей его стороны (Бобилье).



42. Кривая неизменной формы движется в своей плоскости так, что одна из ее точек описывает данную кривую; при этом сама подвижная кривая остается касательной к некоторой другой данной кривой.

Построить нормаль к траектории любой точки подвижной кривой.

Определить точки касания подвижной кривой с ее огибающей.

43. При движении одной плоскости по другой мгновенный центр, непрерывно перемещаясь, описывает на обеих плоскостях две кривые: подвижную и неподвижную центроиду.

Показать, что при этом подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной (имеется в виду случай непоступательного движения).

44. Во многих случаях рулетту легко построить графически, если известны подвижная и неподвижная кривые. Способ построения таков: начиная от точки касания  $A$  (рис. 2), наносим на  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma')$  пометки на достаточно малых расстояниях друг от друга. При этом должно быть:

$$AA_1 = AA'_1; A_1A_2 = A'_1A'_2; A_2A_3 = A'_2A'_3; \text{ и т. д.}$$

Далее, из точек  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , как из центров, описываем окружности соответственно соответствующим радиусами

$$MA'_1, MA'_2, MA'_3, \dots$$

Огибающая этих окружностей и будет искомая рулетта.

Доказать правильность этого способа.

45. Некоторая кривая  $(M)$ , неизменно связанная с кривой  $(\Gamma')$ , которая катится без скольжения по другой кривой  $(\Gamma)$ , имеет огибающую  $(C)$ . Доказать, что нормаль в точке касания огибающей с подвижной кривой  $(M)$  проходит через соответствующий мгновенный центр.

46. Доказать, что огибающая кривой  $(C)$ , неизменно связанной с некоторой кривой  $(\Gamma')$ , катящейся без скольжения по другой кривой  $(\Gamma)$ , есть одновременно огибающая подвижной окружности, центр которой движется по кривой  $(\Gamma)$ , а радиус равен отрезку нормали, заключенному между центром и соответствующей точкой кривой  $(\Gamma')$ .

47. Даны две кривые  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  с общей касательной и подвижная кривая  $(\Gamma')$  с неизменно связанной с ней точкой  $M$ . Пусть при качении  $(\Gamma')$  по  $(\Gamma)$  точка  $M$  опишет рулетту  $(C)$ , а при качении по  $(\Gamma_1)$  соответственно рулетту  $(C_1)$ .

Доказать, что при качении кривой  $(\Gamma_1)$  по  $(\Gamma)$  кривая  $(C_1)$  огибает кривую  $(C)$  (Теорема Кэтус'а).

48. Доказать, что всегда можно построить такую кривую, которая, катясь без скольжения по данной кривой, опишет точкой, неизменно с ней связанной, другую данную кривую (Теорема Айри).

49. Прямая катится по данной окружности без скольжения. Найти траекторию одной из точек этой прямой.

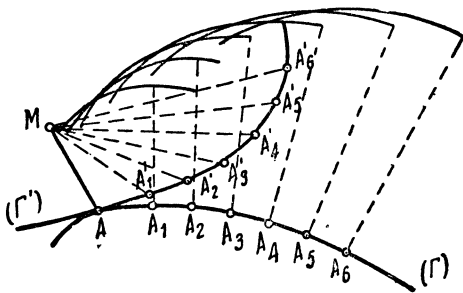


Рис. 2.

50. Отрезок постоянной длины движется так, что его концы скользят по двум данным прямым. Определить центроиды этого движения.

51. Круг радиуса  $a$  катится без скольжения по кругу (внутреннему), радиус которого  $2a$ . Определить траектории точек подвижной окружности.

52. Отрезок прямой постоянной длины  $l$  скользит своими концами по двум окружностям с равными радиусами  $r$ , причем расстояние между их центрами равно  $l$  и кроме того  $r > l$ . Определить центроиды.

53. Решить предыдущую задачу при условии

$$r < l.$$

54. Отрезок прямой постоянной длины скользит своими концами по двум данным неподвижным окружностям произвольных радиусов. Определить центроиды.

55. Угол постоянной величины движется в плоскости так, что его стороны  $a$  и  $b$  касаются двух окружностей  $(A)$  и  $(B)$ . Определить центроиды.

56. Пусть  $(A)$  есть подвижная кривая, а  $(A_1)$  — ее огибающая. Построим для этих двух линий им эквидистантные<sup>1)</sup>  $(A')$  и  $(A_1')$  и неизменно свяжем их соответственно с  $(A)$  и  $(A_1)$ . Доказать, что если расстояние от  $(A)$  до  $(A')$  равно расстоянию от  $(A_1)$  до  $(A_1')$ , то при движении кривой  $(A)$  линия  $(A_1')$  будет огибающей для  $(A')$ .

57. Прямая катится по окружности (без скольжения). Найти огибающие окружности постоянного радиуса  $r$ , описанной из центра, лежащего на этой прямой.

58. Окружность  $(\Gamma)$  радиуса  $r$  неподвижна. По ней катится (снаружи) окружность  $(\Gamma_1)$  радиуса  $r_1$ . Найти огибающую эвольвенты круга радиуса  $\rho < r_1$  при условии, что как этот круг, так и его эвольвента неизменно связаны с  $(\Gamma_1)$ .

59. Окружность  $(\Gamma)$  неподвижна, окружность же  $(\Gamma_1)$  катится по ней (без скольжения). Найти огибающую одного из диаметров подвижного круга  $(\Gamma_1)$ .

60. Даны три окружности  $(\Gamma)$ ,  $(\Gamma_1)$  и  $(\Gamma_2)$  с радиусами  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , при условии:

$$r > r_1 > r_2; \quad r_1 < 2r_2.$$

Окружность  $(\Gamma_2)$  катится внутри  $(\Gamma_1)$ , при этом одна из ее точек описывает эпициклоиду. Найти огибающую этой эпициклоиды (считая ее неизменно связанной с  $(\Gamma_1)$ ), когда круг  $(\Gamma_1)$  катится снаружи круга  $(\Gamma)$ .

61. Парабола катится без скольжения по неподвижной прямой. Определить траекторию ее фокуса.

62. Цепная линия катится без скольжения по неподвижной прямой. Найти огибающую ее основания.

Определить отсюда эвольвенту цепной линии.

63. Эпициклоида катится по неподвижной прямой. Определить траекторию центра ее основания (круга).

<sup>1)</sup> Если на всех нормалях кривой отложить постоянный (по длине) отрезок, то геометрическое место его концов называется эквидистантой по отношению к данной кривой.

64. Прямая катится без скольжения по кривой  $(\Gamma)$ . С этой прямой неизменно связана точка  $M$ . Доказать соотношение

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{\rho' - d} + \frac{1}{d} \right) \cos \theta,$$

где  $\rho$  есть радиус кривизны неподвижной кривой  $(\Gamma)$ ,  $\rho'$  — радиус кривизны рулетты в соответствующей точке,  $d$  — расстояние между соответствующими точками рулетты и кривой  $(\Gamma)$ , и наконец  $\theta$  — угол между прямой  $d$  и нормалью к  $(\Gamma)$ .

65. По неподвижной окружности  $(\Gamma)$  катится без скольжения окружность  $(\Gamma_1)$  с неизменно связанной с ней точкой  $M$ . Доказать, что существует зависимость:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\rho - a} = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{\cos \varphi},$$

где  $a$  — расстояние от точки касания окружностей  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  до точки  $M$ ,  $\rho$  — радиус кривизны рулетты в точке  $M$ ,  $\varphi$  — угол между отрезком  $a$  и нормалью в точке касания кругов,  $R$  и  $R_1$  — радиусы окружностей  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  (Савари).

66. Кривая  $(\Gamma_1)$  катится без скольжения по неподвижной кривой  $(\Gamma)$ . Неизменно связанная с ней кривая  $(C_1)$ , участвуя в этом движении, огибает некоторую кривую  $(C)$ . Доказать соотношение

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \left( \frac{1}{r_1 + d} + \frac{1}{r - d} \right) \cos \varphi,$$

где  $\rho$  и  $\rho_1$  — радиусы кривизны кривых  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  в их общей точке,  $r$  и  $r_1$  — радиусы кривизны кривых  $(C)$  и  $(C_1)$  в их общей соответствующей точке,  $d$  — расстояние между этими точками, и  $\varphi$  — угол между прямой  $d$  и нормалью к кривой  $(\Gamma)$ . (Формула Савари).

67. Даны две кривые  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  с общей точкой касания  $\Omega$  ( $\Gamma_1$  катится без скольжения по  $\Gamma$ ). Кроме того дана кривая  $(C_1)$ , неизменно связанная с  $(\Gamma)$ . Считая известными положения центров кривизны (в точке  $\Omega$ ) кривых  $(\Gamma)$ ,  $(\Gamma_1)$  и  $(C_1)$ , найти центр кривизны огибающей кривой  $(C_1)$ , соответствующий точке  $\Omega$ . (Бобилье).

68. Кривая  $(\Gamma')$  катится без скольжения по кривой  $(\Gamma)$ . Неизменно связанная с  $(\Gamma')$  кривая  $(C')$  огибает некоторую (неподвижную) кривую  $(C)$ . Доказать, что две прямые линии, из которых одна соединяет центры кривизны  $(\Gamma)$  и  $(C)$ , а другая соединяет центры кривизны  $(\Gamma')$  и  $(C')$ , пересекаются на перпендикуляре, восстановленном из мгновенного центра к общей нормали кривых  $(C)$  и  $(C')$ . (Теорема Бура).

69. По неподвижной окружности  $(\Gamma)$  катится без скольжения окружность  $(\Gamma_1)$ . Определить геометрическое место центров кривизны траекторий, описываемых бесконечно удаленными точками, неизменно связанными с подвижным кругом  $(\Gamma_1)$ .

70. По неподвижной окружности  $(\Gamma)$  катится без скольжения окружность  $(\Gamma_1)$ . Определить геометрическое место тех точек (неизменно связанных с  $\Gamma_1$ ), траектории которых имеют в данный момент центры кривизны на бесконечности (точки перегиба траекторий).

71. Доказать, что оба геометрических места (круги) двух предыдущих задач равны друг другу и симметрично расположены один к другому относительно мгновенного центра вращения ( $\Gamma_1$ ) и ( $\Gamma$ ).

72. Если плоскость перемещается по другой плоскости, то в каждом ее положении существует на ней бесконечное множество точек, которые проходят точки перегиба на своих траекториях. Определить геометрическое место таких точек.

73. Кривая неизменной формы скользит одной из своих точек вдоль по данной неподвижной кривой, оставаясь к ней касательной в этой точке. Доказать, что нормаль к траектории любой точки подвижной кривой проходит через центр кривизны неподвижной кривой, соответствующий точке касания. Кроме того, доказать, что нормали к подвижной кривой, проведенные через этот центр кривизны, пересекают ее в точках касания с огибающей.

74. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, построить центр кривизны у следующих кривых: 1) трактриса, 2) логарифмическая спираль.

75. Две кривые неизменной формы катятся соответственно по двум неподвижным кривым так, что угол их пересечения остается постоянным.

Доказать, что нормаль к кривой, описанной их точкой пересечения, проходит через общую точку двух прямых, соединяющих центры кривизны подвижных кривых (соответствующих точке пересечения) с соответствующими точками касания с неподвижными кривыми.

76. Прямая перемещается в плоскости, оставаясь нормалью некоторой данной кривой. Определить на ней точку касания ее с огибающей.

77. Треугольник при движении меняет свою форму (не меняя величины углов). Его основание, касаясь данной кривой, скользит своими концами по двум другим данным кривым.

Построить нормаль к траектории его вершины.

78. Прямолинейный отрезок переменной длины скользит концами по двум данным неподвижным кривым, одновременно касаясь другой неподвижной кривой.

Построить нормаль к траектории той точки этого отрезка, которая делит его в данном отношении.

79. Доказать правильность построений центра кривизны эллипса следующими пятью способами:

1. Построив касательную  $PT$  и нормаль  $MB$  в данной точке  $M$  эллипса (рис. 3), соединим точку  $B$  с точкой  $T$  (их происхождение ясно из чертежа). Далее находим точку пересечения  $PA$  и  $BT$  (обозначим ее через  $F$ ).

Перпендикуляр к  $MF$ , проведенный через точку  $F$ , пересечет нормаль в центре кривизны эллипса, соответствующем точке  $M$ .

2. В точке  $A$  пересечения нормали с осью эллипса строим перпендикуляр к этой нормали и продолжаем его до пересечения с диаметром  $OM$ . Наконец, опуская из этой точки пересечения  $D$  перпендикуляр на ось  $OT$  и продолжая его до встречи с нормалью  $MB$ , найдем на ней центр кривизны эллипса  $C$ .

3. Через точку  $M$  проводим прямую, параллельную большой оси эллипса, до пересечения с  $PA$ . Из найденной из точки пересечения  $Q$

опускаем перпендикуляр  $QC$  на большую ось. Его точка  $C$ , лежащая на нормали  $MB$ , определит центр кривизны.

4. Из точек пересечения нормали эллипса с осями, восстанавливаем перпендикуляры (к осям)  $AR$  и  $BR$ . Из их точки пересечения  $R$  опускаем перпендикуляр на диаметр  $OM$ . Точка пересечения этого перпендикуляра с нормалью  $MB$  определит центр кривизны.

5. Перпендикуляр, восстановленный из  $O$  к диаметру  $OM$ , пересекает нормаль  $MB$  в точке, симметричной центру кривизны относительно середины отрезка нормали между осями эллипса.

80. Доказать правильность следующих построений центра кривизны параболы в данной на ней точке  $M$  (рис. 4).

1. Строим нормаль  $MC$  и из точки пересечения ее с осью параболы восстанавливаем перпендикуляр  $PQ$  (к нормали). В точке  $Q$  его пересечения с прямой  $MQ$ , параллельной оси параболы, строим перпендикуляр к  $MQ$ . Точка  $C$  пересечения нормали с этим перпендикуляром будет центром кривизны параболы.

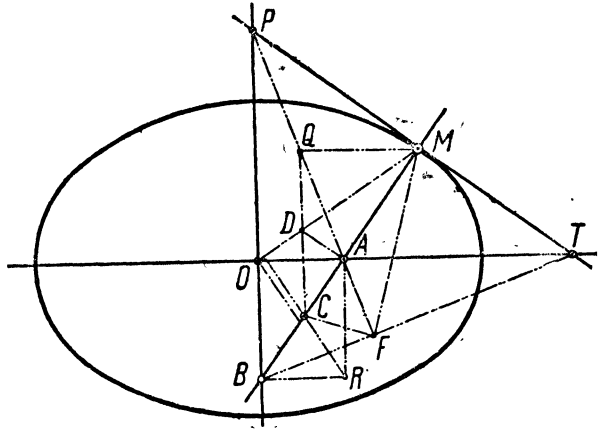


Рис. 3.

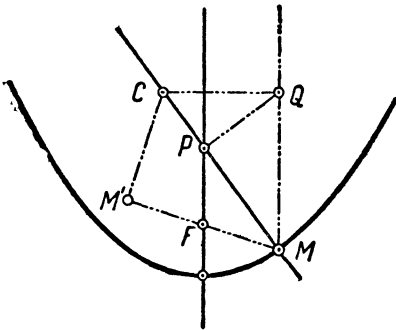


Рис. 4.

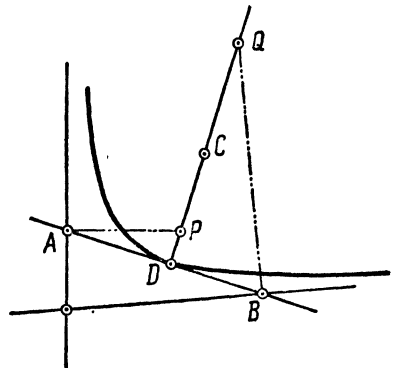


Рис. 5.

2. Через данную точку  $M$  и фокус параболы  $F$  проводим прямую так, чтобы  $MF = M'F$ . В точке  $M'$  строим перпендикуляр  $M'C$  к  $MM'$ , который и определит своим пересечением с нормалью центр кривизны параболы.

**81.** Доказать правильность следующего построения центра кривизны гиперболы:

Строим в данной точке гиперболы касательную  $AB$  (рис. 5) и нормаль  $DQ$ . Тогда середина отрезка нормали  $PQ$ , заключенная между перпендикулярами к асимптотам, в точках пересечения их с касательной, будет центром кривизны.

**82.** Эллипс задан своими фокусами и осью. Построить в произвольно взятой на нем точке соответствующий центр кривизны.

**83.** Треугольник неизменной формы движется в своей плоскости так, что две его стороны  $AB$  и  $AC$  огибают две данные окружности. Построить центр кривизны для траектории вершины  $A$  этого треугольника.

**84.** Эллипс неизменной формы катится без скольжения по неподвижной прямой. Построить центр кривизны траектории его фокуса.

## ГЛАВА II.

### ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

**85.** Доказать, что фокальная плоскость  $\pi$  любой точки  $Q$ , лежащей на плоскости  $\sigma$ , проходит через фокус  $P$  плоскости  $\sigma$ .

**86.** Доказать, что все диаметральные плоскости линейного комплекса параллельны аксиальному направлению этого комплекса.

**87.** Доказать, что фокус  $Q$  плоскости  $\sigma$ , содержащей некоторую точку  $P$ , лежит в фокальной плоскости  $\pi$  точки  $P$ .

**88.** Доказать, что плоскость, параллельная аксиальному направлению линейного комплекса, есть диаметральная плоскость этого комплекса.

**89.** Доказать, что фокусы всех плоскостей пучка лежат на одной и той же прямой.

**90.** Дана произвольная прямая. Показать, что фокальные плоскости всех ее точек пересекаются по одной прямой. (Эти две прямые называются сопряженными прямыми комплекса).

**91.** Доказать, что всякая прямая линейного комплекса совпадает со своей сопряженной прямой, и наоборот, всякая прямая, совпадающая со своей сопряженной, принадлежит комплексу.

**92.** Сопряженные прямые линейного комплекса не пересекаются.

**93.** Прямая, принадлежащая линейному комплексу, пересекает одну из сопряженных прямых. Доказать, что она пересекает и другую сопряженную прямую.

**94.** Прямая, сопряженная бесконечно удаленной прямой называется диаметром комплекса. Доказать, что все диаметры комплекса параллельны друг другу.

**95.** Если прямая, соединяющая фокусы пучка параллельных плоскостей, ортогональна им, то она называется осью линейного комплекса.

Доказать, что всякая прямая, принадлежащая этому комплексу и пересекающая ось, ортогональна оси.

**96.** Прямая, пересекающая две взаимно сопряженные прямые, принадлежит линейному комплексу.

**97.** Прямая, ортогонально пересекающая ось линейного комплекса, принадлежит этому комплексу.

98. Плоскость, параллельная двум взаимно сопряженным прямым, есть диаметральная плоскость линейного комплекса.
99. Плоскость, ортогональная оси линейного комплекса, пересекает эту ось и произвольную пару взаимно сопряженных прямых комплекса в трех точках, лежащих на одной прямой.
100. Общий перпендикуляр двух взаимно сопряженных прямых пересекает ось комплекса под прямым углом.
101. Прямые, сопряженные прямым какой-нибудь плоскости, все проходят через фокус этой плоскости.
102. Прямые, сопряженные прямым, проходящим через одну точку, все лежат в фокальной плоскости этой точки.
103. Прямые, сопряженные диаметрам комплекса, все лежат на бесконечно удаленной плоскости.
104. Если две прямые пересекаются, то и сопряженные им прямые тоже пересекаются.
105. Пара взаимно сопряженных прямых пересекает произвольную плоскость в двух точках, лежащих на одной прямой с фокусом этой плоскости.
106. Построить фокус плоскости по данным двум парам взаимно сопряженных прямых.
107. Построить сопряженную данной прямой, если известны две пары взаимно сопряженных прямых комплекса.
108. Даны две пары взаимно сопряженных прямых и плоскость. Построить прямую, сопряженную бесконечно удаленной прямой этой плоскости.
109. Дана совокупность плоскостей, имеющих общую точку. Определить геометрическое место фокусов этих плоскостей.
110. Прямые линейного комплекса, проходящие через две несопряженные друг другу и нележащие в одной плоскости прямые, образуют поверхность второго порядка.
111. Совокупность прямых линейного комплекса, пересекающих некоторую прямую и параллельных плоскости, не параллельной этой прямой, образует гиперболический параболоид.
112. Две пары взаимно сопряженных прямых комплекса лежат на одной поверхности второго порядка.
113. Доказать, что прямые, общие двум линейным комплексам, образуют линейную конгруэнцию.
114. Прямые линейной конгруэнции, пересекающие произвольно данную прямую, образуют поверхность второго порядка.
115. Все прямые линейной конгруэнции пересекают две вполне определенные прямые (эти прямые называются директрисами конгруэнции).
116. Доказать, что два произвольных линейных комплекса имеют общую пару взаимно сопряженных прямых.
117. Общие прямые трех линейных комплексов образуют линейчатую поверхность второго порядка.
118. Общие прямые линейного комплекса и линейной конгруэнции образуют линейчатую поверхность второго порядка.
119. Четыре линейных комплекса имеют две общих прямых (вещественных или мнимых).

120. Два линейных комплекса и одна линейная конгруэнция имеют пару общих прямых (вещественных или мнимых).

121. Две линейных конгруэнции имеют две общих прямых (вещественных или мнимых).

122. Дано пять прямых, не лежащих попарно в одной плоскости. При этом никакие четыре из них не лежат на одной поверхности второго порядка. Доказать, что такие пять прямых определяют один и только один линейный комплекс прямых.

123. Если прямая, совершающая бесконечно малое движение, ортогональна к траектории одной из своих точек, то она будет ортогональна и к траекториям всех своих точек.

124. Доказать, что нормали к траекториям всех точек фигуры неизменного вида при бесконечно малом ее перемещении принадлежат линейному комплексу.

125. Доказать, что нормальные плоскости к траекториям всех точек подвижной прямой пересекаются по одной прямой.

126. Касательная к траектории некоторой точки  $F$  подвижной фигуры имеет своей сопряженной прямой характеристику фокальной плоскости точки.

127. Доказать, что прямая, сопряженная с характеристикой подвижной плоскости, ортогональна ей.

128. Пучок плоскостей неизменной формы движется в пространстве. Показать, что фокусы его плоскостей все лежат на одной прямой.

129. Что можно сказать о траектории точки, если известно, что ее нормальная плоскость проходит через данную неподвижную точку?

130. Соприкасающаяся плоскость траектории точки проходит через данную неподвижную точку.

Исследовать траекторию.

131. Доказать, что всякое перемещение плоскости можно осуществить двумя последовательными вращениями вокруг двух взаимно ортогональных осей.

132. Плоскость движется вместе с фиксированной на ней прямой. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из фокуса этой плоскости на прямую, есть нормаль к линейчатой поверхности, образованной этой прямой.

133. Касательные к траекториям точек характеристики плоскости лежат все в этой же плоскости.

134. Определить на характеристике подвижной плоскости ту точку, траектория которой касается этой характеристики.

135. Точки прямой, движение которой характеризуется четырьмя условиями, описывают некоторые определенные траектории (кривые).

136. Если движение прямой характеризуется тремя условиями, то все ее точки описывают некоторые определенные поверхности (surfaces trajectoires).

137. Показать, что если прямую рассматривать без фиксированных на ней точек, то, подчиняя ее движение трем условиям, получим линейчатую поверхность.

138. Доказать, что пять условий вполне определяют движение фигу-



ры неизменной формы. При этом каждая точка фигуры описывает определенную криволинейную траекторию<sup>1)</sup>.

139. Доказать, что заданием четырех условий движение фигуры неизменной формы не вполне определено. Именно, каждая точка фигуры будет описывать некоторую поверхность.

140. Доказать, что нормали к траекториям всех точек фигуры неизменного вида при бесконечно малом ее перемещении, определяемом пятью условиями, принадлежат линейному комплексу.

141. Бесконечно малое перемещение фигуры неизменной формы характеризуется четырьмя условиями. Доказать, что совокупность нормалей к поверхностям, описанным всеми точками подвижной фигуры, принадлежит конгруэнции линейного комплекса.

142. Доказать, что линия фокусов подвижного пучка плоскостей неизменной формы является мгновенной осью вращения для оси этого пучка.

143. Доказать, что бесконечно малое перемещение фигуры неизменной формы может быть осуществлено двумя последовательными вращениями около пары взаимно сопряженных прямых комплекса нормалей к траекториям точек.

144. Прямая, пересекающая две сопряженные прямые подвижной фигуры, ортогональна к траекториям всех своих точек.

145. Ортогональные проекции двух взаимно сопряженных прямых на плоскость, неизменно связанную с подвижной фигурой, пересекаются на характеристике этой плоскости.

146. Построить характеристику плоскости, если известны две пары взаимно сопряженных прямых.

147. Характеристика плоскости есть ортогональная проекция прямой, сопряженной перпендикулярно к этой плоскости.

148. Нормали к траекториям точек подвижной фигуры, пересекающие некоторую прямую, неизменно связанную с этой фигурой, пересекают и сопряженную ей прямую.

149. Доказать параллельность прямых, сопряженных бесконечно удаленным прямым плоскостей, неизменно связанных с подвижной фигурой.

150. Доказать, что наиболее общее бесконечно малое перемещение твердого тела есть геликоидальное движение, т. е. вращение вокруг некоторой оси и одновременно скольжение вдоль этой оси.

151. Если фигура неизменной формы непрерывно перемещается в пространстве, то ее мгновенная винтовая ось совпадает с осью комплекса нормалей к траекториям всех ее точек.

152. При движении фигуры неизменной формы мгновенная винтовая ось образует две линейчатые поверхности: одну неподвижную в пространстве (неподвижный аксоид), другую подвижную (подвижный аксоид), связанную с движущейся фигурой. Доказать, что при движении подвижный аксоид катится по неподвижному, одновременно скользя вдоль общей образующей (Понселе).

---

<sup>1)</sup> В последующих задачах такой тип движения будет для сокращения речи часто называться просто движением. Движение же, определяемое другим числом условий, будет каждый раз соответственно охарактеризовано.

153. Подвижная фигура неизменной формы имеет одну неподвижную точку. Каковы будут аксоиды.

154. Фигура неизменной формы перемещается так, что пять ее точек скользят по пяти данным поверхностям.

Построить:

1) нормальную плоскость к траектории произвольной точки, неизменно связанной с подвижной фигурой;

2) нормаль к поверхности, образованной кривой, неизменно связанной с подвижной фигурой;

3) линию касания поверхности, неизменно связанной с подвижной фигурой, со своей огибающей;

4) мгновенную винтовую ось.

155. Доказать, что если прямая касается траектории одной из своих точек, то и сопряженная ей прямая касается траектории одной из своих точек; при этом общий перпендикуляр этих прямых проходит через обе точки касания.

156. Прямая  $g$  есть характеристика подвижной плоскости.

Доказать, что:

1) прямая  $g'$ , сопряженная  $g$ , есть тоже характеристика некоторой плоскости  $\sigma'$  ( $\sigma$  и  $\sigma'$  принадлежат одной фигуре);

2) плоскости  $\sigma$  и  $\sigma'$  взаимно ортогональны;

3) фокус плоскости  $\sigma$  лежит на прямой  $g'$ , а фокус плоскости  $\sigma'$  — на прямой  $g$ ;

4) прямая, соединяющая фокусы плоскостей  $\sigma$  и  $\sigma'$ , ортогональна прямым  $g$  и  $g'$ .

157. Прямая, неизменно связанная с подвижной фигурой, образует в процессе движения линейчатую поверхность. Доказать, что нормали к этой поверхности вдоль одной образующей все лежат на гиперболическом параболоиде; на нем же будет лежать прямая, сопряженная с этой образующей.

158. Какую поверхность образуют характеристики плоскостей пучка неизменной формы?

159. Перемещение фигуры неизменной формы определяется четырьмя условиями (две степени свободы). Доказать, что нормали к поверхностям, описываемым ее точками, все проходят через две прямые.

160. Прямая  $l$  неизменно связана с подвижной фигурой, движение которой определено четырьмя условиями (две степени свободы). Определить геометрическое место прямых, сопряженных бесконечно удаленным прямым плоскостей (плоскости ортогональны  $l$ ).

161. Четыре точки подвижной фигуры неизменной формы описывают четыре данные поверхности. Построить:

1) нормаль к поверхности, описываемой произвольной точкой этой фигуры;

2) точки касания некоторой поверхности, неизменно связанной с подвижной фигурой, со своей огибающей.

## ГЛАВА III.

## СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ.

**162.** Концы отрезка  $AB$  (непостоянной длины) бесконечно мало переместились вдоль двух прямых  $a$  и  $b$  так, что точка  $C$ , делящая  $AB$  в постоянном отношении, описала прямолинейную траекторию (бесконечно малую).

Доказать, что прямая  $AB$  при этом повернулась вокруг одной из своих точек; построить эту точку.

**163.** Дана кривая  $(\Gamma)$  и прямая  $a$ . Прямой угол, стороны которого параллельны касательной и нормали кривой  $(\Gamma)$  в ее точке  $M$ , имеет вершину в основании перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $a$ . Зная центр кривизны  $(\Gamma)$  в точке  $M$ , построить мгновенный центр вращения этого угла при бесконечно малом перемещении точки  $M$  по кривой  $(\Gamma)$ .

**164.** Даны две неподвижные окружности  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$ , пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $P$  проходит прямая  $AB$ , пересекающая эти окружности соответственно в точках  $A$  и  $B$ . На отрезке  $AB$  построен треугольник  $ABC$ , подобный данному. Определить траекторию вершины  $C$  при вращении прямой  $AB$  вокруг точки  $P$ .

**165.** Треугольник  $OMP$  перемещается так, что вершина  $O$  остается неподвижной, точка  $M$  описывает окружность, проходящую через  $O$ , а сторона  $MP$  касается этой окружности в точке  $M$ . Определить траекторию точки  $P$  и построить нормаль к ней.

**166.** На касательной в точке  $M$  окружности  $(\Gamma)$  отложен отрезок  $MP$ , видимый из  $O$  (точка окружности) под прямым углом. Доказать, что:

- 1) при движении точки  $M$  по кругу  $(\Gamma)$  точка  $P$  описывает циссоиду;
- 2) нормаль к циссоиде в точке  $P$  проходит через точку пересечения диаметра (проходящего через  $M$ ) и перпендикуляра к середине  $OP$ .

**167.** Прямой угол движется в своей плоскости так, что одна из его сторон катится без скольжения по данной окружности. На другой его стороне от вершины  $A$  отложен отрезок  $AB$ , равный радиусу данного круга. Определить траекторию конца  $B$  этого отрезка.

**168.** Прямой угол, перемещаясь, касается своими двумя сторонами соответственно двух софокусных кривых 2-го порядка. Определить траекторию его вершины.

**169.** На неподвижной плоскости  $\pi_0$  фиксированы точка  $O_0$  и кривая  $(\Gamma_0)$ , а на подвижной плоскости  $\pi$  — точка  $O$  и кривая  $(\Gamma)$ . При этом фигура, образованная  $O_0$  и  $(\Gamma_0)$ , равна фигуре, образованной  $O$  и  $(\Gamma)$ . При перемещении плоскости  $\pi$  по  $\pi_0$  точка  $O$  движется по кривой  $(\Gamma_0)$ , а кривая  $(\Gamma)$  проходит через точку  $O_0$ . Определить центры тяжести при условии, что:

- 1)  $(\Gamma_0)$  и  $(\Gamma)$  равные окружности;
- 2)  $(\Gamma_0)$  и  $(\Gamma)$  прямые.

**170.** Прямая, проходящая через неподвижную точку, движется так, что одна из ее точек описывает данную неподвижную прямую. Определить центры тяжести.

**171.** Прямая, проходящая через неподвижную точку, движется так,

что одна из ее точек описывает спираль Архимеда. Определить центроиды.

172. Круг ( $\Gamma$ ) вращается вокруг одной из своих точек. По нему (извне) катится без скольжения другой круг ( $\Gamma_1$ ) равного радиуса так, что их общая точка касания перемещается по прямой, проходящей через неподвижную точку круга ( $\Gamma$ ). Определить центроиды.

173. На неподвижной плоскости  $\pi$  фиксирована окружность ( $\Gamma$ ) и на ней взята неподвижная точка  $P$ . По этой плоскости перемещается некоторая плоскость  $\pi'$  так, что прямая, неизменно с ней связанная, постоянно проходит через точку  $P$  и описывает одной из своих точек окружность ( $\Gamma$ ). Определить центроиды.

174. Плоскость  $\pi$  движется по плоскости  $\pi_0$ . На плоскости  $\pi$  фиксированы три прямые  $a_1, a_2, a_3$ . Исследовать треугольник, образованный центрами кривизны  $C_1, C_2, C_3$  огибающих этих прямых (в точках касания с прямыми  $a_1, a_2, a_3$ ).

175. Построить центр кривизны подэры, зная центр кривизны соответствующей точки кривой (М. Д'Окань).

176. Построить центр кривизны лемнискаты Бернулли.

177. Построить центр кривизны циссоиды.

178. Прямая катится без скольжения по циклоиде. От точки касания откладывается отрезок, пропорциональный радиусу кривизны циклоиды в этой точке. Найти траекторию конца этого отрезка (Барбарен).

179. Прямая получила бесконечно малое перемещение. Определить геометрическое место центров кривизны траекторий ее точек (Rivals).

180. Прямая перемещается в плоскости циклоиды, пересекая ее под постоянным углом. Найти огибающую этой прямой.

181. Лучи, выходящие из точки  $S$ , отражаются от окружности ( $\Gamma$ ). Определить их огибающую.

182. Две фиксированные прямые плоскости  $\pi$ , скользящей по плоскости  $\pi_0$ , огибают соответственно две подобные кривые (прямое подобие); касаясь их в гомологических точках. Определить огибающую произвольной прямой плоскости  $\pi$ .

183. Плоскость  $\pi$  движется по плоскости  $\pi_0$  так, что две ее прямые огибают соответственно две окружности. Доказать, что произвольная прямая, лежащая на плоскости  $\pi$ , огибает тоже окружность.

184. Точка движется по окружности, описанной около данного треугольника. Основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона). Определить огибающую этой прямой.

185. Дана неподвижная прямая и на ней фиксирована точка  $M$ . Эллипс неизменной формы движется в своей плоскости так, что остается касательным к этой прямой в точке  $M$ . Определить траекторию его центра.

186. Подвижная хорда  $AB$  переменной длины при своем движении отсекает на неподвижной кривой ( $\Gamma$ ) сегмент постоянной площади. Построить центр кривизны огибающей этой хорды.

187. Кривая ( $\Gamma$ ) катится без скольжения по прямой. Точка  $M$ , неизменно связанная с ней, описывает рулетку. Найти зависимость между дугой этой рулетки и соответствующей дугой кривой ( $\Gamma_1$ ), образованной

точками пересечения касательных к  $(\Gamma)$  с прямыми, проходящими через  $M$  и образующими постоянный угол  $\theta$  с этими касательными.

188. Логарифмическая спираль катится без скольжения по прямой. Определить траекторию ее полюса.

189. Логарифмическая спираль катится без скольжения по прямой. Определить траекторию ее центра кривизны, соответствующего точке касания.

190. Эвольвента круга катится без скольжения по прямой. Определить траекторию ее центра кривизны, соответствующего точке касания.

191. Циклоида катится без скольжения по прямой. Определить траекторию ее центра кривизны, соответствующего точке касания.

192. Эпициклоида катится без скольжения по прямой. Определить траекторию ее центра кривизны, соответствующего точке касания.

193. Определить поверхность, образованную касательными к траекториям всех точек подвижной прямой.

194. Определить огибающую соприкасающихся плоскостей к траекториям всех точек подвижной прямой.

195. Определить геометрическое место фокусов плоскостей предыдущей задачи.

196. Через данную точку проведены плоскости, параллельные соприкасающимся плоскостям траекторий точек подвижной прямой. Найти огибающую этих плоскостей.

197. Определить поверхность, образованную осями кривизны траекторий всех точек подвижной прямой.

198. Пусть при некотором положении подвижной прямой одна из ее точек стала точкой перегиба своей траектории. Определить для этого случая огибающую семейства соприкасающихся плоскостей к траекториям всех точек этой прямой.

199. Прямая при своем движении образует поверхность второго порядка. Какую поверхность образует при этом сопряженная ей прямая?

200. Прямая касается к траектории одной из своих точек. Доказать, что касательные к траектории всех точек этой прямой имеют огибающую. Определить эту огибающую.

201. Определить поверхность, образованную главными нормальными к траекториям всех точек подвижной прямой.

202. Определить геометрическое место центров кривизны траекторий всех точек подвижной кривой.

203. Определить геометрическое место центров соприкасающихся сфер траекторий всех точек подвижной прямой (Нааг).

204. Три фиксированные точки подвижной прямой движутся по трем данным параллельным плоскостям. Определить поверхность, по которой движется произвольная (фиксированная) точка этой прямой.

205. Три фиксированные точки подвижной прямой движутся по трем данным пересекающимся плоскостям. Найти поверхность, по которой движется всякая другая точка этой прямой.

206. Прямая движется так, что три фиксированные на ней точки перемещаются по трем неподвижным плоскостям, параллельным одной прямой. Определить поверхность траекторий произвольной точки подвижной прямой.

**207.** Прямая движется так, что три фиксированные на ней точки перемещаются по трем неподвижным сферам с центрами на одной прямой. Определить поверхность траекторий произвольной точки подвижной прямой.

**208.** Четыре точки подвижной прямой движутся по четырем данным плоскостям. Найти траекторию произвольной точки этой прямой.

**209.** Прямая перемещается так, что четыре фиксированные на ней точки движутся по четырем данным сферам с центрами на одной плоскости. Определить траектории других точек этой прямой.

**210.** Движение прямой характеризуется двумя степенями свободы. Определить огибающую касательных плоскостей к поверхностям траекторий (surface trajectoire) для всех точек этой прямой.

**211.** Подвижная прямая обладает двумя степенями свободы. Сколько может быть на ней точек, траектории которых касаются асимптотических линий поверхностей траекторий?

**212.** Подвижная прямая имеет две степени свободы. Сколько может быть на ней таких точек, у которых соприкасающиеся плоскости траекторий ортогональны к соответствующим поверхностям траекторий?

**213.** Подвижная прямая имеет две степени свободы. Сколько может быть на ней точек, траектории которых касаются линий кривизны соответствующих поверхностей траекторий?

**214.** Подвижная прямая имеет две степени свободы. Сколько может быть на ней точек, являющихся параболическими точками соответствующих поверхностей траекторий?

**215.** Подвижная прямая имеет две степени свободы. Сколько на ней может быть точек, являющихся омбилическими точками соответствующих поверхностей траекторий?

**216.** Могут ли быть на подвижной прямой, имеющей две степени свободы, такие точки, в которых поверхности траекторий имеют среднюю кривизну, равную нулю?

**217.** Подвижная прямая имеет две степени свободы. Определить геометрическое место центров кривизны главных направлений ее поверхностей траекторий (для всех точек).

**218.** Плоскость  $\pi$  движется в пространстве, огибая поверхность  $\sigma$ . Доказать, что существует подвижная плоскость  $\pi'$ , перемещающаяся в плоскости  $\pi$  и одновременно катящаяся без скольжения по поверхности  $\sigma$ .

**219.** Ось пучка плоскостей неизменной формы касается к траектории одной из своих точек. Определить поверхность, образованную характеристиками этих плоскостей.

**220.** Дан подвижной пучок плоскостей неизменной формы. Характеристика каждой из этих плоскостей касается траектории одной из своих точек.

Определить:

1) геометрическое место этих точек касания;

2) огибающую нормальных плоскостей траекторий этих точек.

**221.** Характеристики плоскостей подвижного пучка касаются ребер возврата огибающих этих плоскостей.

Определить геометрическое место точек касания, соответствующих произвольному положению пучка.

**222.** Пучок плоскостей неизменной формы движется так, что его четыре фиксированные плоскости проходят через четыре неподвижные точки, лежащие на одной плоскости  $\pi$ .

Определить траекторию точки пересечения оси пучка с плоскостью  $\pi$ .

**223.** Пучок плоскостей неизменной формы перемещается так, что его четыре фиксированные плоскости касаются четырех данных неподвижных сфер с центрами на одной плоскости.

Определить поверхность, которой касается произвольно взятая плоскость этого пучка.

**224.** Пучок плоскостей неизменной формы перемещается так, что три его плоскости касаются трех данных сфер с центрами на одной прямой.

Определить огибающую произвольной плоскости этого пучка.

**224а.** Пучок плоскостей неизменной формы перемещается так, что его плоскости касаются некоторых неподвижных поверхностей.

Определить поверхность, образованную нормальными в точках касания (при определенном положении пучка).

**225.** Призма неизменной формы перемещается так, что три ее боковые грани постоянно проходят через три фиксированные точки неподвижной прямой.

Определить огибающие остальных боковых граней.

**226.** Пучок плоскостей неизменной формы перемещается так, что каждая его плоскость огибает некоторую поверхность.

Определить геометрическое место центров кривизны главных сечений этих поверхностей (в точках касания с плоскостями пучка).

**227.** Двугранный угол постоянной величины перемещается из начального положения в бесконечно близкое, при этом характеристика одной из его граней образовала прямой угол с его ребром. Определить положение характеристики второй его грани.

**228.** Траектория точки, движущейся по кривой линейчатой поверхности, изогональна к прямолинейным образующим. Доказать, что если эта траектория есть геодезическая линия, то она будет одновременно и стрикционной линией (О. Бонне).

**229.** Три взаимно ортогональные плоскости движутся, касаясь центральной поверхности второго порядка. Найти геометрическое место их общей точки пересечения.

**230.** Три взаимно ортогональные плоскости движутся, касаясь параболоида.

Определить геометрическое место их общей точки пересечения.

**231.** Три взаимно ортогональные плоскости перемещаются в пространстве, касаясь эллипса или гиперболы. Найти геометрическое место их общей точки пересечения.

**232.** Три взаимно ортогональные плоскости перемещаются в пространстве, касаясь параболы. Найти геометрическое место их общей точки пересечения.

**233.** Из всех точек прямой проведены нормали к алгебраической поверхности  $m$ -го порядка. Определить геометрическое место оснований этих нормалей.

**234.** Даны две прямые и алгебраическая поверхность  $m$ -го порядка.

Сколько можно построить нормалей к этой поверхности, пересекающих обе данные прямые?

235. Дана алгебраическая поверхность  $m$ -го порядка и произвольная плоскость. Сколько можно построить нормалей к данной поверхности, лежащих в этой плоскости?

236. Сколько можно провести нормалей из произвольной данной точки к алгебраической поверхности  $m$ -го порядка (Терквем)?

237. Фигура неизменной формы переместилась в бесконечно близкое положение. Определить:

1) геометрическое место таких ее точек, касательные к траекториям которых пересекаются в одной точке;

2) линейчатую поверхность, образованную этими касательными.

238. Найти огибающую нормальных плоскостей к траекториям тех точек твердого тела, у которых касательные к траекториям пересекаются в одной точке.

239. Фигура неизменной формы переместилась в бесконечно близкое положение. Определить геометрическое место таких ее точек, у которых соприкасающиеся плоскости к траекториям стационарны.

240. Подвижная фигура неизменной формы, имеющая две степени свободы, получила бесконечно малое смещение. Определить геометрическое место ее точек, которые при этом переместились по асимптотическим линиям своих поверхностей траекторий.

241. Определить геометрическое место точек подвижной фигуры (неизменной формы), имеющей две степени свободы, для которых соприкасающиеся плоскости траекторий ортогональны к соответствующим поверхностям траекторий.

242. Определить геометрическое место точек подвижной фигуры (неизменной формы), имеющей две степени свободы, которые являются параболическими точками своих поверхностей траекторий.

243. Определить геометрическое место точек, принадлежащих подвижной фигуре (неизменной формы), имеющей две степени свободы, являющихся в данный момент омбилическими точками соответствующих поверхностей траекторий.

244. Фигура неизменной формы, имеющая две степени свободы, получила бесконечно малое перемещение. Определить геометрическое место точек (связанных с данной фигурой), в которых средняя кривизна поверхностей траекторий равна нулю.

245. Плоскость  $\pi$  катится без скольжения по развертываемой поверхности. На этой плоскости фиксирована кривая ( $\Gamma$ ). Определить линии кривизны поверхности, образованной кривой ( $\Gamma$ ).

246. Две поверхности катятся одна по другой без скольжения и вращения. Определить зависимость между радиусами геодезической кривизны кривых (траектория общей точки касания).



# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



ГЛАВА I.

2. Ответы даны на рис. 1 и 2.
3. Ранги будут соответственно 3, 3, 4.
5.  $p=1$ .
6. Для рис. 23  $p=1$ ; для рис. 24  $p=2$ .
7. Заметим, что таким образом из отрезочного комплекса, не нарушая его связности, можно вынуть не более  $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$  отрезков; такое изъятие невыполнимо, когда отрезочный комплекс дерево, но тогда  $\alpha_1 - \alpha_0 + 1 = 0$ .

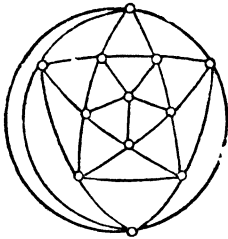


Рис. 1.

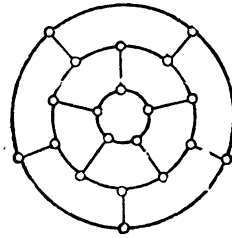


Рис. 2

10. Можно указать например следствие: 1) общее число вершин порядка 3 и треугольных граней не меньше 8; 2) куб единственный полиэдр с одинаковым числом  $\alpha_0$  и  $\alpha_3$ ; 3) нет полиэдров, имеющих одного порядка вершины или грани более чем с 5 ребрами и т. д.

11. Воспользоваться известным решением Эйлера задачи о мостах (см. например Успенский, 1. с.). Задача о кенигсбергских мостах сводится к комплексу рис. 3, относительно которого необходимо установить невозможность обхода отрезков его без пропусков и повторений. Такие задачи решаются при помощи теоремы (читатель легко ее докажет), что для возможности обхода необходимо и достаточно, чтобы комплекс имел не более двух вершин нечетного порядка.

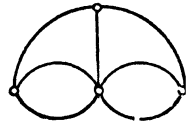


Рис. 3.

12. Заметим, что эта задача по характеру аналогична предшествующей: те обходы, которые производились с отрезками в последней, относятся к вершинам комплекса.

14. Для примера дадим преобразования к рис. 27—28, где поставлено  $E_3$ , необходимо делать переход гомотопно в  $E_2$  (рис. 4).

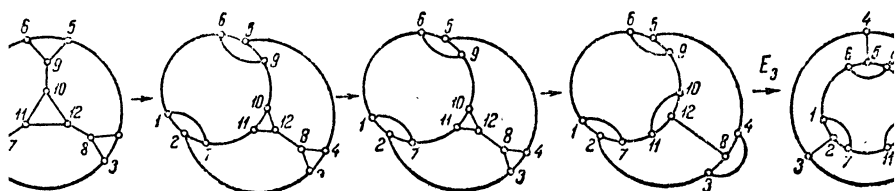


Рис. 4.

23. Даем ответ для  $n=7$   $C_7H_{16}$  (гептаны) (рис. 5).

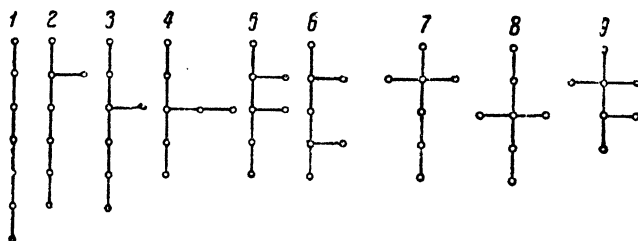


Рис. 5.

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| 1. Гептан             | 5. Диметил — 2 — 3 — пентан            |
| 2. Метил — 2 — гексан | 6. Диметил — 2 — 4 — пентан            |
| 3. Метил — 3 — гексан | 7. Диметил — 2 — 2 — пентан            |
| 4. Этил — 3 — пентан  | 8. Диметил — 3 — 3 — пентан            |
|                       | 9. Триметил — 2 — 2 — 3 — бутан        |
|                       | (— $CH_3$ метил; — $CH_2 - CH_3$ этил) |

25—28. Воспользоваться способом решения задачи 23.

33. Ответ дан на рис. 6.

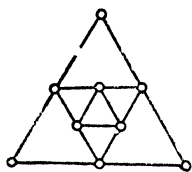


Рис. 6.

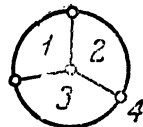
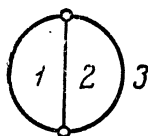
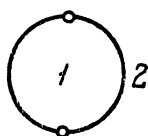


Рис. 7.

34. Укажем, что для двух, трех и четырех областей это несправедливо, как это легко усмотреть из рис. 7.

Отсюда вытекает между прочим, что четыре краски необходимы для карты на плоскости или на сфере; конечно тривиальные случаи, когда окраска возможна меньшим числом красок, здесь оставляются в стороне.

Теорема о четырех красках говорит, что для всякой карты (исключая указанные случаи) минимальное число необходимых различных цветов равно четырем.

35. Доказательство первой части для  $k < 4$  очевидно.

Наметим доказательство для случая четырехугольника, когда мы располагаем пятью красками. Раскрасим карту, полученную после изъятия одной стороны четырехугольника (рис. 8); пусть цифры обозначают различные цвета; ясно, что, имея в распоряжении пять красок, мы пятой

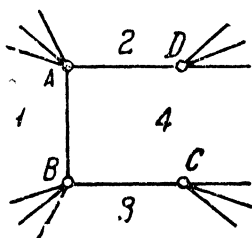


Рис. 8.

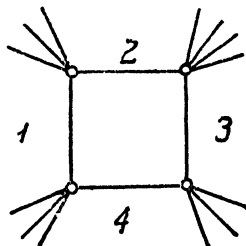


Рис. 9.

краской закрасим четырехугольник по восстановлении его четвертой стороны  $CD$ .

Однако, если даны только четыре краски, то все же требуемое заключение остается справедливым; пусть соседние с четырехугольником области окрашены в четыре различных цвета, указанные цифрами на рис. 9. Введем понятие цепки  $(n, m)$  — совокупности смежных по ребрам областей, последовательно окрашенных в цвета  $n$  и  $m$ ; так как две различные цепки  $(m, n)$  и  $(p, q)$ , не имеющие общих цветов, не могут

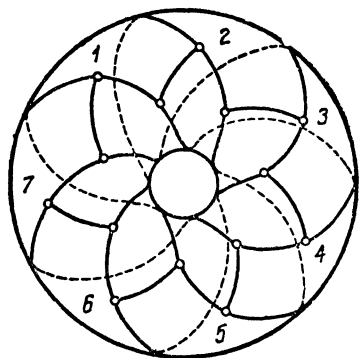


Рис. 10.

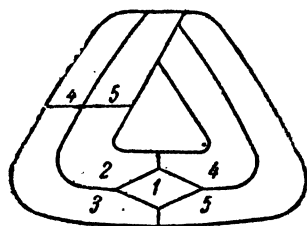


Рис. 10а.

пересекаться (читателю предоставляется это установить), то какая-нибудь пара из указанных четырех цветов должна принадлежать разным цепкам; пусть это будет с цепкой  $(2, 4)$ , т. е. область 2 принадлежит к одной цепке, область 4 — к другой. Произведем перестановку цветов в одной из них (в допустимости такой операции пусть читатель убедится самостоятельно), мы получим четырехугольник с четырьмя смежными областями, окрашенными в три разных цвета; остальной ход действий очевиден.

36. См. формулу (4) в задаче 10.

37. Можно воспользоваться способом, указанным в решении задачи 34.

39. Воспользоваться решением задачи 38.

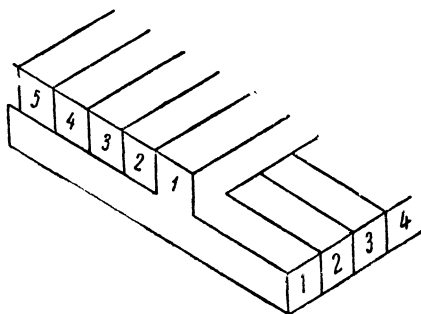


Рис. 11.

На рис. 10 изображено разбиение поверхности тора на семь шестиугольников, дающее наибольшее число смежных областей (А. А. Марков).

40. Ответ <sup>1)</sup> дан на рис. 10а.

41. См. рис. 11 <sup>2)</sup>.

## ГЛАВА II.

42. Гомеоморфизм вытекает на основании теоремы Пуанкаре из того, что: 1) обе ленты ориентируемы (убедиться в этом), 2) обе ленты имеют по два контура и наконеч, 3) обе двусвязны (показать это).

Тот же результат получается серией гомотопных преобразований (рис. 12).

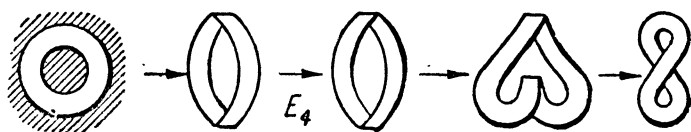


Рис. 12.

Гомотопен здесь лишь тот переход, где поставлено  $E_4$ ; здесь необходимо „прохождение сквозь“; нетрудно убедиться (это мы предоставляем читателю), что в  $E_4$  это преобразование изотопно.

Лента рис. 60 имеет зацепленные границы, что не имеет места у ленты рис. 59, в этом причина неизотопии лент в  $E_3$ .

43. Пусть читатель применит теорему Пуанкаре. Со своей стороны, приведем серию гомотопных преобразований (рис. 13).

<sup>1)</sup> См. Hunziker, l. c., стр. 60.

<sup>2)</sup> См. Eggera, l. c., а также Hunziker, l. c., стр. 61.

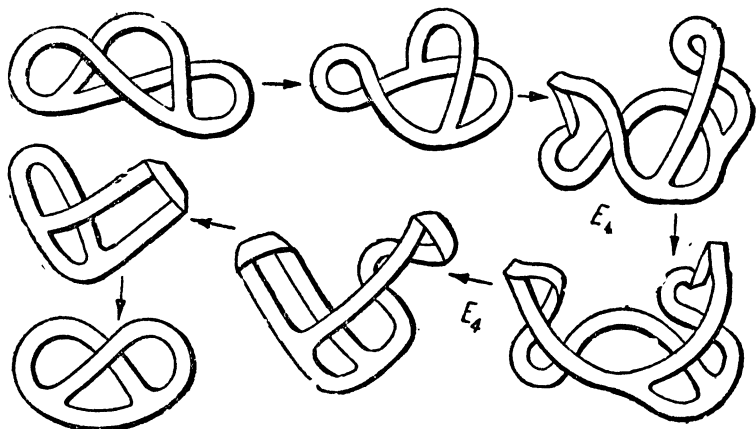


Рис. 13.

44. Сначала надо убедиться в их гомеоморфности — это мы предоставим читателю.

Изоотопия ленты рис. 63 очевидна, будем поэтому заниматься остальными, причем ограничимся двумя последними (рис. 14).

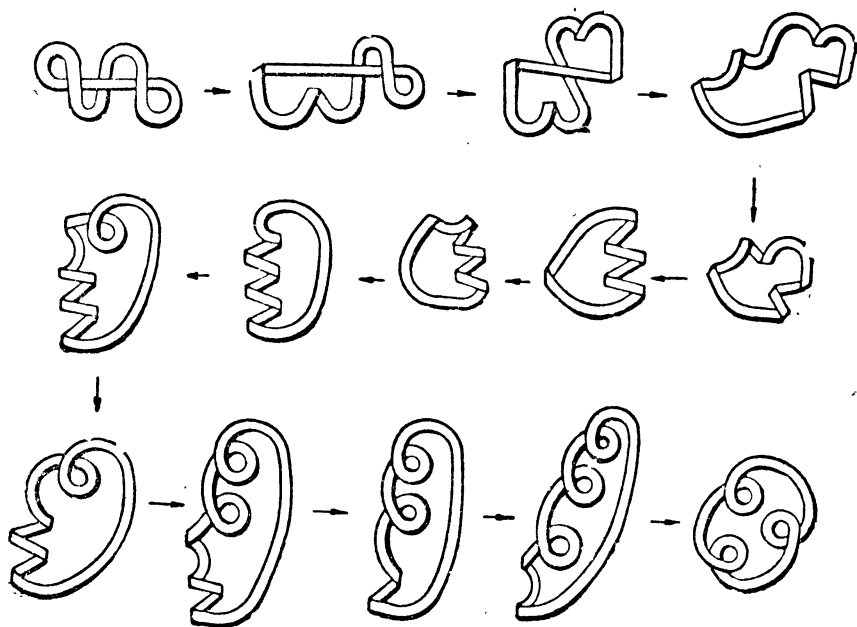


Рис. 14.

45. Относительно рис. 71 и 72 заметим, что обе ленты в  $E_3$  изоотопны поверхности, изображенной на рис. 15 (ср. с примером 52).

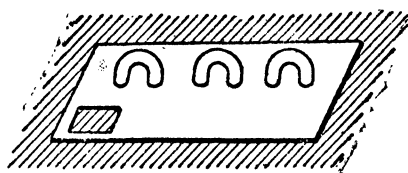


Рис. 15.

46. Пусть читатель применит теорему Пуанкаре, мы приведем серию в  $E_3$  гомотопных преобразований <sup>1)</sup> (рис. 16).

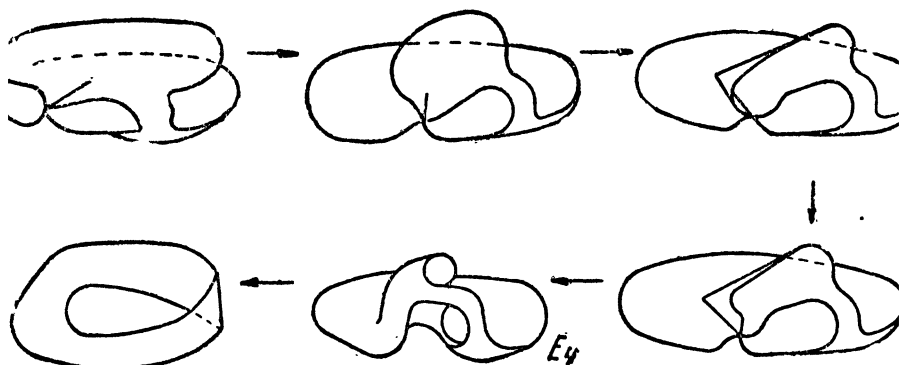


Рис. 16.

49. Воспользоваться решением задачи 52.

50. Дадим серию гомотопных преобразований (рис. 17); далее надо применить обычный способ.

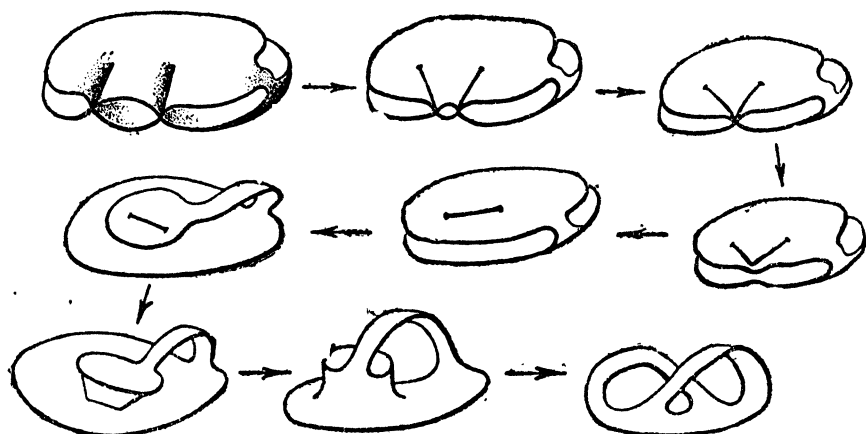


Рис. 17.

<sup>1)</sup> См. рис. 116 ЖЛФМО, т. II, стр. 103.



51. Воспользоваться теоремой Пуанкаре.

52. Докажем изотопию в  $E_3$  поверхностей рис. 85 и 86, тем самым будет установлен и их гомеоморфизм. Вдавливая край поверхности у точек  $AB$ , получим требуемый результат (рис. 18); остальные случаи доказываются аналогично.

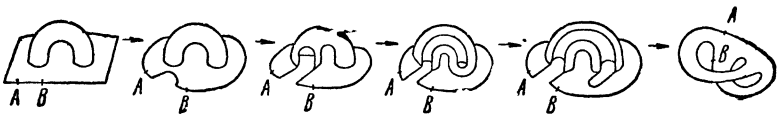


Рис. 18.

53. Воспользоваться решением задачи 52.

54. Для доказательства достаточно произвести серию преобразований, приведенных на рис. 19.

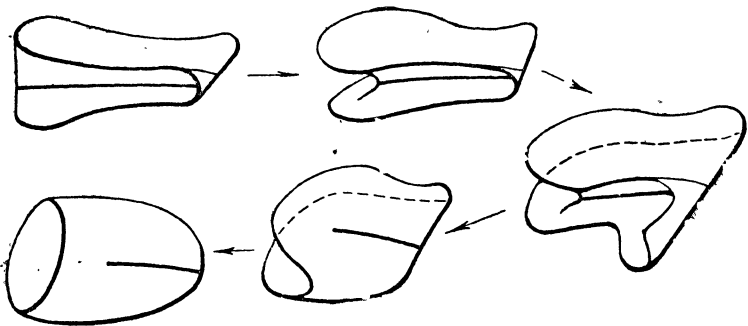


Рис. 19.

55. Воспользуемся решением задачи 50, тогда серия преобразований рис. 20 даст решение одной части задачи (рис. 103 → рис. 100).

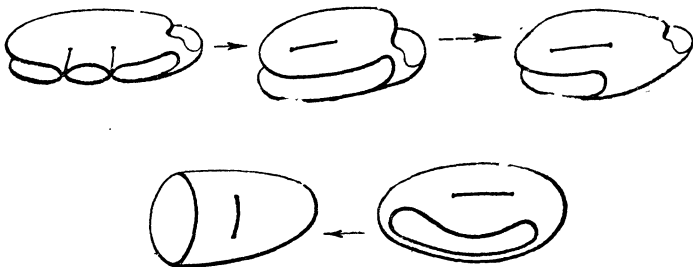


Рис. 20.

Преобразования по рис. 21 дадут решение другой части (рис. 103 → рис. 101).

Для получения решения последней части задачи (рис. 103 → рис. 102), опять воспользуемся решением задачи 50: это дано на рис. 22.

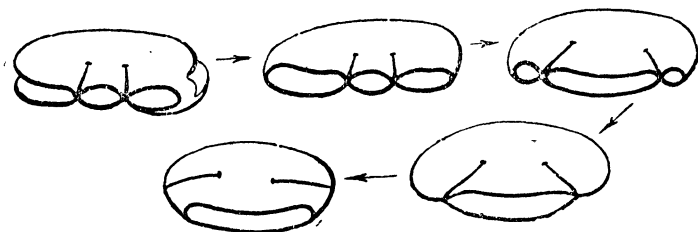


Рис. 21.

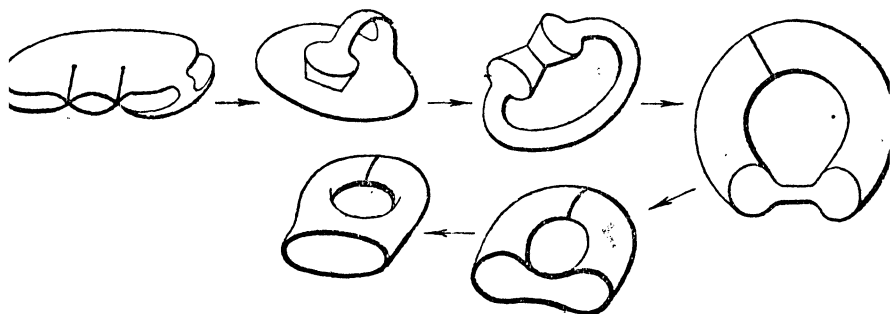


Рис. 22.

56. Воспользоваться решением задачи 54.

57. Характеристика отрезочного комплекса  $N_1 = -\alpha_0 + \alpha_1$  замкнутой поверхности  $N_2 = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$ ; число независимых циклов отрезочного комплекса будет  $N_1 + 1$ , это будет число ручек  $p$  нашей поверхности, но  $N_2 = 2(p - 1)$ , откуда вытекает, что  $N_2 = 2N_1$ .

59. При вращении окружности комплекса  $K_1$  образуется поверхность вращения — тор; он составляет часть комплекса  $K_2$ ; точка  $A$  (рис. 113) на торе опишет круг широты; обозначим через  $a$  — меридиан тора,  $b$  — круг широты; неизотопными формами комплекса  $K_2$  будут те, при которых кривая, описанная точкой  $A$ , расположена как кривая  $a^p b^q$ , где  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа; лента, образованная отрезком  $AB$ , может находиться как вне, так и внутри тора; сам тор может быть заузлен, причем возможны как амфихейральные, так и неамфихейральные расположения. Амфихейральным узлом или в данном случае комплексом будет называться комплекс в  $E_3$ , изотопный своему зеркальному изображению. Читателю предоставляется доказать, что построенные так комплексы гомеоморфны исходному и обладают указываемыми свойствами.

60. Используя решение задачи 55, можно без труда убедиться в гомеоморфизме трех поверхностей рис. 115—117. Докажем гомеоморфизм первых двух рис. 114 и 115; соответствующие преобразования даны на рис. 23.

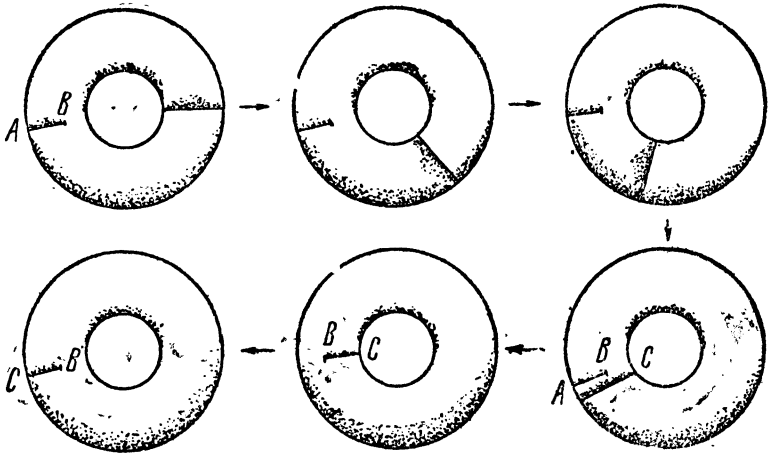


Рис. 23.

62. Укажем здесь только, что в обоих случаях система двойных линий представляет три окружности, имеющие одну общую точку.

64. Построим поверхность следующим образом: к сферической поверхности рис. 24, имеющей два контура  $\Pi'$  и  $\Pi''$ , приклеим ручку, изображенную отдельно на рис. 25, так, чтобы одноименные контуры их  $\Pi'$

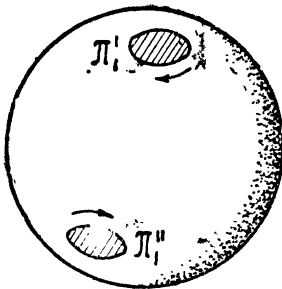


Рис. 24.

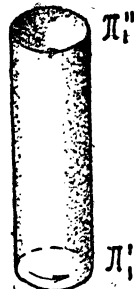


Рис. 25.

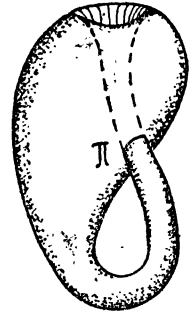


Рис. 26.

и  $\Pi''$ , соответственно совпали с соблюдением их ориентировок (ориентировки указаны стрелками). Получим поверхность рис. 26; окружность  $\Pi$ , по которой ручка пересекает сферическую поверхность, будем считать необщим элементом; нетрудно показать, что замкнутая поверхность гомеоморфна неориентируемому тору (рис. 27). Для этого необходимо сначала установить неориентируемость поверхности рис. 24. Отметим существенные свойства поверхности рис. 26, если ее симметрично разрезать, то получим две половинки, каждая из которых будет лентой Мёбиуса (одна половинка изображена на рис. 28); то же получится, если разрезать неориентируемый тор по кривой рис. 163 (стр. 39); однако симметричный разрез неориентируемого тора, например по двум экваторам, дает одну ориентируемую ленту вида рис. 191. Эта поверхность довольно

подробно разобрана у Hilbert & Cohn-Vossen, 1. с., стр. 271—273; этим и надо воспользоваться для решения данной задачи (см. также решение задачи 60).

