

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК — ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

А. М. ЖУРАВСКИЙ

СПРАВОЧНИК
ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ
ФУНКЦИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА ССР

МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная теория эллиптических функций создалась в результате совместной работы выдающихся математиков XIX в. Систематическое исследование эллиптических интегралов было начато Лежандром еще в конце XVIII в. Полученные результаты были им объединены в замечательной работе „*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes*“. Здесь мы находим как полную теорию эллиптических интегралов, так и практические методы их вычисления. Здесь же содержатся и таблицы интегралов 1-го и 2-го рода, которые являются основными для вычислений и в настоящее время.

Работы Лежандра послужили отправным пунктом исследований Абеля и Якоби (Abel, Jacobi). Их идея рассматривать вместо эллиптического интеграла обратную функцию привела к открытию эллиптических функций и их двойкой периодичности. Абель рассматривает область эллиптических интегралов и задачу их обращения как частный случай аналогичной задачи для любой алгебраической функции.

Говоря о первых исследованиях по теории эллиптических функций, нельзя умолчать о Гауссе (Gauss). Гаусс был первым математиком, рассматривавшим эллиптические функции. Однако своих исследований он не опубликовывал при жизни, и лишь много лет спустя после смерти его исследования увидели свет. Развитие теории функций комплексного переменного заставило в дальнейшем пересмотреть построения Абеля и Якоби. Громадная роль выпала в этом деле Вейерштрассу. В его работах теория эллиптических функций принимает ту законченную и совершенную форму, в какой мы ее видим сейчас.

Вместе с ростом теории росла и расширялась область приложений. Первоначальные приложения эллиптических функций к задаче колебаний маятника распространились затем на задачи динамики твердого тела, закрепленного в неподвижной точке, нашли себе место в теории гироскопа и других задачах механики. С развитием теории упругости эллиптические функции нашли себе применение к ее задачам. Максвелл использовал эллиптические интегралы в своих работах по электричеству и магнетизму. Изучение электрических плоских полей, встречающихся в ряде задач электротехники, например в расчете электромашин, вопросы плоского движения жидкости, ряд задач аэродинамики при их решении нуждаются теперь в теории эллиптических функций. В настоящее время теория эллиптических функций крепко внедрилась в практику, и поле ее приложений все расширяется.

Цель книги помочь инженеру использовать мощный аппарат теории эллиптических функций и применить его на практике. В книге собраны формулы и предложения, относящиеся к эллиптическим функциям, с краткими пояснениями и примерами вычислений. Вычисления проводились по возможности детально с тем, чтобы были видны все подробности вычислительных операций.

В книге довольно значительное место отведено графическому материалу. Здесь нами широко использован материал справочника Jahnke und Emde „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven“ (1933 г.). Графические изображения снабжены пояснениями. Графическое представление функций комплексного переменного дает возможность наглядно проследить общий характер их изменения.

В книге рассмотрен ряд задач, где находят свое приложение эллиптические функции. Этим ни в какой мере не исчерпываются огромные возможности приложений эллиптических функций к задачам технического характера, и приведенные задачи лишь служат примерами. В этих примерах нашли свое отражение, между прочим, исследования акад. Б. Г. Галеркина и акад. А. Н. Крылова.

Много помог мне своими советами и указаниями акад. А. Н. Крылов, за что я приношу ему мою глубокую благодарность.

А. Журавский

ГЛАВА I

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Эллиптический интеграл. Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx, \quad (1)$$

где $R(x, y)$ есть рациональная функция от x и y , а $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени.

Интегралы такого вида не могут быть, за исключением отдельных случаев, выражены через элементарные функции.

Для вычисления отдельных значений интеграла

$$\int_a^b R(x, \sqrt{P(x)}) dx \quad (2)$$

приходится пользоваться таблицами, произведя предварительно преобразование эллиптического интеграла к канонической форме.

§ 2. Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Лежандра. Эллиптическим интегралом 1-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (3)$$

Величина k называется модулем интеграла.

Вычисление интеграла (3) не может быть произведено путем приведения его к простейшим функциям, так как он через них не выражается.

Определение значения интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (4)$$

приводится к вычислению интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (5)$$

так как

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (6)$$

Подстановкой

$$x = \sin \varphi$$

интеграл (5) приводится к виду

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Верхний предел φ носит название амплитуды интеграла.
Интеграл

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7')$$

называется полным эллиптическим интегралом 1-го рода.

Для краткости письма принято обозначение

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Для различных значений амплитуды от 0 до 90° и для значений модуля $k < 1$ составлены таблицы. В этих таблицах модуль k представляется в виде

$$k = \sin \alpha \quad (8)$$

(угол α называют модулярным углом) и значения

$$F(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \quad (9)$$

даются для ряда значений α и φ в пределах от 0 до 90°.

Первые таблицы функции $F(\varphi, \alpha)$ были составлены Лежандром. В них даются значения $F(\varphi, \alpha)$ с десятью знаками после запятой для α и для φ через 1°. Эти таблицы содержатся в сочинении Лежандра „Traité des Fonctions elliptiques“, изданном в 1825 г. В виду чрезвычайной редкости этого издания Пирсоном были изданы в 1934 г. таблицы (Tables of the complete and incomplete elliptic integrals), представляющие фотографическое воспроизведение таблиц Лежандра.

В распространенном справочнике Jahnke und Emde¹ таблицы интеграла $F(\varphi, \alpha)$ дают значения интеграла с пятью значащими цифрами для значений φ от 1 до 90° через 1° и значений α от 5 до 90° через 5°.

Таблицы значений $F(\varphi, \alpha)$ даны также в книге В. П. Ветчинкина² с шестью знаками после запятой.

Пользуясь этими таблицами, легко вычислить значение эллиптического интеграла для данных значений α и φ . При этом, если значение φ или α не содержится в таблице, приходится прибегать к интерполированию. Для различных таблиц это интерполирование приходится производить с тем или иным количеством разностей в зависимости от характера таблиц.

¹ Jahnke und Emde. Functionen-Tafeln, 1933.

² В. П. Ветчинкин. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций. Издание Военной Воздушной Академии РККА, 1935.

Таблица 2

$\varphi \backslash \alpha$	43°	44°	45°	46°
14°	0.75422	0.77192	0.78963	0.80735
15°	0.75477	0.77251	0.79025	0.80801
16°	0.75535	0.77313	0.79092	0.80872
17°	0.75597	0.77379	0.79162	0.80947

При вычислении значения $F(\varphi, \alpha)$ нам приходится интерполировать по φ и по α . Для этой цели укажем формулу с третьими разностями. Так как разности не содержатся в нашей таблице, дадим выражение для искомого значения через табличные значения функции, что позволяет обойти вычисление разностей. Пусть $U_{0,0}$ есть ближайшее значение в таблице (табл. 3) к вычисляемому значению $U = F(\varphi, \alpha)$.

Таблица 3

$U_{i,j}$	φ_{-1}	φ_0	φ_1	φ_2
a_{-1}	$U_{-1,-1}$	$U_{-1,0}$	$U_{-1,1}$	$U_{-1,2}$
a_0	$U_{0,-1}$	$U_{0,0}$	$U_{0,1}$	$U_{0,2}$
a_1	$U_{1,-1}$	$U_{1,0}$	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$
a_2	$U_{2,-1}$	$U_{2,0}$	$U_{2,1}$	$U_{2,2}$

Положим

$$\tau = \frac{\alpha - a_0}{a_1 - a_0}, \quad \tau' = 1 - \tau; \quad (10)$$

$$t = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad t' = 1 - t. \quad (11)$$

В таком случае U следует вычислять по формуле

$$\begin{aligned}
 U = & \left(1 + \frac{tt' + \tau\tau'}{2}\right) [\tau'(t'U_{0,0} + tU_{0,1}) + \tau(t'U_{1,0} + tU_{1,1})] - \\
 & - \frac{1}{6} \tau\tau' [(1 + \tau')(t'U_{-1,0} + tU_{-1,1}) + (1 + \tau)(t'U_{2,0} + tU_{2,1})] - \\
 & - \frac{1}{6} tt' [(1 + t')(\tau'U_{0,-1} + \tau U_{1,-1}) + (1 + t)(\tau'U_{0,2} + \tau U_{1,2})]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

В нашем случае имеем

$$\tau = \frac{21}{60} + \frac{23}{60^2} = 0.3563889, \quad \tau' = 0.6436111,$$

$$t = \frac{35}{60} + \frac{12}{60^2} = 0.5866667, \quad t' = 0.4133333.$$

Произведя вычисления согласно формуле (12), где $U_{0,0} = 0.77251$, остальные значения берем из табл. 2 и находим $U = 0.78313$.

§ 4. Вычисление интеграла 1-го рода с помощью рядов. Если значение модуля $k < 1$, то для вычисления интеграла можно пользоваться разложением в ряд

$$F(\varphi, k) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_2 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_3 k^6 \dots, \quad (13)$$

$$A_n = \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Таблица 2

$\varphi \backslash \alpha$	43°	44°	45°	46°
14°	0.75422	0.77192	0.78963	0.80735
15°	0.75477	0.77251	0.79025	0.80801
16°	0.75535	0.77313	0.79092	0.80872
17°	0.75597	0.77379	0.79162	0.80947

При вычислении значения $F(\varphi, \alpha)$ нам приходится интерполировать по φ и по α . Для этой цели укажем формулу с третьими разностями. Так как разности не содержатся в нашей таблице, дадим выражение для искомого значения через табличные значения функции, что позволяет обойти вычисление разностей. Пусть $U_{0,0}$ есть ближайшее значение в таблице (табл. 3) к вычисляемому значению $U = F(\varphi, \alpha)$.

Таблица 3

$U_{i,-1}$	φ_{-1}	φ_0	φ_1	φ_2
a_{-1}	$U_{-1,-1}$	$U_{-1,0}$	$U_{-1,1}$	$U_{-1,2}$
a_0	$U_{0,-1}$	$U_{0,0}$	$U_{0,1}$	$U_{0,2}$
a_1	$U_{1,-1}$	$U_{1,0}$	$U_{1,1}$	$U_{1,2}$
a_2	$U_{2,-1}$	$U_{2,0}$	$U_{2,1}$	$U_{2,2}$

Положим

$$\tau = \frac{\alpha - a_0}{a_1 - a_0}, \quad \tau' = 1 - \tau; \quad (10)$$

$$t = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad t' = 1 - t. \quad (11)$$

В таком случае U следует вычислять по формуле

$$\begin{aligned}
 U = & \left(1 + \frac{tt' + \tau\tau'}{2}\right) [\tau'(t'U_{0,0} + tU_{0,1}) + \tau(t'U_{1,0} + tU_{1,1})] - \\
 & - \frac{1}{6} \tau\tau' [(1 + \tau')(t'U_{-1,0} + tU_{-1,1}) + (1 + \tau)(t'U_{2,0} + tU_{2,1})] - \\
 & - \frac{1}{6} tt' [(1 + t')(\tau'U_{0,-1} + \tau U_{1,-1}) + (1 + t)(\tau'U_{0,2} + \tau U_{1,2})]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

В нашем случае имеем

$$\tau = \frac{21}{60} + \frac{23}{60^2} = 0.3563889, \quad \tau' = 0.6436111,$$

$$t = \frac{35}{60} + \frac{12}{60^2} = 0.5866667, \quad t' = 0.4133333.$$

Произведя вычисления согласно формуле (12), где $U_{0,0} = 0.77251$, остальные значения берем из табл. 2 и находим $U = 0.78313$.

§ 4. Вычисление интеграла 1-го рода с помощью рядов. Если значение модуля $k < 1$, то для вычисления интеграла можно пользоваться разложением в ряд

$$F(\varphi, k) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_2 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_3 k^6 \dots, \quad (13)$$

$$A_n = \int_0^{\varphi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Вычисление коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ можно производить, пользуясь рекуррентной формулой

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi. \quad (15)$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$F(\varphi, \sqrt{0.11}) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0.11 \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi = 15^\circ 11',$$

с четырьмя знаками после запятой.

Прежде всего имеем $A_0 = 0.2650$. Для вычисления следующих коэффициентов перепишем формулу (15) в виде

$$\Delta A_{n-1} = A_n - A_{n-1} = - \frac{A_{n-1} + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi}{2n},$$

где положено

$$A_n = A_{n-1} + \Delta A_{n-1}.$$

Самые вычисления располагаем в виде таблицы (табл. 4).

Таблица 4

n	$\sin^{2n-1} \varphi$	$\cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi$	$A_{n-1} + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi$	ΔA_{n-1}	A_n
1	0.2619	0.2528	0.5178	-0.2589	0.0061
2	0.0180	0.0174	0.0235	-0.0059	0.0002

Получив A_0, A_1, A_2 , легко находим

$$F(15^\circ 11', \sqrt{0.11}) \approx 0.2650 + 0.0030 \times 0.11 + 0.0001 (0.11)^2,$$

или

$$F(15^\circ 11'; \sqrt{0.11}) \approx 0.2653.$$

Вычисление эллиптического интеграла можно производить и иначе, пользуясь разложением

$$F(\varphi, k) = A_0 \varphi - A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi - A_3 \sin 6\varphi + \dots \quad (16)$$

Коэффициенты A_n определяются по формуле

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{(s+n+1)\dots(s+2n)} \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2s+2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2s+2n)} \right\}^2 k^{2s+2n} \quad (17)$$

или

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{2}{1+k'} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s+2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2s+2n)} \bar{k}^{2s+n}, \quad (17')$$

где

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \bar{k} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Формулами (17) и (17') удобно пользоваться для вычисления коэффициентов при небольших значениях k .

Заметим, что вычисление коэффициентов можно производить, пользуясь рекуррентными формулами

$$A_n = \frac{(2n-2)^2}{n(2n-1)} \frac{1+k'^2}{k^2} A_{n-1} - \frac{(n-2)(2n-3)}{n(2n-1)} A_{n-2}, \quad (18)$$

$$A_2 = \frac{2}{3} \frac{1+k'^2}{k^2} A_1 - A_0. \quad (18')$$

Однако этими формулами выгодно пользоваться лишь при значениях k , близких к единице.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$F(\varphi, \sqrt{0.11}) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0.11 \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi = 15^\circ 11',$$

рассмотренный в предыдущем примере с пятью десятичными знаками.

Определяем коэффициенты, пользуясь формулой (17). Вычисления даны в табл. 5.

Таблица 5

s	k^{2s}	$U_s = \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \right)^2 k^{2s}$	$V_s = U_s \frac{s+1}{s+2}$	$W_s = V_s \frac{s+1}{s+4}$	$W_{s+1} \frac{s+1}{s+6}$
0	1.000000	1.000000	0.013750	0.000284	0.000006
1	0.11	0.027500	0.001135	0.000039	0.000001
2	0.0121	0.001702	0.000098	0.000005	
3	0.001331	0.000130	0.000009		
4	0.000146	0.000011	0.000001		
5	0.000016	0.000001			
6	0.000002				
		$A_0 = 1.029344$	$A_1 = 0.014993$	$2A_2 = 0.000328$ $A_2 = 0.000164$	$3A_3 = 0.000007$ $A_3 = 0.000002$

Произведя вычисления по формуле (16) и имея в виду, что $A_0 = 0.2650$, находим

$$F(15^\circ 11', \sqrt{0.11}) = 0.26534 = 0.2653.$$

Для вычисления эллиптического интеграла 1-го рода при малых значениях k и φ можно пользоваться рядом

$$F(\varphi, k) = A_0 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \sin^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \sin^4 \varphi + \dots \right). \quad (19)$$

Величина A_0 вычисляется как сумма ряда

$$A_0 = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots, \quad (20)$$

а коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ определяются последовательно по формулам

$$a_0 = A_0 - 1, \quad (21)$$

$$a_n = a_{n-1} - \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\}^2 k^{2n}. \quad (22)$$

Если k близко к единице, то вычисление следует вести по формуле

$$F(\varphi, k) = A'_0 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left(a'_0 - \frac{2}{3} a'_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a'_2 \operatorname{tg}^4 \varphi - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} a'_3 \operatorname{tg}^6 \varphi + \dots \right), \quad (23)$$

где

$$A'_0 = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k'^6 + \dots, \quad (24)$$

и коэффициенты $a'_0, a'_1, \dots, a'_n, \dots$ находятся по формулам

$$a'_0 = A'_0 - 1, \quad (25)$$

$$a'_n = a'_{n-1} - \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\}^2 k'^{2n}. \quad (26)$$

В том случае, когда φ близко к $\frac{\pi}{2}$, выгоднее вести вычисление $F(\varphi, k)$, исходя из равенства

$$F(\varphi, k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (27)$$

Пользуясь заменой переменного

$$\sin \varphi = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (28)$$

приведем весь вопрос к вычислению интеграла

$$F(\varphi_1, k) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}}.$$

При φ близком к $\pi/2$ переменная φ_1 имеет небольшую величину.

§ 5. Преобразование Ландена. Эллиптический интеграл 1-го рода удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (29)$$

при условии, что

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (30)$$

и

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi \quad (31)$$

(k' есть модуль, дополнительный для модуля k).

Это замечательное преобразование эллиптического интеграла было указано Ланденом.

Если положить

$$k = \sin \alpha, \quad k_1 = \sin \alpha_1,$$

то преобразование Ландена представится в виде

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \varphi_1}}, \quad (32)$$

причем

$$\sin \alpha_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (33)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi. \quad (34)$$

Пользуясь преобразованием Ландена, можно вычислять эллиптический интеграл 1-го рода, определяя последовательно по формулам

$$\sin \alpha_{n+1} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_n}{2}, \quad (35)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \cos \alpha_n \operatorname{tg} \varphi_n \quad (36)$$

серию значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

Величина α_n стремится при этом к нулю.

Когда α_n окажется достаточно малым, будем иметь

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n \sin^2 \varphi_n}} \approx \varphi_n, \quad (37)$$

и вычисляемый интеграл представится в виде

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \approx \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \dots \cos^2 \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \frac{\varphi_n}{2^n}. \quad (38)$$

При вычислениях формула (38) может быть заменена формулой

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \approx \frac{\sqrt{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n}}{\sqrt{\cos \alpha}} \frac{\varphi_n}{2^n}. \quad (39)$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$F\left(30^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0.5 \sin^2 \varphi}}.$$

Полагаем

$$\sin^2 \alpha = 0.5, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Получим табл. 6:

Таблица 6

n	α	$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$\lg \cos \frac{\alpha}{2}$	$\lg \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$	$\lg \cos \alpha$
0	45° 0' 0''	$\overline{1.61722}$	$\overline{1.96562}$	$\overline{1.23445}$	$\overline{1.84949}$
1	9°52'45''	$\overline{2.93665}$	$\overline{1.99838}$	$\overline{4.87330}$	$\overline{1.99351}$
2	0°25'40''	$\overline{3.57223}$	$\overline{1.99999}$	$\overline{5.14455}$	$\overline{1.99999}$
3	0° 0' 3''				$\overline{0.00000}$

$$\lg \frac{\sqrt{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}}{\sqrt{\cos \alpha}} = 0.07201,$$

Находим теперь последовательные значения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\begin{aligned} \varphi &= 30^\circ & \varphi_1 &= 52^\circ 12' 28'' \\ \lg \operatorname{tg} \varphi &= \overline{1.76144} & \lg \operatorname{tg} \varphi_1 &= \overline{0.11044} \\ \lg \cos \alpha &= \overline{1.84948} & \lg \cos \alpha_2 &= \overline{1.99351} \\ \lg \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi) &= \overline{1.61092} & \lg \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) &= \overline{0.10395} \\ \varphi_1 - \varphi &= 22^\circ 12' 28'' & \varphi_2 - \varphi_1 &= 51^\circ 47' 32'' \\ \varphi_1 &= 52^\circ 12' 28'' & \varphi_2 &= 104^\circ 0' 0'' \\ & & \lg |\operatorname{tg} \varphi_2| &= \overline{0.60323} \\ & & \lg \cos \alpha_2 &= \overline{1.99999} \\ \lg \operatorname{tg} (\varphi_3 - \varphi_2) &= \overline{0.60322} & \varphi_3 - \varphi_2 &= 104^\circ 0' 0'' \\ & & \varphi_3 &= 208^\circ 0' 0'' \\ \frac{\varphi^3}{2^3} &= \frac{208^\circ}{8} \approx 93600''. \end{aligned}$$

Выражая в радианах, делим на 206265.

$$\begin{aligned} \lg 93600 &= 4.97128 \\ \lg 206264 &= 5.31443 \end{aligned}$$

$$\lg \frac{\varphi_3}{2^3} = \bar{1}.65685$$

$$\lg \frac{\sqrt{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}}{\sqrt{\cos \alpha}} = 0.07201$$

$$\lg F\left(30^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \bar{1}.72886$$

Окончательно получаем

$$F\left(30^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.53562.$$

Частный случай $\varphi = \frac{\pi}{2}$ заслуживает особого внимания.

В этом случае имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = (1+k_1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}. \quad (40)$$

Вычисление полного эллиптического интеграла 1-го рода можно производить по формуле

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n) \frac{\pi}{2} \quad (41)$$

или, пользуясь тригонометрическим представлением модуля, по формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \approx \frac{\sqrt{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n}}{\sqrt{\cos \alpha}} \frac{\pi}{2}. \quad (42)$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-0.5 \sin^2 \varphi}}.$$

Полагая

$$\sin^2 \alpha = 0.5, \quad \alpha = \frac{\pi}{4};$$

и пользуясь данными табл. 7, получим:

Таблица 7

n	α	$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$\lg \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$	$\lg \cos \alpha$
0	45° 0' 0''	$\bar{1}.61722$	$\bar{1}.23445$	$\bar{1}.84949$
1	9° 52' 45''	$\bar{2}.93665$	$\bar{3}.87330$	$\bar{1}.99351$
2	0° 25' 40''	$\bar{3}.57228$	$\bar{5}.14455$	$\bar{1}.99999$
3	0° 0' 3''	0.00000

$$\lg \frac{\sqrt{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}}{\sqrt{\cos \alpha}} = 0.07201$$

$$\lg \frac{\pi}{2} = 0.19612$$

$$\lg K = 0.26813.$$

$$K = 1.85407.$$

Очень интересная форма преобразования Ландена для полного эллиптического интеграла 1-го рода указана Гауссом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + b_1^2 \sin^2 \varphi_1}}; \quad (43)$$

в этой формуле

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}. \quad (44)$$

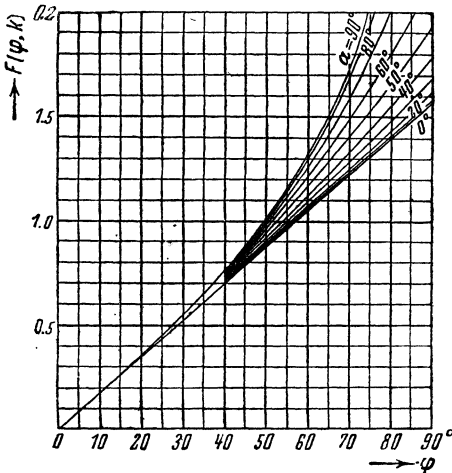
Вычисляя последовательно ряд чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ по формулам

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (45)$$

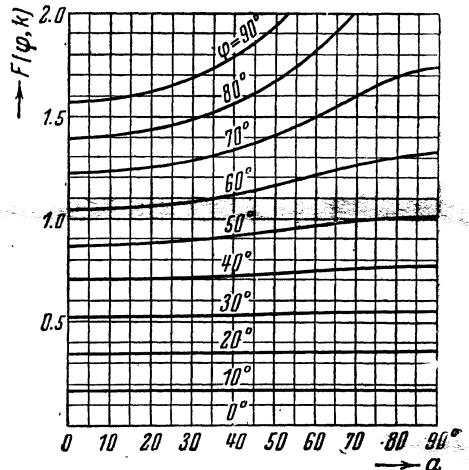
останавливаемся на таком значении n , когда $a_n \approx b_n$ в пределах точности вычислений. Тогда имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \approx \frac{\pi}{2a_n} \approx \frac{\pi}{2b_n}. \quad (46)$$

§ 6. Вычисление интеграла 1-го рода при помощи номограмм. При вычислении эллиптического интеграла 1-го рода можно пользоваться номограммами. Приводим здесь две номограммы, которые могут служить для вычисления интеграла. На первой из них (фиг. 1) нанесены линии



Фиг. 1



Фиг. 2

$\alpha = \text{const}$, на второй (фиг. 2) даются линии $\varphi = \text{const}$. Эти номограммы дают возможность определять первую значащую цифру значения функции $F(\varphi, k)$.

Для вычисления отношения $F(\varphi, k): K$ можно пользоваться номограммой, изображенной на фиг. 3. По горизонтальной оси отмечены значения амплитуды. По вертикали даются значения $\varphi - 90^\circ \frac{F(\varphi, k)}{K}$. Зна-

чение модуля дается в виде отметки на кривой. Пользуясь этой номограммой, находим для $k^2=0.8$ и $\varphi=40^\circ$

$$\varphi - 90^\circ \frac{F(\varphi, k)}{K} = 10^\circ,$$

т. е.

$$F(\varphi, k): K = 0.3333.$$

Номограмма, изображенная на фиг. 4, служит для определения величины амплитуды по заданному значению отношения $F(\varphi, k): K$. По горизонтальной оси даются значения функции

$$90^\circ \frac{F(\varphi, k)}{K},$$

по вертикальной оси указываются значения функции

$$\varphi - 90^\circ \frac{F(\varphi, k)}{K}.$$

Отметки, поставленные вдоль отдельных кривых, дают значения модулярного угла α модуля $k = \sin \alpha$.

Так, пользуясь номограммой фиг. 4, для значе-

ния φ , соответствующего $F(\varphi, k) = \frac{1}{2}$, при $\alpha = 85^\circ$, найдем соотношение

$$\varphi - 90^\circ \frac{F(\varphi, k)}{K} = 30^\circ,$$

откуда $\varphi = 75^\circ$.

§ 7. Некоторые случаи вычисления интеграла 1-го рода. Если модуль эллиптического интеграла больше единицы, то вычисление его легко приводится к тому случаю, когда модуль меньше единицы. Для этой цели следует в интеграле

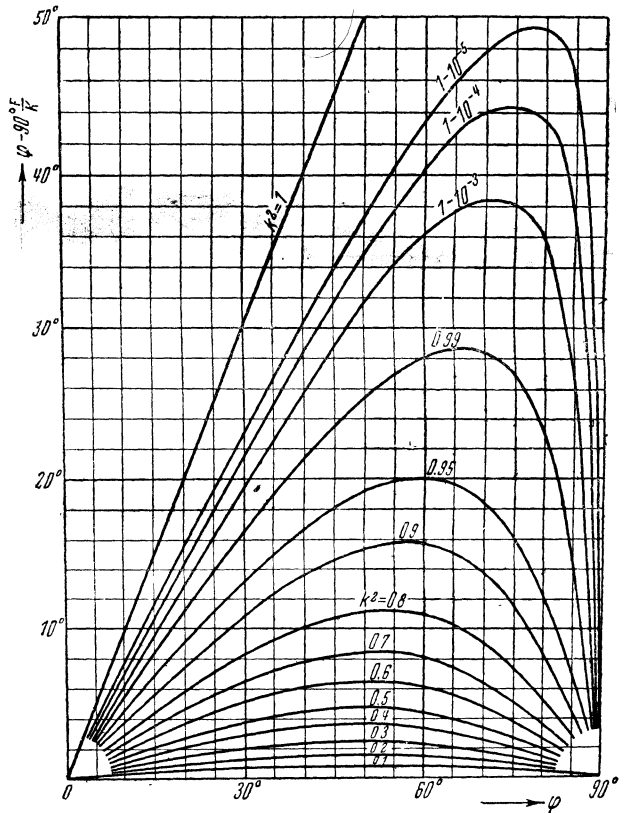
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k > 1 \quad (47)$$

произвести замену переменных, положив

$$x = \frac{y}{k}, \quad (48)$$

после чего интеграл представится в виде

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = k_1 \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}, \quad (49)$$



Фиг. 3

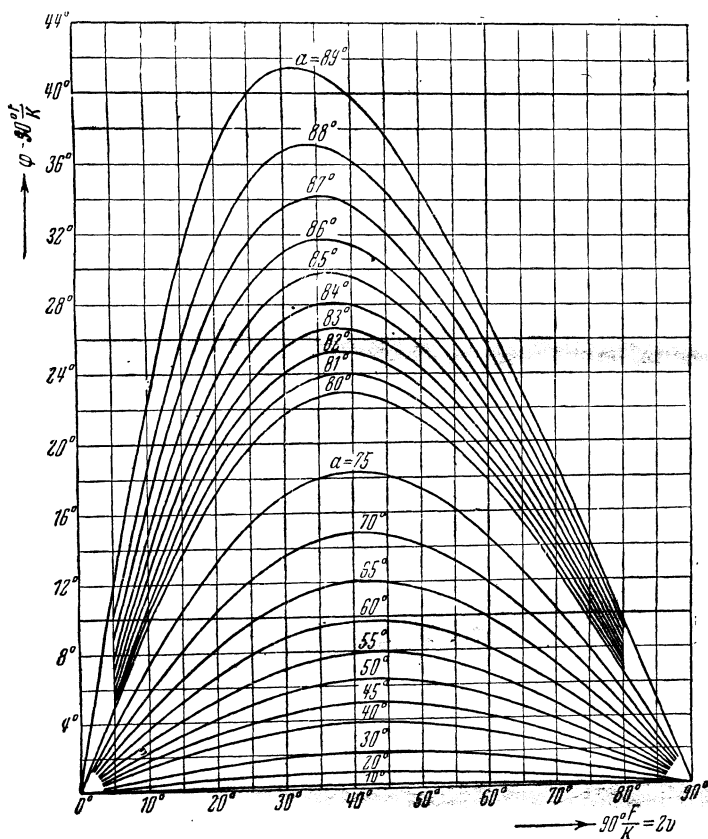
где

$$k_1 = \frac{1}{k}. \quad (50)$$

При вычислении эллиптического интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k < 1$$

может оказаться, что оба предела интегрирования одного знака и по абсолютной величине больше $\frac{1}{k}$.



Фиг. 4

Положим, что $\frac{1}{k} < a < b$. Вычисление такого интеграла может быть приведено к таблицам подстановкой

$$x = \frac{1}{ky}. \quad (51)$$

В этом случае интеграл представится в виде

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \quad (52)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{kb} < 1, \quad b_1 = \frac{1}{ka} < 1. \quad (53)$$

Если хоть одно из чисел $-\frac{1}{k}$, -1 , 1 , $\frac{1}{k}$ лежит в интервале интегрирования (a, b) , то интеграл выражается числом комплексным; при этом те части интервала интегрирования, которые лежат в промежутках

$$\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right), (-1, 1), \left(\frac{1}{k}, +\infty\right),$$

дают вещественную часть значения интеграла, а те, которые находятся в промежутках $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ и $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, дают мнимую часть его.

Покажем, как найти вещественную и мнимую части значения интеграла с помощью таблиц. Положим, например, что $0 < a < 1 < b < \frac{1}{k}$. В таком случае имеем равенство

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Первый из интегралов легко вычисляется с помощью таблиц. Второй интеграл есть число мнимое, ибо многочлен, стоящий под знаком квадратного корня, отрицателен в промежутке $(1, b)$. Поэтому можно написать равенство

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm i \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \quad (54)$$

Знак \pm в правой части равенства (54) зависит от значения корня в левой части равенства. Значение корня в правой части равенства положительное. Интеграл, стоящий в правой части равенства (54), путем подстановки

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1 + \sqrt{k} + (1 - \sqrt{k})z}{1 + \sqrt{k} - (1 - \sqrt{k})z} \quad (55)$$

приводится к виду, удобному для вычисления по таблицам:

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \frac{2k}{(1 + \sqrt{k})^2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}, \quad (56)$$

где

$$k_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}\right)^2, \quad (57)$$

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \frac{b\sqrt{k} - 1}{b\sqrt{k} + 1}. \quad (58)$$

К той же цели приводит подстановка $k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1$, $k^2 + k'^2 = 1$, $x \geq 0$, $x' \geq 0$, преобразующая интеграл, стоящий в правой части равенства (54), следующим образом

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_{b'}^1 \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k'^2x'^2)}},$$

где

$$k'^2b'^2 + k^2b^2 = 1, \quad b' > 0.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_1^{24.2294} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.0296^2x^2)}},$$

беря значение корня с положительной мнимой частью. Верхний предел интеграла больше 1, но меньше $\frac{1}{k} > 33$ (где $k = 0.0296$). Поэтому, принимая во внимание условие выбора значения квадратного корня, согласно (54), имеем:

$$\int_1^{24.2294} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.0296^2x^2)}} = -i \int_1^{24.2294} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-0.0296^2x^2)}}.$$

Произведя вычисления по формулам (57) и (58), находим

$$k_1 = 0.5000, \quad a_1 = 0.8660.$$

Пользуясь этими данными, находим для синуса амплитуды преобразованного интеграла значение

$$\sin \varphi = 0.8660, \quad \text{откуда} \quad \varphi = 60^\circ.$$

Представив модуль k_1 в тригонометрической форме, получим

$$k_1 = \sin 30^\circ.$$

Интеграл, подлежащий вычислению, находится по таблицам.

$$\begin{aligned} \int_1^{24.2294} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.0296^2x^2)}} &= -0.0429i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 30^\circ \sin^2 \varphi}} = \\ &= -0.0429 \times (1.0896 + 1.6858)i = -0.11917i \end{aligned}$$

§ 8. Эллиптический интеграл 1-го рода как функция комплексного переменного. Будем рассматривать интеграл

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (59)$$

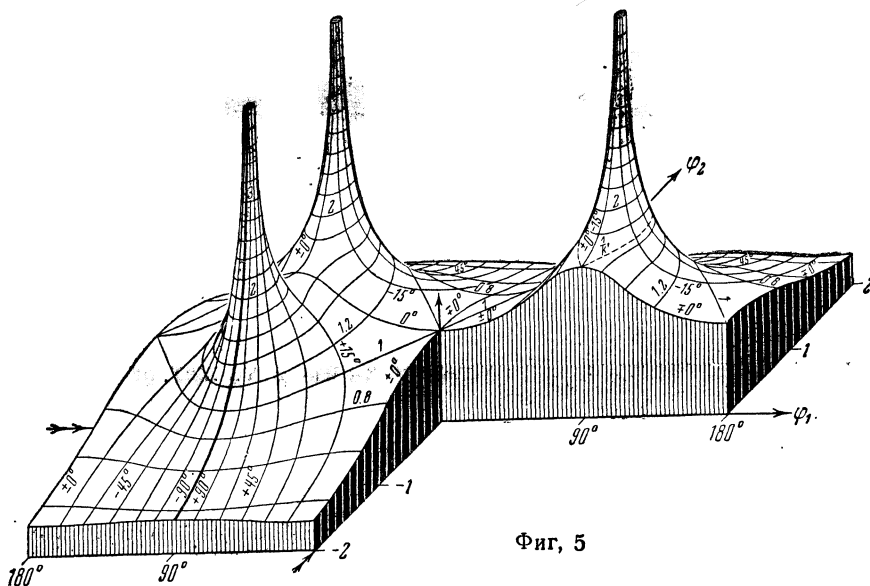
как функцию верхнего предела φ , придавая φ как вещественные, так и комплексные значения. Подынтегральная функция будет (двухзначной) функцией комплексного переменного. Обозначим для краткости письма

$$\Delta(k, \varphi) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (60)$$

Функция $Z = \frac{1}{\Delta(k, \varphi)}$ имеет на плоскости комплексного переменного особые точки, соответствующие значениям

$$\varphi = \left(2n \pm \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \operatorname{ar ch} \frac{1}{k}.$$

На фиг. 5 дается изображение поверхности, аппликаты которой равны значению модуля функции Z в соответствующих точках плоскости комплексной переменной $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$.



Фиг. 5

Это построение выполнено при $k = 0.8$ для той ветви функции Z , которая при $\varphi = 0$ имеет значение 1.

На поверхности нанесены две системы линий. Одна система линий характеризуется условием

$$\operatorname{mod} Z = |Z| = \operatorname{const.}$$

Другая система линий отвечает условию

$$\operatorname{arg} Z = \operatorname{const.}$$

Соответствующие числовые значения модуля и отметки значений аргумента в градусах указаны непосредственно на фиг. 5. Построение выполнено только для полосы $-\pi \leq \varphi_1 \leq \pi$, так как далее картина повторяется в силу периодичности. На фигуре резко выделяются особые точки функции, где она обращается в бесконечность. На фигуре видно, что при обходе вокруг критической точки функция Z изменяет свой знак, и одна ветвь

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

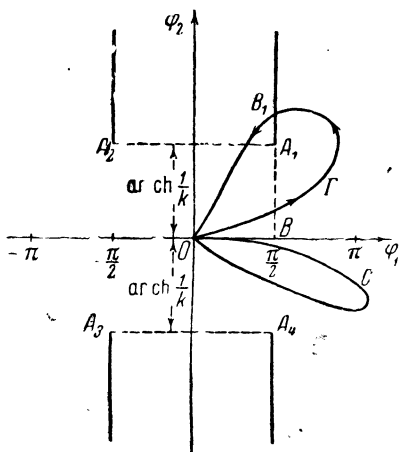
переходит в другую

$$Z_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

(см. линию $\pm 90^\circ$).¹

¹ В дальнейшем иногда, для краткости речи, мы будем позволять себе такую поверхность с нанесенными семействами изолиний модуля и аргумента называть изображением функции.

Обратимся к интегралу (59). Если на плоскости комплексного переменного сделать разрезы по линиям, проходящим через критические точки, параллельно мнимой оси, так как это показано на фиг. 6, то интеграл (59) будет однозначной функцией φ . При этом значение его в любой точке разрезанной плоскости не зависит от пути интегрирования.



Фиг. 6

Для этой функции можно построить поверхность аналогично тому, как это делалось для функции Z . На фиг. 7 дается изображение такой поверхности для функции $F(\varphi, k)$ в предположении, что при выходе из начальной точки значение $\Delta(\varphi, k)$ подинтегральной функции берется равным 1.

Как и на фиг. 5, числовые отметки соответствуют кривым

$$|F(\varphi, k)| = \text{const},$$

а градусные отметки—кривым

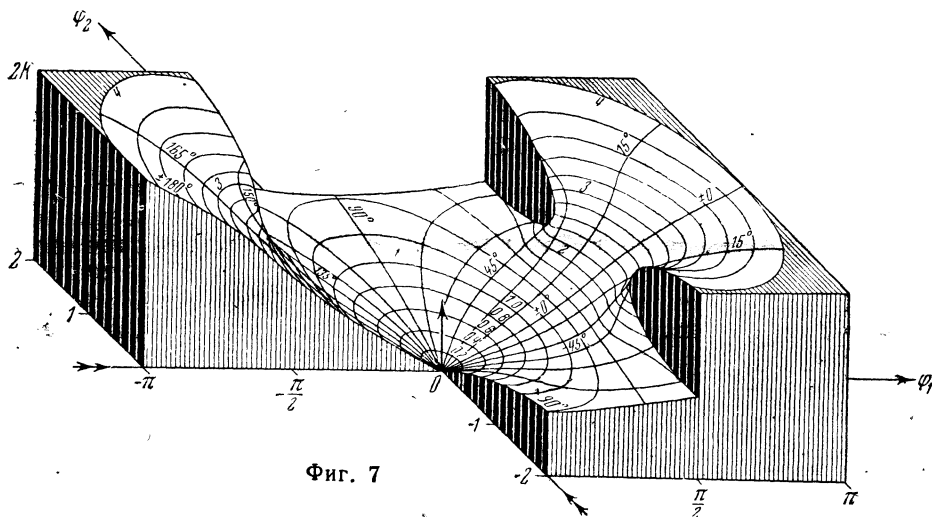
$$\arg F(\varphi, k) = \text{const}.$$

Из вида поверхности можно усмотреть, что в точках на краях сделанных разрезов функция $F(\varphi, k)$ получает разные значения.

Если производить интегрирование по кривой Γ , пересекающей разрез, то интеграл

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\lambda}{\Delta(k, \lambda)} = F(\varphi, k)$$

в точке M на другой стороне разреза приобретает иное значение, чем то, которое он получает в этой точке, когда мы проходим в M , не пересекая разреза.

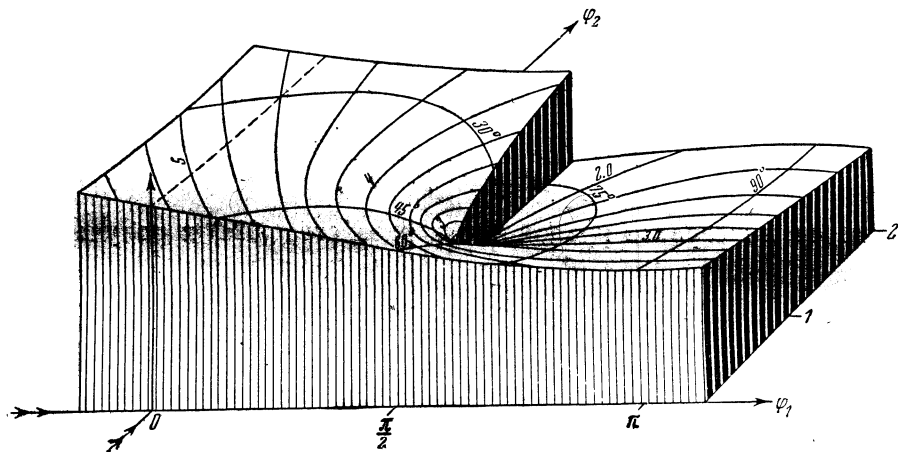


Фиг. 7

Значения интеграла, получаемые в результате перехода через разрез, изображены на фиг. 8.

Если мы заставим совпасть координатные оси на той и на другой

фигурах, то разорванные вдоль линии разреза края одной поверхности сомкнутся с краями другой, и мы получим картину того, что происходит с интегралом при переходе через разрез.



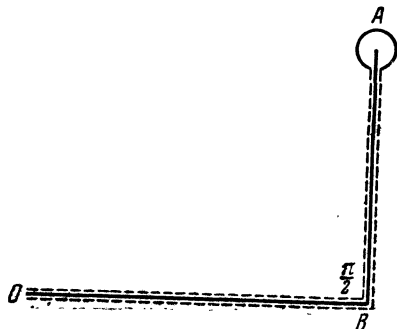
Фиг. 8

Пользуясь изображением этой поверхности, легко видеть, что интеграл, взятый вдоль замкнутого контура, не содержащего внутри себя критических точек, равен нулю, так как из какой точки поверхности, изображающей функцию $F(\varphi, k)$, мы вышли, в ту и вернемся.

Другая картина получается при обходе вокруг критической точки. Положим, что, выйдя из точки O , мы в нее вернемся, обойдя A_1 одну из критических точек. Путем непрерывной деформации контура можно привести его к виду, указанному на фиг. 9. При обходе

вокруг точки A_1 функция $\frac{1}{\Delta(\varphi, k)}$ изменя-

ет свой знак. Ее аргумент, как видно на фиг. 5, изменяется на 180° . Линию OB мы проходим дважды в противоположных направлениях, но при этом подинтегральная функция имеет разные знаки. То же самое можно сказать и относительно пути, проходимого вдоль линии BA . Интеграл по окружности обратится в нуль при уменьшении радиуса окружности до нуля. Таким образом для интеграла, взятого по замкнутому контуру, получаем выражение



Фиг. 9

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = 2K + 2iK, \tag{61}$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{62}$$

$$iK' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + i \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{1}{k}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (62a)$$

Посредством замены

$$\sin \varphi = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}, \quad (63)$$

где

$$k' = \sqrt{1 - k^2},$$

преобразуем интеграл в правой части равенства (62a) и получаем

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}}. \quad (64)$$

Подобный же результат получается и при обходе других критических точек.

Интеграл по замкнутому контуру Γ , окружающему одну из критических точек, оказывается, таким образом, равным

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \pm 2K \pm 2iK'. \quad (65)$$

Если понимать под $F(\varphi, k)$ то значение интеграла

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)},$$

которое мы получаем, интегрируя по линии, не пересекающей разрезов, то любое значение, которое может получить интеграл при переходе из точки O в точку φ , выражается равенством

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} = \pm F(\varphi, k) + 2mK + 2inK', \quad (66)$$

где m и n суть произвольные целые числа и притом одинаковой четности. Знак $+$ перед $F(\varphi, k)$ соответствует тому случаю, когда m и n представляют четные числа. Знак $-$ соответствует тому случаю, когда m и n числа—нечетные.