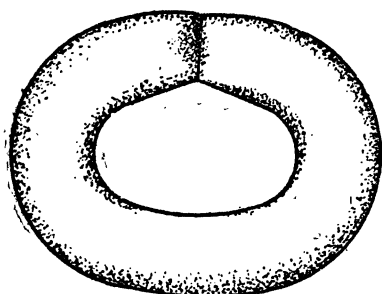


Рис. 27.

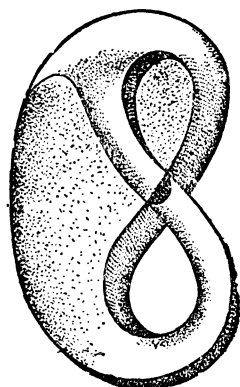


Рис. 28.

**65.** Читатель его легко найдет сам; заметим, что без затруднений бесконечно малым преобразованием можно освободить от точек изображения окрестности комплекса  $K$  около свободных сторон, т. е. тех сторон ребер, которые принадлежат только одной грани.

Назовем симплекс  $S_{n-1}$  комплекса  $K_n$  свободным, если он принадлежит только одному симплексу  $S_n$  комплекса  $K_n$ . Содержание задачи иллюстрирует теорему о возможности „удаления“ непрерывным преобразованием свободной  $(n-1)$ -мерной грани  $n$ -мерного комплекса <sup>1)</sup>.

**66.** Будем говорить, что комплекс в точке  $A$  лабилен, если любая окрестность точки  $A$  деформируется в собственную часть самой себя, причем границы окрестности не подвергаются преобразованию. В противном случае он стабилен в точке  $A$ .

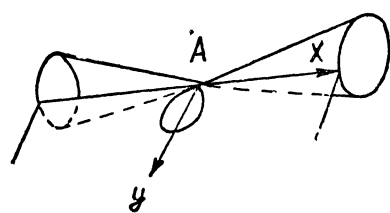


Рис. 29.

Задача 66 дает пример лабильного двумерного комплекса и при отсутствии свободных ребер. Наметим ход решения задачи как убрать „пленку“? Для этой цели покажем, как у точки  $A$  образовать „дырку“. Изобразим область у точки  $A$ , как показано на рис. 29; пусть на плоскости  $xy$  через точку  $A$  проведена окружность

$$x^2 + (y-t)^2 = t^2; \quad (1)$$

сопоставим точкам оси  $Ax$  с абсциссами  $< t$  точки этой окружности следующим образом; через каждую такую точку оси  $Ax$  будем проводить луч  $h$  под углом к оси  $Ax$ , равным  $\frac{t-x}{2t} \pi$ ; проведя луч  $h'$  параллельно  $h$  из точки  $A$ , точку его пересечения с окружностью будем считать изображением рассматриваемой точки оси абсцисс. Остальные точки луча  $h$

<sup>1)</sup> См. Hopf & Pannwitz, 1. с.

перенесем конгруэнтно на точки луча  $h'$  вне окружности (1); точка с абсциссой  $t$  попадет в точку  $A$ ; аналогично будет для отрицательных абсцисс. Тогда точки полуплоскости отобразятся непрерывно на части ее (будет исключена внутренность круга (1)); распространим это преобразование на поверхности конусов так: сечениям их плоскостями  $x = \xi$  для  $|\xi| < t$  будем сопоставлять точки окружности (1) по вышеуказанному правилу, для  $|\xi| > t$  будем сопоставлять сечения, получаемые в результате соответствующего переноса лучей  $|\xi| = t$ ; в частности сечениям  $|\xi| = t$  отвечает одно изображение — точка  $A$ .

При  $x \rightarrow 0$  изображение обращается в тождество; распространяя соответствующим образом преобразование на случай нашего комплекса, мы можем получить требуемый результат.

67. Воспользоваться способом решения, указанным в предыдущей задаче.

70. Произведем преобразование следующим образом: сплюснем внутреннюю сферу, как это изображено в сечении, проходящем через отверстие

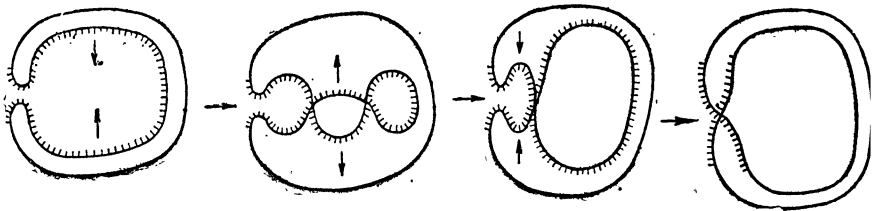


Рис. 30.

на рис. 30; пропустим верхнюю ее часть сквозь нижнюю, причем там, где было отверстие, образуется двойная линия (купура разветвления), концы которой дадут искомые точки разветвления. Штрихами показаны наружные в  $E_3$  нормали.

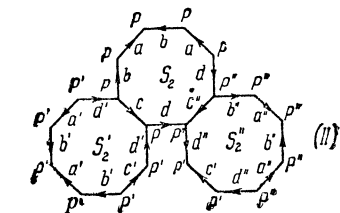
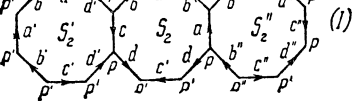


Рис. 31.

татель без труда найдет, в каком отношении находятся характеристики поверхности и ее  $k$ -листного накрытия. В частности можно также показать, что единственное накрытие элементарно-связного комплекса есть он сам.

74. Воспользоваться теоремой Эйлера.

75.  $p = 2$ .

76.  $p = 5$  <sup>1)</sup>

76 bis. Разбиение поверхности рис. 143b в элементарно-связный кусок с выделением полигонов, отвечающих отдельным листам, дано на рис. 31. Обе поверхности — ориентируемые, и характеристика их равна утроенной характеристике исходной поверхности; род  $p = 4$ .

Поверхности рассматриваемой задачи представляют собой так называемые двумерные накрывающие неразветвляющиеся многообразия. Читатель без труда найдет, в каком отношении находятся характеристики поверхности и ее  $k$ -листного накрытия.

<sup>1)</sup> См. Graf, I. c., стр. 41.

В отличие от этих поверхностей римановы поверхности суть разветвляющиеся накрывающие многообразия двумерной сферы.

77. Это очевидным образом получается из следующих преобразований (рис. 32), заключающихся в том, что мы ручку изотопно в  $E_3$  протягиваем вниз.

78. Использовать например способы решения задачи 84.

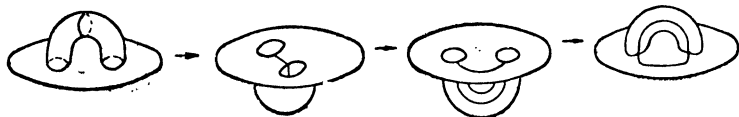


Рис. 32.

79. Можно следующим образом провести необходимые гомотопные в  $E_3$  преобразования. По способу решения задачи 78, совершаем переход от первого положения ко второму (читателю рекомендуется проверить это); дальнейший переход состоит в том, что тор сплющивается в двойную ленту Мёбиуса; затем листы меняются местами (переход сквозь), при этом сплошные части кривой переходят в пунктирные и обратно, далее идет опять разворачивание в тор; последнее преобразование состоит в

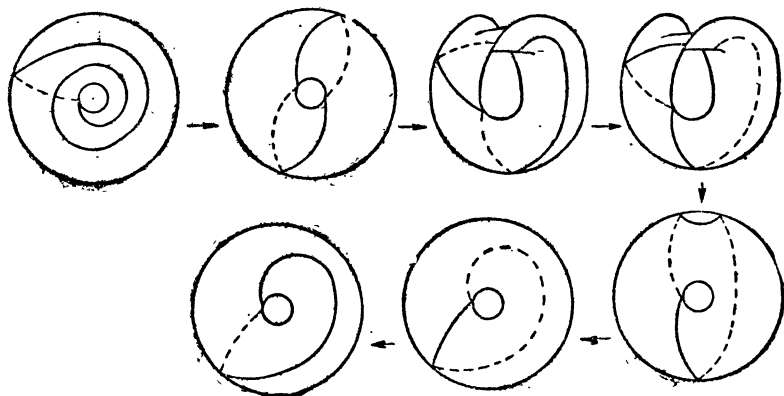


Рис. 33.

симметричной замене верхней, относительно экваториальной плоскости, части тора на нижнюю (рис. 33).

80. Решение можно получить способом, аналогичным примененному в задаче 79; предоставляем это проделать читателю. Здесь приведем другой способ <sup>1)</sup>, частично лишь используя преобразования указанной задачи; заключается способ в том: тор разрезается меридионально и склеивается теми же точками после указанных поворотов; проделывая дважды такую операцию, получим требуемый результат (рис. 34).

<sup>1)</sup> Идея его в основном принадлежит А. А. Маркову.

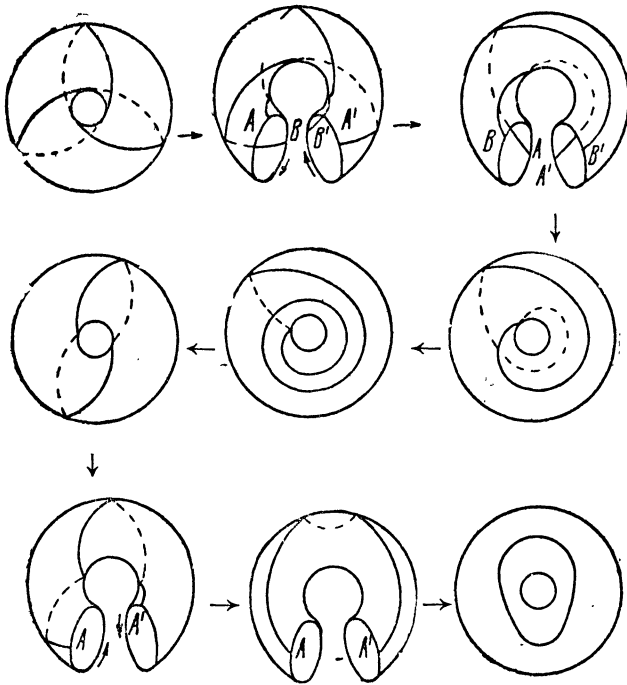


Рис. 34.

82. Решение можно получить серией преобразований рис. 35.

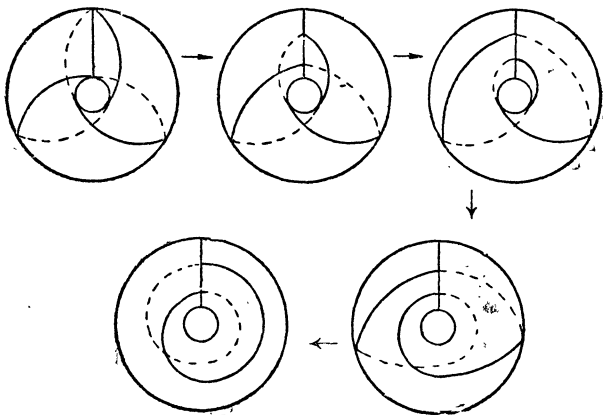


Рис. 35.

83. Читатель получит искомый результат, применяя методику предшествующего решения.

84. Необходимая серия преобразований дана на рис. 36; переход от первого положения ко второму состоит в том, что мы верхнюю часть

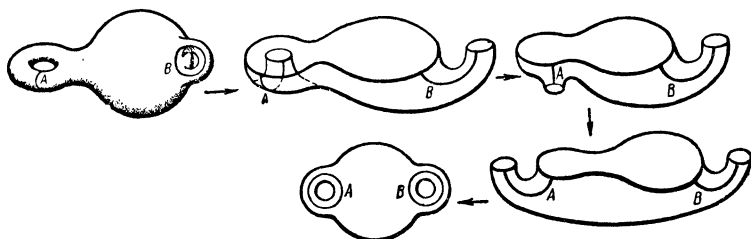


Рис. 36.

поверхности симметрично отобразили на нижнюю; переход же от предпоследнего положения к заключительному осуществляется использованием обратной операции (см. ЖЛФМО, т. I, стр. 169).

85. Даем преобразование первой поверхности рис. 160—162 во вторую (рис. 37); следующие переходы очевидны. Здесь применен способ,

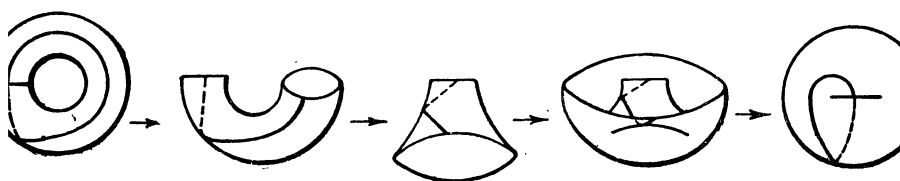


Рис. 37.

использованный при решении предшествующей задачи. Аналогичным путем получаются преобразования рис. 163—166; предоставляем это читателю.

89. Заметим в связи с этим, что, склеивая контуры двусвязной ориентируемой ленты, можно получить поверхность тора, на которой склеенные контуры образуют непересекающую себя кривую произвольного вида (в частности это может быть узел); при склеивании контура ленты Мёбиуса аналогичные обстоятельства уже не имеют места, как это легко усмотреть из задач 82—87.

94. У первой поверхности характеристика  $N = 2k + 1$ .

95. Ответ для двуконтурного дан на рис. 38 — кривая  $\Pi_1'$ ; для одноконтурного — кривая  $\Pi_1''$ .

96. Решение дадим для рис. 177—178, остальные случаи можно получить подобным же способом (рис. 39).

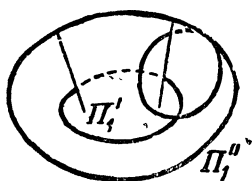


Рис. 38.



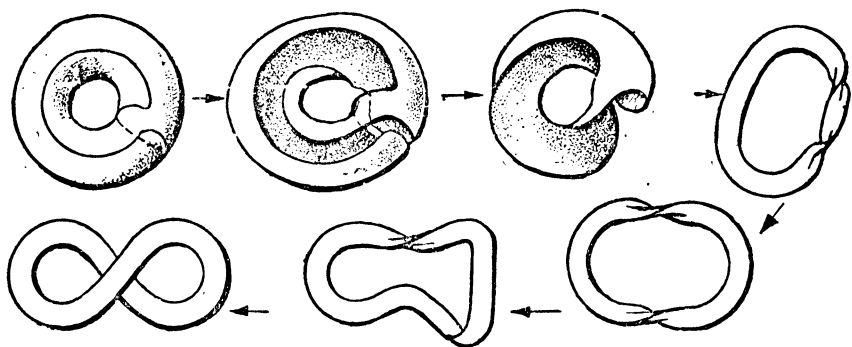


Рис. 39.

97. Решение наметим для рис. 183—184 (рис. 40); остальные случаи предоставляются читателю.

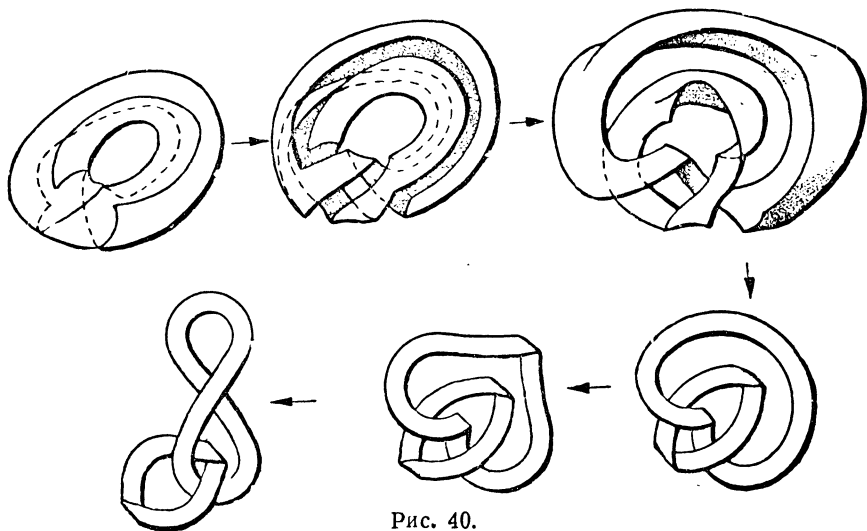


Рис. 40.

99. Решение дано на рис. 41; убедиться, что полученная лента ориентируема и что изотопными преобразованиями можем получить ленту рис. 191.

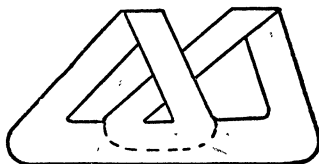


Рис. 41.

100. Дадим решение для второй и третьей поверхности (эти поверхности уже встречались в задаче 62) (рис. 42).

Analysis situs

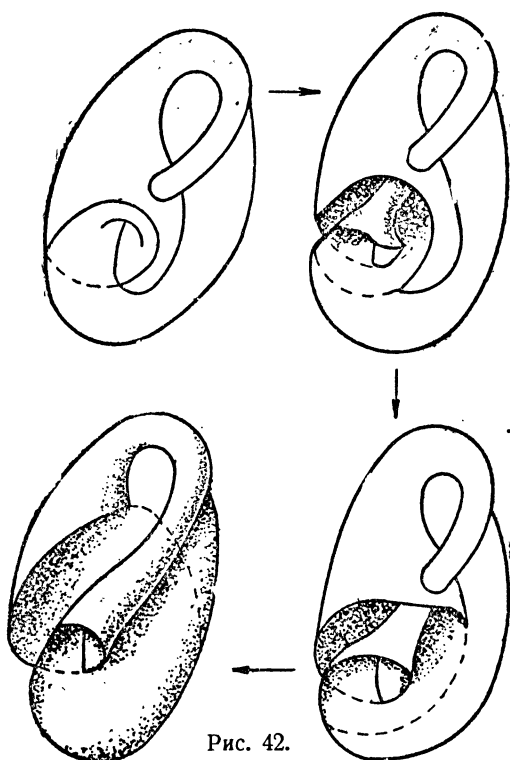


Рис. 42.

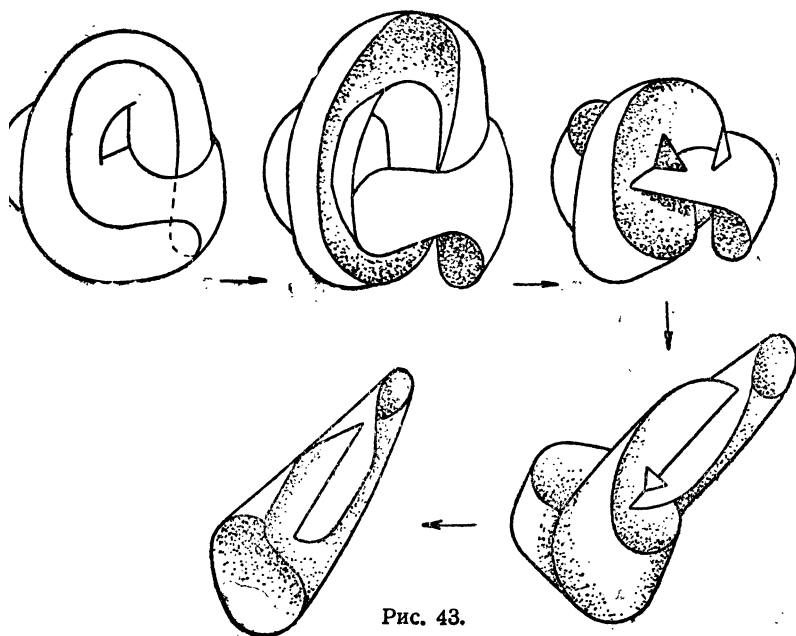


Рис. 43.

На рис. 43 переход от предпоследней поверхности к последней требует указания ряда промежуточных положений, предоставляем читателю их найти.

Имея эти решения, читатель с легкостью проделает пример с поверхностью Дика.

101. Решение дадим для  $m = 0$  (рис. 44).

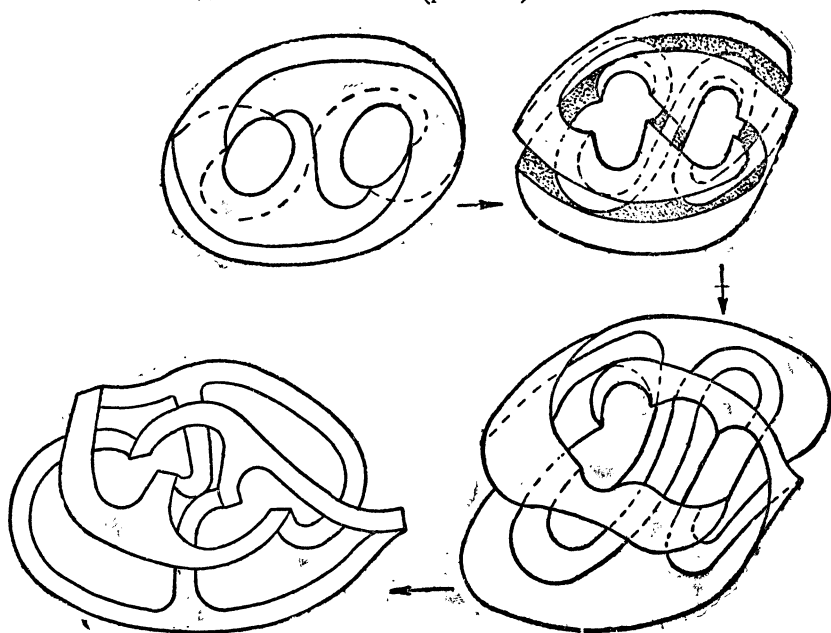


Рис. 44.

102. Заметим кстати, что ориентирующее сечение  $(k+1)$ -связной поверхности в общем случае будет иметь один или два края в зависимости от того, четно  $k$  или нет; это вытекает из того, что при одноконтурном сечении (с одним краем) характеристика не меняется, характеристика же ориентируемой замкнутой поверхности всегда четна.

### ГЛАВА III.

103. Решение дано на рис. 45, для перехода от заплетения рис. 203 к последнему (рис. 205); остальные случаи предоставляются читателю.

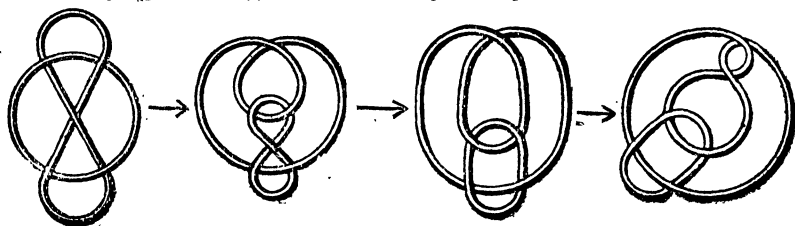


Рис. 45.

**107 bis.** Нетрудно видеть, что обращение узла в косу неоднозначно; из угла можно получать различные косы; заметим также, что изотопия узлов и изотопия кос представляют несовпадающего характера вопросы, например коса рис. 46 как узел изотопна  $\Pi_1$  и не изотопна  $\Pi_1$ , как замкнутой косе.

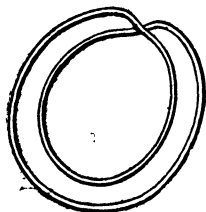


Рис. 46.

Можно показать, что утверждение, аналогичное указанному в задаче, имеет место и для случая произвольного заплетения нескольких кривых в  $E_3$ ; только здесь „замкнутая коса“ будет состоять из нескольких замкнутых кривых, обладающих каждая теми же свойствами.

**108.** Изотопны как контуры изотопных в  $E_3$  лент. Разбиение дано на рис. 47; если сложить куски (1), (2) и (3), получится кубик (рис. 48), поверхность его стереографически изображена на рис. 49. Оказывается, что можно дать разбиение на  $n$  частей такое, что сумма любых  $n-1$  кусков этого

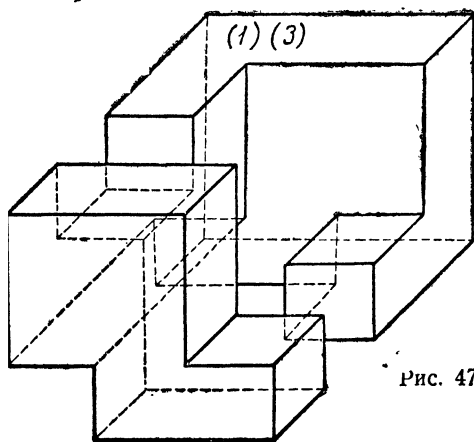


Рис. 47.

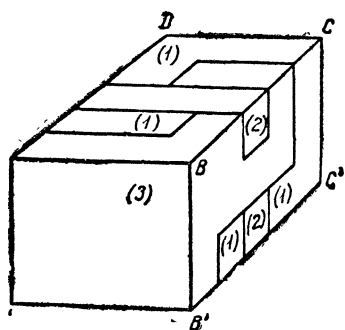
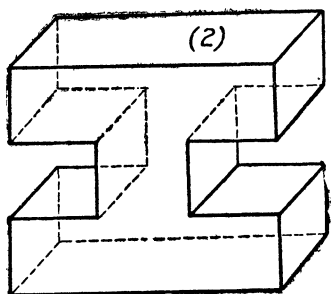


Рис. 48.

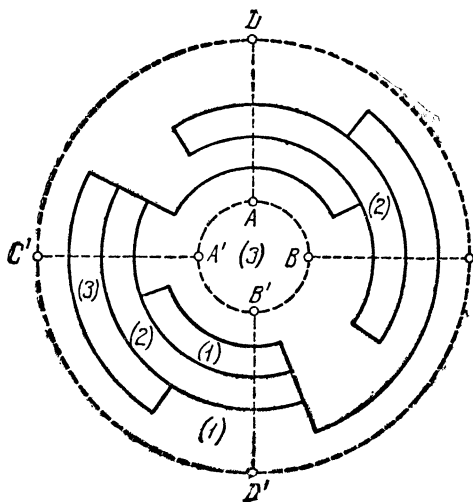


Рис. 49.

разбиения не будет гомеоморфна шару, даже больше — можно дать симплициальное разбиение <sup>1)</sup>.

109. Решение представлено серией преобразований на рис. 50.

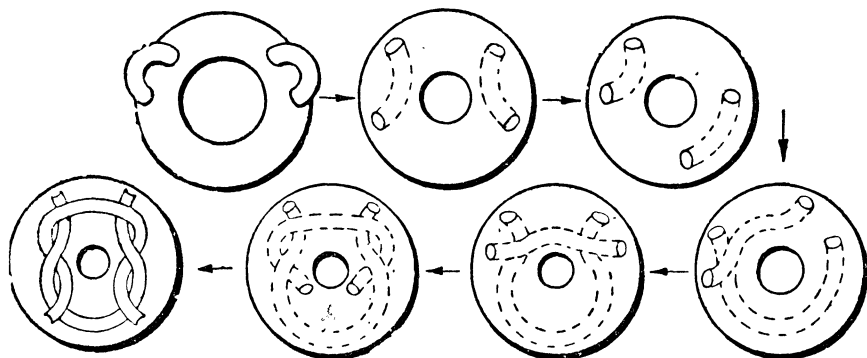


Рис. 50.

110. Решение (рис. 51) дается для преобразования куска рис. 221 в третий (рис. 223); оставшийся случай предоставляется решить читателю.

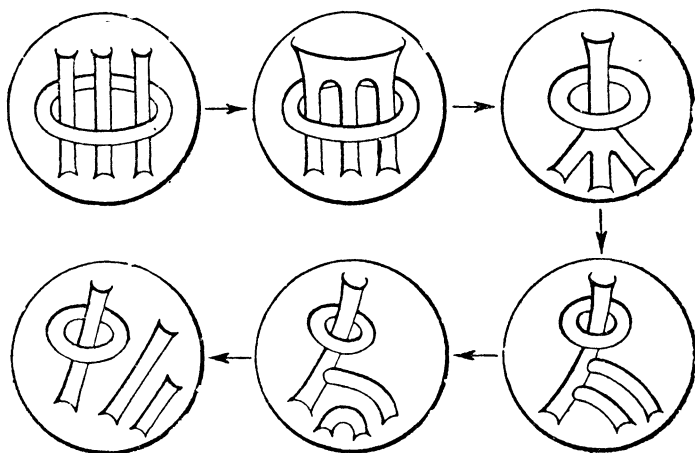


Рис. 51.

111. Решение предоставляем читателю; примеры 109—111 не представляют ничего парадоксального, потому что поверхности границ изотопны в  $E_3$ ; в этом отношении любопытны вследствие своей внешней формы гомеоморфизмы с неизотопными в  $E_3$  границами (см. задачи 113—122).

112. Результат можно получить следующим образом; воспользуемся приемом, указанным при решении задачи 84, тогда получим серию преобразований рис. 52.

<sup>1)</sup> Frankl. Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes, Monatsh., f. Math., 33, 1931, стр. 357—364.

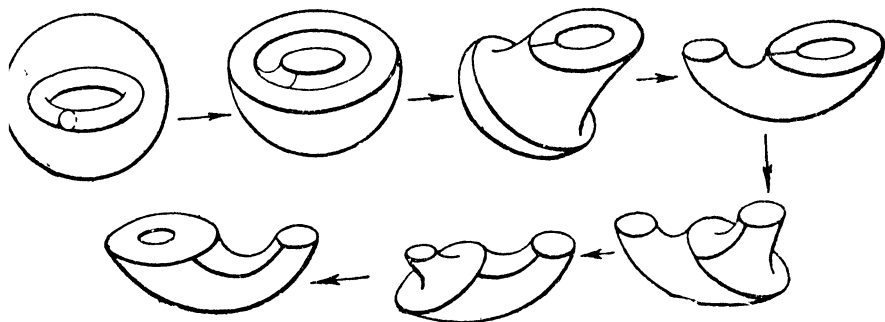


Рис. 52.

Если на этом кончить операции, то получим случай рис. 230. Получение остальных результатов предоставляем читателю.

113, 114 и 115. Воспользоваться указанием предыдущего решения.

119. Для рис. 253—254 решение впервые найдено А. А. Марковым; представляет интерес в задачах этого типа то обстоятельство, что здесь имеет место расщепление замкнутых цепок, в первом случае трех (рис. 253), во втором четырехзвенной (рис. 255) — границы пространств представляют таким образом неизотопные системы торов. А. А. Марков доказал (1931), что замкнутая цепка, имеющая более четырех звеньев, уже не расщепляется<sup>1)</sup>.

120. Отметим, что в обоих случаях заузленный тор разузляется.

121. И здесь имеет место разужение одной границы; в последнем случае оно правда неполное (рис. 266).

122. Интерес задачи заключается в том, что при гомеоморфизмах имеет место перемещение границ, не носящее изотопного характера.

123, 124 и 125. Воспользоваться соображениями задачи 112.

126. Первое решение этой задачи опубликовано в книге Lefschetz, L'Analysis situs, 1924, стр. 149<sup>2)</sup>.

130. Сначала расклеим симметричное пространство на две части  $M_3'$  и  $M_3''$ . Возьмем  $M_3'$ , обратим инверсией его в пространство вне сферы, это обстоятельство отмечено тремя наружными черточками у  $\Pi_2$  — и

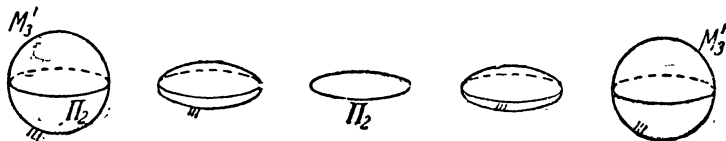


Рис. 53.

проделаем ряд преобразований рис. 53, сжимая сферу по экваториальному сечению, до совпадения с ним (3-й рисунок) мы еще остаемся

<sup>1)</sup> Львовский, В. Некоторые гомеоморфизмы областей трехмерного пространства. Доклад на математ. съезде в Ленинграде, 1934 г. Бюллетень, стр. 57.

<sup>2)</sup> См. также журнал ЛФМО, т. I, I. с.

в том же листе; последующие операции (после „прохождения сквозь“) происходят во втором листе, сечение сферы  $\Pi_2$  дает купюру — круг, окружность его есть кривая разветвления. По окончании преобразования в первом листе заполнено все пространство, а во втором — внутренность сферы. Последнее обстоятельство отмечено тремя черточками, обращенными внутрь  $\Pi_2$ . Для получения окончательного результата остается по этой сфере к  $M_3'$  приклеить инвертированный же второй кусок  $M_3''$  нашего исходного симметричного пространства.

132. Двухлистные представления даны на рис. 54 а, в, с.; купюры не указаны, читателю надлежит их найти. Наметим возможный ход преобразова-

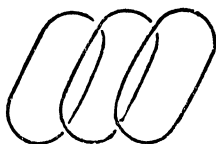


Рис. 54а.

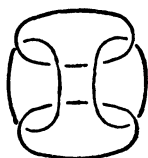


Рис. 54в.

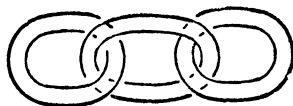


Рис. 54с.

ний для случая рис. 286 (рис. 54в); расклеим опять пространство на две части  $M_3'$  и  $M_3''$ ; с  $M_3''$  поступаем согласно рис. 55: инвертируем, перехо-

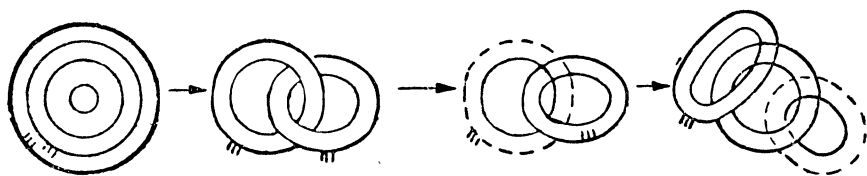


Рис. 55.

дим в другой лист границей 1 и снова инвертируем. Имеем в результате в первом листе пустоту в виде тора 2, во втором пустоту в виде тора 1, пустоты зацеплены парой линий разветвления; приклеим к первому листу по тору 2 вторую часть нашего пространства  $M_3''$ , тогда пустота будет ограничиваться тором 1, — остается вернуться из второго листа в первый и склеить торы 1. Получим линии разветвлений и купюру рис. 56.

133. Все пространства гомеоморфны трехмерной сфере. Этот простейший пример иллюстрирует тот факт, что разным диаграммам могут соответствовать гомеоморфные пространства.

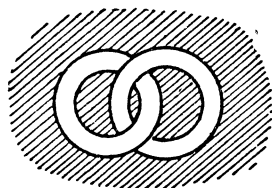


Рис. 56.

134. Различие состоит в форме купюр; для первой диаграммы купюра элементарно-связанный двумерный кусок, для второй — лента Мёбиуса.

Для доказательства можно поступать так: возьмем половину первой диаграммы, разрежем и склеим ее, как показано на рис. 57, полученная половина диаграммы очевидно гомеоморфна исходной; поверхность склеена

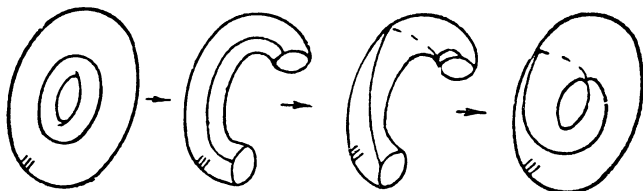


Рис. 57.

теми же точками, по которым она до того соединялась, такое же обстоятельство соблюдается и для всех внутренних точек склеиваемого сечения.

Символически изображая кривую первой диаграммы  $(1,0)$ , а второй —  $(1,1)$ , увидим, что пример представляет частный случай теоремы <sup>1)</sup> о гомеоморфизме пространств, определяемых диаграммами  $(p, q)$  и  $(p, q + kp)$ , где  $k$  — целое число. См. задачи 138 и 151.

136. Пространство, заданное диаграммой рис. 295, указано в Math. Enz., Dehn & Heegaard, стр. 187, как пример негомеоморфного

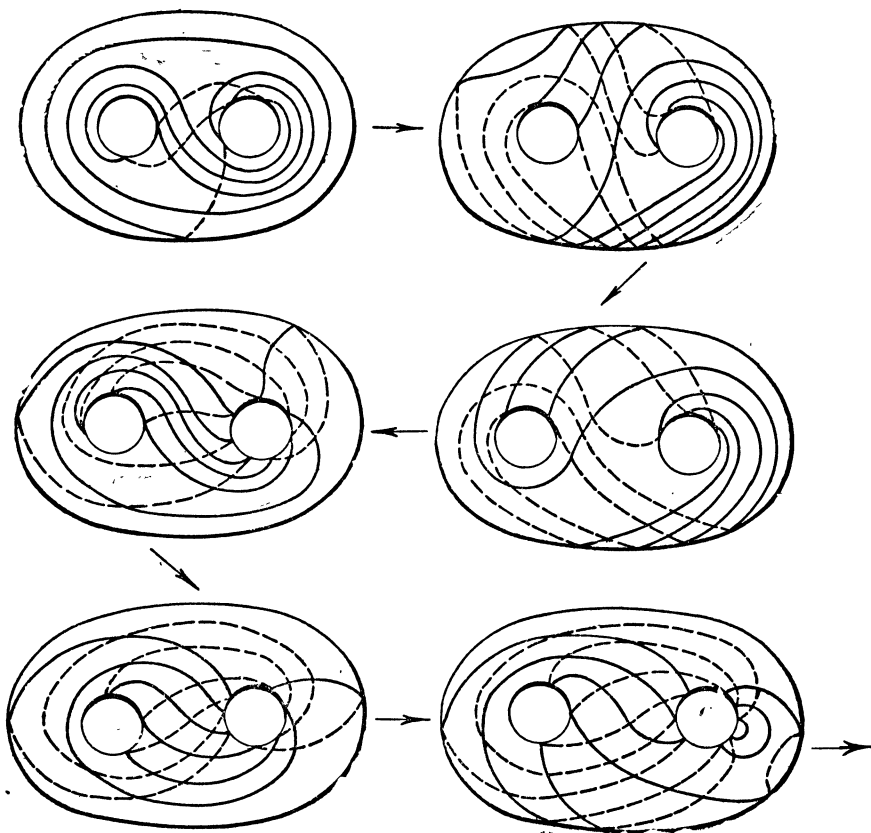


Рис. 58.

<sup>1)</sup> См. Seifert, l. c



сфере пространства без кручения и имеющего, как у сферы, числа Бетти нули. Ошибочность этого утверждения была установлена А. А. Марковым (1933). Следуя ему, наметим ход преобразований: серия картинок рис. 58 и 59 показывает, что пространство, диаграмма которого изобра-

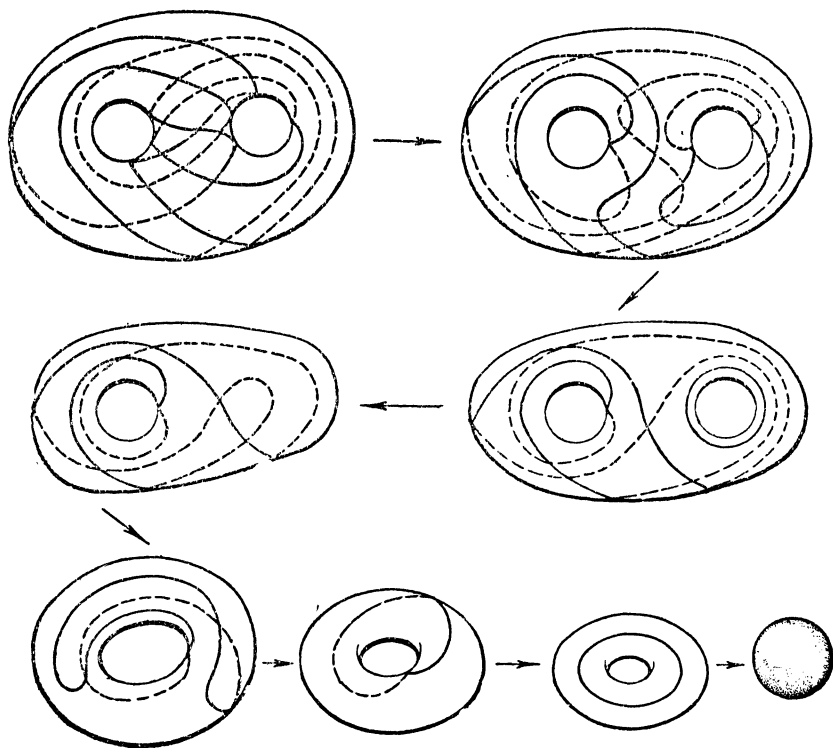


Рис. 59.

жена на рис. 295, есть не что иное как трехмерное сферическое пространство. Картинки изображают последовательные преобразования диаграммы; сущность их читатель легко уловит (см. решения задач на диаграммы). Первая картинка—это несколько преобразованная диаграмма рис. 295; переход от десятого положения к одиннадцатому станет ясен, если вспомнить, что собой представляет диаграмма и какой смысл имеют кривые на ручках.

137. Обе диаграммы получаются при одном исходном  $M_3$ . Зададим его склеиванием граней куба, как это показано на рис. 60 (см. реш. 141).

Склеиванием граней кубоктаэдра получается тело, ограниченное поверхностью рода 3 с четырьмя кривыми (рис. 61); для выбора кривых к диаграмме займемся остальной частью куба, получаемой после изъятия кубоктаэдра; восемь многогранников (рис. 62) при склеивании по четыре (на рис. 63 дана четверка *uigt*, на рис. 64 другая) дают тетраэдры с обрубленными вершинами; при склеивании их получим полиэдр (на рис. 65 он

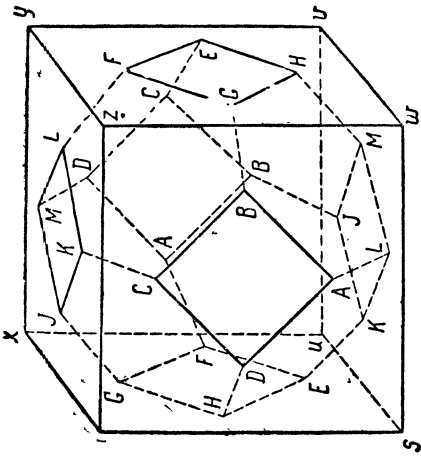


Рис. 60.

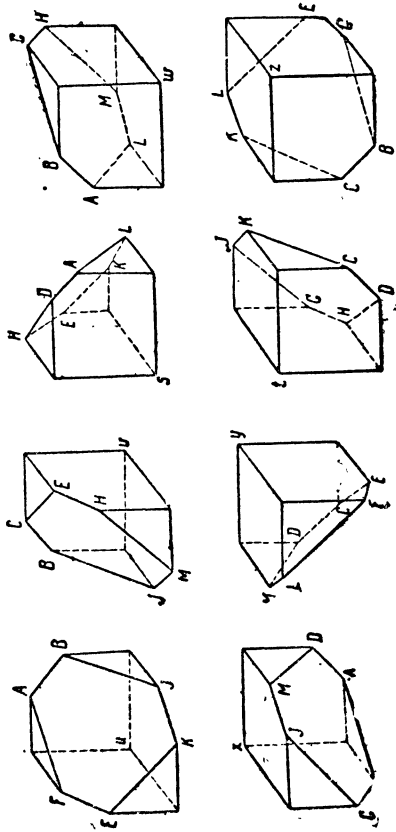


Рис. 62.

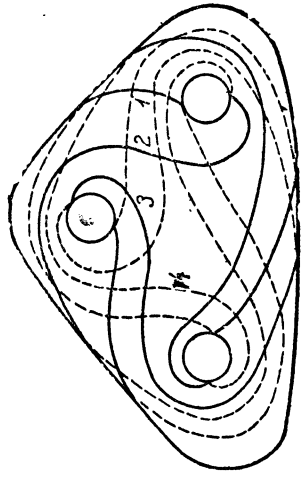


Рис. 61.

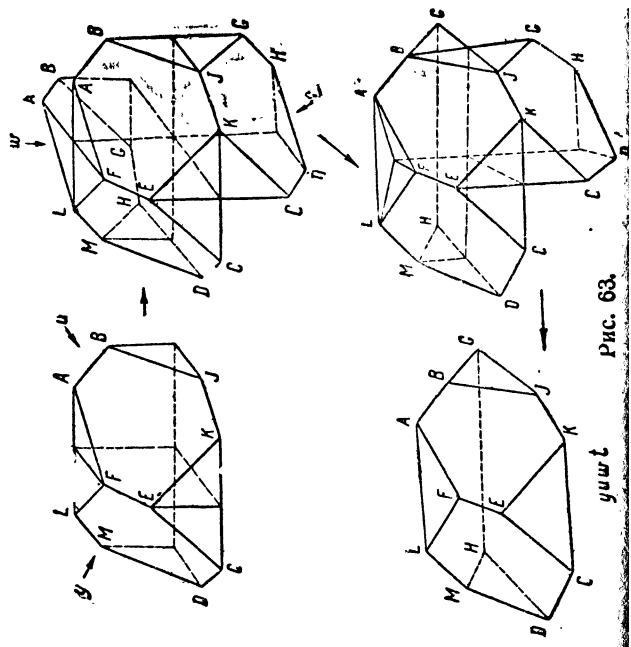


Рис. 63.

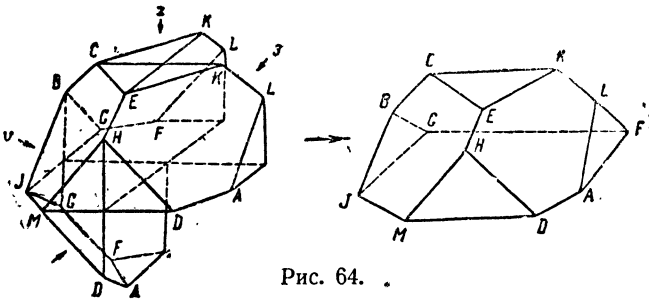


Рис. 64.

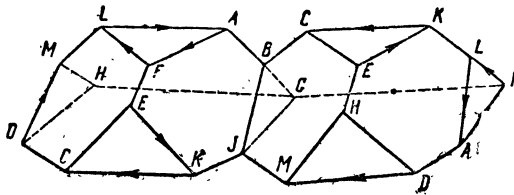


Рис. 65.

изображен не в окончательно склеенном виде), из рассмотрения его вытекает, что кривые на поверхности рис. 61 действительно суть кривые на ручках, и следовательно любые три из них можно взять для диаграммы; так как кривая  $l$  — узел, а остальные три заплетены так, что имеют, равно как и первая, симметрию 3-го порядка (поворот на  $\frac{2\pi}{3}$  дает совмещение), то получаются только два варианта выбора, которые и указаны в условии задачи.

138. Оба пространства можно трехлистно представить в римановой форме с системой купюр, изображенной на рис. 66.

Этот гомеоморфизм пространств представляет частный случай теоремы о гомеоморфизме пространств, определяемых диаграммами  $(p, q)$  и  $(p, r)$ , если  $rp + xq = 1$ <sup>1)</sup>.

Здесь  $p = 7$ ;  $q = 2$ ;  $r = 3$ .

139. Ответ дан на рис. 67; цифры указывают, какие листы соединяются соответствующими линиями разветвления (купюры не показаны — читателю предоставляется их найти).

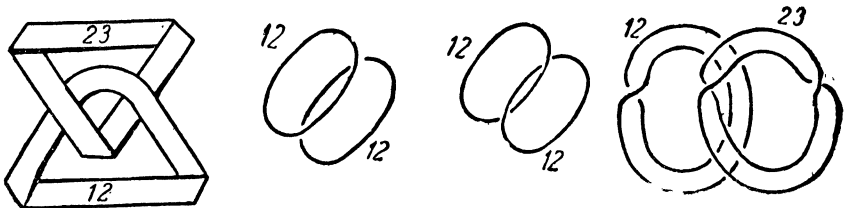


Рис. 67.

1) См. Seifert, l. c.

1) См. Seifert, l. c.

140. Ответ дан на рис. 68.

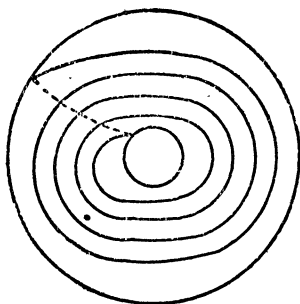


Рис. 68.

141. Следуя А. А. Маркову, наметим такой путь решения: пространство можно образовать, склеив два кубоктаэдра, совмещая одноименные буквы на рис. 69. Преобразовывая один из кубоктаэдров по рис. 70, получим требуемый ответ.

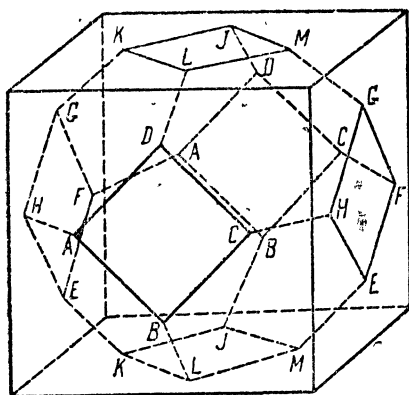


Рис. 69.

Действительно, внутренний кубоктаэдр рис. 69 представляет одну половину диаграммы; то, что остается, восемь угловых кусков, составляют второй кубоктаэдр — вторую половину диаграммы; совокупность ребер  $AH$ ,  $AF$ ,  $CH$ ,  $CF$ ,  $DL$ ,  $DI$ ,  $GM$ ,  $GK$ ,  $EM$ ,  $EK$ ,  $BL$  и  $BJ$  представит совокупность искомым кривых диаграммы после склеивания противоположных квадратных граней кубоктаэдра (т. е. после отождествления граней  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $JKLM$ ).

Читатель, знакомый с выводом теоремы Дена, сразу заметит, что такое построение диаграммы непосредственно воспроизводит вывод этой теоремы и потому нет надобности доказывать, что остальная часть куба действительно даст вторую половину диаграммы; в разбираемом случае

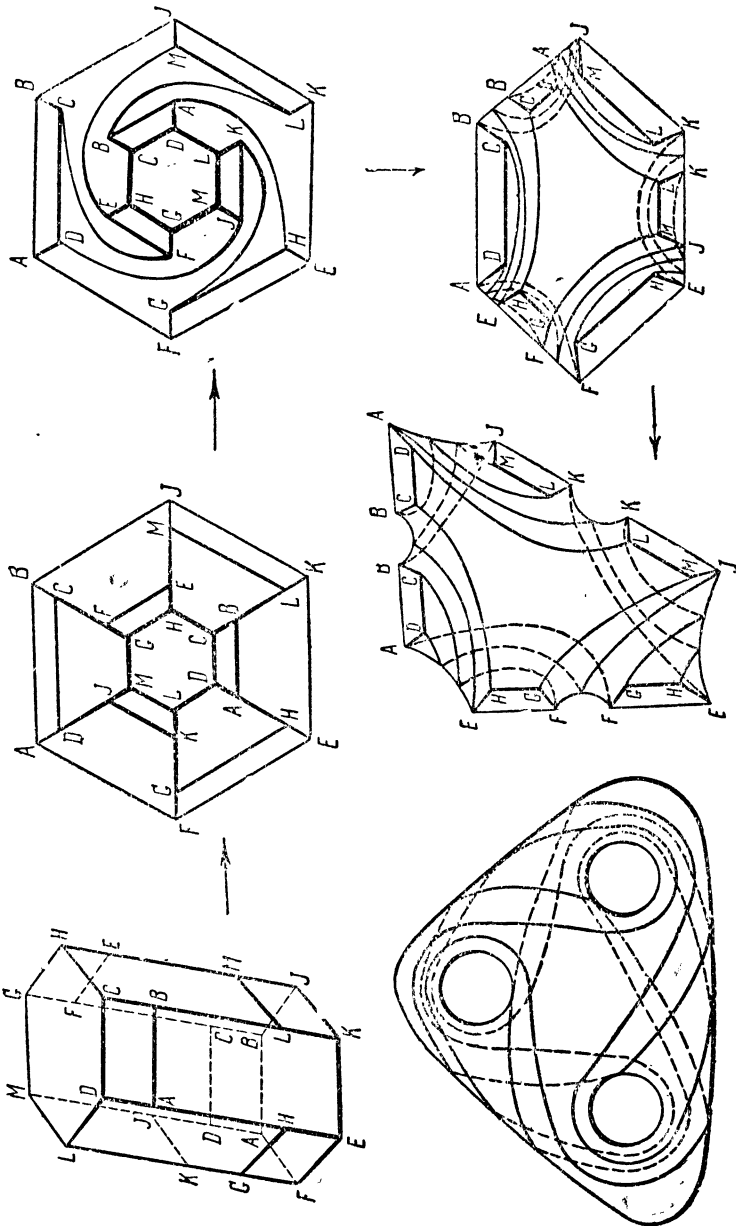


Рис. 70.

в этом обстоятельстве нетрудно убедиться и непосредственно вследствие простого закона соединения граней.

Обобщая этот пример, нетрудно показать, что если трехмерное пространство можно получить из элементарно-связного полиэдра, склеивая попарно соответственно  $h$  пар его граней, то диаграмма его будет рода  $h$ .

142. Ответ дан на рис. 71.

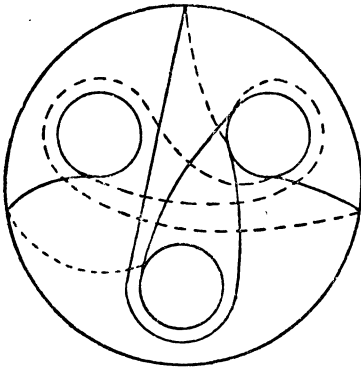


Рис. 71.

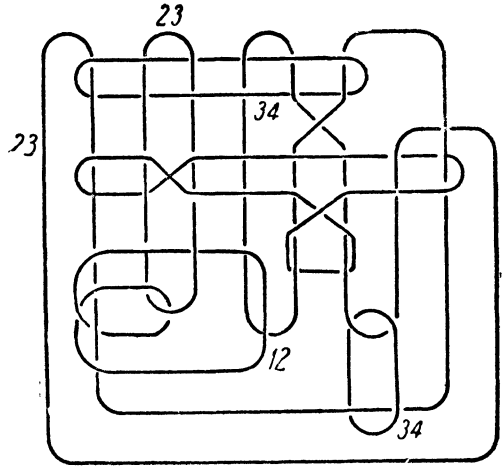


Рис. 72.

143. Четырехлистное представление может на пример иметь линии разветвлений, изображенные на рис. 72 (купюры не показаны).

144. Ответ дан на рис. 73.

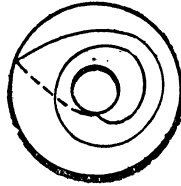


Рис. 73.

144 bis. Если производить построение, пользуясь непосредственно методом Дена, то получим диаграмму, изображенную на рис. 361; из этого вытекает, что рассматриваемое  $M_3$  есть как раз то пространство, которое было построено Пуанкаре <sup>1)</sup> (см. задачу 170 и ее решение).

146. Пространство будет неориентируемым с диаграммой, представляющей трехмерный кусок „ограниченный неориентируемым тором“

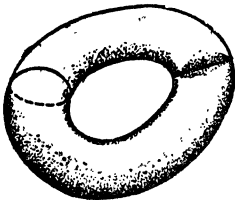


Рис. 74.

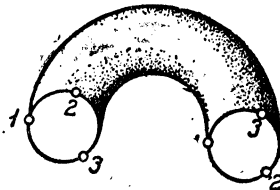


Рис. 74а.

рис. 74); половина диаграммы получится, если мы склеим концы цилиндра, изображенного на рис. 74а, так, чтобы идентифицировать одноименные точки.

<sup>1)</sup> Poincaré, Pal. Rend., 1904.

Этот пример, равно как и следующий, показывает, что неориентируемая замкнутая поверхность может быть так расположена в неориентируемом пространстве, что будет делить его на две отдельные изолированные части; поверхность в этом пространстве будет „иметь две стороны“ — двустороннее расположение. Из определения диаграммы и теоремы Дена вытекает непосредственно, что двустороннее расположение замкнутых неориентируемых поверхностей во всяком неориентируемом пространстве может иметь место. Читатель без затруднений докажет также теорему, что во всяком неориентируемом замкнутом пространстве можно одностронне расположить ориентируемую замкнутую поверхность.

В ориентируемом пространстве имеют место обратные обстоятельства, например в проективном пространстве проективная плоскость — неориентируемая поверхность — расположена одностронне, в то время как всякая ориентируемая поверхность двусторонняя. На таких соображениях можно построить определение ориентируемости поверхности, так как имеет место и обратное утверждение — из двустороннего расположения неориентируемой поверхности вытекает неориентируемость того пространства, куда погружена поверхность. Это определение можно индуктивно итерировать на многообразия высших измерений <sup>1)</sup>.

147. Диаграмму можно получить, пользуясь например способом решения задачи 141; так как пространство неориентируемое, то, преобразуя

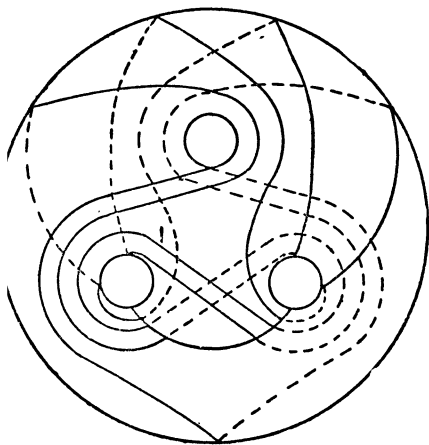


Рис. 75.

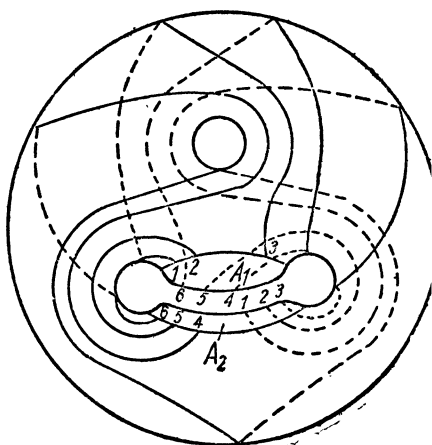


Рис. 76.

кубктаэдр, получим неориентируемую поверхность рода 3 с кривыми, изображенными на рис. 75. Пространство, ограничиваемое ею, нужно представлять полученным из трехмерного куска (рис. 76), склеенного таким образом по двумерным кускам  $A_1$  и  $A_2$ , чтобы контуры их имели

<sup>1)</sup> См. об этих вопросах работу В. А. Ефремовича, Math. Zeitschr., 29, 1928, стр. 55—59.

общими точками концы одноименных кривых 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Эта поверхность с кривыми еще не представляет диаграммы, потому что на ней расположены четыре кривых; из них нужно выбрать три и тогда получим диаграмму, изображенную на рис. 77.

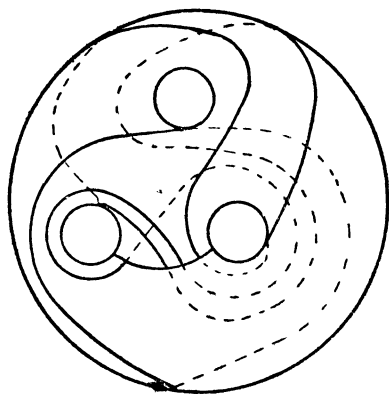


Рис. 77.

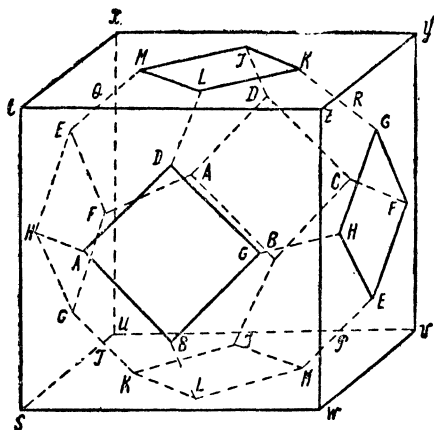


Рис. 78.

Наметим ход решения: кубоктаэдр, из которого получена диаграмма, изображен на рис. 78; займемся второй частью куба, она состоит из 8 многогранников при углах  $x, y, z, t, u, v, w, s$  (см. рис. 79). Эти

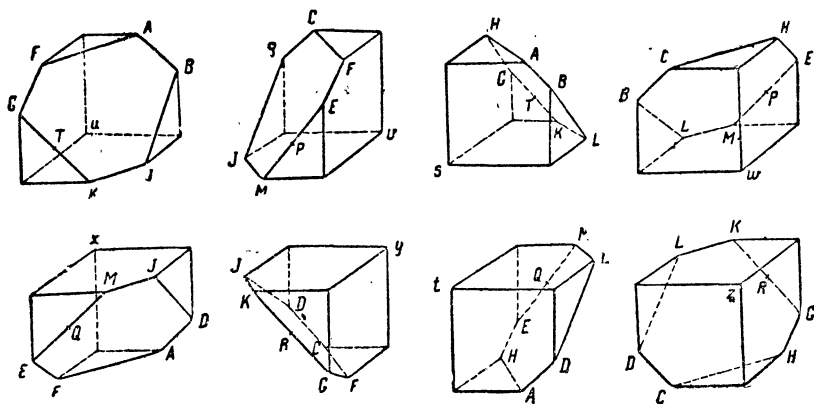


Рис. 79.

полиэдры, склеенные в две группы по двум общим вершинам  $z = y = u = s$  и  $t = w = v = x$ , образуют два тела (рис. 80), после склеивания составляющих вторую половину диаграммы.



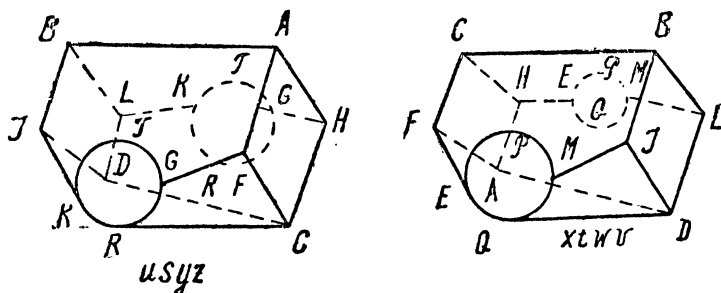


Рис. 80.

Из рассмотрения их вытекает, что в качестве кривых диаграммы можно взять три кривые, указанные на рис. 77.

Разбираемое пространство обладает рядом интересных свойств; сечение его по меридиану дает проективную плоскость, которая будет неориентируемой поверхностью, двусторонне расположенной в  $M_3$ . Во всякой окрестности поверхность делит  $M_3$  на две части, не переходящие одна в другую при обходе поверхности; наоборот, экваториальное сечение дает тор—ориентируемую поверхность, которая однако односторонне расположена в  $M_3$ . Читателю предлагается проверить это.

148. Двухлистная форма будет как на рис. 81. Найти купюры предоставляется читателю.

149. Ответ дан на рис. 82 (купюры не указаны).

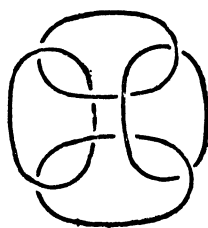


Рис. 81.

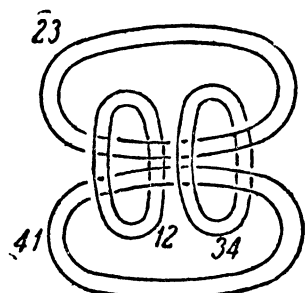


Рис. 82.

150. Наметим ход доказательства гомеоморфизма первых двух пространств. Для первого (рис. 315) мы знаем, что оно гомеоморфно трехмерной сфере—симметричному пространству с ограничением в виде сферы. Будем исходить из этого—расклеим пространство на две части  $M_3'$  и  $M_3''$ , как это уже раньше практиковалось; затем возьмем  $M_3'$  и подвергнем его преобразованиям рис. 83; сначала инвертируем, потом переходим в дру-

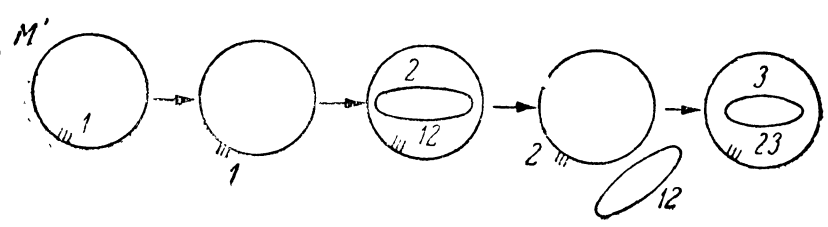


Рис. 83.

гой лист (это обозначено цифрой 2), при этом получится линия разветвления 12; опять инвертируем и переходим в третий лист — при этом прибавляется новая линия разветвления 23; остается теперь приклеить инвертированную оставшуюся часть исходного пространства  $M_3''$ .

Эта задача представляет простейший пример, показывающий, что разным римановым пространствам может быть сопоставлено одно гомеоморфное им пространство; если два пространства имеют одно риманово представление, то пространства гомеоморфны — обратное же утверждение, как мы видим, не имеет места, именно, если двум пространствам соответствуют два различные римановы представления, то отсюда еще не следует, что пространства негомеоморфны; таким образом тождественность риманового представления есть лишь достаточный, но не необходимый признак гомеоморфизма; аналогичное обстоятельство относится и к диаграмме (см. задачу 133).

151. Можно исходить из диаграмм; схематически это представляется серией преобразований диаграмм рис. 84.

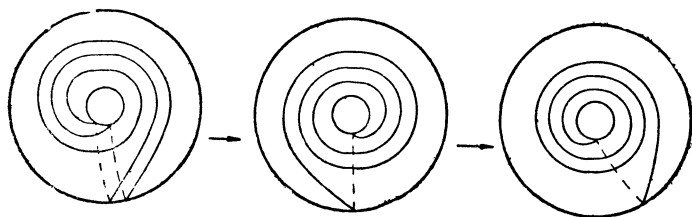


Рис. 84.

Если первой диаграмме соответствует символ  $(3, 2)$ , то второй  $(3, -1)$  и третьей  $(3, 1)$  (см. решение задачи 134).

153. Воспользоваться тем, что в симметричной форме это пространство имеет ограничениями два коаксиальных тора.

154. Воспользоваться тем, что схематически изображено на рис. 85.

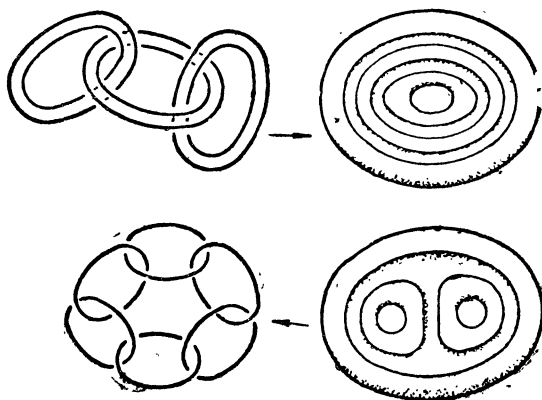


Рис. 85.

155. Укажем здесь только на вид одного варианта линий разветвления (рис. 86).

156. Воспользоваться решением задач 142.

157. Оба пространства представляют различные римановы формы одного пространства, имеющего диаграмму рис. 87.

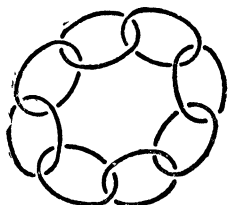


Рис. 86.

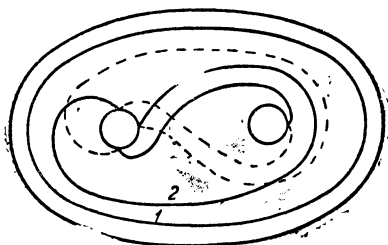


Рис. 87.

Интересно, что суммы перегибов у лент неравны; повидимому это можно объяснить отсутствием коммутативности. Этот пример интересно сопоставить с примером 138; там наоборот, для одного риманова представления получились две диаграммы (7, 2) и (7, 3).

#### ГЛАВА IV.

158—160. Решения предоставляются читателю. На рис. 88 изображена поверхность рода 2 и на ней гомологичная нулю, но не гомотопная нулю кривая; аналогичные свойства имеет кривая на неориентируемой поверхности рис. 165. Заметим, что комплексы рис. 351 и 352 обладают несколькими интересными свойствами; например хотя они и не имеют свободных ребер, тем не менее они не делят  $E_3$  на изолированные части; отсюда между прочим вытекает, что они не содержат двумерных циклов <sup>1)</sup>.

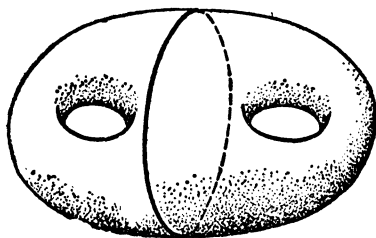


Рис. 88.

160 bis. Заметим, что фундаментальная группа октаэдрического пространства имеет четыре производящих  $a, b, c, d$ , связанных отношениями

$$abc = adb = acd = bdc = 1.$$

165. Одномерное число Бетти равно  $p$  в согласии с теоремой Александера, по которой  $r$ -мерное число Бетти комплекса  $K$  пространства  $M_n$  равно  $(n-r-1)$ -мерному числу Бетти дополнительной комплексу  $K$

<sup>1)</sup> См. Hopf & Pannwitz, 1. с.. Это пример стабильного im Grossen комплекса не только не циклического, но и не содержащего циклов.

области пространства  $M_n$  ( $0 < r < n - 1$ ); отсюда при  $r = n - 1$  получаем теорему, содержащую  $n$ -мерную теорему Жордана как частный случай.

**166.** 1)  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ ; 2)  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ . Примеры показывают, что теорема Пуанкаре, по которой у замкнутых ориентируемых трехмерных пространств одно- и двумерные числа Бетти равны, не распространяется на незамкнутые пространства.

**167.**  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = 2$ . Пример иллюстрирует эту теорему далее, что равенство чисел Бетти получается только у ориентируемых замкнутых пространств. Легко убедиться, что данное пространство представляет произведение проективной плоскости на окружность и потому неориентируемое (теорема Ефремовича).

**167 bis.**  $p_0 = 1$ ;  $p_1 = p_2 = 0$ ;  $p_3 = 1$ ; оно называется сферическим додекаэдрическим пространством; фундаментальная группа при соответствующем обозначении двух производящих элементов связана отношениями

$$u^3 = v^5 = (vu)^2,$$

поэтому  $M_3$  не гомеоморфно  $P_3^1$ ). Если отождествление граней произвести не с поворотом на  $\frac{\pi}{5}$ , а с вращением на  $\frac{3\pi}{5}$ , то получим так называемое гиперболическое додекаэдрическое пространство; в нем также  $p_1 = 0$ .

**168.** 1)  $p_1 = p_2 = 1$ , 2)  $p_1 = p_2 = 3$ . Заметим, что первое представляет произведение двумерной сферы на окружность, а второе — произведение двумерного тора на окружность.

Здесь уместно упомянуть, что топологическое произведение двух  $P_2$  представляет пример элементарно-связного четырехмерного комплекса, не гомеоморфного  $P_4$ , так как двумерное число Бетти равно двум, а не нулю.

**170.** Читатель без труда убедится, что это пространство не имеет вращения и числа Бетти у него, как у сферы. Установить, что оно не гомеоморфно сфере, можно, пользуясь например тем способом, который дан Пуанкаре <sup>2)</sup>. Этот пример дан впервые Пуанкаре для иллюстрации того, что задание кручения и чисел связности недостаточно для построения пространства; например существуют трехмерные пространства без кручения с числами Бетти, как у сферы, однако не гомеоморфные ей. Прибавим, что в общем случае добавление задания фундаментальной группы не исправляет этого положения, см. пример 175.

**171.** Многообразие имеет одномерную циклическую группу кручения порядка  $k$ .

**172.** При  $\varphi = \pi$  сечение тора представляет после склеивания двумерный комплекс (не многообразие), который нам также уже встречался (см. стр. 69 и задача 173 bis), интересно отметить, что при трехмерном обобщении его в настоящем примере мы получаем уже не комплекс общего вида, а трехмерное многообразие.

<sup>1)</sup> См. Seifert & Threlfall, l. c., стр. 218.

<sup>2)</sup> Poincaré, Pal. Rend. 1901. См. Kreines l. c.

173.  $p_1 = p_2 = 0$ ; имеется два 1-мерных коэффициента кручения, равных 2, и нет 2-мерного кручения.

173 bb. Это непосредственно вытекает из того, что ориентируемую поверхность с характеристикой  $N$  можно сечениями обратить в полигон с последовательностью сторон

$$c_1 c_2 \dots c_{N+2} c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{N+2}^{-1}. \quad (1)$$

Заметим, что у неориентируемой поверхности полигон будет иной

$$c_1 c_2 \dots c_{N+2} c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{N+1}^{-1} c_{N+2}.$$

Предоставим читателю определить, какова будет характеристика сторон (1), но  $N$  нечетно (в этом случае  $N$  характеристикой не будет, см. выше задачу 94).

174. Следуя А. А. Маркову, наметим следующим образом ход построения фундаментальной группы: ограничимся диаграммой рис. 364; будем считать чертеж плоским; вместо сферы с ручками будем иметь плоскую область с тремя дырками. Из произвольной точки области вокруг дырок проводим обходы — им соответствуют производящие элементы группы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ ; каждой кривой диаграммы соответствует соотношение между производящими элементами. Для получения их надо деформировать гомотопно кривую в последовательность обходов; для данного случая имеем три соотношения:

$$a_1 a_2^{-1} a_3 a_2 = a_1 a_3 a_1^{-1} a_3^{-1} = a_1 a_2 a_3^{-1} a_2^{-1} = 1,$$

ими фундаментальная группа определена вполне.

Пространство, заданное диаграммой рис. 365, гомеоморфно сфере, поэтому оно имеет единичную фундаментальную группу; читатель без труда убедится в этом при построении ее (см. задачу 136).

175. Укажем, что этот негомеоморфизм установил Александер<sup>1)</sup>.

176. Фундаментальная группа будет иметь три производящих элемента, связанных соотношениями:

$$a_1 a_2^{-1} a_3^{-1} = a_2 a_3^{-1} a_1^{-1} = a_3 a_1^{-1} a_2^{-1} = 1.$$

177. Фундаментальная группа имеет один производящий элемент; циклическая и порядка  $p$ ; не зависит от  $q$ .

Когда  $p = 2$ , получаем проективное пространство. Бипирамидальное пространство (Linsengraum по Seifert'у) вполне определяется заданием чисел  $p$  и  $q$ ; нетрудно показать, что всякое такое пространство имеет диаграмму рода единица, так как цилиндр, имеющий ось ось бипирамиды, как раз дает требуемое диаграммой разбиение.

178. Если из полюса  $(0,0,0,1)$  стереографически отобразить на экватор  $t = 0$  разбивающую поверхность тора преобразованием

$$\xi_1 = \frac{1}{1-t} x; \quad \xi_2 = \frac{1}{1-t} y; \quad \xi_3 = \frac{1}{1-t} z,$$

<sup>1)</sup> Alexander. Note on two three dimensional manifolds with the same group. Trans. Am. Math. Soc. 20, 1919, 339—342.

где  $\xi_i$  — декартовы координаты точек экватора, то поверхность спроектируется в виде тора с осью вращения  $U\xi_3$ ; один тор разбиения имеет линией центров меридианов единичную окружность плоскости  $O\xi_1\xi_2$ , другой — ось  $O\xi_3$ .

Интересно, что поверхность разбиения можно конгруэнтно в трехмерной сфере переместить до нового совмещения с собой, так что на ней окружности широт поменяются местами с меридианами.

184. Ответ дан на рис. 89.

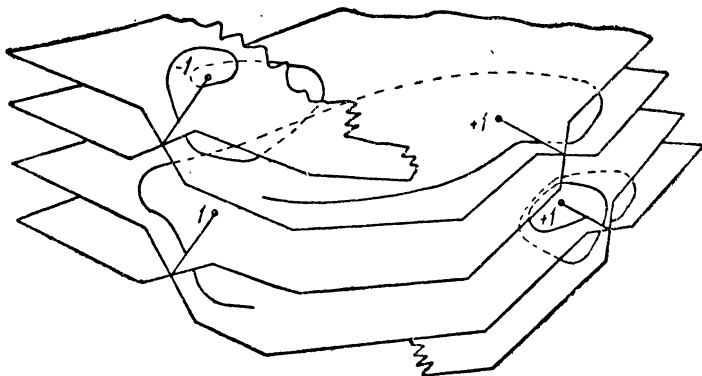


Рис. 89.

187. Напомним, что характеристика пространства

$$N = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \sigma_k.$$

Можно воспользоваться теоремой Эйлера и способом построения проективного пространства из сферы отождествлением диаметрально расположенных точек.

При четном числе измерений  $N' = -2$ ;  $N'' = -1$ ; при нечетном —  $N' = 0$ ;  $N'' = 0$ .

188—190. Сначала необходимо убедиться, что элементы (пары точек, вектора или прямые) действительно составляют многообразие, а затем устанавливать гомеоморфизм.

189. Применяя здесь термин фазового пространства, задачу можно переформулировать так: доказать, что многообразие состояний движения точки по прямой гомеоморфно плоскости без прямой.

Состояние движущейся точки можно определить ее положением и вектором скорости;  $n$ -мерное многообразие, точки которого топологически изображают состояние движения, называется фазовым пространством<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Birkhoff, Dynamical Systems, New-York, 1927.

Нетрудно показать, что фазовое пространство точки, движущейся с постоянной скоростью по поверхности тора, будет проективное пространство; для точки на поверхности тора — топологическое произведение окружности на поверхность тора.

193. Пространством будет симметричное трехмерное пространство вне цилиндра (произведение окружности на плоскость).

194. Первое есть произведение  $E_3$  на  $\mathbb{P}_2$ , второе — произведение  $E_2$  на проективную плоскость.

195. Укажем, что пространство будет замкнуто и четырехмерно.

196. Пространство представляет произведение  $E_4$  и проективной плоскости и потому неориентируемо (теорема Ефремовича).

198. Схема политопа ( $\alpha_0 = 8$ ;  $\alpha_1 = 24$ ;  $\alpha_2 = 32$ ;  $\alpha_3 = 16$ ) изображена на рис. 90.

199.  $\alpha_0 = 24$ ;  $\alpha_1 = 96$ ;  $\alpha_2 = 96$ ;  $\alpha_3 = 24$ .

204. Решение предоставляется читателю. Можно исходить из тетраэдра. Не представляет трудностей дать  $n$ -мерное обобщение. Укажем, что деревья рис. 372 и 373 непосредственно обобщают примеры задачи 15, а рис. 374 и 375 — задачи 16, они представляют собою то, что можно назвать заузленными деревьями и: неизотопные в  $E_n + m n$ -мерные комплексы без  $n$ -мерных циклов и без  $k$ -мерных ( $k < n$ ) негомологических нулю циклов; первый тип это амфихейральные заузленные деревья, второй — неамфихейральные (Н. Н. Худеков).

Напомним, что  $k$ -мерным узлом в  $E_n$  ( $k < n$ ) называется  $k$ -мерный комплекс, принадлежащий  $E_n$ , гомеоморфный, но в  $E_n$  не изотопный

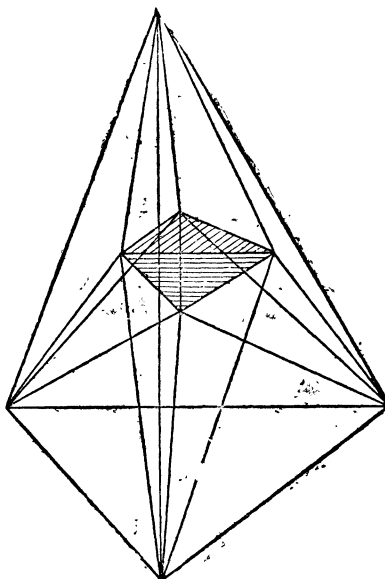


Рис. 90.

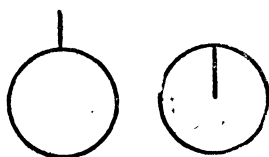


Рис. 91.

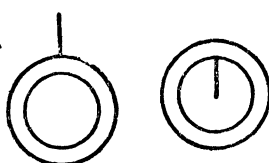


Рис. 92.

сфере  $\mathbb{P}_k$ . В данном случае это понятие применяется к комплексам, не гомеоморфным сферам, а потому получаются классы комплексов, обладающие свойствами узлов, но не имеющие естественных элементарных представителей, каковыми для обычных узлов являются сферы. Действи-

тельно, для линейных комплексов в  $E_2$  простейшим примером будет окружность с отрезком, в одном случае идущим от окружности к центру, в другом случае — от окружности наружу (рис. 91); для двумерных комплексов в  $E_2$  можно например взять области между двумя концентричными окружностями, в одном случае имеющую отрезок, исходящий от внутренней окружности к центру, в другом — от внешней наружу (рис. 92); если взять  $n$  окружностей, то на плоскости можно очевидно сконструировать совокупность из  $n$  неизотопных на  $E_2$  комплексов; в трехмерном случае примеры аналогичного характера можно дать не только на комплексы, но и на многообразия, например область  $E_3$  между сферой и внутри нее находящимся тором гомеоморфна области  $E_3$  между тором и внутри его находящейся сферой, но не изотопна ей в  $E_3$ ; если взять  $n$  поверхностей, можно построить совокупность из  $n$  неизотопных в  $E_3$  многообразий; каждый из  $n$  комплексов (или областей) может с одинаковым правом быть назван простейшей формой, а остальные — заузленными модификациями ее; этим расширяется содержание понятия об узле и заузлении. С другой стороны, кроме расширения понятия об узле на комплексы переносятся те свойства, которые характерны были только для линейных узлов, в частности понятие амфихейральности можно ввести для  $n$ -мерных деревьев ( $n \geq 2$ ).

206. Ответом будут например системы в  $E_4(x, y, z, t)$ :

$$P_2 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ t = 0 \end{cases}; \quad P_1 \begin{cases} x^2 - 2x + t^2 = 3 \\ z = y = 0 \end{cases}.$$

Доказать, что они зацеплены.

208. Построить можно так: возьмем в  $E_3$  любой одномерный узел  $K_1$ ; берем две точки в  $E_4$ , не принадлежащие взятому  $E_3$ , из них описываем два конуса, опирающиеся на узел  $K_1$ . Две полости их, расположенные от узла  $K_1$  до вершин, составят вместе узел  $K_2$ . Доказать, что  $K_2$  гомеоморфно  $P_2$ , но не изотопно  $P_2$  в  $E_4$ .

210. Род поверхности можно найти общим способом по теореме Эйлера, далее следует проверить ориентацию.

212. Построить можно например так: возьмем в  $E_3$  любое заплетение двух окружностей  $K_1$ ; вращая  $K_1$  с  $E_3$  около  $E_2$ , не пересекающего  $K_1$ , в  $E_4$  получим требуемое  $K_2$  как поверхность вращения (метод торирования).

Читателю предоставляется доказать, что это будет заплетением<sup>1)</sup>.

213. Для построения можно применить метод торирования.

215. Можно исходить из баромейских заплетений.

<sup>1)</sup> См. Н. Н. Худеков, *т. с.*, и Artin, *т. с.*



ГЛАВА I.

1. Дан отрезок  $AB$ . Проекция всей прямой  $AB$  из центра проекции  $S$  на плоскость проекции  $\sigma$  есть некоторая прямая  $s$  плоскости  $ABS$ . Рассмотрение можно поэтому вести в плоскости  $ABS$ , которую и при-

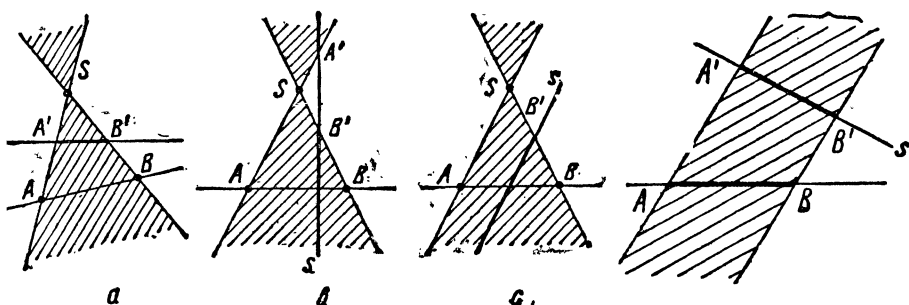


Рис. 1.

нем за плоскость чертежа. Точка  $S$  может быть конечной или бесконечно удаленной, и в первом случае прямая  $s$  может быть конечной или бесконечно удаленной; во втором случае прямая  $s$  не может быть бесконечно удаленной, так как в противном случае точка  $S$  лежала бы на плоскости  $\sigma$ , что исключено (см. конец введения в главе I). Таким образом подлежат рассмотрению три случая;  $S$  и  $s$  конечны;  $S$  конечна,  $s$  бесконечно удалена;  $S$  бесконечно удалена,  $s$  конечна.

Предположим, что  $S$  и  $s$  конечны. Тогда возможны следующие случаи (рис. 1):

1. Точки пересечения  $A', B'$  прямой  $s$  с прямыми  $SA, SB$  конечны и расположены с той же стороны от точки  $S$ , что и точки  $A, B$  (рис. 1, a), или с противоположной стороны. Проекцией отрезка  $AB$  будет отрезок  $A'B'$ .

2. Точки  $A', B'$  конечны, но одна из них расположена по другую сторону от точки  $S$  в сравнении с соответствующим концом отрезка  $AB$  (рис. 1, b). Проекцией отрезка  $AB$  будет совокупность двух полупрямых, дополняющих отрезок  $A'B'$  до полной прямой  $s$ , включая бесконечно удаленную точку прямой  $s$ .

3. Одна из точек  $A', B'$  бесконечно удаленная (рис. 1, c). Проекцией отрезка  $AB$  будет полупрямая, исходящая из той из точек  $A', B'$ , которая конечна.

Теперь предположим, что точка  $S$  конечна, а прямая  $s$  бесконечно удалена. Тогда проекцией отрезка  $AB$  будет совокупность бесконечно удаленных точек прямых, проходящих через точку  $S$  и принадлежащих углу  $ASB$  и вертикальному с ним. Каждую из этих точек можно было бы конечно определить и всякой другой прямой, параллельной соответствующей прямой угла  $ASB$ .

Наконец предположим, что точка  $S$  бесконечно удаленная (рис. 1,  $d$ ). Тогда прямая  $s$  не только не может быть бесконечно удаленной, но и не может быть параллельной прямым  $SA$ ,  $SB$ , так как она не должна проходить через точку  $S$ . Проекцией отрезка  $AB$  будет отрезок  $A'B'$ .

Итак, проекцией отрезка может быть либо отрезок, либо дополнение отрезка до полной прямой, либо полупрямая, либо совокупность бесконечно удаленных точек прямых, образующих пару вертикальных углов. Последние три совокупности точек необходимо также рассматривать как отрезки, если мы хотим, чтобы понятие отрезка стало проективным, т. е., чтобы проекцией отрезка всегда был отрезок. Отрезок в старом смысле слова можно тогда для отличия назвать конечным отрезком. Нетрудно убедиться, что при расширенном понимании отрезка это понятие действительно проективно. Для этого надо дополнительно рассмотреть случаи, когда отрезок  $AB$  не конечный. Предоставляем это читателю.

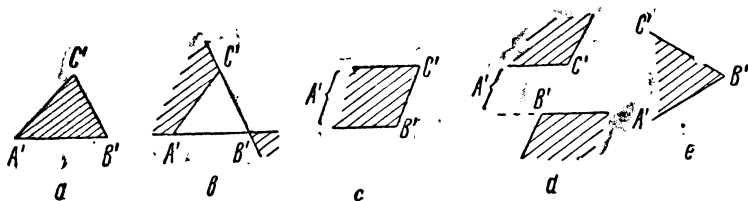


Рис. 2.

2. Проекция  $A'B'C'$  треугольной области  $ABC$  при конечном центре проекции  $S$  и различных положениях конечной плоскости проекции  $\sigma$  даны на рис. 2,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ . Для удобства перечисления условимся считать отрезки  $SA'$ ,  $SB'$ ,  $SC'$  положительными, если они имеют те же направления, что и отрезки  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  соответственно, и отрицательными — при противоположных направлениях. Тогда мы будем иметь: случай  $a$ , когда отрезки  $SA'$ ,  $SB'$ ,  $SC'$  все одного знака; случай  $b$ , когда два отрезка одного знака, а третий другого; случай  $c$ , когда один отрезок бесконечно большой, а два другие одного знака; случай  $d$ , когда один отрезок бесконечно большой, а два другие разных знаков; случай  $e$ , когда два отрезка бесконечно большие. В последнем случае область  $A'B'C'$  есть то, что в элементарной геометрии называется углом или угловой областью.

Если плоскостью проекции служит бесконечно удаленная плоскость, то центр проекции должен быть конечным. В этом случае  $A'B'C'$  есть совокупность бесконечно удаленных точек прямых, проходящих через точку  $S$  и принадлежащих трехгранному углу  $S(ABC)$  и симметричному с ним.

Если центр проекции бесконечно удален, то плоскость проекции должна быть конечной. В этом случае  $A'B'C'$  есть обыкновенная треугольная область.

Чтобы понятие треугольной области стало проективным, необходимо причислить к треугольным областям все полученные типы областей  $A'B'C'$ . Предоставляем читателю проверить, что этого и достаточно для указанной цели.

3. Две точки разбивают прямую на два отрезка. Три непересекающиеся прямые разбивают плоскость на четыре треугольные области. Первое утверждение достаточно очевидно. Второе можно проверить так: Предположим, что рассматриваемая плоскость конечная, а одна из рассматриваемых трех прямых — бесконечно удаленная. Тогда рассматриваемые треугольные области представляют собой с точки зрения элементарной геометрии угловые области, на которые две остальные прямые разбивают плоскость, а таких областей четыре. Если же все рассматриваемые прямые конечные, то всегда можно спроектировать фигуру так, чтобы проекцией одной из прямых была бесконечно удаленная прямая. В виду проективности понятия треугольной области отсюда будет следовать, что число треугольных областей всегда равно четырем. Однако полезно разобрать все возможные разбиения на отдельных чертежах.

4. Именно это и произойдет в случае 2 (рис. 1, b), задачи 1.

5. Если точки  $A, B$  лежат по разные стороны от прямой  $d$ , то точка пересечения  $C$  прямой  $AB$  с прямой  $d$  лежит между точками  $A, B$ . Если спроектировать фигуру так, чтобы точка  $C'$  оказалась не между точками  $A', B'$ , то тем самым точки  $A', B'$  окажутся лежащими по одну сторону от прямой  $d'$ .

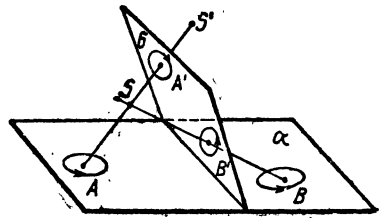


Рис. 3.

6. На рис. 3 показано, как нужно взять плоскость проекции. Направления вращения показаны овалами со стрелками. Если смотреть на точку  $B$  и ее проекцию  $B'$  из точки  $S$ , то вращения вокруг этих точек покажутся происходящими в одном направлении, так как вращающиеся прямые покрывают друг друга. То же самое имело бы место, если бы мы смотрели из точки  $A$  и  $A'$  из точки  $S'$ . Но если смотреть из точки  $S$ , то вращение будет казаться происходящим в том же направлении, как и при рассматривании из точки  $S'$ , только вокруг  $A$ , но не вокруг  $A'$ , потому что  $S$  и  $S'$  лежат по одну сторону от плоскости  $\alpha$ , но по разные стороны от плоскости  $\alpha$ .

7. Если точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , то это значит, что она принадлежит конечному отрезку  $AB$ , т. е., что точки  $A, B$  разделяют точки  $C, D$ , где  $D$  — бесконечно удаленная точка прямой  $AB$ .

Так как разбиение на отрезки, а тем самым и свойства разделения, проективны, то взаимность свойств разделения достаточно проверить для случая, когда точки  $A, B, C, D$  конечные, так как этого всегда можно достигнуть путем проекции, если даже одна из них бесконечно удаленная. Но в этом случае требуемое свойство становится наглядно ясным.

8. Если точки  $A, B$  лежат по разные стороны от прямой  $d$ , то это

значит, что точки  $A, B$  разделяют прямую  $d$  и бесконечно удаленную прямую плоскости.

9. Для доказательства достаточно сделать чертеж и представить себе указанные в теореме движения. Если прямые вращаются вокруг неподвижных точек  $A, B$  в одинаковом направлении, т. е. обе по часовой стрелке или обе против часовой стрелки, то точки пересечения этих прямых с неподвижной прямой  $d$  описывают эту прямую в противоположных направлениях, если эта прямая пересекает конечный отрезок  $AB$ , и в одинаковых направлениях, если она пересекает бесконечный отрезок  $AB$ , не исключая и того случая, когда пересечение имеет место в бесконечно удаленной точке, т. е. когда прямая  $d$  параллельна прямой  $AB$ . Если же одно из вращений происходит по часовой стрелке, а другое — против часовой стрелки, то соответствующие движения по прямой  $d$  происходят в противоположных направлениях, когда эта прямая пересекает бесконечный отрезок  $AB$ , и в одинаковых направлениях, когда она пересекает конечный отрезок  $AB$ .

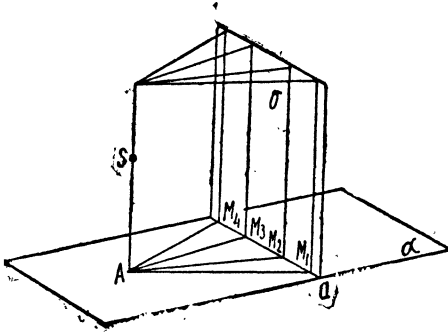


Рис. 4.

Спроектируем вращение прямой вокруг точки  $A$  в плоскости  $\alpha$  из точки  $S$  на плоскость  $\sigma$ , параллельную прямой  $SA$  (рис. 4). Тогда точка  $A$  спроектируется в бесконечно удаленную точку и при вращении прямой вокруг точки  $A$  ее проекция будет перемещаться параллельно самой себе. При этом если данная прямая вращается вокруг точки  $A$  в определенном направлении, то точка пересечения ее  $M$  с линией пересечения  $a$  плоскостей  $\alpha$  и  $\sigma$  будет описывать эту линию также в определенном направлении. Но данная прямая и ее проекция пересекают прямую  $a$  в одной и той же точке  $M$ . Поэтому проекция данной прямой будет перемещаться параллельно самой себе так, что точка пересечения  $\lambda$  с секущей  $a$  будет описывать эту секущую в определенном направлении. То же самое будет и при замене секущей  $a$  какой угодно другой секущей. Поэтому при проективном обобщении понятия вращения прямой вокруг точки, под вращением конечной прямой вокруг бесконечно удаленной точки в определенном направлении следует понимать перемещение этой прямой в определенной плоскости параллельно самой себе, при котором точка пересечения ее с любой секущей описывает эту секущую в определенном направлении.

В обоих случаях одинаковость или неодинаковость направлений движения зависит от того, который из двух отрезков  $AB$  пересекает прямая  $d$ , что и доказывает теорему.

Теорема не может быть обобщена на случай бесконечно удаленных точек и прямых, пока не определено, что понимать под вращением в определенном направлении прямой вокруг бесконечно удаленной точки и под движением в определенном направлении точки по бесконечно удаленной прямой.

Заменяя конечную плоскость проекции  $\sigma$  бесконечно удаленной плоскостью, увидим, что под вращением бесконечно удаленной прямой вокруг бесконечно удаленной точки следует понимать перемещение бесконечно удаленной прямой конечной плоскости при вращении этой плоскости вокруг конечной прямой в определенном направлении. Наконец, проектируя конечную прямую на бесконечно удаленную плоскость, увидим, что под движением бесконечно удаленной точки по бесконечно удаленной прямой в определенном направлении следует понимать перемещение бесконечно удаленной точки конечной прямой при вращении этой прямой вокруг конечной точки в определенном направлении.

Нетрудно теперь убедиться путем разбора всех возможных случаев, что обобщенные таким образом понятия вращения прямой вокруг точки и движения точки по прямой в определенном направлении проективны, т. е. определенному направлению вращения или движения в заданной фигуре всегда соответствует определенное направление вращения и движения в проекции.

После этого легко обобщить доказанную теорему о точках  $A, B$  и прямой  $d$  на случай, когда среди этих элементов имеются бесконечно удаленные, так как всегда можно спроектировать фигуру так, чтобы все эти элементы стали конечными.

Предоставляем читателю фактически провести все те рассуждения, которые нами только намечены.

Остается объяснить парадоксальный на первый взгляд результат задачи 6. Дело в том, что одинаковость направлений вращения двух прямых данной конечной плоскости вокруг данных конечных точек  $A, B$  равносильна одинаковости направлений движения точек пересечения этих прямых с любой прямой  $d$ , пересекающей бесконечный отрезок  $AB$ . Всякая проекция, при которой бесконечный отрезок  $AB$  перейдет в конечный отрезок  $A'B'$ , что и имеет место на чертеже задачи 6, превратит одинаковые направления вращения вокруг точек  $A, B$  в противоположные направления вращения вокруг точек  $A', B'$ .

10. Пусть  $A$  — неподвижная и  $M$  — переменная точка кривой на плоскости  $\alpha$ ,  $AM$  — переменная секущая,  $a$  — касательная в точке  $A$ . Если центр проекции  $S$  и плоскость проекции  $\sigma$  конечны, то возможны три случая:

1. Плоскость  $\sigma$  (рис. 5) пересекает проектирующую прямую  $SA$  и касательную  $a$  в конечных точках  $A', B$ . Когда точка  $M$  достаточно близка к точке  $A$ , то плоскость  $\sigma$  пересекает и секущую  $AM$  в конечной точке  $N$ . Через точку  $B$  проходит и проекция  $a'$  касательной  $a$ , а через точку  $N$  проходит и проекция  $A'M'$  секущей  $AM$ .  $A'M'$  есть в то же время секущая проекции данной кривой. Докажем, что  $a'$  есть касательная к проекции данной кривой в точке  $A'$ . Действительно, когда

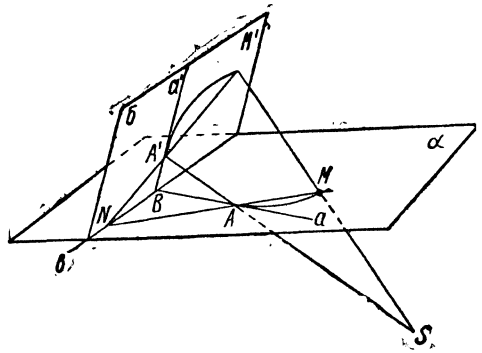


Рис. 5.

угол  $NAB$  стремится к нулю, то отрезок  $NB$  также стремится к нулю, так как  $NB : \sin \widehat{NAB} = AB : \sin \widehat{ANB} \rightarrow AB : \sin \widehat{NBA}$ ; поэтому и угол  $NA'B$  стремится к нулю, так как  $\sin \widehat{NA'B} : NB = \sin \widehat{A'NB} : A'B \rightarrow \sin \widehat{NBA'} : A'B$ ; следовательно прямая  $a'$  есть касательная к проекции.

2. Плоскость  $\sigma$  (рис. 6) параллельна прямой  $SA$ , но пересекает прямую  $a$  в конечной точке. Точка  $A'$  — бесконечно удаленная, а проекции прямых  $AM$  и  $a$  суть прямые, параллельные  $SA$  и пересекающиеся с  $AM$  и  $a$  соответственно в точках  $N, B$  линии пересечения плоскостей  $\alpha, \sigma$ . Когда угол  $NAB$  стремится к нулю, то и отрезок  $NB$  стремится к нулю, а потому и расстояние точки  $M'$  от прямой  $a'$  стремится к нулю. Следовательно прямая  $a'$  есть асимптота проекции.

3. Плоскость  $\sigma$  параллельна прямым  $SA$  и  $a$  и следовательно плоскости, определяемой этими прямыми. Но эта плоскость есть проектирующая плоскость прямой  $a$ . Следовательно проекция прямой  $a$  есть бесконечно удаленная прямая.

Если точка  $S$  — бесконечно удаленная, то проекцией касательной будет касательная; если плоскость  $\sigma$  — бесконечно удаленная, то проекцией всякой прямой будет бесконечно удаленная прямая.

11. Заметим предварительно, что коническую поверхность не следует смешивать с боковой поверхностью конуса. Боковую поверхность конуса образуют конечные отрезки прямых, соединяющие вершину с точками направляющей. Коническую же поверхность образуют эти прямые полностью.

Теперь, всякая плоскость  $\sigma$ , не проходящая через вершину  $S$ , параллельна некоторой плоскости  $\sigma'$ , проходящей через вершину  $S$ . Плоскость  $\sigma'$  пересекает плоскость  $\alpha$  направляющей окружности по прямой  $a$ , конечной или бесконечно-удаленной. Каждой общей точке  $A$  прямой  $a$  и окружности соответствует образующая  $SA$  конической поверхности, лежащая в плоскости  $\sigma'$ , и обратно. Каждую такую образующую плоскость  $\sigma$  пересекает в бесконечно удаленной точке, а все остальные образующие в конечных точках. Известно, что число общих точек  $A$  окружности с прямой  $a$  может равняться только 0, 1 (случай касания) и 2. Таково же будет и число образующих  $SA$ , пересекаемых плоскостью  $\sigma$  в бесконечно удаленных точках. Все прочие образующие пересекаются плоскостью  $\sigma$  в конечных точках. Таким образом доказано первое утверждение задачи.

Бесконечно удаленные точки кривой 2-го порядка суть точки пересечения плоскости  $\sigma$  с прямыми  $SA$ , т. е. проекции точек  $A$  из точки  $S$  на плоскость  $\sigma$ . Если кривая 2-го порядка есть эллипс, то точек  $A$  не имеется, нет и бесконечно удаленных точек. В случае параболы имеется

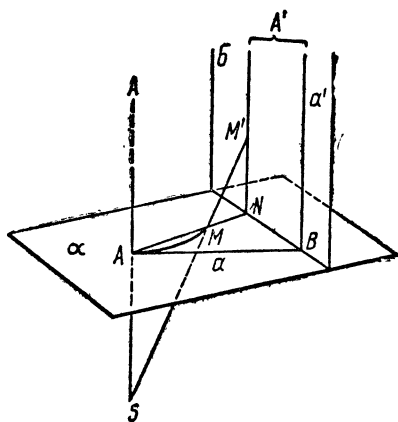


Рис. 6.

одна точка  $A$  и тем самым одна бесконечно удаленная точка. В этом случае прямая  $a$  есть касательная к окружности в точке  $A$ . Проекция прямой  $a$  есть бесконечно удаленная прямая, так как плоскость  $\sigma'$ , проектирующая ее, параллельна плоскости проекции  $\sigma$ . Эту бесконечно удаленную прямую и следует рассматривать как касательную к параболе в ее бесконечно удаленной точке. Если кривая 2-го порядка есть гипербола, то имеется две точки  $A$  и следовательно две бесконечно удаленные точки. В этом случае прямые  $a$  пересекают плоскость  $\sigma'$  и следовательно не параллельны и плоскости  $\sigma$ . Поэтому мы имеем случай рис. 6 предыдущей задачи, и проекции прямых  $a$  суть асимптоты гиперболы. На остальные вопросы дает ответ рис. 7.

12. Свойства внутренней и внешней области проективны по своему характеру и имеют место для круга. Следовательно они имеют место и для проекции круга, т. е. для кривой 2-го порядка. Для эллипса бесконечно удаленная прямая есть внешняя прямая как проекция прямой, внешней для круга; следовательно, все бесконечно удаленные точки — внешние для эллипса. Для параболы бесконечно удаленная прямая есть

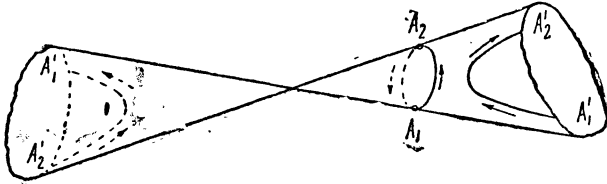


Рис. 7.

касательная; следовательно все бесконечно удаленные точки внешние, кроме одной, лежащей на параболе. Для гиперболы бесконечно удаленная прямая есть секущая; следовательно один из отрезков бесконечно удаленной прямой, соединяющих бесконечно удаленные точки гиперболы, состоит из внутренних точек, а другой из внешних. Асимптоты гиперболы, как касательных к ней, лежат во внешней области, кроме точек касания, лежащих на самой гиперболе; во всяком случае все конечные точки асимптот — внешние. Конечный отрезок, соединяющий две конечные точки эллипса или параболы, лежит внутри кривой, так как дополнительный бесконечный отрезок содержит бесконечно удаленную точку и поэтому не может лежать внутри кривой. В случае гиперболы этот отрезок может лежать и внутри и вне кривой. Действительно, бесконечно удаленная прямая делит гиперболу на две дуги — ветви. Прямая, соединяющая две точки одной ветви, пересекает бесконечно удаленную прямую во внешней точке; конечный отрезок этой прямой — внутренний. Напротив, прямая, соединяющая точки разных ветвей, пересекает бесконечно удаленную прямую во внутренней точке; следовательно, конечный отрезок такой прямой — внешний.

13. Сначала спроектируем все точки на прямую, пересекающую прямую  $AB$  в точке  $C$  (рис. 8). Из подобия треугольников видим тогда, что точки  $A'$ ,  $B'$  делят отрезок  $C'D'$  соответственно в отношениях  $CA : D'S$ ,  $CB : D'S$ , равенство которых следует из условия  $CA = CB$ , и

притом одна внутренним, другая внешним образом. Заметим, что мы имеем здесь то самое построение, которое применяется в элементарной геометрии для деления отрезка в данном отношении.

Если бы за ось проекции была принята прямая  $s'$ , пересекающая прямую  $AB$  не в точке  $C$ , то проведя параллельную ей прямую  $s$  через точку  $C$ , мы убедились бы в справедливости теоремы и для этого случая, в виду пропорциональности соответствующих отрезков на прямых  $s, s'$ .

14. Чтобы убедиться в проектив-

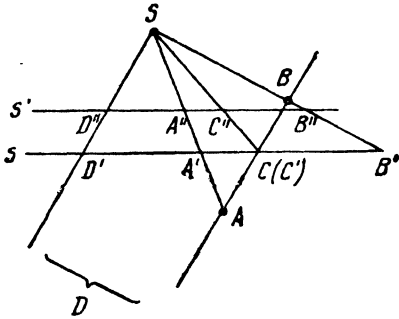


Рис. 8.

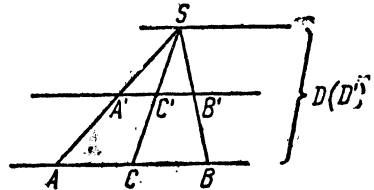


Рис. 9.

ном характере свойства гармонической сопряженности, нужно доказать следующую теорему: если точки  $A, B$  гармонически сопряжены относительно точек  $C, D$ , и точки  $A', B', C', D'$  суть проекции точек  $A, B, C, D$ , то точки  $A', B'$  гармонически сопряжены относительно точек  $C', D'$ . Эта теорема уже доказана в решении предыдущей задачи для того случая, когда точка  $D$  бесконечно удаленная, а точка  $D'$  конечная.

Если точки  $D, D'$  обе бесконечно удаленные, то теорема сводится к следующей (рис. 9): симметричность точек  $A, B$  относительно точки  $C$

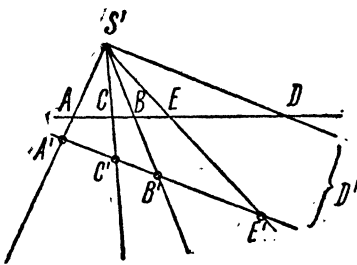


Рис. 10.

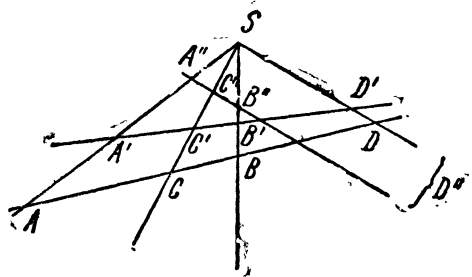


Рис. 11.

сохраняется и в проекции, если ось проекции параллельна прямой  $AB$ ; доказательство вытекает из пропорции  $A'C' : C'B' = AC : CB$ .

Если точка  $D$  — конечная, а точка  $D'$  — бесконечно удаленная, то теорема легко доказывается от противного (рис. 10). В самом деле если не точка  $B'$ , а какая-нибудь другая точка  $E'$  симметрична с точкой  $A'$  относительно точки  $C'$ , то не точка  $B$ , а некоторая другая точка  $E$  делит отрезок  $CD$  в том же отношении, что и точка  $A$ , что противоречит условию теоремы.



Наконец случай, когда точки  $D, D'$  обе конечные, легко сводится к предыдущим (рис. 11). Действительно, если  $A'', B'', C''$  — точки пересечения какой-нибудь прямой, параллельной прямой  $SD$ , с прямыми  $SA, SB, SC$ , то, рассматривая их как проекции точек  $A, B, C$ , и бесконечно удаленную точку  $D''$  той же прямой как проекцию точки  $D$ , находим по только что доказанному, что точки  $A'', B''$  симметричны относительно точки  $C''$ . После этого, рассматривая точки  $A', B', C', D'$  как проекции точек  $A'', B'', C'', D''$ , находим по теореме предыдущей задачи, что точки  $A', B'$  гармонически сопряжены относительно точек  $C', D'$ .

Случай, когда  $S$  — бесконечно удаленная точка, предоставляем читателю.

Для доказательства взаимности свойств, гармонической сопряженности одной пары точек относительно другой, проще всего воспользоваться методом проекций, сводя общий случай к частному, когда одна из четырех точек бесконечно удаленная.

Предположим, что точки  $A, B$  гармонически сопряжены относительно точек  $C, D$  и пусть будут (рис. 12)  $a, b, c, d$  прямые, проектирующие точки  $A, B, C, D$  из центра  $S$ . Если за ось проекции примем прямую параллельную прямой  $d$ , то в проекции точка  $D'$  будет бесконечно удаленная, и точка  $C'$  будет серединой отрезка  $A'B'$ . Если же за ось проекции примем прямую, параллельную прямой  $a$ , то в проекции точка  $A''$  будет бесконечно удаленной, и легко убедиться, проведя эту прямую через точку  $B'(B'')$ , что точка  $B''$  будет серединой отрезка  $C'D''$ . Действительно, отрезки  $C'B'', B''D''$  оба равны отрезку  $A'S$ . Но отсюда следует, что точки  $C, D$  гармонически сопряжены относительно точек  $A, B$ , что и доказывает взаимность.

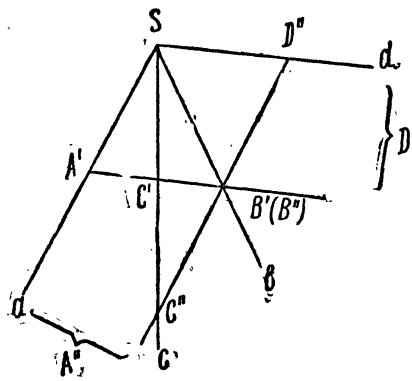


Рис. 12.

15. Определение гармонической сопряженности двух пар прямых в пучке было бы противоречиво, если бы был возможен случай, когда одна прямая пересекает две пары прямых пучка в сопряженных парах точек, а другая в несопряженных. Но это невозможно в виду проективности свойства гармонической сопряженности двух пар точек.

Если прямые  $a, b$  гармонически сопряжены с прямыми  $c, d$  и прямая  $d$  бесконечно удаленная, то прямые  $a, b, c$  параллельны и прямая  $c$  равноудалена от прямых  $a, b$ .

16. На рис. 13,а) представлен полный четырехсторонник со сторонами  $a, b, c, d$ , парами противоположных вершин  $EF, GH, KL$ , диагоналями  $p, q, r$  и диагональными точками  $P, Q, R$ . Чтобы доказать например, что пара вершин  $KL$  и пара диагональных точек  $PQ$  гармонически сопряжены, спроектируем фигуру так, чтобы прямая  $p$  или  $q$  спроектировалась в бесконечность. На рис. 13,б) показана такая проекция, причем все точки и прямые обозначены теми же буквами, что и

в исходной фигуре. В бесконечность спроектирована прямая  $p$ . Поэтому точки  $E, F, Q$  бесконечно удаленные, и четырехугольник  $GHKL$  есть параллелограмм. Точка  $P$  как точка пересечения диагоналей параллелограмма делит диагональ  $KL$  пополам, и следовательно гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой  $Q$  прямой  $KL$  относительно точек  $K, L$ . В силу проективности гармонической сопряженности, то же самое имеет место в исходной фигуре, что и требовалось доказать.

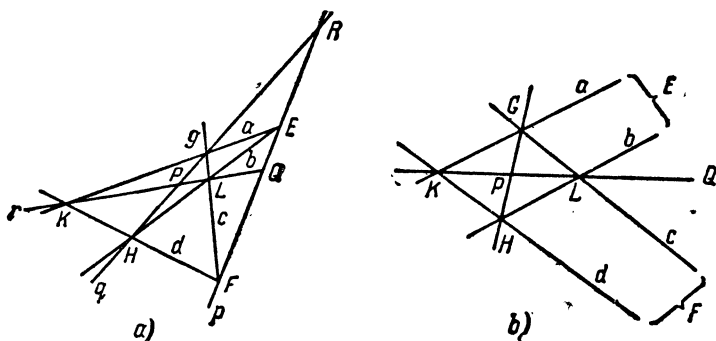


Рис. 13.

17. Для доказательства достаточно спроектировать одну из диагоналей, о которых говорится в условии теоремы, в бесконечность. Читатель сделает два чертежа, как в предыдущей задаче. Впрочем в первом из этих чертежей легко найти полный четырехсторонник, позволяющий вывести теорему из результата предыдущей задачи, не обращаясь к методу проекций.

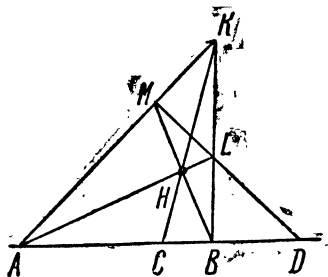


Рис. 14.

18. Построение можно вести например так: проводим через точку  $C$  (рис. 14) произвольную прямую, отличную от прямой  $AB$ , и отмечаем на этой прямой две произвольные точки  $H, K$ , отличные от  $C$  и друг от друга; проводим прямые  $AH$  и  $BK$  до пересечения в точке  $L$  и прямые  $AK$  и  $BH$  до пересечения в точке  $M$ ; прямая  $LM$  пересечет прямую  $AB$  в искомой точке  $D$ . Действительно, прямые  $AH, AK, BH, BK$  можно рассматривать как стороны полного четырехсторонника, в котором  $A, B$  — вершины, а  $C, D$  — диагональные точки диагонали  $AB$ .

19. Построение можно вести аналогично предыдущему: берем на прямой  $s$  (рис. 15) произвольную точку, отличную от точки  $ab$  (т. е. от точки пересечения прямых  $a$  и  $b$ ), и проводим через эту точку две произвольные прямые  $h, k$ , отличные от  $s$  и друг от друга; соединяем точки  $ah$  и  $bk$  прямой  $l$  и точки  $ak$  и  $bh$  прямой  $m$ ; прямая, соединяющая точку  $lm$  с точкой  $ab$ , и есть искомая прямая  $d$ .

Для доказательства служит полный четырехугольник с вершинами  $ah, ak, bh, bk$ .

20. Из простейших теорем элементарной геометрии найдем: полярна бесконечно удаленной точки относительно окружности есть диаметр, перпендикулярный к прямой, проходящим через эту бесконечно удаленную точку; полярна центра есть бесконечно удаленная прямая; полярна точки, лежащей на окружности, есть касательная в этой точке.

21. Если  $S$  — точка шара, принятая за центр стереографической проекции, то за плоскость проекции можно, как известно, принять любую плоскость, параллельную касательной плоскости  $\sigma'$  в точке  $S$  (на рис. 16 за плоскость проекции принята касательная плоскость  $\sigma$  в диаметрально противоположной точке  $S'$ ). Пусть будет  $K$  круг, лежащий на шаре,  $a$  — плоскость этого круга,  $K'$  — его проекция. Прямая плоскости  $a$ , проекция которой есть бесконечно удаленная прямая, есть очевидно линия пересечения  $a$  плоскости  $a$  с плоскостью  $\sigma'$ . Если теперь предположим заданными круг  $K$  и прямую  $a$  в плоскости  $a$ , внешнюю по отношению к кругу, то остальные части фигуры можно построить: проводим через круг  $K$  какой-нибудь шар; так как прямая  $a$  не имеет общих точек с кругом, то она не может иметь общих точек и с шаром, и следовательно через нее можно провести плоскость  $\sigma'$ , касательную к шару; приняв точку касания  $S'$  за центр проекции и какую-нибудь плоскость  $\sigma$ , параллельную плоскости  $\sigma'$ ,

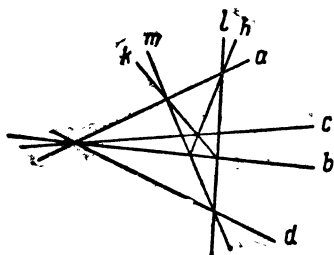


Рис. 15.

за плоскость проекции, мы и получим в качестве проекции круга  $K$  другой круг  $K'$ , а в качестве проекции прямой  $a$  — бесконечно удаленную прямую плоскости  $\sigma$ .

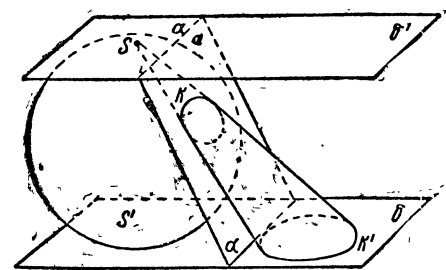


Рис. 16.

22. Предположим, что мы спроектировали круг или другую кривую 2-го порядка  $K$  так, что в проекции получился круг  $K'$ , и пусть точка  $A$  спроектировалась при этом в точку  $A'$ . Если мы докажем, что полярна точки  $A'$  относительно круга  $K'$  есть прямая, то тем самым будет доказано, что и полярна точки  $A$  относительно кривой  $K$  есть прямая; это видно из того, что прямые, касательные к кривым, и гармонически сопряженные пары точек остаются таковыми и в проекции.

Предположим, что кривая  $K$  есть круг. Тогда возможны три случая:

1. Точка  $A$  — внешняя. Проведя через точку  $A$  какую-нибудь внешнюю прямую, спроектируем фигуру так, чтобы в проекции получить круг  $K'$  и бесконечно удаленную прямую, что возможно на основании предыдущей задачи. Проекцией точки  $A$  будет тогда бесконечно удален-

ная точка  $A'$ . Так как полярна точки  $A'$  относительно круга  $K'$  есть прямая (диаметр), как показано в задаче 20, то полярна точки  $A$  относительно круга  $K$  есть также прямая (секущая). Если точка  $A$  сама бесконечно удаленная, то проекция не нужна.

2. Точка  $A$  лежит на круге  $K$ . На основании задачи 20 полярна точки  $A$  есть касательная в точке  $A$ .

3. Точка  $A$  — внутренняя (рис. 17). Мы можем предполагать точку  $A$  отличной от центра круга  $O$ , так как случай совпадения точки  $A$  с центром уже рассмотрен в задаче 20. Проведем через точку  $A$  две секущие — диаметр  $OA$  и перпендикулярную секущую  $p$ . Затем найдем точки  $B$  и  $C$ , гармонически сопряженные с точкой  $A$  относительно точек пересечения  $E, F$  и  $G, H$  секущих  $OA$  и  $p$  с кругом  $K$ . Точка  $B$  есть внешняя конечная точка диаметра  $OA$ , а точка  $C$  есть бесконечно удаленная точка секущей  $p$ , перпендикулярной к нему. Поэтому прямая  $BC \equiv a$  перпендикулярна к диаметру  $OA$  во внешней точке его и следовательно не имеет общих точек с кругом  $K$ . Спроектируем фигуру

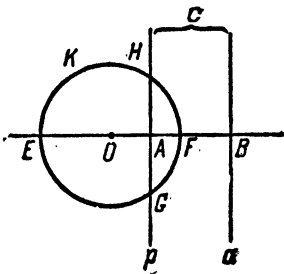


Рис. 17.

так, чтобы круг  $K$  и конечная прямая  $a$  превратились в круг  $K'$  и бесконечно удаленную прямую (рис. 18). Проекция  $B', C'$  точек  $B, C$  будут бесконечно удаленными точками, и следовательно проекция  $A'$  точки  $A$  будет делить пополам отрезки  $E'F', G'H'$  секущих  $A'B', A'C'$  внутри круга  $K'$ . Отсюда легко видеть, что точка  $A'$  есть центр круга  $K'$ . Действительно, так как отрезки  $E'F', G'H'$  взаимно делятся пополам, то четырехугольник  $E'G', F'H'$  есть параллелограмм; но параллелограмм, вписанный в круг есть прямоугольник, центр которого совпадает с центром круга.

Итак, круг  $K$  и внутреннюю точку  $A$  можно всегда спроектировать так, чтобы круг  $K$  остался кругом, а точка  $A$  стала центром этого круга. Но полярна центра есть прямая (бесконечно удаленная), как показано в задаче 20. Следовательно полярна всякой внутренней точки есть прямая (внешняя).

Таким образом теорема доказана для круга  $K$  при любом положении точки  $A$ . Тем самым теорема доказана и для любой кривой 2-го порядка, так как всякая кривая 2-го порядка есть проекция круга.

23. Данную кривую 2-го порядка и данную прямую, не касательную к ней, с помощью двух проекций всегда можно заменить либо кругом и бесконечно удаленной прямой (если прямая внешняя), либо кругом и диаметром (если прямая секущая).

В обоих случаях прямая теорема легко проверяется. Полюс бесконечно удаленной прямой есть центр, а полярна бесконечно удаленной точки есть диаметр, все же диаметры проходят через центр. Точно также полярны всех точек диаметра, как легко убедиться на основании симметрии круга, перпендикулярны к диаметру и следовательно проходят че-

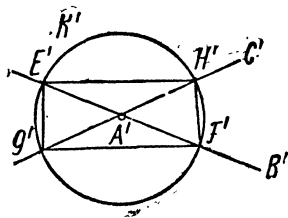


Рис. 18.

рез его бесконечно удаленный полюс. Если прямая касательна к кривой 2-го порядка, то прямая теорема легко проверяется непосредственно. Действительно, полюс касательной есть точка касания, а поляра всякой другой точки касательной соединит эту точку касания с точкой касания второй касательной, проходящей через ту же точку. Так же можно проверить и обратную теорему.

24. Предложенная теорема есть другая форма теоремы предыдущей задачи.

25. Пусть будет  $P$  — точка пересечения прямых  $a$ ,  $b$  и  $p$  — прямая, соединяющая их полюсы  $A$ ,  $B$ . Так как точка  $P$  лежит на прямых  $a$ ,  $b$ , то ее поляра проходит через их полюсы  $A$ ,  $B$  и следовательно совпадает с прямой  $p$ , что и требовалось доказать.

26. Пусть будут  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  вершины полного четырехугольника и  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — их поляры. Если бы три из прямых  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , например прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$  проходили через одну точку, то, на основании задачи 23, соответствующие вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  четырехугольника лежали бы на поляре этой точки, что противоречит определению четырехугольника. Поэтому прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  суть стороны полного четырехсторонника. На основании предыдущей задачи полюсами сторон  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$ ,  $BC$  четырехугольника будут вершины  $ab$ ,  $cd$ ,  $ac$ ,  $bd$ ,  $ad$ ,  $bc$  четырехсторонника.

27. Две пары гармонически сопряженных точек можно рассматривать как пару вершин и пару диагональных точек некоторого четырехсторонника, лежащих на одной диагонали. Поэтому поляры этих точек представляют собой пару сторон и пару диагоналей некоторого четырехугольника, проходящие через одну диагональную точку, что и доказывает теорему.

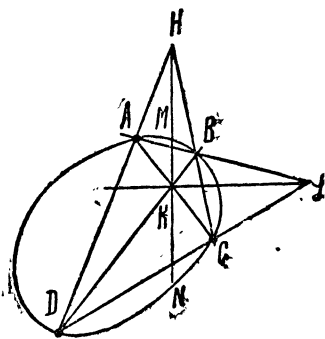


Рис. 19.

28. Например диагональ  $HK$  (рис. 19) есть поляра диагональной точки  $L$ , так как она пересекает секущую  $LBA$  в точке  $M$ , гармонически сопряженной с точкой  $L$  относительно точек  $A$ ,  $B$ , и секущую  $LCD$  в точке  $N$ , гармонически сопряженной с точкой  $L$  относительно точек  $C$ ,  $D$ . Так же доказывается, что  $KL$  есть поляра  $H$  и  $LH$  есть поляра  $K$ , так что всякая сторона диагонального треугольника есть поляра противоположной вершины (автополярный треугольник).

29. Построение поляры данной точки, не лежащей на кривой, ясно из рис. 19: чтобы построить поляру точки  $L$ , проводим через нее две произвольные секущие  $LBA$ ,  $LCD$ , затем проводим остальные стороны  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$ ,  $BC$  четырехугольника  $ABCD$ , и наконец проводим его диагональ  $HK$ , которая и будет искомой полярой. Если дана внешняя точка  $P$ , то ее поляра  $p$  есть секущая; построив ее по предыдущему, соединяем точки пересечения ее с кривой  $U$ ,  $V$  (рис. 20) с точкой  $P$ ; прямые  $PU$ ,  $PV$  суть касательные к кривой из точки  $P$ . Чтобы построить полюс данной прямой, достаточно построить поляры двух ее точек, точка пересечения которых и будет искомым полюсом. Чтобы по-

строить касательную в данной точке кривой, нужно соединить эту точку с полюсом какой-нибудь секущей, проведенной через нее.

30. Доказательства всех предложенных теорем непосредственно вытекают из предыдущего.

31. Секущие, проходящие через бесконечно удаленную точку  $P$ , не лежащую на кривой, суть параллельные прямые, каждая из которых пересекает кривую в двух конечных точках  $M, N$  (рис. 21). Точка  $Q$ , гармонически сопряженная с точкой  $P$  относительно точек  $M, N$ , делит хорду  $MN$  пополам. Мы видим, что диаметр, сопряженный с хордами  $MN$  данного направления  $P$ , есть прямая  $p$ , всякая точка которой есть либо середина одной из этих хорд, либо точка пересечения касательных в концах одной из этих хорд, либо и то и другое вместе. Также убеждаемся, что центр есть точка, делящая пополам всякую хорду, проходящую через нее, и что касательные в концах такой хорды параллельны.

Так как по определению полюс бесконечно удаленной прямой называется центром лишь в том случае, когда эта прямая не касается кри-

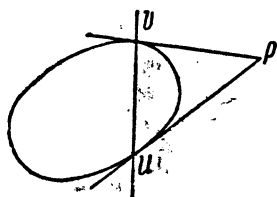


Рис. 20.

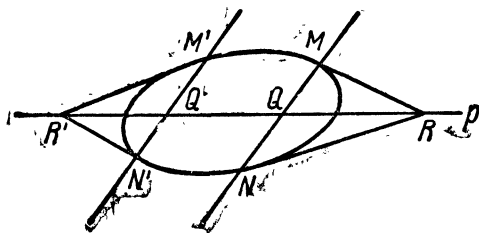


Рис. 21.

вой, то центр имеют только эллипс и гипербола (если бы этого ограничения не было, то и парабола имела бы центр, и центром параболы пришлось бы считать ее бесконечно удаленную точку).

Все диаметры эллипса или гиперболы проходят через центр, так как поляры бесконечно удаленных точек должны проходить через полюс бесконечно удаленной прямой, на основании задачи 23 (диаметры параболы параллельны, так как для нее полюс бесконечно удаленной прямой есть ее бесконечно удаленная точка).

Диаметры эллипса и гиперболы попарно сопряжены, так как вообще прямые, проходящие через точку, не лежащую на кривой, попарно сопряжены, за исключением касательных, проходящих через эту точку, которые сопряжены сами с собой (в случае эллипса таких касательных нет, так как центр эллипса есть внутренняя точка, а в случае гиперболы эти касательные суть асимптоты, но они не являются диаметрами, так как они суть поляры точек, хотя и бесконечно удаленных, но лежащих на самой кривой). В случае параболы никакие два диаметра не сопряжены между собой, так как прямые, сопряженные с диаметром параболы, не проходят через ее бесконечно удаленную точку, за исключением бесконечно удаленной прямой, которая также не является диаметром.

Всякий диаметр эллипса пересекает его в двух конечных точках как полярю внешней бесконечно удаленной точки. Диаметры гиперболы суть

частью полярны внешних бесконечно удаленных точек, частью полярны внутренних бесконечно удаленных точек; первые пересекают гиперболу в двух конечных точках, вторые не имеют с гиперболой общих точек. Легко убедиться, путем проектирования гиперболы в круг, что диаметры каждого рода заполняют одну из двух пар вертикальных углов между асимптотами. Всякий диаметр параболы пересекает ее в одной конечной точке; вторая точка пересечения есть бесконечно удаленная точка параболы.

32. Стороны угла, вписанного в круг и опирающегося на диаметр, взаимно перпендикулярны. Это свойство само по себе непроективно, но ему можно придать проективную форму, замечая, что бесконечно удаленные точки взаимно перпендикулярных прямых сопряжены относительно круга. Например можно высказать это свойство в следующей форме: если одна из сторон треугольника, вписанного в круг, проходит через полюс бесконечно удаленной прямой, то две другие стороны пересекают бесконечно удаленную прямую в сопряженных точках. Проективным обобщением этой теоремы будет следующая: если одна из сторон треугольника, вписанного в кривую 2-го порядка, проходит через полюс некоторой прямой, то две другие стороны пересекают эту прямую в сопряженных точках. Эта теорема легко сводится к предыдущей в том случае, если упоминаемая в ней прямая внешняя. В этом случае всегда возможно с помощью не более двух проекций отбросить эту прямую в бесконечность и одновременно превратить данную кривую в круг.

Если прямая пересекает кривую, то решение несколько усложняется. В этом случае можно превратить кривую в круг  $K$  и одновременно прямую в диаметр  $a$ , как в задаче 22. По условию сторона  $BC$  треугольника, вписанного в круг  $K$  (рис. 22), проходит через полюс диаметра  $a$ , т. е. перпендикулярна к нему. Чтобы убедиться, что точки пересечения  $D, E$  сторон  $AB, AC$  с прямой  $a$  сопряжены относительно круга  $K$ , достаточно повернуть фигуру на  $180^\circ$  вокруг прямой  $a$ . В результате круг  $K$  совместится с самим собой, точки  $D, E$  останутся неподвижными, точки  $B, C$  поменяются местами, точка  $A$  перейдет в точку  $A'$ . Теперь мы видим, что точки  $D, E$  суть диагональные точки четырехугольника  $ABCA'$ , вписанного в круг  $K$ , и следовательно сопряжены между собой, на основании задачи 28. Мы предположили на чертеже, что точка  $A$  не лежит на прямой  $a$ , но в этом случае для доказательства даже нет необходимости обращаться к методу проекций. Точно также читатель легко проверит правильность теоремы для того случая, когда данная прямая касательна к кривой.

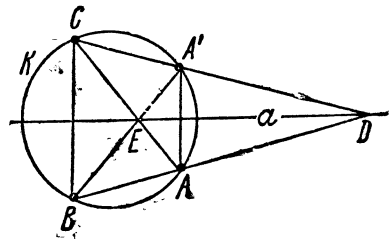


Рис. 22.

Предполагая теперь, что данная кривая какая угодно, а прямая бесконечно удаленная, получим теорему: стороны угла, вписанного в кривую 2-го порядка и опирающегося на диаметр, пересекают бесконечно удаленную прямую в сопряженных точках. В случае эллипса или гиперболы это показывает, что эти стороны параллельны сопряженным диаметрам, в случае же параболы не дает ничего интересного.

33. Чтобы решить поставленную задачу для эллипса или гиперболы, достаточно построить вписанный в данную кривую угол, опирающийся на диаметр, стороны которого были бы взаимно перпендикулярны; прямые, проведенные через середину этого диаметра параллельно сторонам угла, и будут искомыми осями. Но такой угол будет одновременно и вписанным в круг, опирающийся на тот же диаметр. Следовательно вершина его будет общей точкой кривой и круга. Отсюда вытекает следующее построение.

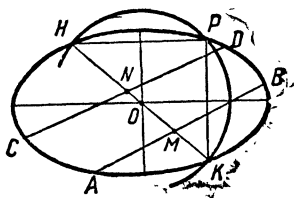


Рис. 23.

Проводим две параллельные хорды  $AB$ ,  $CD$  (рис. 23), делим их пополам в точках  $M$ ,  $N$  и проводим прямую  $MN$  до пересечения с кривой в точках  $H$ ,  $K$ —прямая  $HK$  есть некоторый диаметр (в случае гиперболы, чтобы диаметр  $MN$  пересекал кривую, оба конца хорды  $AB$  нужно взять на одной ветви). Затем делим отрезок  $HK$  пополам в точке  $O$ —эта точка есть центр кривой. Затем описываем

около  $O$  круг радиусом  $OH$ . Если  $P$ —точка пересечения круга с кривой, то прямые, проведенные через  $O$  параллельно  $HP$  и  $KP$ , будут осями кривой.

В случае параболы все диаметры параллельны. Построив с помощью двух параллельных хорд какой-нибудь диаметр, можно затем построить ось с помощью двух хорд перпендикулярных к этому диаметру, или даже с помощью одной такой хорды.

34. Достаточно доказать теорему для круга. Пусть будет  $ABCDEF$  шестиугольник (рис. 24), вписанный в круг  $K$ . В условии теоремы не сказано, что шестиугольник должен быть выпуклым, но естественно рассмотреть сначала этот случай. Пусть стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  пересекают противоположные стороны  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$  соответственно в точках  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Требуется до-

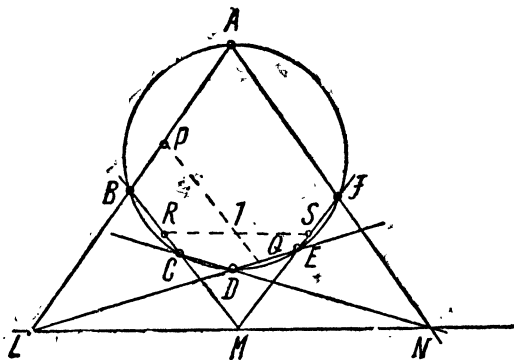


Рис. 24.

казать, что точки  $L$ ,  $M$ ,  $N$  лежат на одной прямой, т. е., что прямая  $LM$  проходит через точку  $N$ . Доказательство можно будет свести к случаю, когда точки  $L$ ,  $M$  бесконечно удаленные, если удастся доказать, что при сделанном предположении прямая  $LM$  всегда внешняя. Заметим прежде всего, что в силу выпуклости шестиугольника противоположные стороны шестиугольника пересекаются лишь при продолжении; следовательно точки  $L$ ,  $M$ —внешние для круга  $K$ . Точки  $P$ ,  $Q$ , гармонически сопряженные с точкой  $L$  относительно концов хорд  $AB$ ,  $DE$ , будут поэтому внутренними точками хорд  $AB$ ,  $DE$ , и точно также точки  $R$ ,  $S$ , гармонически сопряженные с точкой  $M$



относительно концов хорд  $BC$ ,  $EF$ , будут внутренними точками хорд  $BC$ ,  $EF$ . В силу выпуклости шестиугольника  $ABCDEF$  прямая  $PQ$  делит его на две части, расположенные по разные стороны от нее. Отсюда видно, что точки  $R$ ,  $S$  расположены по разные стороны от прямой  $PQ$ , а потому точка пересечения  $T$  прямых  $PQ$ ,  $RS$  есть внутренняя точка отрезка  $RS$ . Так как концы отрезка  $RS$  суть внутренние точки для круга  $K$ , то и точка  $T$  есть внутренняя точка. Но точка  $T$  есть полюс прямой  $LM$ . Следовательно прямая  $LM$  — внешняя для круга  $K$ , что и нужно было доказать.