Отметим свойства интеграла $F(\varphi, k)$, непосредственно вытекающие из его представления:

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \quad (67)$$

$$F(\varphi + \pi, k) = F(\varphi, k) + 2K. \quad (68)$$

Эти свойства могут быть выражены одной формулой

$$F(\pm \varphi + m\pi, k) = 2mK \pm F(\varphi, k), \quad (69)$$

где m —целое число.

Произведем замену переменной, положив

$$x = \sin \varphi.$$

В силу предыдущего можно сказать, что интеграл

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

есть многозначная функция переменной x . Все возможные значения интеграла, соответствующие различным путям перехода из точки O в точку x , получаются из одного, — скажем, из интеграла, взятого по прямолинейному пути, и все могут быть представлены в виде

$$\pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + 2mK + i 2nK', \quad (70)$$

где интеграл берется по прямой, а m и n суть числа целые,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (71)$$

и

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}. \quad (72)$$

Следует отметить, что знак $+$ получается в том случае, когда m есть число четное, и $-$, когда m число нечетное.

§ 9. Эллиптический интеграл 2-го рода в канонической форме Лежандра. Эллиптическим интегралом 2-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx. \quad (73)$$

Этот интеграл, как и интеграл 1-го рода, не выражается в общем виде через простейшие функции.

Вычисление интеграла

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \quad (74)$$

подстановкой

$$x = \sin \varphi \quad (75)$$

приводится к вычислению интеграла

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (76)$$

Величина k называется модулем эллиптического интеграла, а φ —его амплитудой.

Для положительных значений модуля, меньших единицы, и для амплитуды в пределах от 0 до 90° Лежандр построил таблицы, где даются значения интеграла 2-го рода с 10 знаками после запятой. Модуль представлен в тригонометрической форме

$$k = \sin \alpha.$$

Значения

$$E(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (77)$$

даются для значений α и φ через 1° .

Таблицы значений $E(\varphi, \alpha)$ даются обычно вместе с таблицами значений $F(\varphi, \alpha)$.

Пользоваться таблицами значений $E(\varphi, \alpha)$ следует совершенно так же, как и таблицами значений $F(\varphi, \alpha)$ (см. §§ 2 и 3).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{0.5} \sqrt{\frac{1 - 0.75x^2}{1 - x^2}} \, dx.$$

Находим амплитуду φ из уравнения

$$\sin \varphi = 0.52$$

по таблице натуральных тригонометрических величин:

$$\varphi = 31^\circ 20'.$$

Представим модуль в тригонометрической форме

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \alpha,$$

откуда

$$\alpha = 60^\circ.$$

Пользуясь табл. 8, которую мы выписываем из четырехзначных таблиц функции $E(\varphi, \alpha)$ для $\alpha = 60^\circ$,

Таблица 8

φ	29°	30°	31°	32°	33°
$\alpha = 60^\circ$	0.4903	0.5060	0.5218	0.5373	0.5528

мы видим, что разности табличных значений 0.0158, 0.0157, 0.0155, 0.0155 остаются примерно постоянными, а потому интерполирование можно произвести, ограничиваясь первыми разностями. Таким образом получаем

$$E(31^\circ, 19', 56'', 60^\circ) = 0.5218 + 0.0155 \frac{20}{60} = 0.5218 + 0.0155 \times 0.3333 = 0.5270.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \quad \varphi = 39^\circ 21' 30'',$$

где

$$\alpha = 52^\circ 11' 31''.$$

Выпишем соответствующее место из таблиц Ляжандра (табл. 9). Значения $E(\varphi, \alpha)$ берем с пятью знаками после запятой.

Таблица 9

$\alpha \backslash \varphi$	38°	39°	40°	41°
$\alpha = 51^\circ$	0.63530	0.65057	0.66575	0.68081
52°	0.63448	0.64969	0.66479	0.67979
53°	0.63367	0.64881	0.66384	0.67877
54°	0.63286	0.64794	0.66290	0.67775

Интерполирование производим с третьими разностями по формуле (12):

$$\tau = \frac{11}{60} + \frac{31}{60^2} = 0.1919444,$$

$$\tau' = 1 - \tau = 0.8080556,$$

$$t = \frac{21}{60} + \frac{30}{60^2} = 0.3583333,$$

$$t' = 1 - t = 0.6416667.$$

Принимаем

$$U_{0,0} = 0.64969.$$

Произведя вычисления, получаем окончательно

$$E(39^\circ 21' 30'', 52^\circ 11' 31'') = 0.65545.$$

§ 10. Вычисление интеграла 2-го рода с помощью рядов. Если значения модуля k меньше единицы, то для вычисления интеграла можно пользоваться разложением в ряд

$$E(\varphi, k) = A_0 - \frac{1}{2} A_1 k^2 - \frac{1}{8} A_2 k^4 - \frac{1}{16} A_3 k^6 - \frac{5}{128} A_4 k^8 - \frac{7}{256} A_5 k^{10} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} A_n k^{2n} - \dots \quad (78)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ вычисляются последовательно с помощью равенств

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi, \quad (79)$$

$$A_0 = \varphi. \quad (80)$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$E\left(\frac{\pi}{3}, 0.2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - 0.04 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

с точностью до 0.0001.

В рассматриваемом случае

$$k = 0.2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \approx 1.04720.$$

Вычисления располагаем в табл. 10.

Таблица 10

n	$\sin^{2n-1} \varphi$	$\cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi$	$A_{n-1} + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi$	ΔA_{n-1}	A_n
1	0.8665	0.4332	1.4804	-0.7402	0.3070
2	0.6499	0.3250	0.6320	-0.1580	0.1490

$$A_0 = 1.04720$$

$$-\frac{1}{2} A_1 k^2 = -0.00614$$

$$-\frac{1}{8} A_2 k^4 = -0.00003$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}, 0.2\right) = 1.0410.$$

Эллиптический интеграл второго рода может быть представлен в виде тригонометрического ряда

$$E(\varphi, k) = B_0 \varphi + B_1 \sin 2\varphi - B_2 \sin 4\varphi + B_3 \sin 6\varphi - \dots \quad (81)$$

Коэффициенты $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ определяются по формулам

$$B_0 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots, \quad (82)$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1) \dots (s+n)}{(s+n+1) \dots (s+2n)} \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2s+2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2s+2n)} \right\}^2 \frac{k^{2s+2n}}{2s+2n-1} \quad (83)$$

или

$$B_n = \frac{1}{n} \frac{1+k'}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+2s-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2s)} \frac{\bar{k}^{2s+n}}{(2s-1)(2n+2s-1)}, \quad (84)$$

где

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \bar{k} = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Заметим, что коэффициенты B_1, B_2, \dots, B_n легко могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$B_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1+k'^2}{k^2} B_1 - B_0, \quad (85)$$

$$B_n = \frac{(2n-2)^2}{n(2n+1)} \cdot \frac{1+k'^2}{k^2} B_{n-1} - \frac{(n-2)(2n-5)}{n(2n+1)} B_{n-2}, \quad (85')$$

если найдены коэффициенты B_0 и B_1 . Однако последние формулы удобны, когда значения k не очень малы.

Пример 2. Вычислить $E\left(\frac{\pi}{3}, 0.2\right)$ с точностью до 0.0001.

Вычисления даются в табл. 11.

Таблица 11

s	k^{2s}	$U_s = \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s}\right)^2 \frac{k^{2s}}{2s-1}$	$V_s = U_{s+1} \frac{s+1}{s+2}$	$W_s = V_{s+1} \frac{s+1}{s+4}$
0	1.00000	1.00000	0.00509	0.00301
1	0.04000	-0.01000	0.00005
2	0.00160	-0.00008
3	0.00006	-0.00000

$$B_0 = 0.98992, \quad B_1 = 0.00505, \quad 2B_2 = 0.00001.$$

Согласно формуле (81), получаем

$$E\left(\frac{\pi}{3}, 0.2\right) = 0.98992 \times 1.04720 + 0.00505 \sin \frac{2\pi}{3},$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, 0.2\right) = 1.04102 \approx 1.0410.$$

При небольших значениях k и φ для вычисления эллиптического интеграла 2-го рода можно пользоваться рядом

$$E(\varphi, k) = B_0 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(b_0 + \frac{2}{3} b_1 \sin^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b_2 \sin^4 \varphi + \dots \right). \quad (86)$$

Величина B_0 есть сумма ряда

$$B_0 = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots, \quad (87)$$

а коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ определяются последовательно по формулам

$$b_0 = 1 - B_0, \quad (88)$$

$$b_n = b_{n-1} - \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\}^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}. \quad (89)$$

Если значение k близко к единице, то при небольших значениях φ предпочтительнее пользоваться рядом

$$E(\varphi, k) = B_0' \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left(b_0' - \frac{2}{3} b_1' \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b_2' \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} b_n' \operatorname{tg}^{2n} \varphi + \dots \right), \quad (90)$$

где

$$B_0' = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{k'^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k'^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k'^6}{5} - \dots,$$

а коэффициенты $b_0', b_1', \dots, b_n', \dots$ находятся по формулам

$$b_0' = 1 - B_0', \quad (91)$$

$$b_n' = b_{n-1}' - \left\{ \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right\}^2 \frac{k'^{2n}}{2n-1}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}. \quad (92)$$

В том случае, когда φ близко к $\frac{\pi}{2}$, выгодно вести вычисление $E(\varphi, k)$, пользуясь равенством

$$E(\varphi, k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi. \quad (93)$$

С помощью подстановки

$$\sin \varphi = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (94)$$

получаем

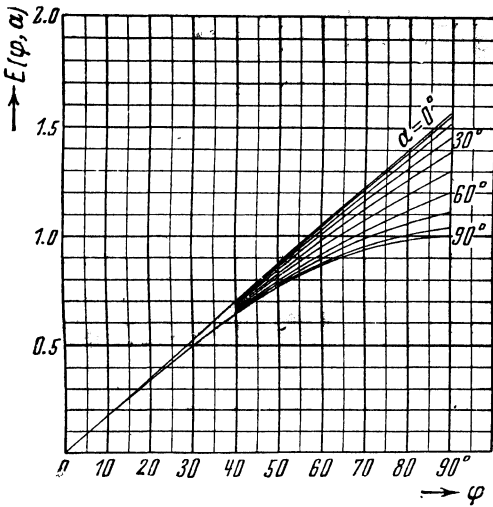
$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1} \, d\varphi_1 - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

так что

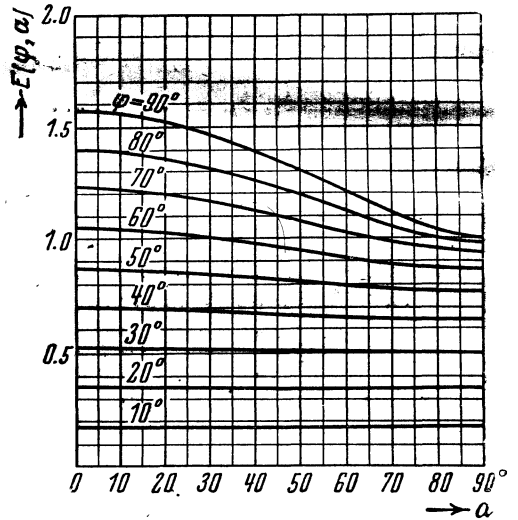
$$E(\varphi, k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi_1, k) + k^2 \sin \varphi \sin \varphi_1. \quad (95)$$

§ 11. Вычисление интеграла 2-го рода при помощи номограмм. Если требуемая точность подсчета невелика, то для вычисления эллиптического интеграла 2-го рода $E(\varphi, k)$, где $k = \sin \alpha$, можно пользоваться номо-

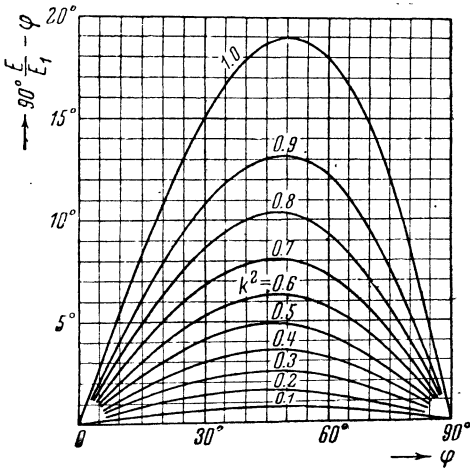
граммами. Мы приводим здесь две такие номограммы (фиг. 10 и 11). На первой из них нанесены линии $\alpha = \text{const.}$ По горизонтальной оси даются значения амплитуды φ в градусах, а по вертикальной оси — значения $E(\varphi, \alpha)$. На второй номограмме нанесены линии $\varphi = \text{const.}$ Значения α в градусах отмечены по горизонтальной оси, значения $E(\varphi, \alpha)$ — по вертикальной.



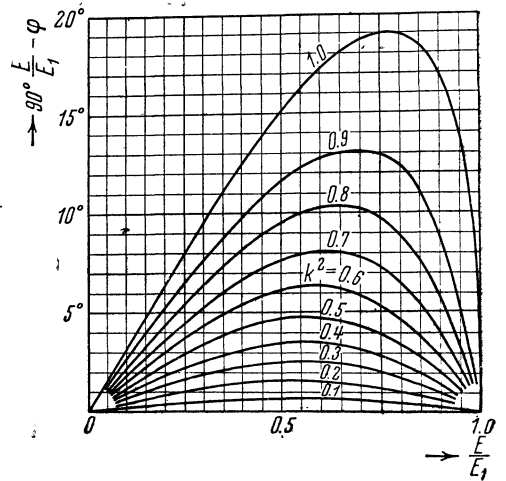
Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

Для вычисления отношения $E(\varphi, k) : E$, где

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

можно пользоваться номограммой фиг. 12. На этой номограмме значения амплитуды φ указываются по горизонтали. По вертикали даются значения функции $90^\circ \frac{E(\varphi, k)}{E} - \varphi$. Значения модуля указаны в виде отметок, по-

ставленных около соответствующих кривых. Так, пользуясь этой номограммой, отношение $E(\varphi, k):E$ при $\varphi = 40^\circ$ и $k^2 = 0.8$ определяется из соотношения

$$90^\circ \frac{E(\varphi, k)}{E} - 40^\circ = 10^\circ,$$

или

$$E(\varphi, k):E \approx 0.56.$$

Для вычисления амплитуды φ по данному значению отношения $E(\varphi, k):E$ приводим номограмму, изображенную на фиг. 13. По горизонтальной оси этой номограммы дается отношение $E(\varphi, k):E$, по вертикальной — значения функции $90^\circ \frac{E(\varphi, k)}{E} - \varphi$. Отметки кривых по номограмме ука-

зывают значения квадрата модуля k^2 . Пользуясь этой номограммой для $k^2 = 0.8$, находим, что значению $E(\varphi, k):E = 0.56$ отвечает соотношение

$$90^\circ \times 0.56 - \varphi \approx 10^\circ, \quad \text{откуда} \quad \varphi = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ.$$

§ 12. Некоторые случаи вычисления интеграла 2-го рода. Если модуль интеграла больше единицы, то вычисления можно привести к случаю, когда модуль меньше единицы. Для этой цели следует в интеграле

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \quad k > 1$$

произвести замену переменных, положив

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi_1}{k}. \quad (96)$$

Формула для вычислений имеет вид

$$E(\varphi, k) = kE\left(\varphi_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k'^2}{k} F\left(\varphi_1, \frac{1}{k}\right), \quad (97)$$

где

$$k'^2 + k^2 = 1.$$

Может оказаться, что при вычислении эллиптического интеграла 2-го рода;

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} \, dx, \quad k < 1,$$

оба предела интегрирования одного знака и по абсолютной величине больше $\frac{1}{k}$.

Пусть

$$\frac{1}{k} < a < b.$$

Подстановка

$$x = \frac{1}{kz} \quad (98)$$

позволяет привести вычисление к интегралу с пределами, меньшими единицы. В самом деле, выполняя подстановку, получаем

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz + \left. \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x} \right|_a^b, \quad (99)$$

причем

$$a_1 = \frac{1}{kb}, \quad b_1 = \frac{1}{ka}.$$

Если один из пределов интегрирования a или b лежит в одном из интервалов $(-\frac{1}{k}, -1)$ и $(1, \frac{1}{k})$, то значение интеграла

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx,$$

будет выражаться числом комплексным. Те части интервала интегрирования, которые лежат в промежутках $(-\infty, -\frac{1}{k})$, $(-1, 1)$, $(\frac{1}{k}, +\infty)$, дадут вещественную часть числа, а те, которые принадлежат промежуткам $(-\frac{1}{k}, -1)$, $(1, \frac{1}{k})$, дадут мнимую часть. Вычисление вещественной части производится, как только что было указано. Остановимся на вычислении мнимой части. Для этого рассмотрим интеграл

$$J = \int_a^b \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad k < 1,$$

в предположении

$$1 \ll a < b \ll \frac{1}{k}.$$

Интеграл имеет чисто мнимое значение, причем

$$J = \int_a^b \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \pm i \int_a^b \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{x^2-1}} dx. \quad (100)$$

Выбор знака \pm в правой части равенства (100) зависит от выбора значения корня в левой части равенства. Подстановкой

$$x = \frac{\sqrt{1-k'^2x'^2}}{k}, \quad k' = \sqrt{1-k^2} \quad (101)$$

интеграл приводится к виду:

$$J = \pm i \left\{ \int_{a'}^{b'} \sqrt{\frac{1-k'^2x'^2}{1-x'^2}} dx' - \int_{a'}^{b'} \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k'^2x'^2)}} \right\}, \quad (102)$$

где

$$a' = \frac{1}{k'} \sqrt{1-k^2a^2}, \quad b' = \frac{1}{k'} \sqrt{1-k^2b^2}. \quad (103)$$

§ 13. Эллиптический интеграл 2-го рода как функция комплексного переменного. Будем рассматривать интеграл

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

как функцию верхнего предела интегрирования. При этом будем придавать φ как вещественные, так и комплексные значения.

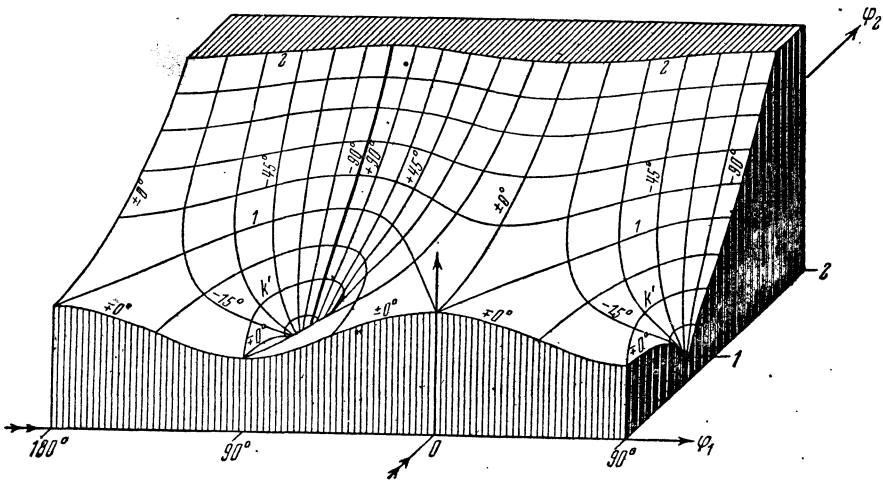
Подинтегральная функция

$$\Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

будучи многозначной (двузначной) функцией φ , имеет точки разветвления ~~и соответствующие значениям~~

$$\varphi = \left(2n \pm \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{1}{k}.$$

При обходе вокруг этих точек она изменяет свой знак. На фиг. 14 дается изображение поверхности, построенной для той ветви функции, которая при $\varphi=0$ принимает значение 1. Величина k принята равной 0.8.



Фиг. 14

Числовыми отметками 1, 2, ... снабжены линии одинакового модуля, который изображается аппликатой поверхности.

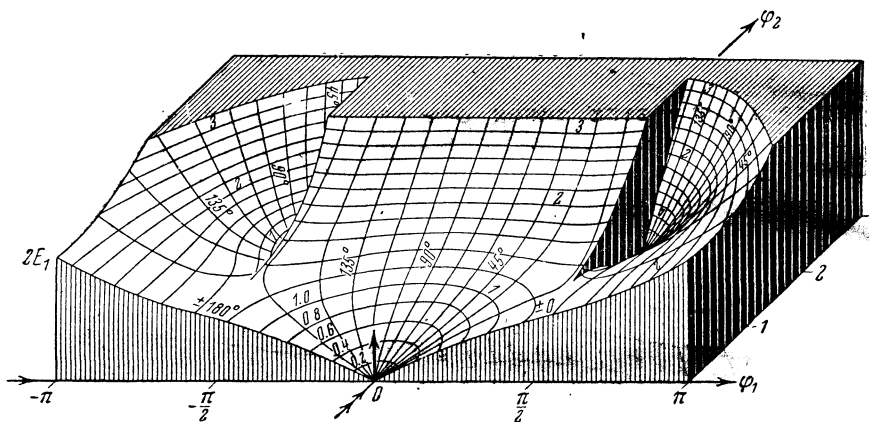
Отметками $0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 45^\circ, \dots$ снабжены линии, соответствующие точкам одинакового аргумента. Поверхность симметрична относительно осей $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. На фигуре дано изображение поверхности при $\varphi_2 \geq 0$ для значений $-180^\circ \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$. Сделано это с целью показать вид поверхности около точки разветвления. Представление о поверхности в интервале $90^\circ \leq \varphi_1 \leq 180^\circ$ легко составить, рассматривая соответствующий участок, симметричный участку $-180^\circ \leq \varphi_1 \leq -90^\circ$. Если на плоскости комплексного переменного $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ провести разрезы, как показано на фиг. 6, то на противоположных краях этих разрезов аргумент рассматриваемой ветви функции получает значения, различающиеся друг от друга на 180° , как это видно на фиг. 14. Другими словами, значения функции $\Delta(\varphi, k)$ на противоположных краях разреза отличаются только знаком.

Полная поверхность значений функции $\Delta(\varphi, k)$ представляет собой периодическое повторение участка ее, соответствующего интервалу $-180^\circ \leq \varphi_1 \leq 180^\circ$.

Если рассматривать значения интеграла

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda,$$

получаемые в результате интегрирования той ветви функции $\Delta(\lambda, k)$, которая при $\lambda = 0$ принимает значение 1, по пути, не пересекающему разрезов, то значение получающегося интеграла не будет зависеть от пути интегрирования, а лишь от конечной точки пути.



Фиг. 15

На фиг. 15 дается изображение поверхности, аппликаты которой равны значению модуля $|E(\varphi, k)|$ в соответствующих точках плоскости переменной

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

Это построение выполнено при $k = 0.8$. Числовые отметки 0.2, 0.4, 0.6, ... соответствуют линиям равного модуля, а градусные $0^\circ, 45^\circ, \dots$ — линиям одного и того же аргумента функции $E(\varphi, k)$. Поверхность симметрична относительно оси $\varphi_1 = 0$. Из фигуры видно, что значения $E(\varphi, k)$, получающиеся на противоположных краях разреза, оказываются различными. Точки, соответствующие значениям функции $E(\varphi, k)$ на противоположных краях разреза, разделены на фиг. 15 участком, заштрихованным черными и белыми полосами во внутренней части модели. Если при интегрировании допустить переход через разрез, то на противоположном краю разреза мы будем получать значения, отличные от тех, которые изображены на фиг. 15. Эти значения показаны на фиг. 16. Если мы совместим мысленно оси на обеих фигурах, то разорванные вдоль линии разреза края одной поверхности соединятся с соответствующими краями другой, и мы получим ясную картину того, что происходит с интегралом при переходе через разрез.

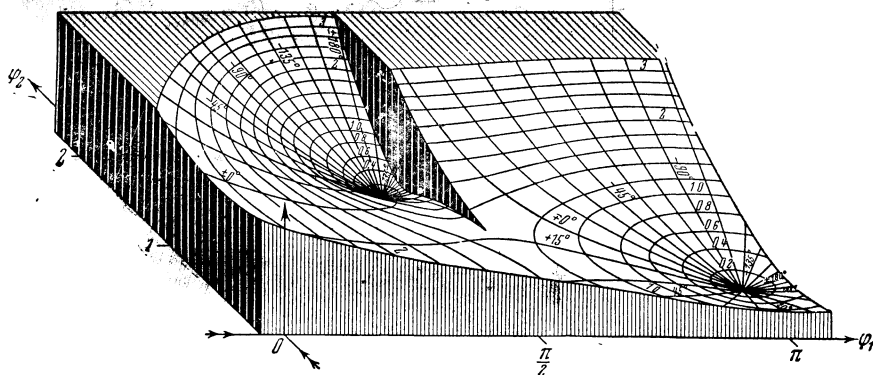
Пользуясь изображением этой поверхности, мы видим, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, не содержащему внутри себя критических точек, равен нулю, ибо никакого изменения функции $E(\varphi, k)$ в результате обхода контура не получается.

Иная картина получается при обходе критической точки. Так, например, значение интеграла, соответствующего обходу, указанному на фиг. 6 вокруг критической точки по кривой Γ , выражается равенством

$$\int_{\Gamma} \Delta(\varphi, k) d\varphi = 2E + 2iE_1, \quad (104)$$

где

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad iE_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + i \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{1}{k}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (105)$$



Фиг. 16

Последний интеграл посредством замены

$$\sin \varphi = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'},$$

где

$$k' = \sqrt{1 - k^2},$$

приводится к виду

$$E_1 = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} d\varphi' + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}}. \quad (106)$$

Интеграл (105) называется полным эллиптическим интегралом второго рода.

Аналогичный результат получается и при обходе других критических точек.

Интеграл по замкнутому контуру Γ , окружающему одну из критических точек, равен

$$\int_{\Gamma} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \pm 2E \pm 2iE_1. \quad (107)$$

Если понимать под $E(\varphi, k)$ то значение интеграла

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda,$$

которое мы получаем, интегрируя по линии, не пересекающей разреза, то любое значение, которое может получить интеграл при интегрировании от 0 до φ по любому пути, выражается равенством

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda = \pm E(\varphi, k) + 2mE + 2niE_1, \quad (108)$$

где m и n суть произвольные целые числа одинаковой четности. Знак плюс перед $E(\varphi, k)$ соответствует тому случаю, когда числа m и n четные. Знак минус соответствует тому случаю, когда m и n —числа нечетные.

Отметим свойства интеграла $E(\varphi, k)$, непосредственно вытекающие из его определения:

$$E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k), \quad (109)$$

$$E(\varphi + \pi, k) = E(\varphi, k) + 2E. \quad (110)$$

Оба эти свойства могут быть выражены одной формулой:

$$E(m\pi \pm \varphi, k) = 2mE \pm E(\varphi, k), \quad (111)$$

где m —число целое.

Если рассматривать интеграл

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx,$$

то можно сказать, что он является многозначной функцией верхнего предела x . Все возможные значения интеграла, соответствующие различным путям интегрирования от точки 0 до x , получаются из одного,—скажем, из интеграла, взятого по прямолинейному пути, и могут быть представлены в виде

$$\pm \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx + 2mE + i2nE_1,$$

где интеграл берется по прямолинейному пути, m и n —числа целые и

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx,$$

$$E_1 = - \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2 x^2}{1 - x^2}} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Знак плюс перед интегралом получается в том случае, когда число m оказывается четным, а знак минус—в том случае, когда m оказывается нечетным.

§ 14. Эллиптический интеграл 3-го рода. Эллиптическим интегралом 3-го рода в канонической форме Лежандра называется интеграл

$$\int \frac{dx}{(1 + px^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \quad (112)$$

Этот интеграл, подобно интегралам 1-го и 2-го рода, не выражается в общем виде через элементарные функции.

Вычисление интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

подстановкой

$$x = \sin \varphi$$

приводится к вычислению интеграла

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \quad (112')$$

В настоящее время мы не имеем таблиц для вычисления интегралов 3-го рода, подобных таблицам Лежандра. По этой причине для вычисления интегралов 3-го рода приходится пользоваться разложением в ряд.

Если $k < 1$, то для вычисления $\Pi(n, k, \varphi)$ может служить ряд

$$\begin{aligned} \Pi(n, k, \varphi) = C_0 + \frac{1}{2} C_1 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C_2 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} C_3 k^6 + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} C_s k^{2s} + \dots \end{aligned} \quad (113)$$

Особенно удобно пользоваться этим рядом при небольших значениях φ . Коэффициенты $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ вычисляются последовательно с помощью равенств

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \arctg(\sqrt{n+1} \operatorname{tg} \varphi), \quad (114)$$

$$C_{s+1} = \frac{1}{n} (A_s - C_s). \quad (115)$$

Коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \dots, A_s, \dots$ находятся при помощи равенств (79) и (80).

Пример. Вычислить интеграл

$$\Pi\left(8, 0.3, \frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{(1+8\sin^2\varphi)\sqrt{1-0.09\sin^2\varphi}}$$

с точностью до 0.0001.

Находим сначала A_0 и C_0 :

$$A_0 = \frac{\pi}{6} = 0.5236,$$

$$C_0 = \frac{1}{3} \arctg\left(3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right) = 0.3491.$$

Дальнейшее вычисление располагаем по схеме, приведенной в табл. 12.

Таблица 12

s	C_s	A_s	$A_s - C_s$	$\sin \varphi$	$\sin^{2s+1} \varphi \cos \varphi$	$A_s + \sin \varphi \cos^{2s+1} \varphi$	ΔA_s
0	0.3491	0.5236	0.1745	0.5	0.4330	0.9566	0.4783
1	0.0218	0.0453	0.0235				
2	0.0027						

$$C = 0.3491$$

$$\frac{1}{2} C_1 k^2 = 0.0010$$

$$\frac{3}{8} C_2 k^4 = 0.0000$$

$$\Pi\left(8, 0.3, \frac{\pi}{2}\right) = 0.3501.$$

При вычислении интегралов 3-го рода можно пользоваться и другими разложениями. Однако выгоднее всего пользоваться для этой цели функциями тэта. Как это следует делать, показано в разделе, относящемся к функциям тэта.

В том случае, когда модуль k больше единицы, вычисление интеграла $\Pi(n, k, \varphi)$ сводится подстановкой

$$\sin \varphi = \frac{\sin \varphi_1}{k}$$

к нахождению эллиптического интеграла, имеющего модуль меньше единицы:

$$\Pi(n, k, \varphi) = \frac{1}{k} \Pi\left(\frac{n}{k^2}, \frac{1}{k}, \varphi_1\right) \quad (116)$$

Может оказаться, что при вычислении интеграла

$$J = \int_a^b \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \quad (k < 1),$$

оба предела интегрирования одного знака и по абсолютной величине больше $\frac{1}{k}$. Пусть

$$\frac{1}{k} < a < b.$$

Подстановка

$$x = \frac{1}{ky} \quad (117)$$

позволяет свести все вычисления к интегралу с пределами меньше единицы:

$$J = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{dy}{(1 + n_1 y^2) \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}; \quad (118)$$

$$n_1 = \frac{k^2}{n}, \quad a_1 = \frac{1}{kb}, \quad b_1 = \frac{1}{ka}.$$

Может оказаться, как это уже было отмечено в отношении интегралов 1-го и 2-го рода, что в интервале интегрирования подинтегральная функция изменяет свой знак. В таком случае те части интервала интегрирования, которые приходятся на промежутки $(-\infty, -\frac{1}{k})$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, дают вещественную часть интеграла, а те части интервала интегрирования, которые падают на промежутки $(-\frac{1}{k}, -1)$, $(1, \frac{1}{k})$, дают мнимую часть интеграла.

Пусть $1 \leq a < b \leq \frac{1}{k}$. В таком случае, выполняя в правой части равенства

$$\int_a^b \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm i \int_a^b \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

подстановку

$$x = \frac{\sqrt{1-k'^2x'^2}}{k}, \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

приведем его к виду

$$\int_a^b \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\pm k^2 i}{k^2+n} \int_{a'}^{b'} \frac{dx}{(1+n'x'^2)\sqrt{(1-x'^2)(1-k'^2x'^2)}}, \quad (119)$$

где

$$n' = -\frac{nk'^2}{k^2+n}, \quad a' = \frac{1}{k'}\sqrt{1-k^2b^2}, \quad b' = \frac{1}{k'}\sqrt{1-k^2a^2}.$$

Знак в правой части равенства (119) зависит от значения корня в левой части равенства. Значение корня в правой части равенства положительное.

§ 15. Некоторые частные эллиптические интегралы, выражающиеся через интегралы 1-го и 2-го рода.

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)}{k^2}. \quad (120)$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} E(\varphi, k) - \frac{k'^2}{k^2} F(\varphi, k). \quad (121)$$

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{k'^2} E(\varphi, k). \quad (122)$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sec^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{k'^2} E(\varphi, k) + F(\varphi, k). \quad (123)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \frac{\operatorname{cosec}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - E + E(\varphi, k) + K - F(\varphi, k). \quad (124)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - E + E(\varphi, k). \quad (125)$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{E(\varphi, k)}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (126)$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{1}{k^2 k'^2} E(\varphi, k) - \frac{1}{k^2} F(\varphi, k) - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{k'^2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (127)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{F(\varphi, k)}{k^2} - \frac{E(\varphi, k)}{k^2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (128)$$

$$\int_0^{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k). \quad (129)$$

$$\int_0^{\varphi} \cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1+k^2}{3k^2} E(\varphi, k) - \frac{k'^2}{3k^2} F(\varphi, k). \quad (130)$$

$$\int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = -\frac{1}{3} \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2k^2-1}{3k^2} E(\varphi, k) + \frac{k'^2}{3k^2} F(\varphi, k). \quad (131)$$

$$\int_0^{\varphi} \sec^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + F(\varphi, k) - E(\varphi, k). \quad (132)$$

§ 16. Формулы сложения эллиптических интегралов. Интеграл 1-го рода. Если амплитуды α , β , γ связаны между собою соотношением

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \gamma}, \quad (133)$$

то

$$F(\alpha, k) + F(\beta, k) = F(\gamma, k). \quad (134)$$

В частном случае, когда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, амплитуды α и β связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = k' \quad (135)$$

и

$$F(\alpha, k) + F(\beta, k) = K. \quad (136)$$

Интеграл 2-го рода. Если амплитуды α , β , γ связаны между собою соотношением (133), то

$$E(\alpha, k) + E(\beta, k) = E(\gamma, k) + k^2 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \gamma}. \quad (137)$$

В частном случае, когда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, амплитуды α и β связаны между собою соотношением (135), и

$$E(\alpha, k) + E(\beta, k) = E + k^2 k' \sin \alpha \sin \beta. \quad (138)$$

Интеграл 3-го рода. Если амплитуды α , β , γ связаны между собою соотношением (133), то

$$\begin{aligned} & \Pi(n, k, \alpha) + \Pi(n, k, \beta) = \Pi(n, k, \gamma) + \\ & + (1+n)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+k^2)} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{n+1-n \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \end{aligned} \quad (139)$$

или

$$\begin{aligned} & \Pi(n, k, \alpha) + \Pi(n, k, \beta) = \Pi(n, k, \gamma) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{-(1+n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)}} \operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\sqrt{-n(n+1)(n+k^2)} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{n+1-n \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (140)$$

Первая формула соответствует случаю, когда

$$(n+1)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)$$

положительное количество. Вторая форма отвечает случаю, когда это количество отрицательно.

В частном случае, когда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, амплитуды α и β связаны между собою соотношением (135), и

$$\begin{aligned} & \Pi(n, k, \alpha) + \Pi(n, k, \beta) = \\ & = \Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{(n+1)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)}} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{\frac{n(n+k^2)}{n+1}} \sin \alpha \sin \beta \right\} \end{aligned} \quad (141)$$

или

$$\begin{aligned} & \Pi(n, k, \alpha) + \Pi(n, k, \beta) = \\ & = \Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{-(n+1)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)}} \operatorname{arg\,th} \left\{ \sqrt{\frac{-n(n+k^2)}{n+1}} \sin \alpha \sin \beta \right\}. \end{aligned} \quad (142)$$

Первая форма соответствует случаю, когда

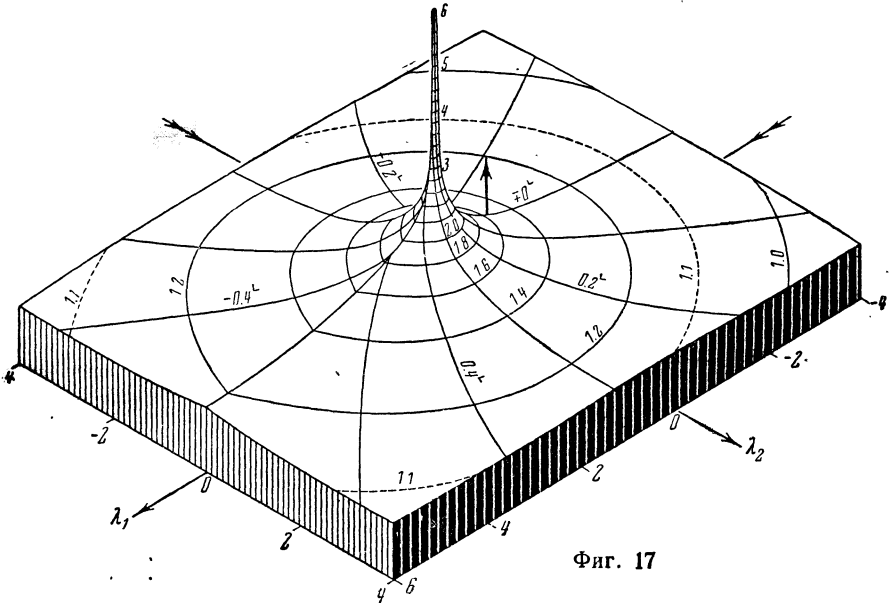
$$(n+1)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)$$

положительно, вторая отвечает случаю, когда это количество отрицательно.

§ 17. Полный эллиптический интеграл 1-го рода. Если рассматривать полный эллиптический интеграл 1-го рода

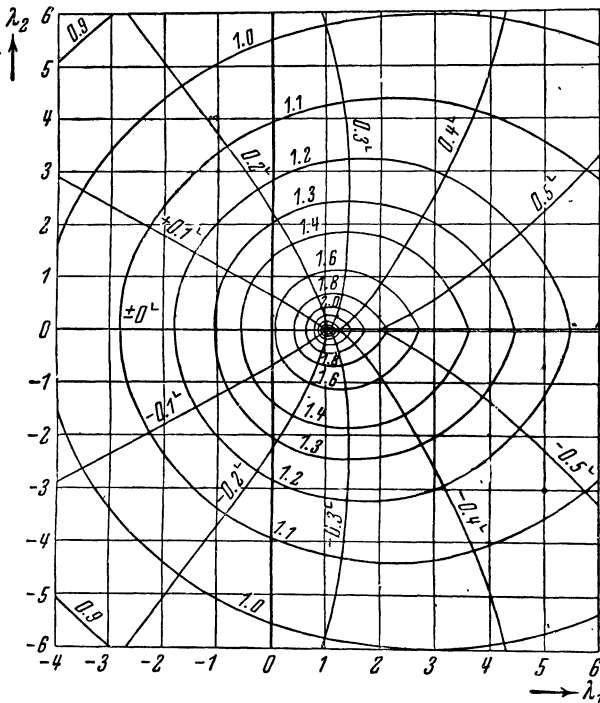
$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

как функцию модуля $k^2 = \lambda_1 + \lambda_2 i$ то для изображения будет служить поверхность, представленная на фиг. 17.



Фиг. 17

Ординаты этой поверхности равны значениям модуля функции $|k|$ в соответствующих точках. Изображение полного эллиптического интеграла (фиг. 17) показывает, что K обращается в бесконечность при $k^2=1$. Вертикальной стрелкой на фигуре отмечено положение начала координат.



Фиг. 18

Фиг. 17 изображает ту ветвь функции, которая при $k^2=0$ обращается в $\frac{\pi}{2}$. Разрез плоскости $k^2=\lambda_1+\lambda_2i$ произведен вдоль вещественной оси от точки 1 до ∞ . Отметки линии равного аргумента даны в сотых долях прямого угла.

Если линии одинаковой высоты и линии наибольшего ската на поверхности фиг. 17 спроектировать на плоскость, то мы получим серию изолиний модуля и аргумента функции K . Последние изображены на фиг. 18.

Для вычисления полного эллиптического интеграла 1-го рода можно пользоваться таблицами Лежандра. Отметим, что наряду с таблицами, дающими значения $K=F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, Ле-

жандром были составлены таблицы значений $\lg K$ для различных значений $k = \sin \alpha$

через 0.1° с четырнадцатью десятичными знаками после запятой. Этими таблицами удобно пользоваться в тех случаях, когда вычисления производятся с помощью логарифмов.

Для вычисления полного эллиптического интеграла можно также пользоваться разложениями в ряды. В этом случае разложение (13) принимает вид

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\}. \quad (143)$$

Если значение k близко к единице, то выгоднее пользоваться разложением K в ряд по степеням $k' = \sqrt{1-k^2}$:

$$K = \alpha_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha_1 k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha_2 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \alpha_3 k'^6 + \dots \quad (144)$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ определяются равенствами

$$\alpha_0 = \ln \frac{4}{k'}, \quad \alpha_1 = \alpha_0 - 1, \quad \dots, \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{2}{(2n-1)n}.$$

Наконец, вычисление полного эллиптического интеграла 1-го рода можно производить, пользуясь преобразованием Ландена, как указано в § 5, по формуле (41).

Согласимся обозначать полный эллиптический интеграл 1-го рода как функцию k знаком $K(k)$.

Введем обозначение

$$K(k') = K'(k). \quad (145)$$

Если окажется, что $|k| > 1$, то вычисление $K(k)$ сведется согласно равенству

$$kK(k) = K\left(\frac{1}{k}\right) \pm iK'\left(\frac{1}{k}\right) \quad (146)$$

к вычислению полного эллиптического интеграла, модуль которого меньше единицы.

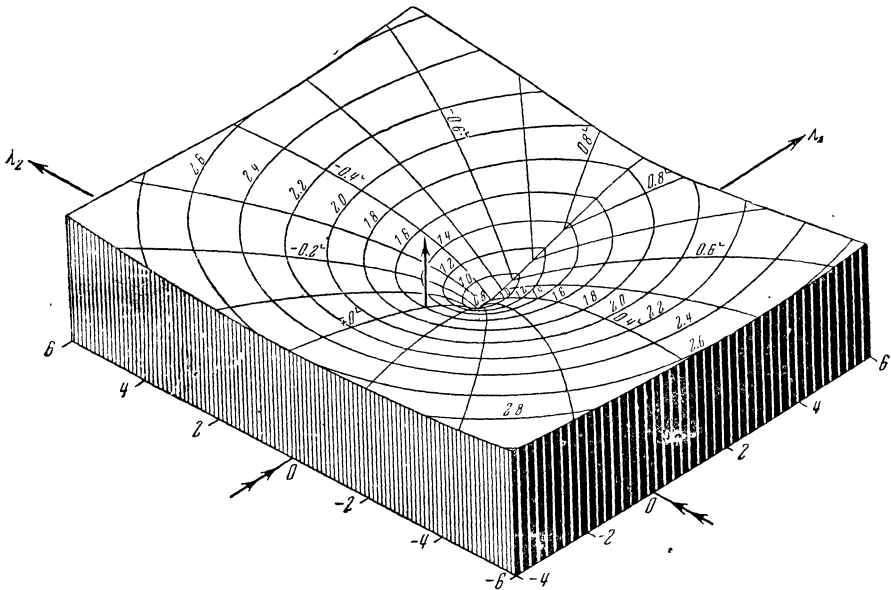
В этом случае можно пользоваться разложением

$$\begin{aligned} K(k) = \frac{\pi}{2k} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{k^4} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{k^6} + \dots \right\} + \\ \pm i \cdot \frac{1}{k} \left\{ \ln 4k + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\ln 4k - 1) \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 (\ln 4k - \frac{7}{6}) \frac{1}{k^4} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\ln 4k - \frac{37}{30}\right) \frac{1}{k^6} + \dots \right\}. \quad (147) \end{aligned}$$

§ 18. Полный эллиптический интеграл 2-го рода. Полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

как функция модуля k обозначается знаком $E(k)$. Изображение $E(k)$ как функции комплексной переменной $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$ дано на фиг. 19. На этой



Фиг. 19

фигуре, как и на фиг. 17, стрелкой отмечено положение $k^2 = 0$. Апликаты поверхности изображают модули значений функции. На поверхности отмечены изолинии уровня и линии наибольшего ската.

На фиг. 20 изображены изолинии модулей значений функции $E(k)$ и ортогональные к ним изолинии аргументов.

Вычисление значений $E(k)$ можно производить по таблицам значений эллиптического интеграла 2-го рода. На ряду с этими таблицами вычислены таблицы значений $\lg E(k)$ с четырнадцатью знаками после запятой. Значения $\lg E(\sin \alpha)$ даются через 1° по α в промежутке от 0 до 90° . Эти таблицы удобны при вычислениях с логарифмами.

При отсутствии таблиц полный эллиптический интеграл 2-го рода можно вычислять с помощью ряда

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{k^2}{2^2} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots 2n} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (148)$$

Если значение k близко к единице, то выгоднее пользоваться разложением E в ряд по степеням k' :

$$E = 1 + \frac{1}{2} \beta_1 k'^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{4} \beta_2 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{5}{6} \beta_3 k'^6 + \dots, \quad (149)$$

причем $k' = \sqrt{1 - k^2}$,

$$\beta_1 = \ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \beta_2 = \beta_1 - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \dots, \quad \beta_n = \beta_{n-1} - \sum_{s=1}^n \frac{1}{(2s-1) 2s}.$$

Будем обозначать

$$E(k') = E'(k). \quad (150)$$

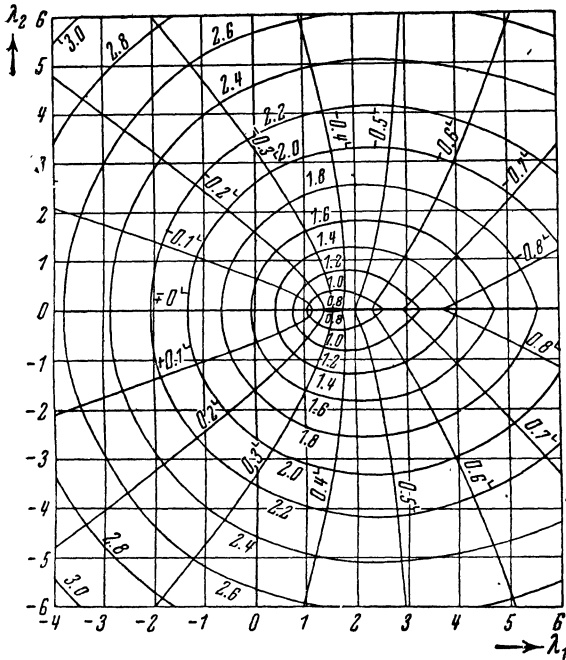
В том случае, когда $|k| > 1$, вычисление $E(k)$ с помощью равенства

$$kE(k) = k^2 E\left(\frac{1}{k}\right) + k'^2 K\left(\frac{1}{k}\right) \pm i \left\{ K'\left(\frac{1}{k}\right) - k^2 E'\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \quad (151)$$

приводится к вычислению полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода при условии, что $|k| < 1$.

В этом случае, можно пользоваться разложением

$$E(k) = \frac{\pi}{4k} \left\{ 1 + \frac{1}{8k^2} + \frac{3}{64} \frac{1}{k^4} + \dots \right\} \pm \left\{ -k + \frac{1}{2} \left(\ln 4k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k} + \frac{1}{16} \left(\ln 4k - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{k^3} + \frac{3}{128} (\ln 4k - 1) \frac{1}{k^5} + \dots \right\}. \quad (152)$$



Фиг. 20

§ 19. Полный эллиптический интеграл 3-го рода.

Полный эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (153)$$

есть функция двух величин: n и k .

Вычисление полного эллиптического интеграла 3-го рода приводится к вычислению эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода согласно равенству

$$\Pi(n, k) = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (154)$$

причем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ & = \frac{\frac{1}{2} \pi - K(k) E(\omega, k') - E(k) F(\omega, k') + K(k) F(\omega, k')}{\sin \omega \cos \omega \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \omega}}, \end{aligned} \quad (155)$$

где

$$\operatorname{ctg}^2 \omega = n. \quad (156)$$

Интегралы 3-го рода можно также вычислять при помощи разложения в ряд, как показано в § 14.

§ 20. Разложение некоторых полных эллиптических интегралов в ряды. Интеграл

$$D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (157)$$

при $|k| < 1$ представляется рядом

$$\begin{aligned} D(k) = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{2} k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{5}{3} k^4 + \dots \right. \\ \left. + \dots + \left(\frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 \frac{2n+1}{n+1} k^{2n} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (158)$$

при значении $|k|$, близком к единице, выгоднее пользоваться разложением в ряд по степеням k' :

$$D(k) = \ln \frac{4}{k'} - 1 + \frac{3}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{3}{4} \right) k'^2 + \frac{45}{64} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{41}{30} \right) k'^4 + \dots \quad (159)$$

Когда $|k| > 1$, вычисление $D(k)$ можно вести, пользуясь рядом

$$\begin{aligned} D(k) = \frac{\pi}{4k^3} \left\{ 1 + \frac{3}{8k^2} + \frac{15}{64k^4} + \dots \right\} \pm \\ \pm \frac{i}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\ln 4k - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k^2} + \frac{3}{16} \left(\ln 4k - \frac{13}{12} \right) \frac{1}{k^4} + \frac{15}{128} \left(\ln 4k - \frac{6}{5} \right) \frac{1}{k^6} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (160)$$

Интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

при $|k| < 1$ может быть вычислен с помощью ряда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} + \dots \right. \\ \left. + \dots + \left(\frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 \frac{k^{2n}}{n+1} + \dots \right\}. \quad (161)$$

Для значений k , близких к единице, выгоднее пользоваться разложением

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{3}{2}\right) k'^2 - \frac{9}{16} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{17}{12}\right) k'^4 - \dots \quad (162)$$

Если $|k| > 1$, то вычисление интеграла можно производить с помощью ряда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2k} \left\{ 1 - \frac{1}{4k^2} - \frac{3}{64} \frac{1}{k^4} - \frac{5}{256} \frac{1}{k^6} - \dots \right\} \pm \\ \pm \frac{i}{k} \left\{ \ln 4k - 1 - \frac{\ln 4k}{4} \frac{1}{k^2} - \frac{3}{64} \left(\ln 4k - \frac{5}{6}\right) \frac{1}{k^4} - \frac{5}{256} \left(\ln 4k - \frac{31}{30}\right) \frac{1}{k^6} - \dots \right\}. \quad (163)$$

Отметим еще разложение в ряд полного эллиптического интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2} \left(\frac{\arccos \frac{1}{\lambda'}}{\lambda' \sqrt{\lambda'^2 - 1}} + R \right), \quad (163')$$

где

$$R = \frac{k'^2}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\lambda'^3} + \frac{k'^4}{16} \left[-1 + \left(\ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\lambda'^3} \left(1 + \frac{6}{\lambda'^2}\right)\right] + \\ + \frac{k'^6}{16} \left[-\frac{7}{16} - \frac{1}{\lambda'^2} + \left(\ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{\lambda'^3} \left(\frac{3}{k} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{5}{\lambda'^4}\right)\right] + \\ + \frac{15k'^8}{256} \left[-\frac{37}{144} - \frac{21}{40\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda'^4} + \left(\ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{\lambda'^3} \left(\frac{5}{24} + \frac{9}{20\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda'^4} + \frac{14}{3\lambda'^6}\right)\right] + \dots,$$

причем $k^2 + k'^2 = 1$ и $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$.

§ 21. Некоторые интегралы от функций $K(k)$, $E(k)$, $D(k)$. В дальнейшем $\Phi(k)$ и $\Psi(k)$ обозначают произвольные функции модуля k .

$$\int \left\{ \left(\Phi'(k) - \frac{1}{k} \Psi(k)\right) k K(k) + \left(\Psi'(k) + \frac{k}{k'^2} \Phi(k)\right) \frac{E(k)}{k} \right\} dk = \\ = \Phi(k) k K(k) + \frac{1}{k} \Psi(k) E(k). \quad (164)$$

$$\int \left\{ k'^2 \Phi''(k) - \left(k + \frac{1}{k} \right) \Phi'(k) + \frac{1}{k^2} \Phi(k) \right\} K(k) dk = \\ = k'^2 \Phi'(k) K(k) - \frac{1}{k} \Phi(k) E(k). \quad (165)$$

$$\int \left(k^2 \Phi''(k) + 3k \Phi'(k) + \frac{1}{k'^2} \Phi(k) \right) E(k) dk = k \Phi(k) K(k) + k^2 \Phi'(k) E(k). \quad (166)$$

$$\int \left\{ \left(\Phi'(k) + \frac{k}{k'^4} \Psi(k) \right) k' K(k) + \left(\Psi'(k) - \frac{1}{k} \Phi(k) \right) \frac{k^2}{k'} D(k) \right\} dk = \\ = \Phi(k) k' K(k) + \Psi(k) \frac{k^2}{k'} D(k). \quad (167)$$

$$\int \left(\Phi''(k) + \frac{1}{k} \Phi'(k) + \frac{1}{k'^4} \Phi(k) \right) k k' K(k) dk = \\ = \frac{k^2}{k'} \Phi(k) D(k) + k k' \Phi'(k) K(k). \quad (168)$$

$$\int \left(k'^2 \Phi''(k) - \frac{3k^2 + 1}{k} \Phi'(k) + \frac{1}{k'^2} \Phi(k) \right) k k' D(k) dk = \\ = -k' \Phi(k) K(k) + k k'^3 \Phi'(k) D(k). \quad (169)$$

$$\int \left\{ \left(\Phi'(k) + \frac{k}{k'^2} \Psi(k) \right) E(k) + \left(\Psi'(k) - \frac{1}{k} \Phi(k) \right) k^2 D(k) \right\} dk = \\ = \Phi(k) E(k) + \Psi(k) k^2 D(k). \quad (170)$$

$$\int \left(\Phi''(k) + \frac{1}{k} \Phi'(k) + \frac{1}{k'^2} \Phi(k) \right) k E(k) dk = k^2 \Phi(k) D(k) + k \Phi'(k) E(k). \quad (171)$$

$$\int \left(k'^2 \Phi''(k) - \frac{1 + k^2}{k} \Phi'(k) + \Phi(k) \right) k D(k) dk = \\ = -\Phi(k) E(k) + k k'^2 \Phi'(k) D(k). \quad (172)$$

$$\int \left\{ \Phi(k) K(k) k + k^2 \Phi'(k) \left(K(k) - D(k) \right) \right\} dk = k^2 \Phi(k) \left(K(k) - D(k) \right). \quad (173)$$

Отметим, что

$$\int_0^1 K(k) dk = 2 \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots \right) = 2G, \quad (174)$$

где $G = 0.915965594 \dots$ есть постоянная Каталана.

$$\int_0^1 E(k) dk = 1 + G = 1 + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \quad (175)$$

§ 22. Некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют полные эллиптические интегралы. Полные эллиптические интегралы $K(x)$, $E(x)$ и $D(x)$ удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$(1 - x^2) x \frac{dy}{dx} = z - (1 - x^2) y, \\ x \frac{dz}{dx} = z - y, \quad (176)$$

где $y = K(x)$, $z = E(x)$;

$$x^2 (1 - x^2) \frac{dy}{dx} = xz + \left(x^2 \sqrt{1 - x^2} - 2x(1 - x^2) \right) y, \\ (1 - x^2) \frac{dz}{dx} = xz - xy, \quad (177)$$

где $y = D(x)$, $z = K(x)$;

$$\frac{dy}{dx} = -xz \quad (178)$$

$$x^2(1-x^2)\frac{dz}{dx} = xy - zx(1-x^2)z,$$

где $y = E(x)$, $z = D(x)$.

Полный эллиптический интеграл $K(x)$ удовлетворяет уравнению;

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-3x^2}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad (179)$$

где $y = K(x)$; которое можно представить в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x}\frac{dxy}{dx}\right) + \frac{y}{x^2} = 0. \quad (179')$$

Полный эллиптический интеграл $E(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \quad (180)$$

где $y = E(x)$; которое можно представить в виде

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{xy}{1-x^2} = 0. \quad (180')$$

Полный эллиптический интеграл $D(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3-5x^2}{x}\frac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad (181)$$

где $y = D(x)$; которое можно представить в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x}\frac{dx^2y}{dx}\right) + xy = 0. \quad (181')$$

Наконец, функции $K(x)$, $E(x)$, $D(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} = (1-2x^2)w + \frac{2x^2}{1-x^2}v,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} = w - u,$$

$$(1-x^2)x^2\frac{d^2w}{dx^2} = (6-7x^2)w - \frac{3-5x^2}{1-x^2}v,$$

где

$$u = K(x), \quad v = E(x), \quad w = D(x).$$

§ 23. Приведение эллиптического интеграла

$$\int R(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}) dx$$

к интегралам 1-го, 2-го или 3-го рода.

Эллиптический интеграл

$$\int R(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}) dx$$

может быть представлен в виде

$$\int R(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}) dx = \int \frac{P_0(x) + P_1(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{P_2(x) + P_3(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \quad (182)$$

где $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ суть полиномы, или в виде

$$\int R(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}) dx = \int \left\{ R_1(x) + \frac{R_2(x)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right\} dx, \quad (184)$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ суть рациональные функции.

Вычисление интеграла

$$\int \frac{R_2(x)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx \quad (185)$$

приводится к вычислению эллиптического интеграла вида:

$$\int \frac{R_3(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Для этой цели следует представить $R_2(x)$ в виде:

$$R_2(x) = \frac{Q_0(x^2) + x Q_1(x^2)}{Q_2(x^2) + x Q_3(x^2)}, \quad (186)$$

где $Q_0(x^2), Q_1(x^2), Q_2(x^2), Q_3(x^2)$ суть многочлены от x^2 .

Умножив числитель и знаменатель дроби на

$$Q_2(x^2) - x Q_3(x^2),$$

приведем $R_2(x)$ к виду

$$R_2(x) = R_3(x^2) + x R_4(x^2),$$

где $R_3(x)$ и $R_4(x^2)$ суть рациональные функции от x^2 .

Вычисление интеграла (185) согласно равенству

$$\int \frac{R_2(x)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx = \int \frac{R_3(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int \frac{x R_4(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (187)$$

приводится к вычислению двух интегралов. При этом второй из них подстановкой

$$x^2 = y$$

приводится к виду

$$\int \frac{x R_4(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{R_4(y) dy}{\sqrt{(1-y)(1-k^2y)}} \quad (188)$$

и выражается через элементарные функции.

Таким образом вычисление интеграла (185) сведено к вычислению интеграла

$$\int \frac{R_3(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (189)$$

Пользуясь разложением функции $R_3(x^2)$ на простейшие дроби, легко свести вычисление интеграла (189) к вычислению интегралов вида

$$X_s = \int \frac{x^{2s} dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (s \geq 0) \quad (190)$$

и

$$Y_p = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^p \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (p > 0). \quad (191)$$

Равенство

$$\begin{aligned} (2s-1)k^2 X_s - (2s-2)(k^2+1)X_{s-1} + (2s-3)X_{s-2} = \\ = x^{2s-3} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \end{aligned} \quad (192)$$

показывает, что вычисление X_s приводится к вычислению интегралов X_{1-s} и X_{s-2} . В результате последовательного использования равенства (192) вычисление интеграла X_s приведет к вычислению интегралов:

$$X_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (193)$$

и

$$X_1 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{k^2} \left\{ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \right\}. \quad (194)$$

Интеграл (190) выражается через интегралы X_0 и X_1 равенством вида

$$X_s = AX_0 + BX_1 + P_{2s-3}(x) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad (195)$$

где A и B суть постоянные, а P_{2s-3} есть нечетный полином степени $2s-3$.

Равенство (195) показывает, что

$$\int \frac{P_m(x^2) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma P_{m-2}(x^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}. \quad (196)$$

В этом равенстве $P_m(x^2)$ и $P_{m-2}(x^2)$ суть полиномы степени m и $m-2$ от x^2 , а α и β постоянные.

Равенство (196) позволяет легко выделить алгебраическую часть интеграла.

Пример. Привести вычисление интеграла

$$\int \frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

к простейшим.

Согласно равенству (196)

$$\int \frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx = \alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma x \sqrt{1-x^4}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{\beta x^2}{\sqrt{1-x^4}} + \gamma \sqrt{1-x^4} - \frac{2\gamma x^4}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Освободившись от знаменателя, находим

$$1+x^4 = \alpha + \gamma + \beta x^2 - 3\gamma x^4.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства:

$$\alpha + \gamma = 1, \quad \beta = 0, \quad -3\gamma = 1,$$

откуда

$$\gamma = -\frac{1}{3}, \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

и

$$\int \frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{3} x \sqrt{1-x^4}.$$

Интеграл Y_p (191) в силу равенства

$$\begin{aligned} (2p-2) \left[1 + \frac{1+k^2}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right] Y_p - (2p-3) \left[1 + \frac{2(1+k^2)}{n} + \frac{3k^2}{n^2} \right] Y_{p-1} + \\ + (2p-4) \left[\frac{1+k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2} \right] Y_{p-2} - (2p-5) \frac{k^2}{n^2} Y_{p-3} = \\ = \frac{x}{(1+nx^2)^{p-1}} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \end{aligned} \quad (197)$$

приводится к интегралам Y_{p-1} , Y_{p-2} , Y_{p-3} .

Последовательное применение равенства (197) позволяет выразить интеграл Y_p через интегралы

$$Y_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$Y_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = X_0,$$

$$Y_{-1} = \int \frac{(1+nx^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = X_0 + nX_1.$$

Интеграл Y_p выражается через интегралы Y_1 , X_0 и X_1 равенством

$$Y_p = AX_0 + BX_1 + CY_1 + \frac{P_{s-2}(x^2)}{(1+nx^2)^{s-1}} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad (198)$$

где A, B, C суть постоянные, а $P_{s-2}(x^2)$ — многочлен степени $s-2$ от x^2 .

Из равенства (198) вытекает, что интеграл

$$\int \frac{P(x^2)dx}{Q(x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (199)$$

где степень многочлена $P(x^2)$, стоящего в числителе, меньше степени многочлена $Q(x^2)$, стоящего в знаменателе, выражается через интегралы X_0, X_1 и Y_1 .

Если разложение $Q(x^2)$ на множители имеет вид

$$Q(x^2) = (1+ax^2)^\alpha (1+bx^2)^\beta \dots (1+lx^2)^\lambda,$$

то

$$\int \frac{P(x^2)dx}{Q(x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{xP_1(x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{(1+ax^2)^{\alpha-1} \dots (1+lx^2)^{\lambda-1}} +$$

$$+ \int \frac{P_2(x^2)dx}{(1+ax^2) \dots (1+lx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \alpha X_0 + \beta X_1, \quad (200)$$

где $P_1(x^2)$ и $P_2(x^2)$ суть многочлены от x^2 , причем степени их меньше степеней многочленов, стоящих в знаменателях.

Пользуясь этой формулой, можно легко приводить вычисление интеграла вида (200) к вычислению интегралов X_0, X_1 и Y_1 .

Пример. Привести вычисление интеграла

$$\int \frac{(1+x^4)dx}{(1+x^2)^3(1+2x^2)^2\sqrt{1-x^4}}$$

к вычислению простейших интегралов.

Согласно равенству (200) имеем

$$\int \frac{(1+x^4)dx}{(1+x^2)^3(1+2x^2)^2\sqrt{1-x^4}} = \frac{x(ax^4+bx^2+c)\sqrt{1-x^4}}{(1+x^2)^2(1+2x^2)} +$$

$$+ \int \frac{(ex^2+f)dx}{(1+x^2)(1+2x^2)\sqrt{1-x^4}} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \beta \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Поступая совершенно так же, как и в предыдущем примере, получаем

$$1+x^4 = (ax^4+bx^2+c)(1-x^4)(1+x^2)(1+2x^2) +$$

$$+ (4ax^4+2bx^2)(1-x^4)(1+x^2)(1+2x^2) + x(ax^4+bx^2+c)(-4x)(1+2x^2)(1-x^4) +$$

$$+ x(ax^4+bx^2+c)(-4x)(1+x^2)(1-x^4) - 2x^4(ax^4+bx^2+c)(1+x^2)(1+2x^2) +$$

$$+ (ex^2+f)(1+2x^2)(1+x^2)^2 - (\alpha+\beta x^2)(1+2x^2)^2(1+x^2)^3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -2a + 4\beta &= 0, \\ -13a + 2b + 4a + 16\beta &= 0, \\ -9a - 7b + 8c + 16a + 25\beta &= 0, \\ 7a - 11b - c + 5e + 2f + 25a + 19\beta &= 0, \\ 5a + b - 13c + 4e + 5f + 19a + 7\beta &= 1, \\ 3b - 5c + e + 4f + 7a + \beta &= 0, \\ c + f + a &= 1. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получаем

$$a = 8.6, \quad b = 17.9, \quad c = 8.3, \quad e = 7.3, \quad f = -9.1, \quad \alpha = 1.8, \quad \beta = 4.3.$$

Окончательно получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} &\int \frac{(1+x^4) dx}{(1+x^2)^3 (1+2x^2)^2 \sqrt{1-x^4}} = \frac{8.6x^5 + 17.9x^3 + 8.3x}{(1+x^2)^2 (1+2x^2)} \sqrt{1-x^4} + \\ &+ \int \frac{(7.3x^2 - 9.1) dx}{(1+x^2)(1+2x^2) \sqrt{1-x^4}} + 1.8 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + 4.3 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}, \end{aligned}$$

причем

$$\int \frac{(7.3x^2 - 9.1) dx}{(1+x^2)(1+2x^2) \sqrt{1-x^4}} = 16.4 \int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^4}} - 25.5 \int \frac{dx}{(1+2x^2) \sqrt{1-x^4}}.$$

§ 24. Приведение эллиптического интеграла к канонической форме Лежандра в том случае, когда под знаком корня находится многочлен четвертой степени. Эллиптический интеграл

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx, \quad (201)$$

где $R(x, y)$ есть рациональная функция x и y , а

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \quad (202)$$

при помощи надлежащего преобразования может быть приведен к канонической форме Лежандра

$$\int R_1(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}) dx. \quad (203)$$

При этом преобразование всегда может быть выбрано так, чтобы модуль k оказался меньше единицы.

В дальнейшем будем полагать

$$P(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4). \quad (204)$$

Рассмотрим отдельные случаи.

Случай 1а. Все корни вещественны ($c_1 < c_2 < c_3 < c_4$) и $a_0 > 0$.

Положим для простоты письма

$$c_{ij} = c_j - c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4). \quad (205)$$

Если ввести обозначения

$$n' = \sqrt{c_{12}c_{13}}, \quad n'' = \sqrt{c_{24}c_{34}}, \quad (206)$$

то подстановка, при помощи которой интеграл (201) приводится к форме (203), может быть написана в виде

$$x = \frac{c_1 + c_4}{2} + \frac{c_1 - c_4}{2} \frac{(n'' - n')z + n'' + n'}{(n'' + n')z + n'' - n'}. \quad (207)$$

Для нахождения модуля следует вычислить величины

$$m' = \sqrt{c_{13}c_{24}}, \quad m'' = \sqrt{c_{12}c_{34}}. \quad (208)$$

Тогда модуль определится из равенства

$$k = \frac{m' - m''}{m' + m''}. \quad (209)$$

Легко видеть, что k есть положительное число, меньшее единицы, ибо $c_{13} > c_{12}$, $c_{24} > c_{34}$ и, стало быть, $m'' < m'$.

К этой же величине модуля приходим посредством подстановки.

$$x = \frac{c_3 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_3}{2} \frac{(l' + l'')z + l' - l''}{(l' - l'')z + l' + l''}, \quad (210)$$

где

$$l'' = \sqrt{c_{12}c_{24}}, \quad l' = \sqrt{c_{13}c_{34}}. \quad (211)$$

Пример. Приведем к каноническому виду эллиптический интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}}$$

В нашем случае многочлен

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

разлагается на множители

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

и имеет все корни вещественные.

Вычисляя согласно указанной схеме, находим

$$c_{12} = 1, \quad c_{13} = 2, \quad c_{24} = 2, \quad c_{34} = 1;$$

$$m' = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}, \quad m'' = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2}.$$

Подстановка (207) в данном случае имеет вид

$$x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}z} = \frac{3z-3}{2z}.$$

Определяем значения величин (208):

$$m' = \sqrt{2 \times 2} = 2, \quad m'' = \sqrt{1 \times 1} = 1;$$

после этого модуль k определится из равенства (209):

$$k = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Произведя замену, получаем

$$P(x) = \frac{3^4(1-z^2)\left(1 - \frac{1}{9}z^2\right)}{(2z)^4}, \quad dx = \frac{6}{(2z)^2} dz.$$

Заданный интеграл представляется в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}} = \int \frac{2 dz}{3 \sqrt{(1-z^2)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right)}}.$$

Приведем рассматриваемый интеграл к каноническому виду посредством другой из указанных подстановок. Составляем

$$l'' = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}, \quad l' = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2},$$

Подстановка (210) в данном случае имеет вид

$$x = \frac{1+2}{2} - \frac{2-1}{2} \frac{2\sqrt{2}z}{2\sqrt{2}};$$

т. е. $x = 1.5 - 0.5z$.

Произведя замену, получаем

$$P(x) = \frac{3^2}{2^4} (1 - z^2) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right), \quad dx = -\frac{dz}{2}.$$

Данный интеграл представляется в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}} = -\frac{2}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right)}}.$$

Случай 16. Все корни вещественны ($c_1 < c_2 < c_3 < c_4$) и $a_0 < 0$. Если ввести обозначения

$$n' = \sqrt{c_{13}c_{14}}, \quad n'' = \sqrt{c_{23}c_{24}}, \quad (212)$$

то подстановка, которая приводит интеграл к канонической форме, может быть написана в виде

$$x = \frac{c_2 + c_1}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{(n'' + n')z + n' - n''}{(n' - n'')z + n' + n''}. \quad (213)$$

При этом модуль k определяется, если введем обозначения

$$m' = \sqrt{c_{13}c_{24}}, \quad m'' = \sqrt{c_{14}c_{23}}, \quad (214)$$

из равенства

$$k = \frac{m' - m''}{m' + m''}. \quad (215)$$

Нетрудно убедиться, что

$$c_{13}c_{24} > c_{14}c_{23},$$

откуда следует, что

$$0 < k < 1.$$

Можно также привести интеграл к каноническому виду при помощи подстановки.

$$x = \frac{c_4 + c_3}{2} + \frac{c_4 - c_3}{2} \frac{(l' + l'')z + l' - l''}{(l' - l'')z + l' + l''}, \quad (216)$$

где

$$l' = \sqrt{c_{13}c_{23}}, \quad l'' = \sqrt{c_{14}c_{24}}. \quad (217)$$

При этом модуль преобразованного интеграла будет иметь ту же величину.

Пример. Приведем к каноническому виду интеграл

$$\int \sqrt{1 - 2x - 8x^2 + 6x^3 - x^4} dx.$$

Многочлен

$$P(x) = 1 - 2x - 8x^2 + 6x^3 - x^4$$

разлагается на множители

$$P(x) = -(x + 0.4142)(x - 0.2679)(x - 2.4142)(x - 3.7321),$$

Вопроса о разыскании корней мы здесь не касаемся. Способы приближенного вычисления корней можно найти в различных курсах приближенных вычислений. Укажем на прекрасный курс акад. А. Н. Крылова, где изложены различные методы для приближенного вычисления корней.

Выполняя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} c_{14} &= 4.1463, & c_{13} &= 2.8284, & c_{23} &= 2.1463, & c_{24} &= 3.4642; \\ n' &= \sqrt{2.8284 \times 4.1463} \approx 3.4245, & n'' &= \sqrt{2.1463 \times 3.4642} \approx 2.7266, \\ n' + n'' &= 6.1511, & n' - n'' &= 0.6979. \end{aligned}$$

Подстановка, приводящая интеграл к канонической форме, имеет в данном случае вид

$$x = \frac{0.2679 - 0.4142}{2} + \frac{0.2679 + 0.4142}{2} \frac{6.1511z - 0.6979}{0.6979z + 6.1511},$$

или

$$x = -0.0732 + 0.3412 \frac{6.1511z - 0.6979}{0.6979z + 6.1511}.$$

Вычислив

$$m' = \sqrt{2.8284 \times 3.4642} \approx 3.1302, \quad m'' = \sqrt{4.1463 \times 2.1463} \approx 2.9831,$$

находим

$$k = \frac{3.1302 - 2.9831}{3.1302 + 2.9831} \approx \frac{0.1471}{6.1133} \approx 0.0240.$$

Произведя замену, получаем:

$$P(x) = \frac{14.7400(1-z^2)(1-0.0240^2 z^2)}{(0.6979z + 6.1511)^4}$$

и

$$dx = \frac{12.6690 dz}{(0.6979z + 6.1511)^2}.$$

Данный интеграл приводится к виду

$$\int \sqrt{P(x)} dx = 48.6317 \int \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-0.0240^2 z^2)}}{(0.6979z + 6.1511)^4} dz.$$

Совершенно таким же способом можно привести данный интеграл к каноническому виду с помощью второй из указанных подстановок.

Случай 2а. Два корня c_1 и c_2 —вещественные числа ($c_1 < c_2$), а два другие корня c_3 и c_4 —числа комплексные сопряженные, $a_0 > 0$.

Определяем величины

$$l' = \sqrt{c_{23}c_{24}}, \quad n'' = \sqrt{c_{13}c_{14}}. \quad (218)$$

Подстановка

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_1 - c_2}{2} \frac{(n'' - n') \cos \varphi + (n' + n'')}{(n'' + n') \cos \varphi + (n'' - n')} \quad (219)$$

дает нужное преобразование. Выполняя подстановку, получаем

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (220)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m' + m''}{2\sqrt{m'm''}} \right), \quad (221)$$

а величины m' , m'' и m определяются равенствами

$$m' = c_{23}c_{14}, \quad m'' = c_{13}c_{24} \quad (222)$$

и

$$m = \sqrt{a_0^2 m' m''}. \quad (223)$$

Величины m' и m'' —числа комплексные сопряженные.

В результате подстановки (219) имеем преобразование, выражаемое равенством

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}} dx = \int \frac{R_0(\cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (224)$$

При этом значениям x вне интервала (c_1, c_2) соответствуют значения φ в интервале от 0 до π . Когда φ увеличивается от 0 до π , то x убывает от c_1 до $-\infty$ и затем от $+\infty$ убывает до c_2 . Таким образом при тех значениях x , при которых $P(x) > 0$, выражение $1 - k^2 \sin^2 \varphi > 0$. Веще-

ственным значениям подинтегральной функции $\frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}}$ соответствуют вещественные значения функции $\frac{R_0(\cos\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

Интеграл, стоящий в правой части равенства, разбивается на два интеграла

$$\int \frac{R_0(\cos\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{R_1(\sin^2\varphi) d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{R_2(\sin^2\varphi) \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \quad (225)$$

Второй из них подстановкой $z = \sin\varphi$ приводится к виду

$$\int \frac{R_2(\sin^2\varphi) \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{R_2(z^2) dz}{\sqrt{1-k^2z^2}}$$

и интегрируется в элементарных функциях.

Пример. Преобразовать интеграл

$$\int \frac{(1+x) dx}{\sqrt{x^4+x}}$$

к канонической форме Лежандра.

Имеем

$$x^4+x = x(x+1)(x^2-x+1),$$

откуда

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Выполняя соответствующие вычисления, получаем

$$n' = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = 1,$$

$$n'' = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \sqrt{3},$$

$$m' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$m'' = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2},$$

$$m = \sqrt[4]{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3}.$$

Подстановкой

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)\cos\varphi + \sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)\cos\varphi + \sqrt{3}-1}.$$

или

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}.$$

приводим интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+x) dx}{\sqrt{x^4+x}} &= \int \frac{\sqrt{3}(\cos \varphi + 1)}{(\sqrt{3}+1)\cos \varphi + (\sqrt{3}-1)} \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{2-(1+\sqrt{3})\sin^2 \varphi}{2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\sin^2 \varphi}} = \\ &+ \sqrt{3} \int \frac{d \sin \varphi}{(2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\sin^2 \varphi) \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Второй интеграл выражается через элементарные функции.

Случай 2б. Два корня многочлена $c_1 < c_2$ числа вещественные, два другие корня c_3, c_4 числа комплексные сопряженные, $a_0 < 0$.

Составляем величины

$$n' = \sqrt{c_{23}c_{24}}, \quad n'' = \sqrt{c_{13}c_{14}}. \quad (226)$$

Подстановка

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{(n' + n'') \cos \varphi + n' - n''}{(n' - n'') \cos \varphi + n' + n''} \quad (227)$$

дает

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}}, \quad (228)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m' + m''}{2\sqrt{m'm''}} \right). \quad (229)$$

Величины m', m'' и m определяются равенствами

$$m' = c_{23}c_{14}, \quad m'' = c_{13}c_{24}, \quad (230)$$

$$m = \sqrt[4]{a_0^2 m' m''}. \quad (231)$$

Величины m' и m'' суть числа комплексные сопряженные.

В рассматриваемом случае подинтегральная функция имеет вещественные значения при x , заключенном в промежутке (c_1, c_2) .

Подстановка (227) преобразует промежуток $(0, \pi)$ в промежуток (c_1, c_2) , сохраняя вещественность подинтегральной функции.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}}.$$

Имеем

$$P(x) = x - x^4 = -x(x-1)(x^2+x+1).$$

В рассматриваемом случае

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Вычисляем

$$n' = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \sqrt{3},$$

$$n'' = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = 1.$$

Подстановка (227) имеет в данном случае вид

$$x = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\cos\varphi + \sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)\cos\varphi + \sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} + 1}.$$

Вычисляем m' , m'' , k^2 и m :

$$m' = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \quad m'' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i,$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad m = \sqrt{(-1)^2 \cdot 3 \cdot 1} \sqrt{3}.$$

Окончательно получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Заметив, что

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sin 15^\circ,$$

находим по таблицам

$$F(90^\circ, 15^\circ) = 1.5981, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}} = 2.4285.$$

Случай 3. Все корни c_1, c_2, c_3, c_4 мнимые, $a_0 > 0$.

Пусть $c_1 = a - bi$ и $c_2 = a + bi$ представляют собой одну пару сопряженных мнимых корней и $c_3 = c - di$, $c_4 = c + di$ другую пару. При этом коэффициенты мнимых частей у c_2 и c_4 положительные.

Вычисляем величины

$$n' = \sqrt{c_{13}c_{24}} = \mu + \nu i \quad \text{и} \quad n'' = \sqrt{c_{13}c_{23}} = \mu - \nu i.$$

При извлечении корня берем те значения, у которых вещественная часть положительна.

Подстановка

$$x = c + d \frac{\mu \operatorname{tg} \varphi + \nu}{\mu - \nu \operatorname{tg} \varphi} \quad (232)$$

приводит интеграл к канонической форме, причем

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (233)$$

Модуль k находится по формуле.

$$k = \frac{2\sqrt{m'm''}}{m' + m''}, \quad (234)$$

где

$$m' = \sqrt{c_{13}c_{23}}, \quad m'' = \sqrt{c_{13}c_{24}} \quad (235)$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{a_0(m' + m'')}. \quad (236)$$

Таким образом, выполняя подстановку (232), имеем

$$\int \frac{R(x) dx}{\sqrt{P(x)}} = \int \frac{R_0(\operatorname{tg} \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Разбивая последний интеграл на два, получаем:

$$\int \frac{R(x) dx}{\sqrt{P(x)}} = \int \frac{R_1(\operatorname{tg}^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + \int \frac{R_2(\operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

или

$$\int \frac{R(x) dx}{\sqrt{P(x)}} = \int \frac{R_3(\sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + \int \frac{R_4(\sin^2 \varphi) d \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (237)$$

Второй интеграл выражается через элементарные функции.

Пример. Привести к каноническому виду интеграл

$$\int \sqrt{1 + x^4} dx.$$

В рассматриваемом случае

$$P(x) = 1 + x^4 = \left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right),$$

$$c_1 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad c_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad c_4 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Находим

$$n' = \sqrt{(1+i)\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2(1+i)},$$

или

$$n' = \left\{ \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right\} : \sqrt[4]{2} \quad \text{и} \quad n'' = \left\{ \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right\} : \sqrt[4]{2}.$$

Подстановка

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varphi},$$

или

$$x = \frac{1 + (\sqrt{2}-1) \operatorname{tg} \varphi}{1 - (\sqrt{2}-1) \operatorname{tg} \varphi}$$

приводит интеграл к канонической форме.

Для модуля получаем выражение

$$k = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1).$$

После преобразования получаем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^4} dx &= 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \int \frac{\sqrt{1-4(3\sqrt{2}-4)\sin^2 \varphi}}{(\cos \varphi - (\sqrt{2}-1)\sin \varphi)^4} d\varphi = \\ &= (4-2\sqrt{2}) \int \frac{1 + (16-12\sqrt{2})\sin^2 \varphi}{(1-(4-2\sqrt{2})\sin^2 \varphi)^4} \sqrt{1-4(3\sqrt{2}-4)\sin^2 \varphi} d\varphi + \\ &+ (12\sqrt{2}-16) \int \frac{1 + (2\sqrt{2}-2)\sin^2 \varphi}{(1-(4-2\sqrt{2})\sin^2 \varphi)^4} \sqrt{1-4(3\sqrt{2}-4)\sin^2 \varphi} d \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Последний интеграл выражается в элементарных функциях.

§ 25. Приведение к каноническому виду эллиптического интеграла в случае, когда под знаком корня находится многочлен третьей степени.

Случай 1а. Все корни многочлена

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = a_0(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$$

вещественны, ($c_1 < c_2 < c_3$) и $a_0 > 0$.

Составляем выражения

$$m' = \sqrt{c_{13}}, \quad m'' = \sqrt{c_{23}}. \quad (238)$$

Подстановка

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{(m' + m'') \sin \varphi + m' - m''}{m' + m'' + (m' - m'') \sin \varphi} \quad (239)$$

преобразует интеграл к каноническому виду: При этом

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (240)$$

где

$$k = \frac{m'' - m'}{m' + m''}, \quad (241)$$

и

$$m = \frac{m' + m''}{2} \sqrt{a_0}. \quad (242)$$

При изменении x в интервале (c_1, c_2) величина φ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Пример. Преобразовать интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-h^2x)}}, \quad 1 > h > 0.$$

В рассматриваемом случае

$$m' = \sqrt{\frac{1}{h^2} - 0} = \frac{1}{h}, \quad m'' = \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} = \frac{h'}{h}.$$

Преобразование

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1+h') \sin \varphi + 1 - h'}{1+h' + (1-h') \sin \varphi}$$

или

$$x = \frac{1 + \sin \varphi}{1 + h' + (1 - h') \sin \varphi}$$

приводит интеграл к виду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-h^2x)}} = \frac{1}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где.

$$k = \frac{1 - h'}{1 + h'}$$

и

$$m = \frac{1 + h'}{2h} \sqrt{h^2} = \frac{1 + h'}{2}.$$

В результате подстановки имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-h^2x)}} = \frac{4}{1+h'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

или, в силу преобразования Ландена,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-h^2x)}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В тех случаях, когда приходится рассматривать подинтегральную функцию при значениях $x > c_3$, выгоднее пользоваться преобразованием:

$$x = c_3 + m'm'' \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (243)$$

Преобразование (243) переводит промежуток (c_3, ∞) в промежуток $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. При этом соотношение (240) остается в силе. Многочлен $P(x)$ остается отрицательным в промежутках $(-\infty, c_1)$ и (c_2, c_3) .

Случай 16. Все корни $P(x)$ вещественны и $\alpha_0 < 0$. Составляем выражения

$$m' = \sqrt{c_{13}}, \quad m'' = \sqrt{c_{12}}. \quad (244)$$

Подстановка

$$x = c_1 - m'm'' \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (245)$$

приводит интеграл к каноническому виду. При этом значениям x в промежутке $(-\infty, c_1)$ соответствуют значения φ в промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Преобразование дает

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где

$$k = \frac{m' - m''}{m' + m''} \quad (246)$$

$$m = \frac{m' + m''}{2} \sqrt{-a_0}. \quad (247)$$

Приведение интеграла к канонической форме может быть произведено и иначе, с помощью подстановки:

$$x = \frac{c_3 + c_2}{2} + \frac{c_3 - c_2}{2} \frac{(m' + m'') \sin \varphi + m'' - m'}{m' + m'' + (m' - m'') \sin \varphi}. \quad (248)$$

Подстановка (248) преобразует интервал (c_2, c_3) в интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Значения модуля k и множителя m остаются теми же, что и в случае преобразования (245).

Пример. Привести к каноническому виду интеграл

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

Произведя вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} m' &= \sqrt{2}, & m'' &= 1, \\ k &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, & m &= \frac{\sqrt{2}+1}{2}. \end{aligned}$$

Берем подстановку (245):

$$x = -\frac{\sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Получаем

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

или, принимая во внимание преобразование Ландена,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2}\right)^2 \sin^2 \varphi}},$$

имеем окончательно

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \approx 1.311.$$

Случай 2а. Один корень вещественный и два мнимых сопряженных, $a_0 > 0$. Пусть c_1 имеет вещественное значение, а c_2 и c_3 суть числа комплексные сопряженные. Находим величины

$$m' = \sqrt{c_{31}}, \quad m'' = \sqrt{c_{21}}; \quad (249)$$

m' и m'' суть числа комплексные сопряженные.

Пусть

$$m' = \mu + \nu i, \quad \nu > 0.$$

В таком случае подстановка

$$x = c_1 + \{\mu^2 + \nu^2\} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad (250)$$

приводит интеграл к каноническому виду. При этом

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (251)$$

где

$$k = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \quad (252)$$

и

$$m = \sqrt{a_0(\mu^2 + \nu^2)}. \quad (253)$$

Пример. Упростить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}},$$

приведя его к каноническому виду.

Имеем

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Находим

$$m' = \sqrt[4]{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} i = \sqrt[4]{3} \sqrt{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$$

или

$$m' = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \pm \sqrt[4]{3} \left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right\},$$

$$m'' = \pm \sqrt[4]{3} \left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right\},$$

$$\mu = \sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \nu = \sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Подстановка

$$x = 1 + \sqrt{3} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

приводит интеграл к каноническому виду. При этом имеем

$$k = \sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \sqrt[4]{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad m = \sqrt[4]{3}.$$

Таким образом

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \sin^2 \varphi}}.$$

Случай 2б. Один корень вещественный и два корня комплексные сопряженные, $a_0 < 0$.

Определяем величины

$$m' = \sqrt{c_{13}}, \quad m'' = \sqrt{c_{12}}. \quad (254)$$

Пусть

$$m' = \mu + \nu i, \quad \nu > 0.$$

Величины m' и m'' суть числа комплексные сопряженные.

Подстановка

$$x = c_1 - \{\mu^2 + \nu^2\} \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (255)$$

дает

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где

$$k = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \quad (256)$$

и

$$m = \sqrt{|a_0|(\mu^2 + \nu^2)}. \quad (257)$$

Пример. Привести к каноническому виду интеграл

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

В рассматриваемом случае

$$1-x^3 = -(x-1)(x^2+x+1)$$

и

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Находим

$$c_{13} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} e^{\frac{7}{6}\pi i}$$

и

$$m' = \pm \sqrt[4]{3} e^{\frac{7}{12}\pi i}.$$

Получаем

$$\nu = \sqrt[4]{3} \sin \frac{7}{12}\pi = \sqrt[4]{3} \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \mu = -\sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Подстановка

$$x = 1 - \sqrt{3} \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = -\frac{(\sqrt{3}+1) \cos \varphi + \sqrt{3}-1}{1 - \cos \varphi}$$

приводит интеграл к каноническому виду. При этом имеем

$$k = \sqrt[4]{3} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \sqrt[4]{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad m = \sqrt[4]{3}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^3}} &= -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{2\sqrt{3} - (\sqrt{3}+1) \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \\ &- 2\sqrt[4]{3} \int \frac{d \sin \varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Второй интеграл выражается через элементарные функции.

§ 26. Частные случаи приведения эллиптического интеграла к каноническому виду Лежандра.