Отбросив прямую  $LM$  в бесконечность так, чтобы круг  $K$  остался кругом, мы должны будем доказать только следующую теорему: если стороны  $AB$ ,  $BC$  вписанного в круг шестиугольника  $ABCDEF$  параллельны противоположным сторонам  $DE$ ,  $EF$ , то и остальные стороны  $CD$ ,  $FA$  параллельны (рис. 25). Доказательство этой теоремы вообще не представляет затруднений, но в данном случае оно еще облегчается тем, что шестиугольник  $ABCDEF$  и в проекции остается выпуклым. Действительно, из того, что стороны шестиугольника до проекции пересекались вне круга, следует, что они и после проекции будут пересекаться вне круга, так как внешние точки всегда проектируются во внешние точки, а внутренние во внутренние. После этого доказательство становится очевидным: так как стороны углов  $ABC$ ,  $DEF$  параллельны и противоположно направлены, то эти углы равны; следовательно дуги  $AC$ ,  $DF$ , в которые они вписаны, равны, а потому хорды  $CD$ ,  $AF$  параллельны.

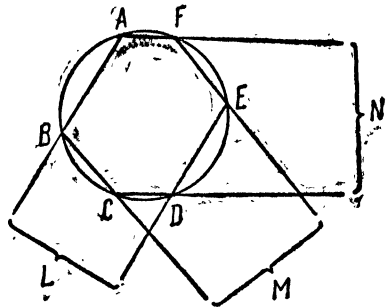


Рис. 25.

Если шестиугольник  $ABCDEF$  не выпуклый, то прямая может оказаться секущей или касательной, и предыдущее доказательство не применимо. Тогда можно рассуждать следующим образом:

Если шестиугольник, вписанный в круг, не выпуклый, то можно соединить его вершины в другом порядке, так что получится выпуклый шестиугольник. Для этого шестиугольника теорема доказана. Поэтому достаточно доказать еще следующую теорему: если точки пересечения противоположных сторон некоторого шестиугольника лежат на одной прямой, то это свойство имеет место для всякого шестиугольника с теми же вершинами, т. е. это свойство сохраняется при изменении порядка соединения вершин. Достаточно доказать это для случая перестановки двух соседних вершин, так как с помощью нескольких таких перестановок можно от любого порядка вершин перейти к любому другому.

Итак, нам остается доказать следующую теорему: если точки пересечения противоположных сторон шестиугольника  $ABCDEF$  лежат на одной прямой, то это свойство имеет и шестиугольник  $ABDCEF$ . Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда противоположные стороны шестиугольника  $ABCDEF$  параллельны (рис. 26). Стороны  $DC$ ,  $FA$  будут также противоположными сторонами шестиугольника

$ABDCEF$ , но сторонам  $AB$  и  $EF$  будут в шестиугольнике  $ABDCEF$  противоположны стороны  $CE$ ,  $BD$ , которые в шестиугольнике  $ABCDEF$  служат диагоналями. Пусть будут  $K$ ,  $L$  — точки пересечения сторон  $AB$ ,  $EF$  с противоположными им сторонами  $CE$ ,  $BD$  шестиугольника  $ABDCEF$ . Мы должны доказать, что прямая  $KL$  проходит через точку пересечения

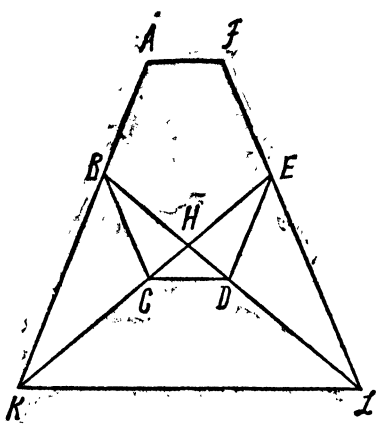


Рис. 26.

полюсы прямых  $AB$ ,  $BC$ , то прямая  $A'B'$  есть полярная точка  $B$ . Точно также прямая  $D'E'$  есть полярная точка  $E$ . Поэтому точка пересечения  $L$  прямых  $A'B'$ ,  $D'E'$  есть полюс прямой  $BE$ . Таким путем убедимся, что вообще точки пересечения противоположных сторон шестиугольника  $A'B'C'D'E'F'$  суть полюсы прямых, соединяющих соответствующие противоположные вершины шестиугольника  $ABCDEF$ . Но по предыдущей теореме эти точки пересечения лежат на одной прямой. Следовательно их полярные  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  проходят через полюс этой прямой, что и доказывает теорему.

36. Пусть будут  $ABC$ ,  $A'B'C'$  — данные треугольники и  $H$ ,  $K$ ,  $L$  — точки пересечения сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  с одноименными сторонами  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  треугольника  $A'B'C'$  (рис. 28). Мы вправе ограничиться рассмотрением случая, когда прямая  $HK$  — бесконечно удаленная. В этом случае прямая теорема принимает следующий вид: если прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , соединяющие вершины треугольника  $ABC$  с одноименными вершинами треугольника  $A'B'C'$ , пересекаются в одной

остальных двух сторон  $DC$ ,  $FA$ , т. е. параллельна им. Из подобия треугольников  $HKB$ ,  $HED$  находим  $HK:HB = HE:HD$ . Из подобия треугольников  $HBC$ ,  $HLE$  находим  $HB:HC = HL:HE$ . Перемножая полученные пропорции, находим  $HK:HC = HL:HD$ , что и доказывает параллельность прямой  $KL$  стороне  $DC$ .

35. Эта теорема выводится из предыдущей с помощью свойств полюсов и поляр. Пусть будет  $ABCDEF$  шестиугольник (рис. 27), описанный около кривой 2-го порядка  $K$ , и  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  — точки касания его сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$ . Рассмотрим одновременно вписанный шестиугольник  $A'B'C'D'E'F'$ . Так как точки  $A'$ ,  $B'$  суть

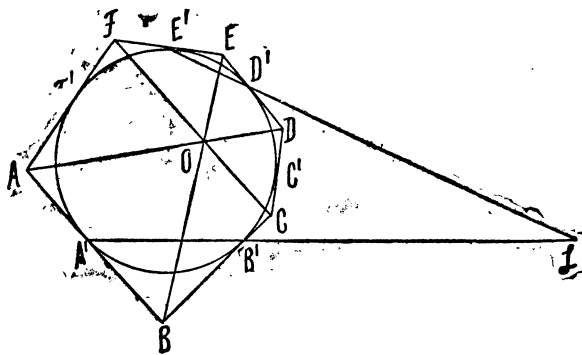


Рис. 27.

точке  $O$  и стороны  $AB, BC$  треугольника  $ABC$  параллельны одноименным сторонам  $A'B', B'C'$  треугольника  $A'B'C'$ , то и третьи стороны  $AC, A'C'$  параллельны между собой. Для доказательства замечаем, что точки  $A', C'$  делят отрезки  $OA, OC$  в отношениях  $OA':A'A, OC':C'C$ , равных отношению  $OB':B'B$  и следовательно равных между собою. Обратная теорема принимает вид: если

стороны  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  параллельны одноименным сторонам  $A'B', B'C', C'A'$  треугольника  $A'B'C'$ , то прямые  $AA', BB', CC'$ , соединяющие одноименные вершины треугольников, пересекаются в одной точке. Доказательство не менее просто. Пусть будет  $O$  точка пересечения прямых  $AA', BB'$ . Соединим точку  $O$  с точкой  $C$  и докажем, что прямые  $A'C', B'C'$  пересекают прямую  $OC$  в одной и той же точке. Действительно, прямые  $A'C', B'C'$  делят отрезок  $OC$  соответственно в отношениях  $OA':AA', OB':BB'$ . Так как эти отношения равны, то прямые  $A'C', B'C'$  пересекают прямую  $OC$  в одной и той же точке. Другими словами, точка пересечения  $C'$  прямых  $A'C', B'C'$  лежит на прямой  $OC$ , что и доказывает теорему.

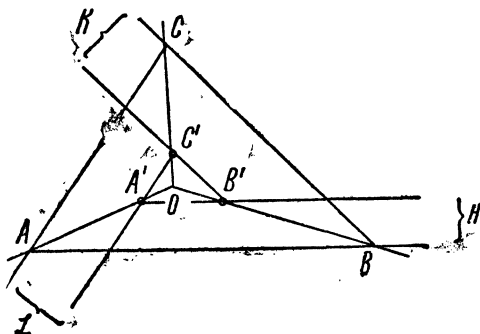


Рис. 28.

ГЛАВА II.

37. 1. Расстояния  $M_1M, N_1N$  точек  $M, N$  от прямой  $p$  пропорциональны расстояниям  $PM, PN$  тех же точек от точки  $P$  (рис. 29):

$$M_1M : N_1N = PM : PN.$$

Эта пропорция сохраняет силу и в том случае, если расстояниям приписываются знаки на основании правила, указанного в задаче. Таким же образом находим:

$$M_2M : N_2N = QM : QN.$$

Деля первую пропорцию на вторую почленно, находим:

$$\frac{M_1M \cdot N_2N}{M_2M \cdot N_1N} = \frac{PM \cdot QN}{QM \cdot PN},$$

т. е.  $(pqmn) = (PQMN).$

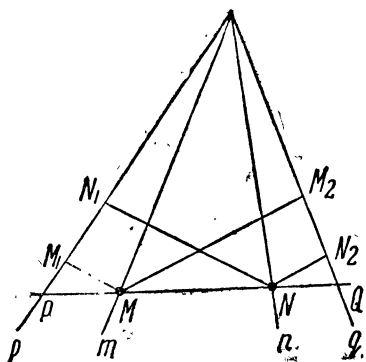


Рис. 29.

2. Достаточно заменить в предыдущем доказательстве прямые  $p, q, m, n$  плоскостями  $\pi, \chi, \mu, \nu$ .

3. Прямая, лежащая в секущей плоскости и не пересекающая оси

пучка, пересекает плоскости  $\pi, \kappa, \mu, \nu$  и прямые  $p, q, m, n$  в одних и тех же точках  $P, Q, M, N$ . Отсюда по предыдущему

$$(\pi\kappa\mu\nu) = (PQMN); (pqmn) = (PQMN)$$

и следовательно

$$(\pi\kappa\mu\nu) = (pqmn),$$

что и требовалось доказать.

4. Предположим, что две плоские фигуры  $F, F'$  расположены перспективно, т. е. каждая из них есть проекция другой из некоторого центра  $S$ . Если в фигуре  $F$  имеется четыре точки  $P, Q, M, N$  на одной прямой, то соответствующие точки  $P', Q', M', N'$  фигуры  $F'$  также расположены на одной прямой, и проектирующие прямые

$$p \equiv SP \equiv SP'; q \equiv SQ \equiv SQ'; m \equiv SM \equiv SM'; n \equiv SN \equiv SN'$$

принадлежат одному пучку. По предыдущему

$$(PQMN) = (pqmn); (P'Q'M'N') = (pqmn),$$

и следовательно

$$(PQMN) = (P'Q'M'N').$$

Аналогично доказывается равенство двойных отношений соответственных четверок прямых в соответственных пучках.

38. Имеем

$$(PQMN) = \frac{PM \cdot QN}{QM \cdot PN}.$$

Когда точка  $N$  безгранично удаляется по прямой, отношение отрезков  $QN, PN$  стремится к единице, если положительные расстояния от точек  $P, Q$  отсчитываются в одном направлении, и к минус единице, если эти расстояния отсчитываются в разных направлениях. Соответственно этому получим:

$$(PQM\infty) = \frac{PM}{QM}; \text{ или } (PQM\infty) = -\frac{PM}{QM}.$$

Принимая одинаковое положительное направление при отсчете от обеих точек  $P, Q$ , получим:

$$(PQM\infty) = \frac{PM}{QM}; (PQ\infty N) = \frac{QN}{PN}; (P\infty MN) = \frac{PM}{PN};$$

$$(\infty QMN) = \frac{QN}{QM}.$$

39. Пусть будут  $P, Q, M, N$  четыре точки на прямой и  $p, q, m, n$  — четыре прямые, проектирующие эти точки из какого-нибудь центра. Имеем

$$(pqmn) = (PQMN).$$

Если мы как-либо изменим порядок точек и соответственно изменим порядок прямых, то это равенство не нарушится, например:

$$(qpmn) = (QP MN);$$

хотя  $(qpmn)$  и не равно  $(pqmn)$  и  $(QPMN)$  не равно  $(PQMN)$ . Поэтому, если мы сумеем выразить значения  $(QPMN)$ ,  $(PMQN)$ , ... через значение  $(PQMN) = \lambda$ , то тем самым и значения  $(qpmn)$ ,  $(pmqn)$ , ... будут выражены через значение  $(pqmn) = \lambda$ . Достаточно поэтому выяснить влияние перестановок элементов на значение двойного отношения четырех точек на прямой, чтобы решить тот же вопрос для четырех прямых в пучке прямых, и аналогично убедимся, что это верно и для четырех плоскостей в пучке плоскостей. Точно так же, вместо двойных отношений данных четырех точек, взятых в различных порядках, мы вправе сравнивать двойные отношения проекций этих четырех точек на какую-нибудь прямую из какого-нибудь центра, взятых в соответственных порядках. Достаточно поэтому рассмотреть влияние перестановок в предположении, что одна из четырех точек, например  $N$ , бесконечно удаленная, так как этого всегда можно достигнуть посредством надлежащей проекции.

Итак, пусть

$$(PQM\infty) = \frac{PM}{QM} = \lambda. \quad (1)$$

Переставляя две первые точки, получим:

$$(QPM\infty) = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2)$$

Переставляя две средние точки, получим:

$$\begin{aligned} (PMQ\infty) &= \frac{PQ}{MQ} = \frac{QP}{QM} = \frac{QM + MP}{QM} = 1 + \frac{MP}{QM} = \\ &= 1 - \frac{PM}{QM} = 1 - \lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Пользуясь этими двумя операциями, можно получить все шесть перестановок первых трех элементов. Из (2) находим с помощью перестановки средних точек

$$(QMP\infty) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}; \quad (4)$$

затем из (3) с помощью перестановки первых точек

$$(MPQ\infty) = \frac{1}{1 - \lambda}; \quad (5)$$

наконец из (4) с помощью перестановки первых точек:

$$(MQP\infty) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \quad (6)$$

Мы выяснили таким образом значения двойного отношения при всех порядках точек, у которых последняя точка одна и та же. Переставим теперь в (1) две последние точки:

$$(PQ \infty M) = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\lambda}.$$

Мы видим, что перестановка двух последних точек заменяет значение двойного отношения обратным значением, так же как перестановка двух первых точек. Отсюда следует, что одновременная перестановка двух первых и двух последних точек не меняет значения двойного отношения:

$$(QPNM) = (PQMN) = \lambda.$$

Теперь переставим в (1) две крайние точки:

$$(\infty QMP) = \frac{QP}{QM} = 1 - \lambda.$$

Видим, что перестановка двух крайних точек производит то же действие, что и перестановка двух средних точек, а именно заменяет первоначальное значение двойного отношения значением, дополняющим его до единицы. Отсюда ясно, что одновременная перестановка крайних и средних точек не меняет значения двойного отношения

$$(NMQP) = (PQMN) = \lambda.$$

Очевидно двойное отношение не изменится и тогда, если мы сначала переставим первые и последние точки, а затем средние и крайние, или наоборот. Таким образом получим:

$$(PQMN) = (QPNM) = (NMQP) = (MNPQ) = \lambda.$$

Сравнивая последнее расположение точек с первым, замечаем, что и перестановка пар точек  $PQ$ ,  $MN$  без изменения порядка точек в каждой паре также не изменяет значения двойного отношения. Обратим теперь внимание на то, что в последних четырех двойных отношениях на последнем месте стоит каждая из четырех данных точек. Переставляя в них всевозможными способами первые три точки, мы получим все вообще возможные расположения точек. Так как эти четыре двойных отношения все равны  $\lambda$ , то все те, которые из них получаются перестановкой первых трех элементов, будут равны либо  $\frac{1}{\lambda}$ , либо  $1 - \lambda$ , либо  $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ , либо  $\frac{1}{1 - \lambda}$ , либо  $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ . Итак, 24 двойных отношения, которые можно составить из четырех данных точек, распадаются на 6 групп по 4 двойных отношения в каждой, причем двойные отношения, входящие в одну группу, имеют равные значения, а двойные отношения различных групп равны числам:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

где  $\lambda$  — значение какого-нибудь одного из двойных отношений,

Заметим еще, что последнюю из рассмотренных нами сложных операций, не изменяющих значения двойного отношения, а именно перестановку пар точек  $PQ$  и  $MN$  без изменения порядка точек в каждой паре можно толковать как одновременную перестановку первой точки с третьей и второй точки с четвертой. Мы получаем поэтому следующий результат: двойное отношение четырех точек не изменяется при одновременном изменении порядка точек в двух каких-либо парах точек, на которые возможно разбить эти четыре точки.

Согласно замечанию, сделанному вначале, все полученные результаты распространяются и на двойные отношения прямых или плоскостей.

40. Пусть будут  $PQ, MN$  две пары точек на прямой. При рассмотрении предложенного вопроса не имеет значения, в каком порядке взяты точки для вычисления двойного отношения. Действительно, от одного порядка всегда можно перейти к другому с помощью операций, рассмотренных в предыдущей задаче. Применяя одинаковые операции к двум двойным отношениям, отличающимся друг от друга только порядком двух точек, мы всегда получим в результате двойные отношения, также отличающиеся друг от друга только порядком этих точек. Если до этих операций эти два двойные отношения были равны, то они останутся равными и после них, хотя значение их может и измениться. Далее, не имеет значения в которой из двух пар производить перестановку точек. Действительно, перестановку точек пары  $MN$  можно заменить двумя последовательными операциями — перестановкой точек пары  $PQ$  и одновременно перестановкой точек обеих пар. Но последняя перестановка не влияет на значение двойного отношения. Следовательно влияние перестановки точек пары  $MN$  и пары  $PQ$  на значение двойного отношения одно и то же. Итак, нам остается доказать следующую теорему: чтобы пары точек  $PQ$  и  $MN$  были гармонически сопряжены, необходимо и достаточно условие

$$(PQMN) = (QPMN).$$

Предположим, что пары точек  $PQ, MN$  гармонически сопряжены. Тогда точки  $M, N$  делят отрезок  $PQ$  внутренним и внешним образом в одинаковых отношениях, т. е., при соблюдении правила знаков для отсчета отрезков, в отношениях, отличающихся друг от друга только знаком. Следовательно отношение этих отношений, т. е. двойное отношение  $(PQMN)$ , равно — 1:

$$(PQMN) = \lambda = -1.$$

Но тогда

$$(QPMN) = \frac{1}{\lambda} = -1$$

и следовательно

$$(PQMN) = (QPMN);$$

условие необходимо.

Теперь предположим, что

$$(PQMN) = (QPMN),$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}$$

Отсюда находим  $\lambda^2 = 1$ ,  $\lambda = \pm 1$ . При  $\lambda = +1$  точки  $MN$  делят отрезок  $PQ$  в одном и том же отношении как по величине, так и по знаку, т. е. совпадают. Эта возможность исключена по условию. Остается только одна возможность,  $\lambda = -1$ , а это показывает, что пары точек  $PQ$ ,  $MN$  гармонически сопряжены; условие достаточно.

Теорема таким образом доказана для двух пар точек. Тем самым она доказана для двух пар элементов любой совокупности 1-ой степени, в силу замечания в начале предыдущего решения.

41. На рис. 30 представлен полный четырехсторонник  $abcd$ . Покажем с помощью результата предыдущей задачи, что вершины  $PQ$  и диагональные точки  $MN$  гармонически сопряжены. Проектируя точки  $T, U, L, N$  на диагональ  $MN$  из вершины  $S$ , получим соответственно точки  $P, Q, M, N$ , откуда

$$(TULN) = (PQMN).$$

Проектируя те же точки  $T, U, L, N$  на ту же диагональ  $MN$  из вершины  $R$  получим соответственно точки  $Q, P, M, N$ , откуда

$$(TULN) = (QP MN)$$

Отсюда

$$(PQMN) = (QP MN),$$

откуда, согласно предыдущей теореме, и вытекает требуемый результат.

## 42. Соотношение

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

можно представить в виде

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} + \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot BC} + 1 = 0,$$

или

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB} + \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot CB} = 1,$$

или

$$(ACBD) + (ABCD) = 1,$$

или

$$(ACBD) = 1 - (ABCD),$$

выражающем теорему о влиянии перестановки средних элементов на значение двойного отношения,

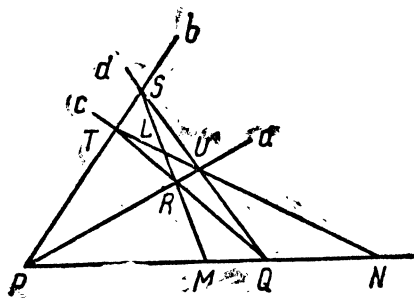


Рис. 30.



Вторая формула получается из той же теоремы в применении к четырем прямым пучка, если заметим, что

$$(abcd) = \frac{\sin(ac) \sin(bd)}{\sin(ad) \sin(bc)},$$

как нетрудно вывести из определения двойного отношения четырех прямых.

Третья формула получается из второй, если положим

$$(ab) = \alpha; (ac) = \beta; (ad) = \gamma,$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} (cd) &= (ad) - (ac) = \gamma - \beta = -(\beta - \gamma), \\ (db) &= (ab) - (ad) = \alpha - \gamma = -(\gamma - \alpha), \\ (bc) &= (ac) - (ab) = \beta - \alpha = -(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Полагая в третьей формуле  $\gamma = 90^\circ$  и пользуясь формулами приведения, получим

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

откуда с помощью формул приведения можно получить и остальные формулы сложения и вычитания.

43. Действительно,

$$(OXME) = \frac{OM}{OE} = OM = x$$

44. Мы можем спроектировать рассматриваемую прямую на другую так, чтобы точка  $X$  превратилась в бесконечно удаленную точку, и принять на новой прямой проекцию точки  $O$  за начало отсчета и проекцию отрезка  $OE$  за положительную единицу. Двойные отношения данных точек будут равны двойным отношениям их проекций, и мы можем поэтому с самого начала ограничиться рассмотрением случая, когда  $x$  есть обыкновенная абсцисса.

Тогда имеем:

$$(OXM_1M_2) = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

$$\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{M_1M_3 \cdot M_2M_4}{M_2M_3 \cdot M_1M_4} = \frac{(OM_3 - OM_1)(OM_4 - OM_2)}{(OM_3 - OM_2)(OM_4 - OM_1)} = \\ &= \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$(OXM_1M_2) = \frac{(OXM_1E)}{(OXM_2E)};$$

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{[(OXM_3E) - (OXM_1E)][(OXM_4E) - (OXM_2E)]}{[(OXM_3E) - (OXM_2E)][(OXM_4E) - (OXM_1E)]}.$$

Эти соотношения имеют место при любом положении точки  $X$  и при любом выборе единицы, но их непосредственный вывод потребовал бы более длинных выкладок.

45. Имеем

$$x = (A_1 A_2 M E) = \frac{A_1 M \cdot A_2 E}{A_2 M \cdot A_1 E} = \frac{A_1 M}{A_1 E} : \frac{A_2 M}{A_2 E} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Чтобы выразить двойное отношение  $(MNPQ)$  через однородные координаты точек  $M, N, P, Q$ , обозначим координаты этих точек буквами  $x, y, z, t$  без значков, если координаты неоднородные, и со значками 1, 2, если координаты однородные. Тогда

$$\begin{aligned} (MNPQ) &= \frac{(z-x)(t-y)}{(z-y)(t-x)} = \frac{\begin{pmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & y_1 \\ t_2 & y_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & x_1 \\ t_2 & x_2 \end{pmatrix}} = \\ &= \frac{(z_1 x_2 - x_1 z_2)(t_1 y_2 - y_1 t_2)}{(z_1 y_2 - y_1 z_2)(t_1 x_2 - x_1 t_2)}, \end{aligned}$$

или

$$(MNPQ) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 z_1 & y_1 t_1 \\ x_2 z_2 & y_2 t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 t_1 \\ y_2 z_2 & x_2 t_2 \end{vmatrix}}$$

или кратко:

$$(MNPQ) = \frac{(xz)(yt)}{(yz)(xt)}.$$

Соотношение

$$(xy)(zt) + (xz)(ty) + (xt)(yz) = 0$$

получается из этой формулы с помощью известного соотношения

$$(MPNQ) + (MNPQ) = 1.$$

46. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{h_1} &= \frac{A_1 M}{A_1 A_2}; \quad \frac{x_2}{h_2} = \frac{A_2 M}{A_2 A_1}; \\ \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} &= \frac{A_1 M}{A_1 A_2} + \frac{A_2 M}{A_2 A_1} = \frac{A_1 M}{A_1 A_2} + \frac{MA_2}{A_1 A_2} = \\ &= \frac{A_1 M + MA_2}{A_1 A_2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 A_2} = 1. \end{aligned}$$

47. Если заменим бесконечно удаленную точку конечной точкой  $X$ , то простые отношения заменятся двойными, и вместо

$$x_1 = \frac{A_1 M}{A_1 E}; \quad x_2 = \frac{A_2 M}{A_2 E}$$

получим

$$x_1 = (A_1 XME); \quad x_2 = (A_2 XME),$$

а вместо

$$h_1 = \frac{A_1 A_2}{A_1 E}; \quad h_2 = \frac{A_2 A_1}{A_2 E}$$

получим

$$h_1 = (A_1 X A_2 E); \quad h_2 = (A_2 X A_1 E).$$

Отсюда

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{(A_1 X M E)}{(A_1 X A_2 E)} = (A_1 X M A_2),$$

$$\frac{x_2}{h_2} = \frac{(A_2 X M E)}{(A_2 X A_1 E)} = (A_2 X M A_1),$$

так что соотношение

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} = 1$$

переходит в известное соотношение

$$(A_1 X M A_2) + (A_2 X M A_1) = 1.$$

48. Пусть будут  $E_x, M_x$  проекции точек  $E, M$  на ось  $OX$  параллельно оси  $OY$  и  $E_y, M_y$  — проекции точек  $E, M$

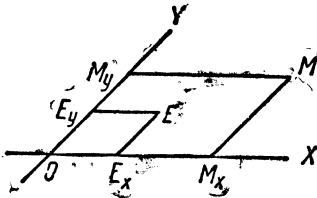


Рис. 31.

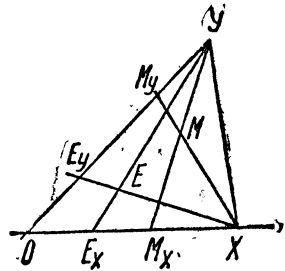


Рис. 32.

$M$  на ось  $OY$  параллельно оси  $OX$  (рис. 31). По известному определению декартовых координат имеем:

$$x = \frac{OM_x}{OE_x}; \quad y = \frac{OM_y}{OE_y}.$$

Но простые отношения можно представить в виде двойных:

$$x = (OXM_x E_x); \quad y = (OYM_y E_y).$$

Все точки, входящие в эти двойные отношения, очевидно построены по данным точкам  $O, X, Y, E, M$ , прямая  $OX$  соединяет точки  $O$  и  $X$ , прямая  $OY$  соединяет точки  $O$  и  $Y$ ; точки  $E_x, M_x$  суть проекции точек  $E, M$  из точки  $Y$  на прямую  $OX$ , точки  $E_y, M_y$  суть проекции точек  $E, M$  из точки  $X$  на прямую  $OY$ .

Отсюда ясно, как следует проективно обобщить декартову систему координат. Обобщенная система отсчета будет состоять из координатного треугольника  $OXY$  и единичной точки  $E$  (рис. 32). Точки  $E_x, M_x$  будут попрежнему проекциями точек  $E, M$  из вершины  $Y$  на сторону  $OX$ , а точки  $E_y, M_y$  проекциями точек  $E, M$  из вершины  $X$  на сторону  $OY$ . Координаты попрежнему определяются формулами:

$$x = (OXM_x E_x); \quad y = (OYM_y E_y).$$

Эти двойные отношения можно также заменить двойными отношениями проектирующих прямых:

$$x = (YO, YX, YM, YE); y = (XO, XY, XM, XE),$$

или кратко

$$x = Y(OXME); y = X(OYME).$$

49. Пусть будет  $Z$  точка пересечения прямой  $AB$  со стороной  $XU$  координатного треугольника (рис. 33). Имеем

$$\frac{x}{a} = (OXM_xA).$$

Проектируя точки  $O, X, M_x, A$  из точки  $Y$  на данную прямую, получим точки  $B, Z, M, A$ . Отсюда

$$\frac{x}{a} = (BZMA).$$

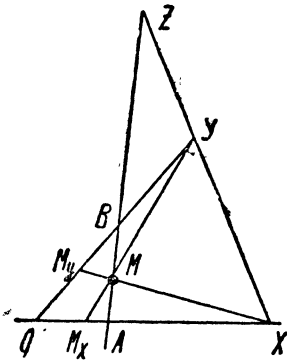


Рис. 33.

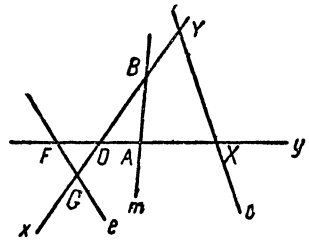


Рис. 34.

Точно также

$$\frac{y}{b} = (AZMB).$$

Таким образом

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = (BZMA) + (AZMB),$$

т. е.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

50. По принципу двойственности координатному треугольнику  $OXY$  должен соответствовать координатный трехсторонник  $oxy$ , единичной точке  $E$  — единичная прямая  $e$ , произвольной точке  $M$  — произвольная прямая  $m$  (рис. 34). Координатами прямой  $m$  будут двойные отношения

$$u = y(oxme); v = x(oyme),$$

т. е. соответственно двойное отношение точек пересечения прямой  $y$  с прямыми  $o, x, m, e$  и прямой  $x$  с прямыми  $o, y, m, e$ . Таким образом

$$u = (XOAF), v = (YOBG).$$

**51. Сравнивая вид уравнения прямой**

$$ux + vy = 1$$

с ранее выведенным видом

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

находим (рис. 35):

$$u = \frac{1}{a} = (OXE_xA) = (XOAE_x),$$

$$v = \frac{1}{b} = (OYE_yB) = (YOBG).$$

Следовательно коэффициенты  $u, v$  будут координатами прямой  $m \equiv AB$ , если за стороны  $o, x, y$  координатного трехсторонника принять соответственно стороны  $XY, OY, OX$  координатного треугольника и за единичную прямую  $e$  принять прямую  $E_xE_y$ . Если теперь напишем уравнение прямой в виде

$$ux + vy + 1 = 0,$$

то получим

$$u = -\frac{1}{a} = -(XOAE_x),$$

$$v = -\frac{1}{b} = -(YOBG).$$

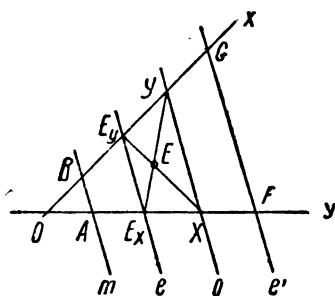


Рис. 35.

Чтобы показать, что и эти коэффициенты можно рассматривать как координаты прямой, попробуем найти такие точки  $F, G$ , чтобы имели место соотношения

$$(XOAF) = -(XOAE_x); (YOBG) = -(YOBG).$$

Тогда мы будем иметь

$$u = (XOAF), v = (YOBG)$$

и следовательно  $u, v$  можно будет рассматривать как координаты прямой  $m \equiv AB$  при прежнем координатном трехстороннике и при новой единичной прямой  $e' \equiv FG$ . Требуемые соотношения равносильны следующим:

$$\frac{(XOAF)}{(XOAE_x)} = -1, \quad \frac{(YOBG)}{(YOBG)} = -1$$

или

$$(OXFE_x) = -1, (OYGE_y) = -1,$$

которые показывают, что точка  $F$  гармонически сопряжена с точкой  $E_x$  относительно точек  $O, X$ , а точка  $G$  гармонически сопряжена с точкой  $E_y$  относительно точек  $O, Y$ .

Мы приходим таким образом к следующим заключениям: если условимся писать уравнение прямой по отношению к системе координат  $OXYE$  в одном из видов

$$ux + vy = 1, \quad ux + vy + 1 = 0,$$

то коэффициенты  $u, v$  можно рассматривать как координаты этой прямой соответственно по отношению к системам  $oxye, oxye'$ , причем  $o, x, y$  суть стороны треугольника  $OXY$ , противоположные одноименным вершинам,  $e$  есть прямая, соединяющая проекции точки  $E$  на стороны  $OX, OY$  из противоположных вершин,  $e'$  есть прямая, пересекающая те же стороны в точках, гармонически сопряженных с этими проекциями относительно пар вершин, лежащих на этих сторонах.

52. Найдем например двойное отношение  $A_3(A_1A_2ME)$ .

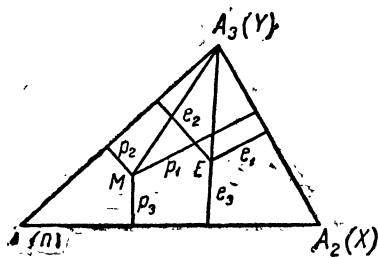


Рис. 36.

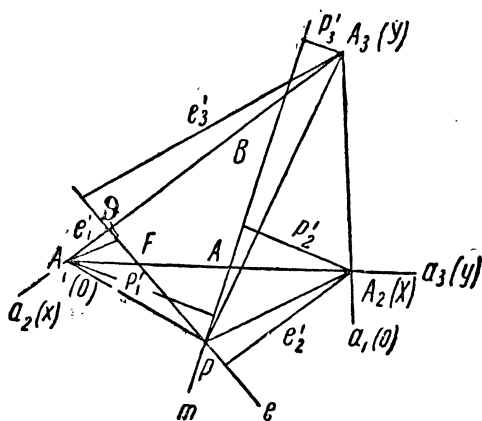


Рис. 37.

Согласно определению двойного отношения четырех прямых, имеем (рис. 36):

$$A_3(A_1A_2ME) = \frac{p_3}{p_1} : \frac{e_2}{e_1}.$$

Отсюда

$$A_3(A_1A_2ME) = \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_1}{e_1} = \frac{x_3}{x_1}.$$

Там же найдем

$$A_1(A_2A_3ME) = \frac{x_3}{x_2}, \quad A_2(A_3A_1ME) = \frac{x_1}{x_3}.$$

Если примем точки  $A_1, A_2, A_3$  соответственно за точки  $O, X, Y$  системы неоднородных координат, то получим:

$$x = A_3(A_1A_2ME) = \frac{x_3}{x_1}, \quad y = A_2(A_1A_3ME) = \frac{x_3}{x_1}.$$

Чтобы получить по аналогии однородные координаты прямой, заменим расстояния произвольной точки  $M$  и единичной точки  $E$  от сторон координатного треугольника расстояниями произвольной прямой  $m$  и единичной прямой  $e$  от вершин координатного трехсторонника. Получим, координаты (рис. 37):

$$u_1 = \frac{p_1'}{e_1'}, \quad u_2 = \frac{p_2'}{e_2'}, \quad u_3 = \frac{p_3'}{e_3'}.$$

Выразим неоднородные координаты через однородные, принимая прямые  $a_1, a_2, a_3$  соответственно за прямые  $o, x, y$  системы неоднородных координат. Получим

$$\begin{aligned} u &= (A_2 A_1 A F) = P(A_2 A_1 A F) = \\ &= (P A_2, P A_1, m, e) = (m, e, P A_2, P A_1) = \frac{p_2'}{e_2'} : \frac{p_1'}{e_1'} = \frac{u_2}{u_1}, \end{aligned}$$

и точно также

$$v = \frac{u_3}{u_1}.$$

Предполагая, что выбор систем отсчета для координат точки и прямой согласован так, что условие инцидентности точки и прямой в неоднородных координатах имеет вид

$$ux + vy + 1 = 0,$$

и применяя формулы:

$$x = \frac{x_2}{x_1}; \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \quad u = \frac{u_2}{u_1}, \quad v = \frac{u_3}{u_1},$$

приведем это условие к виду

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

53. Имеем например (рис. 38):

$$\frac{x_3}{h_3} = \frac{p_3}{e_3} : \frac{q_3}{e_3} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\text{пл. } A_1 A_2 M}{\text{пл. } A_1 A_2 A_3}.$$

При этом, если условимся считать пл.  $A_1 A_2 A_3$  положительной, то пл.  $A_1 A_2 M$  нужно считать положительной, когда точка  $M$  лежит с той же стороны от прямой  $A_1 A_2$ , что и точка  $A_3$ , и отрицательной, если точка  $M$  лежит с противоположной стороны. При аналогичных соглашениях получим также

$$\frac{x_1}{h_1} = \frac{\text{пл. } A_2 A_3 M}{\text{пл. } A_1 A_2 A_3}, \quad \frac{x_2}{h_2} = \frac{\text{пл. } A_3 A_1 M}{\text{пл. } A_1 A_2 A_3}.$$

Так как

$$\text{пл. } A_1 A_2 M + \text{пл. } A_2 A_3 M + \text{пл. } A_3 A_1 M = \text{пл. } A_1 A_2 A_3$$

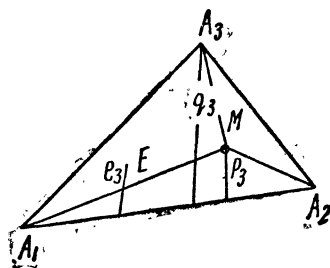


Рис. 38.

при любом положении точки  $M$ , то мы и получим

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

54. Чтобы обобщить проективно отношение

$$\frac{x_3}{h_3} = \frac{p_3}{q_3},$$

нужно заменить его отношением отрезков, лежащих на одной прямой, и затем представить в виде двойного отношения. Спроектируем отрезок  $MP$  на прямую  $A_3Q$  параллельно прямой  $A_1A_2$  (рис. 39). Получим

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{PM}{QA_3} = \frac{QN}{QA_3} = (QC_3NA_3),$$

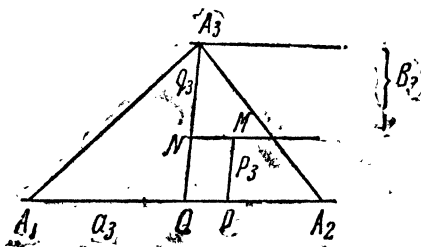


Рис. 39

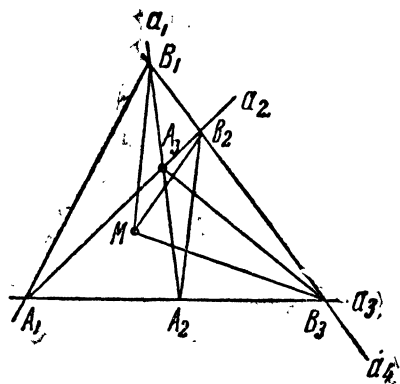


Рис. 40.

где  $C_3$  — бесконечно удаленная точка прямой  $QA_3$ . Если еще обозначим прямую  $A_1A_2$  через  $a_3$ , бесконечно удаленную прямую через  $a_1$  и бесконечно удаленную точку прямой  $A_1A_2$  через  $B_3$ , то полученное двойное отношение точек можно будет заменить двойным отношением прямых, соединяющих эти точки с точкой  $B_3$  рис. 40:

$$(QC_3NA_3) = (a_3, a_1, B_3M, B_3A_3).$$

Заменяя бесконечно удаленную прямую конечной (рис. 40) и замечая, что с помощью проекции ее всегда можно превратить в бесконечно удаленную, заключаем, что соотношение

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$$

не теряет силы, если заменим отношения

$$\frac{x_1}{h_1}, \frac{x_2}{h_2}, \frac{x_3}{h_3}$$

двойными отношениями

$$(a_1, a_1, B_1M, B_1A_1), (a_2, a_2, B_2M, B_2A_2), (a_3, a_3, B_3M, B_3A_3).$$



Таким путем получаем искомое обобщение

$$(a_1, a_4, B_1M, B_1A_1) + (a_2, a_4, B_2M, B_2A_2) + (a_3, a_4, B_3M, B_3A_3) = 1.$$

55. Обобщенная система отсчета состоит из координатного тетраэдра  $OXYZ$  и единичной точки  $E$ . Обобщенные координаты можно представить как двойные отношения плоскостей пучков с осями  $YZ, ZX, XY$  (рис. 41):

$$x = YZ(OXME), \quad y = ZX(OYME), \\ z = XY(OZME).$$

Тем же тетраэдром можно воспользоваться для построения координат плоскости. Обозначим плоскости  $XYZ, OYZ, OZX, OXY$  соответственно через  $o, \xi, \eta, \zeta$ , некоторую определенную плоскость  $FGH$  через  $\epsilon$  и произвольную плоскость через  $\mu$ . Обобщенные координаты плоскости по отношению к системе отсчета  $o\xi\eta\zeta$  будут:

$$u = \eta\zeta(o\xi\mu\epsilon); \quad v = \zeta\xi(o\eta\mu\epsilon); \quad w = \xi\eta(o\zeta\mu\epsilon),$$

где например  $\eta\zeta(o\xi\mu\epsilon)$  обозначает двойное отношение точек пересечения прямой  $\eta\zeta \equiv OX$  с плоскостями  $o, \xi, \mu, \epsilon$ .

Таким образом

$$u = (XOAF), \quad v = (YOBG), \quad w = (ZOCH).$$

56. Пусть будут  $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$  точки пересечения рассматриваемой плоскости с ребрами  $OX, OY, OZ$  координатного тетраэдра и  $M$  — некоторая точка этой плоскости (рис. 42). Имеем:

$$x = YZ(OXME), \quad a = YZ(OXAE), \\ \frac{x}{a} = YZ(OXMA).$$

Обозначим далее через  $a, b, c$  стороны треугольника  $ABC$ , противолежащие вершинам  $A, B, C$ ; через  $A', B', C'$  точки пересечения сторон  $a, b, c$  соответственно с ребрами  $YZ, ZX, XY$ ; через  $d$  линию пересечения плоскости  $ABC$  с плоскостью  $XYZ$ , на которой расположены точки  $A', B', C'$ .

Имеем

$$\frac{x}{a} = YZ(OXMA) = (a, d, A'M, A'A),$$

так как плоскости  $YZO, YZX, YZM, YZA$  пересекают плоскость  $ABC$  соответственно по прямым  $a, d, A'M, A'A$ . Так же найдем

$$\frac{y}{b} = (b, d, B'M, B'B), \quad \frac{z}{c} = (c, d, C'M, C'C).$$

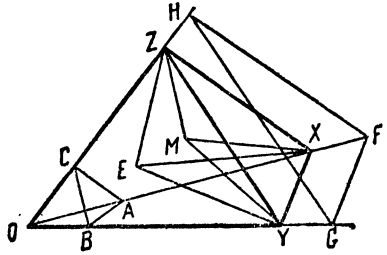


Рис. 41.

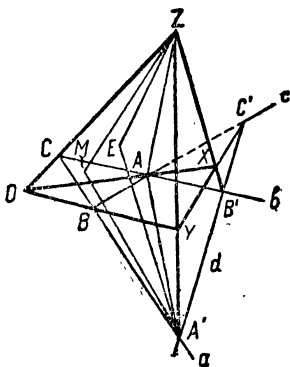


Рис. 42.

Но согласно результату задачи 54, имеем

$$(a, d, A'M, A'A) + (b, d, B'M, B'B) + (c, d, C'M, C'C) = 1.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

57. Сохраняя обозначения предыдущих задач, будем иметь для координат плоскости выражения:

$$u = \frac{1}{a}, \quad v = \frac{1}{b}, \quad w = \frac{1}{c},$$

если за единичную плоскость принять плоскость, соединяющую проекции  $E_x, E_y, E_z$  точки на ребра  $OX, OY, OZ$  из противоположных ребер  $YZ, ZX, XY$ , т. е. точки пересечения ребер  $OX, OY, OZ$  соответственно с плоскостями  $YZE, ZXE, XYE$ . Поэтому уравнение плоскости, выведенное в предыдущей задаче, примет вид

$$ux + vy + wz = 1.$$

Если же за единичную плоскость примем ту, которая соединяет точки, гармонически сопряженные с точками  $E_x, E_y, E_z$  относительно пар точек  $OX, OY, OZ$ , то будем иметь:

$$u = -\frac{1}{a}, \quad v = -\frac{1}{b}, \quad w = -\frac{1}{c}$$

и уравнение плоскости примет вид

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

58. Однородными координатами точки будут отношения расстояний этой точки от граней координатного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  к расстояниям единичной точки  $E$  от тех же граней:

$$x_1 = \frac{p_1}{e_1}, \quad x_2 = \frac{p_2}{e_2}, \quad x_3 = \frac{p_3}{e_3}, \quad x_4 = \frac{p_4}{e_4},$$

где значки 1, 2, 3, 4 отмечают, что речь идет о гранях, противоположных вершинам, отмеченным теми же значками. Если вершины  $A_1, A_2, A_3, A_4$  примем соответственно за вершины  $O, X, Y, Z$  для отсчета неоднородных координат, то последние выразятся формулами:

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \quad z = \frac{x_4}{x_1}.$$

По отношению к тому же тетраэдру однородными координатами плоскости будут отношения расстояний этой плоскости и единичной плоскости  $e$  от вершин тетраэдра:

$$u_1 = \frac{p_1'}{e_1'}, \quad u_2 = \frac{p_2'}{e_2'}, \quad u_3 = \frac{p_3'}{e_3'}, \quad u_4 = \frac{p_4'}{e_4'}.$$

Если примем для отсчета неоднородных координат грани тетраэдра, противоположные вершинам  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , соответственно за грани  $\sigma, \xi, \eta, \zeta$ , то получим для них выражения:

$$u = \frac{u_2}{u_1}, \quad v = \frac{u_3}{u_1}, \quad w = \frac{u_4}{u_1}.$$

Уравнение плоскости

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

примет в однородных координатах вид

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Соотношение между координатами произвольной точки по отношению к данной системе отсчета будет

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1,$$

где под  $h_1, h_2, h_3, h_4$  подразумеваются не равные нулю координаты вершин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

59. Требуемые системы отсчета и координаты можно получить из соответствующих систем отсчета и координат на прямой и на плоскости, пересекая пучок прямою и связку плоскостью.

60. Пусть будут  $OXE$  и  $O'X'E'$  какие-нибудь системы отсчета в совокупностях 1-ой ступени ( $M$ ) и ( $M'$ ), и

$$x = (OXME), \quad x' = (O'X'M'E')$$

неоднородные координаты элементов  $M$  и  $M'$ . Если условимся считать элементы  $M$  и  $M'$  соответствующими друг другу, когда

$$x = x',$$

то, по определению, получим проективное соответствие между совокупностями ( $M$ ) и ( $M'$ ).

Двойное отношение элементов  $M_1(x_1), M_2(x_2), M_3(x_3), M_4(x_4)$  совокупности ( $M$ ) будет:

$$M_1 M_2 M_3 M_4 = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}.$$

Точно также двойное отношение элементов  $M_1'(x_1'), M_2'(x_2'), M_3'(x_3'), M_4'(x_4')$  совокупности ( $M'$ ) будет:

$$(M_1' M_2' M_3' M_4') = \frac{(x_3' - x_1')(x_4' - x_2')}{(x_3' - x_2')(x_4' - x_1')}.$$

Если элементам  $M_1, M_2, M_3, M_4$  соответствуют по порядку элементы  $M_1', M_2', M_3', M_4'$ , то

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4'$$

и следовательно

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M_1' M_2' M_3' M_4').$$

Таким образом двойные отношения соответствующих элементов действительно равны.

Чтобы показать, что существует проективность, при которой трем произвольным различным элементам совокупности ( $M$ ) соответствуют три произвольных различных элемента совокупности ( $M'$ ), достаточно присоединить к предыдущему доказательство того, что элементам  $O, X, E$  соответствуют по порядку элементы  $O', X', E'$ , т. е., что элементы  $O$  и  $O', X$  и  $X', E$  и  $E'$  имеют равные координаты по отношению к системам  $OXE$  и  $O'X'E'$ . Но легко убедиться, что вообще двойное отношение  $(ABCD)$  равно 0, когда  $C$  совпадает с  $A$ , равно  $\infty$ , когда  $C$  совпадает с  $B$ , и равно 1, когда  $C$  совпадает с  $D$ . Следовательно

$$\begin{aligned}(OXOE) &= (O'X'O'E') = 0, \\(OXXE) &= (O'X'X'E') = \infty, \\(OXEE) &= (O'X'E'E') = 1,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Остается доказать, что существует только одно проективное соответствие, при котором элементам  $O, X, E$  соответствуют по порядку элементы  $O', X', E'$ . Предположим, что существует другое такое проективное соответствие, и пусть будут

$$\bar{x} = (\bar{O}\bar{X}\bar{M}\bar{E}), \quad \bar{x}' = (\bar{O}'\bar{X}'\bar{M}'\bar{E}')$$

координаты точек  $M, M'$ , которые должны быть равны, чтобы элементы  $M$  и  $M'$  соответствовали друг другу. Если обозначим через  $\bar{x}_0, \bar{x}_\infty, \bar{x}_1$  и  $\bar{x}'_0, \bar{x}'_\infty, \bar{x}'_1$  новые координаты элементов  $O, X, E$  и  $O', X', E'$ , то по условию

$$\bar{x}_0 = \bar{x}'_0, \quad \bar{x}_\infty = \bar{x}'_\infty, \quad \bar{x}_1 = \bar{x}'_1,$$

так как и в новой проективности точки  $O$  и  $O', X$  и  $X', E$  и  $E'$  должны соответствовать друг другу. Но

$$x = \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_\infty)}{(\bar{x} - \bar{x}_\infty)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)}, \quad x' = \frac{(\bar{x}' - \bar{x}'_0)(\bar{x}'_1 - \bar{x}'_\infty)}{(\bar{x}' - \bar{x}'_\infty)(\bar{x}'_1 - \bar{x}'_0)}.$$

Поэтому из равенства  $\bar{x} = \bar{x}'$  вытекает равенство  $x = x'$ , т. е. элементы  $M$  и  $M'$ , соответствующие друг другу в новой проективности, соответствуют друг другу и в старой проективности. Иными словами, новая проективность совпадает со старой, что и требовалось доказать.

**61.** Из задачи 37 ясно, что двойные отношения соответствующих элементов в перспективных совокупностях 1-ой степени равны, а отсюда следует, что перспективность есть проективность, так как координаты соответствующих элементов по отношению к соответствующим системам отсчета суть двойные отношения соответствующих элементов. Если три пары соответствующих элементов двух проективных совокупностей 1-ой степени расположены так, как если бы эти совокупности были перспективными, то они и в самом деле будут перспективными, ибо существует только одна проективность, в которой три данные пары различных элементов

будут парами соответствующих элементов. Таким образом общая теорема доказана. Остается применить ее к частным случаям.

1. Пусть будут  $u, u'$  две скрещивающиеся прямые и  $u(ABC\dots), u'(A'B'C'\dots)$  два проективных ряда точек на них (рис. 43). Проведем прямые  $a = AA', b = BB', c = CC'$ , затем какую-нибудь прямую  $u''$ , пересекающую прямые  $a, b, c$ , но отличную от прямых  $u, u'$ , наконец плоскости  $\alpha \equiv au'', \beta \equiv bu'', \gamma \equiv cu''$ . Точки  $A, B, C$  ряда  $u$  и соответствующие точки  $A', B', C'$  ряда  $u'$  лежат на одних и тех же плоскостях  $\alpha, \beta, \gamma$  пучка  $u''$ . Если вообще считать соответствующими такие точки рядов  $u, u'$ , которые лежат в одной и той же плоскости пучка  $u''$ , т. е. точки пересечения прямых  $u, u'$  с одними и теми же плоскостями пучка  $u''$ , то такое соответствие будет перспективностью. Отсюда следует, что рассматриваемая проективность  $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$  и есть эта перспективность. Это значит, что любые две соответствующие точки  $D, D'$  рядов  $u, u'$  суть точки пересечения прямых  $u, u'$  с какой-нибудь плоскостью  $\delta$  пучка  $u''$ , т. е., что прямая  $d \equiv DD'$  всегда пересекает прямую  $u''$ .

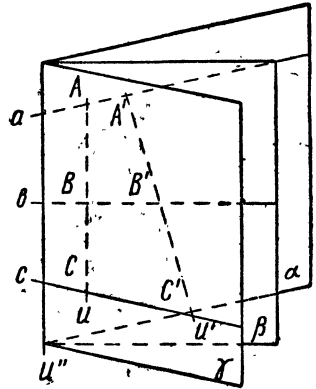


Рис. 43.

2. Пусть теперь прямые  $u, u'$ , несущие на себе два проективных ряда точек, пересекаются, т. е. проходят через одну точку  $A$  и лежат в одной плоскости  $\alpha$  (рис. 44).

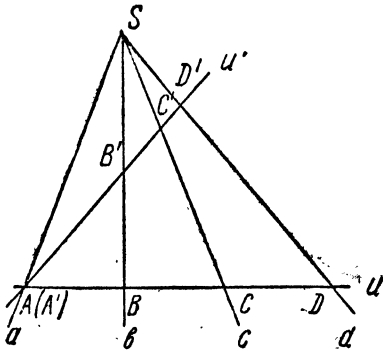


Рис. 44.

Если эти ряды перспективны между собой, то это значит, что они перспективны с одним и тем же пучком плоскостей или прямых. Можно ограничиться вторым предположением, так как плоскость  $\alpha$  пересекает всякий пучок плоскостей, перспективный с рядами  $u, u'$ , по пучку прямых, также перспективному с этими рядами. Поэтому под перспективностью рядов  $u, u'$  мы будем понимать такое соответствие, когда соответствующими считаются точки пересечения этих рядов с одними и теми же прямыми некоторого пучка прямых, центр которого лежит в плоскости  $\alpha$ , но не на прямых  $u, u'$ .

Если ряды  $u, u'$  перспективны, то точка пересечения прямых  $u, u'$  сама себе соответствует, так как прямая, соединяющая эту точку с центром пучка, пересекает в этой точке обе прямые  $u, u'$ . Остается доказать, что это условие не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы проективность между рядами точек была перспективностью. Предположим, что точка пересечения прямых  $u, u'$  сама себе соответствует в

данной проективности между рядами  $u, u'$ , и обозначим ее через  $A$  как точку ряда  $u$ , и через  $A'$  как точку ряда  $u'$ . Пусть будут  $BB', CC'$  еще две пары соответствующих точек. Проведя прямые  $b \equiv BB', c \equiv CC'$  найдем точку  $S \equiv bc$ . Прямые  $a \equiv SA \equiv SA', b, c$  пересекают прямые  $u$  и  $u'$  соответственно в точках  $A, B, C$  и  $A', B', C'$ . Следовательно точки  $A, B, C$  и  $A', B', C'$  расположены так, как если бы рассматриваемая проективность между рядами  $u$  и  $u'$  была перспективностью с центром перспективы  $S$ . Следовательно рассматриваемая проективность и есть эта перспективность, т. е. всякая прямая  $d$ , соединяющая две точки  $D, D'$ , соответствующие друг другу в рассматриваемой проективности, проходит через точку  $S$ .

Предоставляем читателю рассмотрение случаев 3, 4, 5.

62. Пусть будут  $OXYE, O'X'Y'E'$  (рис. 45—46) системы отсчета координат точек на плоскостях  $\nu, \nu'$ . Неоднородные координаты каких-нибудь точек  $M, M'$  плоскостей  $\nu, \nu'$  будут соответственно:

$$\begin{aligned} x &= Y(OXME), & y &= X(OYME), \\ x' &= Y'(O'X'M'E'), & y' &= X'(O'Y'M'E'). \end{aligned}$$

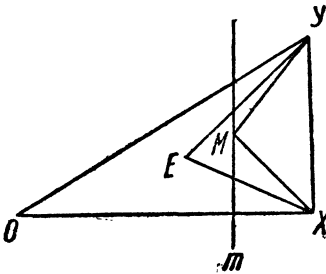


Рис. 45.

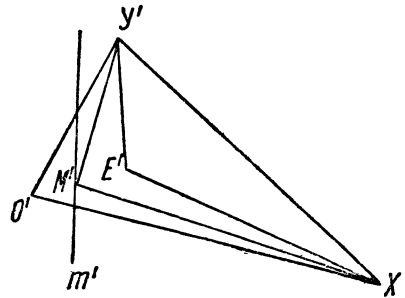


Рис. 46.

Мы должны рассмотреть такое соответствие между точками плоскостей  $\nu, \nu'$ , при котором соответствующие точки  $M, M'$  имеют равные координаты:

$$x = x', \quad y = y'.$$

Заметим прежде всего, что наше определение теряет смысл, когда точка  $M$  совпадает с одной из точек  $X, Y$ , или точка  $M'$  совпадает с одной из точек  $X', Y'$ . Например, когда точка  $M$  совпадает с точкой  $X$ , прямая  $XM$  становится неопределенной, а потому становится неопределенным и значение двойного отношения  $X(OYME) = y$ . Кроме того, для всех прочих точек прямых  $XU, X'U'$  обе координаты обращаются в бесконечность, и мы должны были бы поэтому считать всякую точку прямой  $XU$  соответствующей всякой точке прямой  $X'U'$ . Эти затруднения отпадают, если применим второе определение рассматриваемого соответствия — пропорциональность однородных координат соответствующих точек. Уравнения

$$x_1 = \rho x_1', \quad x_2 = \rho x_2', \quad x_3 = \rho x_3'$$

для точек  $M, M'$ , не лежащих на прямых  $XU, X'U'$ , для которых  $x_1, x_1'$ , не равны нулю, дают

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3'}{x_1'}$$

или

$$x = x', \quad y = y',$$

как и прежде, но они сохраняют смысл и для точек  $M, M'$ , лежащих на прямых  $XU, X'U'$ , и устанавливают между ними определенное соответствие. Для этих точек  $x_1 = x_1' = 0$  и остаются только уравнения:

$$x_2 = \rho x_2', \quad x_3 = \rho x_3'.$$

Когда точка  $M$  совпадает с какой-либо точкой прямой  $XU$ , то мы имеем

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_3'}{x_2'}$$

или, как легко убедиться,

$$O(XUME) = O'(X'U'M'E').$$

Так как последние двойные отношения всегда имеют определенные значения для точек  $M, M'$  прямых  $XU, X'U'$ , то полученное уравнение всегда имеет смысл и устанавливает между точками этих прямых вполне определенное одно-однозначное соответствие. Впрочем это уравнение можно переписать и в виде

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

и следовательно мы можем попрежнему пользоваться для определения рассматриваемого соответствия неоднородными координатами, если только условимся рассматривать отношения  $\frac{y}{x}, \frac{y'}{x'}$  как координаты точек  $M, M'$  прямых  $XU, X'U'$ , считая точки  $M, M'$  соответствующими, когда отношения  $\frac{y}{x}, \frac{y'}{x'}$  равны.

Координаты  $x, x'$  можно рассматривать как координаты прямых  $UM, U'M'$  в пучках  $U, U'$ . Равенство  $x = x'$  для соответствующих точек  $M, M'$  показывает поэтому, что при одновременном движении соответствующих точек  $M, M'$  прямые  $UM, U'M'$  описывают вокруг точек  $U, U'$  проективные пучки. Аналогичное заключение получим для прямых  $XM, X'M'$  из равенства  $y = y'$  и для прямых  $OM, O'M'$  из равенства  $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$ . При этом мы временно оставляем в стороне тот случай, что какие-либо из координат  $x = x', y = y', \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$  остаются постоянными при движении точек  $M, M'$ .

Предположим теперь, что точка  $M$  описывает ряд точек на прямой  $m$ , не проходящей через точки  $X, U$ . Тогда прямые  $UM, XM$  описывают пучки, перспективные с этим рядом и следовательно между собой. Пря-

мые  $Y'M'$ ,  $X'M'$  описывают пучки, соответственно проективные пучкам  $(YM)$ ,  $(XM)$  и следовательно проективные между собой. Но нетрудно убедиться, что эта проективность между пучками  $(Y'M')$ ,  $(X'M')$  есть перспективность. Действительно, когда точка  $M$  достигает прямой  $XU$ , прямые  $YM$ ,  $XM$  совпадают с прямой  $XU$ , прямые  $Y'M'$ ,  $X'M'$  совпадают поэтому с прямой  $X'Y'$  и точка  $M'$  достигает прямой  $X'Y'$ . Таким образом прямая  $X'Y'$ , соединяющая центры проективных пучков  $(X'M')$ ,  $(Y'M')$ , соответствует сама себе и следовательно пучки  $(X'M')$ ,  $(Y'M')$  перспективны. Иначе говоря, точка  $M'$  описывает ряд точек на некоторой прямой  $m'$ .

Ряды точек  $m(M)$  и  $m'(M')$  проективны между собой, так как они перспективны соответственно пучкам  $(YM)$ ,  $(XM)$  и  $(Y'M')$ ,  $(X'M')$ .

Если точка  $M$  описывает ряд точек на прямой  $m$ , проходящей через одну из точек  $Y$ ,  $X$ , например через точку  $Y$ , то прямая  $YM$  все время совпадает с прямой  $m$ , и координата  $x$  остается постоянной. Поэтому и координата  $x'$  остается постоянной и прямая  $Y'M'$  все время совпадает с некоторой прямой  $m'$ , проходящей через точку  $Y'$ , т. е. точка  $M'$  описывает ряд точек на прямой  $m'$ . Если прямые  $m$ ,  $m'$  не совпадают с прямыми  $XU$ ,  $X'Y'$ , то прямые  $XM$ ,  $X'M'$  описывают в то же время пучки, перспективные с рядами  $m(M)$ ,  $m'(M')$  и проективные между собой, откуда следует, как и в предыдущем случае, что ряды  $m(M)$ ,  $m'(M')$  проективны. Если наконец прямые  $u$ ,  $u'$  совпадают с прямыми  $XU$ ,  $X'Y'$ , то проективность рядов  $m(M)$ ,  $m'(M')$  вытекает из проективности перспективных с ними пучков  $(OM)$ ,  $(O'M')$ .

Итак, ряду точек  $m(M)$  плоскости  $\nu$  всегда соответствует проективный ряд точек  $m'(M')$  плоскости  $\nu'$ . Тем самым всякой прямой  $m$  плоскости  $\nu$  соответствует определенная прямая  $m'$  плоскости  $\nu'$ . При этом прямым  $m$ , проходящим через определенную точку  $M$ , соответствуют прямые, проходящие через соответствующую точку  $M'$ , т. е. пучку прямых  $M(m)$  плоскости  $\nu$  всегда соответствует пучок  $M'(m')$  плоскости  $\nu'$ . Легко убедиться, что это соответствие есть также проективность. Если  $u$ ,  $u'$  — какие-нибудь соответствующие прямые, не проходящие через точки  $M$ ,  $M'$  и  $N$ ,  $N'$  — какие-нибудь соответствующие точки прямых  $u$ ,  $u'$ , то прямые  $MN$ ,  $M'N'$  будут соответствующими прямыми  $m$ ,  $m'$  пучков  $M(m)$ ,  $M'(m')$ . Когда точки  $N$ ,  $N'$  описывают проективные ряды  $n(N)$ ,  $n'(N')$ , прямые  $m \equiv MN$ ,  $m' \equiv M'N'$  описывают пучки  $M(m)$ ,  $M'(m')$ , перспективные с рядами  $n(N)$ ,  $n'(N')$  и следовательно проективные между собой, что и требовалось доказать.

Мы видим таким образом, что рассматриваемое соответствие между точками двух плоскостей приводит к соответствию между лежащими на этих плоскостях плоскими системами, так как не только точки соответствуют точкам, но и прямые прямым.

Чтобы доказать существование соответствия этого рода, в котором четырем произвольным точкам плоскости  $\nu$ , не лежащим по три на одной прямой, соответствуют четыре произвольные точки плоскости  $\nu'$ , также не лежащие по три на одной прямой, достаточно, как и в задаче 60, показать в дополнение к изложенному, что точки  $O$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $E$  соответствуют по порядку точкам  $O'$ ,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $E'$ , т. е. имеют равные координаты, или, в особом случае, равные отношения координат. Но легко убедиться, что мы



имеем  $x = x' = 0$ ,  $y = y' = 0$  для точек  $O$ ,  $O'$ ;  $x = x' = 1$ ,  $y = y' = 1$  для точек  $E$ ,  $E'$ ;  $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = 0$  для точек  $X$ ,  $X'$ ;  $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \infty$  для точек  $Y$ ,  $Y'$ , что и доказывает наше утверждение.

Покажем теперь, что определенное таким образом соответствие единственно. Для этого, как и в задаче 60, нужно удостовериться, что замена систем отсчета  $OXYE$ ,  $O'X'Y'E'$  новыми системами отсчета  $\overline{OX}\overline{Y}\overline{E}$ ,  $\overline{O'X'}\overline{Y'}\overline{E}'$ , составленными из соответствующих точек плоскостей  $\nu$ ,  $\nu'$ , не нарушает равенства координат соответствующих точек  $M$ ,  $M'$ , или, в особом случае, равенства их отношений. Но это ясно из того, что новые координаты точек  $M$ ,  $M'$  и их отношения представляют собой двойные отношения соответствующих прямых плоскостей  $\nu$ ,  $\nu'$  и следовательно равны в силу проективности соответствующих пучков.

По аналогичной причине соответствующие прямые  $m$ ,  $m'$  плоскостей  $\nu$ ,  $\nu'$  будут иметь равные координаты и отношения координат по отношению к любым двум системам отсчета  $oxye$ ,  $o'x'y'e'$ , составленным из соответствующих прямых, откуда не представляет затруднения вывести, что то же самое соответствие между плоскими системами  $\nu$ ,  $\nu'$  можно вывести, рассуждая двойственным образом, из соответствия между прямыми этих плоских систем.

63. Нужно считать точки  $M$  системы  $\nu$  соответствующими прямым  $m'$  системы  $\nu'$ , если равны их координаты по отношению к некоторым системам отсчета  $OXYE$  и  $o'x'y'e'$  или отношения этих координат для точек, лежащих на прямой  $X'Y'$ , и для прямых, проходящих через точку  $xu$ . Тогда рядом точек  $m$  ( $M$ ) системы  $\nu$  будут соответствовать проективные пучки прямых  $M'$  ( $m'$ ) системы  $\nu'$ , и следовательно прямым  $m$  системы  $\nu$  — точки  $M'$  системы  $\nu'$ , а потому и пучкам  $M$  ( $m$ ) системы  $\nu$  — проективные ряды  $m'$  ( $M'$ ) системы  $\nu'$ . Соответствие этого рода определяется заданием четырех точек одной из систем, не лежащих по три на одной прямой, соответствующих каким-нибудь четырем прямым другой системы, не проходящим по три через одну точку.

64. Отметим только, что в коллинеарности между двумя связками прямым соответствуют прямые и плоскостям плоскости, а в коррелятивности прямым соответствуют плоскости, а плоскостям прямые.

65. Первая из предложенных теорем вытекает из того, что двойные отношения соответствующих элементов в перспективных совокупностях 2-ой степени равны.

Вторую теорему мы докажем для двух плоских систем; доказательство для двух связок вполне аналогично.

Пусть будут  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  две плоскости, несущие на себе коллинеарные плоские системы; обозначим через  $u$  линию пересечения этих плоскостей. Если коллинеарность между системами  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  есть перспективность, то всякая точка прямой  $u$  соответствует в этой коллинеарности сама себе, так как прямая, соединяющая эту точку с центром связки  $S$ , перспективной с обеими системами  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ , пересекает в этой точке обе плоскости.