Отметим некоторые частные случаи интегралов и соответствующие подстановки, приводящие их к нормальной форме Лежандра:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}} = \frac{1}{a} F\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right) \quad (a > b). \quad (258)$$

$$x = b \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}} = \frac{1}{a} F\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (259)$$

$$x = a \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 + x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (260)$$

$$x = \frac{ab \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2}},$$

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 + x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (261)$$

$$x = a \cos \varphi;$$

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (262)$$

$$x = b \sec \varphi;$$

$$\int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (263)$$

$$x = \sqrt{b^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{ctg}^2 \varphi};$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{b} F\left(\varphi, \frac{a}{b}\right) \quad (b > a), \quad (264)$$

$$x = a \sin \varphi;$$

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{b} F\left(\varphi, \frac{a}{b}\right) \quad (b > a), \quad (265)$$

$$x = \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{a} F\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (266)$$

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{a} F\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (267)$$

$$x = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi};$$

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{b} F\left(\varphi, \frac{a}{b}\right) \quad (a < b), \quad (268)$$

$$x = \sqrt{b^2 + (b^2 - a^2) \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{b} F\left(\varphi, \frac{a}{b}\right) \quad (a < b), \quad (269)$$

$$x = b \operatorname{cosec} \varphi,$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{(x^2 + b^2)^3}} dx = \frac{a}{b^2} E\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (270)$$

$$x = b \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\int_x^\infty \sqrt{\frac{x^2 + b^2}{(x^2 + a^2)^3}} dx = \frac{1}{a} E\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (271)$$

$$x = a \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + b^2)^3}} = \frac{1}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}} E\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (272)$$

$$x = \frac{ab \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2}};$$

$$\int_x^a \sqrt{\frac{x^2 + b^2}{a^2 - x^2}} dx = \sqrt{a^2 + b^2} E\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (273)$$

$$x = a \cos \varphi;$$

$$\int_b^x \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{x^2 - b^2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2} E\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (274)$$

$$x = b \sec \varphi;$$

$$\int_x^\infty x^2 \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{x^2 - b^2}} dx = \sqrt{a^2 + b^2} E\left(\varphi, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \quad (275)$$

$$x = \sqrt{b^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{ctg}^2 \varphi};$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} dx = a E\left(\varphi, \frac{b}{a}\right) \quad (a > b), \quad (276)$$

$$x = b \sin \varphi;$$

$$\int_x^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3 (b^2 - x^2)}} = \frac{1}{a(a^2 - b^2)} E\left(\varphi, \frac{b}{a}\right) \quad (a > b), \quad (277)$$

$$x = \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$\int_b^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{ab^2} E\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (278)$$

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$\int_b^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = a E\left(\varphi, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (a > b), \quad (279)$$

$$x = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi};$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)^3}} = \frac{a}{a^2 - b^2} E\left(\varphi, \frac{b}{a}\right) \quad (a > b), \quad (280)$$

$$x = \sqrt{a^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

$$\int_x^\infty \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{x^2 - a^2}} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} E\left(\varphi, \frac{b}{a}\right) \quad (a > b), \quad (281)$$

$$x = a \operatorname{cosec} \varphi;$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ), \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0.258819, \quad (282)$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{x - 1 - \sqrt{3}}{x - 1 + \sqrt{3}};$$

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ), \quad \sqrt[4]{3} \approx 1.316198, \quad (283)$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3} + 1 - x}{\sqrt{3} - 1 + x};$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 75^\circ), \quad \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0.759836, \quad (284)$$

$$x = 1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3} - 1 + x}{\sqrt{3} + 1 - x};$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 75^\circ), \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \approx 0.965926, \quad (285)$$

$$x = 1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1-x-\sqrt{3}}{1-x+\sqrt{3}};$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2} F\left(\varphi, 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)\right), \quad 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1) \approx 0.985171, \quad (286)$$

$$\cos \varphi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}, \quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 \varphi} - \sin \varphi}{\sqrt{1+\cos^2 \varphi} + \sin \varphi}};$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107, \quad (287)$$

$$\cos \varphi = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad x = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2};$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \cos \varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad x = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}; \quad (288)$$

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad x = \sec \varphi; \quad (289)$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad x = \cos \varphi. \quad (290)$$

ГЛАВА II
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

§ 1. Амплитуда. Если рассматривают верхний предел интеграла

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} \quad (1)$$

как функцию от u , то пользуются обозначением

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (2)$$

Величина u называется аргументом и обозначается

$$u = \operatorname{arg} \varphi. \quad (3)$$

Амплитуда является бесконечно многозначной функцией аргумента. Точки разветвления амплитуды соответствуют значениям аргумента

$$u = 2mK + (2n + 1) iK', \quad (4)$$

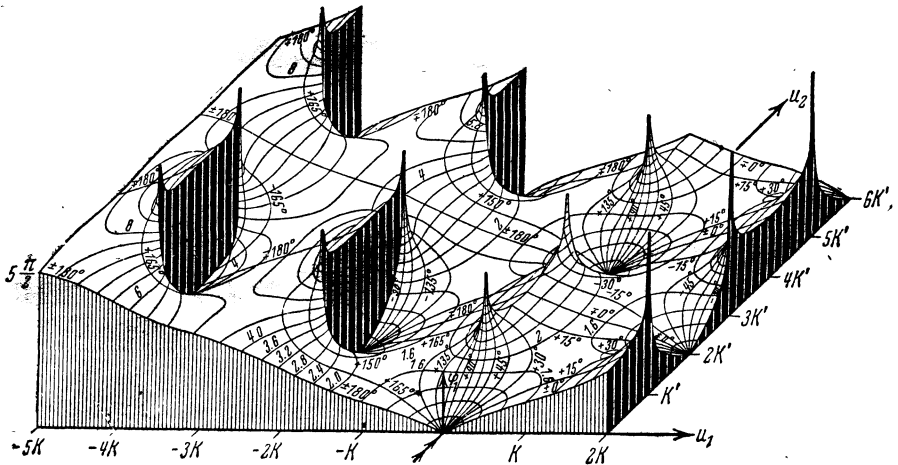
где m и n — произвольные целые числа, а K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \omega}},$$

причем

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

На фиг. 21 дано изображение поверхности для той ветви функции $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, которая при $u = 0$ обращается в нуль и имеет положитель-

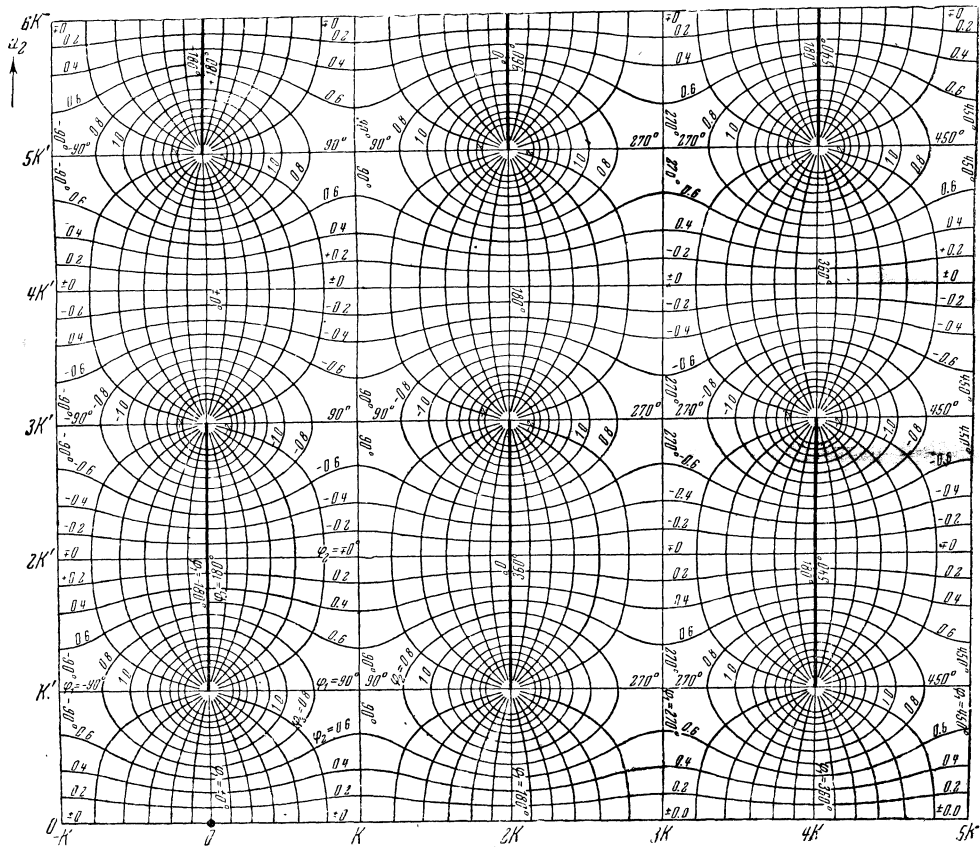


Фиг. 21

ные значения при положительном u . На фигуре показаны изолинии модуля $\text{am } u$ и линии одинакового значения аргумента, при значении модуля $k = 0.8$.

Места поверхности, соответствующие разрезам, которые соединяют точки разветвления, показаны четырьмя зачерненными поверхностями в левой части фигуры.

На фиг. 22 дается изображение изолиний вещественной и мнимой частей той же ветви функции $\varphi = \text{am } u$ при значении модуля $k = 0.8$. Изолинии вещественной и мнимой частей функции $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ снабжены число-



Фиг. 22

выми отметками. Значения вещественной части для большего удобства рассмотрения фигуры выражены в градусной мере.

На фигуре отмечены разрезы, соединяющие точки разветвления. В этом случае $K = 2.00$, $K' = 1.75$.

Для ветви амплитуды, принимающей вещественные значения для вещественных значений аргумента и обращающейся в нуль при $u = 0$, имеют место соотношения

$$\text{am}(-u) = -\text{am } u, \quad (5)$$

$$\text{am}(u + 2K) = \text{am } u + \pi, \quad (6)$$

$$\text{am}(u + 2K'i) = \pi - \text{am } u. \quad (7)$$

Равенства (5) и (6) следуют непосредственно из равенства (67) и (68) главы I. Равенство (7) получается из равенства (66) при $m = 1$, $n = 1$ и равенств (5) и (6).

Из соотношения (7) следует, что

$$\operatorname{am}(u + 4K'i) = \operatorname{am} u. \quad (8)$$

Амплитуда есть периодическая функция u с периодом $4K'i$.

Для небольших значений u имеет место приближенное равенство

$$\operatorname{am}[i(K' - u)] \approx i \ln \frac{2}{ku}. \quad (9)$$

§ 2. Синус амплитуды. Функция

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u \quad (10)$$

называется синусом амплитуды или, иногда, эллиптическим синусом.

Аргумент эллиптического синуса выражается интегралом

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (11)$$

где

$$z = \operatorname{sn} u. \quad (12)$$

Эллиптический синус есть функция, обратная эллиптическому интегралу первого рода (11).

Величина k называется модулем функции $\operatorname{sn} u$. В некоторых случаях, когда бывает необходимо отметить значение модуля, пишут:

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k). \quad (13)$$

Эллиптический синус $\operatorname{sn} u$ есть функция двояко периодическая. Основные периоды функции $\operatorname{sn} u$ равны $4K$ и $2K'i$, где K и K' суть полные эллиптические интегралы, соответствующие модулю k . Периодом $\operatorname{sn} u$ является любая величина

$$\omega = 4mK + 2niK', \quad (14)$$

где m и n — произвольные целые числа:

$$\operatorname{sn}(u + 4mK + 2niK') = \operatorname{sn} u. \quad (15)$$

Построим на плоскости параллелограммную сеть (фиг. 23), приняв за основной параллелограмм тот, который построен на сторонах $4K$ и $2K'i$. Значения, принимаемые функцией $\operatorname{sn} u$ в отдельных параллелограммах, воспроизводят значения, принимаемые ею в основном параллелограмме. На фиг. 23 этот параллелограмм заштрихован. Когда k вещественное, основной параллелограмм имеет форму прямоугольника.

Функция $\operatorname{sn} u$ имеет нули в точках

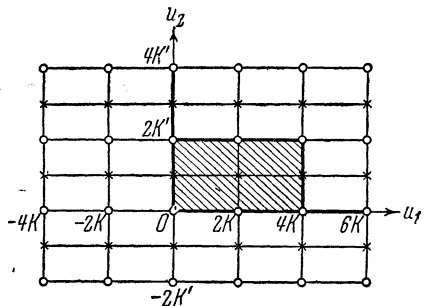
$$u = 2mK + 2nK'i \quad (16)$$

и полюсы 1-го порядка в точках

$$u = 2mK + (2n + 1)K'i, \quad (17)$$

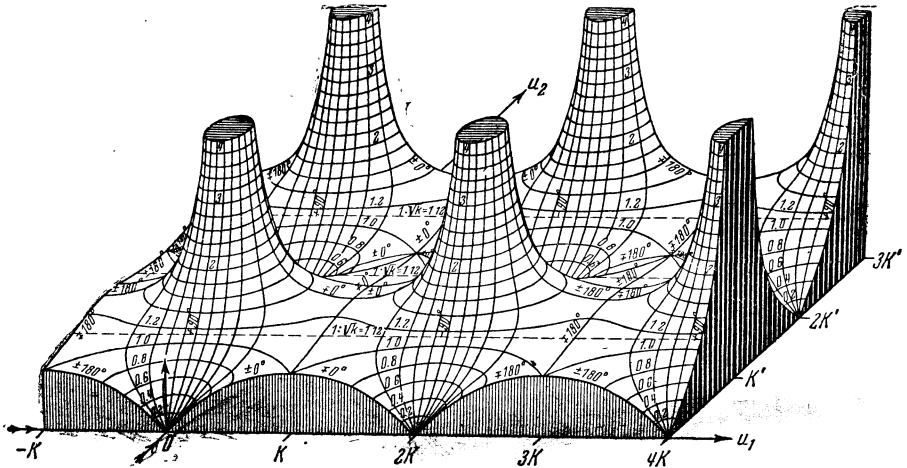
где m и n суть целые числа. На фиг. 23 нули обозначены кружками, а полюсы крестиками. Вычет, соответствующий полюсу функции $\operatorname{sn} u$, равен

$$\frac{(-1)^m}{k}. \quad (18)$$



Фиг. 23

О распределении значений функции $\operatorname{sn} u$ в основном параллелограмме периодов можно составить представление с помощью поверхности, изображенной на фиг. 24. На этой фигуре, соответствующей значению



Фиг. 24

$k = 0.8$, отмечены линии одинаковых значений модуля $|\operatorname{sn} u|$ и равным образом изолинии аргумента.

В табл. 13 даны значения $\operatorname{sn}(u_1 + u_2 i)$ в основном параллелограмме.

Таблица 13

$u_1 \backslash u_2$	0	K	$2K$	$3K$
0	0	1	0	-1
K'	∞	$\frac{1}{k}$	∞	$-\frac{1}{k}$

Отметим соотношение.

$$\operatorname{sn} \frac{1}{2} K = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}. \quad (19)$$

Функция $\operatorname{sn} u$ есть функция нечетная:

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u. \quad (20)$$

При вещественных значениях k , удовлетворяющих неравенствам $-1 < k < 1$, для вещественных значений u имеют место соотношения

$$-1 \leq \operatorname{sn} u \leq 1.$$

§ 3. Косинус амплитуды. Косинусом амплитуды или эллиптическим косинусом называется функция

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u. \quad (21)$$

Аргументом эллиптического косинуса служит интеграл (11). Его можно представить в виде

$$u = \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{k'^2 + k^2 t^2}}, \quad (22)$$

где

$$z = \operatorname{sn} u.$$

Эллиптический косинус является функцией, обратной интегралу (22). Величина k называется модулем функции $\operatorname{sn} u$. В тех случаях, когда значение модуля должно быть отмечено, пишут

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k). \quad (23)$$

Эллиптический косинус есть функция двояко периодическая с основными периодами $4K$ и $2K + 2K'i$. Периодом $\operatorname{sn} u$ является любое число вида

$$\omega = 4mK + (2K + 2K'i)n, \quad (24)$$

где m и n — целые числа:

$$\operatorname{sn}[u + 4mK + (2K + 2K'i)n] = \operatorname{sn} u. \quad (25)$$

Если построить сеть из параллелограммов (фиг. 25), приняв за основным параллелограмм тот, который построен на векторах $4K$ и $2K + 2K'i$, то значения $\operatorname{sn} u$ в основном параллелограмме будут повторяться в остальных параллелограммах сети. На фиг. 25 основной параллелограмм заштрихован.

Функция $\operatorname{sn} u$ имеет нули в точках

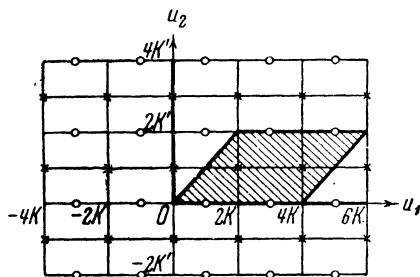
$$u = (2m + 1)K + 2nK'i \quad (26)$$

и полюсы 1-го порядка в точках

$$u = 2mK + (2n + 1)K'i, \quad (27)$$

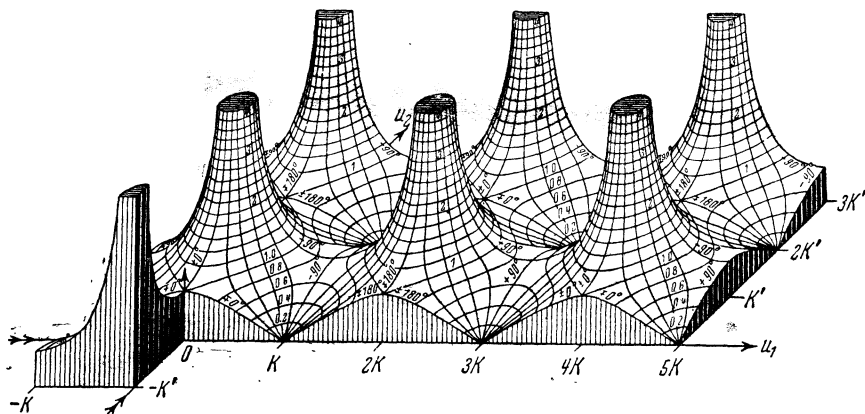
где m и n — целые числа. Вычет, соответствующий полюсу функции $\operatorname{sn} u$, равен

$$\frac{(-1)^{m-1}i}{k}. \quad (27')$$



Фиг. 25.

О распределении значений функции $\operatorname{sn} u$ в основном параллелограмме можно составить представление с помощью поверхности, изображенной на фиг. 26



Фиг. 26

(для значения модуля $k = 0.8$), на которой нанесены кривые одинаковых значений модуля и аргумента $\operatorname{sn} u$.

В табл. 14 даны значения $\operatorname{sn}(u_1 + u_2 i)$ в основном параллелограмме.

Таблица 14

$u_2 \backslash u_1$	0	K	$2K$	$3K$	$4K$
0	1	0	-1	0	1
K'	∞	$-\frac{k'}{k}i$	∞	$\frac{k'}{k}i$	∞

Отметим соотношение

$$\operatorname{cn} \frac{1}{2} K = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}. \quad (28)$$

Функция $\operatorname{sn} u$ есть функция четная:

$$\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u. \quad (29)$$

Для вещественного значения k , удовлетворяющего неравенствам $-1 < k < 1$, для вещественных значений u имеет место соотношение

$$-1 \leq \operatorname{sn} u \leq 1.$$

§ 4. Дельта амплитуды. Дельтой амплитуды называется функция

$$\operatorname{dn} u = \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad (30)$$

или

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Аргумент u определяется величиной интеграла (11). Функцию $\operatorname{dn} u$ можно рассматривать как функцию, обратную интегралу

$$u = \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}, \quad (31)$$

где

$$z = \operatorname{dn} u.$$

Дельта амплитуды есть функция двояко периодическая с основными периодами $2K$ и $4K'i$. Периодом $\operatorname{dn} u$ является любое число

$$\omega = 2mK + 4nK'i, \quad (32)$$

где m и n — числа целые:

$$\operatorname{dn}(u + 2mK + 4nK'i) = \operatorname{dn} u. \quad (33)$$

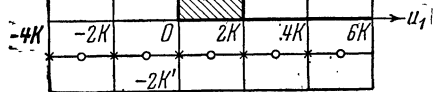
Основной параллелограмм периодов функции $\operatorname{dn} u$ изображен на фиг. 27. При k вещественном и по модулю меньшем единицы он представляет собой прямоугольник. На фиг. 27 этот параллелограмм заштрихован.

Функция $\operatorname{dn} u$ имеет нули в точках

$$u = (2m + 1)K + (2n + 1)K'i \quad (34)$$

и полюсы в точках

$$u = 2mK + (2n + 1)K'i, \quad (35)$$

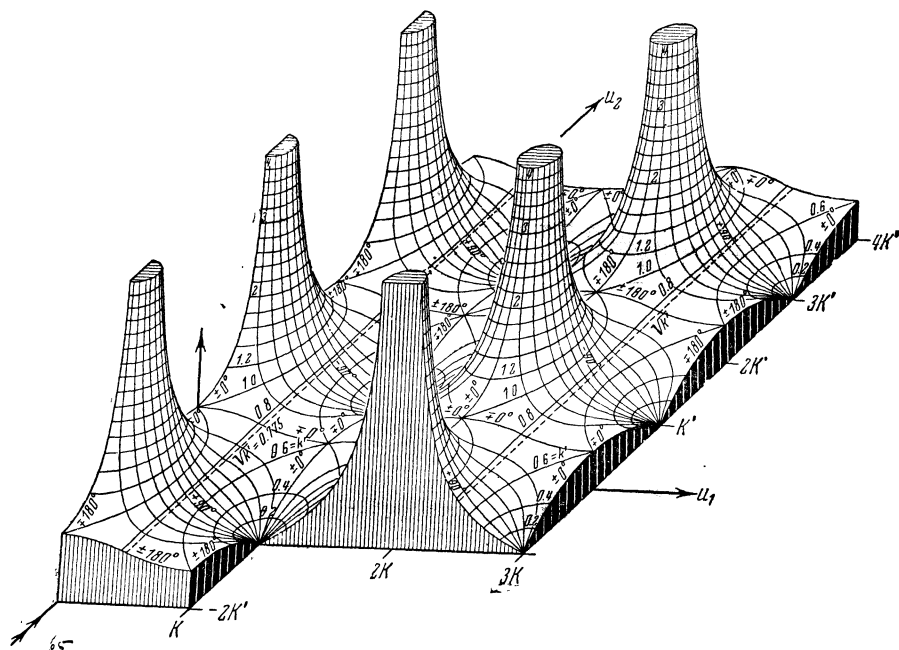


Фиг. 27

где m и n — целые числа. Порядок полюса равен единице. Вычет, соответствующий полюсу, равен

$$(-1)^{n-1}i. \quad (35')$$

О распределении значений $dn u$ в основном параллелограмме можно составить представление с помощью поверхности, изображенной на фиг. 28 для значений модуля $k = 0.8$. На этой фигуре указаны линии одинаковых значений модуля и аргумента $dn(u_1 + u_2i)$.



Фиг. 28

В табл. 12 дано распределение значений $dn(u_1 + u_2i)$ в основном параллелограмме.

Таблица 15

$u_2 \backslash u_1$	0	K'	$2K'$	$3K'$
0	1	∞	-1	∞
K	k'	0	$-k'$	0

Отметим, что

$$dn\left(\frac{1}{2}K\right) = \sqrt{k'}. \tag{36}$$

Функция $dn u$ есть четная функция аргумента

$$dn(-u) = dn u. \tag{37}$$

При вещественных значениях k , удовлетворяющих неравенствам $-1 < k < 1$, и для вещественных значений u имеем

$$k' \leq dn u \leq 1.$$

§ 5. Номограммы функций $sn u$, $cn u$, $dn u$. Введем новое переменное

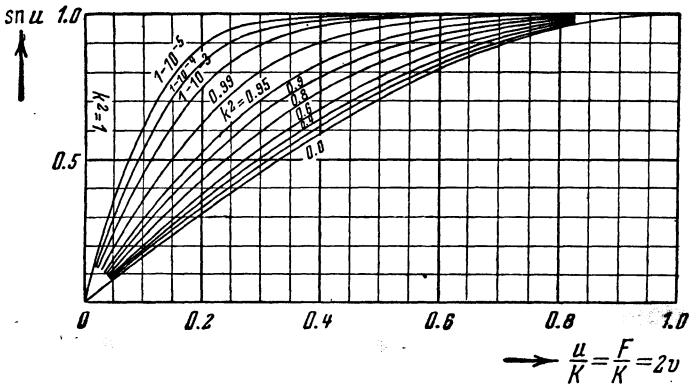
$$v = \frac{u}{2K}. \tag{38}$$

На фиг. 29, 30, 31 даются номограммы функций

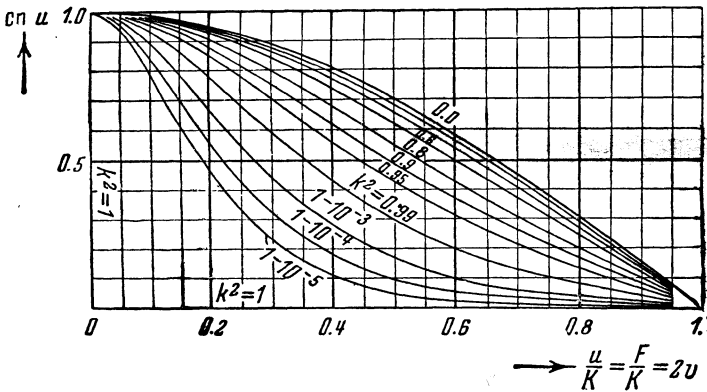
$$\operatorname{sn}(2Kv), \quad \operatorname{cn}(2Kv) \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}(2Kv)$$

для вещественных значений аргумента.

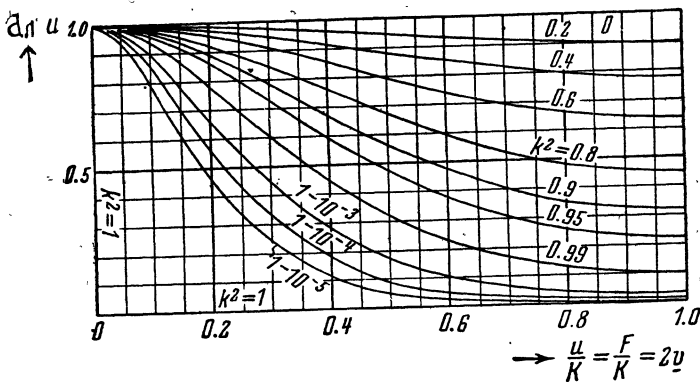
Значения аргумента $2v$ отмечены на горизонтальной шкале. Значения



Фиг. 29



Фиг. 30



Фиг. 31

соответствующих функций указаны на вертикальной шкале. Значения модуля $k^2 < 1$ поставлены в виде отметок на отдельных линиях.

Пользуясь этими номограммами, можно определить значения $\operatorname{sn}(2Kv)$, $\operatorname{cn}(2Kv)$, $\operatorname{dn}(2Kv)$ при любых вещественных значениях v для $0 < k^2 < 1$.

§ 6. Тангенс амплитуды. Тангенсом амплитуды называется функция

$$\operatorname{tn} u = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \operatorname{am} u. \quad (39)$$

Аргументом тангенса амплитуды служит эллиптический интеграл (11).

Тангенс амплитуды или эллиптический тангенс получается в результате обращения интеграла

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}, \quad (40)$$

где

$$z = \operatorname{tn} u.$$

Эллиптический тангенс есть двояко-периодическая функция аргумента u с основными периодами $2K$ и $4iK'$. Всякое число

$$\omega = 2mK + 4niK', \quad (41)$$

где m и n — целые числа, является периодом эллиптического тангенса:

$$\operatorname{tn}(u + 2mK + 4nK'i) = \operatorname{tn} u. \quad (42)$$

Основной параллелограмм периодов такой же, как и у дельты амплитуды. Нули функции $\operatorname{tn} u$ находятся в точках

$$u = 2mK + 2nK'i, \quad (43)$$

а полюсы в точках

$$u = (2m + 1)K + 2nK'i, \quad (44)$$

где m и n — целые числа. Порядок полюса равен единице. Вычет, соответствующий полюсу, равен

$$\frac{(-1)^{n-1}}{k'}. \quad (45)$$

В табл. 16 даются значения функции $\operatorname{tn}(u_1 + u_2)$ в основном параллелограмме.

Таблица 16

$u_2 \backslash u_1$	0	K'	$2K'$	$3K'$
0	0	i	0	$-i$
K	∞	$\frac{i}{k'}$	∞	$-\frac{i}{k'}$

Отметим, что

$$\operatorname{tn} \frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}. \quad (46)$$

Эллиптический тангенс есть функция нечетная:

$$\operatorname{tn}(-u) = -\operatorname{tn} u. \quad (47)$$

Для вещественных значений k , удовлетворяющих неравенствам $-1 < k < 1$, при вещественном u эллиптический тангенс принимает все вещественные значения.

§ 7. Формулы сложения для функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$. Для эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$ имеют место формулы сложения, которые выражают функции $\operatorname{sn}(u \pm v)$, $\operatorname{cn}(u \pm v)$, $\operatorname{dn}(u \pm v)$, $\operatorname{tn}(u \pm v)$

в виде рациональных функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, $\operatorname{tn} v$.
 Формулы сложения функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$ могут быть легко получены из формул сложения эллиптических интегралов [(133), (134); глава I].

Формулы сложения имеют следующий вид:

$$\operatorname{sn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (48)$$

$$\operatorname{cn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (49)$$

$$\operatorname{dn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (50)$$

$$\operatorname{tn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} v \pm \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u}{1 \mp \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}. \quad (51)$$

Из основных формул вытекают, как следствия, соотношения:

$$\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} v = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{u+v}{2} \operatorname{cn} \frac{u-v}{2} \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (52)$$

$$\operatorname{cn} u + \operatorname{cn} v = \frac{2 \operatorname{cn} \frac{u+v}{2} \operatorname{cn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (53)$$

$$\operatorname{dn} u + \operatorname{dn} v = \frac{2 \operatorname{dn} \frac{u+v}{2} \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (54)$$

$$\operatorname{sn} u - \operatorname{sn} v = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{u-v}{2} \operatorname{cn} \frac{u+v}{2} \operatorname{dn} \frac{u+v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (55)$$

$$\operatorname{cn} u - \operatorname{cn} v = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{u+v}{2} \operatorname{sn} \frac{v-u}{2} \operatorname{dn} \frac{u+v}{2} \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (56)$$

$$\operatorname{dn} u - \operatorname{dn} v = \frac{2 k^2 \operatorname{sn} \frac{u+v}{2} \operatorname{sn} \frac{v-u}{2} \operatorname{dn} \frac{u+v}{2} \operatorname{dn} \frac{v-u}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}}, \quad (57)$$

$$\operatorname{tn} u + \operatorname{tn} v = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{u+v}{2} \operatorname{cn} \frac{u+v}{2} \operatorname{dn} \frac{u-v}{2}}{\left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}\right) \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}, \quad (58)$$

$$\operatorname{tn} u - \operatorname{tn} v = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{u-v}{2} \operatorname{cn} \frac{u-v}{2} \operatorname{dn} \frac{u+v}{2}}{\left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}\right) \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}, \quad (59)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (60)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (61)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (62)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (63)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (64)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (65)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (66)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (67)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \quad (68)$$

§ 8. Формулы для функций $\operatorname{sn} 2u$, $\operatorname{cn} 2u$, $\operatorname{dn} 2u$, $\operatorname{tn} 2u$.

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \quad (69)$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \quad (70)$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \quad (71)$$

$$\operatorname{tn} 2u = \frac{2 \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}. \quad (72)$$

§ 9. Формулы для функций $\operatorname{sn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{cn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{dn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{tn} \frac{u}{2}$.

$$\operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (73)$$

$$\operatorname{cn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (74)$$

$$\operatorname{dn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{k'^2 + \operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (75)$$

$$\operatorname{tn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}. \quad (76)$$

§ 10. Соотношения между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют место соотношения

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = k'^2. \quad (77)$$

§ 11. Производные от функций $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$. Производные от функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$ характеризуются равенствами.

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, & \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, & \frac{d \operatorname{tn} u}{du} &= \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}. \end{aligned} \quad (78)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (60)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (61)$$

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (62)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (63)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{dn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (64)$$

$$\operatorname{cn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (65)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (66)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad (67)$$

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \quad (68)$$

§ 8. Формулы для функций $\operatorname{sn} 2u$, $\operatorname{cn} 2u$, $\operatorname{dn} 2u$, $\operatorname{tn} 2u$.

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}; \quad (69)$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \quad (70)$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \quad (71)$$

$$\operatorname{tn} 2u = \frac{2 \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}. \quad (72)$$

§ 9. Формулы для функций $\operatorname{sn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{cn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{dn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{tn} \frac{u}{2}$.

$$\operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (73)$$

$$\operatorname{cn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (74)$$

$$\operatorname{dn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{k'^2 + \operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u}, \quad (75)$$

$$\operatorname{tn}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}. \quad (76)$$

§ 10. Соотношения между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют место соотношения

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = k'^2. \quad (77)$$

§ 11. Производные от функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$. Производные от функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$ характеризуются равенствами.

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, & \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, & \frac{d \operatorname{tn} u}{du} &= \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}. \end{aligned} \quad (78)$$

Таблица 18

k_1	$\operatorname{sn}(u, k_1)$	$\operatorname{cn}(u, k_1)$	$\operatorname{dn}(u, k_1)$
$\frac{1}{k}$	$k \operatorname{sn}\left(\frac{u}{k}, k\right)$	$\operatorname{dn}\left(\frac{u}{k}, k\right)$	$\operatorname{cn}\left(\frac{u}{k}, k\right)$
k'	$-i \operatorname{tn}(ui, k)$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(ui, k)}$	$\frac{\operatorname{dn}(ui, k)}{\operatorname{cn}(ui, k)}$
$\frac{1}{k'}$	$-ik' \operatorname{tn}\left(\frac{iu}{k'}, k'\right)$	$\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{iu}{k'}, k'\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{iu}{k'}, k'\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{iu}{k'}, k'\right)}$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k' \operatorname{sn}\left(\frac{u}{k'}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{k'}, k\right)}$	$\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{k'}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{k'}, k\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{k'}, k\right)}$
$\frac{ik'}{k}$	$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{iu}{k}, k\right)}{-ik \operatorname{dn}\left(\frac{iu}{k}, k\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{iu}{k}, k\right)}$	$\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{iu}{k}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{iu}{k}, k\right)}$

Таблица 19

k_1	$\operatorname{sn}(u, k)$	$\operatorname{cn}(u, k)$	$\operatorname{dn}(u, k)$
$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$	$\operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$	$\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$
k'	$-i \operatorname{tn}(ui, k')$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(ui, k')}$	$\frac{\operatorname{dn}(ui, k')}{\operatorname{cn}(ui, k')}$
$\frac{1}{k'}$	$\frac{i \operatorname{sn}\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right)}{k' \operatorname{dn}\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right)}$	$\frac{\operatorname{cn}\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right)}{\operatorname{dn}\left(ik'u, \frac{1}{k'}\right)}$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{\operatorname{sn}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)}{k' \operatorname{dn}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)}$	$\frac{\operatorname{cn}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)}{\operatorname{dn}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)}$
$\frac{ik'}{k}$	$\frac{i \operatorname{sn}\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}{k \operatorname{cn}\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}$	$\frac{\operatorname{dn}\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}{\operatorname{cn}\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}$

$$\operatorname{cn}(u, ik) = \frac{\operatorname{cn}\left(u\sqrt{1+k^2}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\operatorname{dn}\left(u\sqrt{1+k^2}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)},$$

$$\operatorname{dn}(u, ik) = \frac{1}{\operatorname{dn}\left(u\sqrt{1+k^2}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}.$$

Отметим еще два преобразования модуля.

Модуль $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{(1+k)\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k}, k\right)},$$

$$\operatorname{cn}\left(u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k}, k\right)},$$

$$\operatorname{dn}\left(u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1-k\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k}, k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k}, k\right)}$$

и также

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2}{1+k} \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)\operatorname{cn}\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)},$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{1}{1+k} \frac{1+k-2\operatorname{sn}^2\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)},$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{1}{1+k} \frac{1+k-2k\operatorname{sn}^2\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}.$$

Модуль $\frac{1-k'}{1+k'}$

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = (1+k') \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)\operatorname{cn}\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)},$$

$$\operatorname{cn}\left(u, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1 - (1+k') \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)}, \quad (89)$$

$$\operatorname{dn}\left(u, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1 - (1-k') \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u}{1+k'}, k\right)}. \quad (90)$$

§ 14. Выражение функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ от комплексных значений аргумента через функции аргумента вещественного.

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, -k')}, \quad (91)$$

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad (92)$$

$$\operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}. \quad (93)$$

Равенства (91), (92), (93), получающиеся из формул второй строки таблицы 16 предыдущего параграфа заменой u на iu , сводят вычисления значений функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ при чисто мнимых значениях аргумента к вычислению значений этих функций при вещественных значениях аргумента.

$$\operatorname{sn}(v + iw, k) = \frac{\operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(w, k') + i \operatorname{cn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k) \operatorname{sn}(w, k') \operatorname{cn}(w, k')}{\operatorname{cn}^2(w, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(w, k') \operatorname{sn}^2(v, k)}, \quad (94)$$

$$\operatorname{cn}(v + iw) = \frac{\operatorname{cn}(v, k) \operatorname{cn}(w, k') - i \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k) \operatorname{sn}(w, k') \operatorname{dn}(w, k')}{\operatorname{cn}^2(w, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{sn}^2(w, k')}, \quad (95)$$

$$\operatorname{dn}(v + iw) = \frac{\operatorname{dn}(v, k) \operatorname{cn}(w, k') \operatorname{dn}(w, k') - ik^2 \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{cn}(v, k) \operatorname{ch}(w, k')}{\operatorname{cn}^2(w, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{sn}^2(w, k')}. \quad (96)$$

Равенства (94), (95), (96) получаются из равенств (91), (92), (93) и формул сложения.