Нужно доказать, что и обратно, если все точки прямой  $u$  соответствуют сами себе в коллинеарности между плоскостями  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ , то эта коллинеарность есть перспективность. Для этого нужно доказать, что все

прямые, соединяющие соответствующие точки плоскостей  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ , не лежащие на прямой  $u$ , проходят через одну точку. Пусть будут  $A, B$  какие-нибудь точки плоскости  $\epsilon$ , не лежащие на прямой  $u$ , и  $A', B'$  — точки плоскости  $\epsilon'$ , соответствующие им в рассматриваемой коллинеарности и потому также не лежащие на прямой  $u$ . Так как прямые  $AB, A'B'$  соответствуют друг другу, и прямая  $u$  соответствует сама себе, то точки пересечения прямых  $AB, A'B'$  с прямой  $u$  соответствуют друг другу и следовательно совпадают. Таким образом прямые  $AB, A'B'$  пересекаются на прямой  $u$  и следовательно лежат в одной плоскости. Поэтому и прямые  $AA', BB'$  лежат в той же плоскости и следовательно пересекаются.

Итак, прямые, соединяющие соответствующие точки плоскостей  $\epsilon, \epsilon'$ , не лежащие на прямой  $u$ , попарно пересекаются в одной точке. Пусть будут  $AA', BB', CC'$  три такие прямые, не лежащие в одной плоскости; чтобы получить такие прямые, достаточно взять точки  $A, B, C$  не лежащими на одной прямой. Так как прямые  $AA', BB', CC'$  попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости, то они пересекаются в одной точке. Действительно, прямая  $AA'$  должна пересекать прямые  $BB', CC'$  в одной и той же точке, ибо в противном случае она проходила бы через две точки этих прямых и лежала бы в их плоскости, вопреки условию. Через ту же точку  $S$  должна проходить и всякая другая прямая, соединяющая две соответствующие точки  $M, M'$  плоскостей  $\epsilon, \epsilon'$ , так как она не лежит в одной плоскости по крайней мере с двумя парами из прямых  $AA', BB', CC'$ . Таким образом теорема доказана.

**66.** Решение этой задачи вполне аналогично решению задачи 62, но значительно длиннее его. Ограничимся приведением результатов.

Проективное соответствие между двумя пространственными системами может быть коллинеарным и коррелятивным. В первом случае точкам соответствуют точки, прямым — прямые, плоскостям — плоскости. Во втором случае точкам соответствуют плоскости, прямым — прямые, плоскостям — точки. Инцидентным элементам одной системы всегда соответствуют инцидентные элементы другой. Соответствующие друг другу совокупности 1-ой и 2-ой ступени проективных пространственных систем всегда проективны. Проективность между двумя пространственными системами однозначно определяется заданием пяти пар соответствующих элементов, которые могут быть точками или плоскостями, причем точки не должны лежать по четыре в одной плоскости, а плоскости не должны проходить по четыре через одну прямую.

### ГЛАВА III.

**67.** Спроектируем проективные ряды точек  $u(ABC\dots)$ ,  $u'(A'B'C'\dots)$  соответственно из точек  $A', A$  (рис. 47). Проектирующие пучки прямых  $A'(ABC\dots)$ ,  $A(A'B'C'\dots)$  проективны, и в этой проективности прямая  $A'A \equiv AA'$  соответствует сама себе. Следовательно пучки  $A'(ABC\dots)$ ,  $A(A'B'C'\dots)$  перспективны, т. е. перспективны с одним и тем же рядом точек  $p(A_1B_1C_1\dots)$ .

**68.** Если проективность между рядами точек на пересекающихся прямых  $u, u'$  задана тремя парами соответствующих точек  $AA', BB', CC'$ ,

то мы можем построить прямую  $p$ , несущую ряд точек  $(A_1B_1C_1\dots)$ , перспективный с рядами  $u$   $(ABC\dots)$ ,  $u'$   $(A'B'C'\dots)$ , соединяя точку пересечения  $B_1$  прямых  $A'B$ ,  $AB'$  с точкой пересечения  $C_1$  прямых  $A'C$ ,  $AC'$ . После этого, проектируя любую точку  $D$  ряда  $u$  на прямую  $p$  из точки  $A'$ , а затем проектируя полученную точку  $D_1$  из точки  $A$  на прямую  $u'$ , мы получим точку  $D'$  ряда  $u'$ , соответствующую точке  $D$  ряда  $u$ .

69. Применяя построение предыдущей задачи к точке  $O \equiv uu'$ , найдем, что точке  $O$ , рассматриваемой как точка ряда  $u$ , соответствует в ряде  $u'$  точка  $P' \equiv u'p$ , и что той же точке  $O$ , рассматриваемой как точка ряда  $u'$ , соответствует в ряде  $u$  точка  $P \equiv up$ . Так как ряды  $u$ ,  $u'$  предполагаются не перспективными, то точки  $P$ ,  $P'$  отличны от точки  $O$  и следовательно различны между собой. Поэтому положение прямой  $p$  вполне определяется положением точек  $P$ ,  $P'$ , которое не зависит от выбора пары соответствующих точек рядов  $u$ ,  $u'$ , принимаемых за центры проекций.

70. Пусть будет  $ABCDEF$  шестиугольник (рис. 48), у которого вершины  $A$ ,  $C$ ,  $E$  лежат на прямой  $u$ , а вершины  $B$ ,  $D$ ,  $F$  — на прямой  $u'$ , пересекающейся с прямой  $u$ . Рассмотрим проективность между рядами  $u$ ,  $u'$ , в которой пары противоположных вершин шестиугольника  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  были бы парами соответствующих точек. По предыдущему, пары прямых  $(AB, DE)$ ,  $(AF, DC)$ ,  $(BC, EF)$  пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой  $p$ . Но эти пары прямых суть пары противоположных сторон шестиугольника, что и доказывает теорему.

71. Оси коллинеации  $p$  перспективных рядов точек  $u$   $(ABC\dots)$ ,  $u'$   $(A'B'C'\dots)$  соответствует по принципу двойственности на плоскости центр коллинеации  $P$  перспективных пучков прямых  $U$   $(abc\dots)$ ,  $U'$   $(a'b'c'\dots)$ . На рис. 49a) показано построение центра коллинеации  $P$  по трем парам соответствующих прямых  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  пучков  $U$ ,  $U'$  и построение прямой  $d'$  пучка  $U'$ , соответствующей прямой  $d$  пучка  $U$ . На рис. 49b) показан шестисторонник  $abcdef$ , стороны которого попеременно проходят через две точки  $U$ ,  $U'$ . Прямые, соединяющие противоположные вершины такого шестисторонника, должны проходить через одну точку  $P$ . Читатель сам проведет все необходимые рассуждения.

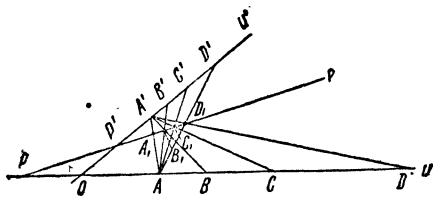


Рис. 47.

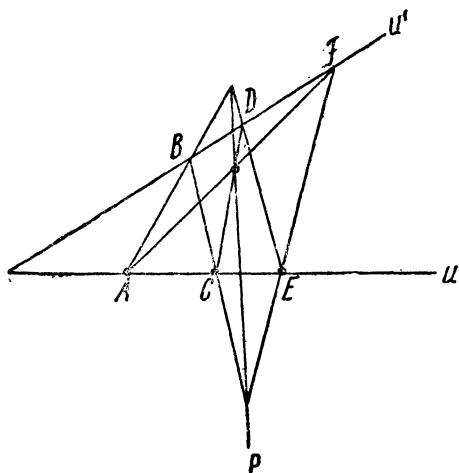


Рис. 48.

72. Пусть будут

$$x = (OXME), \quad x' = (O'X'M'E')$$

координаты соответствующих элементов  $M, M'$  по отношению к соответствующим системам отсчета  $OXE, O'X'E'$ . По определению проективности имеем зависимость:

$$x = x'.$$

Если обозначим через  $x_0, x_\infty, x_1, \bar{x}$  координаты элементов  $O', X', E', M'$  по отношению к системе  $OXE$ , то найдем

$$x' = \frac{(\bar{x} - x_0)(x_1 - x_\infty)}{(x - x_\infty)(x_1 - x_0)},$$

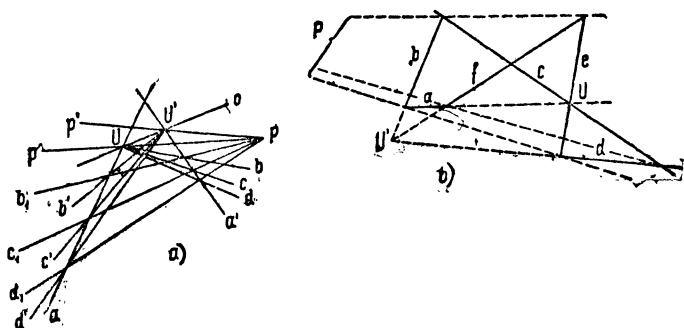


Рис. 49.

и зависимость между координатами  $x, \bar{x}$  элементов  $M, M'$  по отношению к одной и той же системе  $OXE$  будет следовательно

$$x = \frac{(\bar{x} - x_0)(x_1 - x_\infty)}{(x - x_\infty)(x_1 - x_0)}$$

или кратко

$$x = k \frac{\bar{x} - x_0}{x - x_\infty} \quad \left( k = \frac{x_1 - x_\infty}{x_1 - x_0} \right).$$

Элемент  $M$  будет двойным элементом, когда он совпадает с элементом  $M'$ , т. е. когда  $x = \bar{x}$ . Поэтому координаты двойных элементов  $M$  суть корни уравнения

$$x = k \frac{x - x_0}{x - x_\infty}$$

или

$$x^2 - (k + x_\infty)x + kx_0 = 0.$$

Отсюда найдем два двойных элемента, которые могут быть веществен-

ными различными, вещественными совпадающими и мнимо сопряженными в зависимости от того, будет ли дискриминант уравнения

$$\Delta = (k + x_{\infty})^2 - 4kx_0$$

положительным, равным нулю или отрицательным.

73. Пусть будут  $x, x'$  — два мнимых числа. Согласно условию I, их можно рассматривать как координаты двух мнимых элементов  $M, M'$  по отношению к двум системам отсчета  $OXE, O'X'E'$  в двух совокупностях 1-ой ступени  $u, u'$ . Если между этими совокупностями установлена проективность, в которой системы  $OXE, O'X'E'$  соответствуют друг другу, и числа  $x, x'$  равны, то согласно условию III мнимые элементы  $M, M'$  считаются соответствующими друг другу в этой проективности. Если заменим системы отсчета  $OXE, O'X'E'$  другими соответствующими системами отсчета  $\overline{O}\overline{X}\overline{E}, \overline{O}'\overline{X}'\overline{E}'$ , то новые координаты  $\overline{x}, \overline{x}'$  двух вещественных элементов  $M, M'$  выразятся через старые координаты  $x, x'$  тех же элементов формулами

$$\overline{x} = \frac{(x - x_0)(x_1 - x_{\infty})}{(x - x_{\infty})(x_1 - x_0)}, \quad \overline{x}' = \frac{(x' - x'_0)(x'_1 - x'_{\infty})}{(x' - x'_{\infty})(x'_1 - x'_0)},$$

где  $x_0, x_{\infty}, x_1$  — старые координаты точек  $\overline{O}, \overline{X}, \overline{E}$  и  $x'_0, x'_{\infty}, x'_1$  — старые координаты точек  $\overline{O}', \overline{X}', \overline{E}'$ . Так как точки  $\overline{O}, \overline{X}, \overline{E}$  и  $\overline{O}', \overline{X}', \overline{E}'$  соответствующие, то мы имеем:

$$x_0 = x'_0, \quad x_{\infty} = x'_{\infty}, \quad x_1 = x'_1,$$

и предыдущие формулы можно переписать в виде:

$$\overline{x} = \frac{(x - x_0)(x_1 - x_{\infty})}{(x - x_{\infty})(x_1 - x_0)}, \quad \overline{x}' = \frac{(x' - x_0)(x_1 - x_{\infty})}{(x' - x_{\infty})(x_1 - x_0)}.$$

Согласно условию II, теми же формулами выражаются координаты  $\overline{x}, \overline{x}'$  мнимых элементов  $M, M'$  через их старые координаты  $x, x'$ . Так как для элементов  $M, M'$  имеем  $x = x'$ , то из этих формул следует, что и  $\overline{x} = \overline{x}'$ . Таким образом, определение III соответствия мнимых элементов в проективных совокупностях 1-ой ступени не зависит от выбора систем отсчета в этих совокупностях.

Определение IV инцидентности мнимых элементов разнородных совокупностей 1-ой ступени основано на соответствии их в перспективности между этими совокупностями. Так как перспективность есть частный случай проективности, то и это определение не зависит от выбора систем отсчета.

Из доказанного ясно, что рассуждения предыдущей задачи применимы не только к вещественным, но и к мнимым элементам, что и оправдывает применение к мнимым элементам результатов этой задачи.

74. Пусть будет  $E$  точка ряда  $u$ , абсцисса которой равна 1, и пусть будет  $k = \pm c^2$  — абсцисса соответствующей точки  $E'$  ряда  $u'$ . Коорди-

наты точек  $M, M'$  по отношению к системам отсчета  $OXE, X'O'E'$  будут:

$$(OXME) = OM, \quad (X'O'M'E') = (O'X'E'M') = \frac{k}{O'M'}.$$

Так как системы  $OXE, X'O'E'$  — соответствующие, то эти координаты равны, откуда и получаем

$$OM \cdot O'M' = k = \pm c^2.$$

При построении двойных элементов проективности на прямой по данным точкам  $O, O'$  и отрезку  $c$  следует различать случаи  $k = +c^2$  и  $k = -c^2$  (рис. 50 *a*) и *b*). Пусть  $k = +c^2$ . Тогда отрезки  $OM, O'M'$  направлены одинаково, и условие  $OM \cdot O'M' = c^2$  для двойной точки показывает, что касательная из двойной точки к какой-либо окружности, проходящей через точки  $O, O'$ , равна отрезку  $c$ . Построим какую-нибудь окружность, проходящую через точки  $O, O'$ . Например построим окружность на отрезке  $OO'$ , как на диаметре. Геометрическое место точек, лежащих на касательных к этой окружности на расстоянии  $c$  от точек

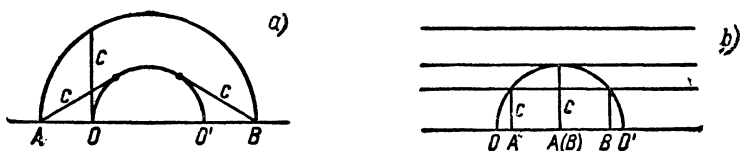


Рис. 50.

касания, есть концентрическая окружность. Для построения этой окружности достаточно построить одну точку ее, что можно сделать, построив перпендикуляр длины  $c$  к данной прямой в точке  $O$ . Точки пересечения  $A, B$  этой окружности с данной прямой и будут искомыми двойными точками. Мы видим, что они расположены по разные стороны от отрезка  $OO'$  на равных расстояниях от его концов. Пусть теперь  $k = -c^2$ . Тогда отрезки  $OM, O'M'$  имеют противоположные направления, и условие  $OM \cdot O'M' = -c^2$  или  $OM \cdot MO' = c^2$  для двойной точки показывает, что отрезок перпендикуляра к данной прямой в двойной точке до пересечения с окружностью, описанной на отрезке  $OO'$ , как на диаметре, равен отрезку  $c$ . Отсюда вытекает следующее построение: построив окружность на диаметре  $OO'$ , проводим прямую, параллельную данной прямой, на расстоянии  $c$  от нее; из точек пересечения этой прямой с окружностью опускаем перпендикуляры на данную прямую; основания  $A, B$  этих перпендикуляров и будут искомыми двойные точки. Мы видим, что при  $c < \frac{1}{2} OO' = a$  получим две двойные точки внутри отрезка  $OO'$  на равных расстояниях от его концов, при  $c = a$  эти точки сливаются, при  $c > a$  двойных точек нет. Так обстоит дело, если ограничивать рассмотрение вещественными двойными точками, но мы уже знаем, что когда нет вещественных двойных точек, то имеется две мнимо сопряженных.

Итак, гиперболическую проективность получаем при  $k < 0$  и при  $0 < k < a^2$ , параболическую при  $k = a^2$  и эллиптическую при  $k > a^2$ . Первые два неравенства можно заменить одним,  $k < a^2$ , и условием  $k \neq 0$ .

75. При обозначениях предыдущей задачи, имеем  $(OXME) = OM$ ;  $O'X'M'E' = O'M' : k$ . Из равенства этих величин получаем уравнение

$$O'M' : OM = k.$$

Если ряды  $u, u'$  лежат на одной прямой, то одна двойная точка есть бесконечно удаленная точка этой прямой, а другая делит отрезок  $OO'$  в отношении  $k = \pm m : n$ . Если  $k \neq 1$ , то эта точка конечная; тогда ее можно принять за начало отсчета обеих абсцисс, и зависимость между ними примет вид

$$OM' : OM = k,$$

так что, предполагая обозначения выбранными так, что  $k > 1$ , ряд  $u'$  получается из ряда  $u$  посредством однородного растяжения. Если  $k = 1$ , то и вторая двойная точка бесконечно удаленная, и мы получаем параболическую проективность. Так как в этом случае имеем

$$O'M = OM,$$

то получим

$$MM' = OO' = 2a,$$

т. е. ряд  $u'$  получается из ряда  $u$  посредством перемещения на отрезок, по величине и знаку равный  $2a$ .

76. Пусть будут  $u, u'$  — две совмещенные совокупности 1-ой ступени, и пусть элементу  $A$  как элементу совокупности  $u$  соответствует отличный от него элемент  $B$  как элемент совокупности  $u'$ , и элементу  $A$  как элементу совокупности  $u'$  соответствует тот же элемент  $B$  как элемент совокупности  $u$ . Пусть, далее, какому-нибудь элементу  $C$  как элементу совокупности  $u$  и соответствует элемент  $D$  как элемент совокупности  $u'$ . Мы должны доказать, что элементу  $C$  как элементу совокупности  $u'$  соответствует тот же элемент  $D$  как элемент совокупности  $u$ . Пока это не доказано, обозначим элемент совокупности  $u$ , соответствующий элементу  $C$  совокупности  $u'$ , через  $E$ . Тогда элементам  $A, B, C, E$  совокупности  $u$  соответствуют по порядку элементы  $B, A, D, C$ . Следовательно

$$(ABCE) = (BADC),$$

откуда

$$(ABCE) = (ABCD)$$

и следовательно  $E$  совпадает с  $D$ , что и доказывает первую теорему.

Пусть будут  $AB, CD$  — две пары элементов совокупности 1-ой ступени, не имеющие общих элементов. Мы должны доказать, что существует одна и только одна инволюция, в которой эти две пары элементов будут парами соответствующих элементов. Такая инволюция есть проективность, в которой элементам  $A, B, C$ , рассматриваемым как элементы одной из инволюторных совокупностей, соответствуют элементы  $B, A, D$ , рассматриваемые как элементы второй из инволюторных совокупностей. Но такая проективность существует и притом только одна, потому что по условию

элементы  $A, B, C$  различны между собой, так же как и элементы  $B, A, D$ . Этим доказана и вторая теорема.

Пусть будет  $A$  — двойной элемент инволюции и  $MM'$  — какая-нибудь пара соответствующих элементов. Тогда элементам  $A, M, M'$  одной из инволюторных совокупностей соответствуют по порядку элементы  $A, M', M$  другой, а потому элементу первой совокупности, гармонически сопряженному с элементом  $A$  относительно элементов  $M, M'$ , соответствует элемент второй совокупности, гармонически сопряженный с элементом  $A$  относительно элементов  $M', M$ . Но эти элементы совпадают и следовательно образуют двойной элемент  $B$ , отличный от двойного элемента  $A$ . Этим доказана третья теорема.

77. Если бесконечно удаленная точка не двойная, то ей соответствует одна и та же конечная точка, к которой бы из инволюторных совокупностей мы ее ни причислили. Поэтому точки  $O, O'$  задачи 74 совпадают, и выведенная там зависимость между абсциссами соответствующих точек  $M, M'$  принимает вид

$$OM \cdot OM' = \pm c^2.$$

Если бесконечно удаленная точка двойная, то вторая двойная точка  $O$  конечная. Соответствующие точки  $M, M'$  гармонически сопряжены относительно бесконечно удаленной точки и точки  $O$ , т. е. симметричны относительно точки  $O$ . Поэтому  $OM = -OM'$  или

$$OM + OM' = 0.$$

78. Требуемые зависимости легко выводятся из частного случая, рассмотренного в предыдущей задаче, по методу проекций. Но можно получить их и непосредственно. Чтобы получить первую зависимость, примем за элементы  $O, X$  системы отсчета какие-нибудь два элемента, соответствующие друг другу. Тогда получим

$$(OXME) = (XOM'E') = (OXE'M') = (OXE'E) : (OXM'E),$$

откуда

$$(OXME) \cdot (OXM'E) = (OXE'E)$$

или

$$xx' = \pm c^2.$$

Чтобы получить вторую зависимость, примем за элементы  $O, X$  двойные элементы. Тогда получим

$$(OXME) = (OXM'E') = (OXM'E) \cdot (OXE'E).$$

Но  $(OXE'E) = -1$ , так как точки  $E', E$  гармонически сопряжены относительно точек  $O, X$ . Таким образом

$$(OXME) = -(OXM'E)$$

или

$$x = -x'.$$

79. Пусть будут  $(AMN\dots), (AM'N'\dots)$  два проективных ряда на прямой  $u$  с общей точкой  $A$  (рис. 51). Проектируя ряд  $u(AM'N'\dots)$  на какую-нибудь другую прямую  $v$ , проходящую через точку  $A$ , из какой-



нибудь точки  $S$ , получим ряд  $v(AM''N''...)$ , перспективный с рядом  $u(AMN...)$ , так как эти ряды лежат на различных прямых  $u, v$  и имеют общую точку  $A$ . Пусть будет  $T$  центр пучка, перспективного с обоими рядами. Соответствующие точки рядов  $u(AMN...)$ ,  $u'(AM''N''...)$  суть проекции одних и тех же точек ряда  $v(AM''N''...)$  из центров  $S$  и  $T$  и могут совпадать только в двух случаях: когда проектирующие прямые проходят через точку  $A \equiv uv$ , и когда эти прямые совпадают. Таким образом, кроме точки  $A$ , двойной точкой может быть только точка пересечения  $B$  прямой  $ST$  с прямой  $u$ . Проективность будет гиперболической или параболической в зависимости от того, отлична ли точка  $B$  от точки  $A$ , или совпадает с ней.

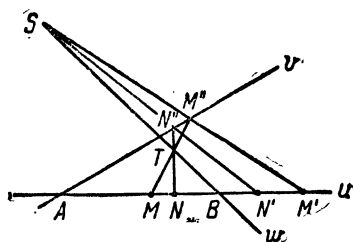


Рис. 51.

80. На прямой  $w$  отмечены, кроме двойной точки  $B$ , еще только точки  $S$  и  $T$ . На прямой  $v$  отмечены, кроме двойной точки  $A$ , еще только точки  $M''$  и  $N''$ . Следовательно при перемене ролей прямых  $v, w$  точки  $S, T$  и  $M'', N''$  должны поменяться ролями. Действительно, точки  $T, S$  — суть одновременно проекции точек  $M, M'$  из точки  $M''$  и точек  $N, N'$  из точки  $N''$ . Отсюда следует, что точка  $A$  есть вторая двойная точка проективности между рядами  $(BMM'...)$ ,  $(BNN'...)$ , что и требовалось доказать.

81. Пусть будут  $A, B$  двойные точки гиперболической или параболической проективности между рядами  $u, u'$  на одной прямой, и пусть точкам  $M, N$  одного ряда соответствуют в этой проективности точки  $M', N'$  другого ряда. Согласно предыдущей задаче, на той же прямой существует другая проективность с теми же двойными точками  $A, B$ , в которой точкам  $M, M'$  одного ряда соответствуют точки  $N, N'$  другого ряда. Отсюда находим

$$(ABMM') = (ABNN').$$

Иначе говоря,  $(ABMM')$  остается постоянным, когда точки  $M, M'$  одновременно описывают первые два проективных ряда, что и требовалось доказать. Впрочем в случае параболической проективности результат очевиден, так как

$$(ABMM') = (AAMM') = 1.$$

Применяя метод проекций, мы вправе считать точку  $B$  бесконечно удаленной, так как всегда можно спроектировать фигуру так, чтобы проекция этой точки была бесконечно удаленной, а значения двойных отношений в проекции сохраняют прежние значения. Точку  $A$  можно считать конечной, так как случай параболической проективности только что рассмотрен непосредственно. Тогда

$$(ABMM') = AM : AM'.$$

Но согласно задаче 75, где точка  $A$  обозначена через  $O$ , это отношение постоянно.

82. Если двойные точки мнимы, то можно рассуждать так: имеем

$$(ABMN) = (ABM'N'),$$

или

$$\frac{(ABME)}{(ABNE)} = \frac{(ABM'E)}{(ABN'E)};$$

отсюда

$$\frac{(ABME)}{(ABM'E)} = \frac{(ABNE)}{(ABN'E)},$$

или

$$(ABMM') = (ABNN'),$$

что и требовалось доказать.

83. Рассуждение предыдущей задачи одинаково применимо к любой совокупности 1-ой степени.

84. Пусть будут  $a, b$  — координаты двойных элементов  $A, B$  и  $x, x'$  — координаты каких-нибудь двух различных соответствующих вещественных элементов  $M, M'$ . Тогда инвариант выразится формулой

$$I = \frac{a-x}{b-x} : \frac{a-x'}{b-x'} = \frac{a-x}{a-x'} : \frac{b-x}{b-x'}.$$

Если проективность гиперболическая, то  $a, b$  — вещественны и различны. Поэтому  $I$  вещественно и, как показывает второе его выражение, не равно 1. Если проективность параболическая, то  $I$  равно 1. Если проективность эллиптическая, то  $a, b$  — комплексные сопряженные. Поэтому  $I$  как частное от деления двух комплексных сопряженных чисел есть комплексное число, модуль которого равен 1.

Проективность будет прямой, если переменные  $x, x'$  одновременно возрастают или убывают, и обратной, если при возрастании одной из переменных  $x, x'$  другая убывает. Если проективность гиперболическая, и мы предположим для определенности, что  $a$  больше  $b$ , то выражения

$$\frac{a-x}{b-x} = 1 - \frac{a-b}{x-b}, \quad \frac{a-x'}{b-x'} = 1 - \frac{a-b}{x'-b}$$

возрастают и убывают одновременно с переменными  $x, x'$ . Если их отношение  $I$  положительно, то эти выражения возрастают и убывают одновременно, а потому и переменные  $x, x'$  возрастают и убывают одновременно. Поэтому при положительном  $I$  проективность будет прямой, и также убедимся, что при отрицательном  $I$  проективность будет обратной. Предположим теперь, что проективность параболическая, и выразим  $x'$  через  $x$  по формуле задачи 72:

$$x' = k \frac{x - x_0}{x - x_\infty}.$$

Уравнение, служащее для определения двойных элементов,

$$x^2 - (k + x_\infty)x + kx_0 = 0$$

имеет в этом случае двойной корень  $a$ , и следовательно

$$k + x_\infty = 2a; \quad kx_0 = a^2.$$

Отсюда

$$x_{\infty} = 2a - k, \quad x_0 = \frac{a^2}{k}.$$

Заменяя  $x_{\infty}$ ,  $x_0$  этими выражениями, представим зависимость между  $x$  и  $x'$  в виде

$$x' = k - \frac{(a-k)^2}{x+k-2a},$$

откуда видно, что при возрастании  $x$  возрастает и  $x'$ . Следовательно параболическая проективность — прямая. Если проективность эллиптическая, то проще всего воспользоваться представлением чисел  $a$ ,  $b = \bar{a}$ ,  $x$ ,  $x'$  на комплексной плоскости (рис. 52). Найдем:

$$\frac{a-x}{b-x} = e^{2\theta i}, \quad \frac{a-x'}{b-x'} = e^{2\theta' i},$$

откуда

$$I = e^{2(\theta - \theta')i},$$

и следовательно

$$\theta - \theta' = \frac{1}{2i} \lg I = \text{const.}$$

Но  $\theta - \theta'$  есть угол при вершине  $P$  треугольника  $PMM'$ .

Так как этот угол остается постоянным при одновременном изменении  $x$ ,  $x'$ , то мы видим, что  $x$ ,  $x'$  всегда изменяются в одинаковом направлении, и следовательно эллиптическая проективность — прямая.

Проективность будет инволюторной только при  $I$ , равном  $-1$ , так как только при этом условии элементы  $M$ ,  $M'$  гармонически сопряжены относительно элементов  $A$ ,  $B$ . Гиперболическая инволюция есть обратная проективность, так как  $I = -1$  отрицательное число. Эллиптическая инволюция есть прямая проективность, как всякая эллиптическая проективность. Угол  $\theta - \theta'$  в этом случае прямой, как показывает формула.

Получаем следующую классификацию.

$I > 0$  и не  $= 1$ ; прямая гиперболическая проективность. Она не инволюторна.

$I = 1$ ; параболическая проективность. Она прямая и не инволюторная.

$I < 0$  и не  $= -1$ ; обратная неинволюторная гиперболическая проективность.

$I = -1$ ; инволюция. Она гиперболическая и обратная или эллиптическая и прямая.

$I$  комплексное с модулем 1; прямая неинволюторная эллиптическая проективность.

Таким образом только значению  $I = -1$  соответствуют два различных типа проективности с точки зрения признаков, указанных в задаче.

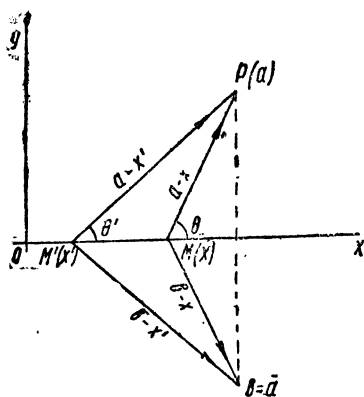


Рис. 52.

В остальных случаях значение  $I$  вполне определяет тип проективности.

85. Из равенства

$$(ABMM') = (ABNN')$$

вытекает равенство

$$(ABMM') = (BAN'N),$$

которое, в случае различных между собою  $A, B$ , показывает, что в инволюции  $\begin{pmatrix} ABM \\ BAN' \end{pmatrix}$   $M', N$  соответствуют друг другу.

86. На рис. 51 имеем полный четырехугольник  $STM''N'$ , пары противоположных сторон которого пересекают прямую  $u$  в парах точек  $AB, MN', M'N$ . Согласно предыдущей задаче, эти три пары точек принадлежат одной инволюции. Если задан полный четырехугольник и прямая в его плоскости, то мы можем рассматривать эту фигуру как рис. 51, введя соответствующие обозначения точек и прямых, так как при любом положении прямой она пересекает по крайней мере одну пару сторон четырехугольника в различных точках, и эти точки можно будет принять за точки  $A, B$ . Проверив все это на чертеже, читатель тем самым докажет теорему Дезарга.

Если дан полный четырехсторонник и точка в его плоскости, то в произвольной коррелятивности между этой плоскостью и какой-нибудь другой данной фигуре будет соответствовать полный четырехугольник и прямая в его плоскости. Трех парам точек пересечения прямой с парами противоположных сторон четырехугольника будут соответствовать три пары прямых, соединяющих точку с парами противоположных вершин четырехсторонника, и из свойств коррелятивности ясно, что эти три пары прямых принадлежат одной инволюции, что и составляет двойственную теорему Дезарга.

Если применим теорему Дезарга к случаю, когда прямая проходит через одну из диагональных точек четырехугольника, то полученную фигуру можно будет рассматривать как рис. 51 для случая параболической проективности, приняв эту диагональную точку за двойную точку  $A \equiv B$ .

87. Если построим полный четырехугольник так, что две пары противоположных сторон проходят через две заданные пары точек инволюции, а пятая сторона через заданную точку третьей пары, то шестая сторона пройдет через искомую вторую точку третьей пары. Построение применимо и в том случае, когда в одной из заданных пар или в обеих точки сливаются. В последнем случае построение превращается в построение четвертой гармонической точки к трем заданным.

88. Построение ясно из задачи 79.

89. Пусть будет  $A \equiv B$  — заданная двойная точка параболической проективности,  $MM'$  — заданная пара соответствующих точек и  $N$  — заданная точка, к которой требуется найти соответствующую точку  $N'$ . Согласно задаче 86, пары  $AB \equiv AA, M'N, MN'$  суть три пары инволюции. Так как две из них заданы, а в третьей задана одна точка, то построение сводится к построению задачи 87.

90. Предположим, что два ряда точек  $u, u'$  подобны, и пусть будут

$O, O'$  какие-нибудь определенные конечные соответствующие точки и  $M, M'$  — произвольные конечные соответствующие точки. Тогда по определению подобия имеем:

$$O'M' : OM = k = \text{const.}$$

Это соотношение показывает, как видно из задачи 75, что подобие между двумя рядами точек есть проективность, в которой бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу. И обратно, такая проективность есть подобие, как видно из той же задачи.

Если два ряда точек  $u, u'$  на одной прямой равны, то мы будем иметь при тех же обозначениях:

$$O'M' = \pm OM.$$

При верхнем знаке равенство есть параболическая проективность с двойной точкой в бесконечности. При нижнем знаке равенство есть инволюция, одна из двойных точек которой лежит в бесконечности. Обратно, параболическая проективность или инволюция с двойной точкой в бесконечности есть равенство. В первом случае мы имеем прямое равенство, при котором ряды  $u, u'$  только смещены относительно друг друга на определенной отрезок, во втором случае мы имеем обратное равенство, которое, как показывает уравнение, представляет собою симметрию.

91. Тангенс угла  $\varphi$ , образуемого переменной прямой  $m$  пучка с какой-нибудь неподвижной прямой  $o$  того же пучка, можно рассматривать как обобщенную координату прямой  $m$  по отношению к системе отсчета  $oxe$ , где  $x$  — прямая пучка, перпендикулярная к  $o$ , и  $e$  — прямая пучка, образующая с  $o$  и  $x$  угол  $\frac{\pi}{4}$  (рис. 53). Действительно,

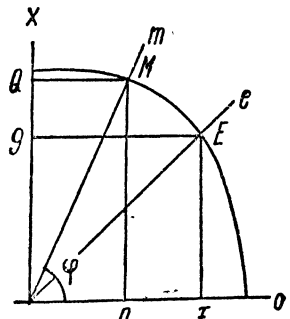


Рис. 53.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{PM \cdot GE}{QM \cdot FE} = (oxme).$$

Если в двух равных пучках  $U, U'$  принять за начала отсчета углов  $\varphi, \varphi'$  соответствующие прямые  $o, o'$ , и направления отсчета выбрать так, чтобы соответствующие переменные прямые  $m, m'$  одновременно вращались в этих направлениях, то получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi',$$

что и доказывает проективность пучков  $U, U'$ .

Предположим, что центры пучков  $U, U'$  совпадают, и равенство их обратное (рис. 54). Пусть будут  $m, m'$  две несовпадающие соответ-

ствующие прямые пучков  $U, U'$  и  $a, b$  — биссектрисы угла  $mm'$ . Вращаясь в противоположных направлениях, прямые  $m, m'$  одновременно описывают равные углы  $ma, m'a$ , а также равные углы  $mb, m'b$ , и следовательно совпадут между собой в положениях  $a, b$ . При этом они все время остаются симметричными относительно прямых  $a, b$ . Мы видим, что обратное равенство совмещенных пучков есть симметрия, и замечаем также, что такая симметрия представляет собой гиперболическую инволюцию со взаимно перпендикулярными двойными прямыми.

Предположим теперь, что равенство прямое. Тогда пучки  $U, U'$  просто повернуты относительно друг друга на некоторый угол. Действительно, если обозначим через  $\varphi, \varphi'$  углы, образуемые соответствующими прямыми  $m, m'$  с какой-нибудь неподвижной прямой  $o$ , то разность  $\varphi' - \varphi$  остается постоянной при одновременном вращении прямых  $m, m'$ , так как при этом углы  $\varphi, \varphi'$  одновременно возрастают или убывают на один и тот же угол, а именно, на угол, описанный прямыми  $m, m'$ . Но разность  $\varphi' - \varphi$  и равна углу  $mm'$  между прямыми  $m, m'$ . Отсюда

$$\varphi' - \varphi = \text{const.} = \alpha; \quad \text{tg}(\varphi' - \varphi) = \text{tg} \alpha,$$

$$\frac{\text{tg} \varphi' - \text{tg} \varphi}{1 + \text{tg} \varphi' \text{tg} \varphi} = \text{tg} \alpha,$$

$$\text{tg} \varphi' \text{tg} \varphi + 1 + \text{ctg} \alpha (\text{tg} \varphi' - \text{tg} \varphi) = 0.$$

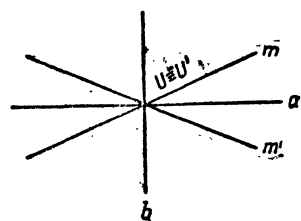


Рис. 54.

Полагая  $\varphi' = \varphi$ , найдем уравнение для определения двойных прямых

$$\text{tg}^2 \varphi + 1 = 0.$$

Действительно, так как прямые  $m, m'$  не совпадают, то  $\alpha \neq 0, \pm \pi, \dots$ , и следовательно  $\text{ctg} \alpha \neq \infty$ , а потому произведение  $\text{ctg} \alpha (\text{tg} \varphi' - \text{tg} \varphi) = 0$  при  $\varphi' = \varphi$ . Из полученного уравнения находим угловые коэффициенты двойных прямых:

$$\text{tg} \varphi = \pm i.$$

92. Обозначим через  $a$  двойную прямую с угловым коэффициентом  $i$  и через  $b$  двойную прямую с угловым коэффициентом  $-i$ . Имеем:

$$\begin{aligned} I = (abmm') &= \frac{\text{tg} \varphi - i}{\text{tg} \varphi + i} : \frac{\text{tg} \varphi' - i}{\text{tg} \varphi' + i} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi} : \frac{\cos \varphi' - i \sin \varphi'}{\cos \varphi' + i \sin \varphi'} = \\ &= \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} : \frac{e^{-i\varphi'}}{e^{i\varphi'}} = e^{2(\varphi' - \varphi)i} = e^{2mm'i} \end{aligned}$$

или

$$mm' = \frac{1}{2i} \lg I.$$

Это и есть формула Лагерра.

93. Пусть будет  $OXY$  декартова система координат на плоскости. В задаче 62 мы условились определять положение точки, лежащей на стороне  $XU$  координатного треугольника  $OXY$ , отношением координат  $y:x$ . В данном случае эти точки бесконечно удаленные, и отношения  $y:x$  суть угловые коэффициенты конечных прямых, проходящих через них.

Так как угловые коэффициенты изотропных прямых, проходящих через любую конечную точку, равны  $\pm i$ , то все изотропные прямые проходят через бесконечно удаленные точки с координатами  $y:x = \pm i$ , т. е. через две вполне определенные бесконечно удаленные точки.

94. На рис. 52 задачи 84 мы имеем точку  $P$ , изображающую комплексное число  $a$ , и пару соответствующих точек  $M, M'$  проективности на вещественной оси, двойные точки которой имеют абсциссы  $a, \bar{a}$ . Когда точки  $M, M'$  описывают проективные ряды на вещественной оси, прямые  $PM, PM'$  описывают проективные пучки вокруг точки  $P$ . На основании определения инцидентности мнимых элементов, мы вправе отсюда заключить, что мнимые двойные прямые проективности между пучками  $(PM), (PM')$  проходят через мнимые двойные точки проективности между рядами  $(M), (M')$ , как это имеет место и в случае вещественных двойных элементов. Но указанные двойные прямые суть изотропные прямые пучка  $P$ , так как проективность между пучками  $(PM), (PM')$  есть прямое равенство. Таким образом изотропные прямые пучка  $P$  действительно проходят через точки вещественной оси с абсциссами  $a, \bar{a}$ .

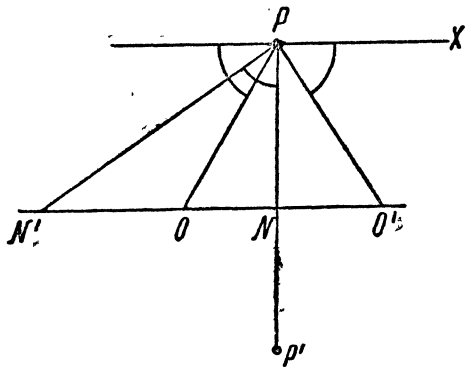


Рис. 55.

95. На основании предыдущей задачи мы должны построить вещественные точки изотропных прямых, проходящих через двойные точки заданной проективности на вещественной оси, т. е. такие точки  $P$ , чтобы при движении соответствующих точек  $M, M'$  угол между прямыми  $PM, PM'$  оставался постоянным. Когда  $M$  совпадает с  $O$ , то прямая  $PM$  становится параллельной вещественной оси, а когда  $M'$  совпадает с  $O'$ , то прямая  $PM$  становится параллельной вещественной оси (рис. 55). Таким образом прямые  $PO, PO'$  должны быть одинаково наклонены к прямой, проведенной через точку  $P$  параллельно вещественной оси, а потому и к самой вещественной оси, т. е. треугольник  $OPO'$  должен быть равнобедренным. Пусть середина  $N$  отрезка  $OO'$  соответствует точке  $N'$ . Тогда угол  $NPN'$  должен быть равен углу  $XPO'$ . Поэтому угол  $O'PN'$  должен быть равен  $XPN = 90^\circ$ , т. е. треугольник  $O'PN'$  должен быть прямоугольным. Отсюда находим  $O'N \cdot O'N' = O'P^2$ . С другой стороны, применяя уравнение  $OM \cdot O'M' = -c^2$  к точкам  $N, N'$ , найдем  $ON \cdot O'N' = -c^2$ , откуда  $O'N \cdot O'N' = c^2$ . Сравнивая последнее равенство с первым, находим  $O'P = c$ . Таким образом построение точки  $P$  сводится к построению равнобедренного треугольника с основанием  $OO'$  и боковой стороной  $c$ . Так как проективность эллиптическая, то  $c > a = \frac{1}{2} OO'$ , и мы всегда найдем две точки  $P, P'$ , симметричные относительно вещественной оси, как и следовало ожидать.

## ГЛАВА IV.

96. 1. Пусть будут  $S, S'$  — центры пучков, определяющих ряд 2-го порядка  $K$ . Прямой  $S'S$  пучка  $S'$  соответствует прямая  $t$  пучка  $S$ , не совпадающая с ней, так как пучки  $S, S'$  неперспективны. Точка пересечения прямых  $S'S$  и  $t$  есть точка  $S$  (рис. 56). Следовательно точка  $S$  принадлежит ряду  $K$ , определяемому пучками  $S, S'$ . Далее, всякая прямая  $m$  пучка  $S$  имеет с рядом  $K$ , кроме точки  $S$ , еще одну общую точку, а именно, точку пересечения  $M$  с соответствующей прямой  $m'$  пучка  $S'$ , и  $M$  совпадает с  $S$  только тогда, когда  $m$  совпадает с  $t$ . Следовательно единственной касательной в точке  $S$  будет  $t$ . Так же убедимся, что точка  $S'$  принадлежит ряду  $K$ , и единственной касательной в точке  $S'$  будет прямая  $t'$

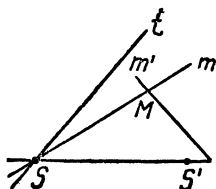


Рис. 56.

пучка  $S'$ , соответствующая прямой  $SS'$  пучка  $S$ .

2. Нам заданы три пары соответствующих прямых пучков  $S, S'$ , а именно, прямым  $t, SS' \equiv o, SA \equiv a$  пучка  $S$  соответствуют прямые  $S'S \equiv o, t', S'A \equiv a'$  пучка  $S'$  (рис. 57). Вообще, по трем парам соответствующих прямых двух неперспективных и несовмещенных пучков в одной плоскости всегда можно построить центр коллинеации, а затем любое количество пар соответствующих прямых, как показано в задаче 71. В данном случае построение упрощается тем, что заданы прямые  $t, t'$  пучков  $S, S'$ , соответствующие прямой  $SS' = o$ , вследствие чего центр коллинеации есть просто точка  $P \equiv tt'$ . Поэтому построение ведется так: проводим через точку  $P$  произвольную прямую  $m_1$ , и соединяем точку  $S$  с точкой  $N \equiv m_1 a'$ , а точку  $S'$  — с точкой  $N' \equiv m_1 a$ ; прямые  $m = SN, m' = S'N'$  будут соответствующими прямыми пучков  $S, S'$ . Точка  $M \equiv mm'$  будет точкой ряда, и меняя положение прямой  $m_1$  пучка  $P$ , мы можем получить сколько угодно точек  $M$ .

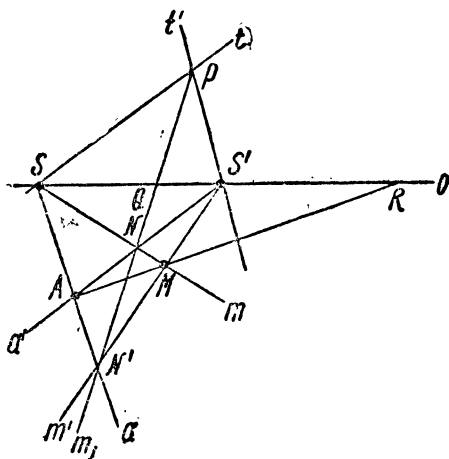


Рис. 57.

3. Соединим неподвижную точку  $A$  с переменной точкой  $M$ , и обозначим через  $Q$  и  $R$  точки пересечения прямой  $SS'$  с прямыми  $m_1$  и  $AM$ . Когда точка  $M$  описывает ряд  $K$ , прямая  $m_1$  описывает пучок  $(PN) \equiv (PN')$ , перспективный с обоими пучками  $(SN)$  и  $(S'N')$ , описываемыми прямыми  $m, m'$ ; точка  $Q$  описывает на прямой  $SS'$  ряд  $(Q)$ , перспективный с пучком  $(m_1)$ ; точка  $R$  описывает на прямой  $SS'$  ряд  $(R)$ , инволюторный с рядом  $(Q)$ , ибо из построения видно, что точки  $Q, R$  гармонически сопряжены относительно точек  $S, S'$ ; наконец прямая  $AM$  описывает пучок  $(AM)$ , перспективный с рядом  $(R)$ . Итак, пучок  $(AM)$  про-



ективен с рядом  $(R)$ , ряд  $(R)$  — с рядом  $(Q)$ , ряд  $(Q)$  — с пучком  $(m_1)$ , пучок  $(m_1)$  — с пучками  $(m) \equiv (SM)$  и  $(m') \equiv (S'M)$ ; следовательно пучок  $(AM)$  прсективен с пучками  $(SM)$  и  $(S'M)$ , что и требовалось доказать.

Если  $A, A'$  — какие-нибудь две точки ряда  $K$ , то по доказанному только что пучки  $(AM), (A'M)$  проективны пучкам  $(SM), (S'M)$ ; следовательно пучки  $(AM), (A'M)$  проективны и между собой, и мы можем определить ряд  $K$  с помощью пучков  $(AM), (A'M)$ , вместо пучков  $(SM), (S'M)$ , что и требовалось доказать.

4. Секущая  $AM \equiv AR$  (рис. 57) превращается в касательную в точке  $A$ , когда точка  $M$  совпадает с точкой  $A$ , т. е. когда прямая  $m_1$  совпадает с прямой  $PA$  (рис. 58). Но тогда точка  $Q$  совпадает с точкой пересечения прямой  $PA$  с прямой  $SS'$ , и мы видим, что касательная  $AR$  и прямая  $AP$  пересекают прямую  $SS'$  в точках  $R, Q$ , гармонически сопряженных относительно точек  $S, S'$ .

5. По точкам  $S, S', A$  и касательным  $SP, S'P$  требуется построить касательную  $AR$ . Для этого достаточно построить точку  $R$ , гармонически сопряженную с точкой пересечения  $Q$  прямых  $AR, SS'$  относительно точек  $S, S'$ . Замечаем, что  $Q$  есть одна из диагональных точек четырехсторонника, образуемого прямыми  $AS, AS', PS, PS'$ , лежащих на диагонали  $SS'$ . Следовательно  $R$  есть вторая диагональная точка, лежащая на диагонали  $SS'$ , откуда ясно, как ее построить: строим проекции  $U', U$  точек  $S, S'$  из точки  $A$  соответственно на прямые  $PS', PS$ , и проводим прямую  $UU'$ ; прямая  $UU'$  пересечет прямую  $SS'$  в точке  $R$ . Остается провести прямую  $AR$ , которая и будет искомой касательной.

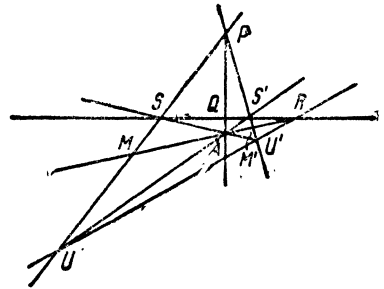


Рис. 58.

6. На рис. 58 имеем совершенно произвольный треугольник  $SS'A$ , вписанный в ряд  $K$ , и касательные в его вершинах. Из рассмотрения этого чертежа убеждаемся в справедливости предложенной теоремы.

7. Пользуясь тем же рис. 58 и считая точки  $S, S'$  неподвижными и точку  $A$ , описывающей ряд  $K$ , мы должны доказать, что точки  $M, U$  описывают проективные ряды на прямой  $PS$ , и что точки  $M', U'$  описывают проективные ряды на прямой  $PS'$ . Рассмотрим например точки  $M, U$ . Мы видим из чертежа, что пары точек  $PM, SU$  гармонически сопряжены. Поэтому

$$(PMSU) = -1,$$

а отсюда, на основании задачи 39,

$$(PSMU) = 2.$$

Отсюда нетрудно вывести, что соответствие между точками  $M, U$  есть проективность с двойными точками  $P, S$  и инвариантом  $I = 2$ . Действительно, пусть  $M_0, U_0$  некоторые определенные положения точек  $M, U$ . Тогда

$$(PSM_0U_0) = (PSMU).$$

Отсюда, на основании задачи 82,

$$(PSM_0M) = (PSU_0U).$$

Последнее равенство показывает, что точки  $M$ ,  $U$  соответствуют друг другу в проективности, в которой точки  $P$ ,  $S$  — двойные. Равенство же  $(PSMU) = 2$  показывает, что инвариант этой проективности равен 2.

8. Когда точка  $A$  описывает ряд  $K$ , прямые  $SA$ ,  $S'A$  описывают проективные пучки; точки  $U'$ ,  $U$  описывают ряды, соответственно проективные пучкам  $(SA)$ ,  $(S'A)$  и следовательно проективные между собой; точки  $M'$ ,  $M$  описывают ряды, соответственно проективные рядам  $(U')$ ,  $(U)$  и следовательно проективные между собой. Нетрудно убедиться, что ряды  $(M')$ ,  $(M)$  неперспективны. Действительно, если бы точки  $M'$ ,  $M$  одновременно совпали с точкой  $P$ , то в тот же момент и точки  $U'$ ,  $U$  совпали бы с точкой  $P$ , и прямые  $SA$ ,  $S'A$  совпали бы с прямыми  $SP$ ,  $S'P$ . Но последнее невозможно, так как прямые  $SP$ ,  $S'P$  не соответствуют друг другу в проективности между пучками  $(SA)$ ,  $(S'A)$ . Отсюда следует, что касательная  $AR \equiv MM'$  описывает пучок прямых 2-го порядка, определяемый проективными рядами точек  $(M)$ ,  $(M')$  на неподвижных касательных  $SP$ ,  $S'P$  ряда точек 2-го порядка  $K$ , что и требовалось доказать.

Доказательство двойственных теорем 1'—8' предоставляем читателю.

97. Чтобы доказать равносильность обоих определений, нужно доказать, во-первых, что проекция круга есть пересечение двух проективных неперспективных пучков, во-вторых, что пересечение двух таких пучков всегда есть проекция круга.

Пусть будут  $S$ ,  $S'$  две неподвижные точки круга и  $M$  — переменная точка. При движении точки  $M$  прямые  $SM$ ,  $S'M$  вращаются в одном и том же направлении и угол между ними остается постоянным. Поэтому прямые  $SM$ ,  $S'M$  одновременно описывают равные углы, т. е. они описывают равные пучки прямых. Таким образом круг есть пересечение двух равных пучков прямых. Так как равенство есть частный случай проективности, то круг есть пересечение двух проективных пучков. Притом эти пучки неперспективны, так как в противном случае их пересечением была бы прямая. Если теперь спроектируем фигуру из какого-нибудь центра на другую плоскость, то проекциями пучков  $(SM)$ ,  $(S'M)$  будут пучки, перспективные с ними и следовательно проективные между собой, а проекцией круга будет пересечение этих пучков. Притом эти пучки неперспективны, ибо по соглашению, принятому в главе I, центр проекции не лежит в плоскости проектируемой фигуры, и следовательно проекцией круга не может быть прямая. Таким образом доказано, что проекция круга есть пересечение двух проективных неперспективных пучков.

Теперь, пусть будет  $K$  пересечение двух проективных неперспективных пучков  $(SM)$ ,  $(S'M)$  (рис. 59). Пусть будет, далее,  $u$  какая-нибудь прямая в плоскости кривой  $K$ , не проходящая через точки  $S$ ,  $S'$ , и пусть будут  $N$ ,  $N'$  точки пересечения прямой  $u$  с прямыми  $SM$ ,  $S'M$ . При движении точки  $M$  по кривой  $K$  точки  $N$ ,  $N'$  опишут на прямой  $u$  ряды, перспективные с пучками  $(SM)$ ,  $(S'M)$  и следовательно проективные между собой. Допустим временно без доказательства, что пря-

мую  $u$  можно выбрать так, чтобы проективность между рядами  $(N)$ ,  $(N')$  была эллиптической. Выбрав прямую  $u$  таким образом и проведя через нее какую-нибудь плоскость, отличную от плоскости кривой  $K$ , мы сможем тогда найти в этой плоскости такую точку  $O$ , чтобы при движении точек  $N, N'$  угол между прямыми  $ON, ON'$  оставался постоянным, как показано в задаче 95. После этого проведем еще плоскость, параллельную плоскости  $Ou$ , и обозначим через  $T, T', P$  проекции точек  $S, S', M$  из точки  $O$  на эту плоскость. Когда точка  $M$  описывает кривую  $K$ , ее проекция  $P$  описывает проекцию кривой  $K$ , между тем как проекции  $T, T'$  неподвижных точек  $S, S'$  остаются неподвижными. При этом угол между прямыми  $TP, T'P$  остается постоянным, так как прямые  $TP, T'P$  соответственно параллельны прямым  $NO, N'O$ , угол между которыми остается постоянным по предыдущему. Отсюда ясно, что проекция кривой  $K$ , описываемая точкой  $P$ , есть круг.

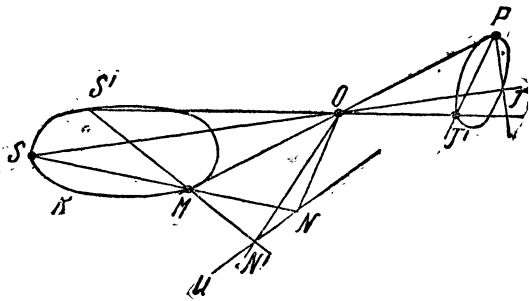


Рис. 59.

Нам остается проверить принятое временно без доказательства положение, что прямая  $u$  может быть выбрана так, чтобы проективность между рядами  $(N)$ ,  $(N')$  была эллиптической. Прежде всего эта проективность будет прямой или обратной смотря по тому, который из двух отрезков  $SS'$  пересекает прямая  $u$ , как показано в задаче 9.

Пусть будет  $Q$  какая-нибудь точка того из отрезков  $SS'$ , которому соответствуют прямые проективности (рис. 60). Если за прямую  $u$  принять какую-нибудь прямую, пересекающую прямую  $SS'$  в точке  $Q$ , то проективность между рядами  $(N)$ ,  $(N')$  будет прямой. Если прямую  $u$  можно будет выбрать так, чтобы эта проективность была инволюторной, то она будет эллиптической, так как прямая инволюция всегда эллиптическая. Точку  $Q$  можно рассматривать как точку  $N$  и как

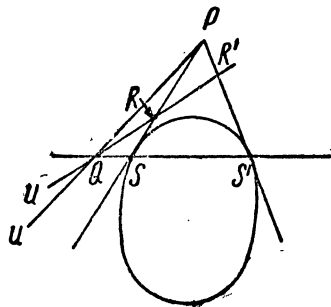


Рис. 60.

точку  $N'$ , т. е. как точку пересечения прямой  $u$  с прямой  $S'S$  пучка  $S$ , и как точку пересечения прямой  $u$  с прямой  $S'S$  пучка  $S'$ . В первом случае точкой  $N'$  будет точка пересечения  $R'$  прямой  $u$  с касательной  $S'P$ , во втором случае точкой  $N'$  будет точка пересечения  $R$  прямой  $u$  с касательной  $SP$ . Чтобы проективность между рядами  $(N)$ ,  $(N')$  была инволюторной, необходимо и достаточно, чтобы точки  $R, R'$  совпали, т. е. чтобы прямая  $u$  проходила через точку  $P$ . Итак, прямая  $u \equiv PQ$  удовлетворяет предъявленному требованию, чем и заканчивается доказательство предложенной теоремы.

98. На рис. 57 мы имеем полный четырехугольник  $SS'AM$ , вписан

ный в кривую 2-го порядка, и касательные  $t, t'$  в двух его вершинах  $S, S'$ . Четырехугольник  $SS'AM$  есть произвольный вписанный четырехугольник, так как не только точки  $A, M$ , но и точки  $S, S'$ , как это видно из теоремы 3, задачи 96, могут быть взяты где угодно на кривой 2-го порядка. Но чертеж показывает, что диагональ четырехугольника, соединяющая диагональные точки  $N, N'$ , не лежащие на сторонах  $SS', AM$ , проходит через точку пересечения касательных в вершинах  $S, S'$ . Меняя ролями точки  $S, S'$  и  $A, M$ , убедимся, что та же диагональ проходит через точку пересечения касательных в точках  $A, M$ . Таким образом диагональ вписанного четырехугольника есть в то же время диагональ описанного четырехсторонника, что и доказывает теорему.

99. Пусть будет  $P$  точка, не лежащая на кривой 2-го порядка;  $a \equiv BC$  и  $m \equiv HK$  — две секущие, проходящие через точку  $P$ ;  $D$  и  $L$  — точки, гармонически сопряженные с точкой  $P$  относительно пар точек пересечения  $BC$  и  $HK$  секущих  $a$  и  $m$  с кривой;  $A$  и  $M$  — точки пересечения касательных в точках  $B, C$  и  $H, K$  (рис. 61). Диагональ  $p$  четырехугольника  $BCHK$ , не проходящая через диагональную точку  $P$ , проходит, как легко видеть из гармонических свойств четырехугольника, через точки  $D, L$ , а по предыдущей теореме она проходит и через точки  $A, M$ . Если будем вращать секущую  $m$  вокруг точки  $P$ , то точки  $L, M$  будут перемещаться, но диагональ  $p$  останется неподвижной, так как она проходит через неподвижные точки

$A, D$ . Следовательно точки  $L, M$  лежат на прямой  $p$ , независимо от положения секущей  $m$ . Когда секущая обращается в касательную  $t$ , точка  $L$  обращается в точку касания  $T$ .

100. Теорема доказывается с помощью рассуждения, двойственного с предыдущим.

101. Сохраним обозначения задачи 99. Если точка  $P$  лежит на кривой, то при любом положении секущей  $m$  точка  $L$  совпадает с точкой  $P$ , а точка  $M$  лежит на касательной в точке  $P$ . Следовательно полярной точки  $P$  будет эта касательная. Из задачи 100 таким же образом выводится, что полюс касательной есть точка касания.

102. Пусть будут  $A, B, C$  неподвижные точки,  $a, b$  — неподвижные прямые,  $K, L, M$  — вершины треугольника, как показано на рис. 62. Когда сторона  $KL$  вращается вокруг точки  $C$ , точки  $K, L$  описывают на прямых  $a, b$  перспективные ряды, стороны  $KM, LM$  описывают вокруг точек  $B, A$  пучки, перспективные с рядами  $(K), (L)$  и следовательно проективные между собой. Прямые  $KM, LM$  могут совпасть с прямой  $AB$  только тогда, когда и прямая

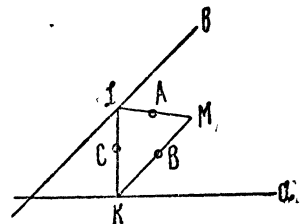


Рис. 62.

$LM$  совпадает с нею, а это возможно лишь в том случае, если точка  $C$  лежит на прямой  $AB$ . Поэтому, если точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой, то пучки  $(KM), (LM)$  не перспективны, и точка  $M$  описывает кривую 2-го порядка. Если же точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой, то пучки  $(KM), (LM)$  перспективны, и точка  $M$  описывает прямую.

103. Огибающей будет вообще кривая 2-го порядка, а в особом случае — точка. Рассуждения двойственны предыдущим.

104. Результаты будут те же, что в задачах 103 и 104.

105. Две стороны углов описывают перспективные пучки, а две другие стороны описывают пучки, равные первым и следовательно проективные между собой. Поэтому точка пересечения их описывает кривую 2-го порядка.

106. В обоих случаях прямые описывают равные пучки. Если они вращаются в одинаковых направлениях, то угол между ними остается постоянным. Если этот угол не нуль, то точка пересечения прямых описывает круг. Если этот угол нуль, то точка пересечения описывает бесконечно удаленную прямую. Если прямые вращаются в противоположных направлениях, то в двух положениях они будут параллельны, и направления их в этих положениях будут перпендикулярны между собой. Это видно из того, что параллельные им прямые, проведенные через неподвижную точку, описывают симметричные пучки и следовательно, как это видно из задачи 91, совпадают в двух перпендикулярных положениях. В одном из параллельных положений вращающиеся прямые могут даже совпадать; тогда точка пересечения их описывает прямую, перпендикулярную к отрезку, соединяющему неподвижные точки, в его середине. Если же параллельность в обоих положениях не есть совпадение, то описываемые вращающимися прямыми пучки неперспективны, и точка пересечения их описывает кривую 2-го порядка с двумя бесконечно удаленными точками в перпендикулярных направлениях, т. е. гиперболу с перпендикулярными асимптотами (равнобочную).

107. Когда вершина  $C$  описывает прямую  $u$ , стороны  $AC, BC$  описывают перспективные пучки, а высоты  $BQ, AP$  описывают пучки, соответственно равные этим пучкам, а потому проективные между собой (рис. 63). Прямые  $BQ, AP$  совпадают с прямой  $AB$  только тогда, когда стороны  $AC, BC$  обе становятся перпендикулярными к прямой  $AB$ . Это возможно только в том случае, если прямая  $u$  перпендикулярна к прямой  $AB$ . В этом случае пучки, описываемые прямыми  $BQ, AP$ , перспективны, и точка пересечения их  $H$  описывает прямую, также перпендикулярную к  $AB$ , но, вообще говоря, отличную от прямой  $u$ . Если прямая  $u$  не перпендикулярна к  $AB$ , то точка  $H$  описывает кривую 2-го порядка, которая будет гиперболой с асимптотами, перпендикулярными к прямым  $AB$  и  $u$ , если  $u$  наклонна к  $AB$ , и параболой с осью, перпендикулярной к  $AB$  и  $u$ , если  $u$  параллельна  $AB$ .

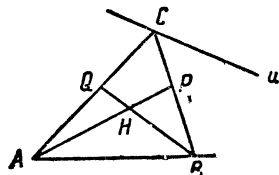


Рис. 63.

108. Пусть будут  $A, B$  неподвижные точки,  $u$  — неподвижная прямая и  $CD$  — отрезок постоянной длины, скользящий по ней (рис. 64). Точки  $C, D$  описывают на прямой  $u$  равные и одинаково направленные ряды; согласно задаче 90, проективность между этими рядами параболическая с двойной точкой в бесконечности. Прямые  $AC, BD$  описывают около точек  $A, B$  пучки, соответственно перспективные этим рядам и следовательно проективные между собой. Эта проективность будет перспективностью лишь в том случае, если при каком-либо положении отрезка  $CD$  прямые  $AC, BD$  совпадают с прямой  $AB$ . Если прямая  $AB$  не параллельна  $u$ , то это невозможно, и следовательно

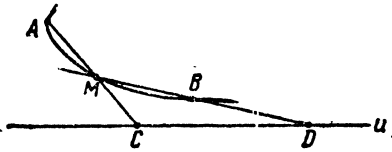


Рис. 64.

точка пересечения  $M$  прямых  $AC, BD$  описывает кривую 2-го порядка. Единственная точка этой кривой, лежащая на прямой  $u$ , есть бесконечно удаленная точка этой прямой, откуда видно, что прямая  $u$  есть асимптота кривой, и следовательно кривая есть гипербола. Если  $AB$  параллельна  $u$ , то пучки перспективны, и точка  $M$  описывает прямую, также параллельную  $u$ , или бесконечно удаленную прямую.

Чтобы применить полученный результат к построению гиперболы, заметим, что если  $A, B$  неподвижные конечные точки какой-нибудь гиперболы,  $M$  — переменная точка ее, и  $u$  — одна из асимптот, то точки пересечения  $C, D$  прямых  $AM, BM$  с прямой  $u$  описывают на этой прямой проективные ряды, причем двойной точкой этой проективности будет единственная общая точка прямой  $u$  с гиперболой, т. е. бесконечно удаленная точка прямой  $u$ . Отсюда следует, что проективность есть прямое равенство, т. е., что отрезок  $CD$  остается постоянным. Таким образом всякую гиперболу можно получить по рассмотренному нами способу, причем за точки  $A, B$  можно принять любые две точки гиперболы. Если теперь заданы одна из асимптот гиперболы  $u$  и три ее точки  $A, B, M_0$ , то, проведя прямые  $AM_0, BM_0$  до пересечения в точках  $C_0, D_0$  с прямой  $u$ , мы найдем одно из положений  $C_0D_0$  отрезка  $CD$ , соответствующего данному выбору точек  $A, B$ . Строя отрезки  $CD = C_0D_0$  где угодно на прямой  $u$ , и проводя прямые  $AC, BD$  до пересечения в точке  $M$ , мы сможем найти сколько угодно положений точки  $M$ , т. е. сколько угодно точек гиперболы.

109. Асимптоты суть касательные в бесконечно удаленных точках. Следовательно нам даны три точки и касательные в двух из них, т. е. мы имеем частный случай задачи 96, 2. Построение в этом случае принимает следующий вид. Пусть будут  $t, t'$  асимптоты гиперболы и  $A$  — конечная точка ее. Проводим через  $A$  прямые, параллельные  $t, t'$ , затем проводим через  $P \equiv tt'$  произвольную прямую до пересечения с этими прямыми в  $N, N'$ , наконец проводим через  $N, N'$  прямые, параллельные  $t', t$ , до пересечения в  $M$ . Точка  $M$  лежит на гиперболе (рис. 65).

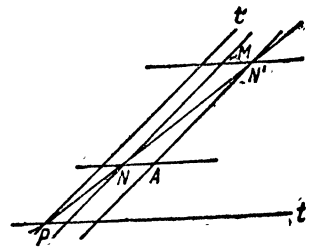


Рис. 65.

110. Сводится к задаче 96, 2. Одна точка  $S$  и касательная в ней  $SP$  заданы, другая точка  $S'$  есть бесконечно удаленная точка заданного диаметра  $SS'$ , и касательная в ней есть бесконечно удаленная прямая. Кроме того, задана еще одна точка  $A$ . Построение ясно из рис. 66.

111. Так как асимптоты суть касательные к гиперболе в бесконечно удаленных точках  $S, S'$ , то точки пересечения их  $M, M'$  с переменной касательной описывают на них проективные ряды, причем бесконечно

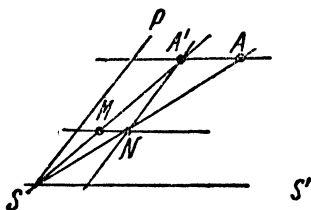


Рис. 66.

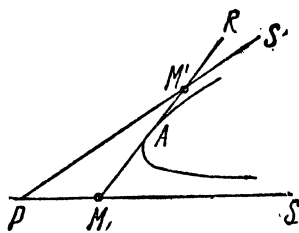


Рис. 67.