§ 15. Разложение эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ в степенные ряды. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ разлагаются в ряды по степеням u .

$$\operatorname{sn} u = u - (1+k^2) \frac{u^3}{6} + (1+14k^2+k^4) \frac{u^5}{120} - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{u^7}{5040} + \\ + (1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8) \frac{u^9}{962880} + \dots, \quad |u| < |K'|, \quad (97)$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{2} + (1+4k^2) \frac{u^4}{24} - (1+44k^2+16k^4) \frac{u^6}{720} + \\ + (1+408k^2+912k^4+64k^6) \frac{u^8}{40320} - \dots, \quad |u| < |K'|, \quad (98)$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2 \frac{u^2}{2} + k^2(k^2+4) \frac{u^4}{24} - k^2(k^4+44k^2+16) \frac{u^6}{720} + \\ + k^2(k^6+408k^4+912k^2+64) \frac{u^8}{40320} + \dots, \quad |u| < |K'| \quad (99)$$

Отметим также ряды для произведений $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$ и $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$

$$\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = 1 - (1+k^2) \frac{u^2}{2} + (1+14k^2+k^4) \frac{u^4}{24} - \\ - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{u^6}{720} + \dots, \quad |u| < |K'|, \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = u - (1 + 4k^2) \frac{u^3}{6} + (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{u^5}{120} - \\ - (1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6) \frac{u^7}{5040} + \dots, \quad |u| < |K'|, \quad (101) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u = u - (4 + k^2) \frac{u^3}{6} + (16 + 44k^2 + k^4) \frac{u^5}{120} - \\ - (64 + 912k^2 + 408k^4 + k^6) \frac{u^7}{5040} + \dots, \quad |u| < |K'|. \quad (102) \end{aligned}$$

Укажем еще степенные ряды

$$\operatorname{am} u = u - k^2 \frac{u^3}{6} + k^2 (4 + k^2) \frac{u^5}{120} - k^2 (16 + 44k^2 + k^4) \frac{u^7}{5040} + \dots, \quad |u| < |K'|, \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{1}{u} + (1 + k^2) \frac{u}{6} + (7 - 22k^2 + 7k^4) \frac{u^3}{360} + \\ + (31 - 15k^2 - 15k^4 + 31k^6) \frac{u^5}{15120} + \dots, \quad 0 < |u| < \min(|2K'|, |2K|). \quad (104) \end{aligned}$$

§ 16. Представление функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ в виде отношения целых трансцендентных функций. Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ могут быть выражены как отношения рядов, сходящихся при всех значениях u :

$$\operatorname{sn} u = \frac{\alpha_0 u - \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 - \alpha_3 u^7 + \dots}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \dots}, \quad (105)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\beta_0 - \beta_1 u^2 + \beta_2 u^4 - \beta_3 u^6 + \dots}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \dots}, \quad (106)$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\gamma_0 - \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^4 - \gamma_3 u^6 + \dots}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \dots}. \quad (107)$$

Коэффициенты рядов определяются равенствами:

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3!} (1 + k^2),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{5!} (1 + 4k^2 + k^4),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{7!} (1 + 9k^2 + 9k^4 + k^6),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{9!} (1 + 16k^2 - 6k^4 + 16k^6 + k^8),$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{11!} (1 + 25k^2 - 494k^4 - 494k^6 + 25k^8 + k^{10}),$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{13!} (1 + 36k^2 - 5781k^4 - 12184k^6 - 5781k^8 + 36k^{10} + k^{12}),$$

.....

$$\beta_0 = 1,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2!},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4!} (1 + 2k^2),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6!} (1 + 6k^2 + 8k^4),$$

$$\beta_4 = \frac{1}{8!} (1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6),$$

$$\beta_5 = \frac{1}{10!} (1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8),$$

$$\beta_6 = \frac{1}{12!} (1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10}),$$

$$\beta_7 = \frac{1}{14!} (1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12}).$$

.....

$$\gamma_0 = 1,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2!} k^2,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4!} (2k^2 + k^4),$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{6!} (8k^2 + 6k^4 + k^6),$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{8!} (32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8),$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{10!} (128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10}),$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{12!} (512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + k^{12}),$$

$$\gamma_7 = \frac{1}{14!} (2048k^2 + 16896k^4 + 45024k^6 + 51816k^8 + 19308k^{10} + 42k^{12} + k^{14}),$$

.....

$$\delta_0 = 1,$$

$$\delta_1 = \frac{2k^2}{4!},$$

$$\delta_2 = \frac{8k^2}{6!} (k^2 + 1),$$

$$\delta_3 = \frac{4k^2}{8!} (8 + 17k^2 + 8k^4),$$

$$\delta_4 = \frac{32k^2}{10!} (4 + 15k^2 + 15k^4 + 4k^6),$$

$$\delta_5 = \frac{8k^2}{12!} (64 + 376k^2 + 675k^4 + 376k^6 + 64k^8),$$

$$\delta_6 = \frac{32k^2}{14!} (64 + 544k^2 + 1549k^4 + 1549k^6 + 544k^8 + 64k^{10}).$$

§ 17. Разложение эллиптических функций в тригонометрические ряды. Положим для краткости письма

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Эллиптические функции $sn u$, $cn u$ и $dn u$ могут быть представлены тригонометрическими рядами:

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \left(\frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3} \sin \frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5} \sin \frac{5\pi u}{2K} + \dots + \frac{q^{s+\frac{1}{2}}}{1-q^{2s+1}} \sin \frac{(2s+1)\pi u}{2K} + \dots \right), \quad (108)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \left(\frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos \frac{\pi u}{2K} + \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+q^3} \cos \frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^{\frac{5}{2}}}{1+q^5} \cos \frac{5\pi u}{2K} + \dots + \frac{q^{s+\frac{1}{2}}}{1+q^{2s+1}} \cos \frac{(2s+1)\pi u}{2K} + \dots \right), \quad (109)$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \left(\frac{q}{1+q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^4} \cos \frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1+q^6} \cos \frac{3\pi u}{K} + \dots + \frac{q^s}{1+q^{2s}} \cos \frac{s\pi u}{K} + \dots \right). \quad (110)$$

Положив

$$\varrho = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{q} = \frac{\pi K'}{2K} \quad (111)$$

и введя новое переменное $x = \frac{\pi u}{2K}$, можно представить эти разложения в несколько ином виде:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\pi}{kK} \left\{ \frac{\sin x}{\operatorname{sh} \varrho} + \frac{\sin 3x}{\operatorname{sh} 3\varrho} + \frac{\sin 5x}{\operatorname{sh} 5\varrho} + \dots \right\}, \quad (112)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\pi}{kK} \left\{ \frac{\cos x}{\operatorname{ch} \varrho} + \frac{\cos 3x}{\operatorname{ch} 3\varrho} + \frac{\cos 5x}{\operatorname{ch} 5\varrho} + \dots \right\}, \quad (113)$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2K} \left\{ 1 + \frac{2 \cos 2x}{\operatorname{ch} 2\varrho} + \frac{2 \cos 4x}{\operatorname{ch} 4\varrho} + \frac{2 \cos 6x}{\operatorname{ch} 6\varrho} + \dots \right\}. \quad (114)$$

Отметим одновременно разложения в тригонометрические ряды функций:

$$\operatorname{am} u = x + \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2\varrho} + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch} 4\varrho} + \frac{1}{3} \frac{\sin 6x}{\operatorname{ch} 6\varrho} + \dots, \quad (115)$$

$$\operatorname{tn} u = \frac{\pi}{2k'K} \left\{ \operatorname{tg} x - 2q \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2\varrho} + 2q^2 \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch} 4\varrho} - 2q^3 \frac{\sin 6x}{\operatorname{ch} 6\varrho} + \dots \right\}, \quad (116)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{1}{\sin x} + 2q^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} \varrho} + 2q^{\frac{3}{2}} \frac{\sin 3x}{\operatorname{sh} 3\varrho} + 2q^{\frac{5}{2}} \frac{\sin 5x}{\operatorname{sh} 5\varrho} + \dots \right\}, \quad (117)$$

$$\frac{1}{\operatorname{cn} u} = \frac{\pi}{2k'K} \left\{ \frac{1}{\cos x} - 2q^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ch} \varrho} + 2q^{\frac{3}{2}} \frac{\cos 3x}{\operatorname{ch} 3\varrho} - 2q^{\frac{5}{2}} \frac{\cos 5x}{\operatorname{ch} 5\varrho} + \dots \right\}, \quad (118)$$

$$\frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{\pi}{2k'K} \left\{ 1 - 2 \frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2\varrho} + 2 \frac{\cos 4x}{\operatorname{ch} 4\varrho} - 2 \frac{\cos 6x}{\operatorname{ch} 6\varrho} + \dots \right\}, \quad (119)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tn} u'} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \operatorname{ctg} x - 2q \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2\varrho} - 2q^2 \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch} 4\varrho} - 2q^3 \frac{\sin 6x}{\operatorname{ch} 6\varrho} - \dots \right\}, \quad (120)$$

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\pi}{kk'K} \left\{ \frac{\sin x}{\operatorname{ch} \varrho} - \frac{\sin 3x}{\operatorname{ch} 3\varrho} + \frac{\sin 5x}{\operatorname{ch} 5\varrho} - \dots \right\}, \quad (121)$$

$$\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\pi}{kK} \left\{ \frac{\cos x}{\operatorname{sh} \varrho} - \frac{\cos 3x}{\operatorname{sh} 3\varrho} + \frac{\cos 5x}{\operatorname{sh} 5\varrho} - \dots \right\}; \quad (122)$$

$$\frac{dn u}{sn u} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{1}{\sin x} - 2q^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\operatorname{ch} \varrho} - 2q^{\frac{3}{2}} \frac{\sin 3x}{\operatorname{ch} 3\varrho} - 2q^{\frac{5}{2}} \frac{\sin 5x}{\operatorname{ch} 5\varrho} - \dots \right\}, \quad (123)$$

$$\frac{dn u}{cn u} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{1}{\cos x} + 2q^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sh} \varrho} - 2q^{\frac{3}{2}} \frac{\cos 3x}{\operatorname{sh} 3\varrho} + 2q^{\frac{5}{2}} \frac{\cos 5x}{\operatorname{sh} 5\varrho} - \dots \right\}. \quad (124)$$

§ 18. Разложение эллиптических функций в ряды по гиперболическим функциям. На ряду с указанными разложениями эллиптических функций в тригонометрические ряды можно пользоваться и другими. Положим

$$q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}, \quad \varrho' = \frac{\pi}{2K'} K, \quad x' = \frac{\pi u}{2K'}.$$

Для функций $sn u$, $cn u$, $dn u$ имеем разложения:

$$sn u = \frac{\pi}{2kK'} \left\{ \operatorname{th} x' - 2q' \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} 2\varrho'} + 2q'^2 \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 4\varrho'} - 2q'^3 \frac{\operatorname{sh} 6x'}{\operatorname{sh} 6\varrho'} + \dots \right\}, \quad (125)$$

$$cn u = \frac{\pi}{2kK'} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} x'} - 2q'^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ch} x'}{\operatorname{ch} \varrho'} + 2q'^{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{ch} 3x'}{\operatorname{ch} 3\varrho'} - 2q'^{\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{ch} 5x'}{\operatorname{ch} 5\varrho'} - \dots \right\}, \quad (126)$$

$$dn u = \frac{\pi}{2K'} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} x'} + 2q'^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ch} x'}{\operatorname{sh} \varrho'} - 2q'^{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{ch} 3x'}{\operatorname{sh} 3\varrho'} + 2q'^{\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{ch} 5x'}{\operatorname{sh} 5\varrho'} - \dots \right\}. \quad (127)$$

Отметим ещё разложения:

$$\frac{1}{sn u} = \frac{\pi}{2K'} \left\{ \frac{1}{\operatorname{th} x'} + 2q' \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{ch} 2\varrho'} + 2q'^2 \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{ch} 4\varrho'} + 2q'^3 \frac{\operatorname{sh} 6x'}{\operatorname{ch} 6\varrho'} + \dots \right\}, \quad (128)$$

$$\frac{1}{cn u} = \frac{\pi}{k'K'} \left\{ \frac{\operatorname{ch} x'}{\operatorname{ch} \varrho'} + \frac{\operatorname{ch} 3x'}{\operatorname{ch} 3\varrho'} + \frac{\operatorname{ch} 5x'}{\operatorname{ch} 5\varrho'} + \dots \right\}, \quad (129)$$

$$\frac{1}{dn u} = \frac{\pi}{k'K'} \left\{ \frac{\operatorname{ch} x'}{\operatorname{sh} \varrho'} - \frac{\operatorname{ch} 3x'}{\operatorname{sh} 3\varrho'} + \frac{\operatorname{ch} 5x'}{\operatorname{sh} 5\varrho'} - \dots \right\}, \quad (130)$$

$$\operatorname{tn} u = \frac{\pi}{k'K'} \left\{ \frac{\operatorname{sh} x'}{\operatorname{sh} \varrho'} + \frac{\operatorname{sh} 3x'}{\operatorname{sh} 3\varrho'} + \frac{\operatorname{sh} 5x'}{\operatorname{sh} 5\varrho'} + \dots \right\}, \quad (131)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tn} u} = \frac{\pi}{2K'} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh} x'} - 2q'^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} x'}{\operatorname{sh} \varrho'} - 2q'^{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{sh} 3x'}{\operatorname{sh} 3\varrho'} - 2q'^{\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{sh} 5x'}{\operatorname{sh} 5\varrho'} - \dots \right\}, \quad (132)$$

$$\frac{sn u}{dn u} = \frac{\pi}{kk'K'} \left\{ \frac{\operatorname{sh} x'}{\operatorname{ch} \varrho} - \frac{\operatorname{sh} 3x'}{\operatorname{ch} 3\varrho} + \frac{\operatorname{sh} 5x'}{\operatorname{ch} 5\varrho} - \dots \right\}, \quad (133)$$

$$\frac{cn u}{dn u} = \frac{\pi}{2kK'} \left\{ 1 - 2 \frac{\operatorname{ch} 2x'}{\operatorname{ch} 2\varrho'} + 2 \frac{\operatorname{ch} 4x'}{\operatorname{ch} 4\varrho'} - 2 \frac{\operatorname{ch} 6x'}{\operatorname{ch} 6\varrho'} + \dots \right\} \quad (134)$$

$$\frac{dn u}{sn u} = \frac{\pi}{2K'} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh} x'} + 2q'^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} x'}{\operatorname{ch} \varrho'} + 2q'^{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{sh} 3x'}{\operatorname{ch} 3\varrho'} + 2q'^{\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{sh} 5x'}{\operatorname{ch} 5\varrho'} + \dots \right\}, \quad (135)$$

$$\frac{dn u}{cn u} = \frac{\pi}{2K'} \left\{ 1 + 2 \frac{\operatorname{ch} 2x'}{\operatorname{ch} 2\varrho'} + 2 \frac{\operatorname{ch} 4x'}{\operatorname{ch} 4\varrho'} + 2 \frac{\operatorname{ch} 6x'}{\operatorname{ch} 6\varrho'} + \dots \right\}. \quad (136)$$

При $-1 < k < 1$ ряды сходятся для всех значений u , удовлетворяющих условию $|Ru| < K$.

§ 19. Приближенные формулы для $sn u$, $cn u$, $dn u$.

$$sn u \approx \sin x \frac{1 - 4q^2 \cos^2 x}{1 - 4q(1 - 2q) \cos^2 x}, \quad (137)$$

$$sn u \approx \sin x (1 + 4q \cos^2 x), \quad (138)$$

$$cn u \approx \cos x \frac{1 - 4q^2 \sin^2 x}{1 + 4q(1 + 2q) \sin^2 x}, \quad (139)$$

$$\operatorname{cn} u \approx \cos x (1 - 4q \sin^2 x), \quad (140)$$

$$\operatorname{dn} u \approx \frac{1 - 4q(1 - 2q) \sin^2 x}{1 + 4q(1 + 2q) \sin^2 x}, \quad (141)$$

$$\operatorname{dn} u \approx 1 - 8q \sin^2 x, \quad (142)$$

$$\operatorname{tn} u \approx \operatorname{tg} x \frac{1 + 2q + q^2 (1 - 4 \cos^2 x)}{1 - 2q + q^2 (1 - 4 \sin^2 x)}, \quad (143)$$

$$\operatorname{tn} u \approx (1 + 4q) \operatorname{tg} x. \quad (144)$$

Этими формулами удобно пользоваться при вещественных значениях x .

§ 20. Представление эллиптических функций в виде бесконечных произведений. Эллиптические функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ могут быть представлены в виде бесконечных произведений

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin x \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2s} \cos 2x + q^{4s}}{1 - 2q^{2s-1} \cos 2x + q^{4s-2}}, \quad (145)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \cos x \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2s} \cos 2x + q^{4s}}{1 - 2q^{2s-1} \cos 2x + q^{4s-2}}, \quad (146)$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2s-1} \cos 2x + q^{4s-2}}{1 - 2q^{2s-1} \cos 2x + q^{4s-2}}. \quad (147)$$

§ 21. Функция $\operatorname{zn}(u)$. Если рассматривать интеграл второго рода

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

как функцию аргумента u , где $u = F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, то мы приходим к выражению

$$E(\operatorname{am} u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u du. \quad (148)$$

Функция $\operatorname{zn} u$ определяется равенством

$$\operatorname{zn} u = E(\operatorname{am} u) - \frac{E}{K} u \quad (149)$$

и выражается интегралом

$$\operatorname{zn} u = \int_0^u \left(\operatorname{dn}^2 u - \frac{E}{K} \right) du. \quad (150)$$

Функция $\operatorname{zn} u$ является нечетной функцией u

$$\operatorname{zn}(-u) = -\operatorname{zn} u. \quad (151)$$

Она имеет период $2K$:

$$\operatorname{zn}(u + 2K) = \operatorname{zn} u. \quad (152)$$

При увеличении аргумента u на величину $2iK'$ функция изменяется на постоянное слагаемое:

$$\operatorname{zn}(u + 2iK') = \operatorname{zn} u - \frac{\pi i}{K}. \quad (153)$$

Вообще

$$\operatorname{zn}(u + 2mK + 2niK') = \operatorname{zn} u - \frac{n\pi i}{K}, \quad (154)$$

где m и n — целые числа.

Представление об изменении этой функции при вещественных значениях модуля k и аргумента u дает номограмма на фиг. 32. По горизонтальной оси даны значения аргумента $2v = \frac{u}{K}$. По вертикали указаны значения $zn u$. Значения, принимаемые модулем, указаны как отметки соответствующих кривых. Аргумент $2v$ изменяется в пределах от 0 до 1. При дальнейшем его изменении получаются кривые, расположенные симметрично с кривыми фиг. 32 относительно точки (1,0), а дальше все повторяется периодически.

Функция $zn u$ имеет полюсы первого порядка в точках

$$u = 2mK + (2n + 1)K'i, \quad (155)$$

где m и n —целые числа. Вычет, соответствующий полюсу, равен единице.

Функция $zn(u + v)$ выражается через функции $zn u$ и $zn v$ равенством

$$zn(u + v) = zn u + zn v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u + v), \quad (156)$$

в частности

$$zn 2u = 2 zn u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn} 2u. \quad (157)$$

Функция $zn u$ разлагается в ряд по степеням u :

$$\begin{aligned} zn u = & \left(1 - \frac{E}{K}\right)u - 2k^2 \frac{u^3}{3!} + 8k^2(k^2 + 1) \frac{u^5}{5!} - 16k^2(2k^4 + 13k^2 + 2) \frac{u^7}{7!} + \\ & + 128k^2(k^6 + 30k^4 + 30k^2 + 1) \frac{u^9}{9!} + \dots \end{aligned} \quad (158)$$

Функция $zn u$ может быть представлена также в виде

$$zn u = \frac{\pi}{2K} \frac{4q \sin 2x - 8q^4 \sin 4x + 12q^9 \sin 6x - \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots}. \quad (159)$$

Для вычисления функции $zn u$ можно пользоваться формулой

$$zn u \approx \frac{4q \sin 2x}{1 + 2q(2 - \cos 2x) + 4q^2(1 - 2 \cos 2x)}. \quad (160)$$

§ 22. Простейшие интегралы от функций Якоби

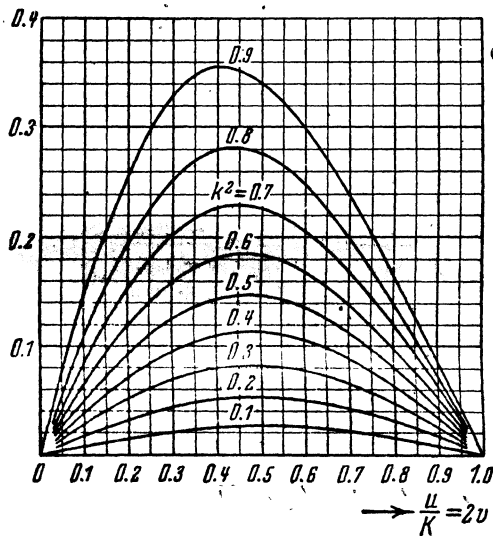
$$\int \operatorname{sn} u \, du = \frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u) + C, \quad (161)$$

$$\int \operatorname{cn} u \, du = \frac{1}{k} \operatorname{arc} \cos(\operatorname{dn} u) + C = \frac{i}{k} \ln(\operatorname{dn} u - ik \operatorname{sn} u) + C, \quad (162)$$

$$\int \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{arc} \sin(\operatorname{sn} u) + C = i \ln(\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u) + C, \quad (163)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u} + C, \quad (164)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \left(\frac{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right) + C, \quad (165)$$



Фиг. 32

$$\int \frac{du}{dn u} = \frac{1}{k'} \operatorname{arctg} \frac{k' \operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u} + C, \quad (166)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} du = \frac{1}{2k'} \ln \frac{k' + \operatorname{dn} u}{k' - \operatorname{dn} u} + C, \quad (167)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{dn} u - 1}{\operatorname{dn} u + 1} + C, \quad (168)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} du = \frac{1}{kk'} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'} + C, \quad (169)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{cn} u} + C, \quad (170)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du = \frac{1}{2k} \ln \frac{1 + k \operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn} u} + C, \quad (171)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sn} u}{1 - \operatorname{sn} u} + C, \quad (172)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} + C, \quad (173)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} + C, \quad (174)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = -\frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} + C, \quad (175)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} + C, \quad (176)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} + C, \quad (177)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} + C, \quad (178)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \ln \operatorname{sn} u + C, \quad (179)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du = \ln \frac{1}{\operatorname{cn} u} + C, \quad (180)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du = -\frac{1}{k^2} \ln \operatorname{dn} u + C, \quad (181)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} du = \frac{1}{k'^2} \ln \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} + C, \quad (182)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} du = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} + C, \quad (183)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} du = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} + C, \quad (184)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{dn} u} du = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}} + C, \quad (185)$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} du = \frac{1}{2k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \ln \frac{\operatorname{dn}(\alpha + u) - k \operatorname{cn}(\alpha + u)}{\operatorname{dn}(\alpha - u) + k \operatorname{cn}(\alpha - u)} + C, \quad (186)$$

$$\int \operatorname{sn}^2 u du = \left(1 - \frac{E}{K}\right) \frac{u}{k^2} - \frac{1}{k^2} \operatorname{zn} u + C, \quad (187)$$

$$\int \operatorname{cn}^2 u du = \frac{1}{k^2} \operatorname{zn} u + \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} - k'^2\right) u + C. \quad (188)$$

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ ТЕТА

§ 1. Определение и основные свойства функций тета. Функции тета можно определить следующими разложениями:

$$\vartheta_0(x) = 1 - 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x - 2q^9 \cos 6\pi x + \dots + (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi x + \dots, \quad (1)$$

$$\vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi x - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi x + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi x - \dots + (-1)^n q^{n + \frac{1}{2}} \sin (2n + 1)\pi x + \dots, \quad (2)$$

$$\vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi x + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi x + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi x + \dots + 2q^{n + \frac{1}{2}} \cos (2n + 1)\pi x + \dots \quad (3)$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x + 2q^9 \cos 6\pi x + \dots + 2q^{n^2} \cos 2n\pi x + \dots \quad (4)$$

Ряды, стоящие в правой части равенств (1), (2), (3) и (4), сходятся при условии $|q| < 1$ для всех значений x , как вещественных, так и комплексных. Функции $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ являются, таким образом, целыми трансцендентными функциями x .

Функции тета суть периодические функции x . Последнее видно из равенств

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x + 1) &= \vartheta_0(x), & \vartheta_1(x + 1) &= -\vartheta_1(x), \\ \vartheta_2(x + 1) &= -\vartheta_2(x), & \vartheta_3(x + 1) &= \vartheta_3(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Период функций $\vartheta_0(x)$ и $\vartheta_3(x)$ равен 1, период $\vartheta_1(x)$ и $\vartheta_2(x)$ равен 2. Функции тета обладают замечательным свойством, благодаря которому играют важную роль в теории эллиптических функций. Положим,

$$q = e^{-\pi\varrho}, \quad \varrho = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{q}.$$

При увеличении аргумента на величину $i\varrho$ каждая из функций тета приобретает некоторый множитель:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x + i\varrho) &= -\frac{1}{q} e^{-2\pi x i} \vartheta_0(x), & \vartheta_2(x + i\varrho) &= \frac{1}{q} e^{-2\pi x i} \vartheta_2(x), \\ \vartheta_1(x + i\varrho) &= -\frac{1}{q} e^{-2\pi x i} \vartheta_1(x), & \vartheta_3(x + i\varrho) &= \frac{1}{q} e^{-2\pi x i} \vartheta_3(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) позволяют установить, что

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x + m + n\varrho i) &= (-1)^n q^{-n^2} e^{-2n\pi x i} \vartheta_0(x), \\ \vartheta_1(x + m + n\varrho i) &= (-1)^{m+n} q^{-n^2} e^{-2n\pi x i} \vartheta_1(x), \\ \vartheta_2(x + m + n\varrho i) &= (-1)^m q^{-n^2} e^{-2n\pi x i} \vartheta_2(x), \\ \vartheta_3(x + m + n\varrho i) &= q^{-n^2} e^{-2n\pi x i} \vartheta_3(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Легко видеть, что функции $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ суть функции четные и что $\vartheta_1(x)$ есть функция нечетная:

$$\vartheta_0(-x) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_1(-x) = -\vartheta_1(x), \quad \vartheta_2(-x) = \vartheta_2(x), \quad \vartheta_3(-x) = \vartheta_3(x). \quad (8)$$

Функции тета могут быть представлены в виде бесконечных произведений:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi x + q^{4n-2})(1 - q^{2n}), \\ \vartheta_1(x) &= 2\sqrt[4]{q} \sin \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi x + q^{4n})(1 - q^{2n}), \\ \vartheta_2(x) &= 2\sqrt[4]{q} \cos \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi x + q^{4n})(1 - q^{2n}), \\ \vartheta_3(x) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi x + q^{4n-2})(1 - q^{2n}). \end{aligned} \quad (9)$$

Из этих разложений видно, что корнями функций тета являются значения, приведенные в табл. 20.

Таблица 20

	$\vartheta_0(x)$	$\vartheta_1(x)$	$\vartheta_2(x)$	$\vartheta_3(x)$
Корни	$m + \frac{2n+1}{2} \rho i$	$m + n\rho i$	$\frac{2m+1}{2} + n\rho i$	$\frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2} \rho i$

Числа m и n — целые положительные, отрицательные или равные нулю. Отметим, что функции тета удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \vartheta_n(x, \rho)}{\partial^2 x} = 4\pi^2 \frac{\partial \vartheta_n(x, \rho)}{\partial \rho} \quad (n=0, 1, 2, 3). \quad (10)$$

Якоби в своей работе „Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum“ (1829) употребляет несколько иные обозначения для функций тета, которые мы и приведем здесь. Введем новое переменное

$$u = 2Kx.$$

Положим.

$$\rho = \frac{K'}{K}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Величины ρ и q являются функциями модуля k , определяющего величины K и K' .

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right) = \vartheta_0(x), & \Theta_1(u) &= \vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right) = \vartheta_3(x), \\ H(u) &= \vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right) = \vartheta_1(x), & H_1(u) &= \vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right) = \vartheta_2(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Функции тета Якоби зависят от аргумента u и модуля k , поскольку последний определяет величины ρ и q , входящие в выражения этих

функций. Эти функции при увеличении аргумента на $2K$ изменяются согласно формулам

$$\begin{aligned} \theta(u + 2K) &= \theta(u), & \theta_1(u + 2K) &= \theta_1(u), \\ H(u + 2K) &= -H(u), & H_1(u + 2K) &= -H_1(u). \end{aligned} \quad (12)$$

При увеличении аргумента u на величину $2K'i$ функции тета Якоби изменяются согласно формулам

$$\begin{aligned} \theta(u + 2K'i) &= -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi u}{K}i} \theta(u), & \theta_1(u + 2K'i) &= \frac{1}{q} e^{-\frac{\pi u}{K}i} \theta(u), \\ H(u + 2K'i) &= -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi u}{K}i} H(u), & H_1(u + 2K'i) &= \frac{1}{q} e^{-\frac{\pi u}{K}i} H_1(u). \end{aligned} \quad (13)$$

Функции $\theta(u)$ и $\theta_1(u)$ имеют период, равный $2K$. Функции $H(u)$ и $H_1(u)$ имеют период $4K$. Функции $\theta(u)$, $\theta_1(u)$ и $H_1(u)$ — четные, функция $H(u)$ — нечетная.

Аналитическое представление функций $\theta(u)$, $H(u)$, $\theta_1(u)$ и $H_1(u)$ согласно равенствам (11) дается рядами (1), (2), (4) и (3) или бесконечными произведениями (9). Все корни функций $\theta(u)$, $H(u)$, $\theta_1(u)$, $H_1(u)$ простые. В табл. 21 даны корни этих функций, где m и n суть произвольные целые числа.

Таблица 21

	$\theta(u)$	$H(u)$	$\theta_1(u)$	$H_1(u)$
Корни	$2mK + (2n+1)K'i$	$2mK + 2nK'i$	$(2m+1)K + (2n+1)K'i$	$(2m+1)K + 2nK'i$

§ 2. Выражение эллиптических функций Якоби через функции тета. Эллиптические функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ выражаются через функции тета при помощи формул:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\theta(u)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}, \quad (14)$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\theta(u)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}, \quad (15)$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\theta_1(u)}{\theta(u)} = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}. \quad (16)$$

Пользуясь формулами (14), (15), (16), можно вычислить значения эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, если известны значения функций $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$.

Для функций $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$ составлены таблицы.

При пользовании таблицами функций тета следует иметь в виду, что между функциями тета имеют место соотношения

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_0\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad \vartheta_2(x) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - x\right). \quad (7)$$

Значения

$$x_1 = \frac{1}{2} - x$$

обычно вычислены и даются в крайнем столбце справа в тех же таблицах.

Пример. Вычислить значения $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ при $u = 0.3708$ для $k^2 = 0.5$.

Прежде всего находим по таблицам эллиптического интеграла 2-го рода величину

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{4}\right) = 1.8541.$$

Далее определяем аргумент

$$2x = \frac{u}{K} = \frac{0.3708}{1.8541} = 0.2, \quad 2x' = 1 - 2x = 0.8.$$

Из таблиц функций тета заимствуем значения

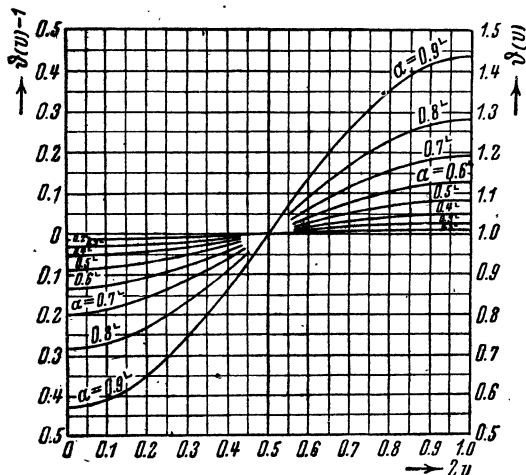
$$\begin{aligned} \vartheta_0(0.1) &= 0.9300, & \vartheta_1(0.1) &= 0.2804, \\ \vartheta_2(0.1) &= \vartheta_1(0.4) = 0.8682, & \vartheta_3(0.1) &= \vartheta_0(0.4) = 1.070. \end{aligned}$$

Для искомых значений эллиптических функций получаем, пользуясь равенствами (14) (15) и (16),

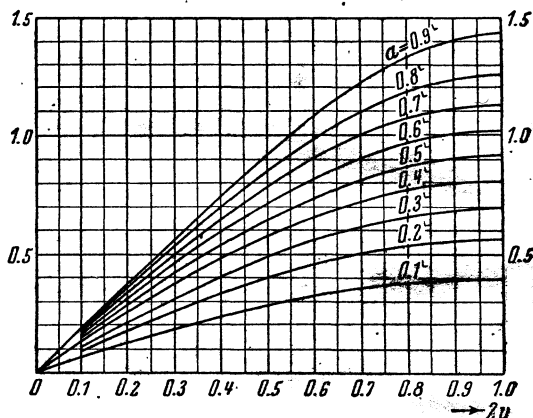
$$\operatorname{sn} u = \sqrt[4]{\frac{0.2804}{0.9300}} = 0.3585, \quad \operatorname{cn} u = \frac{0.8682}{0.9300} = 0.9338, \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{1.070}{0.9300} = 0.9680.$$

Заметим, что вычисление эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ может быть произведено по таблицам L. M. Miln-Thomson, *Die elliptischen Functionen Jacobi* (Berlin. 1931).

Эти таблицы дают значения функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ с пятью десятичными знаками через 0.01 по аргументу для значений k^2 через 0.1. В заключение приводим номограммы функций $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$.



Фиг. 33



Фиг. 34

На фиг. 33 даны графики функции $\vartheta_0(v)$ для различных значений модуля $k = \sin \alpha$. Соответствующие значения угла α указаны в сотых долях (значок \square) прямого угла. Значения аргумента $2v$ даются по горизонтальям. По вертикальному направлению справа указаны значения функции $\vartheta_0(v)$. Те же кривые будут служить графиками функции $\vartheta_3(v)$, если положить $2v + 2v_1 = 1$.

На фиг. 34 даны графики функции $\vartheta_1(v)$. Значения угла α на графиках выражены в сотых долях прямого угла. Значения аргумента даны на горизонтальной шкале, значения функции — на вертикальной шкале справа. Те же графики служат и изображением функции $\vartheta_2(v)$ в силу соотношения

$$\vartheta_2(v) = \vartheta_1(v_1),$$

если

$$2v + 2v_1 = 1.$$

§ 3. Изменение функций тета при изменении аргумента. Функции тета от аргументов $x + \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2}qi$, $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}qi$, выражаются через функции тета от аргумента x .

Соответствующие формулы преобразования могут быть сведены в таблицу (табл. 22).

Таблица 22

x_1	$\vartheta_0(x_1)$	$\vartheta_1(x_1)$	$\vartheta_2(x_1)$	$\vartheta_3(x_1)$
$x + \frac{1}{2}$	$\vartheta_3(x)$	$\vartheta_2(x)$	$-\vartheta_1(x)$	$\vartheta_0(x)$
$x + \frac{qi}{2}$	$\frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_1(x)$	$\frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_3(x)$	$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_2(x)$
$x + \frac{1+qi}{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_2(x)$	$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_3(x)$	$-\frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_0(x)$	$\frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi xi} \vartheta_1(x)$

§ 4. Изменение функций тета при изменении величины q . Функции тета зависят как от аргумента x , так и от величины q или

$$q = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{q}.$$

Отметим формулы, характеризующие изменение функций тета при изменении q . Эти формулы сведены в табл. 23.

Таблица 23

q_1	$\vartheta_0(x, q_1)$	$\vartheta_1(x, q_1)$	$\vartheta_2(x, q_1)$	$\vartheta_3(x, q_1)$
$\frac{1}{q}$	$\sqrt{q} e^{-\pi qx^2} \vartheta_2(iqx, q)$	$-i \sqrt{q} e^{-\pi qx^2} \vartheta_1(iqx, q)$	$\sqrt{q} e^{-\pi qx^2} \vartheta_0(iqx, q)$	$\sqrt{q} e^{-\pi qx^2} \vartheta_3(iqx, q)$
$q-i$	$\vartheta_3(x, q)$	$\sqrt{i} \vartheta_1(x, q)$	$\sqrt{i} \vartheta_2(x, q)$	$\vartheta_0(x, q)$

Любое преобразование величины q вида

$$iq' = \frac{\alpha i q + \beta}{\gamma i q + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

сводится к ряду последовательных преобразований указанного в табл. 20 вида, и соответствующие значения функций тета могут быть получены с помощью формул, указанных в этой таблице.

Пример. Преобразование вида

$$i q' = \frac{i q}{i q + 1}$$

распадается на три

$$q_1 = q - i, \quad q_2 = \frac{1}{q_1}, \quad q' = q_2 - i.$$

Последовательное использование указанных преобразований дает

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x, q') &= \sqrt{q - i} e^{-\pi(e-i)x^2} \vartheta_0((1+iq)x, q), \\ \vartheta_1(x, q') &= \sqrt{q - i} e^{-\pi(e-i)x^2} \vartheta_1((1+iq)x, q), \\ \vartheta_2(x, q') &= \sqrt{qi + 1} e^{-\pi(e-i)x^2} \vartheta_3((1+iq)x, q), \\ \vartheta_3(x, q') &= \sqrt{qi + 1} e^{-\pi(e-i)x^2} \vartheta_2((1+iq)x, q). \end{aligned}$$

Из формул, отмеченных в первой строке табл. 23, легко получить формулы, дающие возможность свести вычисление значений функций тета при мнимых значениях аргумента к вычислению значений функций тета от вещественного аргумента.

Эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(ix, q) &= \frac{1}{\sqrt{q}} e^{\frac{\pi x^2}{q}} \vartheta_2\left(\frac{x}{q}, \frac{1}{q}\right), & \vartheta_1(ix, q) &= \frac{i}{\sqrt{q}} e^{\frac{\pi x^2}{q}} \vartheta_1\left(\frac{x}{q}, \frac{1}{q}\right), \\ \vartheta_2(ix, q) &= \frac{1}{\sqrt{q}} e^{\frac{\pi x^2}{q}} \vartheta_0\left(\frac{x}{q}, \frac{1}{q}\right), & \vartheta_3(ix, q) &= \frac{1}{\sqrt{q}} e^{\frac{\pi x^2}{q}} \vartheta_3\left(\frac{x}{q}, \frac{1}{q}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Пользуясь формулами преобразований функций тета, можно получить разложения, которыми удобно пользоваться, когда величина q мала, т. е. когда q близко к единице. Положим для простоты письма

$$q' = \frac{1}{q}, \quad q' = e^{-\pi q'}$$

и вместо x введем переменное x' , удовлетворяющее равенству

$$x' = \frac{\pi x}{q}.$$

Для функций тета имеют место разложения:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(x) &= 2 \sqrt{q'} e^{-\frac{x'^2}{\pi q'}} \left(q'^{\frac{1}{4}} \operatorname{ch} x' + q'^{\frac{9}{4}} \operatorname{ch} 3x' + q'^{\frac{25}{4}} \operatorname{ch} 5x' + \dots + \right. \\ &\quad \left. + q'^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \operatorname{ch} (2n+1)x' + \dots \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x) &= 2 \sqrt{q'} e^{-\frac{x'^2}{\pi q'}} \left(q'^{\frac{1}{4}} \operatorname{sh} x' - q'^{\frac{9}{4}} \operatorname{sh} 3x' + q'^{\frac{25}{4}} \operatorname{sh} 5x' - \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n q'^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \operatorname{sh} (2n+1)x' + \dots \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x) &= \sqrt{q'} e^{-\frac{x'^2}{\pi q'}} (1 - 2q' \operatorname{ch} 2x' + 2q'^4 \operatorname{ch} 4x' - 2q'^9 \operatorname{ch} 6x' + \dots + \\ &\quad + (-1)^n 2q'^{n^2} \operatorname{ch} 2nx' + \dots), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_3(x) &= \sqrt{q'} e^{-\frac{x'^2}{\pi q'}} (1 + 2q' \operatorname{ch} 2x' + 2q'^4 \operatorname{ch} 4x' + 2q'^9 \operatorname{ch} 6x' + \dots + \\ &\quad + 2q'^{n^2} \operatorname{ch} 2nx' + \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

§ 5. Функции тета при значении аргумента, равном нулю. Если положить $x=0$, то будут иметь место равенства:

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots + (-1)^n 2q^{n^2} + \dots, \quad (23)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(0) = 0, \quad (24)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \dots + 2q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} + \dots, \quad (25)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots + 2q^{n^2} + \dots \quad (26)$$

На ряду с этими разложениями имеют место

$$\vartheta_0 = 2\sqrt{q'} \left(q'^{\frac{1}{4}} + q'^{\frac{9}{4}} + q'^{\frac{25}{4}} + \dots + q'^{\frac{(2n+1)^2}{4}} + \dots \right), \quad (27)$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{q'} (1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \dots + (-1)^n 2q'^{n^2} + \dots), \quad (28)$$

$$\vartheta_3 = \sqrt{q'} (1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \dots + 2q'^{n^2} + \dots). \quad (29)$$

Отметим, что

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \sqrt{k}, \quad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \sqrt{k'}. \quad (30)$$

Между значениями функций тета при значении аргумента, равном нулю, имеет место замечательная зависимость

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4. \quad (31)$$

Обозначим

$$\vartheta_1' = \left(\frac{d \vartheta_1(x)}{dx} \right)_{x=0}. \quad (31)$$

Тогда имеет место также соотношение:

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3. \quad (32)$$

§ 6. Логарифмы функций тета. Логарифмы функций тета могут быть представлены разложениями:

$$\ln \frac{\vartheta_0(x)}{\vartheta_0(0)} = \frac{2 \sin^2 \pi x}{\text{sh } \pi q} + \frac{2 \sin^2 2\pi x}{2 \text{sh } 2\pi q} + \frac{2 \sin^2 3\pi x}{3 \text{sh } 3\pi q} + \dots + \frac{2 \sin^2 n \pi x}{n \text{sh } n \pi q} + \dots, \quad (33)$$

$$\ln \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(0)} = \ln \sin \pi x - \frac{2 \cos^2 \pi x}{\text{sh } \pi q} q + \frac{2 \cos^2 2\pi x}{\text{sh } 2\pi q} \frac{q^2}{2} - \frac{2 \cos^2 3\pi x}{\text{sh } 3\pi q} \frac{q^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{2 \cos^2 n \pi x}{\text{sh } n \pi q} \frac{q^n}{n} + \dots, \quad (34)$$

$$\ln \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(0)} = \ln \cos \pi x - \frac{2 \sin^2 \pi x}{\text{sh } \pi q} q + \frac{2 \sin^2 2\pi x}{\text{sh } 2\pi q} \frac{q^2}{2} - \frac{2 \sin^2 3\pi x}{\text{sh } 3\pi q} \frac{q^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{2 \sin^2 n \pi x}{\text{sh } n \pi q} \frac{q^n}{n} + \dots, \quad (35)$$

$$\ln \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_3(0)} = -\frac{2 \sin^2 \pi x}{\text{sh } \pi q} + \frac{2 \sin^2 2\pi x}{2 \text{sh } 2\pi q} - \frac{2 \sin^2 3\pi x}{3 \text{sh } 3\pi q} + \dots + (-1)^n \frac{2 \sin^2 n \pi x}{n \text{sh } n \pi q} + \dots, \quad (36)$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(x+y)}{\vartheta_0(x-y)} = \frac{\sin 2\pi x \sin 2\pi y}{\text{sh } \pi q} + \frac{\sin 4\pi x \sin 4\pi y}{2 \text{sh } 2\pi q} + \frac{\sin 6\pi x \sin 6\pi y}{3 \text{sh } 3\pi q} + \dots + \frac{\sin 2n\pi x \sin 2n\pi y}{n \text{sh } n \pi q} + \dots, \quad (37)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_1(x-y)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin \pi(x+y)}{\sin \pi(x-y)} + \frac{\sin 2\pi x \sin 2\pi y}{\text{sh } \pi q} q + \frac{\sin 4\pi x \sin 4\pi y}{\text{sh } 2\pi q} \frac{q^2}{2} + \dots + \frac{\sin 2n \pi x \sin 2n\pi y}{\text{sh } n \pi q} \frac{q^n}{n} + \dots, \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta_2(x-y)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \pi(x+y)}{\cos \pi(x-y)} - \frac{\sin 2\pi x \sin 2\pi y}{\operatorname{sh} \pi \rho} q + \frac{\sin 4\pi x \sin 4\pi y}{\operatorname{sh} 2\pi \rho} \frac{q^2}{2} - \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\sin 2n\pi x \sin 2n\pi y}{\operatorname{sh} n\pi \rho} \frac{q^n}{n} + \dots, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta_3(x-y)} = -\frac{\sin 2\pi x \sin 2\pi y}{\operatorname{sh} \pi \rho} + \frac{\sin 4\pi x \sin 4\pi y}{2 \operatorname{sh} 2\pi \rho} -$$

$$-\frac{\sin 6\pi x \sin 6\pi y}{3 \operatorname{sh} 3\pi \rho} + \dots + (-1)^n \frac{\sin 2n\pi x \sin 2n\pi y}{n \operatorname{sh} n\pi \rho} + \dots \quad (40)$$

§ 7. Логарифмические производные от функций тета. Логарифмические производные от функций тета могут быть представлены рядами:

$$\frac{d \ln \vartheta_0(x)}{dx} = 2\pi \left\{ \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi \rho} + \frac{\sin 4\pi x}{\operatorname{sh} 2\pi \rho} + \frac{\sin 6\pi x}{\operatorname{sh} 3\pi \rho} + \dots + \frac{\sin 2n\pi x}{\operatorname{sh} n\pi \rho} + \dots \right\}, \quad (41)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_1(x)}{dx} = \pi \left\{ \operatorname{ctg} \pi x + 2q \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi \rho} + 2q^2 \frac{\sin 4\pi x}{\operatorname{sh} 2\pi \rho} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots + 2q^n \frac{\sin 2n\pi x}{\operatorname{sh} n\pi \rho} + \dots \right\}, \quad (42)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_2(x)}{dx} = \pi \left\{ -\operatorname{tg} \pi x - 2q \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi \rho} + 2q^2 \frac{\sin 4\pi x}{\operatorname{sh} 2\pi \rho} - \dots \right.$$

$$\left. - \dots + (-1)^n 2q^n \frac{\sin 2n\pi x}{\operatorname{sh} n\pi \rho} + \dots \right\}, \quad (43)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_3(x)}{dx} = -2\pi \left\{ \frac{\sin 2\pi x}{\operatorname{sh} \pi \rho} - \frac{\sin 4\pi x}{\operatorname{sh} 2\pi \rho} + \frac{\sin 6\pi x}{\operatorname{sh} 3\pi \rho} - \dots \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin 2n\pi x}{\operatorname{sh} n\pi \rho} + \dots \right\}. \quad (44)$$

Для значений q , близких к единице по модулю, выгоднее пользоваться при вычислениях разложениями:

$$\frac{d \ln \vartheta_0(x)}{dx} = -2x' + \pi \rho' \left\{ \operatorname{th} x' + 2q' \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} \pi \rho'} - 2q'^2 \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 2\pi \rho'} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^{n-1} 2q'^n \frac{\operatorname{sh} 2nx'}{\operatorname{sh} \pi \rho'} + \dots \right\}, \quad (45)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_1(x)}{dx} = -2x' + \pi \rho' \left\{ \operatorname{cth} x' - 2q' \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} \pi \rho'} - 2q'^2 \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 2\pi \rho'} - \dots \right.$$

$$\left. - \dots - 2q'^n \frac{\operatorname{sh} 2nx'}{\operatorname{sh} 2\pi \rho'} - \dots \right\}, \quad (46)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_2(x)}{dx} = -2x' - 2\pi \rho' \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} \pi \rho'} + \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 2\pi \rho'} + \dots + \frac{\operatorname{sh} 2nx'}{\operatorname{sh} n\pi \rho'} + \dots \right\}, \quad (47)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_3(x)}{dx} = -2x' + 2\pi \rho' \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2x'}{\operatorname{sh} \pi \rho'} - \frac{\operatorname{sh} 4x'}{\operatorname{sh} 2\pi \rho'} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sh} 2nx'}{\operatorname{sh} n\pi \rho'} + \dots \right\}. \quad (48)$$

Логарифмические производные от функций тета удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{d \ln \vartheta_0(x+m+n\rho i)}{dx} = \frac{d \ln \vartheta_0(x)}{dx} - 2n\pi i, \quad (49)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_1(x+m+n\rho i)}{dx} = \frac{d \ln \vartheta_1(x)}{dx} - 2n\pi i, \quad (50)$$

$$\frac{d \ln \vartheta_2(x + m + n \varrho i)}{dx} = \frac{d \ln \vartheta_2(x)}{dx} - 2n \pi i, \tag{51}$$

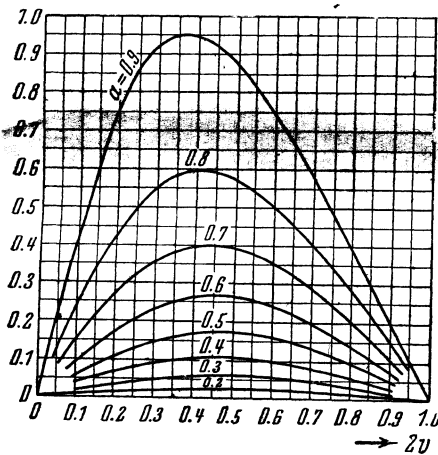
$$\frac{d \ln \vartheta_3(x + m + n \varrho i)}{dx} = \frac{d \ln \vartheta_3(x)}{dx} - 2n \pi i. \tag{52}$$

Из этих формул видно, что: 1) логарифмические производные от функций тета суть периодические функции с периодом, равным единице; 2) при увеличении аргумента на величину, равную ϱi они уменьшаются на $2\pi i$.

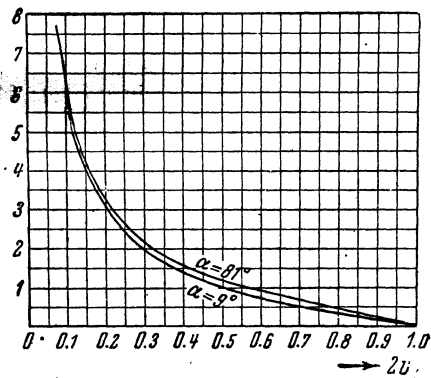
Отметим, что

$$\frac{d \ln \vartheta_0(x)}{dx} = 2K \frac{d \ln \Theta(u)}{du} = 2K \operatorname{zn}(u), \tag{53}$$

Таблицы значений логарифмических производных от функций тета даются обычно вместе с таблицами этих функций. Графики логарифмических производных функций $\vartheta_0(2v)$ и $\vartheta_1(2v)$ приведены на фиг. 35 и 36.



Фиг. 35



Фиг. 36

§ 8. Приложение функций тета к интегрированию эллиптических функций Якоби. Отметим некоторые интегралы от функций Якоби, выражающиеся через функции тета:

$$\int_0^u \frac{dx}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x \frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} \right\} \quad (a > u), \tag{54}$$

здесь (и в дальнейшем)

$$x = \frac{u}{2K}, \quad a = \frac{a}{2K},$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x \frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)} \right\} \quad (a > u), \tag{55}$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x \frac{\vartheta_2'(a)}{\vartheta_2(a)} \right\} \quad (a > u), \tag{56}$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x \frac{\vartheta_3'(a)}{\vartheta_3(a)} \right\} \quad (a > u), \tag{57}$$

$$\int_u^K \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)} + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} \right\} \quad (u > a), \quad (58)$$

$$\int_u^K \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)} + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)} \right\} \quad (u > a), \quad (59)$$

$$\int_u^K \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)} + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)} \right\} \quad (u > a), \quad (60)$$

$$\int_u^K \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)} + \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)} \right\} \quad (u > a); \quad (61)$$

$$\int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ x \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(a+x)}{\vartheta_0(a-x)} \right\} \quad (u < a), \quad (62)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ x \frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(a+x)}{\vartheta_0(a-x)} \right\} \quad (u < a), \quad (63)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 u} = -\frac{\operatorname{dn} a}{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} \left\{ x \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(a+x)}{\vartheta_0(a-x)} \right\} \quad (u < a), \quad (64)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 u} = -\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a} \left\{ x \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(a+x)}{\vartheta_0(a-x)} \right\} \quad (u < a). \quad (65)$$

Некоторые интегралы очень удобно выражаются через тета-функции от комплексного аргумента.

Для удобства письма положим:

$$\operatorname{sn}(u, k') = \operatorname{sn}_1 u, \quad \operatorname{cn}(u, k') = \operatorname{cn}_1 u, \quad \operatorname{dn}(u, k') = \operatorname{dn}_1 u, \\ a_1 = \frac{1}{2} \varrho - a, \quad a_1 = K' - a.$$

В таком случае будем иметь соотношения:

$$\int_0^u \frac{du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn}_1 a}{k'^2 \operatorname{sn}_1 a \operatorname{cn} a} \left\{ x i \frac{\vartheta'_2(\alpha_1 i)}{\vartheta_2(\alpha_1 i)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - \alpha_1 i)}{\vartheta_3(x + \alpha_1 i)} \right\}, \quad (66)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k'^2 \operatorname{sn}_1 a \operatorname{cn}_1 a \operatorname{dn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta'_3(\alpha_1 i)}{\vartheta_3(\alpha_1 i)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - \alpha_1 i)}{\vartheta_3(x + \alpha_1 i)} \right\}, \quad (67)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{\operatorname{sn}_1 a}{\operatorname{cn}_1 a \operatorname{dn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta'_0(\alpha_1 i)}{\vartheta_0(\alpha_1 i)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - \alpha_1 i)}{\vartheta_3(x + \alpha_1 i)} \right\}, \quad (68)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{cn}_1 a}{\operatorname{sn}_1 a \operatorname{dn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta'_1(\alpha_1 i)}{\vartheta_1(\alpha_1 i)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - \alpha_1 i)}{\vartheta_3(x + \alpha_1 i)} \right\}, \quad (69)$$

$$\int_0^u \frac{du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a_1 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn}_1 a_1}{k^2 \operatorname{sn}_1 a_1 \operatorname{cn}_1 a_1} \left\{ x i \frac{\vartheta'_2(ai)}{\vartheta_2(ai)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - ai)}{\vartheta_3(x + ai)} \right\}, \quad (66')$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}_1 a_1 \operatorname{cn}_1 a_1 \operatorname{dn}_1 a_1} \left\{ x i \frac{\vartheta_3'(ai)}{\vartheta_3(ai)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_3(x - ai)}{\vartheta_3(x + ai)} \right\}, \quad (67')$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a_1 \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{\operatorname{sn}_1 a_1}{\operatorname{cn}_1 a_1 \operatorname{dn}_1 a_1} \left\{ x i \frac{\vartheta_0'(ai)}{\vartheta_0(ai)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - ai)}{\vartheta_3(x + ai)} \right\}, \quad (68')$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{1 - \operatorname{dn}_1^2 a_1 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{cn}_1 a_1}{\operatorname{sn}_1 a_1 \operatorname{dn}_1 a_1} \left\{ x i \frac{\vartheta_1'(ai)}{\vartheta_1(ai)} - \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_3(x - ai)}{\vartheta_3(x + ai)} \right\}, \quad (69')$$

$$\int_0^u \frac{du}{1 + k^2 \operatorname{tn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn}_1 a \operatorname{cn}_1 a}{\operatorname{dn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta_1'(ai)}{\vartheta_1(ai)} + \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(x + ai)}{\vartheta_0(x - ai)} \right\}, \quad (70)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 + k^2 \operatorname{tn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{-\operatorname{cn}^2 u}{k^2 \operatorname{dn} a_1 \operatorname{tn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta_0'(ai)}{\vartheta_0(ai)} + \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(x + ai)}{\vartheta_0(x - ai)} \right\}, \quad (71)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u \, du}{1 + k^2 \operatorname{tn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{cn}_1 a \operatorname{dn}_1 a}{k^2 \operatorname{sn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta_3'(ai)}{\vartheta_3(ai)} + \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(x + ai)}{\vartheta_0(x - ai)} \right\}, \quad (72)$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{1 + k^2 \operatorname{tn}_1^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{cn}_1 a}{\operatorname{sn}_1 a \operatorname{dn}_1 a} \left\{ x i \frac{\vartheta_2'(ai)}{\vartheta_2(ai)} + \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(x + ai)}{\vartheta_0(x - ai)} \right\}. \quad (73)$$

§ 9. Приложение функций тета к вычислению эллиптических интегралов 3-го рода. Вычисление эллиптического интеграла 3-го рода

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

подстановкой

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

приводится к вычислению интеграла

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u}. \quad (74)$$

Рассмотрим отдельные случаи согласно величине параметра n .

1. $n \leq -1$. В этом случае можно найти такое значение аргумента u , что

$$\operatorname{sn}^2 a = -\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \pi(\varphi, k, n) = \operatorname{sn}^2 a \int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}.$$

Интеграл вычисляется по формуле (54). Зная величину модуля, находим сначала K . Затем по амплитуде φ находим аргумент u . По величине n находим аргумент a и по нему определяем a . Величина x находится по аргументу u . Все дальнейшие вычисления по формуле (54) производятся с помощью таблиц эллиптических функций Якоби и функций тета.

2. $-1 \leq n \leq -k^2$. Определяем аргумент a по формуле

$$dn^2(a, k') = -n.$$

Интеграл

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{1 - dn^2(a, k') \operatorname{sn}^2 u}$$

может быть вычислен по формуле (66).

3. $-k^2 \leq n \leq 0$. Определяем аргумент a по формуле

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a = -n.$$

Интеграл

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

может быть вычислен по формуле (62).

4. $0 \leq n$. Определяем аргумент по формуле:

$$k^2 \operatorname{tn}^2(a, k') = n.$$

Интеграл

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{1 + k^2 \operatorname{tn}^2(a, k') \operatorname{sn}^2 u}$$

вычисляется по формуле (70).

ГЛАВА IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

§ 1. Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Вейерштрасса. Эллиптический интеграл 1-го рода

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

где

$$P(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

может быть преобразован к виду

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}, \quad (1)$$

посредством подстановки

$$x = c_k + \frac{6P'(c_k)}{24z - P''(c_k)}, \quad (2)$$

где c_k один из корней многочлена $P(x)$.

Величины g_2 и g_3 вычисляются по формулам

$$g_2 = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3, \quad (3)$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

где

$$P(x) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3,$$

приводится к виду (1) посредством подстановки

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0}z, \quad (5)$$

при этом

$$g_2 = -\frac{a_0}{4} P' \left(-\frac{a_1}{a_0} \right), \quad (6)$$

$$g_3 = \frac{a_0^3}{16} P \left(-\frac{a_1}{a_0} \right). \quad (7)$$

Форма (1) для интеграла 1-го рода была введена Вейерштрассом и носит название канонической формы Вейерштрасса. Величины g_2 и g_3 называются инвариантами.

Положим, что

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3). \quad (8)$$

Относительно корней e_1, e_2, e_3 , условимся, что в том случае, когда все они вещественны $e_1 > e_2 > e_3$, в том же случае, когда только один корень вещественный, будем считать его равным e_1 .

Функция $\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}$ есть двузначная функция. При обходе одной из точек e_1, e_2, e_3 она изменяет свой знак. Если плоскость комплексной переменной разрезать от точки e_2 до точки e_3 и от точки e_1 до ∞ , то на разрезанной плоскости функция будет оставаться однозначной.

На плоскости с разрезами интеграл

$$u = \int_s^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

есть однозначная функция комплексной переменной s . Если при переходе из ∞ в точку s допускать переход разрезам, то интеграл становится бесконечно многозначной функцией s совершенно так же, как это было отмечено выше для интеграла в нормальной форме Лежандра (глава I, § 8). Все различные значения, получаемые интегралом при

различных выборах пути интегрирования Γ , ведущего из бесконечности в точку s , получаются из интеграла, взятого по определенному пути Γ_0 (фиг. 37), не пересекающему разрезы, согласно формуле

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \pm \int_{\Gamma_0} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} + 2m\omega + 2n\omega', \quad (9)$$

где m и n — целые числа, а

$$\omega = \int_{e_1}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} \quad (10)$$

и

$$\omega' = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{-4z^3 + g_2z + g_3}} = i \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{-4z^3 + g_2z + g_3}}. \quad (11)$$

Отметим, что

$$\omega + \omega' = \int_{e_3}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

При этом значение радикала выбирается так, чтобы в случае вещественных g_2 и g_3 при $z > e_1$ он имел положительный знак.

§ 2. Функции $\wp(u)$. Функция $\wp(u)$ получается в результате обращения интеграла

$$u = \int_s^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}, \quad (12)$$

где интегрирование производится по какому-либо пути из данной точки s до бесконечности:

$$s = \wp(u). \quad (13)$$

Основные свойства функции $\wp(u)$ вытекают из равенства (9). Действительно, из равенства (9) следует, что:

$$\wp(\pm u + 2m\omega + 2n\omega') = s \quad \text{и} \quad \wp(u = s,$$

т. е.

$$\wp(\pm u + 2m\omega + 2n\omega') = \wp(u). \quad (14)$$

Если в этом равенстве положить $m = n = 0$, то окажется, что

$$\wp(-u) = \wp(u), \quad (15)$$

т. е. функция $\wp(u)$ есть функция четная.

Далее, из равенства (14) видно, что величины 2ω и $2\omega'$ служат основными периодами функции $\wp(u)$:

$$\wp(u + 2\omega) = \wp(u), \quad (16)$$

$$\wp(u + 2\omega') = \wp(u). \quad (17)$$

Таким образом, функция $\wp(u)$ есть функция двояко периодическая.

При $s \rightarrow \infty$ возможные значения u стремятся к $2m\omega + 2n\omega'$. Одно из них стремится к нулю. Таким образом при $u = 2m\omega + 2n\omega'$ функция $s = \wp(u)$ обращается в бесконечность. Полюсами функции $\wp(u)$ служат значения

$$u_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega'. \quad (18)$$

При больших значениях s подинтегральная функция разлагается в ряд по убывающим значениям z и

$$u = \int_s^\infty \left(\frac{1}{2\sqrt{z^3}} + \frac{g_2}{16z^{\frac{7}{2}}} + \dots \right) dz = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{g_2}{40s\sqrt{s}} + \dots \approx \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Таким образом при малых значениях u имеем

$$s = \wp(u) \approx \frac{1}{u^2}. \quad (19)$$

Полюсы функции $\wp(u)$ второго порядка. Вычет, соответствующий полюсу, равен нулю.

Отметим, что

$$\wp(\omega) = e_1, \quad \wp(\omega') = e_3, \quad \wp(\omega + \omega') = e_2. \quad (20)$$

О распределении значений функции $\wp(u)$ можно составить представление по фиг. 38. Фигура соответствует значениям инвариантов $g_2 = 1.026$ и $g_3 = 0.092$; при этом $2\omega = 4.00$ и $2\omega' = 1.50i$.

Функцию $\wp(u)$ можно представить в виде двойного ряда

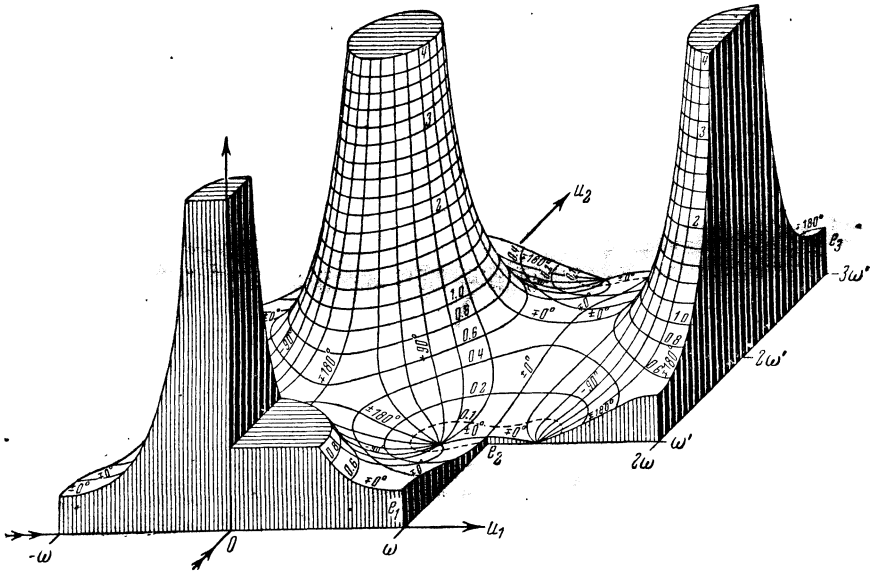
$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right\}. \quad (21)$$

Знак $\sum_{m,n}$ обозначает, что суммирование распространяется на все целые числа m и n за исключением случая, когда m и n одновременно равны нулю.

Инварианты g_2 и g_3 выражаются рядами

$$g_2 = 60 \sum_{m, n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4}, \quad (22)$$

$$g_3 = 140 \sum_{m, n} \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}. \quad (23)$$



Фиг. 33

Функция $\wp(u)$ может быть разложена также в ряд по степеням u

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + a_1 u^2 + a_2 u^4 + a_3 u^6 + \dots \quad (24)$$

Коэффициенты ряда (24) определяются последовательно по формуле

$$(n-2)(2n+3)a_n = 3 \sum_{s=2}^{n-2} a_s a_{n-s}. \quad (25)$$

Отметим, что

$$a_1 = \frac{g_2}{20}, \quad a_2 = \frac{g_3}{28}, \quad a_3 = \frac{g_2^2}{1200}, \quad a_4 = \frac{3g_2 g_3}{6160},$$

$$a_5 = \frac{1}{208} \left(\frac{1}{49} g_2^2 + \frac{g_2^3}{750} \right), \quad a_6 = \frac{g_2^3 g_3}{18480}.$$

§ 3. Производная от функции $\wp(u)$. Производная от функции $\wp(u)$ представляется в виде суммы двойного ряда.

$$\wp'(u) = -2 \sum_{m, n} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^3}, \quad (26)$$

где суммирование распространяется на все целые значения m, n положительные, отрицательные и равные нулю. Функция $\wp'(u)$ есть функция

нечетная с периодами 2ω и $2\omega'$. Полюсы ее те же, что и функции $\wp(u)$. В окрестности полюса $u = 0$ функция $\wp'(u)$ разлагается в ряд.

$$\begin{aligned} \wp'(u) = & -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \frac{g_3 u^3}{7} + \frac{g_2^2 u^5}{200} + \frac{3g_2 g_3}{770} u^7 + \\ & + \frac{1}{104} \left(\frac{5}{49} g_3^2 + \frac{g_2^3}{150} \right) u^9 + \frac{g_2^3 g_3}{1540} u^{11} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Полюсы $\wp'(u)$ третьего порядка и вычеты равны нулю.

Значения u , равные

$$(2m+1)\omega + 2n\omega', \quad 2m\omega + (2n+1)\omega', \quad (2m+1)\omega + (2n+1)\omega',$$

где m и n — целые числа, служат нулями функции $\wp'(u)$.

Все нули $\wp'(u)$ первой кратности.

Между функциями $\wp'(u)$ и $\wp(u)$ существует зависимость

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3. \quad (28)$$

Отметим также, что

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2, \quad (29)$$

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u), \quad (30)$$

$$\wp^{(IV)}(u) = 12 \left(10\wp^3(u) - \frac{3}{2}g_2\wp(u) - g_3 \right). \quad (31)$$

§ 4. Формула сложения для функции $\wp(u)$. Для функции $\wp(u)$ имеет место формула сложения

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2 - \wp(u) - \wp(v). \quad (32)$$

Из этой формулы следует, что

$$\wp(u-v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2 - \wp(u) - \wp(v), \quad (33)$$

$$\wp(u) - \wp(v) = - \frac{\wp\left(\frac{u+v}{2}\right)\wp'\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\left\{ \wp\left(\frac{u+v}{2}\right) - \wp\left(\frac{u-v}{2}\right) \right\}^2}. \quad (34)$$

Отметим частные случаи формулы сложения:

$$\wp(u+\omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u) - e_1}, \quad (35)$$

$$\wp(u+\omega+\omega') = e_2 + \frac{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{\wp(u) - e_2}, \quad (36)$$

$$\wp(u+\omega') = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(u) - e_3}. \quad (37)$$

Формула

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2 \left(\wp(u)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2 \right) (\wp(u) + \wp(v)) - g_3}{(\wp(u) - \wp(v))^2}, \quad (38)$$

вытекающая из равенств (32) и (33), позволяет установить соотношение

$$\wp(nu) + \wp((n-2)u) = \frac{2 \left[\wp((n-1)u)\wp(u) - \frac{1}{4}g_2 \right] [\wp((n-1)u) + \wp(u)] - g_3}{[\wp((n-1)u) - \wp(u)]^2}, \quad (39)$$

пользуясь которым можно последовательно вычислять функции

$$\wp(3u), \quad \wp(4u), \dots$$

В частности имеем

$$\wp(2u) = \frac{\left(6\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2\right)^2}{4\wp'^2(u)} - 2\wp(u). \quad (40)$$

Соотношение (40) может быть представлено в ином виде:

$$\wp(2u) - \wp(u) = \frac{-3\wp^4(u) + \frac{3}{2}g_2\wp^2(u) + 3g\wp_3(u) + \frac{1}{16}g_2^2}{\wp'^2(u)}. \quad (41)$$

§ 5. Функция $\zeta(u)$. Функция $\zeta(u)$ выражается бесконечным рядом

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'} + \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{u}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right\}, \quad (42)$$

где сумма распространяется на все целые значения чисел m и n за исключением случая, когда m и n одновременно равны нулю.

Функция $\zeta(u)$ есть функция нечетная:

$$\zeta(-u) = -\zeta(u). \quad (43)$$

При увеличении аргумента u на величину, равную периоду функции $\wp(u)$, функция $\zeta(u)$ увеличивается на постоянное слагаемое:

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta, \quad (44)$$

$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta', \quad (45)$$

где

$$\eta = \zeta(\omega), \quad \eta' = \zeta(\omega').$$

Равенства (44) и (45) представляют собой частные случаи соотношения

$$\zeta(u + 2m\omega + 2n\omega') = \zeta(u) + 2m\eta + 2n\eta'. \quad (46)$$

Между числами ω , ω' , η и η' существует соотношение

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i,$$

если

$$\operatorname{Re} \frac{\omega'}{i\omega} > 0. \quad (47)$$

Функция $\zeta(u)$ связана с функцией $\wp(u)$ соотношением

$$\frac{d\zeta(u)}{du} = -\wp(u). \quad (48)$$

или

$$\int \wp(u) du = -\zeta(u). \quad (49)$$

Функция $\zeta(u)$ имеет полюсы первого порядка в точках

$$u_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega', \quad (50)$$

где m и n — целые числа. Вычет, соответствующий каждому полюсу, равен единице.

В окрестности полюса $u = 0$ функция $\zeta(u)$ разлагается в ряд по степеням u :

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_2 u^5}{140} - \frac{g_2^2 u^7}{8400} - \frac{g_2 g_3}{18480} u^9 - \dots \quad (51)$$

Для функции $\zeta(u)$ имеет место формула сложения

$$\zeta(u + v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \quad (52)$$

Из формулы (52) следует, что

$$\zeta(\omega + \omega') = \zeta(\omega) + \zeta(\omega') = \eta + \eta'. \quad (52')$$

Последнее в соединении с равенством (46) показывает, что

$$\zeta(p\omega + q\omega') = p\eta + q\eta', \quad (53)$$

где p и q —целые числа.

Назовем числа 2η и $2\eta'$ периодами второго рода. Из соотношения (53) следует, что в том случае, когда основные периоды 2ω и $2\omega'$ заменяются периодами

$$2\bar{\omega} = 2a\omega + 2\beta\omega', \quad 2\bar{\omega}' = 2\gamma\omega + 2\delta\omega', \quad (a\delta - \beta\gamma = 1),$$

периоды второго рода изменяются на периоды $2\bar{\eta}$ и $2\bar{\eta}'$ согласно той же подстановке

$$2\bar{\eta} = 2a\eta + 2\beta\eta', \quad 2\bar{\eta}' = 2\gamma\eta + 2\delta\eta'.$$

§ 6. Функция $\sigma(u)$. Функция $\sigma(u)$ представляется в виде бесконечного произведения.

$$\sigma(u) = u \prod'_{m, n} \left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2n\omega'} \right) e^{\frac{u}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{u^2}{2(2m\omega + 2n\omega')^2}}. \quad (54)$$

Знак \prod' обозначает, что произведение распространяется на все целые значения m и n за исключением того случая, когда m и n одновременно обращаются в нуль.

Из равенства (54) ясно видно, что значения

$$u_{m, n} = 2m\omega + 2n\omega' \quad (55)$$

являются нулями функции $\sigma(u)$. Все нули функции $\sigma(u)$ первого порядка.

Функция $\sigma(u)$ есть функция нечетная:

$$\sigma(-u) = -\sigma(u). \quad (56)$$

При увеличении аргумента u на величину, равную периоду функции $\wp(u)$, функция $\sigma(u)$ приобретает множитель:

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u + \omega)} \sigma(u), \quad (57)$$

$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u + \omega')} \sigma(u). \quad (58)$$

Равенства (57) и (58) представляют собой частные случаи соотношения

$$\sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{m+n+m\eta} e^{(2m\eta + 2n\eta')(u + m\omega + n\omega')} \sigma(u). \quad (59)$$

Функция $\sigma(u)$ связана с функцией $\zeta(u)$ соотношением

$$\frac{d \ln \sigma(u)}{du} = \zeta(u). \quad (60)$$

Функцию $\sigma(u)$ можно также представить в виде бесконечного ряда

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2 u^3}{240} - \frac{g_3 u^5}{840} - \frac{g_4 u^7}{161280} \dots \quad (61)$$

сходящегося при всех значениях u .

Между функциями $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ существует зависимость

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}, \quad (62)$$

из которой следует, что

$$\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}, \quad (63)$$

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \quad (64)$$

В заключение отметим, что функция $\sigma(u)$ может быть представлена в виде

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2 \frac{\pi n \omega'}{\omega}} \right). \quad (65)$$

Введя обозначение

$$x = \frac{u}{2\omega}, \quad \varrho i = \frac{\omega'}{\omega}, \quad q = e^{-\pi \varrho} \quad (\varrho > 0),$$

можно представить разложение (65) в виде

$$\sigma(u) = e^{2\eta\omega x^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n} \cos 2\pi x + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}. \quad (66)$$

Величина $2\eta\omega$ может быть представлена в виде ряда

$$2\eta\omega = \pi^2 \left[\frac{1}{6} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} \right]. \quad (67)$$

§ 7. Частный случай $g_2=0, g_3=1$. В этом частном случае между $\wp'(u)$ и $\wp(u)$ имеет место соотношение

$$\wp'^2(u, 0, 1) = 4\wp^3(u, 0, 1) - 1. \quad (68)$$

Значения e_1, e_2, e_3 определяются равенствами

$$e_1 = \wp(\omega) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0.6300, \quad (69)$$

$$e_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}, \quad e_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}. \quad (70)$$

Один из периодов, как это следует из равенства (10) настоящей главы, вещественный. Величина половины вещественного периода

$$\omega = 1.52995. \quad (71)$$

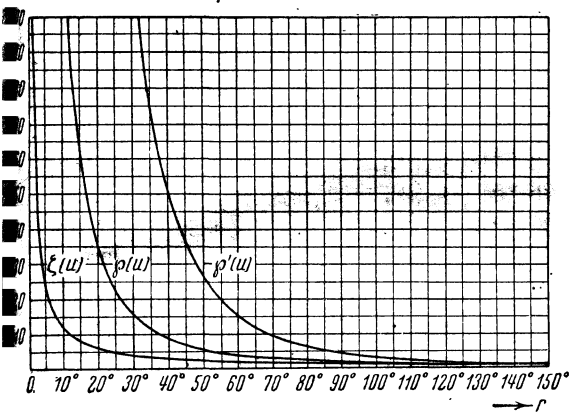
В рассматриваемом случае делят вещественный период 2ω на 360 частей, называя полученную долю градусом. Вместо аргумента u рассматривают величину

$$r = \frac{180u}{\omega},$$

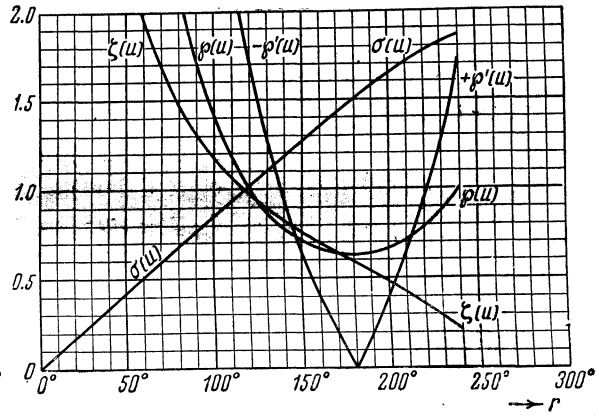
выражающуюся в градусах.

На фиг. 39 даны графики функций $\wp(u)$, $-\wp'(u)$, $\zeta(u)$ для r , изменяющегося от 0 до 150° .

На фиг. 40 даны графики функций $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ для значений r от 0 до 250° . Масштаб ординат на второй фигуре в 50 раз больше, чем на первой.



Фиг. 39



Фиг. 40

В рассматриваемом случае вычислены таблицы значений функций $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$ для значений r через 1° в интервале от 0 до 240° . Такие таблицы можно найти в справочнике Jahake-Emde, Functionentafeln. Значения функций $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ приведены с четырьмя знаками после запятой.

§ 8. Функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$. Функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$ определяются разложениями:

$$\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2}e_1 u^2} \prod_{m, n} \left(1 - \frac{u}{(2m+1)\omega + 2n\omega'}\right) e^{\frac{u}{(2m+1)\omega + 2n\omega'} + \frac{u^2}{2((2m+1)\omega + 2n\omega')^2}}, \quad (72)$$

$$\sigma_2(u) = e^{-\frac{1}{2}e_2 u^2} \prod_{m, n} \left(1 - \frac{u}{(2m+1)\omega + (2n+1)\omega'}\right) e^{\frac{u}{(2m+1)\omega + (2n+1)\omega'} + \frac{u^2}{2(2m\omega + (2n+1)\omega')^2}}, \quad (73)$$

$$\sigma_3(u) = e^{-\frac{1}{2}e_3 u^2} \prod_{m, n} \left(1 - \frac{u}{2m\omega + (2n+1)\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega + (2n+1)\omega'} + \frac{u^2}{2(2m\omega + (2n+1)\omega')^2}}, \quad (74)$$

где произведение \prod распространяется на все целые (положительные, отрицательные или равные нулю) значения m и n . Из разложений (72), (73), (74) видно, что нулями для функции $\sigma_1(u)$ служат значения

$$u_{m, n} = (2m+1)\omega + 2n\omega',$$

для функций $\sigma_2(u)$ —значения

$$u_{m, n} = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega',$$

и для функции $\sigma_3(u)$ —значения

$$u_{m, n} = 2m\omega + (2n+1)\omega'.$$

Функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ суть функции четные:

$$\sigma_1(-u) = \sigma_1(u), \quad \sigma_2(-u) = \sigma_2(u), \quad \sigma_3(-u) = \sigma_3(u). \quad (75)$$

Введем для краткости письма обозначения

$$\omega'' = \omega + \omega', \quad \eta'' = \eta + \eta'.$$

Заметим, что $\eta'' = \zeta(\omega'')$, как то следует из равенства (52).

Из равенства (47) следует, что

$$\eta\omega'' - \eta''\omega = \frac{\pi i}{2}, \quad \eta''\omega' - \eta'\omega'' = \frac{\pi i}{2}.$$

При увеличении аргумента u на значения 2ω , $2\omega'$, $2\omega''$ функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ изменяются согласно формулам

$$\sigma_1(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma_1(u), \quad (76)$$

$$\sigma_2(u + 2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)} \sigma_2(u), \quad (76')$$

$$\sigma_3(u + 2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)} \sigma_3(u), \quad (76'')$$

$$\sigma_1(u + 2\omega') = e^{2\eta'(u+\omega')} \sigma_1(u), \quad (77)$$

$$\sigma_2(u + 2\omega') = e^{2\eta'(u+\omega')} \sigma_2(u), \quad (77')$$

$$\sigma_3(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \sigma_3(u), \quad (77'')$$

$$\sigma_1(u + 2\omega'') = e^{2\eta''(u+\omega'')} \sigma_1(u), \quad (78)$$

$$\sigma_2(u + 2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')} \sigma_2(u), \quad (78')$$

$$\sigma_3(u + 2\omega'') = e^{2\eta''(u+\omega'')} \sigma_3(u). \quad (78'')$$

Отмеченные формулы являются частными случаями соотношений

$$\sigma_1(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+2m\omega+2n\omega')} \sigma_1(u), \quad (79)$$

$$\sigma_2(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+2m\omega+2n\omega')} \sigma_2(u), \quad (79')$$

$$\sigma_3(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+2m\omega+2n\omega')} \sigma_3(u). \quad (79'')$$

Функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ разлагаются в ряды

$$\sigma_1(u) = 1 - \frac{1}{2} e_k u^2 - \frac{1}{48} (6e_k^2 - g_k) u^4 - \dots, \quad (80)$$

сходящиеся при всех значениях u .

В заключение заметим, что функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$ могут быть представлены в виде бесконечных произведений

$$\sigma_1(u) = e^{2\eta\omega x^2} \cos \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2n} \cos 2\pi x + q^{4n}}{(1 + q^{2n})^2}, \quad (81)$$

$$\sigma_2(u) = e^{2\eta\omega x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi x + q^{4n-2}}{(1 + q^{2n-1})^2}, \quad (82)$$

$$\sigma_3(u) = e^{2\eta\omega x^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi x + q^{4n-2}}{(1 - q^{2n-1})^2}, \quad (83)$$

где

$$x = \frac{u}{2\omega}, \quad \rho i = \frac{\omega'}{\omega}, \quad q = e^{-\pi\rho} \quad (\rho > 0).$$

Из этих разложений можно вывести, что

$$2\eta\omega = -2e_1\omega^2 + \pi^2 \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n}}{(1 + q^{2n})^2} \right\}, \quad (84)$$

$$2\eta\omega = -2e_2\omega^2 + \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1 + q^{2n-1})^2}, \quad (85)$$

$$2\eta\omega = -2e_3\omega^2 - \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}. \quad (86)$$

§ 9. Соотношения между функциями $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ и функцией $\sigma(u)$.
Функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ связаны с функцией $\sigma(u)$ соотношениями:

$$\sigma_1(u) = e^{-\eta u} \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} = e^{\eta u} \frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma(\omega)}, \quad (87)$$

$$\sigma_2(u) = e^{-\eta''u} \frac{\sigma(\omega''+u)}{\sigma(\omega'')} = e^{\eta''u} \frac{\sigma(\omega''-u)}{\sigma(\omega'')}, \quad (88)$$

$$\sigma_3(u) = e^{-\eta'u} \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma(\omega')} = e^{\eta'u} \frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma(\omega')}. \quad (89)$$

Из формулы (62), если в ней положить последовательно u равным ω , ω'' и ω' , и равенств (87), (88), (89) следует, что

$$\sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}, \quad (90)$$

$$\sqrt{\wp(u) - e_2} = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}, \quad (91)$$

$$\sqrt{\wp(u) - e_3} = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}. \quad (92)$$

Из соотношений (90), (91) и (92) вытекают следующие формулы:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{e^{-\eta''\omega} \sigma(\omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega'')}, \quad (93)$$

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega'')}{\sigma(\omega'')} = -\frac{e^{\eta''\omega''} \sigma(\omega')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega'')}, \quad (94)$$

$$\sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega')}{\sigma(\omega')} = -\frac{e^{-\eta\omega'} \sigma(\omega'')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega')}, \quad (95)$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{e^{-\eta'\omega} \sigma(\omega'')}{\sigma(\omega) \sigma(\omega')}, \quad (96)$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega'')}{\sigma(\omega'')} = -\frac{e^{\eta'\omega''} \sigma(\omega)}{\sigma(\omega') \sigma(\omega'')}, \quad (97)$$

$$\sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\sigma_2(\omega')}{\sigma(\omega')} = \frac{e^{\eta''\omega'} \sigma(\omega)}{\sigma(\omega') \sigma(\omega'')}. \quad (98)$$

Эти соотношения однозначно определяют значения корней $\sqrt{e_1 - e_2}$; $\sqrt{e_2 - e_3}$, ..., $\sqrt{e_3 - e_2}$.

При условии $\operatorname{Re}\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ имеем из этих формул

$$\sqrt{e_3 - e_2} = -i \sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\sqrt{e_2 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_2}. \quad (99)$$

Из соотношений (93), (94), (95), (96), (97), (98) следует, что

$$\sigma(\omega) = \frac{e^{\frac{1}{2}\eta\omega}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \quad (100)$$

$$\sigma(\omega'') = \frac{\sqrt{i} e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3} \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \quad \left(\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i}\right) \quad (101)$$

$$\sigma(\omega') = \frac{ie^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3} \sqrt[4]{e_1 - e_3}}. \quad (102)$$

Необходимо при этом заметить, что три корня

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3}, \quad \sqrt[4]{e_1 - e_3}, \quad \sqrt[4]{e_1 - e_2}$$

могут принимать лишь такие значения, квадраты которых равняются соответственно

$$\sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_2}.$$

Последние значения однозначно определяются равенствами (93), (94), (95), (96), (97), (98). Таким образом корни четвертой степени могут получить не четыре, а только два значения. Если выбрать произвольно значение одного из корней, то возможные значения двух прочих однозначно определяются согласно равенствам (100), (101), (102).

Отметим еще, что из соотношений (90), (91), (92) вытекают соотношения между $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$:

$$\sigma_2^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_2 - e_3) \sigma^2(u) = 0, \quad (103)$$

$$\sigma_3^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_3 - e_1) \sigma^2(u) = 0, \quad (104)$$

$$\sigma_1^2(u) - \sigma^2(u) + (e_1 - e_2) \sigma^2(u) = 0, \quad (105)$$

$$(e_2 - e_3) \sigma_1^2(u) + (e_3 - e_1) \sigma_2^2(u) + (e_1 - e_2) \sigma_3^2(u) = 0, \quad (106)$$

и

$$\sigma(2u) = 2\sigma(u) \sigma_1(u) \sigma_2(u) \sigma_3(u). \quad (107)$$

Укажем еще на одно соотношение между $\wp'(u)$ и функциями сигма:

$$\wp'(u) = -2 \frac{\sigma_1(u) \sigma_2(u) \sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}. \quad (108)$$

§ 10. Дифференциальные уравнения для отношений функций сигма. Между отношениями функций сигма существуют следующие зависимости:

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)} \right\} = \frac{\sigma_2(u) \sigma_3(u)}{\sigma_1^2(u)}, \quad (109)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)} \right\} = \frac{\sigma_3(u) \sigma_1(u)}{\sigma_2^2(u)}, \quad (110)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} \right\} = \frac{\sigma_1(u) \sigma_2(u)}{\sigma_3^2(u)}. \quad (111)$$

Таким образом отношения

$$x = \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)}, \quad y = \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}, \quad z = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} \quad (112)$$

являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{du} = \frac{x^2}{yz}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{y^2}{zx}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{z^2}{xy}. \quad (113)$$

Кроме того имеем соотношения:

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} \right\} = - \frac{\sigma_2(u) \sigma_3(u)}{\sigma^2(u)}, \quad (114)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} \right\} = - \frac{\sigma_3(u) \sigma_1(u)}{\sigma^2(u)}, \quad (115)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} \right\} = - \frac{\sigma_1(u) \sigma_2(u)}{\sigma^2(u)}. \quad (116)$$

Отношения

$$x = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}, \quad y = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}, \quad z = \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} \quad (117)$$

являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{du} = -yz, \quad \frac{dy}{du} = -zx, \quad \frac{dz}{du} = -xy. \quad (118)$$

Отметим соотношения:

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)} \right\} = (e_2 - e_1) \frac{\sigma(u) \sigma_3(u)}{\sigma_2^2(u)}, \quad (119)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} \right\} = (e_3 - e_2) \frac{\sigma(u) \sigma_1(u)}{\sigma_3^2(u)}, \quad (120)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)} \right\} = (e_1 - e_3) \frac{\sigma(u) \sigma_2(u)}{\sigma_1^2(u)}, \quad (121)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)} \right\} = (e_1 - e_2) \frac{\sigma(u) \sigma_3(u)}{\sigma_1^2(u)}, \quad (122)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)} \right\} = (e_2 - e_3) \frac{\sigma(u) \sigma_1(u)}{\sigma_2^2(u)}, \quad (123)$$

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} \right\} = (e_3 - e_1) \frac{\sigma(u) \sigma_2(u)}{\sigma_3^2(u)}; \quad (124)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - (e_2 - e_1) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\} \left\{ 1 - (e_3 - e_1) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\}, \quad (125)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - (e_3 - e_2) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\} \left\{ 1 - (e_1 - e_2) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\}, \quad (126)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - (e_1 - e_3) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\} \left\{ 1 - (e_2 - e_3) \frac{\sigma^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\}; \quad (127)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\} \left\{ e_1 - e_3 + (e_3 - e_2) \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\}, \quad (128)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\} \left\{ e_2 - e_1 + (e_1 - e_3) \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\}, \quad (129)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\} \left\{ e_3 - e_2 + (e_2 - e_1) \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\}; \quad (130)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\} \left\{ e_2 - e_3 + (e_3 - e_1) \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_1^2(u)} \right\}, \quad (131)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\} \left\{ e_3 - e_1 + (e_1 - e_2) \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma_2^2(u)} \right\}, \quad (132)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ 1 - \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\} \left\{ e_1 - e_2 + (e_2 - e_3) \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)} \right\}; \quad (133)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_1 - e_2 \right\} \left\{ \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_1 - e_3 \right\}, \quad (134)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_2 - e_3 \right\} \left\{ \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_2 - e_1 \right\}, \quad (135)$$

$$\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} \right) \right\}^2 = \left\{ \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_3 - e_1 \right\} \left\{ \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)} + e_3 - e_2 \right\}. \quad (136)$$

Из соотношений (125), (129), (132), (134) следует, что дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dx}{du} \right)^2 = \{1 - (e_2 - e_1)x^2\} \{1 - (e_3 - e_1)x^2\} \quad (137)$$

имеет решения

$$x = \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)} \quad (138)$$

и

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_1} \sqrt{e_3 - e_1}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}. \quad (139)$$

Из соотношений (126), (130), (133) и (135) следует, что дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \{1 - (e_3 - e_2)x^2\}\{1 - (e_1 - e_2)x^2\} \quad (140)$$

имеет решения

$$x = \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_2}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} \quad (141)$$

и

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_2} \sqrt{e_1 - e_2}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}. \quad (142)$$

Из соотношений (127), (131), (134), (136) следует, что дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \{1 - (e_1 - e_3)x^2\}\{1 - (e_2 - e_3)x^2\} \quad (143)$$

имеет решения

$$x = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)} \quad (144)$$

и

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}. \quad (145)$$

§ 11. Изменения функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при изменении аргумента на величину ω , ω' , ω'' . При изменении аргумента u на величину ω функции $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ изменяются следующим образом:

$$\sigma(u \pm \omega) = \pm e^{\pm \eta u} \sigma(\omega) \sigma_1(u) = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt[4]{e_1 - e_3}} e^{\pm \eta(u \pm \frac{1}{2}\omega)} \sigma_1(u), \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(u \pm \omega) &= \mp \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} e^{\pm \eta u} \sigma(\omega) \sigma(u) = \\ &= \mp \sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt[4]{e_1 - e_3} e^{\pm \eta(u + \frac{1}{2}\omega)} \sigma(u), \end{aligned} \quad (147)$$

$$\sigma_2(u \pm \omega) = \sqrt{e_1 - e_2} e^{\pm \eta u} \sigma(\omega) \sigma_3(u) = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} e^{\pm \eta(u \pm \frac{1}{2}\omega)} \sigma_3(u), \quad (148)$$

$$\sigma_3(u \pm \omega) = \sqrt{e_1 - e_3} e^{\pm \eta u} \sigma(\omega) \sigma_2(u) = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2}} e^{\pm \eta(u \pm \frac{1}{2}\omega)} \sigma_2(u). \quad (149)$$

Во всех этих формулах, равно как и в дальнейших, следует брать либо комбинацию верхних, либо комбинацию нижних знаков.