удаленной точке каждого ряда соответствует в другом ряде точка пересечения асимптот  $P$  (рис. 67). На основании задачи 74 имеем

поэтому  $PM \cdot PM' = \text{const.}$ , а потому и  $\frac{1}{2} PM \cdot PM' \sin \widehat{SPS'} = \text{const.}$ ,

что и доказывает теорему.

112. Как и предыдущая задача, сводится к теореме 96, 3 и к соотношению задачи 74.

113. Пусть будут  $PQ, PR$  касательные к параболе в конечных точках  $Q, R$  (рис. 68). Переменная касательная пересекает их в соответствующих точках двух проективных рядов, причем точкам  $P, Q$  прямой  $PQ$  соответствуют по порядку точки  $R, P$  прямой  $PR$ . Кроме того, так как бесконечно удаленная прямая есть одна из касательных, то бесконечно удаленные точки прямых  $PQ, PR$  соответствуют друг другу. Отсюда следует, что данная проективность есть подобие, и соответствующие отрезки прямых  $PQ, PR$  пропорциональны. Если  $M, M'$  суть точки пересечения касательных  $PQ, PR$  с какой-нибудь конечной касательной, то  $PM:QM = RM':PM'$ , т. е. отношения  $PM:QM$  и  $PM':RM'$  — числа обратные.

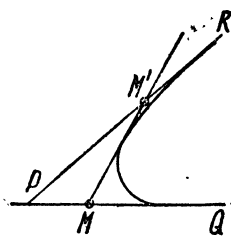


Рис. 68.

114. Пусть будет  $A$  точка касания и  $R$  — бесконечно удаленная точка касательной  $MM'$  на рис. 67. Из рассуждения задачи 96, 5 ясно, что точка  $A$  гармонически сопряжена с точкой  $R$  относительно точек  $M, M'$ , т. е. делит отрезок  $MM'$  пополам.

115. Пусть будут (рис. 69)  $AR$  и  $AQ$  касательная в точке  $A$  и другая прямая, проходящая через точку  $A$ ;  $RQ$  — диаметр, сопряженный с прямой  $AQ$ ;  $S$  — конечная точка пересечения диаметра  $RQ$  с пара-

болой;  $S'$  — бесконечно удаленная точка параболы;  $P$  — бесконечно удаленная точка прямой  $AQ$ . Прямая  $SP$  будет касательной в точке  $S$ , а прямая  $S'P$  будет касательной в точке  $S'$ . Сравнивая полученную фигуру с фигурой задачи 96, 5 (рис. 58), видим, что точки  $Q, R$  гармонически сопряжены относительно точек  $S, S'$ , т. е. симметричны относительно точки  $S$ .

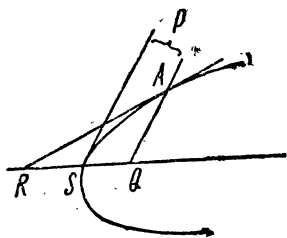


Рис. 69.

рис. 69; проводим  $AQ$  параллельно  $SP$ , откладываем  $SR = QS$ , соединяем  $R$  с  $A$ ; прямая  $AR$  есть искомая касательная

118. На рис. 57 имеем произвольный вписанный треугольник  $ASS'$  и произвольную сопряженную со стороной  $SS'$  прямую  $m_1$ . Точки пересечения  $N, N'$  прямой  $m_1$  со сторонами  $AS, AS'$  треугольника  $ASS'$  сопряжены между собой как диагональные точки вписанного четырехугольника  $SS'AM$ . Таким образом прямая теорема доказана. Обратную теорему докажем от противного. Пусть будут  $N, N'$  две сопряженные между собой точки сторон  $AS, AS'$ . Прямая  $PN$  пересечет сторону  $AS$  в точке  $N_1$ , сопряженной с точкой  $N$ . Если бы точки  $N', N_1$  не совпадали, то точка  $N$  была бы полюсом прямой  $N'N_1 \equiv AS$ . Так как прямая  $AS$  — секущая, то ее полюс не лежит на ней, и прямая, соединяющая его с точкой  $A$ , есть касательная. Между тем прямая, соединяющая точку  $N$  с точкой  $A$ , есть секущая  $AS'$ . Таким образом точка  $N_1$  должна совпадать с точкой  $N$ , т. е. прямая  $NN'$  проходит через точку  $P$ , что и доказывает обратную теорему. Двойственные теоремы можно доказать двойственным рассуждением.

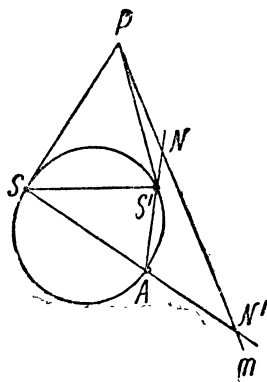


Рис. 71.

116. Построение вытекает из задачи 114. Проводим (рис. 70) через  $A$  линию, параллельную к  $PS$ , до пересечения  $B$  с  $PS'$ , откладываем  $BM' = PB$  и соединим  $M'$  с  $A$ . Прямая  $M'A$  есть искомая касательная.

117. Дан диаметр  $SS'$  и касательная  $SP$ . Построение касательной в точке  $A$  ясно из

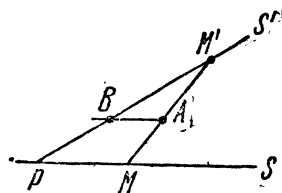


Рис. 70.

рис. 70; проводим  $AQ$  параллельно  $SP$ , откладываем  $SR = QS$ , соединяем  $R$  с  $A$ ; прямая  $AR$  есть искомая касательная

119. Пусть будет  $m$  прямая, не касательная к кривой;  $P$  — какая-нибудь внешняя точка ее;  $SS'$  — полюса точки  $P$ ;  $A$  — переменная точка кривой (рис. 71). Прямая  $m$  не проходит через точки  $S, S'$ ; поэтому, когда точка  $A$  описывает кривую, точки пересечения  $N, N'$  прямой  $m$  с прямыми  $SA, S'A$  описывают на прямой  $m$  ряды, перспективные с пучками  $(SA), (S'A)$ . Так как пучки  $(SA), (S'A)$  проективны, то и ряды  $(N), (N')$  проективны. По теореме Штаудта точки  $N, N'$  сопряженные.

Так как сопряженность есть свойство взаимное, то проективность между рядами  $(N), (N')$  есть инволюция, что и доказывает первую из предложенных теорем.



Поляру всякой точки  $N$  прямой  $m$ , не касательной к кривой, можно построить, соединяя сопряженную точку  $N'$  той же прямой с полюсом этой прямой  $M$ . Когда  $N$  описывает ряд точек на прямой  $m$ ,  $N'$  описывает инволюторный ряд, а  $MN'$  описывает перспективный последнему ряду пучок вокруг точки  $M$ . Таким образом пучок  $(MN')$  проективен ряду  $(N)$ , что доказывает вторую теорему.

Чтобы распространить эту теорему на случай, когда прямая  $m$  касательна к кривой, примем за прямую  $m$  прямую  $SP$  задачи 96,5. Прямая  $SA$  есть поляра точки  $M$ . Когда точка  $M$  описывает ряд на прямой  $SP$ , точка  $U$  описывает проективный ряд, прямая  $S'U \equiv S'A$  описывает пучок, перспективный ряду  $(U)$ , прямая  $SA$  описывает пучок, проективный пучку  $(S'A)$ . Следовательно пучок  $(SA)$  проективен ряду  $(M)$ , что и требовалось доказать.

Двойственные теоремы можно доказать двойственным способом.

**120.** Пусть будут  $S, S'$  две неподвижные точки кривой 2-го порядка;  $M$  — переменная точка ее, и  $N, N'$  — точки пересечения прямых  $SM, S'M$  с какой-нибудь неподвижной прямой  $u$ , не проходящей через точки  $S, S'$ . Когда  $M$  описывает кривую,  $SM, S'M$  описывают проективные пучки, и  $N, N'$  описывают проективные ряды на прямой  $u$ . Двойные точки последней проективности и будут общими точками прямой  $u$  с кривой. Если эти точки вещественны, то очевидно, что их положение не зависит от положения точек  $S, S'$  на кривой. Если же они мнимые, то это требует доказательства. Пусть  $o, x, e$ , — три прямые пучка  $S$ ;  $o', x', e'$  — соответствующие прямые пучка  $S'$ ;  $O, X, E, O', X', E'$  — точки пересечения прямых  $o, x, e, o', x', e'$  с прямой  $u$ . Координаты двойных точек проективности на прямой  $u$  по отношению к системе  $OXE$  суть корни уравнения

$$x^2 - (k + x_{\infty})x + kx_0 = 0, \quad \left( k = \frac{x_1 - x_{\infty}}{x_1 - x_0} \right),$$

где  $x_0, x_{\infty}, x_1$  — координаты точек  $O', X', E'$  по отношению к той же системе. Чтобы выяснить влияние положения прямой  $u$  на координаты двойных точек, заставим прямую  $u$  описывать пучок вокруг какой-нибудь точки  $A$ , оставляя неподвижными прямые  $o, x, e, o', x', e'$ . Точка  $O' \equiv ux'$  будет при этом описывать прямую  $x'$ , и следовательно прямые  $u \equiv AO'$  и  $SO'$  будут описывать перспективные пучки. Координата прямой  $SO'$  в пучке  $S$  будет поэтому дробно-линейной функцией от координаты прямой  $u$  в пучке  $A$ . Последнюю координату обозначим через  $\lambda$ . Что касается первой, то мы определим ее по отношению к системе  $oxe$ :

$$(o, x, SO', e) = (SO, SX, SO', SE) = (O, X, O' E) = x_0.$$

Таким образом  $x_0$  есть дробно-линейная функция от  $\lambda$ . Точно так же найдем, что и  $x_{\infty}, x_1$  суть дробно-линейные функции от  $\lambda$ . Отсюда следует, что уравнение для координат двойных точек проективности на прямой  $u$  имеет вид

$$x^2 + f_1(\lambda)x + \varphi_1(\lambda) = 0,$$

где  $f_1(\lambda), \varphi_1(\lambda)$  — рациональные функции от  $\lambda$ . Заменим теперь точку  $S'$  другой точкой  $S''$ . Проективность на прямой  $u$  изменится и для коорди-

нат ее двойных точек; мы возможно получим другое уравнение того же вида

$$x^2 + f_2(\lambda)x + \varphi_2(\lambda) = 0.$$

Однако, при тех значениях  $\lambda$ , при которых общие точки прямой  $u$  с кривой вещественны, мы должны иметь

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda), \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda),$$

так как в этом случае мы знаем, что двойные элементы проективности на прямой  $u$  не меняются при замене точки  $S'$  точкой  $S''$ . Но таких значений  $\lambda$  — бесчисленное множество, если за точку  $A$  примем какую-нибудь внешнюю точку. Поэтому, так как функции  $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$  рациональны, равенства

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda), \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)$$

имеют место при любом  $\lambda$ . Отсюда следует, что общие точки прямой  $u$  с кривой не изменяются при замене точки  $S'$  точкой  $S''$ , хотя бы они были и мнимыми.

Заметим, что Понселе считал законным перенесение свойств фигур, доказанных для случая, когда некоторые элементы фигур вещественны, также и на тот случай, когда эти элементы становятся мнимыми, если даже примененное доказательство и теряет силу для этого случая (принцип непрерывности Понселе). Вышеприведенное доказательство представляет собой пример строгого проведения этой идеи.

Если теперь за точки  $S, S'$  примем точки пересечения кривой с какой-нибудь секущей, сопряженной с прямой  $u$ , то точки  $N, N'$  будут сопряженными точками, откуда следует, что мнимые точки пересечения кривой с прямой суть двойные точки инволюции сопряженных точек на прямой. Двойственная теорема доказывается двойственными рассуждениями.

121. Это следует из того, что эллипс не имеет вещественных бесконечно удаленных точек.

122. Сопряженные бесконечно удаленные точки кривой 2-го порядка суть бесконечно удаленные точки ее сопряженных диаметров. Сопряженные диаметры круга описывают равные пучки, так как они образуют постоянный угол  $90^\circ$ . Поэтому самосопряженные диаметры круга суть изотропные прямые, и самосопряженные бесконечно удаленные точки суть циклические точки.

123. 1. Если  $M$  (рис. 72) есть точка кривой  $K$ , то и точка, симметричная с  $M$  относительно прямой  $p$ , есть точка кривой  $K$ , так как расстояния этой точки от точки  $F$  и прямой  $d$  те же самые, что у точки  $M$ .

2. Точки  $A, B$  делят отрезок  $FQ$  внутренним и внешним образом в отношении  $e$ . Если  $e < 1$ , то  $BF < BQ$ , и точка  $B$  лежит на продолжении отрезка  $FQ$  за точку  $F$ ; поэтому  $F$  лежит между  $A$  и  $B$ , а  $Q$  — не между  $A$  и  $B$ . Если же  $e > 1$ , то  $BQ < BF$ , и точка  $B$  лежит на продолжении отрезка  $FQ$  за точку  $A$ ; тогда точка  $F$  лежит не между точками  $A$  и  $B$ , а  $Q$  — между  $A$  и  $B$ .

3. Из  $MF : MP = AF : AQ$  следует  $MF : AF = MP : AQ$ . Но  $MP : AQ =$

$\equiv MA':AA'$ . Поэтому  $MF:AF \equiv MA':AA'$ . Это показывает, что прямая  $FA'$  есть биссектриса треугольника  $FAM$ . Также докажем, что прямая  $FB'$  есть биссектриса треугольника  $FBM$ .

4. Биссектрисы  $FA', FB'$  углов между прямыми  $AB$  и  $FM$  взаимно перпендикулярны. Поэтому при движении точки  $M$  они описывают равные пучки. Вследствие этого точки  $A', B'$  описывают проективные ряды. Отсюда в свою очередь следует, что прямые  $MA' \equiv AM, MB' \equiv BM$  описывают проективные пучки. Согласно определению Штейнера, заключаем, что точка  $M$  описывает кривую 2-го порядка, проходящую через точки  $A, B$ . Эта кривая не есть парабола, так как ось симметрии  $AB$  пересекает ее в двух конечных точках. Прямая  $d$  не имеет с кривой общих точек, так как точки  $A', B'$  никогда не совпадают. В случае  $e < 1$  эта прямая пересекает ось  $AB$  не между вершинами  $A, B$ , и следовательно кривая не может быть гиперболой, а в случае  $e > 1$  эта прямая пересекает ось  $AB$  между вершинами  $A, B$ , и следовательно кривая не может быть эллипсом. Итак, при  $e < 1$  кривая есть эллипс, а при  $e > 1$  — гипербола.

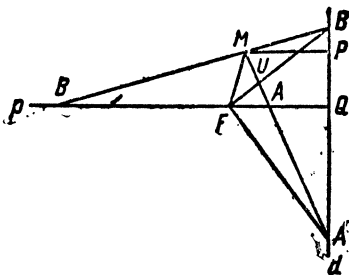


Рис. 72.

5. Предоставляем рассмотрение этого случая читателю.

124. Точки  $A, B$  гармонически сопряжены с точками  $F, Q$ . Поэтому поляр точки  $F$  должна проходить через точку  $Q$ . Кроме того, она сопряжена с прямой  $AB$ , т. е. с осью симметрии, и следовательно перпендикулярна к этой оси. Отсюда видим, что поляр фокуса  $F$  есть директриса  $d$ . Далее, применяя теорему Штаудта к вписанному треугольнику  $ABM$  и прямой  $d$ , находим, что точки  $A', B'$  сопряженные. Поляр точки  $A'$  должна проходить через полюс  $F$  прямой  $d$  и через сопряженную точку  $B'$ . Следовательно поляр точки  $A'$  есть прямая  $FB'$ , и точно также поляр точки  $B'$  есть прямая  $FA'$ .

125. Касательные (рис. 72) из точки  $F$  суть двойные прямые инволюции сопряженных прямых в пучке  $F$ . Так как сопряженные прямые  $FA', FB'$  взаимно перпендикулярны, то касательные суть изотропные прямые.

Докажем теперь обратную теорему. Пусть будет  $F$  такая точка, что касательные из нее суть изотропные прямые. Построим поляр  $d$  точки  $F$  и опустим на нее перпендикуляр  $FQ$  из точки  $F$ . Так как касательные из точки  $F$  — мнимые, то эта точка внутренняя, и всякая прямая, проходящая через нее, есть секущая. Пусть будут  $A, B$  точки пересечения  $FQ$  с кривой и  $M$  — какая-нибудь другая точка кривой. Прямая  $d$  сопряжена со стороной  $AB$  вписанного треугольника  $ABM$  как поляр точки, лежащей на этой стороне. По теореме Штаудта она пересекает остальные стороны  $AM, BM$  в сопряженных точках  $A', B'$ . Отсюда следует, как и выше, что прямая  $FB'$  есть поляр точки  $A'$ . Поэтому точка пересечения  $U$  прямой  $FB'$  с секущей  $AM$ , проходящей через точку  $A'$ , гармонически сопряжена с точкой  $A'$  относительно точек  $A, M$ . Отсюда заключаем, что прямые  $FA', FB' \equiv FU$  гармонически сопряжены с пря-

мыми  $AB \equiv FA, FM$ . Так как кроме того, прямые  $FA', FB'$  суть сопряженные прямые пучка  $F$ , и по условию двойные элементы инволюции, образуемой сопряженными прямыми пучка, суть изотропные прямые, то прямые  $FA', FB'$  взаимно перпендикулярны. Легко убедиться, что прямые, гармонически сопряженные относительно двух взаимно перпендикулярных прямых, одинаково наклонены к ним. Отсюда следует, что прямые  $AB, FM$  одинаково наклонены к прямым  $FA', FB'$ , т. е. что прямые  $FA', FB'$  суть биссектрисы углов между прямыми  $AB, FM$ . По крайней мере одна из точек  $A, B$  должна быть конечной; пусть это будет точка  $A$ . Тогда получим  $MF:AF = MA':AA'$ . Если  $MP$  — перпендикуляр из точки  $M$  на прямую  $d$ , то мы имеем, с другой стороны,  $MP:AQ = MA':AA'$ . Отсюда  $MF:AF = MP:AQ$  и следовательно  $MF:MP = AF:AQ = \text{const.}$  Таким образом точка  $F$  есть фокус, а прямая  $d$  — директриса, что и требовалось доказать.

126. Пусть будут  $SP, S'P$  неподвижные касательные;  $MM'$  — отрезок переменной касательной между ними;  $F$  — фокус (рис. 73). При движении касательной  $MM'$  точки  $M, M'$  описывают проективные ряды и

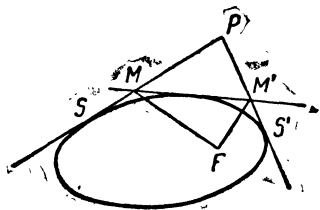


Рис. 73.

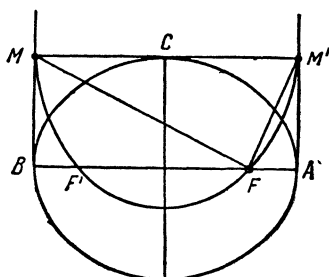


Рис. 74.

прямые  $FM, FM'$  описывают проективные пучки. Двойные прямые проективности между пучками  $(FM), (FM')$  суть касательные из точки  $F$ . Так как эти касательные суть изотропные прямые, то проективность между пучками  $(FM), (FM')$  есть прямое равенство, что и доказывает теорему. Если за неподвижные касательные примем касательные в концах  $A, B$  оси, проходящей через фокус  $F$ , то точка  $F$  будет сопряженная с точкой пересечения касательных  $P$  (рис. 74). По теореме Штаудта прямые  $FM, FM'$ , соединяющие точку  $F$  с двумя другими вершинами треугольника  $PMM'$ , будут сопряженные между собой, а сопряженные прямые пучка  $F$ , как известно, взаимно перпендикулярны; этим можно воспользоваться для построения фокусов. Например в случае эллипса, показанном на чертеже, чтобы найти фокусы, лежащие на оси  $AB$ , можно провести касательную через один из концов  $C$  другой оси, и построить на отрезке  $MM'$  этой касательной между касательными в точках  $A, B$  окружность, как на диаметре. Если  $AB$  есть большая ось, то эта окружность пересечет ее в двух точках  $F, F'$ , и эти точки суть фокусы эллипса. Предоставляем читателю найти подходящие построения для гиперболы и параболы.

127. На рис. 73 отрезки  $SP, PS'$  суть частные положения отрезка  $MM'$ . Следовательно они видны из точки  $F$  под равными углами, что и доказывает предложенную теорему.

128. Рассмотрим например случай эллипса. Пусть будут  $A, B$  концы большой оси;  $F, F'$  — фокусы;  $M$  — какая-нибудь точка эллипса, отличная от  $A, B$ ;  $P$  — точка пересечения касательных в точках  $A$  и  $M$  (рис. 75). По предыдущей теореме прямая  $F'P$  есть внутренняя биссектриса, а прямая  $FP$  — внешняя биссектриса треугольника  $FMF'$ . Поэтому  $MP$  есть внешняя биссектриса того же треугольника, что и доказывает теорему.

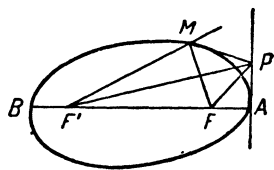


Рис. 75.

129. Рассмотрим например эллипс. Пусть будут  $d, d'$  директрисы, соответствующие фокусам  $F, F'$ , и  $MP, MP'$  — перпендикуляры опущенные на них из произвольной точки эллипса  $M$  (рис. 76). Из  $MF = e \cdot MP$ ,  $MF' = e \cdot MP'$  находим  $MF + MF' = e \cdot PP' = \text{const.}$ , так как  $PP'$  есть расстояние между директрисами.

130. Соединяя две точки  $A, E$  с остальными тремя  $B, C, D$ , получим три пары прямых пучков  $A, E$ . Если примем эти три пары прямых за три пары соответствующих прямых в проективности между пучками  $A, E$ , то полученная проективность не будет перспективной, так как по условию точки  $B, C, D$  не лежат на одной прямой. В пересечении проективных пучков получим поэтому кривую 2-го порядка, и эта кривая проходит через точки  $A, B, C, D, E$ . С этой кривой совпадает всякая кривая 2-го порядка, проходящая через те же точки, так как такая кривая определяется проективностью между пучками  $A, E$ , в которой прямые, соединяющие

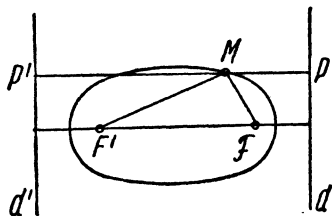


Рис. 76.

точки  $A, E$  с точками  $B, C, D$ , суть три пары соответствующих прямых, т. е. той же проективностью, что и первая кривая.

131. Пересечем проективные пучки  $A(BCD\dots), E(BCD\dots)$  соответственно прямыми  $CD, BC$  (рис. 77). В сечении получим проективные ряды  $(B'CD\dots), (BCD'\dots)$ . Так как точка пересечения  $C$  прямых  $CD, BC$  сама себе соответствует в этой проективности, то ряды  $(B'CD\dots), (BCD'\dots)$  перспективны. Соответствующие точки их лежат на одной прямой с точкой пересечения  $P$  прямых  $BB', DD'$ . Проведем произвольную прямую пучка  $P$  до пересечения  $Q$  с прямой  $BC$ . Точке  $Q$  ряда  $(BCD'\dots)$  соответствует в ряде  $(B'CD\dots)$  точка пересечения  $R$  прямой  $CD$  с прямой  $PQ$ . Прямой  $EQ$  пучка  $E$  соответствует поэтому прямая  $AR$  пучка  $A$ , и точка пересечения  $G$  прямых  $EQ, AR$  есть следовательно вторая точка пересечения прямой  $EQ$  с кривой 2-го порядка.

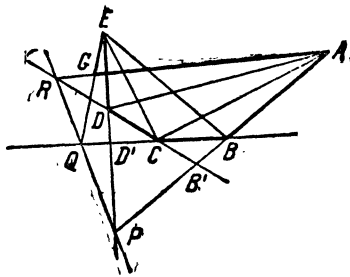


Рис. 77.

132. На рис. 77 точки  $P, Q, R$ , лежащие на одной прямой, суть

соответственно точки пересечения секущих кривой 2-го порядка  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EG$ ,  $CD$  и  $GA$ . Но эти пары секущих суть пары противоположных сторон шестиугольника  $ABCDEG$ , вписанного в кривую 2-го порядка. Так как вершины  $A, B, C, D, E, G$  взяты на кривой 2-го порядка произвольно, то тем самым теорема Паскаля доказана. Теорема Брианшона доказывается двойственным путем.

133. Рассуждения задачи 131 не теряют силы, если  $B$  совпадает с  $A$  при условии, что за прямую  $AB$  мы примем прямую пучка  $A$ , соответствующую прямой  $EB$  пучка  $E$ , т. е. касательную в точке  $A$ . Точно также эти рассуждения остаются в силе, если сверх того точка  $D$  совпадает с точкой  $E$  и за прямую  $D'E$  принята касательная в точке  $E$ . Таким образом теорема Паскаля остается в силе, когда сливаются две вершины, соединенные одной стороной, или две пары вершин, соединенных противоположными сторонами. Но вместо точки  $D$  мы можем и точку  $G$  заставить слиться с точкой  $E$ , проведя прямую  $AR$  через

точку  $E$ , причем прямая  $EG$  заменится тогда касательной в точке  $E$ . Таким образом теорема Паскаля не теряет силы и при слиянии двух пар вершин, соединенных не противоположными сторонами. В случае слияния трех пар вершин рассуждения задачи 131 неприменимы, но теорема Паскаля все же сохраняет силу, так как она обращается в теорему, доказанную в задаче 96, 6. Аналогичные рассуждения можно применить к теореме Брианшона.

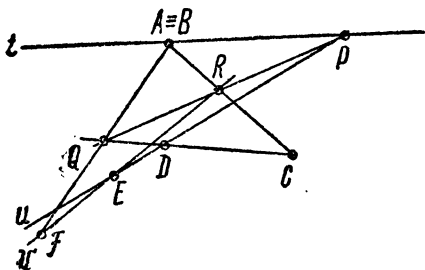


Рис. 78.

134. Рассмотрим для примера построение новых точек по четырем точкам и касательной в одной из них. Обозначим заданную касательную через  $t$  и точку касания через  $A \equiv B$  (рис. 78). Остальные заданные точки обозначим через  $C, D, F$ , а через  $E$  обозначим точку, которую требуется построить. В шестиугольнике Паскаля  $ABCDEF$  нам остаются неизвестными стороны  $DE$  и  $EF$ , но, задав произвольно одну из них, например  $DE \equiv u$ , мы можем построить другую  $EF \equiv v$  с помощью теоремы Паскаля и таким образом найти точку  $E \equiv uv$ . Действительно, мы можем построить точку пересечения  $P$  противоположных сторон  $AB \equiv t$  и  $DE \equiv u$ , затем точку пересечения  $Q$  противоположных сторон  $CD$  и  $FA$ . Тем самым определится прямая Паскаля  $PQ$ . Остальные противоположные стороны  $AC$  и  $EF \equiv v$  должны пересекаться на прямой  $PQ$ . Если  $R$  — точка пересечения  $PQ$  с  $AC$ , то  $FR$  есть искомая сторона  $EF \equiv v$ , и точка пересечения прямых  $u$  и  $v$  есть искомая точка  $E$ .

135. Пусть будет  $ABCD$  четырехугольник, вписанный в кривую 2-го порядка, и  $u$  — прямая, пересекающая кривую в точках  $P, Q$ , стороны  $AB, CD$  — в точках  $H, K$  и стороны  $AD, BC$  — в точках  $L, M$  (рис. 79). Проектируя точки кривой из точек  $A, C$  на прямую  $u$ , получим на прямой  $u$  два проективных ряда точек, причем двойными точками проективности будут точки  $P, Q$ . Отсюда в частности  $(PQHM) = (PQLK)$ , а отсюда  $(PQHM) = (QPKL)$ . Последнее равенство показывает, что  $PQ$ ,

$HK, LM$  суть пары инволюции на прямой  $u$ . Точки пересечения прямой  $u$  с двумя остальными сторонами четырехугольника образуют еще одну пару той же инволюции, как известно из другой теоремы Дезарга, доказанной в задаче 86.

Двойственная теорема такова: если некоторая точка не лежит на сторонах четырехсторонника, описанного около кривой 2-го порядка, то пара касательных, проведенных из этой точки, и пары прямых, соединяющих ее с парами противоположных вершин четырехсторонника, суть пары одной и той же инволюции.

136. 1. Пусть будет  $ABC$  треугольник, вписанный в равнобочную гиперболу, и  $AP$  — одна из его высот (рис. 80). Обозначим через  $H$  вторую точку пересечения прямой  $AP$  с гиперболой, и применим предыдущую теорему к гиперболе, четырехугольнику  $ABCH$  и бесконечно удаленной прямой. Точки пересечения бесконечно удаленной прямой с гиперболой суть бесконечно удаленные точки перпендикулярных направлений, так как асимптоты равнобочной гиперболы перпендикулярны. По построению, точки пересечения бесконечно удаленной прямой с парой противоположных сторон  $AP, BC$  четырехугольника также суть бесконечно удаленные точки перпендикулярных направлений. Эти две пары точек определяют на бесконечно удаленной прямой инволюцию, в которой всякая пара есть пара бесконечно удаленных точек перпендикулярных направлений.

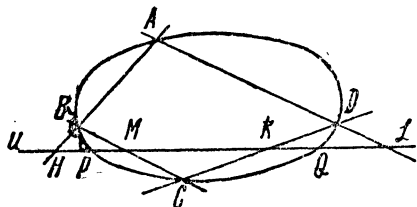


Рис. 79.

Отсюда по предыдущей теореме заключаем, что и противоположные стороны  $BH, CA$  четырехугольника перпендикулярны, т. е., что  $BH$  есть также высота треугольника  $ABC$ , что и доказывает предложенную теорему.

Доказательство теоремы 2 предоставляем читателю.

137. Доказательства предложенных теорем непосредственно вытекают из определений.

138. Предоставляем почти очевидные доказательства читателю.

139. Конус 2-го порядка с конечной вершиной пересекает бесконечно удаленную плоскость по кривой 2-го порядка. Общие точки этой кривой со всякой конечной плоскостью суть бесконечно удаленные точки линии пересечения этой плоскости с конусом. В зависимости от того, будет ли бесконечно удаленная прямая конечной плоскости не проходящей через вершину, секущей, касательной или внешней для бесконечно удаленной кривой конуса, сечение конуса этой плоскостью будет гиперболой, параболой или эллипсом.

140. Бесконечно удаленные точки сечений цилиндра плоскостями, не параллельными образующим, суть точки пересечения этих плоскостей

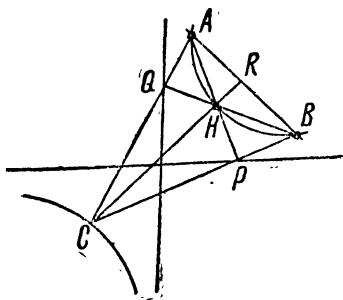


Рис. 80.

с бесконечно удаленными образующими. Если эти образующие вещественные различные, то все сечения суть гиперболы (гиперболический цилиндр), и т. д.

141. 1. Предположим, что линейчатый ряд определен как совокупность прямых  $m$ , пересекающих три скрещивающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Точки пересечения прямых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с прямой  $m$  всегда лежат в плоскости, соединяющей прямую  $c$  с той же прямой  $m$ . При движении прямой  $m$  точки  $am$ ,  $bm$  описывают на прямых  $a$ ,  $b$  ряды, перспективные пучку плоскостей, описываемых плоскостью  $cm$  вокруг оси  $c$ . Таким образом прямая  $m$  всегда соединяет соответствующие точки перспективных рядов на скрещивающихся прямых  $a$ ,  $b$ . Наоборот, если два ряда на скрещивающихся прямых  $a$ ,  $b$  проективны, то согласно задаче 61, 1, они перспективны с пучком плоскостей, за ось которого можно принять любую прямую  $c$ , пересекающую три какие-нибудь прямые, соединяющие три пары соответствующих точек проективных рядов  $a$ ,  $b$ . Любые две соответствующие точки рядов  $a$ ,  $b$  лежат поэтому на одной плоскости пучка  $c$ , и следовательно прямая  $m$ , соединяющая эти точки, пересекает прямую  $c$ . Таким образом прямая  $m$  всегда пересекает три скрещивающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Итак, второе определение линейчатого ряда действительно равносильно первому. Аналогично доказывается, что и третье определение равносильно первому.

2. Направляющая линейчатого ряда пересекает все принадлежащие ему прямые. Но только что было показано, что всякая прямая  $c$ , пересекающая три прямые линейчатого ряда, пересекает их все и следовательно есть направляющая. Таким образом направляющие данного линейчатого ряда образуют второй линейчатый ряд, для которого прямые линейчатого ряда, и притом только эти прямые, служат направляющими, что и требовалось доказать.

142. 1. Одна система образующих есть тот линейчатый ряд, с помощью которого определена линейчатая поверхность. Другая система образующих есть совокупность направляющих этого ряда. Всякая прямая, лежащая на поверхности, принадлежит одной из этих двух систем образующих. Действительно, по определению линейчатой поверхности, всякая точка этой прямой лежит на одной из прямых линейчатого ряда, с помощью которого эта поверхность определена. Следовательно эта прямая либо совпадает с одной из прямых этого линейчатого ряда, либо в каждой своей точке пересекает одну из них и следовательно есть одна из направляющих этого ряда, что и доказывает наше утверждение. Таким образом прямые, лежащие на линейчатой поверхности, действительно распределяются между двумя системами прямолинейных образующих этой поверхности.

2. Действительно, две прямые линейчатого ряда всегда скрещиваются, ибо по определению они пересекают три скрещивающиеся прямые; прямая линейчатого ряда и прямая направляющего ряда пересекаются в силу определения направляющей.

3. Через всякую точку, лежащую на прямой линейчатого ряда, проходит одна направляющая; эта направляющая есть линия пересечения плоскостей, соединяющих эту точку с другими прямыми линейчатого ряда. Во всякой плоскости, проходящей через прямую линейчатого ряда,



лежит одна направляющая; эта направляющая соединяет точки пересечения этой плоскости с другими прямыми линейчатого ряда.

143. Пусть будет  $A$  точка линейчатой поверхности;  $a_1, a_2$  — проходящие через точку  $A$  образующие первой и второй системы;  $a$  — какая-нибудь другая прямая, проходящая через точку  $A$ . Плоскость, соединяющая образующую первой системы  $a_1$  с прямой  $a$ , содержит одну образующую второй системы  $b_2$ , и эта образующая пересекает прямую  $a$  в точке  $B$  линейчатой поверхности. Если бы, кроме точек  $A$  и  $B$ , прямая  $a$  имела с поверхностью еще одну общую точку  $C$ , то проходящая через эту точку образующая  $c_2$  пересекала бы прямую  $a$  и образующую первой системы  $a_1$ , а потому пересекала бы лежащую в одной плоскости с этими прямыми образующую второй системы  $b_2$ , что невозможно. Таким образом кроме точек  $A, B$ , прямая  $a$  не имеет с поверхностью других общих точек. Если прямая  $a$  лежит в плоскости  $a_1 a_2$ , то прямая  $b_2$  совпадает с прямой  $a_2$ , и точка  $B$  совпадает с точкой  $A$ ; прямая  $a$  есть касательная в точке  $A$ . Если же прямая  $a$  пересекает плоскость  $a_1 a_2$ , то прямая  $b_2$  отлична от прямой  $a_2$ , и точка  $B$  отлична от точки  $A$ ; прямая  $a$  есть секущая, пересекающая поверхность в точках  $A, B$ .

144. Пусть будут  $a_1, b_1$  две неподвижные образующие первой системы и  $m_2$  — переменная образующая второй системы (рис. 81). При движении  $m_2$  плоскости  $a_1 m_2, b_1 m_2$  описывают вокруг  $a_1, b_1$  проективные пучки плоскостей. Плоскость, не касательная к поверхности, не проходит через ее образующие, так как всякая плоскость, проходящая через образующую одной системы проходит и через образующую другой системы, и следовательно касательна к поверхности. Пусть будут  $A, B, M$  точки пересечения некоторой плоскости, не касательной к поверхности, с образующими  $a_1, b_1, m_2$ . При движении прямой  $m_2$  прямые  $AM, BM$  описывают пучки прямых, перспективные с пучками плоскостей, описываемыми плоскостями  $a_1 m_2, b_1 m_2$ , и следовательно проективные между собой. Эти пучки прямых не перспективны. В противном случае прямая  $AB$  соответствовала бы сама себе в проективности между пучками прямых  $(AM), (BM)$ , т. е. была бы линией пересечения двух соответствующих плоскостей пучков плоскостей  $(a_1 m_2), (b_1 m_2)$ , т. е. была бы образующей второй системы. Но это невозможно, так как плоскость  $ABM$  по условию не касательная и не может проходить через образующую. Отсюда следует, что точка пересечения  $M$  образующей  $m_2$  с плоскостью  $ABM$  описывает кривую 2-го порядка.

Пусть будут, наоборот,  $A, B$  две неподвижные точки и  $M$  — переменная точка какой-нибудь кривой 2-го порядка. Приведем какие-нибудь скрещивающиеся прямые  $a_1, b_1$ , пересекающие плоскость  $ABM$  в точках  $A, B$ , и заставим точку  $M$  описывать кривую. Тогда пучки прямых  $(AM), (BM)$  будут проективны, вследствие этого будут проективны и перспективные с ними пучки плоскостей  $(a_1 M), (b_1 M)$ , и следовательно совокупность линий пересечения  $m_2$  плоскостей  $a_1 M, b_1 M$  есть одна система образующих некоторой линейчатой поверхности, для кото-

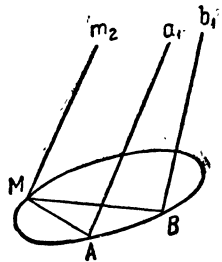


Рис. 81.

рой прямые  $a_1, b_1$  являются образующими другой системы. Кривая  $ABM$  лежит на этой поверхности. Таким образом через всякую кривую 2-го порядка можно провести бесчисленное множество линейчатых поверхностей 2-го порядка.

Вторая часть теоремы доказывается двойственными рассуждениями.

**145. 1.** По определению, бесконечно удаленная плоскость касательна к параболоиду и следовательно проходит через две его образующие, принадлежащие к разным системам. Все конечные образующие одной системы пересекают бесконечно удаленную образующую другой системы, т. е. параллельны всякой плоскости, проходящей через эту бесконечно удаленную образующую.

Напротив, к гиперboloиду бесконечно удаленная плоскость не касательна и следовательно пересекает его по бесконечно удаленной кривой 2-го порядка. Если бы какие-нибудь три образующие одной системы были параллельны одной плоскости, то их бесконечно удаленные точки лежали бы на одной бесконечно удаленной прямой. Но это невозможно, так как эти точки лежат на бесконечно удаленной кривой 2-го порядка, а кривая 2-го порядка не может иметь с прямой более двух общих точек.

**2.** Конечная плоскость может иметь с бесконечно удаленной кривой 2-го порядка гиперboloида две, одну, или ни одной общей точки. Если эта плоскость не касательна к гиперboloиду, то она пересекает его по кривой 2-го порядка, которая будет иметь две, одну, или ни одной бесконечно удаленной точки, т. е. будет гиперболой, параболой или эллипсом. В случае параболоида мы имеем вместо бесконечно удаленной кривой пару пересекающихся бесконечно удаленных прямых. Конечная плоскость пересекает их либо в различных точках, либо в общей точке. Если эта плоскость не касательная, то линия пересечения ее с параболоидом будет либо гиперболой, либо параболой. Касательная плоскость пересекает как гиперboloид, так и параболоид по паре пересекающихся прямых.

**3.** В случае параболоида одна из образующих первой системы — бесконечно удаленная. Поэтому в проективности между рядами на двух образующих второй системы бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу, откуда следует, что эта проективность есть подобие или равенство. В случае гиперboloида все образующие первой системы конечные, и та же самая проективность не может быть ни подобием, ни равенством.

**4.** Всякая образующая гиперboloида содержит одну бесконечно удаленную точку; через эту точку проходит определенная образующая другой системы. Всякая конечная образующая параболоида также содержит одну бесконечно удаленную точку, но образующая другой системы, проходящая через эту точку, бесконечно удаленная, так что все конечные образующие второй системы пересекают образующую первой системы в конечной точке. Что касается образующих одной системы, то они совсем не пересекаются.

**146.** Пусть будет  $a$  неподвижная прямая и  $m$  — вращающаяся прямая (рис. 82). Всякая точка прямой  $m$  описывает окружность в плоскости, перпендикулярной прямой  $a$  и с центром на прямой  $a$ , так как

по условию прямая  $m$  не пересекает прямой  $a$ . Плоскости окружностей, описываемых различными точками прямой  $m$ , различные, так как по условию прямая  $m$  не перпендикулярна к прямой  $a$ . Покажем, что два положения  $m_1, m_2$  прямой  $m$  всегда скрещиваются. Предположим, напротив, что они лежат в одной плоскости. Тогда хорды  $M_1M_2, M_1'M_2', \dots$  различных параллельных кругов  $O, O', \dots$ , заключенные между прямыми  $m_1, m_2$ , будут параллельны. Вследствие этого перпендикуляры  $OP, O'P', \dots$ , опущенные на эти хорды из центров, также будут параллельны. Так как углы  $M_1OM_2, M_1'O'M_2', \dots$  равны, то равны и их половины  $POM_2, P'O'M_2', \dots$ . Поэтому будут параллельны и прямые  $OM_2, O'M_2', \dots$ . Но тогда прямая  $m_2$  будет в одной плоскости с прямой  $a$ , вопреки условию. Следовательно прямые  $m_1, m_2$  действительно скрещиваются.

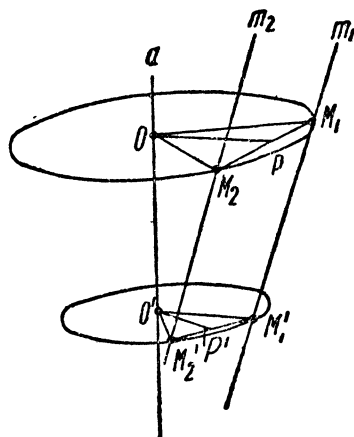


Рис. 82.

Как всякая поверхность вращения, рассматриваемая поверхность симметрична относительно всякой плоскости, проходящей через ось вращения. Поэтому если  $\alpha$  одна из таких плоскостей, то, кроме системы прямых ( $m$ ), поверхность содержит и систему прямых ( $n$ ), симметричную с системой ( $m$ ) относительно плоскости ( $\alpha$ ).

Пусть будет  $n_1$  одна из прямых системы ( $n$ ) и  $m_1$  — прямая системы ( $m$ ), симметричная с нею относительно плоскости  $\alpha$  (рис. 83). Произвольной

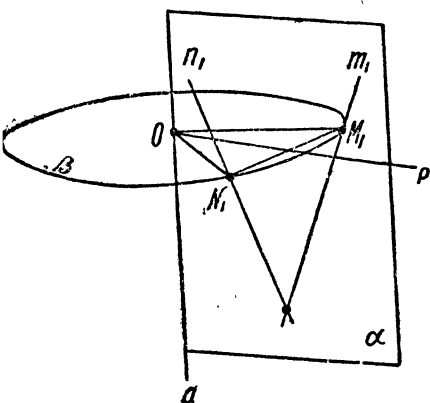


Рис. 83.

точке  $N_1$  прямой  $n_1$  соответствует точка  $M_1$  прямой  $m_1$ , симметричная с точкой  $N_1$  относительно линии пересечения  $p$  плоскости  $\alpha$  с плоскостью  $\beta$ , проведенной через точку  $N_1$  перпендикулярно к прямой  $a$ . Если заставим плоскость  $\alpha$  вращаться вокруг прямой  $a$ , оставляя прямую  $n_1$  неподвижной, то прямая  $p$  будет вращаться в плоскости  $\beta$  вокруг точки пересечения ее  $O$  с прямой  $a$ , и точка  $M_1$  будет описывать окружность в плоскости  $\beta$  с центром  $O$ . Так как это относится к любой точке  $M_1$  прямой  $m_1$ , то мы видим, что прямая  $m_1$  будет вращаться вокруг прямой  $a$ , т. е. будет описывать систему прямых ( $m$ ). При этом она все время будет пересекаться с неподвижной прямой  $n_1$  на вращающейся плоскости  $\alpha$ , так как две прямые, симметричные относительно плоскости, всегда пересекают эту плоскость в одной и той же точке, конечной или бесконечно удаленной. Таким образом всякая прямая системы ( $n$ ) пере-

секает всякую прямую системы ( $m$ ). Так как эти системы состоят из скрещивающихся прямых, то они представляют собой линейчатые ряды, откуда следует, что рассматриваемая поверхность есть линейчатая поверхность 2-го порядка. Ясно, что эта поверхность есть гиперboloид, так как все образующие конечны.

147. Пусть будет  $AA'BB'CC'$  шестиугольник, вписанный в кривую 2-го порядка. Проведем через эту кривую какую-нибудь линейчатую поверхность 2-го порядка, и на этой поверхности проведем через вершины  $A, B, C$  образующие одной системы  $a, b, c$ , а через вершины  $A', B', C'$  — образующие другой системы  $a', b', c'$ . Так как образующие разных систем всегда пересекаются, то образующие  $a, a', b, b', c, c'$  будут последовательными сторонами неплоского шестиугольника. Каждая сторона неплоского шестиугольника пересекается, кроме соседних сторон, еще с противоположной стороной, что дает еще три точки пересечения  $C_1 \equiv ab', A_1 \equiv bc', B_1 \equiv ca'$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  образуют треугольник.

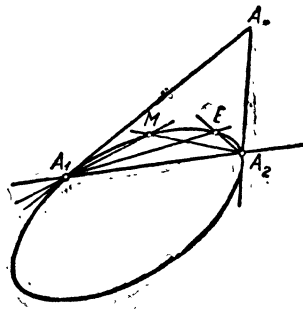


Рис. 84.

Действительно, если бы эти точки лежали на одной прямой, то эта прямая пересекала бы три образующие каждой системы, что невозможно, так как прямая пересекающая три образующие одной системы, совпадает с одной из образующих другой системы и скрещивается со всеми остальными. Покажем, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника  $AA'BB'CC'$  лежат каждая на одной из сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ . Возьмем например стороны  $AA', B'C$ . Через эти стороны проходят плоскости  $aa', b'c$ , линия пересечения которых содержит, кроме точки пересечения  $P$  сторон  $AA', B'C$ , также и

вершины  $C_1 \equiv ab', B_1 \equiv a'c$  треугольника  $A_1B_1C_1$ . Мы видим, что сторона  $B_1C_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  проходит через точку пересечения  $P$  сторон  $AA', B'C$  шестиугольника  $AA'BB'CC'$ .

Также убедимся, что  $A_1B_1$  проходит через точку пересечения  $Q$  прямых  $A'B, CC'$ , и что  $C_1A_1$  проходит через точку пересечения  $R$  прямых  $BB', C'A$ . Таким образом каждая из точек  $P, Q, R$  действительно лежит на одной из сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ . Отсюда непосредственно следует, что точки  $P, Q, R$  лежат на одной прямой, а именно на линии пересечения плоскости шестиугольника  $AA'BB'CC'$  и плоскости треугольника  $A_1B_1C_1$ .

148. Выбрав обозначения, как показано на рис. 84, имеем:

$$A_1(A_2A_3ME) = A_2(A_3A_1ME),$$

так как в проективности, создаваемой кривою 2-го порядка между пучками  $A_1, A_2$ , прямым  $A_1A_2, A_1A_3, A_1M, A_1E$  пучка  $A_1$  соответствуют по порядку прямые  $A_2A_3, A_3A_1, A_2M, A_3E$ . Полученное равенство можно переписать в виде

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

или

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

Теперь выясним влияние на это уравнение изменения в положении единичной точки  $E$ . Однородные координаты точки  $M$  равны или пропорциональны числам:

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad x_3 = \frac{p_3}{q_3},$$

где  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  суть расстояния точек  $M$  и  $E$  от сторон  $A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2$  координатного треугольника  $A_1A_2A_3$ . Если заменим точку  $E$  точкой  $E'$ , то получим:

$$x_1' = \frac{p_1}{q_1'}, \quad x_2' = \frac{p_2}{q_2'}, \quad x_3' = \frac{p_3}{q_3'},$$

откуда

$$x_1 = \frac{q_1'}{q_1} x_1', \quad x_2 = \frac{q_2'}{q_2} x_2', \quad x_3 = \frac{q_3'}{q_3} x_3',$$

$$x_1' = \frac{q_1}{q_1'} x_1, \quad x_2' = \frac{q_2}{q_2'} x_2, \quad x_3' = \frac{q_3}{q_3'} x_3.$$

Таким образом изменение положения единичной точки приводит лишь к умножению координат на постоянные множители. Множители эти не равны, так как пропорции

$$q_1 : q_1' = q_2 : q_2' = q_3 : q_3'$$

имеют место одновременно только когда точки  $E, E'$  совпадают. Обозначив для краткости

$$\frac{q_1'}{q_1} = a_1, \quad \frac{q_2'}{q_2} = a_2, \quad \frac{q_3'}{q_3} = a_3,$$

получим

$$x_1 = a_1 x_1'; \quad x_2 = a_2 x_2'; \quad x_3 = a_3 x_3'.$$

Подставляя эти выражения в первоначальное уравнение кривой, получим новое уравнение

$$a_1 a_2 x_1' x_2' - a_3^2 x_3'^2 = 0,$$

которое после сокращения на  $a_1 a_2$  или  $a_3^2$  можно написать в одном из видов

$$x_1' x_2' = k x_3'^2; \quad x_3'^2 = k x_1' x_2'.$$

Здесь  $k = 1$ , если  $a_1 a_2 = a_3^2$ . Геометрически это условие обозначает, что точка  $E'$  лежит на кривой, как и точка  $E$ , ибо  $a_1, a_2, a_3$  суть очевидно координаты точки  $E'$  по отношению к первоначальной системе координат. Если же точка  $E'$  не лежит на кривой, то  $k \neq 1$ .

Если кривая есть гипербола и  $A_3A_1, A_3A_2$  — ее асимптоты, то, приняв эти асимптоты соответственно за оси  $OX, OY$ , получим:

$$x = \frac{x_1'}{x_3'}; \quad y = \frac{x_2'}{x_3'}.$$

Деля уравнение  $x_1'x_2' = kx_3'^2$  на  $x_3'^2$ , приведем его к виду

$$xy = k.$$

Если кривая есть парабола с конечной касательной  $A_1A_3$  и диаметром  $A_1A_2$ , то, приняв эти прямые соответственно за оси  $OY, OX$ , получим:

$$x = \frac{x_2'}{x_1'}; \quad y = \frac{x_3'}{x_1'},$$

после чего уравнение  $x_3'^2 = kx_1'x_2'$  приведет к виду

$$y^2 = kx.$$

149. Из трех попарно сопряженных точек всегда одна будет внутренней, а две другие внешними. Действительно, одна из точек будет либо внутренней, либо внешней. Если она внутренняя, то ее полярна есть внешняя прямая, и все точки, сопряженные с нею, — внешние. Если же эта точка внешняя, то ее полярна есть секущая прямая, и точки, сопряженные с нею, частью внутренние, частью внешние, но из двух точек этой полярны, сопряженных между собой, непременно одна внутренняя, одна внешняя. В обоих случаях имеется, таким образом, одна внутренняя точка и две внешних.

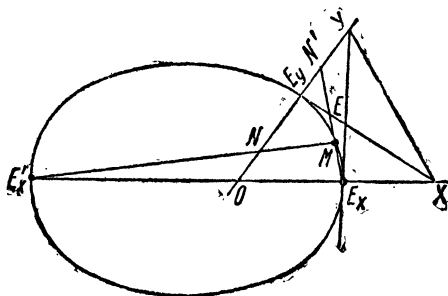


Рис. 85.

Пусть будут  $O, X, Y$  три попарно сопряженные точки, причем  $O$  — внутренняя точка;  $E_x, E_x'$  — точки пересечения кривой с прямой  $OX$ ;  $E_y$  — одна из точек пересечения кривой с прямой  $OY$ ;  $E$  — точка пересечения прямых  $YE_x, XE_y$  (рис. 85). Применим сначала неоднородные координаты по отношению к системе  $OXYE$ . Прямая  $OY$  сопряжена с прямой  $E_xE_x' \equiv OX$ . По теореме Штаудта отсюда следует, что точки пересечения  $N, N'$  прямых  $E_xM, E_x'M$  с прямой  $OY$  — сопряженные. Выразим их координаты через координаты  $x, y$  точки  $M$ . Координаты точки  $E_x$  суть  $1, 0$ , а координаты точки  $E_x'$ , гармонически сопряженной с нею относительно точек  $O, X$ , суть  $-1, 0$ . Поэтому уравнения прямых  $E_xM, E_x'M$  будут соответственно:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{\xi - 1}{x - 1}, \quad \frac{\eta}{y} = \frac{\xi + 1}{x + 1},$$

где через  $\xi, \eta$  обозначены текущие координаты. Отсюда следует, что вторые координаты точек  $N, N'$  будут:

$$(OYNE_x) = -\frac{y}{x-1}; \quad (OYN'E_x) = \frac{y}{x+1}.$$

Теперь воспользуемся тем, что сопряженные точки на прямой  $OY$

образуют инволюцию. В этой инволюции точка  $E_x$  есть двойная точка и пары точек  $OY, NN'$  суть пары соответствующих точек. Отсюда

$$(OYNE_x) = (YON'E_x) = 1 : (OYN'E_x)$$

или

$$-\frac{y}{x-1} = \frac{x+1}{y},$$

откуда

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Переходя к однородным координатам, выберем обозначения например так, чтобы прямые  $OY, OX, XY$  имели соответственно уравнения  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Тогда

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

и полученное уравнение кривой примет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

При произвольном положении точки  $E$  уравнение будет, как видно из предыдущей задачи,

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 - a_3^2 x_3^2 = 0.$$

Если прямая  $XY$  бесконечно удаленная, то кривая есть эллипс, и прямые  $OX, OY$  суть сопряженные диаметры его.

Уравнение эллипса по отношению к этим сопряженным диаметрам получим, деля предыдущее уравнение на  $x_3^2$  и полагая, как и прежде,

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

В результате получим уравнение

$$a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2 = a_3^2,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

если положим

$$\frac{a_3}{a_1} = a; \quad \frac{a_3}{a_2} = b.$$

Если прямая  $OY$  бесконечно удаленная, то кривая есть гипербола, и прямые  $OX, XY$  суть сопряженные диаметры ее. Уравнение гиперболы по отношению к этим сопряженным диаметрам получим, деля однородное уравнение на  $x_1^2$  и полагая например

$$x = \frac{x_2}{x_1}; \quad y = \frac{x_3}{x_1}.$$

Получим уравнение

$$a_3^2 x^2 - a_2^2 y^2 = a_1^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

если положим

$$\frac{a_1}{a_3} = a; \quad \frac{a_1}{a_2} = b.$$

**150.** Примем за ребра  $A_1A_2$ ,  $A_3A_4$  координатного тетраэдра две образующие линейчатой поверхности 2-го порядка, принадлежащие к одной системе; за ребра  $A_1A_3$ ,  $A_2A_4$  — две образующие другой системы; за единичную точку  $E$  — какую-нибудь точку линейчатой поверхности, отличную от вершин  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  (рис. 86). Если  $M$  — произвольная точка поверхности, то в силу проективности пучков плоскостей, соединяющих образующие одной из систем  $A_1A_2$ ,  $A_3A_4$  с переменной образующей другой системы, будем иметь:

$$A_1A_2(A_3A_4ME) = A_3A_4(A_1A_2ME),$$

или

$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{x_2}{x_1},$$

или

$$x_2x_3 = x_1x_4.$$

При произвольном выборе единичной точки будем иметь

$$x_2x_3 = kx_1x_4.$$

Рис. 86.

Если поверхность есть параболоид и  $A_2A_4$ ,  $A_3A_4$  — его бесконечно удаленные образующие, то, деля это уравнение на  $x_1^2$  и полагая

$$\frac{x_2}{x_1} = x; \quad \frac{x_3}{x_1} = y; \quad \frac{x_4}{x_1} = z,$$

получим уравнение

$$xy = kz,$$

отнесенное к системе осей  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_1A_4$ , упомянутых в условии.

## ГЛАВА V.

**151.** Пусть будут  $O$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $E$  заданные точки, и примем  $OXYE$  за систему отсчета. Всегда можно спроектировать заданную плоскость на другую плоскость так, чтобы точки  $X$ ,  $Y$  стали бесконечно удаленными. Тогда на плоскости проекции получим декартову систему отсчета  $OXY$ , вообще говоря, косоугольную и с неравными единицами измерения  $OE_x$ ,  $OE_y$  на осях. Всякая точка сохраняет в проекции прежние координаты. Построение точек с рациональными координатами можно вести сначала



в проекции, а затем перенести его на первоначальную плоскость. Сначала строим в проекции точки с целыми координатами (рис. 87, а). Проводим прямые  $EY$ ,  $EX$ , т. е. параллельные к осям  $OY$ ,  $OX$ , до пересечения в точках  $E_x$ ,  $E_y$  с осями  $OX$ ,  $OY$ . Затем проводим прямую  $E_xE_y$ , затем параллельную ей через точку  $E$ , т. е. прямую  $EZ$ , где  $Z$  — бесконечно удаленная точка прямой  $E_xE_y$ . Далее, проведя через точки пересечения  $A_2$ ,  $B_2$  прямой  $EZ$  с осями  $OX$ ,  $OY$  прямые, параллельные осям  $OY$ ,  $OX$ , до пересечений  $C_{21}$ ,  $C_{12}$  с прямыми  $E_yX$ ,  $E_xY$ , убедимся, что эти точки лежат на одной прямой с точкой  $Z$ . Проведя эту прямую, получим точки  $A_3$ ,  $B_3$  и сможем продолжать построение таким же образом. Этим путем можно получить все точки с целыми положительными координатами. Но можно вести построение и в обрат-

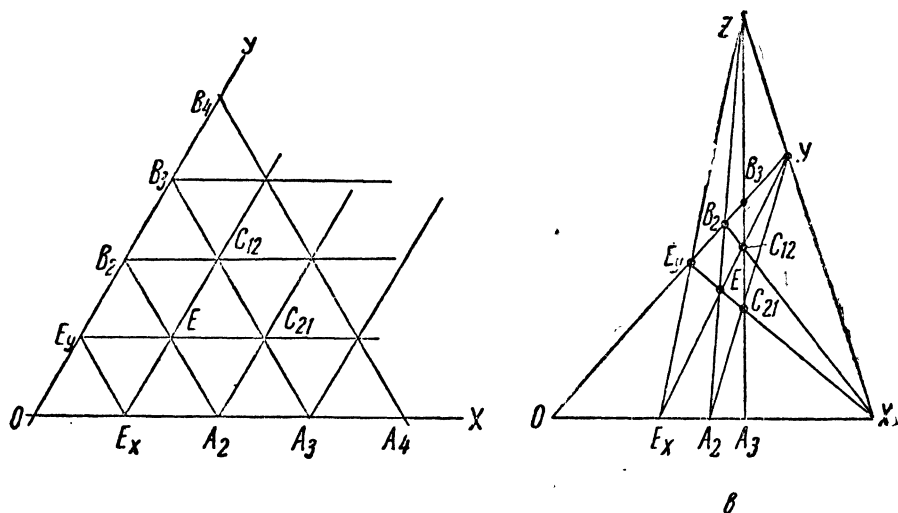


Рис. 87.

ную сторону, поменяв роли точек  $O$  и  $E$ . Начать придется с проведения прямой  $OZ$ , т. е. параллельной к прямой  $E_xE_y$  через точку  $O$ . Тогда получим, в дополнение к уже построенным, все остальные точки с целыми координатами. Построение очевидным образом переносится на первоначальную плоскость (рис. 87, б).

Теперь построим прямую  $x = \frac{1}{n}$ , где  $n$  — целое число, большее единицы. Построение показано на рис. 88а и б, и правильность его ясна из рис. 88а. Таким же образом можно построить прямую  $y = \frac{1}{n}$ . В пересечении получим точку  $C_{11}$ ,  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ . Поступая с этой точкой так, как ранее поступали с точкой  $E$  для построения точек с целыми координатами, построим все точки с рациональными координатами вида  $\frac{p}{n}, \frac{q}{n}$ . Таким путем можно построить все вообще точки с рациональными координатами.

тами. Что касается прямых с рациональными координатами  $u = \frac{p}{n}$ ,  $v = \frac{q}{m}$ , т. е. прямых с уравнением вида  $\frac{p}{n}x + \frac{q}{m}y + 1 = 0$ , то такую прямую можно построить, соединяя точки  $(-\frac{n}{p}, 0)$ ,  $(0, -\frac{m}{q})$ . Сюда не входят пока точки и прямые, у которых обе координаты бесконечны, т. е. точки прямой  $XU$  и прямые пучка  $O$ . Уравнение прямой пучка  $O$  с рациональным отношением координат  $\frac{u}{v} = \frac{m}{n}$  будет  $\frac{m}{n}x + y = 0$ . Эту прямую можно построить, соединяя точку  $O$  с точкой  $(1, -\frac{m}{n})$ . В пересечении с прямой  $XU$ , эта прямая дает точку с от-

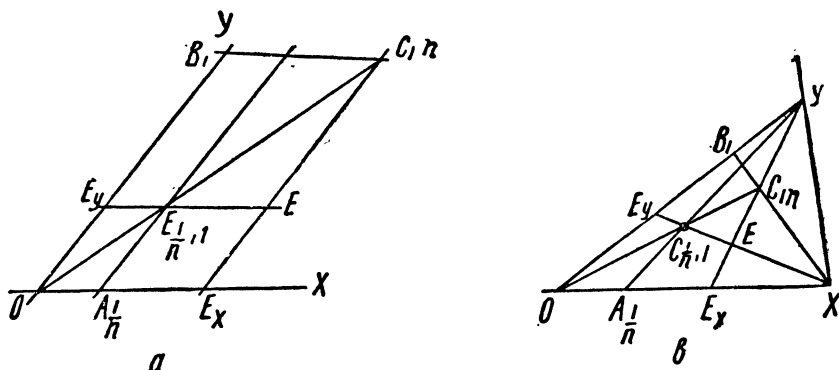


Рис. 88.

ношением координат  $\frac{y}{x} = -\frac{m}{n}$ . Итак, все точки и прямые с рациональными координатами или отношениями координат действительно входят в сеть Мёбиуса.

Остается доказать, что никаких других точек и прямых сеть Мёбиуса не содержит. Для этого удобнее применить однородные координаты. За однородные координаты точки  $x = \frac{p}{n}$ ,  $y = \frac{q}{n}$  можно принять целые числа  $x_1 = p$ ,  $x_2 = q$ ,  $x_3 = n$  или другие целые числа, пропорциональные им. За однородные координаты точки  $x = y = \infty$ ,  $\frac{y}{x} = \frac{m}{n}$  можно принять целые числа  $x_1 = n$ ,  $x_2 = m$ ,  $x_3 = 0$  или пропорциональные им. Аналогично можно задать однородные координаты рациональных прямых. Теперь, прямая, соединяющая точки  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$ , будет  $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ . Отсюда видно, что прямая, соединяющая рациональные точки, есть рациональная прямая. Также убедимся, что точка пересечения рациональных прямых есть рациональная

точка. Исходными точками в построении сети Мёбиуса служат рациональные точки  $O(0, 0, 1)$ ,  $X(0, 1, 0)$ ,  $Y(1, 0, 0)$ ,  $E(1, 1, 1)$ . Отсюда ясно, что все точки и прямые сети — рациональные.

152. На рис. 87а и б точка  $A_2$  гармонически сопряжена с точкой  $O$  относительно точек  $E_x, X$ , точка  $A_3$  гармонически сопряжена с точкой  $E_x$  относительно точек  $A_2, X$ , и т. д. На рис. 87а это видно из того, что точка  $A_3$  симметрична с точкой  $O$  относительно точки  $E_x$ , точка  $A_3$  симметрична с точкой  $E_x$  относительно точки  $A_2$ , и т. д. На рис. 87б то же самое видно из полных четырехугольников  $ZYEE_y$ ,  $ZYC_{21}E$ , и т. д. Таким образом точки оси абсцисс, координаты которых относительно системы отсчета  $OXE_x$  суть целые числа, можно построить, исходя из точек  $O, X, E_x$  с помощью последовательных построений четвертых гармонических. Далее, точку  $A_{\frac{1}{n}}$  можно было

бы построить как гармонически сопряженную с точкой  $A_n$  относительно точек  $E_x \equiv A_1$  и  $A_{-1}$ . Это видно из того, что координаты этих точек  $x = n$ ,  $x' = \frac{1}{n}$  связаны уравнением  $xx' = 1$ , т. е образуют пару инволюции с двойными точками  $E_x = A_1$  и  $A_{-1}$ . После этого точку  $A_{\frac{m}{n}}$  можно построить по точкам  $O, X, A_{\frac{1}{n}}$  так же, как

точка  $A_m$  была построена по точкам  $O, X, E_x \equiv A_1$ . Таким образом построение последовательных четвертых гармонических действительно позволяет построить все точки с рациональными координатами относительно системы отсчета  $OXE_x$ , исходя из самих точек  $O, X, E_x$ . Легко проверить вычислением, что четвертая гармоническая к трем рациональным точкам есть рациональная точка. Отсюда следует, что иррациональных точек данным построением получить нельзя.

153. Для построения точки  $D$ , гармонически сопряженной с точкой  $C$  относительно точек  $A, B$ , точки  $A, B$  принимаются за противоположные вершины какого-нибудь четырехсторонника, точка  $C$  принимается за одну из диагональных точек, лежащих на прямой  $AB$ , а за точку  $D$  принимается вторая диагональная точка, лежащая на той же прямой. Требуется доказать, что положение точки  $D$  не зависит от выбора четырехсторонника. Рассмотрим два четырехсторонника с общими вершинами  $A, B$  и диагональной точкой  $C$ . Пусть будут  $H, K, L, M$  и  $H', K', L', M'$  остальные вершины этих четырехсторонников, как показано на рис. 89. Требуется доказать, что прямые  $HL, H'L'$  пересекают прямую  $AB$  в одной и той же точке. Применяя теорему Дезарга к треугольникам  $HKM, H'K'M'$ , найдем, что прямые  $HH', KK', MM'$  должны пересекаться в одной точке  $S$ . Применяя ту же теорему к треугольникам  $LKM, L'K'M'$ , найдем, что и прямые  $LL', KK', MM'$  должны пересе-

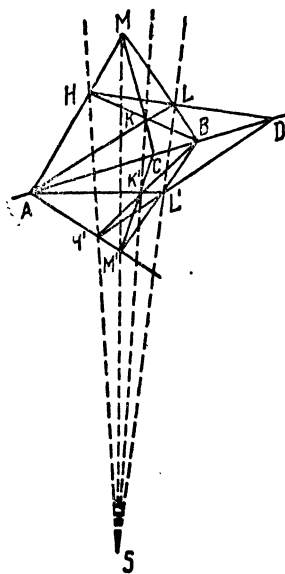


Рис. 89.

противоположных сторон четырехугольника  $HM$ ,  $KL$  и точка пересечения  $C$  противоположных сторон четырехугольника  $HK$ ,  $LM$  суть две противоположные вершины четырехсторонника, а точки пересечения  $B$ ,  $D$  диагоналей четырехугольника  $HL$ ,  $KM$  с прямой  $AC$  суть диагональные точки четырехсторонника, лежащие на его диагонали  $AB$  (рис. 93). В задаче 153 показано чисто проективно, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  вполне определяют точку  $D$ , если принять теорему Дезарга, а в задаче 154 чисто проективно доказана и теорема Дезарга. Таким образом показано чисто проективно, что определение четвертой гармонической по Штаудту однозначно. Что оно совпадает с метрическим определением задачи 14, ясно из того, что метрическое определение приводит к тому же построению четвертой гармонической, что и определение Штаудта.