При изменении аргумента u на величину ω' происходят следующие изменения функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$:

$$\sigma(u \pm \omega') = \pm e^{\pm \eta' u} \sigma(\omega') \sigma_3(u) = \pm \frac{i}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt[4]{e_2 - e_3}} e^{\pm \eta' (u \pm \frac{1}{2} \omega')} \sigma_3(u), \quad (150)$$

$$\sigma_1(u \pm \omega') = \sqrt{e_3 - e_1} e^{\pm \eta' u} \sigma(\omega') \sigma_2(u) = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3}} e^{\pm \eta' (u \pm \frac{1}{2} \omega')} \sigma_2(u), \quad (151)$$

$$\sigma_2(u \pm \omega') = \sqrt{e_3 - e_2} e^{\pm \eta' u} \sigma(\omega') \sigma_1(u) = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} e^{\pm \eta' (u \pm \frac{1}{2} \omega')} \sigma_1(u), \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3(u \pm \omega') &= \mp \sqrt{e_3 - e_1} \sqrt{e_3 - e_2} e^{\pm \eta' u} \sigma(\omega') \sigma(u) = \\ &= \pm i \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt[4]{e_2 - e_3}} e^{\pm \eta' (u \pm \frac{1}{2} \omega')} \sigma(u). \end{aligned} \quad (153)$$

При изменении аргумента u на величину ω'' функции $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$ меняются согласно формулам:

$$\sigma(u \pm \omega'') = \pm e^{\pm \eta'' u} \sigma(\omega'') \sigma_2(u) = \pm \frac{\sqrt{i}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt[4]{e_2 - e_3}} e^{\pm \eta'' (u \pm \frac{1}{2} \omega'')} \sigma_2(u), \quad (154)$$

$$\sigma_1(u \pm \omega'') = \sqrt{e_2 - e_1} e^{\pm \eta'' u} \sigma(\omega'') \sigma_3(u) = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3}} e^{\pm \eta'' (u \pm \frac{1}{2} \omega'')} \sigma_3(u), \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(u \pm \omega'') &= \mp \sqrt{e_2 - e_1} \sqrt{e_2 - e_3} e^{\pm \eta'' u} \sigma(\omega'') \sigma(u) = \\ &= \mp \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt{i}} e^{\pm \eta'' (u \pm \frac{1}{2} \omega'')} \sigma(u), \end{aligned} \quad (156)$$

$$\sigma_3(u \pm \omega'') = \sqrt{e_2 - e_3} e^{\pm \eta'' u} \sigma(\omega'') \sigma_1(u) = \sqrt{i} \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} e^{\pm \eta'' (u \pm \frac{1}{2} \omega'')} \sigma_1(u). \quad (157)$$

На основании формул изменения функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при изменении аргумента на величину ω , ω' , ω'' легко построить формулы, дающие изменение отношений функций сигма при изменениях аргумента u на те же величины. Формулы эти имеют более простой вид.

$$\frac{\sigma(u \pm \omega)}{\sigma_1(u \pm \omega)} = \frac{-1}{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}, \quad (158)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega'')}{\sigma_1(u \pm \omega'')} = \pm \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_2}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}, \quad (159)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega')}{\sigma_1(u \pm \omega')} = \pm \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)}; \quad (160)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega)}{\sigma_2(u \pm \omega)} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \quad (161)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega'')}{\sigma_2(u \pm \omega'')} = \frac{-i}{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}, \quad (162)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega')}{\sigma_2(u \pm \omega')} = \pm \frac{i}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)} \quad (163)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega)}{\sigma_3(u \pm \omega)} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)}, \quad (164)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega'')}{\sigma_3(u \pm \omega'')} = \pm \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)}, \quad (165)$$

$$\frac{\sigma(u \pm \omega')}{\sigma_3(u \pm \omega')} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}, \quad (166)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega)}{\sigma_2(u \pm \omega)} = \mp \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \quad (167)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega'')}{\sigma_2(u \pm \omega'')} = \mp \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}, \quad (168)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega')}{\sigma_2(u \pm \omega')} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_1(u)}; \quad (169)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega)}{\sigma_3(u \pm \omega)} = \mp \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}, \quad (170)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega'')}{\sigma_3(u \pm \omega'')} = -i \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_1(u)}, \quad (171)$$

$$\frac{\sigma_1(u \pm \omega')}{\sigma_3(u \pm \omega')} = \mp \frac{i}{\sqrt{e_2 - e_3}} \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}; \quad (171')$$

$$\frac{\sigma_2(u \pm \omega)}{\sigma_3(u \pm \omega)} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)}, \quad (172)$$

$$\frac{\sigma_2(u \pm \omega'')}{\sigma_3(u \pm \omega'')} = \pm i \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)}, \quad (173)$$

$$\frac{\sigma_2(u \pm \omega')}{\sigma_3(u \pm \omega')} = \mp \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}. \quad (174)$$

При изменении аргумента на величину 2ω , $2\omega''$ или $2\omega'$ получаем соотношения

$$\frac{\sigma(u \pm 2\omega_k)}{\sigma_k(u \pm 2\omega_k)} = \frac{\sigma(u)}{\sigma_k(u)}, \quad (175)$$

$$\frac{\sigma(u \pm 2\omega_m)}{\sigma_k(u \pm 2\omega_m)} = -\frac{\sigma(u)}{\sigma_k(u)}, \quad (176)$$

$$\frac{\sigma_b(u \pm 2\omega_m)}{\sigma_1(u \pm 2\omega_m)} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma_1(u)}, \quad (177)$$

$$\frac{\sigma_k(u \pm 2\omega_k)}{\sigma_1(u \pm 2\omega_k)} = -\frac{\sigma_k(u)}{\sigma_1(u)}. \quad (178)$$

В последних равенствах k, l, m обозначают целые числа, принимающие значения 1, 2, 3, при этом среди значений k, l, m не должно быть равных между собой; в этих обозначениях принято:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega'', \quad \omega_3 = \omega'. \quad (179)$$

§ 12. Изменения функций $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при изменении периодов. Положим, что вместо пары основных периодов 2ω , $2\omega'$ берется пара периодов $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$, эквивалентных первоначальному,

$$\tilde{\omega} = m\omega + n\omega', \quad \tilde{\omega}' = m'\omega + n'\omega', \quad (180)$$

где числа m и n целые, причем

$$mn' - nm' = 1.$$

При такой замене функции $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ не изменяются:

$$\wp(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \wp(u | \omega, \omega'), \tag{181}$$

$$\zeta(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \zeta(u | \omega, \omega'), \tag{182}$$

$$\sigma(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \sigma(u | \omega, \omega'). \tag{183}$$

Неизменными остаются и инварианты g_2 и g_3 . Величины

$$\wp(\omega) = e_1, \quad \wp(\omega'') = e_2, \quad \wp(\omega') = e_3$$

превращаются в

$$\wp(\tilde{\omega}) = e_\alpha, \quad \wp(\tilde{\omega}') = e_\beta \quad \text{и} \quad \wp(\tilde{\omega}'') = e_\gamma.$$

Функции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ переходят в функции $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$ согласно равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_1(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\alpha(u | \omega, \omega'), & \sigma_2(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\beta(u | \omega, \omega'), \\ \sigma_3(u | \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\gamma(u | \omega, \omega'). \end{aligned} \tag{184}$$

Таблица 24 показывает, как изменяются функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ и числа e_1, e_2, e_3 при замене основных периодов и какие значения принимают числа α, β, γ , когда числа m, n, m', n' принимают определенные значения.

Пример. Положим, что

$$\tilde{\omega} = 8\omega + 3\omega', \quad \tilde{\omega}' = 5\omega + 2\omega'.$$

В этом случае m и n' — четные числа, а m' и n — нечетные. В строке пятой таблицы находим

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1.$$

Отметим, что при рассматриваемом преобразовании числа η, η' и η'' переходят в

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \zeta(\tilde{\omega}), & \tilde{\eta}' &= \zeta(\tilde{\omega}'), \\ \tilde{\eta}'' &= \tilde{\eta} + \tilde{\eta}' = \zeta(\tilde{\omega}''). \end{aligned} \tag{185}$$

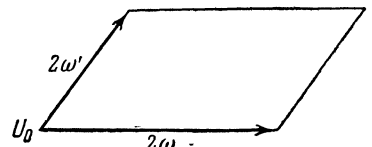
Таблица 24

	m	n	m'	n'	α	β	γ
I	1	0	0	1	1	2	3
II	1	0	1	1	1	3	2
III	1	1	0	1	2	1	3
IV	1	1	1	0	2	3	1
V	0	1	1	1	0	3	2
IV	0	1	1	1	3	1	2

§ 13. Общие свойства эллиптических функций. Выражение эллиптических функций через функцию $\sigma(u)$. Двойко периодическая функция $f(u)$ с периодами 2ω и $2\omega'$ вполне определяется, если оказываются известными ее значения

$$u = u_0 + 2t\omega + 2t'\omega'$$

для всех вещественных значений t и t' , заключенных между 0 и 1. Величина u_0 может быть выбрана произвольно. Очень часто принимают $u_0 = 0$. Совокупность точек, отвечающих этим значениям u , принадлежит параллелограмму (фиг. 41), построенному на векторах, изображающих числа 2ω и $2\omega'$. Этот параллелограмм называется параллелограммом периодов.



Фиг. 41

На каждой из двух параллельных сторон параллелограмма лишь точки одной относятся к параллелограмму периодов, а из четырех вершин только одна принадлежит параллелограмму периодов.

Какие стороны и какую вершину относить к параллелограмму периодов,—дело условия. Можно, например, взять вершину, соответствующую точке u_0 , и стороны, на которых она находится.

Внутри параллелограмма периодов функция $f(u)$ должна иметь особые точки.

Однозначная двояко периодическая функция, обладающая только полюсами в параллелограмме периодов, называется эллиптической. Отметим общие ее свойства.

1. Эллиптическая функция имеет в параллелограмме периодов конечное число полюсов. Пусть a_1, a_2, \dots, a_k будут полюсы порядка $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Величина

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

называется порядком эллиптической функции.

2. Сумма вычетов, соответствующих отдельным полюсам, принадлежащим к параллелограмму периодов, равняется нулю. Отсюда следует, что не может существовать эллиптическая функция 1-го порядка. Примером эллиптических функций 2-го порядка могут служить функции $\wp(u)$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$. Эллиптическая функция $\wp(u)$ имеет в параллелограмме периодов один полюс 2-го порядка, функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ имеют в параллелограмме периодов два полюса 1-го порядка.

3. Пусть b_1, b_2, \dots, b_l обозначают корни функции $f(u)$, принадлежащие параллелограмму периодов. Кратность корней пусть будет соответственно равна $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$. Эллиптическая функция порядка γ имеет γ корней в параллелограмме периодов. Каждый корень при этом считается столько раз, сколько единиц в его кратности.

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_l = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \gamma. \quad (186)$$

4. Между корнями и полюсами функции существует зависимость

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = b_1 + b_2 + \dots + b_l. \quad (187)$$

Следствие: эллиптическая функция порядка γ принимает в параллелограмме периодов любое значение и при этом γ раз.

5. Эллиптическая функция $f(u)$ может быть выражена через функцию $\sigma(u)$ следующим образом:

$$f(u) = C \frac{\sigma(u-b_1)^{\beta_1} \sigma(u-b_2)^{\beta_2} \dots \sigma(u-b_l)^{\beta_l}}{\sigma(u-a_1)^{\alpha_1} \sigma(u-a_2)^{\alpha_2} \dots \sigma(u-a_k)^{\alpha_k}}. \quad (188)$$

6. Выражение функции $f(u)$ через функцию $\sigma(u)$ может быть дано в иной форме. Пусть в окрестности полюса a_i функция $f(u)$ представляется в виде ряда

$$f(u) = \frac{A_i^{(\alpha_i-1)}}{(u-a_i)^{\alpha_i}} + \frac{A_i^{(\alpha_i-2)}}{(u-a_i)^{\alpha_i-1}} + \dots + \frac{A_i}{u-a_i} + \varphi_i(u),$$

где функция $\varphi_i(u)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $u-a_i$. Сумма вычетов удовлетворяет условию

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k = 0. \quad (189)$$

Эллиптическая функция $f(u)$ выражается через функцию $\sigma(u)$ и ее производные различных порядков следующим образом:

$$f(u) = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \frac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)} + \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{\alpha_i-1} \frac{(-1)^s}{s!} A_i^{(s)} \frac{d^s}{du^s} \left\{ \frac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)} \right\} \quad (190)$$

$$f(u) = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \zeta(u-a_i) + \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{\alpha_i-1} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} A_i^{(s)} \wp^{(s-1)}(u-a_i). \quad (190')$$

Равенство (190) оказывается весьма полезным при интегрировании эллиптических функций.

§ 14. Интегралы от эллиптических функций. Интегрирование эллиптических функций удобно производить, пользуясь выражением их через функции $\zeta(u)$, $\wp(u)$ и производные от функции $\wp(u)$. Равенство (190') дает

$$\int f(u) du = A_0 u + \sum_{i=1}^k A_i \ln \sigma(u - a_i) - \sum_{i=1}^k A_i' \zeta(u - a_i) + \\ + \sum_{i=1}^k \sum_{s=2}^{\alpha_i - 1} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} A_i^{(s)} \wp^{(s-2)}(u - a_i) + C. \quad (191)$$

Пример. В качестве примера вычислим интеграл

$$\int \wp''^2(u) du.$$

Функция $\wp''^2(u)$ имеет в параллелограмме периодов один полюс $u = 0$ восьмого порядка. Разложение функции $\wp''^2(u)$ в окрестности полюса имеет вид

$$\wp''^2(u) = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{3}{7} g_3 u^2 + \frac{g_2^2}{40} u^4 + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\wp''^2(u) = \frac{36}{u^8} + \frac{6}{5} g_2 \frac{1}{u^4} + \frac{36}{7} \frac{g_3}{u^2} + \dots$$

Функция $\wp''^2(u)$ согласно равенству (190') выражается через $\wp(u)$ так:

$$\wp''^2(u) = \frac{36}{7!} \wp^{(6)}(u) + \frac{6}{5} \frac{1}{3!} g_2 \wp''(u) + \frac{36}{7} g_3 \wp(u) + A_0.$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$\int \wp''^2(u) du = \frac{1}{140} \wp^{(5)}(u) + \frac{g_2}{5} \wp'(u) - \frac{36}{7} g_3 \zeta(u) + A_0 u + C.$$

Величина постоянной A_0 может быть определена, если в равенстве, дающем выражение $\wp''^2(u)$ через $\wp(u)$ и ее производные, положить u равным какому-либо частному значению.

Положим, $u = \omega$. В таком случае, замечая, что

$$\wp(\omega) = e_1, \quad \wp'(\omega) = 0,$$

получаем путем последовательного дифференцирования уравнения

$$\wp'^2(u) = 4 \wp^3(u) - g_2 \wp(u) - g_3$$

выражения производных $\wp''(u), \dots, \wp^{(4)}(u)$ и их значения при $u = \omega$:

$$\wp''(u) = 6 \wp^2(u) - \frac{1}{2} g_2, \quad \wp^{(4)}(u) = 12 \wp'^2(u) + 12 \wp(u) \wp''(u),$$

$$\wp'''(u) = 12 \wp(u) \wp'(u), \quad \wp^{(5)}(u) = 36 \wp'(u) \wp''(u) + 12 \wp(u) \wp'''(u),$$

$$\wp^{(6)}(u) = 36 \wp''^2(u) + 48 \wp'(u) \wp'''(u) + 12 \wp(u) \wp^{(4)}(u);$$

$$\wp''(\omega) = 6e_1^2 - \frac{1}{2} g_2, \quad \wp^{(4)}(\omega) = 6(2g_2 e_1 + 3g_3),$$

$$\wp'''(\omega) = 0, \quad \wp^{(5)}(\omega) = 0.$$

$$\wp^{(6)}(\omega) = 9(28g_2 e_1^2 + 60g_3 e_1 + g_2^2).$$

Внося эти значения в равенство, дающее выражение $\wp''^2(u)$ через функцию $\wp(u)$ и ее производные, получаем

$$\left(6e_1^2 - \frac{1}{2} g_2\right)^2 = \frac{1}{140} 9(28g_2 e_1^2 + 60g_3 e_1 + g_2^2) + \frac{g_2}{5} \left(6e_1^2 - \frac{1}{2} g_2\right) + \frac{36}{7} g_3 e_1 + A_0,$$

откуда находим

$$A_0 = \frac{2}{7} g_2^2.$$

Приведем некоторые простейшие интегралы, связанные с функцией $\wp(u)$:

$$\int \wp^2(u) du = \frac{1}{6} \wp'(u) + \frac{1}{12} g_2 u + C, \quad (192)$$

$$\int \wp^3(u) du = \frac{1}{120} \wp'''(u) - \frac{3}{20} g_2 \zeta(u) + \frac{1}{10} g_3 u + C, \quad (193)$$

$$\int \frac{du}{\wp(u) - \wp(a)} = \frac{2\zeta(a)}{\wp'(a)} u + \frac{1}{\wp'(a)} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + C, \quad (194)$$

$$\int \frac{a\wp(u) + b}{c\wp(u) + d} du = \frac{au}{c} + \frac{ad - bc}{c^2} \left\{ \frac{2\zeta(a)}{\wp'(a)} u + \frac{1}{\wp'(a)} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} \right\} + C. \quad (195)$$

Величина аргумента a находится из условия

$$\wp(a) = -\frac{d}{c}.$$

$$\int \frac{du}{(\wp(u) - \wp(a))^2} = \frac{\wp''(a)}{\wp'^3(a)} \ln \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)} - \frac{1}{\wp'^2(a)} \zeta(u+a) - \frac{1}{\wp'^2(a)} \zeta(u-a) - \left\{ \frac{2\wp'(a)}{\wp'^2(a)} + \frac{2\wp''(a)\zeta(a)}{\wp'^3(a)} \right\} u + C. \quad (196)$$

§ 15. Выражение функции Якоби через функции Вейерштрасса. Эллиптические функции Якоби выражаются через функции сигма или через функцию $\wp(u)$, как это следует ожидать в соответствии со сказанным в § 12.

Выражения функций Якоби через функции Вейерштрасса имеют следующий вид:

$$\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp(u) - e_3}}, \quad (197)$$

$$\operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_1}}{\sqrt{\wp(u) - e_3}}, \quad (198)$$

$$\operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\sqrt{\wp(u) - e_2}}{\sqrt{\wp(u) - e_3}}. \quad (199)$$

Модуль k и дополнительный модуль k' выражаются при помощи формул

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (200)$$

Условимся делать выбор корней e_1, e_2, e_3 таким образом, чтобы в том случае, когда изображения чисел e_1, e_2, e_3 лежат на одной прямой, корень e_2 соответствовал средней точке. Так, в случае вещественных корней будем считать $e_1 > e_2 > e_3$. При таком условии выбора корней величины k^2 и k'^2 не могут получить отрицательных значений или положительных значений, больших единицы.

Между величинами K и K' и периодами $2\omega, 2\omega'$ имеют место соотношения

$$K = \omega \sqrt{e_1 - e_3}, \quad K'i = \omega' \sqrt{e_1 - e_3}. \quad (201)$$

Функция $E(u)$ выражается через функцию $\sigma_3(u)$ равенством

$$E(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)} + e_1 u \right\}. \quad (202)$$

Величины E и E' выражаются равенствами:

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} (\eta + e_1 \omega), \quad E' = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} (\eta' + e_3 \omega'), \quad (202')$$

Функция $\text{zn}(u)$ выражается через $\sigma_3(u)$ равенством

$$\text{zn}(u) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \frac{\sigma_3'(u)}{\sigma_3(u)} - \frac{\eta}{\omega} u \right\}. \quad (203)$$

Отметим, что в том случае, когда k^2 —число вещественное и при этом $0 < k^2 < 1$, основной параллелограмм периодов является прямоугольником.

Если величина k^2 обладает положительной мнимой частью, то основной параллелограмм периодов имеет острый угол при вершине O . Если же мнимая часть величины k^2 отрицательна, то угол при вершине O тупой.

§ 16. Вырождение эллиптических функций. При некоторых частных значениях модуля k и инвариантов g_2 и g_3 происходит вырождение эллиптических функций. Они обращаются в функции однопериодические. Это происходит тогда, когда один из периодов обращается в бесконечность. Отметим такие случаи.

Случай 1. $k = 0, \quad k' = 1.$

В этом случае имеем

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty. \quad (204)$$

На основании формулы (29') главы III имеем

$$q = 0.$$

Функции Якоби вырождаются в тригонометрические функции:

$$\text{sn } u = \sin u, \quad \text{cn } u = \cos u, \quad \text{dn } u = 1. \quad (205)$$

Функции тета обращаются в постоянные количества

$$\vartheta_0(x) = 1, \quad \vartheta_1(x) = 0, \quad \vartheta_2(x) = 0, \quad \vartheta_3(x) = 1. \quad (206)$$

Функция Вейерштрасса $\wp(u)$ переходит в периодическую функцию с периодом 2ω , где

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{6e_1}}, \quad (207)$$

период ω' обращается в бесконечность; функция $\wp(u)$ становится просто периодической:

$$\wp(u) = \frac{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2. \quad (208)$$

Далее имеем в этом случае

$$\zeta(u) = \frac{\pi^2 u}{12\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega} \text{ctg } \frac{\pi u}{2\omega}, \quad (209)$$

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{u\pi}{2\omega} e^{\frac{1}{6} \left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^3}, \quad (210)$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{1}{6} \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^3} \cos \frac{\pi u}{2\omega}, \quad \sigma_2(u) = \sigma_3(u) = e^{\frac{1}{6} \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^3}, \quad (211)$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{12\omega}, \quad \eta' = \infty. \quad (212)$$

Между величинами e_1, e_2, e_3 и инвариантами g_2 и g_3 имеют место соотношения

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \quad g_2 = 3e_1^2, \quad g_3 = e_1^3. \quad (213)$$

В рассматриваемом случае

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0.$$

Отметим в заключение, что

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{q}{k^2} = \frac{1}{16}. \quad (214)$$

Случай 2. $k = 1, k' = 0$.

В этом случае

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}. \quad (215)$$

Величина q обращается в единицу:

$$q = 1. \quad (216)$$

Функции Якоби вырождаются в гиперболические:

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}. \quad (217)$$

Функции тета теряют смысл. Функция $\wp(u)$ становится периодической функцией с мнимым периодом

$$\omega' = \frac{\pi i}{2\sqrt{3e_1}} \quad (\omega = \infty)$$

и обращается в гиперболическую:

$$\wp(u) = e_1 + \frac{3e_1}{\operatorname{sh}^2(u\sqrt{3e_1})}. \quad (218)$$

Функции $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$ вырождаются. Имеем

$$\zeta(u) = -e_1 u + \sqrt{3e_1} \operatorname{coth}(u\sqrt{3e_1}) \quad (219)$$

и

$$\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{3e_1}} \operatorname{sh}(u\sqrt{3e_1}) e^{-\frac{e_1 u^2}{2}}. \quad (220)$$

Функции $\sigma_1(u), \sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$ принимают вид

$$\sigma_1(u) = \sigma_2(u) = e^{\frac{e_3 u^2}{4}}, \quad \sigma_3(u) = e^{\frac{e_3 u^2}{4}} \operatorname{ch}(u\sqrt{3e_1}), \quad (221)$$

Величина

$$\eta' = \frac{\pi^2}{12\omega'}. \quad (222)$$

Между величинами e_1, e_2, e_3 и инвариантами g_2, g_3 имеют место соотношения

$$e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2}, \quad g_2 = 3e_3^2, \quad g_3 = e_3^3. \quad (223)$$

Наконец, имеем

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \frac{q'}{k'^2} = \frac{1}{16}.$$

Случай 3. Оба периода ω и ω' обращаются в бесконечность, однако так, что отношение их имеет конечный предел.

В этом случае имеем

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0. \quad (224)$$

Функция $\wp(u)$ обращается в рациональную дробь

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}. \quad (225)$$

Функции $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$ превращаются в рациональные функции:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u}, \quad \sigma(u) = u; \quad (226)$$

функции $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ вырождаются в постоянные:

$$\sigma_1(u) = \sigma_2(u) = \sigma_3(u) = 1. \quad (227)$$

§ 17. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в функции $\wp(u)$.
Функция $y = \wp(x + c)$ является общим интегралом уравнения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2y - g_3. \quad (228)$$

Уравнение вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = l(y - a)(y - b)(y - c) \quad (229)$$

подстановкой

$$y = \frac{4v}{l} + m$$

приводится к уравнению вида

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 4v^3 - g_2v - g_3,$$

если положить

$$m = \frac{a + b + c}{3},$$

Его общее решение дается равенством

$$y = \frac{4}{l} \wp(x + C) + m, \quad (230)$$

где C — произвольное постоянное.

Уравнение вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = l(y - a)(y - b)(y - c)(y - d) \quad (231)$$

подстановкой

$$y = a + \frac{1}{v}$$

приводится к уравнению типа уравнения (229). Его общее решение имеет вид

$$y = a + \frac{l(a - b)(a - c)(a - d)}{4\wp(x + C) + ml(a - b)(a - c)(a - d)}, \quad (232)$$

где C — произвольное постоянное.

Величина m определяется равенством

$$3m = \frac{1}{b - a} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{d - a}.$$

Уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = l(y - a)^2(y - b)^2 \quad (233)$$

интегрируется путем приведения к уравнению (228). Его общий интеграл имеет вид

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{27}{2l} \wp'(x+C; 0, g_3), \quad (234)$$

где C — произвольное постоянное, и инвариант g_3 определяется равенством

$$g_3 = -\frac{(a-b)^2}{729} l^2. \quad (235)$$

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = l(y-a)^2(y-b)^2(y-c)^2 \quad (236)$$

подстановкой

$$y = c + \frac{1}{v}$$

приводится к уравнению (233).

Уравнение

$$y'^4 = l(y-a)^2(y-b)^3 \quad (237)$$

интегрируется путем приведения его к уравнению (228). Его общий интеграл имеет вид

$$y = b + \frac{256}{l} \wp^2(x+C; g_2, 0), \quad (238)$$

где C — произвольное постоянное.

Инвариант g_2 определяется равенством

$$g_2 = \frac{a-b}{64} l. \quad (239)$$

Уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = l(y-a)^2(y-b)^3(y-c)^3 \quad (240)$$

подстановкой

$$y = c + \frac{1}{v}$$

приводится к уравнению типа уравнения (237).

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = l(y-b)^3(y-c)^3 \quad (241)$$

подстановкой вида

$$y = \frac{1}{v-a}$$

приводится к уравнению типа (240).

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = l(y-a)^3(y-b)^4 \quad (242)$$

имеет общий интеграл вида

$$y = b + \frac{2^6 \cdot 3^3}{l} \wp^3(x+C; 0, g_3); \quad (243)$$

где C — произвольное постоянное.

Инвариант g_3 определяется равенством

$$g_3 = \frac{(a-b)l}{2^4 \cdot 3^6}. \quad (244)$$

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = l(y-a)^3(y-b)^4(y-c)^5 \quad (245)$$

подстановкой

$$y = \frac{1}{v} + c$$

приводится к уравнению (242).

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = l(y-a)^3(y-b)^5 \quad (246)$$

подстановкой

$$y = \frac{1}{v-c}$$

приводится к уравнению (245).

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = l(y-a)^4(y-b)^5 \quad (247)$$

подстановкой

$$y = \frac{1}{v-c}$$

приводится к уравнению (245)

Дифференциальные уравнения, отмеченные в настоящем параграфе, суть единственные уравнения вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = P(y),$$

где $P(y)$ — многочлен относительно y , допускающие однозначный общий интеграл.

ГЛАВА V

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общие замечания. Эллиптическая функция $f(u)$ с периодами 2ω и $2\omega'$ принимает в параллелограмме периодов все возможные значения. При этом каждое значение функция $f(u)$ принимает столько раз, сколько она имеет полюсов в параллелограмме периодов. Каждый полюс считается столько раз, сколько единиц в его кратности. Иначе говоря, число корней уравнения

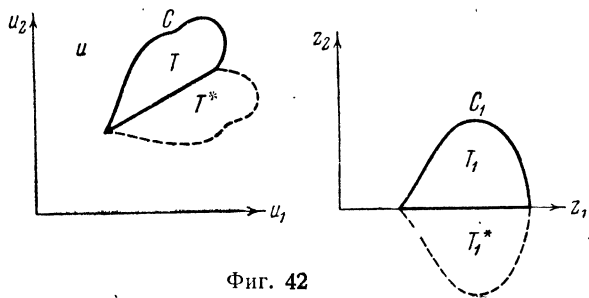
$$z = f(u) \tag{1}$$

в параллелограмме периодов равно порядку эллиптической функции $f(u)$. Каждый корень уравнения (1) считается при этом столько раз, сколько единиц в его кратности. Отображение параллелограмма периодов плоскости u на плоскость комплексной переменной z , доставляемое равенством (1), не является, таким образом, взаимно однозначным. Плоскость z взаимно однозначно отображается лишь на часть параллелограмма периодов. Точки параллелограмма периодов функции $f(u)$ с периодами 2ω и $2\omega'$ могут быть охарактеризованы равенством

$$u = u_0 + t\omega + t'\omega',$$

где t и t' принимают вещественные значения, ограниченные неравенствами $-1 \leq t \leq 1$, $-1 \leq t' \leq 1$, а u_0 есть некоторое определенное значение, которое может быть взято произвольно. Можно, например, положить $u_0 = 0$.

При рассмотрении распределения значений функции $z = f(u)$ в параллелограмме периодов и выделении той части параллелограмма периодов, на которую плоскость комплексной переменной z отображается взаимно



Фиг. 42

однозначно, мы будем опираться на общие свойства конформного отображения. Эти свойства мы здесь отметим.

1. Положим, что некоторый замкнутый контур C на плоскости u нигде сам себя не пересекает (фиг. 42) и ограничивает область T . Положим, что контур C состоит из кусков правильных линий. Пусть функция $z = f(u)$, голоморфная в области T и на контуре C , отображает контур C взаимно однозначно на контур C_1 плоскости z . При этих условиях область T_1 , ограниченная контуром C_1 , является взаимно однозначным отображением области T .

Высказанное предложение остается справедливым при выполнении упомянутых условий и для неограниченных областей.

2. Положим, что один из кусков контура C , ограничивающего область T , является отрезком прямой линии. Положим, что этот отрезок отображается на некоторый участок действительной оси на плоскости z .

Функция $z=f(u)$, дающая конформное отображение области T на область T_1 , дает одновременно конформное отображение области T , симметричной области T относительно прямолинейной границы, на область T_1^* , симметричную области T_1 относительно действительной оси. При этом точками u и u' плоскости u , симметричным относительно прямолинейного участка контура C , отвечают точки z и \bar{z} , симметричные относительно действительной оси плоскости z .

Мы рассмотрим в дальнейшем детально конформные отображения, составляемые эллиптическими функциями Якоби и функциями Вейерштрасса. При этом ограничимся случаем вещественного модуля ($0 < k < 1$) и вещественными значениями инвариантов g_2 и g_3 .

Обратная функция, выражающаяся эллиптическим интегралом, осуществляет конформное отображение плоскости z с соответствующими разрезами на участок основного параллелограмма на плоскости u , являющийся частным случаем преобразования полуплоскости на многоугольник по формуле Шварца-Кристофеля.

§ 2. Функция $\operatorname{sn} u$. Основной параллелограмм периодов имеет форму прямоугольника со сторонами $4K$ и $2K'$. Центр основного параллелограмма поместим в начале координат. Совокупность значений u , принадлежащих основному параллелограмму, определяется равенством

$$u = 2K + t'K'i \quad (-1 \leq t < 1, \quad -1 \leq t' < 1). \quad (2)$$

Основной параллелограмм периодов изображен на фиг. 43.

Рассмотрим распределение значений функции

$$z = \operatorname{sn} u,$$

когда u принимает значения в основном параллелограмме.

При изменении $u = u_1 + u_2i$ от 0 до K функция

$$z = z_1 + z_2i.$$

возрастает от 0 до 1. При изменении

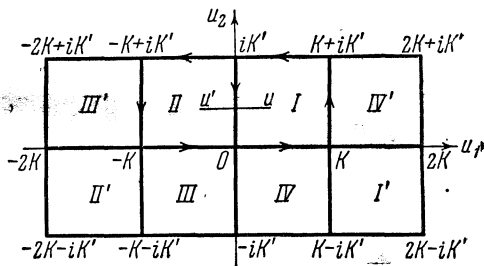
u от K до $K + K'i$ функция z изменяется от 1 до $\frac{1}{k}$. При изменении

u от $K + K'i$ до $K'i$ величина z изменяется от $\frac{1}{k}$ до ∞ . Наконец, при изменении u от $K'i$ до 0 величина z

изменяется от ∞ до 0, оставаясь чисто мнимой.

Окружности весьма малого радиуса, описанной около точки $K'i$, отвечает некоторая кривая плоскости z , весьма удаленная от начала координат.

При переходе со стороны прямоугольника, соединяющей точку $K + K'i$ и точку $K'i$, на мнимую ось по этой малой окружности точка z переходит с вещественной оси на мнимую ось по линии, весьма удаленной от точки O .



Фиг. 43

При достаточно малом радиусе окружности с центром в точке K' любая точка z_0 первого квадранта плоскости z попадет внутрь области, ограниченной весьма удаленной кривой и осями.

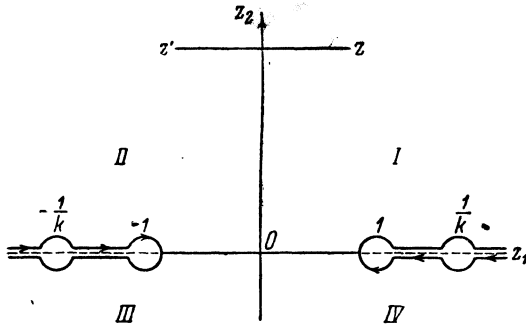
При обходе контура прямоугольника с вершинами $O, K, K + iK', iK'$, причем последний угол срезан малой окружностью в направлении, указанном на фиг. 43 стрелками, точка z описывает в положительном направлении указанный выше контур. Отсюда следует, что уравнение

$$\operatorname{sn} u = z_0$$

имеет только одно решение, изображаемое точкой внутри рассматриваемого прямоугольника.

Уменьшая радиус проведенной окружности до нуля, приходим к такому заключению.

Часть параллелограмма периодов, отмеченная цифрой I, конформно отображается на первый квадрант плоскости z (фиг. 44). Часть параллелограмма периодов, отмеченная цифрой II, отображается на второй квадрант плоскости z .



Фиг. 44

Следует отметить, что точкам u и u' , симметричным относительно вертикальной (мнимой) оси, соответствуют точки z и z' , тоже симметричные относительно мнимой оси.

Части параллелограмма периодов, отмеченные цифрами III и IV, соответствуют третьему и четвертому квадрантам плоскости z .

В точках, симметричных относительно вещественной оси, функция $\operatorname{sn} u$ принимает комплексные

сопряженные значения. Этим точкам отвечают точки плоскости z , тоже симметричные относительно вещественной оси.

В частях параллелограмма периодов, отмеченных цифрами I', II', III', IV', функция $\operatorname{sn} u$ повторяет значения, принимаемые в частях, отмеченных соответственно I, II, III, IV.

Прямоугольник с вершинами в точках $K, K + K'i, -K + K'i, -K$ отображается на верхнюю полуплоскость переменной z .

Обратное отображение полуплоскости переменной z на прямоугольник со сторонами $2K$ и K' осуществляется эллиптическим интегралом

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (3)$$

Этот же интеграл осуществляет отображение плоскости z на прямоугольник плоскости u с вершинами в точках $K + K'i, -K + K'i, -K - K'i$ и $K - K'i$. При этом плоскость z предполагается разрезанной вдоль вещественной оси от точки $+1$ до $+\infty$ и от точки -1 до $-\infty$.

Верхний край первого разреза от точки $+1$ до точки $+\frac{1}{k}$ отображается на стороне $K, K + K'i$ прямоугольника (фиг. 44). Нижний край первого разреза на том же участке отображается стороной $K, K - K'i$ прямоугольника. Верхний и нижний края первого разреза на участке от

точки $+\frac{1}{k}$ до $+\infty$ отображаются на сторонах прямоугольника от точки $K + K'i$ до точки $K'i$ и от точки $K - K'i$ до точки $-K'i$ соответственно.

Аналогичную картину имеем для второго разреза, Основной параллелограмм периодов функции $\operatorname{sn} u$ дает конформное отображение двухлистной римановой поверхности, соответствующей функции

$$\Delta(z, k) = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}.$$

Отображения четырех квадрантов верхнего листа помечены на фиг. 43 цифрами I, II, III, IV, а аналогичных квадрантов нижнего листа — цифрами I', II', III', IV'.

В решении задачи конформного отображения полуплоскости на данный прямоугольник с помощью функции $\operatorname{sn} u$ встает вопрос о выборе модуля k . Положим, что требуется отобразить конформно полуплоскость, расположенную выше вещественной оси, на прямоугольник со сторонами $2a$ и b , причем начало координат соответствует середине стороны прямоугольника, длина которой равна $2a$.

Длины сторон прямоугольника связаны с величиной k соотношениями

$$2a = 2\lambda K = 2\lambda \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (4)$$

$$b = \lambda K' = \lambda \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \quad (5)$$

где λ — некоторый множитель. Для данного случая имеем

$$q = \frac{K'}{K} = \frac{b}{a}. \quad (6)$$

По величине

$$q = e^{-\pi q} \quad (7)$$

находим модуль k с помощью соотношения

$$k = \left\{ \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \right\}^2 = 4\sqrt{q} \left\{ \frac{1 + q^{1 \cdot 2} + q^{2 \cdot 3} + q^{3 \cdot 4} + \dots + q^{n(n+1)}}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots + 2q^{n^2}} \right\}^2. \quad (8)$$

Найдя величину k , определим значения K согласно формуле

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0) = \frac{\pi}{2} \{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots\}^2. \quad (9)$$

Величина K может быть найдена и с помощью таблицы значений эллиптического интеграла 1-го рода.

Отметим, что при небольших значениях q определение величин k и K можно производить с помощью приближенных формул:

$$k \approx \frac{4\sqrt{q}}{1 + 4q}, \quad (10)$$

$$K \approx \frac{\pi}{2} (1 + 4q). \quad (11)$$

Зная величину K , можно определить λ из равенства (4).

Функция

$$z = \operatorname{sn} \left(\frac{u}{\lambda}, k \right) \quad (12)$$

дает требуемое конформное отображение прямоугольника со сторонами $2a$, b на полуплоскость, а функция

$$u = \lambda \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (13)$$

отображает полуплоскость на прямоугольник.

Те же формулы решают вопрос о конформном отображении квадрата на прямоугольник со сторонами a и b .

Пример. Отобразить верхнюю полуплоскость z конформно на квадрат в плоскости u со стороной, равной 1, так, чтобы одна сторона квадрата лежала на вещественной оси, а середина стороны квадрата приходилась в начале координат плоскости u и чтобы она отвечала началу координат на плоскости z .

В рассматриваемом случае имеем:

$$2a = 1 \quad b = 1.$$

Величины q и q получают значения

$$q = 2, \quad q = e^{-2\pi} \approx 0.0018675.$$

Пользуясь приближенными формулами (10) и (11), находим

$$k = \frac{2 \times 0.043214}{1 + 4 \times 0.0018675} \approx 0.172856 (1 - 0.007469 + 0.000056) \approx 0.172856 \times 0.992587 \approx 0.17157$$

и

$$K = 1.57030 (1 + 4 \times 0.0018675) \approx 1.58253.$$

Величина множителя λ определяется равенством

$$\lambda = \frac{1}{2 \times 1.58253} \approx 0.31595.$$

Функция

$$u = 0.3159 \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где $k = 0.17037$, доставляет требуемое конформное отображение.

§ 3. Функция $\operatorname{sn} u$. Основной параллелограмм периодов функции $\operatorname{sn} u$ может быть представлен аналитически как совокупность значений

$$u = u_0 + 4Kt + (K + iK')t' \quad (-1 < t < 1, \quad -1 < t' < 1),$$

где u_0 — произвольно взятая точка плоскости u .

Для дальнейшего будет, однако, более удобно взять в качестве основных периодов $2(K + iK')$ и $2(K - iK')$ и положить $u_0 = 0$. В таком случае основной параллелограмм будет иметь форму ромба, как это показано на фиг. 45. Совокупность значений u , отвечающих точкам основного параллелограмма, определяется равенством

$$u = (K + iK')t + (K - iK')t',$$

где

$$-1 < t < 1, \quad -1 < t' < 1.$$

Рассмотрим распределение значений функции

$$z = \operatorname{sn} u \quad (14)$$

в основном параллелограмме. В точке O значение функции $\operatorname{sn} u$ обращается в единицу. При изменении аргумента u от 0 до K функция z меняется от 1 до 0 (фиг. 46).

При изменении u вдоль прямой, соединяющей точки K и $K + Ki'$, функция $\operatorname{sn} u$, как то следует из формулы

$$\operatorname{sn}(K + iu_2, k) = -k'i \frac{\operatorname{sn}(u_2, k)}{\operatorname{dn}(u_2, k)}$$

изменяется от 0 до $-\frac{k'}{k}i$, оставаясь чисто мнимой величиной, модуль которой все время возрастает. При изменении u от $K + K'i$ до $K'i$ значения $\operatorname{sp} u$, как то следует из равенства

$$\operatorname{sp}(u_1 + iK', k) = -i \frac{\operatorname{dn}(u_1, k)}{k \operatorname{sn}(u_1, k)},$$

изменяются от $-\frac{k'i}{k}$ до $-\infty i$, оставаясь мнимыми и возрастая по модулю.

Рассмотрим значения, принимаемые функцией $\operatorname{sp} u$ на вертикальной диагонали ромба. Из соотношения

$$\operatorname{sp}(iu_2, k) = \frac{1}{\operatorname{sp}(u_2, k')}$$

видно, что когда величина $u = u_1 + u_2i$ принимает значения, соответствующие точкам на мнимой оси между 0 и $K'i$, функция $\operatorname{sp} u$ изменяется от 1 до ∞ . При перемещении переменной u из точки $K'i$ в точку 0 переменная z переходит от ∞ до 1, оставаясь вещественной.

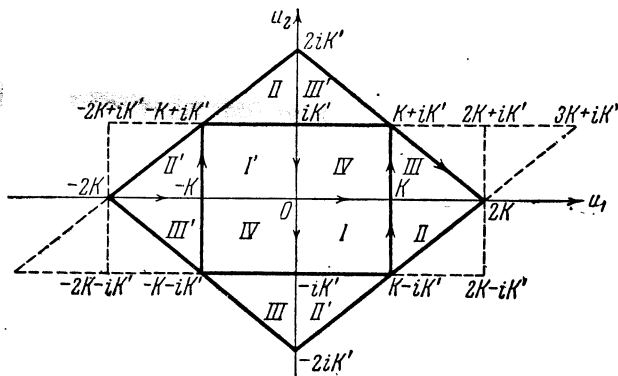
Если вырезать окружностью весьма малого радиуса вершину $K'i$ в прямоугольнике с вершинами $O, K, K + K'i, K'i$ и отметить на плоскости переменной z соответствующую линию, то при обходе контура прямоугольника с вырезом около точки $K'i$ в положительном направлении точка z описывает положительную полуось вещественных чисел, отрицательную полуось мнимых чисел и вспомогательную линию, по которой переходит с мнимой полуоси на вещественную полуось. Уравнение

$$\operatorname{sp} u = z_0,$$

где z_0 — точка, взятая в IV квадранте, имеет одно решение внутри рассматриваемого прямоугольника плоскости u . Рассматриваемый прямоугольник однозначно отображается на IV квадрант плоскости.

Пользуясь четностью функции $\operatorname{sp} u$ и принимая во внимание, что для сопряженных значений u функция $\operatorname{sp} u$ получает сопряженные значения, легко установить конформное отображение прямоугольников, симметричных прямоугольнику с вершинами в точках $O, K, K + K'i, K'i$, на плоскость z . Каждый из этих прямоугольников отображается квадрантом плоскости z . Номера квадрантов отмечены на соответствующих прямоугольниках

(фиг. 45 и 46). Прямоугольник с вершинами в точках $-K'i, K - K'i, K + K'i, K'i$ отображается полуплоскостью z , расположенной справа от мнимой оси и разрезанной от точки $+1$ до $+\infty$ по вещественной оси. Верхний край разреза отображает отрезок от точки O до $-K'i$ плоскости u , нижний край разреза отображает отрезок от точки O до точки $+K'i$.



Фиг. 45

Из соотношения $\operatorname{sp}(K + u) = -\operatorname{sp}(K - u)$ следует, что в точках прямоугольников с вершинами в $O, K, K - K'i, -K'i$ и $K, 2K, 2K + K'i, K + K'i$, симметричных относительно точки K , функция принимает значения, одинаковые по величине и противоположные по знаку.

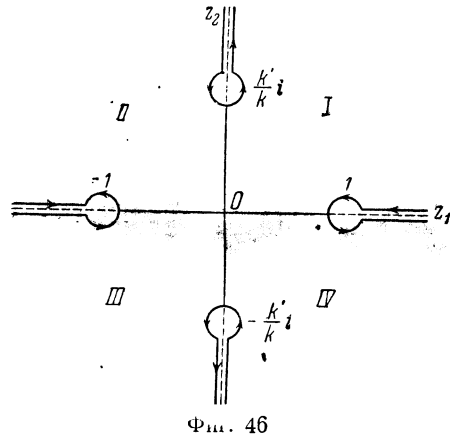
Прямоугольник с вершинами K , $2K$, $2K + K'i$, $K + K'i$ отображается на квадрант III плоскости z . Таким же образом прямоугольник с вершинами K , $2K$, $2K - K'i$, $K - K'i$ отображается на квадрант II плоскости z . На плоскости z сделаны разрезы от точки $+1$ до $+\infty$ и от точки -1 до $-\infty$ вдоль вещественной оси и равным образом от точки $+\frac{k'}{k}i$ до $+\infty i$ и от точки $-\frac{k'}{k}i$ до $-\infty i$ вдоль мнимой оси.

Противоположные края разрезов вещественной оси изображаются отрезками $O, K'i$ и $O, -K'i$ и $2K, K + K'i$ и $2K - K'i$ соответственно.

Правый и левый края разреза от точек $-\frac{k'}{k}i$ до $-i\infty$ изображаются линиями, соединяющими точки $K + K'i$, $K'i$ и точки $K + K'i$, $2K + K'i$ соответственно.