156. Пусть точкам  $O$ ,  $X$ ,  $E$  ряда  $u$  соответствуют точки  $O'$ ,  $X'$ ,  $E'$  ряда  $u'$ . Точки  $M$ ,  $M'$  рядов  $u$ ,  $u'$ , имеющие равные рациональные координаты  $x = (OXME)$ ,  $x' = (O'X'E'M')$ , можно получить, исходя из

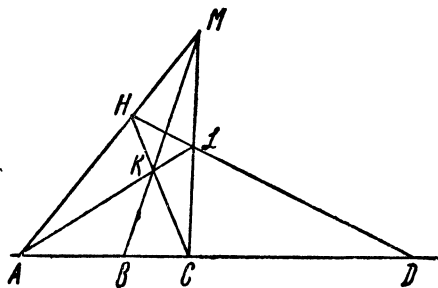


Рис. 93.

точек  $O$ ,  $X$ ,  $E$  и  $O'$ ,  $X'$ ,  $E'$ , с помощью одной и той же цепи построений четвертых гармонических, как это ясно из задачи 152. Таким образом точки  $M$ ,  $M'$  соответствуют друг другу как по старому, так и по новому определению, что и доказывает утверждение задачи.

157. Из определения следует, что простым четырехугольникам одной системы соответствуют простые четырехугольники другой, а потому и гармоническим группам

точек одной системы соответствуют гармонические группы точек другой. Примем за системы отсчета в плоских системах какие-нибудь соответствующие друг другу четырехугольники  $OXYE$ ,  $O'X'Y'E'$ . Точки осей  $OX$ ,  $O'X'$  с равными рациональными абсциссами будут соответствовать друг другу. То же относится к точкам осей  $OY$ ,  $O'Y'$  с равными рациональными ординатами. Отсюда следует, что вообще точки с соответственно равными рациональными координатами будут соответствовать друг другу, что согласно с определением коллинеарности, данным в задаче 62.

158. Для точек  $M$ ,  $M'$  задачи 156 с рациональными абсциссами  $x$ ,  $x'$  имеем  $x = x'$ . Предполагая соответствие непрерывным, мы должны считать точки  $A$ ,  $A'$  с иррациональными абсциссами  $a$ ,  $a'$  соответствующими в том случае, если эти точки суть предельные точки двух последовательностей положений точек  $M$ ,  $M'$ . Но из  $x = x'$  вытекает  $\lim x = \lim x'$ , т. е.  $a = a'$ . Таким образом абсциссы соответствующих точек равны как в случае рациональности их, так и в случае иррациональности, что доказывает полную равносильность обоих определений проективности. Те же рассуждения можно повторить и для случая коллинеарности плоских систем.

159. Докажем некоторые из предложенных теорем.

1. Пусть точки  $A$ ,  $B$  лежат на плоскости  $\alpha$ . Если бы прямая  $AB$  не

лежала на плоскости  $\alpha$ , то на основании I  $d$  она не могла бы иметь с плоскостью  $\alpha$  двух общих точек  $A, B$ .

2. Если бы какая-нибудь общая точка двух плоскостей не лежала на линии пересечения их, то на основании I  $b$  эти плоскости совпадали бы.

3. Пусть будут  $A, B, C$  три точки, не лежащие на одной прямой. Тогда точка  $A$  не лежит на прямой  $BC$ . На основании I  $b$  через  $A$  и  $BC$  проходит только одна плоскость. На основании принятых определений эта плоскость проходит через точки  $A, B, C$ . Наоборот, всякая плоскость, проходящая через  $A, B, C$ , проходит на основании доказанной теоремы 1 через  $A$  и  $BC$  и следовательно совпадает с найденной уже плоскостью.

5. Согласно принятому допущению, пространство содержит по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости или на одной прямой. Соединим какую-нибудь прямую с теми из этих точек, которые не лежат на ней. Получим по крайней мере две различные плоскости, так как в противном случае все четыре точки лежали бы в одной плоскости.

7. Пусть прямые  $a, b$  проходят через точку  $C$ . Согласно сделанному допущению, прямая  $a$  содержит, кроме точки  $C$ , еще по крайней мере одну точку  $A$ . Соединяя точку  $A$  с прямой  $b$ , получим плоскость, содержащую также и прямую  $a$ .

Теоремы 4, 6, 8 доказываются двойственно с теоремами 3, 5, 7.

**160.** Докажем часть теорем.

1. Если прямые  $a, b$  параллельны прямой  $c$ , то они пересекают бесконечно удаленную плоскость в той же точке, что и прямая  $c$ . Следовательно прямые  $a, b$  пересекают бесконечно удаленную плоскость в одной и той же точке, а потому они параллельны.

5. Пусть плоскости  $\alpha, \beta$  параллельны прямым  $b, c$ , а прямые  $b, c$  не параллельны между собой. Тогда прямые  $b, c$  пересекают бесконечно удаленную плоскость в двух различных точках  $B, C$ , а плоскости  $\alpha, \beta$  пересекают бесконечно удаленную плоскость по прямым, проходящим через точки  $B, C$ , т. е. по одной и той же прямой  $BC$ . Таким образом плоскости  $\alpha, \beta$  параллельны.

**161.** 1. В задаче 159 было допущено, что прямая содержит по крайней мере две точки  $A, B$ . На основании II  $a$  эти точки определяют два открытых отрезка  $AB$ , каждый из которых содержит по крайней мере по одной точке. Пусть будет  $C$  точка одного из отрезков  $AB$ . На основании II  $b$  точки отрезка  $AB$ , отличные от точки  $C$ , распределяются между определенными открытыми отрезками  $AC, CB$ , и на основании II  $a$  каждый из них содержит по крайней мере одну точку. Пусть будет  $D$  точка отрезка  $AC$ . Прочие точки отрезка  $AC$  распределяются между отрезками  $AD, DC$ . Пусть будет  $E$  точка отрезка  $AD$ , и т. д. до бесконечности.

2. По отношению к двум точкам  $A, B$  прочие точки распределяются между двумя открытыми отрезками на основании II  $a$ . Для отличия обозначим эти отрезки через  $AB$  и  $BA$ . Добавим третью точку  $C$ . На основании II  $a$ , она принадлежит одному из отрезков  $AB, BA$ , например отрезку  $AB$ . На основании II  $b$  точки отрезка  $AB$ , отличные от точки  $C$ , распределяются между определенными открытыми отрезками  $AC, CB$ . Таким

образом точки прямой, отличные от  $A, B, C$ , распределились между определенными открытыми отрезками  $AC, CB, BA$ . Процесс можно продолжать безгранично, добавляя новые точки.

3. Пусть будут  $a, b$  две прямые пучка прямых и  $A, B$  — точки пересечения их с какой-нибудь прямой плоскости  $ab$ , не проходящей через точку  $ab$ . Так как прямые пучка, проходящие через различные точки секущей, различны, то при распределении точек секущей на два класса, проходящие через эти точки прямые пучка также распределяются на два класса. В частности отрезкам  $AB$  соответствуют два класса  $ab$ , которые можно назвать отрезками пучка или плоскими углами. Распределение прямых пучка между этими углами вполне определяется сторонами углов  $a, b$  и не зависит от положения секущей  $AB$ . Действительно, если  $A'B'$  — другая секущая, то согласно II с точки каждого из отрезков проектируются прямыми одного из углов  $ab$  на один из отрезков  $A'B'$ , так что мы могли бы получить этот угол  $ab$  из отрезка  $A'B'$  вместо отрезка  $AB$ . После этого все сказанное ранее о числе и расположении точек на прямой непосредственно переносится на число и расположение прямых в пучке. Чтобы провести аналогичное доказательство для пучка плоскостей, можно например сначала рассматривать два положения секущей, пересекающиеся между собой, а для двух непересекающихся секущих воспользоваться тем, что всегда можно найти третью секущую, пересекающую их.

162. Пусть будут  $C_1, C_2, \dots, C_n$  —  $n$  различных элементов открытого отрезка  $AB$ . Из предыдущей задачи ясно, что элементы отрезка  $AB$ , отличные от  $C_i$ , распределяются между  $n + 1$  отрезками, которые можно обозначить, при надлежащем выборе нумерации элементов  $C_i$ , через  $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_nB$ , причем элемент  $C_i$  всегда будет принадлежать отрезку  $C_{i-1}C_{i+1}$ , если еще положим  $C_{i-1} \equiv A$  при  $i=1$  и  $C_{i+1} \equiv B$  при  $i=n$ . Если элемент  $M$  вообще может описывать отрезок  $AB$  в последовательности, удовлетворяющей требованиям задачи, то он должен совпадать с элементами  $C_i$  в такой последовательности, чтобы положение  $C_i$  всегда было промежуточным между  $C_{i-1}$  и  $C_{i+1}$ . Это возможно только при двух противоположных между собою последовательностях

$$C_1C_2C_3 \dots C_n$$

и

$$C_nC_{n-1}C_{n-2} \dots C_1.$$

Теперь покажем, что элемент  $M$  действительно может описывать отрезок  $AB$  в соответствии с требованиями, и притом только в двух противоположных направлениях. Действительно, если зададим произвольно последовательность двух каких-нибудь элементов  $C, D$ , то этим определится и последовательность любых двух элементов  $E, F$ , так как элементы  $C, D, E, F$  могут быть расположены только в две противоположные последовательности, удовлетворяющие требованиям задачи, и только при одной из них элементы  $C, D$  будут иметь заданную для них последовательность.

Заданная таким путем последовательность любой пары элементов удовлетворяет определению описывания совокупности переменным элементом,

данному в задаче 162, так как из трех элементов  $C_1, C_2, C_3$ , разбивающих отрезок  $AB$  на отрезки  $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3B$ , только элемент  $C_2$  будет промежуточным между двумя остальными, а из элементов  $C_1, C_3$  один предшествует обоим остальным, а другой следует за обоими остальными.

Полученные таким образом два направления описывания противоположны друг другу, так как при изменении последовательности элементов  $C, D$  меняется очевидно и последовательность любых двух элементов  $E, F$ .

Начального и конечного положения описывающего элемента не существует. Действительно, если  $C$  — какой-нибудь элемент и  $D, E$  — какие-нибудь элементы отрезков  $AC, CB$ , на которые элемент  $C$  разбивает отрезок  $AB$ , то один из элементов  $D, E$  предшествует элементу  $C$ , а другой следует за ним. Следовательно  $C$  не есть ни начальный, ни конечный элемент.

Незначительным видоизменением предыдущего рассуждения получим те же результаты для замкнутого отрезка  $AB$  с той разницей, что в этом случае один из элементов  $A, B$  будет начальным, а другой конечным положением описывающего элемента.

2. За исключением последнего утверждения, эту теорему можно доказать с помощью рассуждений, совершенно аналогичных предыдущим. Докажем только последнее утверждение. Если  $A$  — начальное положение элемента  $M$ , а  $B$  — какое-нибудь другое его положение, то из двух отрезков  $AB$  тот, который описывается раньше, описывается в направлении  $AB$ , а тот, который описывается позже, описывается в направлении  $BA$ . При обратном направлении описывания совокупности меняется последовательность этих отрезков и направление описывания их. Если же за начальное положение примем элемент  $B$  и изменим последовательность отрезков, то направление описывания их не изменится, а при сохранении прежней последовательности отрезков изменится на обратное.

**163.** Три элемента разбивают всю совокупность 1-ой ступени на три отрезка. Направления совокупности, начинающиеся с двух из этих элементов, как легко убедиться, будут согласны между собой тогда и только тогда, когда им соответствуют одинаковые направления всех трех отрезков. Поэтому согласие направлений, начинающихся с двух из этих элементов, с направлением, начинающимся с третьего, равносильно согласию их между собой, что доказывает первое из утверждений задачи.

Пусть будут  $A, B$  начальные элементы двух согласных направлений и  $C_1, C_2, \dots, C_m$  — какие-нибудь элементы одного, а  $D_1, D_2, \dots, D_n$  — какие-нибудь элементы другого из отрезков  $AB$ , расположенные в последовательности, определяемой направлениями этих отрезков. Тогда в зависимости от выбора начального элемента последовательность всех элементов будет  $C_1, C_2 \dots C_m, D_1, D_2 \dots D_n$  или  $D_1, D_2 \dots D_n, C_1, C_2 \dots C_m$ . Мы видим, что эти последовательности отличаются друг от друга лишь круговой перестановкой, что и доказывает второе утверждение задачи.

**164.** На основании предыдущей задачи элементы  $A, B, C$  в зависимости от выбора начального положения переменного элемента будут встречаться в последовательностях  $ABC, BCA, CAB$  при одном направлении описывания и в последовательностях  $CBA, ACB, BAC$  при другом направлении описывания. Так как эти шесть последовательностей

стей исчерпывают все возможные последовательности элементов  $ABC$ , то теорема доказана.

**165.** Пусть будет  $O$  точка пересечения прямых  $a, b$ . Причислим всякую точку  $M$  плоскости  $ab$ , не лежащую на прямых  $a, b$ , к той или иной угловой области смотря по тому, к которому из двух углов  $ab$  пучка  $O$  принадлежит прямая  $OM \equiv m$ . Если  $M_1, M_2$  — две точки одной области, то  $OM_1 \equiv m_1, OM_2 \equiv m_2$  — прямые одного угла  $ab$ . Один из углов  $m_1, m_2$  весь принадлежит этому углу  $ab$ , и следовательно перспективный ему отрезок  $M_1 M_2$  весь принадлежит соответствующей области. Если точки  $M_1, M_2$  принадлежат разным областям, то прямые  $m_1, m_2$  принадлежат разным углам  $ab$ . Если  $A, B$  — точки пересечения прямой  $M_1 M_2$  с прямыми  $a, b$ , то точки  $M_1, M_2$  принадлежат вследствие этого к разным отрезкам  $AB$ . Отсюда следует, что и точки  $A, B$  принадлежат к разным отрезкам  $M_1 M_2$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно разбить всю прямую точками  $A, B, M_1, M_2$  на четыре отрезка, как в задаче 161, 2.

**166.** Предоставляем доказательство читателю. Нужно рассмотреть случаи, когда одна из точек  $M_1, M_2$  лежит на стороне или обе лежат на разных сторонах.

**167.** Обозначим угловые области, ограниченные сторонами  $AB, AC$ , через  $(A), (A')$ , и угловые области, ограниченные сторонами  $BA, BC$  через  $(B), (B')$ . Точки всякой треугольной области, определяемой треугольником  $ABC$ , должны принадлежать одной из областей  $(A), (A')$  и одной из областей  $(B), (B')$ . Таким образом возможны четыре треугольные области  $(AB), (A'B'), (AB'), (A'B)$ . Эти области действительно существуют, так как всякие две прямые пучков  $A, B$ , принадлежащие определенным угловым областям, пересекаются в точке, принадлежащей соответствующей треугольной области. Остается доказать, что точки каждой из треугольных областей принадлежат определенной угловой области, ограниченной сторонами  $CA, CB$ . Пусть будут  $M_1, M_2$  две точки области  $(AB)$  и предположим сначала, что они лежат на одной прямой с одной из вершин  $A, B$ , например  $A$ . Если  $H$  — точка пересечения этой прямой со стороной  $BC$ , то пучок прямых  $C (A M_1 M_2 H \dots)$  перспективен с пучком прямых  $B (A M_1 M_2 H \dots)$ . Так как прямые  $BM_1, BM_2$  содержатся в одном угле пучка  $B$ , ограниченном прямыми  $BA, BC = BH$ , то и прямые  $CM_1, CM_2$  содержатся в одном угле пучка  $C$ , ограниченном прямыми  $CA, CH \equiv CB$ . Иначе говоря, точка  $M_2$  принадлежит той же угловой области, ограниченной прямыми  $CA, CB$ , что и точка  $M_1$ . Если точки  $M_1, M_2$  не лежат на одной прямой ни с одной из вершин  $A, B$ , то прямые  $AM_1, BM_2$  пересекаются в точке  $K$  области  $(AB)$ , отличной от точек  $M_1, M_2$ , и по предыдущему точка  $M_2$  расположена по отношению к прямым  $CA, CB$  в той же угловой области, что и точка  $K$ , а точка  $K$  — в той же угловой области, что и точка  $M_1$ , стало быть попрежнему точка  $M_2$  в той же области, что и точка  $M_1$ . Отсюда ясно, что все точки треугольной области  $(AB)$  расположены в одной и той же угловой области по отношению к прямым  $CA, CB$ , что и требовалось доказать. Совершенно аналогично убедимся, что точки  $M_1, M_2$ , расположенные в одной из угловых областей  $(A), (A')$  и в разных угловых областях  $(B), (B')$ , принадлежат разным угловым областям по отношению к прямым  $CA, CB$ . Отсюда следует, что одна из этих угловых областей



содержит треугольные области  $(AB)$ ,  $(A'B')$ , а другая — треугольные области  $(AB')$ ,  $(A'B)$ . Если обозначим первую через  $(C)$ , а вторую — через  $(C')$ , то треугольные области можно будет обозначить через  $(ABC)$ ,  $(A'B'C)$ ,  $(AB'C)$ ,  $(A'BC')$ . Это обозначение симметричнее прежнего, так как оно не отдает преимущества каким-либо двум определенным вершинам. Чтобы составить обозначения всех четырех треугольных областей, нужно либо оставить все три буквы без штрихов, либо снабдить штрихами две из них.

168. 1. Прямая  $AB$  разбивается точками  $A$ ,  $B$  на два взаимно дополнителных замкнутых отрезка  $AB$ . Один из них принадлежит замкнутой угловой области  $(C)$ , другой — замкнутой угловой области  $(C')$ ; общие концы отрезков  $A$ ,  $B$  принадлежат обоим областям. Оба отрезка принадлежат замкнутым угловым областям  $(A)$ ,  $(A')$ ,  $(B)$ ,  $(B')$ , так как они принадлежат их общей стороне  $AB$ . Следовательно один из отрезков принадлежит замкнутым треугольным областям  $(ABC)$ ,  $(A'B'C)$ , принадлежащим угловой области  $(C)$ , а другой отрезок принадлежит замкнутым треугольным областям  $(A'BC')$ ,  $(A'B'C')$ , принадлежащим угловой области  $(C')$ . Удобно обозначить первый отрезок через  $c$ , второй через  $c'$ . Прилагая те же рассуждения к сторонам  $AC$  и  $BC$ , убедимся, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  разбивают прямые  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  соответственно на отрезки  $a$  и  $a'$ ,  $b$  и  $b'$ ,  $c$  и  $c'$ , каждый из которых служит общей стороной одной из пар треугольных областей, а именно той, которая принадлежит угловой области того же наименования, что и этот отрезок.

2 и 3. Рассмотрим наиболее общий случай, когда прямая, соединяющая две рассматриваемые точки  $M$ ,  $N$ , не проходит через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Точки пересечения  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  прямой  $MN$  с прямыми  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  разбивают прямую  $MN$  на три отрезка, не имеющие иных общих точек, кроме концов. Концы каждого отрезка лежат на двух из прямых  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ , и весь отрезок принадлежит одной из угловых областей, ограниченных этими прямыми. Обозначим эти отрезки через  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  и соответствующие области через  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ . Дополнительные отрезки  $a_1'$ ,  $b_1'$ ,  $c_1'$  принадлежат дополнительным угловым областям  $(A')$ ,  $(B')$ ,  $(C')$ . Отрезок  $a_1$  есть часть отрезков  $b_1'$  и  $c_1'$ . Следовательно он принадлежит угловым областям  $(A)$ ,  $(B')$ ,  $(C')$ , т. е. треугольной области  $(AB'C')$ . Так же убедимся, что отрезок  $b_1$  принадлежит области  $(A'BC')$ , и отрезок  $c_1$  принадлежит области  $(A'B'C)$ . Точки  $M$ ,  $N$  принадлежат либо одному из отрезков  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ , например  $a_1$ , либо двум из них, например  $b_1$  и  $c_1$ . В первом случае точки  $M$ ,  $N$  обе принадлежат области  $(AB'C')$ , и тот из отрезков  $MN$ , который принадлежит отрезку  $a_1$ , также принадлежит области  $(AB'C')$ . Во втором случае одна из точек  $M$ ,  $N$  принадлежит области  $(A'BC')$ , а другая принадлежит области  $(A'B'C)$ . Тот из отрезков  $MN$ , который содержит общий конец  $A_1$  отрезков  $b_1$ ,  $c_1$ , пересекает в точке  $A_1$  общую сторону  $a'$  областей  $(A'BC')$ ,  $(A'B'C)$ .

Случай, когда прямая  $MN$  проходит через одну или две из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , предоставляем рассмотреть читателю.

4. Мы видели только что, что всякая прямая, не проходящая через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , содержится в трех из четырех треугольных областей  $ABC$ , которые мы обозначили через  $(AB'C')$ ,  $(A'BC')$ ,  $(A'B'C)$ . Точки пересече-

чения ее с прямыми  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  принадлежат соответственно сторонам  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . Каждой из областей  $(AB'C')$ ,  $(A'BC')$ ,  $(A'B'C)$  принадлежат только две из этих сторон, а области  $(ABC)$  не принадлежит ни одна из них. Таким образом прямая, не проходящая через вершины треугольной области, либо не пересекает ее сторон, либо пересекает две из них. Если прямая пересекает одну из сторон, то мы имеем второй случай, и следовательно эта прямая пересекает еще одну сторону и не пересекает третьей.

169. Пусть в четырехстороннике с парами противоположных вершин  $AB$ ,  $CD$ ,  $A'B'$  вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $B'$  остаются неподвижными, а вершина  $D$  описывает сторону  $BB'$  в определенном направлении (рис. 94). Тогда вершина  $A'$ , как проекция вершины  $D$  из вершины  $A$  на сторону  $BC$ , описывает сторону  $BC$  также в определенном направлении. Диагональные точки  $C'$ ,  $C''$  диагонали  $AB$ , как проекции вершин  $D$ ,  $A'$  соответственно из вершин  $C$ ,  $B'$  на диагональ  $AB$ , описывают эту диагональ также в определенных направлениях. При этом, когда точка  $D$  совпадает

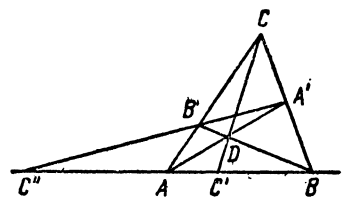


Рис. 94.

с  $B'$  или  $B$ , обе точки  $C'$ ,  $C''$  совпадают соответственно с  $A$  или  $B$ . Покажем, что при других положениях точки  $D$ , точки  $C'$ ,  $C''$  разделены точками  $A$ ,  $B$ , т. е. принадлежат разным отрезкам  $AB$ . Действительно, если точка  $D$  не совпадает с точками  $B'$ ,  $B$ , то она не лежит на сторонах треугольника  $ABC$  и следовательно принадлежит одной из треугольных областей  $ABC$ . Обозначим область, к которой принадлежит  $D$  в одном из своих положений, через  $(ABC)$ . Тогда точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  принадлежат соответственно сторонам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  этой области, а точка  $C''$  принадлежит, на основании 168, 4, стороне  $c'$ , дополняющей сторону  $c$  до полной прямой  $AB$ . При движении точки  $D$ , начиная с положения  $B'$ , в каком-либо направлении точки  $C'$ ,  $C''$  движутся, начиная с положения  $A$ , причем одна из них сначала описывает отрезок  $c$ , а затем отрезок  $c'$ , другая же, наоборот, сначала описывает отрезок  $c'$ , а затем  $c$ . Следовательно точки  $C'$ ,  $C''$ , гармонически сопряженные относительно точек  $A$ ,  $B$ , одновременно описывают прямую  $AB$  в противоположных направлениях, встречаясь только в точках  $A$ ,  $B$ , что и требовалось доказать.

170. 1. Пусть будет  $C$  первая точка встречи точек  $M$ ,  $N$ , одновременно описывающих некоторый отрезок  $AB$  в противоположных направлениях. Начальными положениями точек  $M$ ,  $N$  служат разные концы отрезка  $AB$ ; в противном случае они одновременно описывали бы не один и тот же отрезок  $AB$ , а дополнительные отрезки  $AB$ . Поэтому первая точка встречи  $C$  точек  $M$ ,  $N$  отлична от точек  $A$ ,  $B$  и разбивает отрезок  $AB$  на два отрезка, которые мы обозначим, в зависимости от направления описывания их, через  $AC$ ,  $CB$  или через  $CA$ ,  $BC$ . Пусть точка  $M$  последовательно описывает отрезки  $AC$ ,  $CB$ . В это самое время точка  $N$  последовательно описывает отрезки  $BC$ ,  $CA$ . Следовательно точки  $M$ ,  $N$  совпадают только в точке  $C$ .

2. Пусть пары точек  $AB$ ,  $CD$  не разделяют друг друга. Тогда от-

резки, на которые точки  $A, B, C, D$  разбивают прямую, можно обозначить через  $AB, BC, CD, DA$ . Дополнительные отрезки мы обозначим через  $A \cdot B, B \cdot C, C \cdot D, D \cdot A$ . Пусть будут  $M, N$  точки, гармонически сопряженные с одной и той же точкой  $P$  соответственно относительно пар точек  $AB, CD$ . Когда точка  $P$  описывает отрезок  $AB$ , то точка  $M$  описывает отрезок  $A \cdot B$ , а точка  $N$  описывает часть отрезка  $CD$ , ибо отрезок  $AB$  составляет часть отрезка  $C \cdot D$ . Но сам отрезок  $CD$ , а потому и всякая часть его, составляет часть отрезка  $A \cdot B$ . Поэтому при некотором положении точки  $P$  точки  $M, N$  совпадут, и таким образом найдется точка  $Q$ , гармонически сопряженная с точкой  $P$  относительно обеих пар  $AB, CD$ .

Пусть теперь пары точек  $AB, CD$  разделяют друг друга. Допустим, что существует пара точек  $P, Q$ , гармонически сопряженных относительно обеих пар  $AB, CD$ . Так как точки  $P, Q$  разделяют точки  $A, B$ , то все четыре точки разбивают прямую на четыре отрезка, которые можно обозначить через  $AP, PB, BQ, QA$  или  $PA, BP, QB, AQ$ , в зависимости от направления описывания. Точка  $C$  принадлежит одному из этих отрезков. Меняя местами обозначения точек  $A, B$  и точек  $P, Q$ , можно достигнуть того, чтобы этот отрезок оказался обозначенным через  $AP$ . Когда точка  $M$  описывает отрезок  $AP$ , то точка  $N$ , гармонически сопряженная с ней относительно пары  $PQ$ , описывает тот из отрезков, ограниченных точками  $B, P$ , который мы обозначили через  $BP$ , так как она движется в направлении, противоположном точке  $M$ . Но когда точка  $M$  совпадет с  $C$ , точка  $N$  совпадет с  $D$ . Таким образом точки  $C, D$  принадлежат соседним отрезкам  $AP, PB$  и следовательно принадлежат отрезку  $AB$ , составленному из этих двух отрезков. Так как это противоречит условию, согласно которому пара  $CD$  разделена парой  $AB$ , то не может существовать пары точек, гармонически сопряженных относительно обеих пар  $AB, CD$ .

3. Чтобы перенести предыдущие свойства расположения и числа элементов на пучок прямых или плоскостей, достаточно привести пучок в перспективное соответствие с какой-нибудь прямой.

171. Из определения проективности, данного Штаудтом, ясно, что перспективность есть проективность, а также, что два ряда, проективные третьему, проективны между собой. Пользуясь этим, мы можем построить проективность между двумя рядами  $u, u'$ , в которой заданным различным между собою точкам  $A, B, C$  ряда  $u$  соответствовали бы заданные различные между собою точки  $A', B', C'$  ряда  $u'$ . Если прямые  $u, u'$  пересекаются, то для этого достаточно применить построение задачи 68, а если они скрещиваются или совпадают, то этот случай можно свести к предыдущему, пересекая их третьей прямой. Нужно только доказать, что найденная таким путем проективность есть единственная возможная. Предположим, что существует две таких проективности, т. е., что ряду  $(A'B'C'M \dots)$  на прямой  $u'$  проективны два ряда  $(ABCM \dots)$  и  $(ABCM_1 \dots)$  на прямой  $u$ . Тогда ряды  $(ABCM \dots)$ ,  $(ABCM_1 \dots)$  на прямой  $u$  были бы проективны между собой, и соответствующие точки  $M, M_1$  не всегда совпадали бы. Нужно показать, что это невозможно.

Покажем прежде всего, что когда одна из точек, соответствующих друг другу в проективности между двумя рядами, описывает свой ряд

в определенном направлении, другая точка также описывает свой ряд в определенном направлении. Из определения описывания прямой в определенном направлении, данного в задаче 162, видно, что для этого достаточно доказать, что отрезкам одного из проективных рядов всегда соответствуют отрезки другого. Пусть будет  $M, N$  две точки отрезка  $PQ$  одного ряда и  $M', N', P', Q'$  — соответствующие точки другого ряда. Так как точки  $M, N$  не разделены точками  $P, Q$ , то существует пара точек  $ST$ , гармонически сопряженная относительно обеих пар  $MN, PQ$ . В силу определения проективности, соответствующие точки  $S', T'$  гармонически сопряжены относительно пары  $M'N', P'Q'$ . Поэтому точки  $M', N'$  не разделены точками  $P', Q'$ , т. е. принадлежат одному отрезку  $P'Q'$ . Таким образом всякой точке  $M$ , принадлежащей тому же отрезку  $PQ$ , что и точка  $N$ , соответствует точка  $M'$ , принадлежащая тому же отрезку  $P'Q'$ , что и точка  $N'$ , что и доказывает требуемое свойство проективности.

Возвращаясь к проективности между рядами  $(ABCM\dots)$  и  $(ABCM_1\dots)$  на прямой  $u$ , заставим точку  $M$  описывать тот отрезок  $AB$ , который не содержит точки  $C$ , в направлении от  $A$  к  $B$  (рис. 95). Тогда точка  $M_1$  опишет тот же отрезок в том же направлении. Допустим, что точки  $M, M_1$  при этом не все время совпадают, и пусть будут  $D, D_1$  два различных положения между собой одновременные положения их. Не нарушая общности, можно предположить, что точка  $D$  принадлежит отрезку  $AD_1$ . Так как

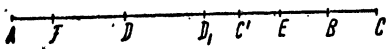


Рис. 95.

отрезок  $D_1B$  есть часть отрезка  $DB$ , то точки  $M, M_1$ , описывая отрезки  $DB, D_1B$ , встретятся в какой-нибудь точке  $E$  в первый раз, так что на отрезке  $DE$  не будет двойных точек проективности. Заставляя точки  $M, M_1$  описывать тот же отрезок  $AB$  в противоположном направлении, докажем таким же образом, что на отрезке  $DA$  существует такая двойная точка проективности  $F$ , что отрезок  $DF$  не будет содержать других двойных точек проективности. Отрезок  $EF$ , составленный из отрезков  $DE, DF$ , не будет, таким образом, содержать двойных точек, кроме точек  $E$  и  $F$ . Но отрезок  $EF$  либо составляет часть отрезка  $AB$ , либо совпадает с ним, и потому не содержит двойной точки  $C$ . Поэтому он содержит точку  $C'$ , гармонически сопряженную с  $C$  относительно его концов  $E, F$  и отличную от них. Но точка  $C'$  как четвертая гармоническая к трем двойным точкам также двойная. Полученное противоречие показывает, что точки  $M, M_1$ , описывая отрезок  $AB$ , все время совпадают, т. е., что все точки отрезка  $AB$  двойные. Поэтому будут двойными и все точки дополнительного отрезка  $A \cdot B$ , так как они гармонически сопряжены с точками отрезка  $AB$  относительно его концов  $A, B$ . Таким образом все точки прямой  $u$  двойные, т. е. ряды  $(ABCM\dots), (ABCM_1\dots)$  совпадают всеми соответствующими точками. Иначе говоря, всякой точке ряда  $u'$  соответствует в обоих рассматриваемых проективностях одна и та же точка ряда  $u$ , что противоречит допущению существования двух таких проективностей.

Теорема, таким образом, доказана.

**172.** Из определения ясно, что в коллинеарности между двумя пло-

скими системами четырехугольникам и четырехсторонникам одной системы соответствуют четырехугольники и четырехсторонники другой. Отсюда следует, что гармоническим группам точек и прямых одной системы соответствуют гармонические группы точек и прямых другой. На основании определения проективности между рядами точек заключаем, что соответствующие ряды точек обеих систем проективны, и применяя аналогичное определение для проективности между пучками прямых, убеждаемся, что и соответствующие пучки прямых проективны. Пусть будут  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  два четырехугольника, лежащие соответственно на плоскостях  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ . Если существует коллинеарность между плоскими системами  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ , в которой четырехугольнику  $ABCD$  соответствует четырехугольник  $A'B'C'D'$ , то она единственная. Действительно, проективность например между пучками  $A$  и  $A'$  определяется соответствием трех пар прямых  $AB$  и  $A'B'$ ,  $AC$  и  $A'C'$ ,  $AD$  и  $A'D'$  этих пучков, и то же относится к пучкам  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$ ,  $D$  и  $D'$ .

Поэтому, если дана точка  $M$  плоскости  $\epsilon$ , не лежащая например на прямой  $AB$ , то прямым  $AM$ ,  $BM$  пучков  $A$ ,  $B$  соответствуют вполне определенные прямые пучков  $A'$ ,  $B'$ , отличные от прямой  $A'B'$ , и эти прямые пересекаются в вполне определенной точке  $M'$  плоскости  $\epsilon'$ , которая только и может соответствовать точке  $M$ .

Но при таком построении точки  $M'$ , соответствующей точке  $M$ , плоские системы действительно будут коллинеарны. В самом деле, когда точка  $M$  описывает прямую, пересекающую прямую  $AB$ , прямые  $AM$ ,  $BM$  описывают перспективные пучки  $A$ ,  $B$ . Прямые  $A'M'$ ,  $B'M'$  описывают пучки  $A'$ ,  $B'$ , проективные пучкам  $A$ ,  $B$  и следовательно проективные между собой. Проективность между пучками  $A'$ ,  $B'$  есть перспективность, так как прямые  $A'B'$ ,  $B'A'$  пучков  $A'$ ,  $B'$ , соответствуя прямым  $AB$ ,  $BA$  пучков  $A$ ,  $B$ , которые в силу перспективности между пучками  $A$ ,  $B$  соответствуют друг другу, также соответствуют друг другу. Таким образом рядам точек, пересекающим прямую  $AB$ , соответствуют ряды точек, пересекающие прямую  $A'B'$ . Тем самым установлено соответствие и между точками самих прямых  $AB$ ,  $A'B'$ , которое ускользало от прежнего построения. Ясно, что установленное таким образом соответствие между плоскими системами  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  есть коллинеарность, в которой четырехугольники  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  соответствуют друг другу.

---

ГЛАВА I.

1. Движение плоской фигуры вполне определяется траекториями двух ее точек. Поэтому достаточно рассмотреть какой-нибудь отрезок  $AB$  (рис. 1). Пусть  $A'B'$  — соответствующий отрезок другой фигуры, причем  $AB = A'B'$ . Проведем перпендикуляры через середины отрезков  $AA'$  и  $BB'$ . Их точка пересечения  $O$  и будет искомым центром вращения, что легко видеть из равенства треугольников  $AOB$  и  $A'OB'$ .

Если же перпендикуляры  $OP$  и  $OP'$  не пересекутся (будут параллельны), то центр вращения будет на бесконечно большом расстоянии, т. е. будет иметь место случай поступательного движения.

2. Рассуждения предыдущей задачи применимы и для бесконечно малых вращений около точки  $O$  (рис. 1). В этом случае  $AA'$  и  $BB'$  будут элементами (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) траекторий точек  $A$  и  $B$ . Следовательно перпендикуляры  $OP$  и  $OP'$  обратятся в пределе в нормали к этим траекториям.

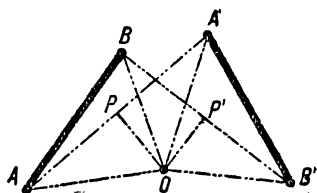


Рис. 1.

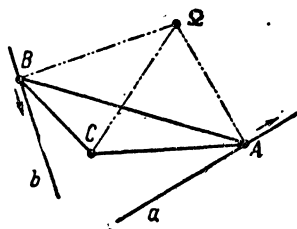


Рис. 2.

Если вместо точки  $B$  взять какую-нибудь другую точку  $C$ , то аналогичными построениями получим для отрезка  $AC$  прежний центр вращения  $O$ , что и доказывает теорему.

3. Так как мгновенный центр определяется пересечением нормалей к траекториям точек  $A$  и  $B$  (рис. 2), то, построив  $AQ \perp a$  и  $BQ \perp b$ , найдем его. Нормаль к траектории точки  $C$  тоже должна пройти через  $Q$ . Следовательно прямая  $CQ$  и будет искомой нормалью.

4. Решается аналогично предыдущей задаче.

5. Решается аналогично предыдущей задаче.

6. Построив мгновенный центр  $\Omega$ , опустим из него перпендикуляр на подвижной отрезок  $AB$ . Основание  $P$  этого перпендикуляра и будет искомой точкой (рис. 3).

7. Рассмотрим два бесконечно близкие положения кривой:  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  (рис. 3). Их точки пересечения будут (в пределе) точками касания с огибающей. С другой стороны, прямые, соединяющие эти точки с мгновенным центром, будут нормальными к траекториям этих точек, так как их бесконечно малое смещение направлено по касательным к огибающей.

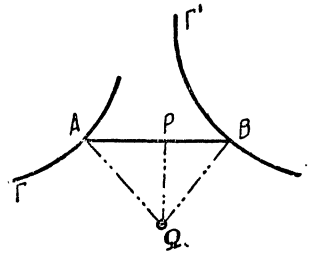


Рис. 3.

8. Повернем данную кривую вокруг точки  $O$  на бесконечно малый угол: получим конгруэнтную ей кривую. Обе эти кривые пересекаются в точках касания с огибающей. Но эти точки являются основаниями нормалей к огибающей (а следовательно и к данной кривой) из точки  $O$ . Так как число точек пересечения равно  $n^2$ , то следовательно искомое число нормалей будет  $n^2$ .

9. Для определения точки касания с огибающей находим сначала мгновенный центр  $\Omega$  (рис. 4) и опускаем из него перпендикуляр на подвижной отрезок  $AB$ . Основание  $C$  этого перпендикуляра и будет искомой точкой касания. Из прямоугольных треугольников  $AC\Omega$  и  $BC\Omega$  имеем:

$$AC = C\Omega \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right); \quad BC = C\Omega \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right),$$

откуда

$$AC : BC = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta.$$

10. Для нахождения точек касания с огибающими нужно опустить перпендикуляры из мгновенного центра на все прямые пучка. Очевидно, что основания этих перпендикуляров лежат на окружности, диаметром которой будет отрезок прямой, соединяющей мгновенный центр с центром пучка.

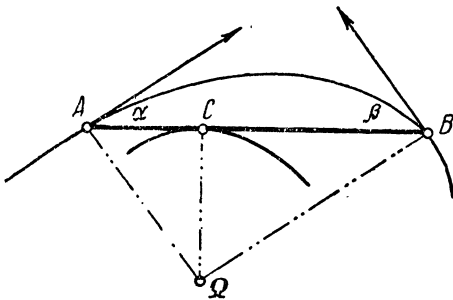


Рис. 4.

11. Окружность с центром в вершине прямого угла. *Указание.* Построить нормаль к траектории и найти ее неподвижную точку.

12. Пусть  $a$  и  $b$  — прямолинейные траектории двух точек  $A$  и  $B$  подвижной плоскости (рис. 5). Проведем окружность через точку их пересечения  $C$  и через точки  $A$  и  $B$ . Далее, пусть имеем подвижной треугольник  $ABM$ , неизменной формы с вершиной  $M$  на этой окружности. При движении эта окружность будет все время проходить через

точки  $C$  и  $M$ , так как она описана на хорде  $AB$ , вмещающей постоянный угол  $\widehat{C}$  (то же и для  $\widehat{M}$ ). Строим мгновенный центр  $\Omega$ ; он будет лежать на этой же окружности. Так как хорда  $BM$  имеет постоянную длину, то следовательно и угол  $B\Omega M$  будет постоянный. А так как  $B\Omega$  перпендикулярно к  $a$ , то можно заключить, что  $\Omega M$  (нормаль к траектории точки  $M$ ) сохраняет свое направление. Следовательно точка  $M$  движется по прямой. Это относится очевидно ко всем точкам окружности. В процессе движения треугольник  $ABM$  займет положение  $A'B'M'$ , так как углы  $AMB$  и  $A'B'M'$  равны. Значит траектория точки  $M$  пройдет через  $C$ .

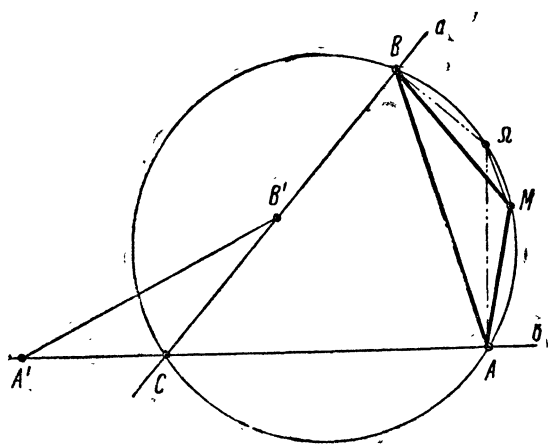


Рис. 5.

крайности мгновенный центр  $\pi$  относительно  $\pi'$  через  $(\pi, \pi')$ , а другой через  $(\pi', \pi)$ .

При бесконечно малом перемещении точка  $(\pi, \pi')$ , будучи неподвижной, принадлежит обеим фигурам  $\pi$  и  $\pi'$ . То же можно сказать и относительно центра  $(\pi', \pi)$ , т. е., что он также принадлежит обеим фигурам.

Если эти центры не совпадают, то следовательно у фигур  $\pi$  и  $\pi'$  есть две общих точки. А это значит, что  $\pi$  и  $\pi'$  неизменно связаны друг с другом, что противоречит условию теоремы. Следовательно  $(\pi, \pi')$  совпадает с  $(\pi', \pi)$ .

14. Пусть фигуры  $\pi, \rho, \sigma$  движутся в одной плоскости (рис. 6). Обозначим мгновенный центр вращения  $\pi$  относительно  $\rho$  через  $(\pi, \rho)$  и два других центра соответственно через  $(\rho, \sigma)$  и  $(\sigma, \pi)$ . Допустим теперь, что эти центры не лежат на одной прямой. Тогда точка  $(\rho, \sigma)$  должна при бесконечно малом перемещении сместиться по перпендикуляру к прямой  $(\pi, \rho)$   $(\rho, \sigma)$ , так как она должна повернуться около своего мгновенного центра  $(\pi, \rho)$ . Аналогично можем заключить, что эта же точка  $(\rho, \sigma)$  должна одновременно сместиться и по перпендикуляру к прямой  $(\sigma, \pi)$   $(\rho, \sigma)$ , по тем же соображениям. Но это возможно только если  $(\pi, \rho)$ ,  $(\rho, \sigma)$  и  $(\sigma, \pi)$  лежат на одной прямой, так как только в этом случае оба смещения точки  $(\rho, \sigma)$  совпадут.

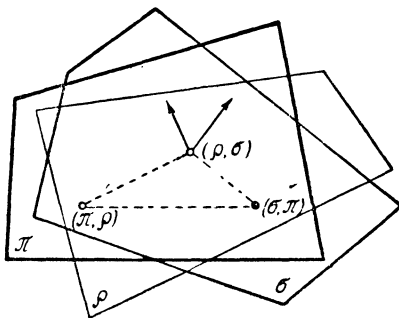


Рис. 6.



15. Пусть  $AB$  — общая хорда неподвижной кривой ( $C$ ) и подвижной ( $\Gamma$ ). При движении отрезка  $AB$  относительно кривой ( $C$ ) мгновенный центр находится на пересечении  $P$  нормалей в точках  $A$  и  $B$  кривой ( $C$ ). Рассматривая же движение кривой ( $\Gamma$ ) относительно отрезка  $AB$ , видим, что мгновенный центр будет находиться в точке пересечения  $Q$  нормалей к кривой ( $\Gamma$ ) в ее точках  $A$  и  $B$ . Следовательно искомым мгновенный центр должен лежать на прямой<sup>1)</sup>  $PQ$ .

Рассматривая кривые ( $C_1$ ) и ( $\Gamma$ ), построим аналогично прямую  $P_1Q_1$ . Искомый мгновенный центр определится пересечением прямых  $PQ$  и  $P_1Q_1$ .

16. Пусть прямая  $OM$  (рис. 7) вращается вокруг одной из своих точек  $O$ , а по ней скользит отрезок  $PM$  постоянной длины так, что один из его концов (например  $P$ ) описывает прямую. Тогда другой его конец  $M$  опишет кривую, которая называется конхойдой Никомеда. При этом точка  $O$  называется полюсом конхойды, а неподвижная направляющая прямая — ее основанием.

Построим сначала мгновенный центр прямой  $OM$ . Для этого восставим два перпендикуляра: один в точке  $P$  к неподвижной прямой (траектории точки  $P$ ), а другой в точке  $O$  к подвижной прямой. Их пересечение определит мгновенный центр  $\Omega$ . Соединяя  $\Omega$  с  $M$  получим нормаль к конхойде в точке  $M$ , а по ней легко построим и касательную.

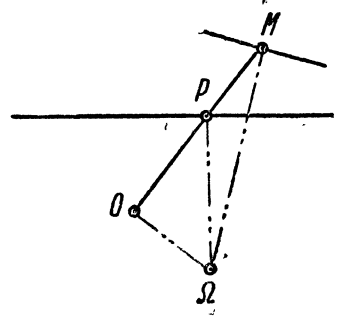


Рис. 7.

17. Решается аналогично предыдущей задаче, только вместо неподвижной прямой будем иметь неподвижную кривую  $\Gamma$  (рис. 8).

18. Строим нормаль к подвижной кривой в ее неподвижной точке и нормаль к траектории в соответствующей точке. Пересечение этих двух нормалей определит искомым мгновенный центр.

19. Искомое геометрическое место есть парабола с вершиной в неподвижной точке и осью симметрии, перпендикулярной данной прямой (воспользоваться проективными свойствами параболы).

20. Парабола с вершиной в полюсе конхойды и общей осью симметрии.

21. Пусть  $P$  — центр пучка (рис. 9), а  $QM$  — отрезок постоянной длины. Через точку  $Q$  проводим диаметр данной окружности. Тогда пря-

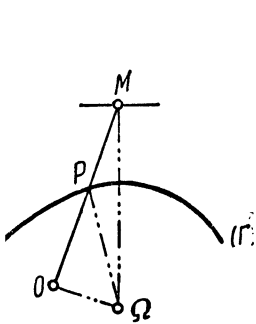


Рис. 8.

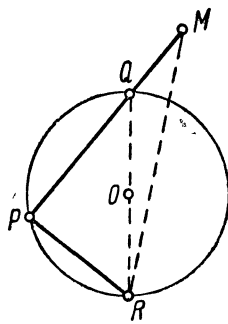


Рис. 9.

<sup>1)</sup> Это следует из теоремы Аронгольда — Кеннеди (см. предыдущую задачу).

мая, соединяющая другой его конец  $R$  с точкой  $M$ , описывающей кривую, и будет искомой нормалью.

22. Пусть  $P$  (рис. 10) — одна из точек подэры. Из условий задачи легко заключить, что подэра представляет собой траекторию вершины  $P$

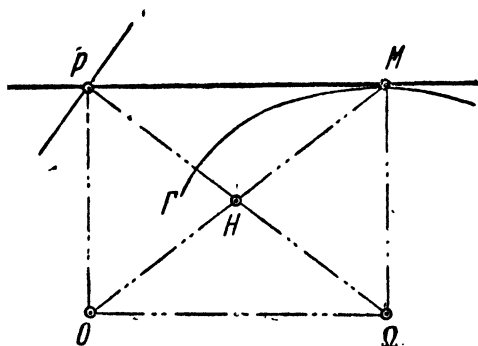


Рис. 10.

прямое правило построения нормали к подэре: соединяем точку касания с полюсом и делим этот отрезок пополам. Соединяя его середину  $H$  с основанием  $P$  соответствующего перпендикуляра  $OP$ , получаем искомую нормаль  $PH$ .

23. Решается аналогично предыдущей задаче.

24. По условию мы имеем подвижной прямой угол, одна из сторон которого проходит через неподвижную точку  $F$  (рис. 11), а другая касается конического сечения. Строим мгновенный центр  $\Omega$ . Прямая  $M\Omega$  будет очевидно нормалью траектории точки  $M$ . Эта нормаль параллельна стороне  $PF_1$ , треугольника  $PF_1F$

(вследствие равенства углов  $\widehat{MPN}$  и  $\widehat{PM\Omega}$ ) и проходит через середину  $PF_1$ , следовательно она пройдет и через середину  $FF_1$ , т. е. через центр конического сечения. Отсюда легко заключить, что точка  $M$  движется по кругу.

25. Парабола. Доказывается на основании свойств проективных точечных рядов.

26. Эллипс или гипербола. Доказывается аналогично предыдущей задаче.

27. Проведем через точку  $M$  (рис. 12) прямые  $MN$  и  $MM'$ , параллельные соответственно  $AC$  и  $BD$ , и  $M'K$  параллельно  $AC$ . Очевидно, что при движении звеньев  $AD$ ,  $DC$  и  $CB$  точки  $N$  и  $K$  будут неподвижны. Далее, точка  $M$  описывает окружность с центром в  $B$ , причем

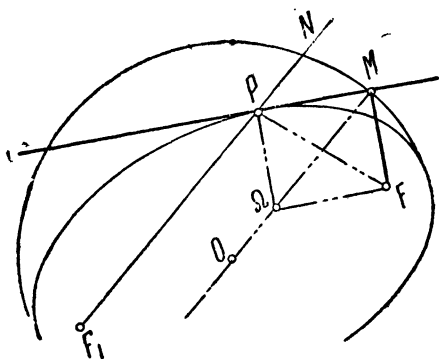


Рис. 11.

сторона  $KM'$  прямого угла  $KM'N$  проходит через постоянную точку  $K$ . Следовательно другая его сторона  $M'N$  огибает некоторое коническое сечение. Следовательно траектория точки  $M$  есть подэра этого конического сечения с полюсом  $H$ .

Для построения нормали нужно найти мгновенный центр  $\Omega$  отрезка  $DC$  и соединить его прямой с точкой  $M$ . Полученная прямая  $M\Omega$  и будет искомой нормалью. Для определения точки  $\Omega$  нужно построить нормали траекторий точек  $D$  и  $C$ . А так как  $D$  и  $C$  описывают окружности с центрами в  $A$  и  $B$ , то искомый мгновенный центр определяется пересечением продолжений  $AD$  и  $BC$ .

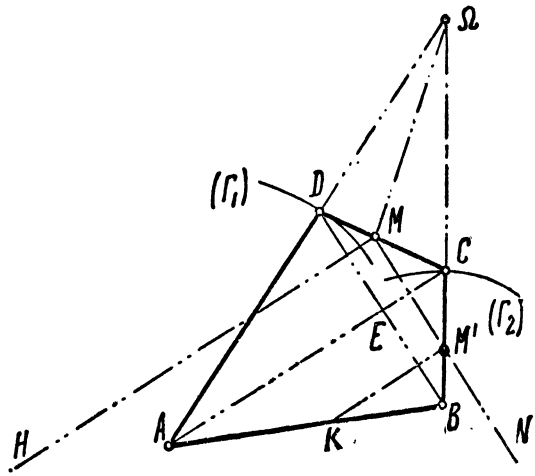


Рис. 12.

28. Подэра конического сечения.

29. Сначала построим нормали в точках касания этих хорд со своими огибающими. Прямая, соединяющая вершину подвижного угла с точкой пересечения этих нормалей, будет искомой нормалью.

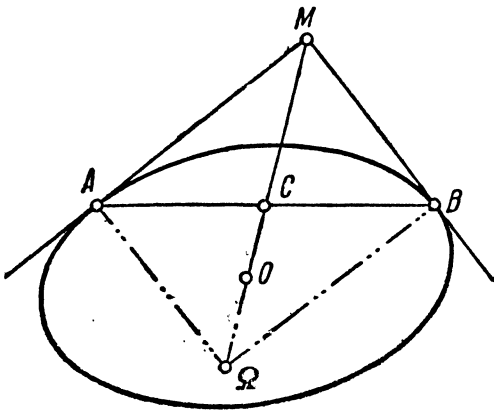


Рис. 13.

30. Построить нормали в точках касания, рассмотреть полученный прямоугольник.

31. Пусть  $M$  есть вершина подвижного прямого угла (рис. 13). Построив нормали к эллипсу в точках касания  $A$  и  $B$ , получим в их пересечении мгновенный центр  $\Omega$ . Прямая  $\Omega M$  есть нормаль к траектории точки  $M$ . Так как четырехугольник  $AMB\Omega$  прямоугольный, то  $AC = BC$ . Но прямая, проходящая через полюс  $M$  и середину поляры  $AB$ , обязательно пройдет и через центр эллипса.

Таким образом все нормали траектории точки  $M$  проходят через центр эллипса  $O$ . Следовательно искомая траектория есть окружность с центром в  $O$ .

32. Решается аналогично предыдущей задаче. Обратим движение, т. е. сделаем неподвижным коническое сечение, и будем перемещать угол

так, чтобы его стороны оставались касательными. Рассуждения, аналогичные примененным в предыдущей задаче, покажут, что траекторией вершины угла будет окружность, концентричная коническому сечению. Следовательно вершина угла при движении находится на одном (постоянном) расстоянии от центра конического сечения. Возвращаясь к прежнему движению, видим, что центр конического сечения описывает окружность, центр которой в вершине прямого угла.

33. Решается аналогично задаче 31.

Искомая траектория есть директриса параболы.

34. Мгновенный центр определяется пересечением нормалей к подвижной кривой в двух фиксированных точках. Следовательно искомые точки

касания будут основаниями нормалей, проведенных из мгновенного центра к движущейся кривой.

35. Легко доказывается на основании результатов предыдущей задачи, для чего нужно сначала вместо касания рассмотреть пересечение в двух фиксированных точках. Сближая эти точки и переходя к пределу, увидим, что мгновенный центр лежит на пересечении двух бесконечно близких нормалей, т. е. в центре кривизны.

Точки касания с огибающей определяются аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче.

36. Нормали, построенные в точках касания с данными кривыми, определяют мгновенный

центр. Соединяя его прямой линией с данной подвижной точкой, получим искомую нормаль.

37. Строим мгновенный центр. Он лежит на пересечении нормалей к подвижной кривой в неподвижной точке и в точке ее касания с данной кривой. Соединяя прямой исследуемую точку с мгновенным центром, получим искомую нормаль.

38. Пусть  $BAC$  — подвижной угол (рис. 14), а  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных неподвижных окружностей с радиусами  $O_1H$  и  $O_2K$ . Проведем через  $O_1$  и  $O_2$  прямые, параллельные сторонам угла  $AB$  и  $AC$ .

Их точка пересечения  $O$  неизменно связана с этим углом, так как ее расстояния  $OP = O_1H$  и  $OQ = O_2K$  не меняются при движении, а следовательно  $OA = \text{const.}$  Далее, так как  $\widehat{O_1O_2} = \widehat{BAC} = \text{const.}$ , то траектория точки  $O$  есть окружность, проходящая через точки  $O_1$  и  $O_2$  (ее центр определяется пересечением перпендикуляров к серединам отрезков  $OO_1$  и  $OO_2$ ).

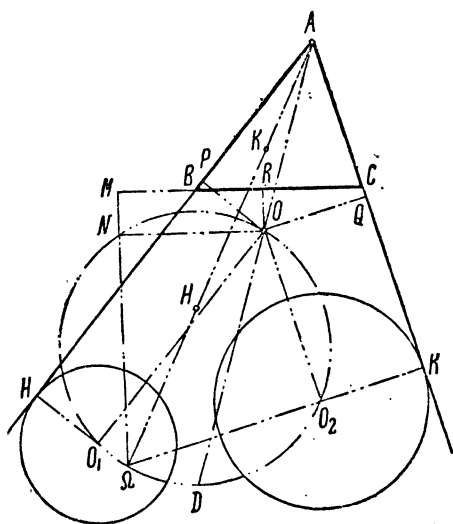


Рис. 14.



42. Сначала определяем мгновенный центр. Он определится пересечением двух нормалей: одна в точке пересечения подвижной кривой с неподвижной, которую эта точка описывает (нормаль к неподвижной кривой); вторая — в точке касания с другой данной кривой.

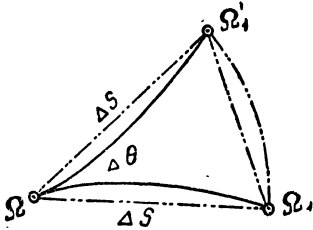


Рис. 15.

Соединяя найденный мгновенный центр с любой точкой подвижной кривой, получим искомую нормаль.

Точками касания огибающей будут основания нормалей, проведенных из мгновенного центра к подвижной кривой.

43. Пусть  $\Omega$  — мгновенный центр (рис. 15), а  $\Omega_1$  и  $\Omega_1'$  — его бесконечно близкие положения на неподвижной и подвижной центроидах. При этом поворот вокруг  $\Omega$  сделан на угол  $\Delta\theta$  (одного порядка малости вместе с  $\Delta S$ ); треугольник  $\Omega\Omega_1\Omega_1'$  равнобедренный, так как  $\Omega_1'$  может быть совмещено с  $\Omega_1$  поворотом вокруг  $\Omega$  на угол  $\Delta\theta$ . Следовательно

$$\Omega_1\Omega_1' = 2\Delta S \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

или с точностью до бесконечно малых высшего порядка:

$$\Omega_1\Omega_1' = \Delta S \cdot \Delta\theta.$$

Отсюда следует, что  $\Omega_1\Omega_1'$  является бесконечно малой второго порядка, т. е. обе центроиды касаются в точке  $\Omega$  (если бы было не касание, а пересечение, то  $\Omega_1\Omega_1'$  было одного порядка малости вместе с  $\Delta S$ ). А так как точка  $\Omega$ , будучи центром вращения, не движется ни по одной из центроид, то значит одна из этих центроид катится по другой без скольжения.

44. Когда обе кривые  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  касаются друг друга в точке  $A$ , то эта точка является мгновенным центром вращения для  $M$ . В следующем положении, когда точка  $A_1'$  совпадает с  $A_1$ , точка  $M$  будет иметь мгновенным центром  $A_1$ , вращаясь около него и описывая бесконечно малую дугу круга с радиусом  $A_1'M$ . Аналогично будет и для следующих точек  $A_2', A_3', A_4', \dots$ . А это подтверждает правильность изложенного способа построения.

Здесь полезно отметить, что прямая, соединяющая любую точку кривой  $(\Gamma)$  с соответствующим положением образующей точки  $M$ , есть нормаль к рулетке (это следует из основных свойств мгновенного центра).

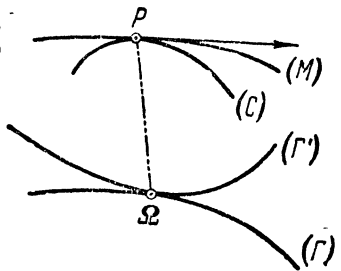


Рис. 16.

45. Пусть  $P$  есть точка касания огибающей (рис. 16) с подвижной кривой  $(M)$ , и пусть  $\Omega$  соответствующий мгновенный центр. Проведем в точке  $P$  касательную к обеим кривым. Перемещение точки  $P$  складывается (геометрически) из двух движений: относительного движения вдоль по кривой  $(M)$  и перемещения переносного движения точки кривой  $(M)$ , с которой в данный момент совпадает точка  $P$ . Оба эти перемещения направлены по касательной. Следовательно и их

геометрическая сумма имеет то же направление. Но  $\Omega P$  есть нормаль к траектории точки  $P$ . Поэтому  $P\Omega$  есть нормаль к кривым  $(M)$  и  $(C)$  в их общей точке касания.

46. Так как  $\Omega$  является мгновенным центром точки  $M$ , то точка  $M$  при бесконечно малом перемещении движется по касательной к окружности с центром в  $\Omega$  и радиусом, равным  $\Omega M$ . Затем, когда кривая  $(\Gamma')$  коснется кривой  $(\Gamma)$  в точке  $\Omega_1$ , то некоторая точка  $M'$  кривой  $(C)$  будет иметь направление движения по касательной к окружности с центром в  $\Omega_1'$  и радиусом, равным  $\Omega_1' M'$  (рис. 17). Продолжая аналогичные рассуждения для следующих точек касания кривых  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma')$ , приходим к требуемому доказательству.

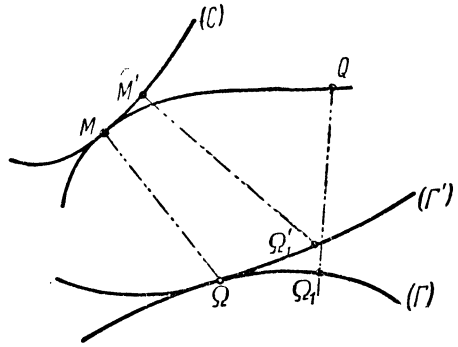


Рис. 17.

47. Рассмотрим сначала качение  $(\Gamma')$  по  $(\Gamma)$  (рис. 18). Очевидно кривую  $(C)$  можно рассматривать как огибающую подвижного круга, центр которого движется по кривой  $(\Gamma)$ , проходя через точки  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ , а радиус соответственно принимает значения:

$$\Omega_1 M_1' = A' M; \quad \Omega_2 M_2' = B' M; \quad \text{и т. д.} \quad (*)$$

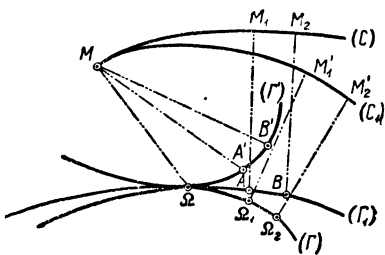


Рис. 18.

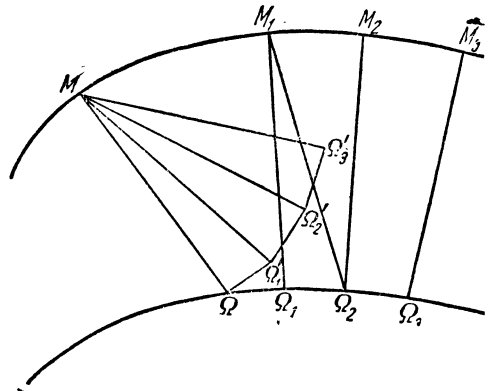


Рис. 19.

Аналогичные равенства получим и для качения кривой  $(\Gamma')$  по кривой  $(\Gamma_1)$ :

$$A M_1 = A' M; \quad B M_2 = B' M, \quad \text{и т. д.} \quad (**)$$

Сравнивая  $(*)$  и  $(**)$ , видим, что кривая  $(C)$  будет огибать кривую  $(C_1)$  при качении  $(\Gamma_1)$  по  $(\Gamma)$ .

48. Возьмем на данной рулетке ряд точек  $M, M_1, M_2, \dots$  (рис. 19), и построим в них нормали к этой кривой, продолжив их до пересечения с данной неподвижной кривой  $(\Gamma)$ . Построим на нормали  $M\Omega$  треуголь-

ник  $M\Omega\Omega_1'$  так, чтобы

$$\Omega\Omega_1' = \Omega\Omega_1; \quad M\Omega_1' = M_1\Omega_1.$$

Далее опять строим треугольник  $M\Omega_1'\Omega_2'$  так, чтобы

$$\Omega_1'\Omega_2' = \Omega_1\Omega_2; \quad M\Omega_2' = M_2\Omega_2.$$

Продолжая это построение, мы получим ломаную линию  $\Omega\Omega_1'\Omega_2'\dots$

Принимая расстояния между точками  $M, M_1, M_2, \dots$  бесконечно малыми, легко докажем, что с точностью до бесконечно малых второго порядка можно написать равенства:

$$\Delta M_1\Omega_1\Omega_2 = \Delta M\Omega_1'\Omega_2'; \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что при качении линии  $\Omega\Omega_1'\Omega_2'\dots$  по кривой  $(\Gamma)$  точка  $M$ , неизменно связанная с  $\Omega\Omega_1'\Omega_2'\dots$ , опишет данную кривую  $(M)$ .

49. Эвольвента круга.

50. Пусть  $AB$  — данный подвижной отрезок (рис. 20), скользящий по данным неподвижным прямым  $OA$  и  $OB$ . Построим окружность  $OAB$ .

Очевидно мгновенный центр  $\Omega$  будет лежать на этой окружности. Далее, так как угол  $AOB$  постоянный, то и угол  $A\Omega B$  тоже постоянный. Следовательно окружность во время движения отрезка  $AB$  будет проходить через точку  $O$ . Кроме того,  $\Omega O$  есть диаметр этой окружности, длина которого равна длине  $AB$ , деленной на синус угла  $AOB$ , т. е. величина постоянная.

Следовательно неподвижная центроида есть круг, описанный радиусом  $O\Omega$  из центра  $O$ .

Окружность  $AOB$  неизменно связана с подвижной плоскостью, определяемой отрезком  $AB$ . При этом мгновенный

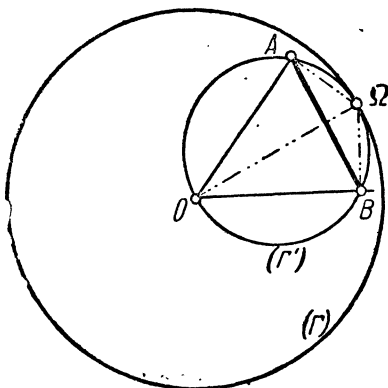


Рис. 20.

центр  $\Omega$  постоянно находится на этой окружности, которая и будет подвижной центроидой.

51. Пусть радиус неподвижного круга  $(\Gamma)$  вдвое больше радиуса подвижного круга  $(\Gamma')$  (рис. 20). Фиксируем на окружности  $(\Gamma')$  некоторую точку  $B$ . Так как  $\Omega B$  есть нормаль к ее траектории, то  $BO$  будет касательной. Эта касательная постоянно проходит через неподвижную точку  $O$ . Следовательно искомая траектория будет прямой, проходящая через  $O$ , т. е. диаметр неподвижного круга.

52. Пусть отрезок  $AB = l$  скользит своими концами по двум кругам  $(\Gamma_1)$  и  $(\Gamma_2)$  (рис. 21) равного радиуса  $r$ . Построим мгновенный центр  $\Omega$ , для чего соединим прямыми точки  $A$  и  $B$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  кругов  $(\Gamma_1)$  и  $(\Gamma_2)$ . Из равенства треугольников  $O_1O_2A$  и  $ABO_2$  заключаем, что угол  $O_1AO_2$  равен углу  $AO_2B$ . Отсюда получаем, что треугольник  $AO_2\Omega$  равнобедренный, т. е.  $O_2\Omega = A\Omega$ . Следовательно

$$O_1\Omega + O_2\Omega = O\Omega_1 + \Omega A = r = \text{const.} \quad (*)$$

Значит неподвижная центроида есть эллипс с фокусами  $O_1$  и  $O_2$ .



Чтобы найти подвижную центроиду, обратим движение. Пусть отрезок  $AB$  станет неподвижным, а оба круга будут перемещаться так, что, не меняя своего взаимного расположения, будут проходить через точки  $A$  и  $B$ . Тогда точки  $O_1$  и  $O_2$ , находясь на постоянном расстоянии  $r$  от точек  $A$  и  $B$ , будут описывать окружности, т. е. отрезок постоянной длины  $O_1O_2 = l = AB$  будет скользить по двум окружностям постоянного радиуса  $r$ . Следовательно центроидой и в этом случае будет эллипс, равный (\*).

53. Две равные гиперболы (рис. 22).

Доказывается аналогично предыдущей задаче. Из равенства треугольников  $AO_1B$  и  $O_1BO_2$  получаем:  $\Omega O_2 - \Omega O_1 = \text{const.}$

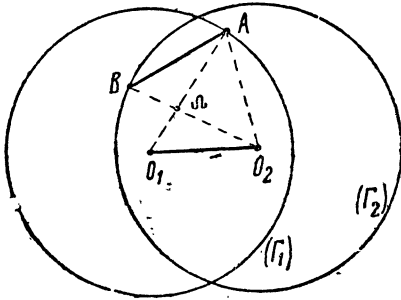


Рис. 21.

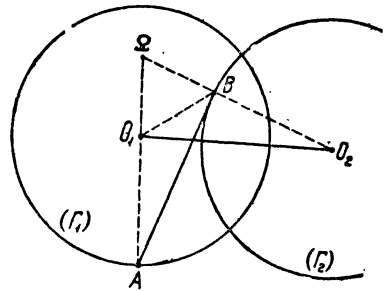


Рис. 22.

54. Обе центроиды — овалы Декарта. Пусть отрезок  $DC$  скользит концами по окружностям  $(\Gamma_1)$  и  $(\Gamma_2)$  (рис. 12) с центрами в  $A$  и  $B$ . Рассмотрим треугольник  $D\Omega B$ , пересеченный прямой  $AC$ . Легко доказать, что

$$\Omega C \cdot BE \cdot AD = BC \cdot DE \cdot A\Omega \quad (\text{теорема Менеля}).$$

Но так как  $BE = DE$ , то

$$\frac{\Omega C}{\Omega A} = \frac{BC}{AD} = \text{const.},$$

т. е. неподвижная центроида есть геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до данной окружности к расстоянию до данной точки  $A$  есть величина постоянная, а это есть овал Декарта.

Для определения подвижной центроиды надо обратить движение и проделать аналогичные рассуждения.

55. Неподвижная центроида — окружность  $OO_1O_2$  (рис. 14). Подвижная центроида — окружность с центром в  $O$  и радиусом  $O\Omega$ .

56. Рассмотреть точку касания кривых  $(A)$  и  $(A_1)$  и соответствующие точки эквидистантных кривых  $(A')$  и  $(A_1')$ .

57. Две эквидистантные эвольвенты неподвижной окружности.

Для доказательства рассмотреть траекторию центра подвижного круга (эвольвента неподвижного круга) и использовать результаты предыдущей задачи, считая подвижную окружность как кривую, эквидистантную своему центру.

58. Проведем через точку касания окружностей  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  касательную к кругу  $(\Gamma_2)$  (рис. 23). Пусть подвижная эвольвента пересекает эту касательную в точке  $M$ . По свойству эвольвенты  $PM$  будет нормалью к ней. А так как эта нормаль проходит через мгновенный центр  $\Omega$ , то точка  $M$  будет точкой касания эвольвенты со своей огибающей. Далее, из подобия прямоугольных треугольников  $\Omega P_1 O_1$  и  $\Omega PO$  имеем:

$$\frac{O_1 P_1}{OP} = \frac{O_1 \Omega}{O \Omega} = \text{const};$$

следовательно

$$OP = \text{const.},$$

т. е. нормаль  $MP$  к огибающей эвольвенты касается окружности с центром  $O$  и радиусом  $OP$ . Следовательно это будет тоже эвольвента.

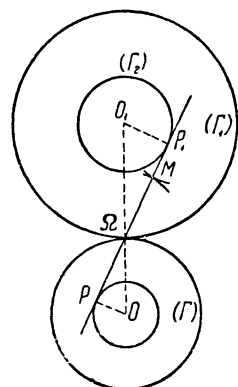


Рис. 23.

59. Введем вспомогательную окружность  $(\Gamma')$  (рис. 24), вдвое меньшего радиуса чем у  $(\Gamma_1)$ . При качении  $(\Gamma')$  по  $(\Gamma_1)$  любая ее точка  $M$  будет описывать окружности диаметром  $(\Gamma)$ . Пусть в начальном положении точки  $A_1$  и  $M_1$  совпадали в общей точке  $A$  касания кругов  $(\Gamma)$ ,  $(\Gamma_1)$  и  $(\Gamma')$ . Тогда очевидно дуги  $\Omega A$ ,  $\Omega A_1$  и  $\Omega M$  этих окружностей будут равны (по длине).

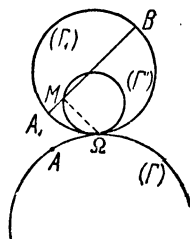


Рис. 24.

Следовательно окружность  $(\Gamma')$  катится без скольжения по  $(\Gamma)$  и ее точка  $M$  описывает при этом диаметр  $A_1 B$ , неизменно связанный с  $(\Gamma_1)$ . Но точка  $M$  есть точка касания этого диаметра со

своей огибающей, так как  $\Omega M \perp A_1 B$ . Следовательно искомая огибающая есть геометрическое место точек  $M$ , т. е. эпициклоида.

60. Эпициклоида. Решается аналогично предыдущей задаче.

61. Цепная линия.

62. Основание цепной линии проходит через неподвижную точку, которая очевидно и будет представлять собой огибающую. Следовательно эвольвентой цепной линии будет трактриса.

63. Искомая траектория есть эллипс. Для доказательства следует сначала установить, что геометрическое место мгновенных центров вращения есть эволюта эпициклоиды.

64. Пусть  $MM_1$  есть траектория точки  $M$  (рис. 25). Тогда, проведя прямую  $\Omega M$ , получим нормаль к этой траектории. Возьмем на кривой  $(\Gamma)$  бесконечно близкую  $\Omega$  точку  $A$  и соответствующую ей точку  $R$  на подвижной прямой  $l$  (при качении точки  $R$  и  $A$  совпадают). Центр кривизны  $P$  рулетты точки  $M$  определится пересечением  $M\Omega$  и нормали к  $MM_1$ , проходящей через  $A$ . Центр кривизны кривой  $(\Gamma)$  будет лежать на пересечении двух смежных нормалей  $\Omega O$  и  $AO$  к  $(\Gamma)$ .

При бесконечно малом перемещении подвижная плоскость вместе с точкой  $M$  и прямой  $l$  повернется на угол  $\hat{O}$ , или, что то же самое,

на угол  $\widehat{MR, M_1P}$ . Но так как  $\widehat{MR, PM_1} = \widehat{M} + \widehat{P}$ , то

$$\widehat{O} = \widehat{M} + \widehat{P}. \quad (*)$$

Опишем из центров  $M$  и  $P$  дуги окружностей радиусами  $M\Omega$  и  $P\Omega$ . Тогда, отбрасывая бесконечно малые высших порядков, можем написать:

$$\begin{aligned} \widehat{O} &= \frac{\Omega A}{\rho} = \frac{ds}{\rho}; & \sphericalcap \Omega T &= \Omega R \cos \varphi = \Omega A \cos \varphi = \cos \varphi ds, \\ & & \sphericalcap \Omega Q &= \Omega A \cos \varphi = \cos \varphi ds, \\ \widehat{M} &= \frac{\Omega T}{d} = \frac{\cos \varphi}{d} ds; & \widehat{P} &= \frac{\Omega Q}{\rho' - d} = \frac{\cos \varphi}{\rho' - d} ds. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения  $\widehat{O}$ ,  $\widehat{P}$  и  $\widehat{M}$  в (\*) и сокращая на  $ds$ , получим

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{\rho' - d} \right) \cos \varphi.$$

65. Решается на основании соображений, аналогичных примененным в предыдущей задаче.

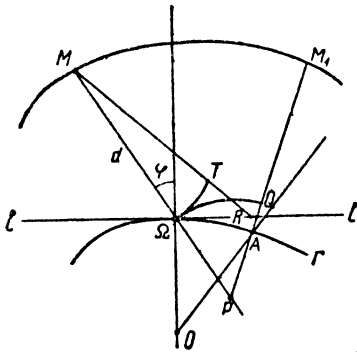


Рис. 25.

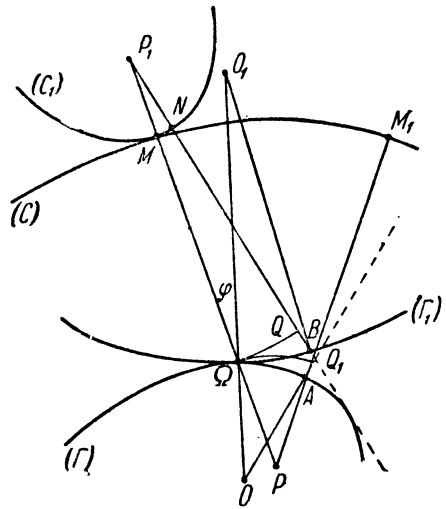


Рис. 26.

66. Пусть  $OO_1$  — нормаль к кривым  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$  в их общей точке касания (рис. 26), а  $O$  и  $O_1$  — соответственно центры кривизны. Проведем  $OM$ , получим общую нормаль к подвижной кривой  $(C_1)$  и ее огибающей  $(C)$ . Возьмем на кривой  $(\Gamma)$  бесконечно близкую к  $\Omega$  точку  $A$  и соответствующую ей точку  $B$  на  $(\Gamma_1)$ . Построив нормаль к  $(C_1)$  из точки  $B$ , получим в пересечении с нормалью  $\Omega M$  центр кривизны  $P_1$  кривой  $(C_1)$ . Аналогично найдем центр кривизны  $(C)$  в пересечении нормали к  $(C)$  из точки  $B$  с нормалью  $\Omega M$ .

С точностью до бесконечно малых высшего порядка можно положить:

$$\widehat{O} = \frac{\Omega A}{\rho} = \frac{ds}{\rho}; \quad \widehat{O}_1 = \frac{\Omega B}{\rho_1} = \frac{ds}{\rho_1}. \quad (*)$$

Описав окружности из центров  $P$  и  $P_1$  радиусами  $P\Omega$  и  $P_1\Omega$ , аналогично будем иметь:

$$\widehat{P} = \frac{Q_1\Omega}{r-d}; \quad \widehat{P}_1 = \frac{Q\Omega}{r_1+d}.$$

Но так как

$$Q_1\Omega = Q\Omega = \Omega B \cos \varphi = \cos \varphi ds,$$

то

$$\widehat{P} = \frac{ds}{r-d} \cos \varphi; \quad \widehat{P}_1 = \frac{ds}{r_1+d} \cos \varphi. \quad (**)$$

При движении, когда точка  $B$  совпадает с точкой  $A$ , точка  $N$  совместится с точкой  $M_1$  и подвижная плоскость с кривыми  $(\Gamma_1)$  и  $(C_1)$  повернется на угол  $(O_1B; OA)$  или, что то же самое, на угол  $(P_1B; PM_1)$ . А так как

$$(\widehat{O_1B; OA}) = \widehat{O} + \widehat{O}_1; \quad (\widehat{P_1B; PM_1}) = \widehat{P} + \widehat{P}_1,$$

то

$$\widehat{O} + \widehat{O}_1 = \widehat{P} + \widehat{P}_1.$$

Подставляя сюда значения  $\widehat{O}$ ,  $\widehat{O}_1$ ,  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{P}_1$  из (\*) и (\*\*) и сокращая на  $ds$ , получим:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \left( \frac{1}{r-d} + \frac{1}{r_1+d} \right) \cos \varphi.$$

**67.** Соединяя прямой точки  $M$  и  $\Omega$ , получаем нормаль к огибающей  $(C)$ . Далее проводим прямую  $P_1O_1$  через данные центры кривизны  $P_1$  и  $O_1$  кривых  $(C_1)$  и  $(\Gamma_1)$ , и продолжаем ее до пересечения (в точке  $Q$ ) с перпендикуляром  $\Omega Q$  к нормали  $\Omega M$ . Наконец, соединяя точку  $Q$  с центром кривизны  $O$  кривой  $(\Gamma)$ , получим искомый центр кривизны кривой  $(C)$  в пересечении прямых  $OQ$  и  $M\Omega$ .

Рис. 27.

Доказательство правильности этого построения получается из рассмотрения двух пар подобных треугольников (рис. 27)

$$\triangle PQ\Omega \sim \triangle PKO;$$

$$\triangle P_1Q\Omega \sim \triangle P_1HO_1;$$

и применения формулы Савари (см. задачу 67).

**68.** Решается на основании предыдущей задачи.

**69.** Окружность, касающаяся в мгновенном центре обоих кругов  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$ .

**70.** Окружность, касающаяся в мгновенном центре обоих кругов  $(\Gamma)$  и  $(\Gamma_1)$ . Эта окружность называется кругом перегиба.

71. Получается как следствие из самого построения этих кругов.  
 72. Окружность, касающаяся обоих центроид в мгновенном центре.  
 73. Принять во внимание, что при бесконечно малом перемещении мгновенный центр будет лежать на пересечении двух бесконечно близких нормалей неподвижной кривой (в соответствующей точке касания), т. е. в ее центре кривизны.

74. 1. Трактриса есть кривая с постоянной длиной касательной. Сделав неподвижным отрезок касательной (постоянной длины) и двигая трактрису с ее основанием, мы будем иметь случай, исследованный в предыдущей задаче. Искомый центр кривизны определится пересечением нормали к трактрисе в одном конце неподвижного отрезка и перпендикуляра к ее основанию в другом конце этого же отрезка.

2. Радиус-вектор образует постоянный угол с касательной к спирали. Сделаем неподвижным этот угол и будем перемещать спираль. Тогда искомый центр кривизны определится пересечением нормали из вершины угла (к спирали) с перпендикуляром из полюса к радиусу-вектору.

75. Пусть  $(C)$  и  $(C')$  — подвижные кривые, а  $\pi$  и  $\pi'$  — связанные с ними плоскости, скользящие по плоскости  $\pi_0$  неподвижных кривых.

Пусть далее  $J, J'$  — мгновенные центры вращения при передвижении  $\pi$  по  $\pi_0$  и  $\pi'$  по  $\pi_0$ . Очевидно это будут точки касания с неподвижными кривыми. Так как кривые  $(C)$  и  $(C')$  пересекаются под постоянным углом, то касательные и нормали в этой точке пересечения образуют четверку прямых неизменной формы, связанную с некоторой плоскостью  $\sigma$ , которая перемещается относительно  $\pi, \pi'$  и  $\pi_0$  так, что одна из ее точек постоянно находится в  $M$ , точке пересечения данных кривых  $(C)$  и  $(C')$ . При движении  $\sigma$  по  $\pi$  мгновенный центр  $\omega$  находится в центре кривизны кривой  $(C)$  для точки  $M$ . При движении же  $\sigma$  по  $\pi_0$  мгновенный центр будет на прямой  $J\omega$ ; но он будет также и на прямой  $J'\omega'$  ( $\omega'$  — центр кривизны кривой  $C'$  в точке  $M$ ), т. е. в их точке пересечения.

Следовательно нормаль к траектории точки  $M$  в плоскости  $\pi_0$  проходит через точку пересечения прямых  $J\omega$  и  $J'\omega'$ .

76. Эволюта неподвижной кривой.

77. Так как углы подвижного треугольника  $ABM$  не меняются, то для них легко можно определить мгновенные центры (рис. 28). Например для угла  $A$  известны траектории двух его точек:  $A$  и  $P$ . Проведя нормали к траектории  $(A)$  и  $(P)$  в точках  $A$  и  $P$ , найдем мгновенный центр  $\Omega_1$ .

Аналогичными же построениями найдем мгновенный центр  $\Omega_2$  угла  $B$ .

Опустив перпендикуляры из  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  на прямые  $AM$  и  $BM$ , найдем точки касания их со своими огибающими. Следовательно угол неизменной формы  $M$  при своем движении касается двух каких-то кривых. Зная две точки касания  $Q$  и  $R$ , легко построить мгновенный центр  $\Omega_3$ . Он лежит на пересечении перпендикуляров  $Q\Omega_3$  и  $R\Omega_3$ . Следовательно  $M\Omega_3$  будет нормалью к траектории точки  $M$ .

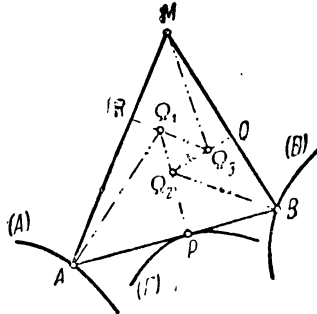


Рис. 28.

78. Решается аналогично предыдущей задаче. Прямая  $OM$ , соединяющая точку  $M$  с точкой  $O$ , делящей расстояние между мгновенными центрами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в данном отношении, будет нормалью к траектории точки  $M$  (рис. 29).

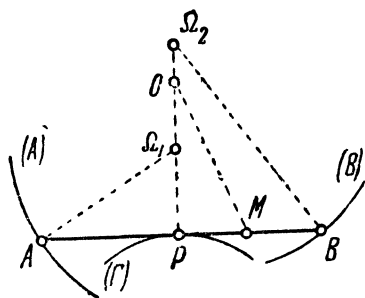


Рис. 29

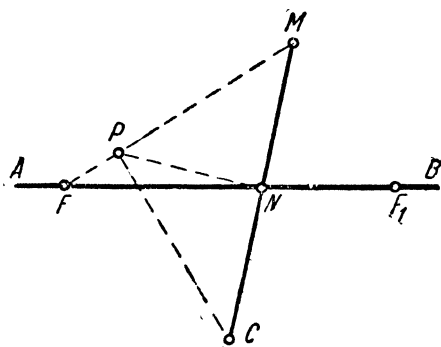


Рис. 30.

82. Пусть  $AB$  — большая ось эллипса, а  $F, F_1$  — его фокусы (рис. 30). Возьмем на нем произвольную точку  $M$  и построим в ней нормаль к эллипсу. Из точки пересечения нормали с фокальной осью восставим перпендикуляр  $NP$  (к нормали) и продолжим его до пересечения с радиусом-вектором  $FM$  (точка  $P$ ). Тогда перпендикуляр  $PC$  к  $FM$  пересечет нормаль в соответствующем центре кривизны  $C$ .

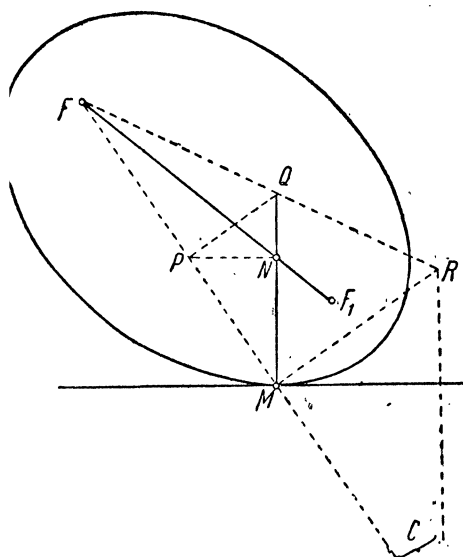


Рис. 31.

83. Пусть  $ABC$  — данный подвижный треугольник, а  $O_1$  и  $O_2$  — центры кругов, огибаемых его сторонами  $AB$  и  $AC$  (рис. 14). Строим окружность, проходящую через точки  $O_1, O_2$  и мгновенный центр  $\Omega$ . Затем на прямой  $A\Omega$  строим точку  $K$ , гармонически отделенную от  $\Omega$  точкой  $A$  и точкой пересечения построенной окружности с прямой  $\Omega A$ . Середина  $H$  отрезка  $\Omega K$  и будет искомым центром кривизны.

84. В точке касания  $M$  эллипса с неподвижной прямой (рис. 31) строим нормаль  $MN$  и продолжаем ее до пересечения с фокальной осью  $FF_1$ . Далее, проводим  $NP \perp MN$  до пересечения с прямой  $MF$ , соединяющей фокус  $F$  с точкой касания  $M$ . Затем строим  $PQ \perp FM$ . Через точку  $Q$  пересечения нормали  $MN$  с прямой  $PQ$  и через фокус  $F$  проводим пря-

мую  $FR$  до пересечения с  $MR$ , перпендикулярной  $MF$ . Искомый центр кривизны траектории фокуса  $F$  определится пересечением прямой  $FM$  и перпендикуляром из точки  $R$  на касательную.

## ГЛАВА II.

85. Прямая пересечения плоскостей  $\pi$  и  $\sigma$  принадлежит комплексу, а следовательно проходит через фокус  $P$  плоскости  $\sigma$ , т. е. фокус  $P$  плоскости  $\sigma$  лежит на плоскости  $\pi$ .

86. Для доказательства взять вместо плоскости  $\sigma$  бесконечно удаленную плоскость.

87. Доказательство, аналогичное приведенному в задаче 85.

88. Эта теорема является простым следствием предыдущей.

89. Пусть  $d$  есть ось пучка, а  $d'$  — геометрическое место фокусов плоскостей. Возьмем произвольную точку  $A$  на оси и проведем через нее плоскость  $\pi$  (произвольную). Пусть эта плоскость пересечет  $d'$  в точке  $A'$ .

Точка  $A'$  есть фокус одной из плоскости пучка. Следовательно и фокус плоскости  $\pi$  будет лежать на прямой  $AA'$ . Из этих рассуждений необходимо следует, что произвольно взятая плоскость  $\pi$  пересекает линию  $d'$  в одной точке. Значит линия  $d'$  есть прямая.

90. Возьмем на данной прямой  $d$  две произвольные точки  $A$  и  $B$  и построим соответствующие им фокальные плоскости  $\pi$  и  $\pi_1$ . Обозначим прямую пересечения  $\pi$  и  $\pi_1$  буквой  $d'$ . Фокусы плоскостей, проходящих через  $d'$ , лежат на одной прямой (см. предыдущую задачу), содержащей точки  $A$  и  $B$ , а это и нужно было доказать.

Обратное предложение предоставляется доказать читателю.

91. Так как прямая принадлежит комплексу, то фокусы всех плоскостей, проходящих через нее, лежат на ней же, т. е. сопряженная ей прямая совпадает с ней. Наоборот, если прямая совпадает со своей сопряженной, то следовательно всякая плоскость  $\pi$ , проходящая через нее, будет иметь своим фокусом одну из точек этой прямой. Значит пучок прямых, лежащих в этой плоскости, с центром в ее фокусе (а следовательно и данная прямая) принадлежит комплексу.

92. Доказывается способом „от противного“.

93. Пусть прямая  $m$  комплекса пересекает одну из взаимно сопряженных прямых  $d$  в точке  $M$ . Проведем плоскость через прямые  $m$  и  $d$ . Эта плоскость пересечет другую сопряженную прямую в точке  $F$ , которая будет ее фокусом, а так как прямая  $m$  лежит в этой плоскости и принадлежит комплексу, то должна пройти через фокус  $F$ , т. е. пересечет обе взаимно сопряженные прямые.

94. Бесконечно удаленная плоскость принадлежит всякому пучку параллельных плоскостей. Следовательно прямые, соединяющие фокусы плоскостей любого пучка (диаметры комплекса), проходят через фокус бесконечно удаленной плоскости, т. е. все они взаимно параллельны.

95. Принять во внимание, что прямая, сопряженная оси, лежит на пересечении бесконечно удаленной плоскости с плоскостью, ортогональной оси.

96. Пусть  $d$  и  $d'$  — пара взаимно сопряженных прямых, а  $g$  — их секущая. Плоскость, содержащая прямые  $d$  и  $g$ , пересекает прямую  $d'$  в

своем фокусе, через который очевидно пройдет и прямая  $g$ . Следовательно прямая  $g$  принадлежит комплексу.

97. Воспользоваться указанием к задаче 95.

98. Пусть плоскость  $\pi$  параллельна паре взаимно сопряженных прямых  $d$  и  $d'$ . Их обе точки пересечения лежат на бесконечно удаленной плоскости. Прямая, соединяющая их, принадлежит комплексу. Следовательно фокус плоскости  $\pi$  лежит на этой прямой (бесконечно удален), т. е. плоскость  $\pi$  есть диаметральная плоскость линейного комплекса.

99. Пусть ось и пара взаимно сопряженных прямых пересекают плоскость (ортогональную оси) соответственно в точках  $A$ ,  $D$  и  $D'$ . Прямая  $AD$ , будучи ортогональна оси, принадлежит комплексу. А так как она пересекает одну из взаимно сопряженных осей, то пересечет и другую, т. е. пройдет и через точку  $D'$ .

100. Общий перпендикуляр двух взаимно сопряженных прямых ортогонален диаметральной плоскости (именно той, которая параллельна этим прямым), а следовательно ортогонален и оси комплекса.

101. Пусть дана плоскость  $\pi$  и принадлежащая ей прямая  $d$ . Проведем через фокус этой плоскости какую-нибудь прямую  $g$ , пересекающую  $d$ . Так как прямая  $g$  принадлежит комплексу, то она должна пересечь и другую, сопряженную относительно  $d$ , прямую  $d'$ . Следовательно  $d'$  пересечет плоскость  $\pi$  в ее фокусе. Так как прямая  $d$  была взята произвольно, то все сказанное относится ко всем прямым плоскости  $\pi$ ; а это и нужно было доказать.

102. Обозначим точку пересечения прямых данной совокупности через  $F$ , а ее фокальную плоскость через  $\pi$ . Возьмем одну из прямых этой совокупности  $g$  и ей сопряженную  $g'$ . Всякая прямая  $m$ , проходящая через  $F$  и лежащая на плоскости  $\pi$ , принадлежит комплексу. Следовательно, пересекая в  $F$  одну из сопряженных прямых  $g$ , она должна пересечь и другую сопряженную прямую  $g'$ .

Вследствие произвольности прямой  $m$  заключаем, что прямая  $g'$  должна принадлежать плоскости  $\pi$ .

103. Доказывается аналогично предыдущей задаче. Нужно только принять во внимание, что все диаметры комплекса имеют общую точку на бесконечно удаленной плоскости.

104. Если две прямые пересекаются в некоторой точке  $F$ , то сопряженные им прямые должны лежать в фокальной плоскости точки  $F$  (см. задачу 18), т. е. тоже пересекаются.

105. Пусть пара взаимно сопряженных прямых  $g$  и  $g'$  пересекают произвольную плоскость  $\pi$  в точках  $G$  и  $G'$ . Проведем через фокус  $F$  плоскости  $\pi$  и точку  $G$  прямую. Очевидно эта прямая принадлежит комплексу, а следовательно пересечет и  $g'$ , т. е. пройдет через точку  $G'$ .

Таким образом три точки  $F$ ,  $G$ ,  $G'$  должны лежать на одной прямой.

106. Пусть  $g$ ,  $g'$  и  $l$ ,  $l'$  — данные две пары взаимно сопряженных прямых, а  $G$ ,  $G'$  и  $L$ ,  $L'$  — их точки пересечения с данной плоскостью. Искомый фокус определяется пересечением прямых  $GG'$  и  $LL'$  (см. предыдущую задачу).

107. Через данную прямую проведем две произвольные плоскости и построим их фокусы (см. предыдущую задачу). Прямая, проходящая через них, будет сопряженной относительно данной.



**108.** Строим фокус  $F$  данной плоскости и фокус  $F_1$  плоскости, параллельной ей. Прямая  $FF_1$  будет искомой.

**109.** Выберем из этой совокупности пучок плоскостей с осью  $g$ . Фокусы плоскостей этого пучка будут лежать на прямой  $g'$ , сопряженной  $g$ . А так как прямая  $g'$  должна принадлежать фокальной плоскости, общей точки данной совокупности, то следовательно все фокусы будут лежать в этой плоскости.

**110.** Для доказательства нужно предварительно установить, что ряды точек, определяемые прямыми комплекса на двух данных прямых, являются проективными рядами. После этого можно воспользоваться теоремой Шаля: подвижная прямая, пересекающая две неподвижные прямые (не лежащие в одной плоскости) и определяющая на них два проективных ряда, образует поверхность второго порядка.

Иначе можно рассуждать так: прямые комплекса, пересекая две данные прямые (не лежащие в одной плоскости), необходимо пересекут и их сопряженные прямые, а следовательно образуют линейчатую поверхность второго порядка.

**111.** См. предыдущую задачу.

**112.** См. задачи 107 и 110.

**113.** Линейная конгруэнция характеризуется тем, что через произвольно взятую точку пространства проходит только одна прямая, принадлежащая конгруэнции.

Возьмем какую-нибудь точку  $F$ . Через эту точку проходят две фокальные плоскости данных комплексов, пересекающиеся по прямой, принадлежащей обоим этим комплексам. Следовательно такие прямые образуют линейную конгруэнцию.

**114.** Проведем через данную прямую  $g$  плоскость  $\gamma$  (произвольную). По основному свойству линейных конгруэнций на всякой плоскости пространства лежит только одна прямая этой конгруэнции. Легко показать, что прямая  $g$  является простой линией исследуемой поверхности. Следовательно произвольная плоскость  $\gamma$ , проходящая через  $g$ , пересекает эту поверхность по прямой, а значит мы имеем дело с поверхностью второго порядка.

**115.** Возьмем плоский пучок прямых с вершиной  $O$  и обозначим его плоскость через  $\pi$ . Каждая прямая  $g$  этого пучка определяет линейчатую поверхность второго порядка (см. предыдущую задачу). Легко показать, что все эти поверхности проходят через две прямые конгруэнции  $d$  и  $d'$ ; одна лежит в плоскости  $\pi$ , а другая проходит через точку  $O$ . Но тогда, как известно из общей теории поверхностей второго порядка, должны быть еще две общих прямых у этих поверхностей (эти прямые могут быть мнимыми), не принадлежащих данной конгруэнции.

**116.** Рассмотреть директрисы линейной конгруэнции, образованной прямыми, общими двум данным комплексам (эти прямые могут быть мнимыми).

**117.** Два линейных комплекса определяют линейную конгруэнцию. Рассмотрим ее директрисы  $d$  и  $d'$  и третий комплекс. Прямые  $d$  и  $d'$ , вообще говоря, не будут взаимно сопряженными относительно этого комплекса, а следовательно его прямые, пересекающие  $d$  и  $d'$  (а значит принадлежащие конгруэнции), образуют поверхность второго порядка.

**118.** См. предыдущую задачу.

119. Каждая пара данных комплексов определяет линейную конгруэнцию. Возьмем обе пары директрис этих конгруэнций. Существуют две определенные прямые (вещественные или мнимые), пересекающие одновременно все четыре директрисы. Следовательно эти последние две прямые принадлежат всем четырем комплексам.

120. См. задачу 119.

121. См. задачу 119.

122. Проще всего эту теорему доказать аналитически, если принять во внимание, что уравнение линейного комплекса прямых содержит пять независимых постоянных.

Геометрическое построение (а следовательно и доказательство) линейного комплекса по пяти данным прямым предоставляется читателю.

123. Для доказательства выведем сначала одну вспомогательную формулу. Возьмем подвижной отрезок переменной длины и рассмотрим два его бесконечно близких положения:  $AB$  и  $A'B'$ . Пусть  $A''$  и  $B''$  — проекции точек  $A'$  и  $B'$  на прямую  $AB$ . Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка можем написать:

$$A'B' = A''B'' = A''A + AB + BB'';$$

откуда

$$A'B' - AB = BB'' - AA'';$$

Пусть, далее,  $\alpha$  есть угол между  $AA''$  и  $AB$ , а  $\beta$  — угол между  $BB''$  и  $AB$ .

Тогда:

$$A'B' - AB = BB' \cos \beta - AA' \cos \alpha. \quad (**)$$

По условиям нашей задачи,  $A'B' = AB$  и один из углов, например  $\alpha$ , равен  $\frac{\pi}{2}$ . Но тогда из (\*\*\*) заключаем, что  $\cos \beta = 0$ , т. е.  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , что и доказывает теорему.

124. При бесконечно малом перемещении фигуры неизменного вида каждая ее точка описывает определенную траекторию (кривую). Следовательно нормали к траектории в любой ее точке лежат в одной плоскости (нормальная плоскость траектории). Другими словами, каждой точке будет соответствовать плоский пучок прямых — нормалей; т. е. совокупность нормалей принадлежит линейному комплексу. Этот комплекс образован нормальными к траекториям всех точек пространства, неизменно связанного с подвижной фигурой.

125. Бесконечно малое перемещение прямой можно осуществить вращением вокруг определенной мгновенной оси (см. введение). Эта ось определяется пересечением двух плоскостей, нормальных к траекториям любых двух точек подвижной прямой. Следовательно через эту ось проходят плоскости, нормальные к траекториям всех точек подвижной прямой.

126. Доказательства предоставляются читателю. Принять во внимание, что фокальная плоскость ортогональна касательной.

127. Сопряженная прямая характеристики лежит на пересечении нормальных плоскостей к траекториям всех точек характеристики. Но эти нормальные плоскости должны быть ортогональны к подвижной плоско-

сти. Следовательно их линия пересечения будет ортогональна к характеристике.

128. Нормали к траекториям точек пучка входят в состав линейного комплекса. Следовательно для доказательства можно воспользоваться соображениями задачи 89.

129. Соединим прямой неподвижную точку с подвижной. Эта прямая при движении образует конус, причем траектория движущейся точки ортогонально пересекает его образующие. Следовательно исследуемая траектория лежит на сфере с центром в вершине конуса.

130. Если кривая не плоская, то все ее касательные должны пройти через эту точку, что невозможно. Следовательно кривая должна быть плоская.

131. См. о перемещении плоскости, помещенной во введении.

132. Этот перпендикуляр является нормалью к траектории своего основания и к образующей линейчатой поверхности, на которую он опущен из фокуса. Будучи ортогонален к двум направлениям на линейчатой поверхности (в основании), он должен быть нормалью к поверхности.

133. Это следует из самого определения характеристики (см. введение).

134. Основание перпендикуляра, опущенного из фокуса плоскости на ее характеристику.

135. Для неподвижности прямой (без скольжения по самой себе) необходимо задать пять условий: три условия для закрепления одной из ее точек и два условия для фиксирования ее направления. Отбрасывая одно из условий, получим, что все точки будут описывать криволинейные траектории.

136. Решается аналогично предыдущей задаче. Нужно отбросить два условия.

137. Решение предоставляется читателю (см. задачу 136).

138. Движение фигуры неизменной формы вполне определяется движением плоскости, неизменно связанной с ней. Таким образом вопрос сводится к исследованию перемещения плоскости. Для неподвижности плоскости очевидно достаточно закрепить одну из ее прямых (пять условий) и добавить еще одно условие. Следовательно шесть условий вполне определяют положение фигуры неизменной формы. Отбрасывая одно из этих шести условий, получим, что все точки этой фигуры смогут перемещаться по криволинейным траекториям.

139. Решается аналогично предыдущей задаче. Нужно отбросить два условия.

140. См. задачу 124.

141. Рассмотрим движение фигуры неизменной формы, определенное четырьмя основными условиями. Каждая точка фигуры опишет при этом некоторую определенную поверхность  $\sigma$ . Добавим теперь еще одно условие (пятое). Тогда каждая точка опишет уже кривую, лежащую на соответствующей поверхности  $\sigma$ . При этом нормали к траекториям всех точек пространства, неизменно связанного с подвижной фигурой, образуют линейный комплекс  $\Omega$ . Если изменить добавленное пятое условие, то изменятся и кривые (траектории) на поверхностях  $\sigma$ , т. е. будем

иметь другой линейный комплекс  $\Omega$  нормалей. Нормали же к поверхностям  $\sigma$  очевидно принадлежат обоим комплексам следовательно входят в состав линейной конгруэнции, определяемой  $\Omega$  и  $\Omega'$ .

142. Решение предоставляется читателю.

143. Для доказательства воспользоваться основными кинематическими свойствами сопряженных прямых.

144. Доказывается на основании предыдущей задачи.

145. Перпендикуляр к плоскости, пересекающий обе взаимно сопряженные прямые, ортогонален к траекториям всех своих точек, в частности своего основания. Следовательно касательная к траектории его основания лежит в этой плоскости, а значит будет характеристикой этой плоскости.

146. См. предыдущую задачу.

147. См. задачу 146.

148. Данная совокупность нормалей принадлежит линейному комплексу. Следовательно, если эти нормали пересекают одну из пары взаимно сопряженных прямых, то они должны пересечь и другую прямую.

149. См. задачу 94.

150. Дадим телу бесконечно малое перемещение, и рассмотрим совокупность нормалей к траекториям всех его точек. Они принадлежат линейному комплексу. Проведем ряд параллельных плоскостей ортогонально оси комплекса. Тогда соответствующие бесконечно малые перемещения всех фокусов этих плоскостей будут слагаться из вращения вокруг оси комплекса и параллельного ей перемещения, что и доказывает требуемое.

151. См. предыдущую задачу.

152. Для доказательства принять во внимание, что в каждый момент оба аксоида имеют общую образующую, общую центральную плоскость, общую центральную точку и параметр. Но можно доказать и иначе.

Обе поверхности имеют общую образующую — мгновенную винтовую ось  $g$ . При бесконечно малом перемещении подвижной фигуры точки, лежащие на этой оси, смещаются вдоль нее. Следовательно скольжение вдоль по образующей доказано. Остается только убедиться в том, что оба аксоида касаются вдоль общей образующей  $g$ . Для этого рассмотрим точку  $M$ , движущуюся вдоль прямой  $g$ . Абсолютное движение этой точки складывается из ее относительного движения (по отношению к твердому телу) и переносного движения, которым обладает подвижной аксоид. Значит относительная траектория точки  $M$  лежит на подвижном аксоиде, а абсолютная — на неподвижном. Касательные к этим траекториям совпадают, так как переносное движение направлено вдоль прямой  $g$ . Следовательно и касательные плоскости в точках общей образующей у обоих аксоидов совпадают, что и доказывает теорему.

153. Две конические поверхности, имеющие вершины в неподвижной точке фигуры.

Эта задача решается на основании предыдущей, но ее нетрудно решить и самостоятельно. Для этого нужно построить сферу с центром в неподвижной точке и рассмотреть движение сферических фигур, полученных от сечения этой сферой данной фигуры. Применяя к ним теорему о центроидах (которая легко обобщается для сферы), придем к искомому результату.

154. Пусть  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  — пять точек данной подвижной фигуры, которые скользят по пяти данным поверхностям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ . Проведем через эти точки нормали  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  к поверхностям  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Очевидно эти нормали будут нормальными к траекториям точек  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Возьмем четыре нормали  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Нетрудно убедиться, что существуют две прямые (вещественные или мнимые), которые пересекают все эти четыре нормали. Действительно, три из них, например  $a_1, a_2, a_3$  определяют гиперboloид, а четвертая  $a_4$ , пересекая его в двух точках, определит две образующие  $g, g'$ , проходящие через эти точки, и следовательно пересекающие все четыре нормали. Прямые  $g, g'$  взаимно сопряженные. В самом деле, прямая  $a_1$ , принадлежа линейному комплексу и пересекая  $g$ , должна пересечь ее сопряженную; то же можно сказать и относительно  $a_2, a_3, a_4$ . Следовательно обе прямые,  $g$  и ее сопряженная, пересекают все четыре нормали, т. е. сопряженная прямой  $g$  есть прямая  $g'$ .

Обратимся теперь к задаче. 1. Для построения нормальной плоскости к траектории некоторой точки  $M$  проведем через  $M$  прямую  $m$ , пересекающую  $g$  и  $g'$ . Прямая  $m$ , пересекая обе сопряженные прямые, будет ортогональна к траекториям всех своих точек, следовательно лежит в нормальной плоскости траектории точки  $M$ . Взяв другую четверку нормалей, например  $a_1, a_2, a_3, a_5$ , и построив соответствующую пару взаимно сопряженных прямых  $g_1$  и  $g_1'$ , определим аналогично предыдущему прямую  $m'$ . Плоскость, проходящая через прямые  $m, m'$ , и будет искомой нормальной плоскостью к траектории точки  $M$ .

2. Пусть кривая  $l$  своим движением образует поверхность  $\sigma$ . Для построения нормали к  $\sigma$  в некоторой ее точке  $L$  нужно построить две нормальные плоскости: одну к кривой  $l$  в ее точке  $L$ , а другую к траектории точки  $L$ . Своим пересечением они определяют нормаль к поверхности  $\sigma$ .

3. Пусть поверхность  $\sigma_0$  огибает поверхность  $\Sigma$ . Обе эти поверхности касаются друг друга вдоль характеристики, при этом очевидно касательные к траекториям точек характеристики касаются  $\sigma_0$ . Следовательно для построения точек характеристики строим нормали к поверхности  $\sigma_0$ , пересекающие пару взаимно сопряженных прямых. Основания этих нормалей и будут искомыми точками характеристики.

4. Для построения мгновенной оси берем две пары взаимно сопряженных прямых:  $g, g'$  и  $g_1, g_1'$ . Строим общий перпендикуляр к  $g, g'$  и к  $g_1, g_1'$ . Прямая, ортогональная к этим двум перпендикулярам и пересекающая их, будет искомой мгновенной осью.

155. Пусть  $g$  есть подвижная прямая, касающаяся в одной из своих точек  $A$  траектории этой точки. Проведем нормальную плоскость  $\pi$  в точке  $A$ . Прямая  $g'$ , сопряженная  $g$ , должна лежать в плоскости  $\pi$ . Следовательно плоскость  $\pi$ , проведенная через  $g$  ортогонально  $g'$ , определяет на  $g'$  свой фокус, а следовательно и точку касания  $g'$  к траектории.

156. Воспользоваться соображениями предыдущей задачи.

157. Нормали к траекториям точек подвижной прямой  $g$  принадлежат линейному комплексу. Пересекая эту прямую, они должны пересечь и сопряженную ей прямую. Опуская из точек прямой  $g'$  перпендикуляры на

прямую  $g$ , получим нормали к линейчатой поверхности вдоль образующей  $g$ . Н конец, вспоминая основные положения проективной геометрии об образовании линейчатых поверхностей второго порядка, заключаем, что эти нормали лежат на гиперболическом параболоиде.

158. Однополостный гиперболоид.

159. Воспользоваться основными свойствами линейной конгруэнции.

160. Гиперболический параболоид.

161. Пусть точка  $M$  описывает поверхность  $\sigma$ . Проведем через  $M$  прямую, пересекающую обе директрисы конгруэнции нормалей. Эта прямая и будет искомой нормалью.

Если директрисы не вещественны, то можно поступить иначе. Пусть точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  описывают соответственно поверхности  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ , и пусть нормали в этих точках будут соответственно  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Прямая  $MA_1$  пересечет гиперболоид, определяемый нормальями  $a_1, a_2, a_3$ , в некоторой точке  $G$ . Для построения  $G$  проводим через  $a_1$  и  $MA_1$  плоскость. Эта плоскость пересечет гиперболоид по некоторой прямой, пересекающей  $A_1M$  в искомой точке  $G$ . Проведем через  $G$  образующую  $m$ , и, применяя аналогичные рассуждения, построим еще одну образующую  $m'$  (используя нормали  $a_1, a_2, a_4$ ).

Тогда образующая гиперболоида, определяемого прямыми  $a_1, m, m'$ , проходящая через  $M$ , будет искомой нормалью.

### ГЛАВА III.

162. Прямые  $a, b, AB$  и прямая  $g$ , определяющая траекторию точки  $G$ , образуют в своем пересечении четыре треугольника. Окружности, описанные около этих треугольников, все пересекаются в одной точке  $P$ . Далее, окружность, проходящая через эту точку  $P$  и касающаяся прямой  $g$  в точке  $C$ , пересечет прямую  $AB$  в некоторой точке  $O$ . Эта точка  $O$  и будет искомым центром вращения.

163. Обозначим данный центр кривизны через  $A$ , а точку пересечения касательной в  $M$  с прямой  $a$  — через  $B$ . Искомый мгновенный центр определится пересечением окружности, описанной около треугольника  $ABM$ , с прямой, соединяющей точку  $M$  с вершиной подвижного прямого угла.

164. Окружность, проходящая через точку  $Q$ .

165. Обобщенная циссоида (Kissoidalkurve). При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  получается обыкновенная циссоида Диоклеса. Нормаль проходит через точку пересечения перпендикуляра к середине отрезка  $OP$  с нормалью к окружности в точке  $M$ .

166. См. предыдущую задачу.

167. Спираль Архимеда.

168. Окружность, центр которой совпадает с общим центром данных конических сечений.

169. 1. Две конгруэнтные кривые второго порядка.

2. Две конгруэнтные параболы.

170. Неподвижная центроида — парабола с вершиной в данной неподвижной точке. Подвижная центроида — кривая третьего порядка.

171. Неподвижная центроида — круг с центром в данной неподвижной точке. Подвижная центроида — прямая.

172. Неподвижная центроида — траектория точки касания. Подвижная центроида — кардиоида.

173. Неподвижная центроида — данная окружность ( $\Gamma$ ), а подвижная центроида — круг со вдвое большим радиусом.

174. Треугольник  $C_1C_2C_3$  подобен треугольнику, образованному прямыми  $a_1, a_2, a_3$ .

175. Пусть  $C$  есть центр кривизны данной кривой (рис. 32), а  $P$  — полюс подэры (геометрическое место точки  $M$ ). Строим мгновенный центр  $\Omega$  и нормаль  $M\Omega$  подэры. Далее, проводим  $QC \perp A\Omega$ . На прямой  $Q\Omega$ , как на гипотенузе, строим прямоугольный треугольник  $\Omega QR$ , при условии  $\Omega R \perp M\Omega$ . Из точки пересечения  $MR$  и  $\Omega Q$  опускаем перпендикуляр на  $M\Omega$ . Основание  $B$  этого перпендикуляра и будет искомым центром кривизны подэры.

176. Принять во внимание, что лемниската Бернулли есть подэра равнобочной гиперболы относительно ее центра. Воспользоваться предыдущей задачей.

177. Циссоида есть подэра параболы с полюсом в ее вершине. Воспользоваться задачей 176.

178. Циклоида (удлиненная).

179. Кривая второго порядка.

180. Циклоида, подобная данной.

181. Рассмотрим подвижной круг ( $\Gamma'$ ), равный данному кругу ( $\Gamma$ ), катящийся по нему без скольжения. Построим точку  $S'$ , симметричную точке  $S$  относительно касательной к обоим кругам (в их общей точке  $M$ ). Легко видеть, что  $S'$  неизменно связана с ( $\Gamma'$ ), а следовательно будет описывать эпициклоиду (именно улитку Паскаля). Отраженные лучи будут ортогональны к этой эпициклоиде. Следовательно их огибающая будет эволютой этой кривой.

182. Кривая, подобная данным, или параллельная кривой, подобной данным.

183. См. задачу 41.

184. Гипоциклоида с тремя вершинами.

185. Замкнутая кривая четвертого порядка.

186. Из середины хорды  $AB'$  восстанавливаем перпендикуляр и строим нормали  $a$  и  $b$  к траекториям точек  $A$  и  $B$ . Середина отрезка, определенного на этом перпендикуляре нормальми  $a$  и  $b$ , будет искомым центром кривизны.

187. Обозначая дугу рулетты через  $S$ , а соответствующую ей дугу кривой ( $\Gamma_1$ ) через  $\sigma$ , будем иметь

$$\frac{S}{\sigma} = \sin \theta.$$

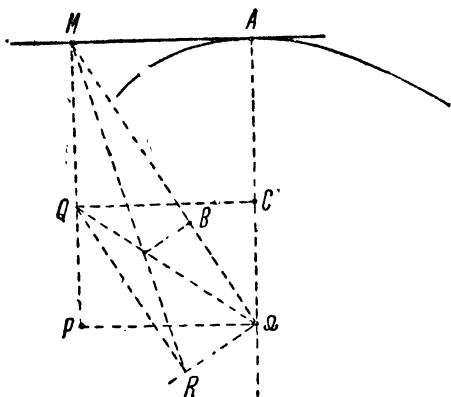


Рис. 32.

188. Прямая.
189. Прямая.
190. Парабола.
191. Окружность с центром на прямой и с радиусом, в четыре раза большим радиуса круга, образующего циклоиду.
192. Эллипс, фокусы которого лежат на данной прямой. Длина большой оси равна длине самой эпициклоиды, а длина малой оси — длине ее эволюты.
193. Гиперболический параболоид. Его направляющая плоскость ортогональна прямой, сопряженной данной.
194. Развертывающаяся поверхность четвертого порядка и третьего класса.
195. Неплоская кривая третьего порядка.
196. Конус второго порядка.
197. Однополостный гиперболоид.
198. Цилиндрическая поверхность.
199. Поверхность второго порядка.
200. Все касательные лежат в одной плоскости и огибают параболу, фокусом которой является фокус этой плоскости.
201. Поверхность четвертого порядка с тройной прямой.
202. Неплоская кривая пятого порядка.
203. Неплоская кривая третьего порядка.
204. Плоскость.
205. Эллипсоид.
206. Плоскость, параллельная неподвижной прямой.
207. Сфера, центр которой лежит на линии центров трех данных сфер.
208. Каждая точка прямой описывает эллипс. Центры всех этих эллипсов лежат на одной прямой.
209. Сферические кривые шестого порядка. Центры сфер, на которых лежат эти кривые, образуют коническое сечение, расположенное в плоскости центров четырех данных сфер.
210. Развертывающаяся поверхность четвертого порядка и третьего класса.
211. Таких точек на прямой может быть, вообще говоря, только три. Если же их будет больше трех (например четыре), то и все остальные точки этой прямой обладают таким же свойством.
212. Шесть точек.
213. Четыре точки.
214. Шесть точек.
215. Восемь точек.
216. Таких точек, вообще говоря, будет пять.
217. Неплоская кривая шестого порядка.
219. Коническая поверхность второго порядка.
220. 1. Неплоская кривая третьего порядка.  
2. Развертывающаяся поверхность четвертого порядка.
221. Неплоская кривая третьего порядка.
222. Коническое сечение, проходящее через четыре данные неподвижные точки.



223. Каждая плоскость пучка касается некоторой сферы. Центры всех этих сфер лежат на плоскости, заключающей центры четырех данных сфер, и образуют кривую второго порядка.

224. Сфера, центр которой лежит на одной прямой с центрами данных сфер.

224а. Гиперболический параболоид.

225. Сферы, центры которых лежат на одной прямой с тремя данными неподвижными точками.

226. Неплоская кривая шестого порядка.

227. Характеристика второй грани тоже ортогональна ребру.

228. Построить двугранный угол, образованный нормальной плоскостью к траектории точки  $M$  и нормальной плоскостью к поверхности, проходящей через соответствующую образующую. Воспользоваться предыдущей задачей.

229. Опишем около данной поверхности (пусть это будет например эллипсоид) цилиндр, ось которого параллельна прямой пересечения двух подвижных плоскостей. Сообщим этим плоскостям такое движение, чтобы они касались цилиндра. Тогда их линия пересечения опишет цилиндр, коаксиальный с ранее построенным. Рассмотрим сечения этих двух цилиндров третьей плоскостью. Очевидно мы будем иметь эллипс и концентричный ему круг, описанный вершиной ортогонального подвижного триэдра.

Плоскость этого круга ортогональна оси цилиндра (она проходит через центр эллипсоида). Следовательно любая нормальная плоскость этого круга пройдет через центр поверхности.

Таким образом, если построить две проходящие через вершину триэдра нормальные плоскости двух кругов (соответственно двум цилиндрам), то они пересекутся по нормали к искомому геометрическому месту. Очевидно эта нормаль пройдет через центр эллипсоида. Следовательно вершина подвижного триэдра опишет сферу, концентричную эллипсоиду.

230. Искомое геометрическое место есть плоскость, ортогональная оси параболоида. Решается аналогично предыдущей задаче.

231. Сфера, концентричная эллипсу. Решается аналогично предыдущей задаче.

232. Плоскость, ортогональная оси параболы. Решается аналогично предыдущей задаче.

233. Повернем поверхность вокруг данной прямой на бесконечно малый угол. Кривая пересечения (порядка  $m^2$ ) двух смежных положений поверхности будет характеристикой огибающей. Вдоль этой линии обе поверхности (данная и ее огибающая) касаются друг друга. Следовательно нормали к данной поверхности, восстановленные во всех точках характеристики, пересекут ось вращения, а значит искомое геометрическое место будет алгебраической кривой порядка  $m^2$ .

234. Построим характеристику, соответствующую одной прямой. Это будет алгебраическая кривая порядка  $m^2$ . Повернем теперь нашу поверхность вокруг второй данной прямой на бесконечно малый угол. В своем новом положении она пересечет характеристику в  $m^2$  точках. Следовательно возможно провести, вообще говоря,  $m^2$  нормалей, пересекающих две данные прямые.

**235.** Нетрудно доказать, что нормали к данной поверхности вдоль линии пересечения ее с данной плоскостью образуют линейчатую алгебраическую поверхность порядка  $m^2$ . Сама же линия пересечения порядка  $m$ . Отсюда легко заключить, что число нормалей, лежащих в данной плоскости, будет  $m^2 - m$  (для этого нужно рассмотреть пересечение плоскости с линейчатой поверхностью нормалей).

**236.** Проведем через данную точку две произвольные прямые. Из  $m^3$  нормалей, пересекающих эти прямые, очевидно нужно отбросить те, которые лежат в плоскости, проходящей через эти же прямые. Таким образом получим искомое число нормалей

$$m^3 - m^2 + m.$$

**237.** 1. Неплоская кривая третьего порядка.

2. Конус второго порядка.

**238.** Развертывающаяся поверхность четвертого порядка.

**239.** Поверхность третьего порядка.

*Указание.* Сначала надо доказать, что у всякой прямой, неизменно связанной с подвижной фигурой, имеются три точки со стационарными соприкасающимися плоскостями к их траекториям.

**240.** Поверхность третьего порядка, содержащая по крайней мере одну прямую.

**241.** Поверхность шестого порядка.

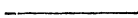
**242.** Поверхность шестого порядка, проходящая через мнимый бесконечно удаленный круг.

**243.** Поверхность восьмого порядка.

**244.** Поверхность пятого порядка.

**245.** Траектории точек кривой ( $\Gamma$ ) и последовательные положения этой же кривой.

**246.** Центры геодезической кривизны совпадают.



## УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН.

- Айри 121  
Александр 9, 72, 171, 173  
Александров 9, 10, 74  
Аронголь 119  
Барбарен 132  
Бернулли 112  
Бетти 7  
Бобилье 120, 123  
Боннэ, О. 135  
Брианшон 86, 102, 104, 246  
Броуэр 9  
Бур 123  
Веблен 9, 10, 68  
Вьеторис 9, 10  
Дедекинд 106  
Дезарг 82, 87, 103, 104, 107, 228, 259,  
261, 262  
Декарт 112  
Ден 7, 8, 10, 44, 45, 160, 164, 166, 167  
Дик 7, 27, 29, 32  
Д'Окань 132  
Ефремович 167  
Жергон 87  
Жордан 172  
Игнатъев 13  
Кеннеди 119  
Клейн 7, 24  
Кнезер 10, 45  
Лагерр 97  
Лефшец 9, 10, 50, 75, 158  
Лигин, В. 117  
Листинг 7, 45  
Манхейм 112, 113, 120  
Марков 9, 19, 35, 48, 54, 58, 60, 75,  
142, 150, 158, 161, 164, 173  
Мебиус 7, 23, 24, 87, 106, 107, 116, 258  
Мишинский 40  
Огиевецкий, И. Е. 117  
Паскаль 86, 102, 104, 105, 246  
Плюккер 102  
Понселе 82, 87, 107, 129, 242  
Понтрягин 9  
Пуанкаре 7, 72, 75, 78, 166, 172  
Риман 7  
Рожанская 10  
Савари 123  
Симсон 132  
Сомов 117  
Степанов 10  
Терквем 136  
Тице 9, 10  
Тэт 7, 12  
Успенский 13, 139  
Ферма 12  
Франкль 10, 157  
Хопф 9, 31, 34, 72, 148, 171  
Худсков 9, 17, 32, 47, 52, 72, 79, 80  
175, 176  
Хээгод 7, 8, 44, 45, 160  
Чеботарев 10  
Шаль 112, 113, 114, 115, 118  
Штаудт 101, 104, 106, 107, 240, 243, 269  
Штейнер, Я. 98, 99, 106, 118  
Эйлер 7, 113, 114, 115, 118, 139  
Ahrens, 13  
Alexander 9, 72, 171, 173  
Alexandroff 9, 10, 74  
Ampère 113.  
Appell 26  
Artin 45, 72, 176  
Baltzer 19  
Birkhoff 175  
Boy 26, 32  
Brianchon 86, 102, 104, 246  
Brisse, Ch. 117  
Brückner 26  
Cayley 12, 19  
Carnot, 113.

- Cauchy 112  
 Chasles, M. 117, 118  
 Cohn-Vossen 23, 26, 32, 78, 148  
 Dedekind 106  
 Dehn 7, 8, 10, 44, 45, 160, 161, 166, 167  
 Desargues 82, 87, 103, 104, 107, 228, 259,  
 261, 262  
 Dingeldey 26  
 Dyck 7, 27, 29, 32  
 Errera 13, 19, 142  
 Fischer 72  
 Frankl 10, 157  
 Franklin 12, 13  
 Gergonne 87  
 Joursat 26  
 Goeritz 45  
 Graf 26, 35, 36, 149  
 Haag 133  
 Heegaard 7, 8, 44, 45, 160  
 Hilbert 23, 26, 32, 78, 148  
 Hinrichsen 13  
 Hofmann 26, 35  
 Hopf 9, 31, 34, 72, 148, 171  
 Hotelling 44, 45, 59, 60, 61  
 Hunziker 13, 142  
 van Kampen 72  
 Kamus 121  
 Kempe 12, 19  
 Klein 7, 24  
 Kneser 10, 45  
 Koebe 26  
 Koenig 26, 30, 34  
 Kreines 60, 172  
 Laguerre 97  
 Lefschetz 9, 10, 50, 75, 158  
 Levi 26  
 Listing 7, 45  
 Mamlock 13  
 Mannheim A. 118  
 Möbius 87, 106, 107, 258  
 Pannvitz 31, 34, 148, 171  
 Pascal 86, 102, 104, 105, 246  
 Plücker 102  
 Poincaré 7, 72, 75, 78, 166, 172  
 Poncelet 82, 87, 107, 242  
 Reidemeister 26, 45  
 Reynolds 12, 13  
 Rivals 132  
 Sainte-Laguë 13, 16, 18  
 Schoute 13, 15, 72, 80  
 Schoenflies, A. 118  
 Seifert 10, 30, 36, 40, 45, 72, 73, 79, 160,  
 163, 172, 173  
 Simony 26  
 Singer 45  
 Staudt 101, 104, 106, 107, 240, 243, 269  
 Steiner 98, 99, 106  
 Study 13  
 Tait 7, 12  
 Threlfall 10, 30, 36, 40, 73, 79, 172  
 Tietze 9, 10  
 Veblen 9, 10, 68  
 Vietoris 9, 10  
 van der Waerden 10  
 Wronski 113
-

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Автополярный треугольник 189  
 Аксиальное направление 117  
 Алгебраический комплекс 67  
 Амфихейральное дерево 175  
 Амфихейральный комплекс 146  
 Асимптота плоской кривой 84  
 Баромейское заплетение 52, 81  
 Бесконечно удаленные элементы 82, 108  
 Бипирамидальное пространство 77, 173  
 Вершина конуса 103  
 Внешняя область относительно кривой 2-го порядка 84  
 Внутреннее преобразование 8, 66  
 Внутренняя область относительно кривой 2-го порядка 84  
 Гармоническая сопряженность 84  
 Гипербола 84  
 Гиперболическая проективность 94  
 Гиперболический параболоид 105  
 Гомеоморфия 7, 8  
 Гомология 68, 72  
 Гомотопия 8, 67, 72  
 Граница 11, 67  
 — поверхности 20  
 — симплекса 65  
 Графа 11, 14, 15, 17  
 Группа Бетти 70, 74  
 — гомологии 69  
 — кручения 70  
 — Пуанкаре (фундаментальная) 71  
 Двойное отношение 89  
 Двойные линии 23, 30, 33, 147, 149  
 Двойные элементы 94  
 Двумерное многообразие 20  
 Двумерный комплекс 11, 65  
 Дву-или одностороннее расположение 24, 167, 169.  
 Делитель границы 68  
 Дерево 12, 15, 17, 18, 19, 139  
 — амфихейральное 175  
 — заузленное 175  
 Диаметр кривой 86  
 — комплекса 126  
 Директриса кривой 102  
 Директрисы конгруэнции 127  
 Диаграмма Хээгода 44, 57, 75, 159, 170  
 Замкнутая кривая (окружность) 11, 63  
 Замкнутая поверхность 11, 20, 30, 31, 66, 70  
 Замкнутый отрезок 109  
 Замкнутая угловая область 110  
 Замкнутая треугольная область 110  
 Заузленное дерево 175  
 Изотопия 8, 67  
 Изотропные прямые 97  
 Инвариант проективности 96  
 Инверсионное пространство 44, 50  
 Инволюция (инволюторная проективность) 94  
 Касательная плоскость 103, 104  
 Касательная прямая 84, 98, 104  
 Кинематическая геометрия 112  
 Класс конгруэнции 116  
 Клетка  $E_n$  65, 71  
 Коллинеарное соответствие 93  
 Комплекс 10, 11, 20, 30, 35, 43, 65, 66,  
 — алгебраический 67  
 — амфихейральный 146  
 — трехмерный 43, 65  
 — двумерный 11, 35  
 — отрезочный 10, 30, 66  
 — обратный 11, 13, 14, 79  
 — прямых 116  
 Конгруэнция 116  
 Контур (граница поверхности) 11, 20  
 Конус (коническая поверхность) 103  
 Концы отрезка 109  
 Конхойда Никомеда 119  
 Коррелятивное соответствие 93  
 Коса 48, 155  
 Коэффициенты кручения 70, 75  
 Кривая 2-го порядка 84, 99  
 Круг перегиба 286  
 Лежать на 108  
 Лемниската Бернулли 132  
 Лента (незамкнутая поверхность) 20, 21  
 — Мебиуса 8, 19, 23, 24, 27, 40, 74, 79, 147, 150, 152, 159  
 Линейчатая поверхность 2-го порядка 104  
 Линейчатый ряд 104  
 Мгновенная ось 114  
 Мгновенный центр 113  
 Метод проекций 82

- Мнимые элементы 94  
 Многообразие 11, 12, 20, 43, 66  
 — двумерное 20  
 — одномерное 12  
 — незамкнутое 66  
 — трехмерное 43, 66  
 Направление описывания 109, 110  
 Направляющие линейчатого ряда 104  
 Незамкнутая поверхность (лента) 20, 21  
 Незамкнутое трехмерное пространство 43  
 Незамкнутое многообразие ( $n$ -мерное) 66  
 Неориентируемый тор 38, 39, 78, 79, 147, 148, 166.  
 Обобщенная абсцисса 90  
 Обобщенные координаты 91, 92  
 Образующие линейчатой поверхности 104  
 Образующие конуса 103  
 Обратная проективность 96  
 Обратный комплекс 11, 13, 14, 79  
 Одномерное многообразие 12  
 Однополюй гиперboloид 105  
 Одно- или двустороннее расположение 24, 167, 169  
 Однородные координаты 90, 91, 92  
 Окружность (в топологии) 11, 66  
 Ось коллинеации 94  
 Ось комплекса 126  
 — кривой 2-го порядка 86  
 Ориентация клетки  $E_n$  67  
 — поверхности 22, 24, 25, 167  
 Открытый отрезок 109  
 Открытая угловая область 110  
 Открытая треугольная область 110  
 Отрезок 8  
 Отрезочный комплекс 10, 30, 66  
 Отрезочный путь 11, 16, 17, 18, 71  
 Отношение (простое) 88  
 Парабола 84  
 Параболическая проективность 94  
 Параллельность 108  
 Пересечение 108  
 Перспективность 92  
 Плоская система 88  
 Плоскость (в проективной геометрии) 108  
 — диаметральная 116  
 — фокальная 116  
 Поверхность 20  
 — Боя 32, 33, 42  
 — Дика 23, 24, 42, 78, 154  
 — замкнутая 11, 20, 30, 31, 66, 70  
 — незамкнутая (лента) 20, 21  
 — риманова 25, 35, 36, 150  
 — тора 19, 21, 22, 37, 40, 70, 72, 78, 152  
 — шара 19, 21, 65  
 Подобие рядов точек 97  
 Подэра 119  
 Полный четырехсторонник 85  
 Полный четырехугольник 85  
 Поляра 85, 103  
 Полярная плоскость 103  
 Полюс 85  
 Порядок отрезочного комплекса 11  
 — конгруэнции 116  
 Принцип двойственности 87  
 Проективная плоскость 32, 69, 78, 169  
 172, 175  
 Проективное пространство 60, 79, 173, 174  
 Проективность 92, 93  
 Проективные свойства 83  
 Пространственная система 88  
 Пространство (в проективной геометрии) 108, 43, 66  
 Пространство бипирамидальное 77, 173  
 — инверсионное 44, 50  
 — проективное 60, 79, 173, 174  
 — симметричное 45, 54, 74, 158  
 — риманова 44, 56, 74, 159, 170  
 — фазовое 175  
 Проходить через 108  
 Прямая (в проективной геометрии) 108  
 Прямая проективность 96  
 Пучок плоскостей 88  
 Пучок плоскостей 2-го порядка 103  
 Пучок прямых 88  
 Пучок прямых 2-го порядка 99  
 Равенство рядов и пучков 97  
 Разделение двух пар элементов 83  
 Размерность комплекса 66  
 Ранг комплекса 11, 14, 139  
 Рельефная перспектива 87  
 Риманова поверхность 25, 35, 36, 150  
 Риманово пространство 44, 56, 74, 159, 170  
 Род отрезочного комплекса 11, 14, 15  
 — поверхности 21, 25, 31  
 Рулетта 121  
 Ручка поверхности 29, 147, 150  
 Ряд прямых 2-го порядка 103  
 Ряд точек 88  
 Ряд точек 2-го порядка 98  
 Связка 88  
 Связность поверхности 21, 25, 31  
 Сечение поверхности 21, 24, 40, 173  
 Симметричное пространство 45, 54, 74, 158  
 Симплекс  $S_n$  65, 71, 80  
 Система образующих 104  
 Сопряженность 86  
 Сопряженные прямые комплекса 126  
 Спираль логарифмическая 133  
 Степень графы 11  
 Ступень 88  
 Сфера  $P_n$  65, 71, 79, 159  
 Теорема Дена 44, 164, 167  
 — Пуанкаре 25, 142, 144, 145  
 Точка (в проективной геометрии) 108

- Трехмерное многообразие 43, 66  
 Трехмерный комплекс 43, 65
- Узел 175  
 Улитка Паскаля 119
- Фазовое пространство 175  
 Фокус 115, 102  
 Формула Эйлера 25, 149  
 Фундаментальная группа 71, 74
- Характеристика комплекса 30, 146, 152  
 — плоскости 129  
 Характеристическая прямая 103  
 — точка 98  
 Хроматическое число 12, 19, 140
- Центр кривой 2-го порядка 86  
 — дерева 12, 18, 19  
 Центроида неподвижная 114  
 — подвижная 114  
 Цепная линия 122  
 Цикл 68, 73, 146, 171  
 Циклические точки 97
- Число Бетти 70, 74, 171
- Эвольвента 118, 284  
 Элемент (в проективной геометрии) 88  
 — (в топологии) 65, 72  
 Элементарный кусок 11, 20, 43, 65  
 Эллипс 84  
 Эллиптическая проективность 94  
 Эпициклоида 122

5720

15



Характер

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие .....	3
<b>Отдел первый. ANALYSIS SITUS. В. Д. Львовский</b>	
Введение .....	7
Глава I. Отрезочные комплексы .....	10
Глава II. Двумерные многообразия .....	20
Глава III. Трехмерные многообразия .....	43
Глава IV. Вопросы $n$ -мерной топологии .....	65
<b>Отдел второй. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. О. К. Житомирский</b>	
Глава I. Метод проекций .....	82
Глава II. Проективные соответствия .....	87
Глава III. Проективность между совокупностями 1-ой степени .....	93
Глава IV. Образование кривых, конусов и линейчатых поверхностей 2-го порядка по Штейнеру .....	98
Глава V. Обоснование проективной геометрии .....	106
<b>Отдел третий. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. В. И. Милинский</b>	
Введение .....	112
Глава I. Геометрия на плоскости .....	118
Глава II. Геометрия в пространстве .....	126
Глава III. Смешанные задачи .....	131
<b>РЕШЕНИЯ</b>	
Отдел I .....	139
Отдел II .....	177
Отдел III .....	272
Указатель имен .....	301
Предметный указатель .....	303

Редактор *Е. В. Пулькина.*

Техн. редактор *Р. В. Эмдина.*

ОНТИ № 246. Индекс 24-5-2. Тираж 4 000. Подп. в печ. с матриц 26/IX 1935 г. Формат бумаги 62 × 94. Уч.-авт. л. 23,31 Бум. лист. 9<sup>0</sup>/<sub>16</sub>. Печатн. зн. в бумажн. листе 146 000. Заказ № 1528. Ленгторлит № 16421. Выход в свет октябрь 1935 г.

3-я тип. ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.