Точкам на краях разрезов от $\frac{k'}{k}i$ до ∞i отвечают точки линии $-K'i, 2K - K'i$.

Точкам треугольника $2K, 2K + K'i, K + K'i$, выходящего за пределы параллелограмма периодов, эквивалентны точки треугольника $-K'i, -K - K'i, -2K'i$. Участки параллелограмма периодов, отображающиеся на квадрант III плоскости z , отмечены цифрой III . Точно так же



участки параллелограмма периодов, отображающиеся на квадрант IV плоскости z , отмечены цифрой IV .

Из сказанного видно, что внутри основного параллелограмма функции sn и cn принимает любое значение дважды.

Обратная функция

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}} \quad (15)$$

дает отображение на соответствующие участки основного параллелограмма квадрантов плоскости z с разрезами вдоль вещественной оси от точки 1 до ∞ и от точки -1 до $-\infty$ и с разрезами вдоль мнимой оси от точки $\frac{k'}{k}i$ до $i\infty$ и от точки $-\frac{k'}{k}i$ до точки $-i\infty$.

Решая задачу конформного отображения квадранта на данный прямоугольник со сторонами a и b , приходится определять модуль k функции sn из уравнений

$$a = \lambda K = \lambda \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (16)$$

$$b = \lambda K' = \lambda \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}. \quad (17)$$

Определение величин k и λ производится совершенно таким же образом, как и в случае преобразования, производимого при помощи функции $sn(u, k)$.

Величина q определяется равенством

$$q = \frac{b}{a}. \tag{18}$$

Величины q, k, K определяются по формулам (7), (8), (9). Их вычисление при небольших значениях q можно производить по формулам (10) и (11). Значение λ находится из уравнения (16).

Функция

$$z = \operatorname{cn} \left(\frac{u}{\lambda}, k \right) \tag{19}$$

дает отображение соответствующих частей основного параллелограмма периодов на отдельные квадранты. Обратная функция

$$u = \lambda \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}} \tag{20}$$

преобразует квадранты плоскости в соответствующие части основного параллелограмма.

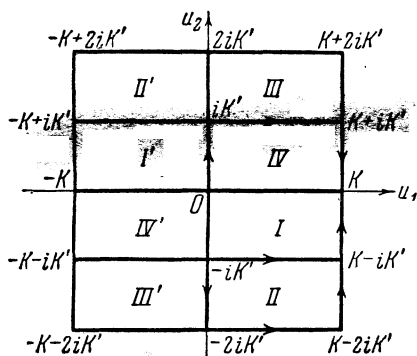
§ 4. Функция $\operatorname{dn} u$. Функция $\operatorname{dn} u$ имеет основной параллелограмм в форме прямоугольника со сторонами $2K$ и $4K'$. Совокупность значений u , принадлежащих к основному параллелограмму, определяется равенством

$$u = Kt + 2K't'i; \quad -1 \leq t < 1, \quad -1 \leq t' < 1. \tag{21}$$

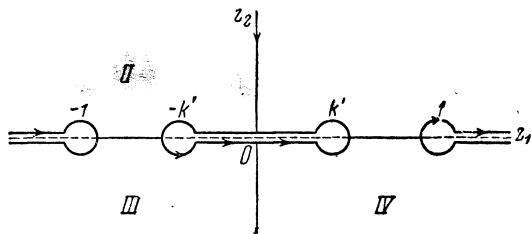
Распределение значений функции

$$z = \operatorname{dn} u \tag{22}$$

в основном параллелограмме указано на фиг. 47. Цифрами I, II, III, IV отмечены части прямоугольника периодов, соответствующие I, II, III, IV квадрантам плоскости z (фиг. 48). При выбранном значении z уравнение (22) имеет только одно решение в соответствующей части прямоугольника периодов. Другими словами, части, отмеченные цифрами I, II, III, IV , однозначно отображают квадранты плоскости z , изображенные на фиг. 48.



Фиг. 47



Фиг. 48

Цифрами I', II', III', IV' отмечены части прямоугольника периодов, также однозначно отображающие квадранты плоскости z .

Таким образом уравнение (22) при всяком z имеет два корня в прямоугольнике периодов.

При изменении u от 0 до K величина z меняется от 1 до k' , убывая.

При изменении u от K до $K + iK'$ величина z убывает от k' до 0.

При изменении u от $K + iK'$ до $K + 2iK'$ величина z убывает от 0 до $-k'$.

Аналогичную картину распределения значений z мы имеем на отрезке от K до $K - 2iK'$. При изменении u по мнимой оси от точки O до iK' величина z возрастает от 1 до ∞ и при дальнейшем изменении u от iK' до $2iK'$ возрастает от $-\infty$ до -1 . Такую же картину изменения z мы имеем при изменении u по мнимой оси от точки O до $-2iK'$.

При изменении u от $K + iK'$ до iK' по прямой величина z возрастает по модулю от 0 до ∞ , оставаясь чисто мнимой, причем коэффициент при i имеет отрицательный знак.

При дальнейшем изменении u от iK' до $-K + iK'$ величина z , оставаясь чисто мнимой, изменяется от ∞i до 0, причем коэффициент при i имеет положительный знак. Аналогичную картину мы имеем при изменении u от $-K - iK'$ до $+K - iK'$.

Таким образом обходу контура прямоугольника $O, -K'i, K - iK', K$ последовательно через точки $-K'i, K - K'i, K, O$ до точки $-K'i$ соответствует перемещение z из точки $+i\infty$ до O по мнимой оси и дальнейшее перемещение по вещественной оси из точки O до $+\infty$. Стороне $-K'i, K - K'i$ отвечает мнимая ось, стороне $K - K'i, K$ отвечает верхний край разреза вещественной оси от точки O до точки k' , стороне K, O отвечает отрезок оси от точки k' до точки 1, стороне $O, -K'i$ отвечает верхний край разреза от точки 1 до $+\infty$.

Прямоугольник $-K'i, K - K'i, K + K'i, K'i$ отображается на правой по отношению к мнимой оси полуплоскости z с разрезом вдоль вещественной оси от точки O до точки k' и от точки $+1$ до $+\infty$.

Прямоугольник $-K'i, K'i, -K + K'i, -K - K'i$ отображается на левой полуплоскости z с разрезом от точки O до $-k'$ и от -1 до $-\infty$. Соответствие краев разрезов сторонам прямоугольников непосредственно ясно из предыдущего.

Обратная функция

$$u = \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}} \quad (23)$$

доставляет конформное отображение квадрантов плоскости с разрезами вдоль вещественной оси от точки 1 до ∞ , от точки $-k'$ до k' и от точки -1 до $-\infty$ на соответствующие участки прямоугольника периодов.

В том случае, когда конформное отображение квадранта осуществляется с помощью интеграла (23) или функции $\operatorname{dn} u$ и стороны a и b прямоугольника заданы, приходится определять величину модуля k и множитель λ из условия

$$a = \lambda K, \quad b = \lambda K'. \quad (24)$$

Определение этих величин производится по формулам (6), (7), (8), (9) или (10) и (11) и равенству (24).

Функция

$$z = \operatorname{dn} \left(\frac{u}{\lambda}, k \right) \quad (25)$$

дает конформное отображение прямоугольника на соответствующий квадрант, а функция

$$u = \lambda \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}} \quad (26)$$

доставляет конформное отображение квадранта плоскости z на данный прямоугольник.

§ 5. Функция $\operatorname{tn} u$. Функция $\operatorname{tn} u$ имеет основными периодами величины $2K$ и $4iK'$. Основной параллелограмм имеет форму прямоугольника. Совокупность значений аргумента u , принадлежащих основному параллелограмму, определяется формулой

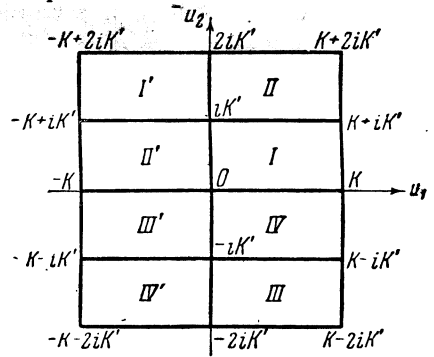
$$u = Kt + 2t'iK', \quad -1 \leq t < 1, \quad -1 \leq t' < 1. \quad (27)$$

Распределение значений функции

$$z = \operatorname{tn} u \quad (28)$$

в основном параллелограмме видно на фиг. 49.

На этой фигуре цифрами I, II, III, IV отмечены отдельные части, конформно отображающиеся на I, II, III и IV квадранты плоскости z . При этом различными значениями u в каждом из рассматриваемых участков соответствуют различные значения z . Отображение каждого из участков основного параллелограмма на соответствующий квадрант плоскости z однозначно. Части основного параллелограмма, отмеченные цифрами I', II', III', IV' однозначно отображаются на квадранты I, II, III и IV плоскости z .



Фиг. 49

Таким образом в основном параллелограмме уравнение (28) при всяком z имеет два корня.

Рассмотрим (фиг. 50), как распределяются значения z на контурах отдельных частей основного параллелограмма. При изменении u от 0 до K величина z возрастает от 0 до ∞ .

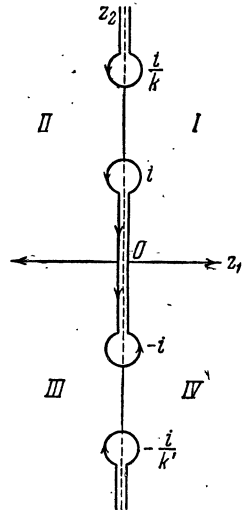
При изменении u от $-K$ до 0 величина z растет от $-\infty$ до 0. Когда u переходит по мнимой оси от 0 до iK' , величина z , оставаясь чисто мнимой и возрастая по модулю, изменяется от 0 до i . При дальнейшем перемещении u по мнимой оси величина z , оставаясь попрежнему чисто мнимой, убывает по модулю и переходит от значения i к 0.

При изменении u от 0 до $-2iK'$ вдоль мнимой оси величина z от 0 переходит к $-i$ и затем от $-i$ к 0.

Когда u переходит из точки K в точку $K + iK'$ и далее в точку $K + 2iK'$, величина z , оставаясь чисто мнимой и убывая по модулю, переходит от $i\infty$ к $\frac{i}{k'}$, а затем, вновь возрастая по модулю, обращается в $i\infty$.

При изменении u по прямой от K до $K - 2iK'$ величина z переходит от $-i\infty$ к $-\frac{i}{k'}$, а затем опять к $-i\infty$.

При изменении u по прямой от $-K + K'i$ до $K'i$ и далее до $K + K'i$ величина z , оставаясь чисто мнимой, от $\frac{i}{k'}$ переходит к i , а потом от i к $\frac{i}{k'}$.



Фиг. 50

При изменении z вдоль прямой, соединяющей точки $-K - K'i$, $-K'i$, $+K - K'i$, величина z меняется от $-\frac{i}{k'}$ до $-i$ и далее от $-i$ до $-\frac{i}{k'}$.

Таким образом, при обходе контура прямоугольника O , K , $K + K'i$, $K'i$ в положительном направлении точка z перемещается сначала по вещественной оси из точки O до ∞ , а потом по мнимой из точки $+i\infty$ до 0 . Стороне K , $K + K'i$ соответствует правый край разреза мнимой оси от $+i\infty$ до $\frac{i}{k'}$. Стороне $K + K'i$, $K'i$ соответствует участок мнимой оси от $\frac{i}{k'}$ до i и стороне $K'i$, O отвечает правый край разреза от точки i до 0 .

Правая полуплоскость z служит отображением прямоугольника с вершинами в точках $-K'i$, $K - K'i$, $K + K'i$, $K'i$. Соответствие сторон прямоугольника и краев разреза ясно из сказанного.

Функция

$$u = \int_0^z \frac{dx}{(1+x^2)(1+k'^2x^2)} \quad (29)$$

осуществляет конформное отображение квадрантов плоскости z с разрезами вдоль мнимой оси от точки $\frac{i}{k'}$ до $i\infty$, от точки i до $-i$ и от точки $-\frac{i}{k'}$ до $-\infty$ на соответствующие части основного прямоугольника на плоскости u .

В случае необходимости произвести конформное отображение квадранта плоскости z на данный прямоугольник плоскости z , приходится находить модуль k и множитель λ по уравнениям вида (24). Решение этого вопроса указано в предыдущих параграфах.

Функция

$$z = \operatorname{tn} \left(\frac{u}{\lambda}, k \right) \quad (30)$$

осуществляет конформное преобразование данного прямоугольника в квадрант плоскости z . Функция

$$u = \lambda \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} \quad (31)$$

дает отображение квадранта на прямоугольник.

§ 6. Функция $\wp(u)$. При рассмотрении конформного преобразования, доставляемого функцией $\wp(u)$, ограничимся лишь случаем вещественных значений инвариантов g_2 и g_3 . При этом будем различать два предположения.

1. Корни e_1, e_2, e_3 вещественны ($e_1 > e_2 > e_3$).

Функция $\wp(u)$ имеет основные периоды 2ω и $2\omega'$, где

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad (32)$$

$$\omega' = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}}. \quad (33)$$

Первый период вещественный, второй чисто мнимый. Основной параллелограмм периодов имеет форму прямоугольника со сторонами длиной $|2\omega|$ и $|2\omega'|$.

Совокупность значений u , принадлежащих основному параллелограмму, определяется равенством

$$u = \omega t + \omega' t', \quad -1 \leq t < 1, \quad -1 \leq t' < 1, \quad (34)$$

параллелограмм этот изображен на фиг. 51.

Распределение значений функции

$$z = z_1 + iz_2 = \wp(u) \quad (35)$$

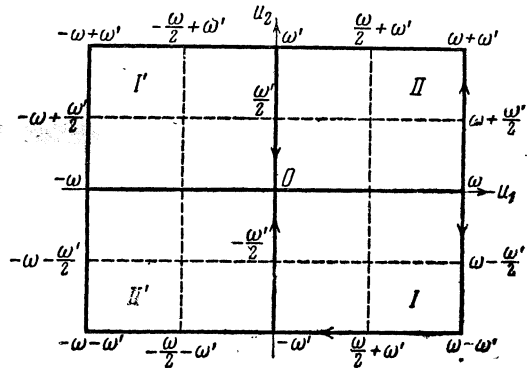
в прямоугольнике периодов видно на фиг. 51, где цифрами I, I' отмечены части, конформно отображающиеся на верхнюю полуплоскость z (фиг. 52), а цифрами II и II' отмечены части, конформно отображающиеся на нижнюю полуплоскость. При этом каждая из частей прямоугольника периодов однозначно отображается на соответствующую полуплоскость.

Уравнение (35) имеет в основном прямоугольнике периодов два корня. На контуре каждой из областей значения z распределяются следующим образом. Когда величина u возрастает от 0 до ω , сохраняя вещественное значение, величина z убывает от ∞ до e_1 . При изменении u от ω до $\omega + \omega'$ величина z убывает от e_1 до e_2 . Когда точка u перемещается от $\omega + \omega'$ до ω' , величина z , оставаясь вещественной, убывает от e_2 до e_3 . Наконец при изменении u от ω' до 0 величина z убывает от e_3 до $-\infty$, оставаясь вещественной. Прямоугольник $O, \omega, \omega + \omega', \omega'$ отображается на нижнюю полуплоскость z . При изменении u от ω до $\omega - \omega'$ величина z изменяется от e_1 до e_2 . При изменении u от $\omega - \omega'$ до $-\omega'$ величина z убывает от e_2 до e_3 . Наконец, при изменении u от $-\omega'$ до 0 величина z убывает от e_3 до $-\infty$.

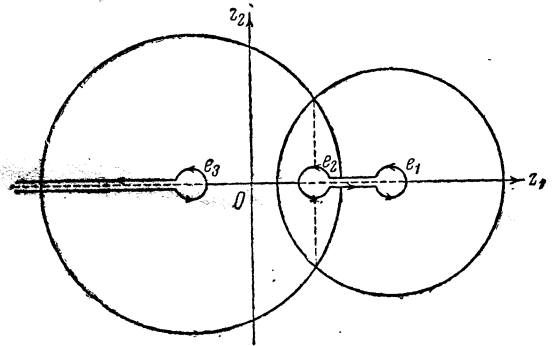
Прямоугольник $O, \omega, \omega - \omega', -\omega'$ отображается на верхнюю полуплоскость z .

На плоскость z с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до e_1 отображается прямоугольник $-\omega', \omega - \omega', \omega + \omega', \omega'$. Отображение отдельных частей контура прямоугольника на участки верхнего и нижнего краев разреза ясно из сказанного.

О распределении значений z на контуре и внутри двух остальных частей прямоугольника периодов можно судить по распределению значений z на контуре и внутри двух первых частей, приняв во внимание, что



Фиг. 51



Фиг. 52

$\wp(u)$ — четная функция аргумента u и, стало быть, в точках, симметричных относительно центра прямоугольника, принимает одинаковые значения.

Точкам

$$u = t\omega \pm \frac{1}{2}\omega', \quad 0 \leq t < 1$$

отвечает на плоскости z окружность с центром в точке e_3 и радиусом, равным $\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}$. При этом точкам средней линии прямоугольника I соответствует верхняя полуокружность.

Точкам

$$u = \frac{\omega}{2} \pm t'\omega', \quad 0 \leq t < 1$$

соответствует на плоскости z окружность с центром в точке e_3 и с радиусом, равным $\sqrt{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}$. При этом средней линии верхнего прямоугольника соответствует нижняя полуокружность, а средней линии нижнего прямоугольника отвечает верхняя полуокружность.

Центрам прямоугольников соответствуют точки

$$\wp\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = e_3 \mp i\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}$$

пересечения окружностей.

Функция

$$u = \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2x - g_3}} \quad (36)$$

осуществляет конформное отображение полуплоскостей плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до e_3 и от точки e_2 до точки e_1 на прямоугольники I и II основной области.

В случае необходимости отобразить полуплоскость z на данный прямоугольник со сторонами a и b с помощью функции $\wp(u)$ приходится определять величину инвариантов g_2 и g_3 по условию

$$a = \lambda\omega, \quad b = \lambda|\omega'|. \quad (37)$$

Отношение периодов определяется равенством

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = i\frac{K'}{K} = qi. \quad (38)$$

Из соотношений (37) получаем

$$q = \frac{b}{a}. \quad (39)$$

Зная величину q , определяем q по формуле (7) и, пользуясь соотношением (8) или приближенным равенством (10), находим модуль k .

Значения инвариантов определяются равенствами

$$g_2 = 12\mu^2(k^4 - k^2 + 1), \quad (40)$$

$$g_3 = 4\mu^3(2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2), \quad (41)$$

где μ — произвольный положительный множитель.

Величины e_1, e_2, e_3 даются равенствами

$$e_1 = \mu(2 - k^2), \quad (42)$$

$$e_2 = \mu(2k^2 - 1), \quad (43)$$

$$e_3 = -\mu(k^2 + 1). \quad (44)$$

Множителю μ можно придать такое значение, чтобы один из корней стал равен наперед заданной величине.

Значения периодов находятся из равенств

$$\omega = \int_{2-k^2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\mu \{x^3 - 3(k^4 - k^2 + 1)x - (2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2)\}}}, \quad (45)$$

$$\omega' = i \int_{-(k^2+1)}^{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\mu \{x^3 - 3(k^4 - k^2 + 1)x - (2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2)\}}}. \quad (46)$$

Значения множителя λ находится из равенств (37).
Функция

$$z = \wp\left(\frac{u}{\lambda}\right) \quad (47)$$

доставляет конформное отображение прямоугольника на нижнюю плоскость z , а интеграл

$$u = \lambda \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \quad (48)$$

дает конформное отображение нижней полуплоскости на данный прямоугольник.

Заметим, что вычисление величины λ можно произвести иначе, не прибегая к вычислению интегралов (45), (46). Находим для этой цели значение K по формуле (9) или с помощью приближенного равенства (11). Из соотношения

$$\lambda = \frac{a}{K} \sqrt{3\mu} \quad (49)$$

определяется значение λ .

Соотношения (47) и (48) могут быть представлены в виде

$$z = \mu \wp\left(\frac{Ku}{a\sqrt{3}}; 12(k^4 - k^2 + 1), 4(2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2)\right) \quad (50)$$

и

$$u = \frac{a\sqrt{3}}{K} \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\{x^3 - 3(k^4 - k^2 + 1)x - (2k^6 - 3k^4 - 3k^2 + 2)\}}}. \quad (51)$$

Выбор значения множителя μ регулирует распределение значений z на контуре прямоугольника, позволяя взять наперед заданное значение z в наперед фиксированной точке контура.

Отметим еще, что модуль функции

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)} \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)}$$

остается меньшим единицы внутри полосы, ограниченной средними вертикальными линиями прямоугольников I , II , I' и II' . Вне этой полосы модуль функции больше единицы. На средних линиях он равен единице.

Модуль функции

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$$

остается меньшим единицы внутри полосы, ограниченной горизонтальными средними линиями прямоугольников I , II , I' и II' . Вне этой полосы модуль больше единицы. На средних линиях он равен единице.

Отметим еще, что в основном прямоугольнике как вещественные части функций

$$\frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)}, \quad \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}, \quad \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)},$$

с одной стороны, так и мнимые их части, с другой, при одинаковых значениях u имеют значения одинакового знака, того именно, который имеет вещественная или мнимая часть u соответственно.

Вещественная часть каждого из шести отношений $\frac{\sigma_\mu(u)}{\sigma_\lambda(u)}$ остается положительной в основном прямоугольнике периодов. Мнимая часть каждого из этих отношений будет положительной, если $\mu > \lambda$, и отрицательной при $\mu < \lambda$ внутри прямоугольника Π .

Вещественная часть функций $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$, $\vartheta_3(x)$, где $u = 2\omega x$, остается положительной внутри прямоугольника Π и на нижней горизонтальной его стороне.

Внутри того же прямоугольника мнимые части функций $\vartheta_0(x)$ и $\vartheta_1(x)$ положительны, а мнимые части функций $\vartheta_2(x)$ и $\vartheta_3(x)$ отрицательны.

В прямоугольнике I рассмотренные функции получают значения комплексные сопряженные с теми, которые они принимают в точках прямоугольника Π , симметричных с точками прямоугольника I относительно вещественной оси.

2. Предположим, что e_2 —число вещественное, а e_1 и e_3 —числа комплексные сопряженные. Мнимую часть e_1 будем считать положительной.

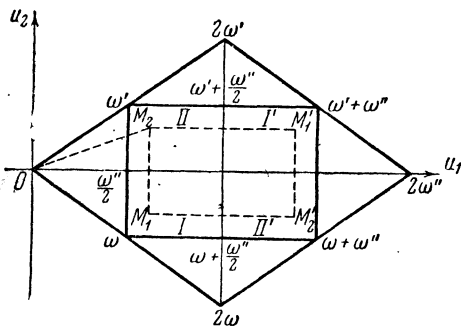
В этом случае периоды 2ω и $2\omega'$ будут числа комплексные сопряженные:

$$\omega' = \alpha + \beta i, \quad \omega = \alpha - \beta i.$$

Величины α и β определяются равенствами:

$$2\alpha = \omega + \omega' = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad (52)$$

$$2\beta = \frac{\omega' - \omega}{i} = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{-4x^3 + g_2x + g_3}}. \quad (53)$$



Фиг. 53

Основной параллелограмм периодов имеет форму ромба (Фиг. 53). На диагоналях ромба функция $\wp(u)$ имеет вещественные значения. Когда u изменяется от 0 до $\omega'' = \omega + \omega'$, функция $\wp(u)$ убывает от $+\infty$ до e_2 .

При дальнейшем изменении u от ω'' до $2\omega''$ функция $\wp(u)$ возрастает от e_2 до $+\infty$. При изменении u вдоль второй диагонали от ω'' до $2\omega'$ функция $\wp(u)$, оставаясь вещественной, убывает от e_2 до $-\infty$.

При изменении u от ω'' до 2ω функция $\wp(u)$ убывает от e_2 до $-\infty$.

Точке ω плоскости u отвечает точка e_1 плоскости z . Точкам плоскости u , лежащим на гипотенузе треугольника $O, 2\omega, \omega''$ между точками O и ω соответствует на плоскости z точки нижнего края разреза, идущего от e_1 до ∞ . Точкам, расположенным на гипотенузе того же треугольника между точками ω и 2ω , отвечают точки верхнего края разреза, идущего от e_1 до ∞ .

Точке ω' плоскости u отвечает точка e_3 плоскости z . Точкам плоскости u , расположенным на гипотенузе треугольника O , ω'' , $2\omega'$ между точками O и ω' , соответствуют на плоскости z точки верхнего края разреза, идущего из точки e_3 до ∞ . Точкам гипотенузы того же треугольника, расположенным между ω' и $2\omega'$, соответствуют точки нижнего края разреза, идущего на плоскости z от e_3 до ∞ . При перемещении точки u в положительном направлении по контуру треугольника II точка z проходит ось вещественных чисел от ∞ до e_2 , нижний край разреза вещественной оси от точки e_2 до $-\infty$ и последовательно оба края разреза, проведенного от точки e_3 до ∞ .

Треугольник O , ω'' , $2\omega'$ отображается на нижнюю полуплоскость z .

При перемещении u по контуру треугольника I в отрицательном направлении точка z проходит вещественную ось от ∞ до e_2 , верхний край разреза вещественной оси от e_2 до $-\infty$ и последовательно верхний и нижний края разреза от e_1 до ∞ . Треугольник O , 2ω , ω'' отображается на верхнюю полуплоскость z .

В точках, симметричных относительно центра ромба, функция $\wp(u)$ имеет одинаковые значения. В точках, симметричных относительно диагоналей ромба, функция $\wp(u)$ принимает комплексные сопряженные значения. Внутри каждого из треугольников I , II , I' и II' функция $\wp(u)$ принимает каждое значение только один раз. Треугольник I служит конформным отображением верхней полуплоскости с разрезами, отмеченными на фиг. 54. Треугольник II является конформным отображением нижней полуплоскости с разрезами.

Сторонам прямоугольника с вершинами в точках ω' , ω , $\omega + \omega''$, $\omega' + \omega''$ соответствуют дуги окружности, проходящей через точки e_1 и e_3 , с центром в точке e_2 и радиусом, равным

$$\sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}.$$

Стороне, соединяющей точки ω' , $\omega' + \frac{\omega''}{2}$ и точки ω , $\omega + \frac{1}{2}\omega''$, соответствует дуга окружности, пересекающая разрез вещественной оси. Стороне, соединяющей точки ω и ω' , отвечает дуга, не пересекающая разрез.

Отображение плоскости с разрезами на треугольники I и II дает интеграл:

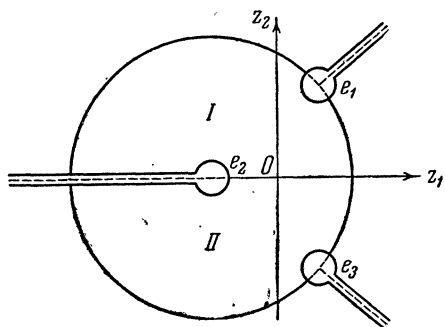
$$u = \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}. \quad (54)$$

В том случае, когда представляется необходимым отобразить полуплоскость на прямоугольный треугольник с данными катетами a и b , приходится определять периоды 2ω и $2\omega'$ и инварианты g_2 и g_3 из условия

$$\lambda(\omega + \omega') = a, \quad \lambda(\omega' - \omega) = bi. \quad (55)$$

В этом случае значение \wp определяется равенством

$$\wp = \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} i. \quad (56)$$



Фиг. 54

Дальнейшее вычисление может быть выполнено по формулам, указанным в предыдущем параграфе.

Отметим, что в точках треугольников *I* и *II* внутри прямоугольника с вершинами в серединах сторон основного параллелограмма модуль функции

$$\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)} \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)} \quad (57)$$

меньше единицы, на сторонах его равен единице, а вне его в остальных точках треугольников *I* и *II* больше единицы.

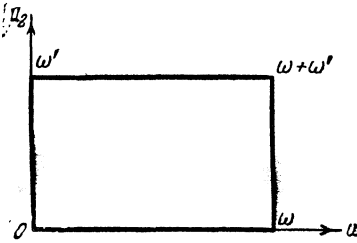
Вещественная и мнимая части этой функции имеют в треугольниках *I* и *II* те же знаки, что и вещественная и мнимая части *u*.

§ 7. Отображение прямоугольника на круг радиуса 1. Возьмем прямоугольник, точки которого определяются равенством

$$u = t\omega + t'\omega', \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq t' \leq 1, \quad (58)$$

где ω и ω' суть периоды эллиптической функции $\wp(u)$.

Пусть e_1, e_2, e_3 — числа вещественные и $e_1 > e_2 > e_3$. Конформное отображение прямоугольника (фиг. 55) на круг радиуса 1 осуществляется функцией.



Фиг. 55

$$z = f(u) = -\sqrt{\frac{\sqrt{e_2 - e_3} + i\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3} - i\sqrt{e_1 - e_2}}} \cdot \frac{\wp(u) - e_2 + i\sqrt{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}}{\wp(u) - e_2 - i\sqrt{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}}. \quad (59)$$

При этом отображении центру прямоугольника соответствует центр круга. Вершинам прямоугольника соответствуют точки

$$\frac{\pm \sqrt{e_2 - e_3} \pm i\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Средние линии прямоугольника превращаются в диаметры окружности. В том случае, когда длины сторон заданы, значения периодов и инвариантов функции $\wp(u)$ находятся по формулам, указанным в § 6.

Отображающая функция имеет вид

$$z = f\left(\frac{u}{\lambda}\right), \quad (60)$$

где λ находится по формуле (49).

§ 8. Конформное отображение, доставляемое эллиптическими интегралами. Отметим конформные отображения, доставляемые эллиптическими интегралами.

1. Интеграл первого рода в канонической форме Лежандра

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1 \quad (61)$$

доставляет отображение полуплоскости на прямоугольник. При этом вершинам прямоугольника соответствуют точки: $1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, -1$ на вещественной оси. Преобразование (61) было подробно разобрано в § 2 этой главы.

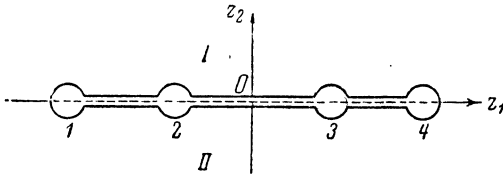
Может представиться интересным отобразить полуплоскость на прямоугольник так, чтобы вершины прямоугольника соответствовали заданным точкам вещественной оси.

Интеграл первого рода

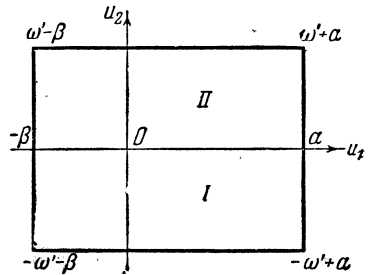
$$u = \int_z^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}}, \quad (62)$$

(где $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$) дает отображение плоскости z (фиг. 56) на прямоугольник (фиг. 57). Бесконечно далекой точке плоскости z отвечает на плоскости u точка O . При перемещении z из ∞ в c_4 по вещественной оси соответствующая точка u перемещается в положительном направлении по оси Ou_1 . При дальнейшем перемещении z по верхнему краю разреза (c_3, c_4) соответствующая точка u описывает сторону прямоугольника от точки α до точки $\alpha - \omega'$. Верхнему краю разреза (c_2, c_3) отвечает сторона прямоугольника от точки $\alpha - \omega'$ до точки $-\beta - \omega'$. Наконец, верхнему краю разреза (c_1, c_2) соответствует сторона прямоугольника от точки $-\beta - \omega'$ до точки $-\beta$. При перемещении точки z из точки c_1 до ∞ по вещественной оси соответствующая точка u переходит из точки $-\beta$ в точку O . Верхняя полуплоскость z отображается на прямоугольник I (фиг. 57). Нижняя полуплоскость отображается на прямоугольник II .

Нижние края разрезов отображаются в соответствующих сторонах прямоугольника.



Фиг. 56



Фиг. 57

Плоскость z с разрезами отображается на прямоугольник с вершинами в точках $\omega' + \alpha$, $\omega' - \beta$, $-\omega' - \beta$, $-\omega' + \alpha$.

Величины α , β и ω' определяются равенствами

$$\alpha = \int_{c_4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}}, \quad (63)$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{c_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}} \quad (64)$$

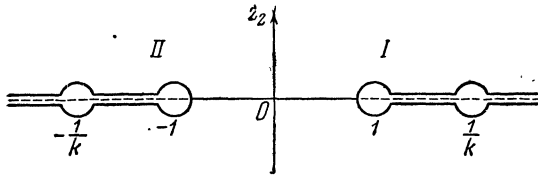
и

$$\omega' = i \int_{c_2}^{c_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(c_4-x)}}. \quad (65)$$

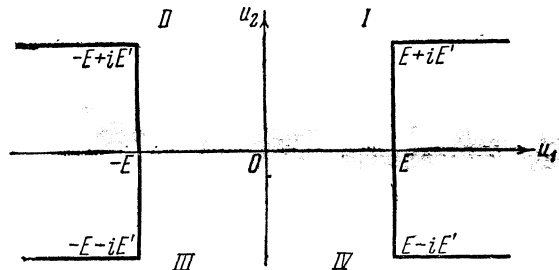
2. Интеграл второго рода в канонической форме Лежандра

$$u = E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad 0 < k < 1 \quad (66)$$

дает преобразование плоскости z с разрезами по вещественной оси от точки $+1$ до $+\infty$ и от точки -1 до $-\infty$ (фиг. 58) на область, указанную на фиг. (59). Отрезок вещественной оси плоскости z от точки O до точки 1 переходит в отрезок от точки O до точки E на плоскости u .



Фиг. 58



Фиг. 59

I, II, III, IV плоскости z отвечают области I, II, III, IV плоскости u . Отображение однозначно.

3. Конформное отображение, доставляемое интегралом 3-го рода. Интеграл вида

$$u = \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1, \quad (67)$$

где n —число вещественное, отображает плоскость комплексной переменной z с разрезами на области, имеющие вид, указанный ниже.

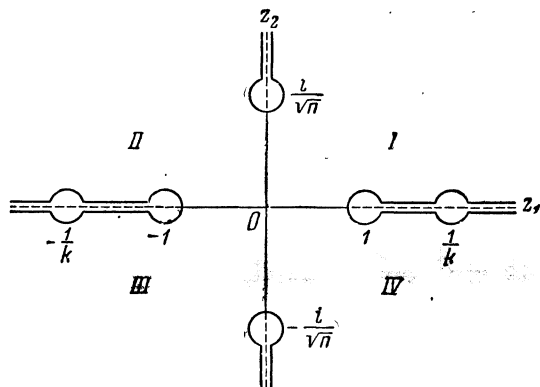
а) Случай $n > 0$. Плоскость z с разрезами (фиг. 60) отображается на область, изображенную на фиг. 61. При этом квадрантам I, II, III, IV плоскости z соответствуют области I, II, III, IV на плоскости u . Отрезок на плоскости z от точки O до 1 отображается отрезком на плоскости u от точки O до ω . Верхний край разреза на плоскости z от 1 до

точки $\frac{1}{k}$ переходит в отрезок от точки ω до точки $\omega + \omega'$ на плоскости u . Верхний край разреза от точки $\frac{1}{k}$ до ∞ на плоскости z переходит в отрезок, соединяющий точки $\omega + \omega'$ и $\omega + \omega' - \omega''$ на плоскости u . Правый край разреза мнимой оси от точки $i\infty$ до $\frac{i}{\sqrt{n}}$ на плоскости z отображается прямой, параллельной мнимой оси, идущей из точки $\omega + \omega' - \omega''$ в бесконечность на плоскости u . Отрезок мнимой оси плоскости z от точки $\frac{i}{\sqrt{n}}$ до O отображается на мнимой оси плоскости u .

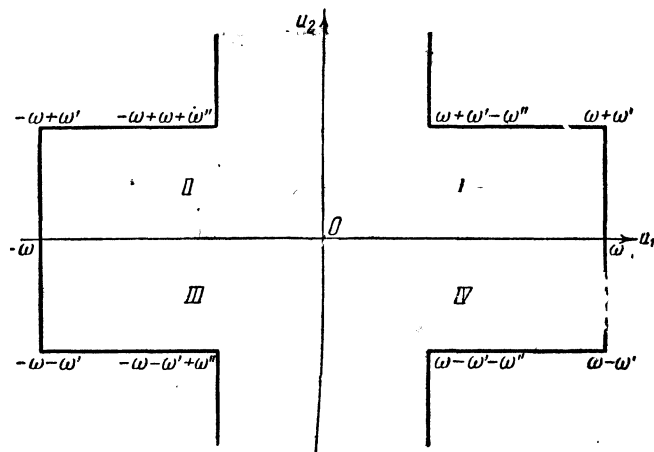
Отрезок, соответствующий верхнему краю разреза от точки $+1$ до $+\frac{1}{k}$, переходит в отрезок, соединяющей точки E и $E + iE'$. Верхнему краю разреза от точки $+1$ до $+\infty$ отвечает прямая, параллельная вещественной оси и идущая из точки $E + iE'$ в бесконечность. Верхний край разреза отрицательной половины вещественной оси отображается линией, симметричной указанной относительно мнимой оси Ou_2 . Нижние края разреза отображаются линией, симметричной относительно вещественной оси Ou_1 линии, отображающей верхний край разрезов. Мнимая ось плоскости u отображается на мнимую ось плоскости z . Квадрантам

соединяющей точки E и $E + iE'$. Верхнему краю разреза от точки $+1$ до $+\infty$ отвечает прямая, параллельная вещественной оси и идущая из точки $E + iE'$ в бесконечность. Верхний край разреза отрицательной половины вещественной оси отображается линией, симметричной указанной относительно мнимой оси Ou_2 . Нижние края разреза отображаются линией, симметричной относительно вещественной оси Ou_1 линии, отображающей верхний край разрезов. Мнимая ось плоскости u отображается на мнимую ось плоскости z . Квадрантам

Границы области II плоскости z и соответствуют отрезкам вещественной отрицательной полуоси и мнимой положительной полуоси. При этом отрезки на плоскости z , симметричные относительно мнимой оси, получают симметричное отображение на плоскости u .



Фиг. 60



Фиг. 61

Границы областей III и IV плоскости u являются отображением нижних краев разрезов вещественной оси и мнимой отрицательной полуоси плоскости z .

Величины ω , ω' определяются равенствами:

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (68)$$

$$\omega' = \frac{k^2i}{n+k^2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+n'x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \quad (69)$$

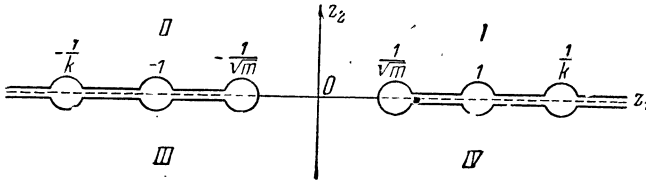
где

$$n' = -\frac{nk'^2}{n+k^2}. \quad (70)$$

Величина ω'' дается равенством

$$\omega'' = \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{(n + k^2 x^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad (71)$$

б) Случай $n = -m$, $m > 1$. Плоскость с разрезом вдоль вещественной оси от точки $+\frac{1}{\sqrt{m}}$ до $+\infty$ и от точки $-\frac{1}{\sqrt{m}}$ до $-\infty$ (фиг. 62) отображается на площадь, изображенную на фиг. 63. Квадрантам I, II, III, IV

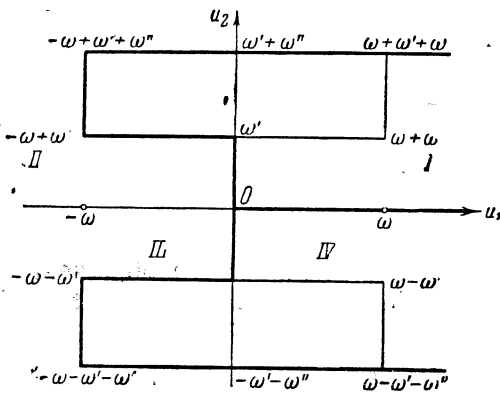


Фиг. 62

III, IV плоскости z отвечают части фиг. 61, отмеченные цифрами I, II, III, IV. Границы каждой из этих областей отображают отрезки вещественной оси и мнимую ось плоскости z .

Отрезок от O до $\frac{1}{\sqrt{m}}$ плоскости z отображается положительной вещественной полуосью плоскости u .

Верхний край разреза от точки $\frac{1}{\sqrt{m}}$ до точки $+1$ на плоскости z



Фиг. 63

отображается отрезком от точки $\infty + \omega' + \omega''$ до точки $-\omega + \omega' + \omega''$ на плоскости u . Верхний край разреза от точки $+1$ до точки $\frac{1}{k}$ на плоскости z отображается отрезком от точки $-\omega + \omega' + \omega''$ до точки $-\omega + \omega'$ на плоскости u . Верхний край разреза от точки $\frac{1}{k}$ до $+\infty$ на плоскости z отображается отрезком от точки $-\omega + \omega'$ до точки ω' на плоскости u . Мнимая положительная полуось на плоскости z отображается отрезком мнимой оси от точки ω' до

точки O .

Нижние края разреза положительной вещественной полуоси и отрицательная мнимая полуось плоскости z отображаются соответствующими границами области IV.

Подобным же образом можно установить соответствие границ областей II и III на плоскости u верхнему и нижнему краям разреза отрицательной вещественной полуоси и мнимой оси на плоскости z . Из сказанного следует, что области I и II частично налегают одна на другую. Точно так же частично налегают одна на другую области III и IV.

Величины ω и ω' определяются равенствами

$$\omega = \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{(m - k^2 x^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (72)$$

$$\omega' = i \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + mx^2) \sqrt{(1 + x^2)(1 + k^2 x^2)}}. \quad (73)$$

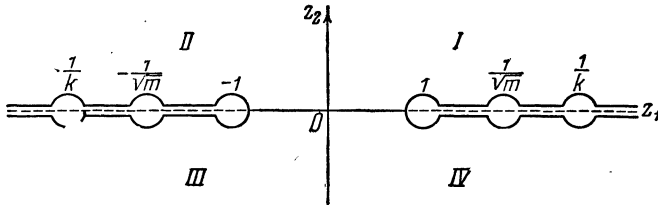
Величина ω'' дается равенством

$$\omega'' = \frac{k^2 i}{m - k^2} \int_0^1 \frac{dx}{(1 - m'x^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}}, \quad (74)$$

где

$$m' = \frac{mk'^2}{m - k^2}. \quad (75)$$

с) Случай $n = -m$, $k^2 < m < 1$. Плоскость z с разрезами вдоль вещественной оси от точки $+1$ до $+\infty$ и от -1 до $-\infty$ (фиг. 64) переходит



Фиг. 64

в область, изображенную на фиг. 65. Квадранты I, II, III, IV плоскости z отображаются соответственно на части фиг. 65, отмеченные цифрами I, II, III, IV . Границам каждой из этих областей отвечают отрезки разрезом вещественной оси и мнимые полуоси. Так, для первого квадранта плоскости z отрезку от 0 до 1 соответствует отрезок от O до точки ω .

Верхнему краю разреза от 1 до $\frac{1}{\sqrt{m}}$

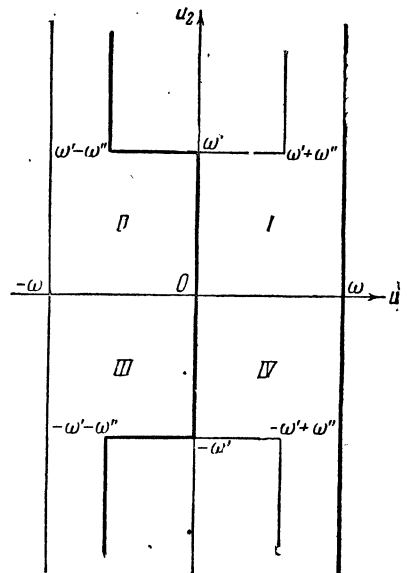
на плоскости z соответствует полупрямая, параллельная мнимой оси, идущая от точки ω в точку $\omega + i\infty$ на плоскости u . Верхнему краю разреза от точки $\frac{1}{\sqrt{m}}$ до точки $\frac{1}{k}$ на плоскости z отвечает

полупрямая, параллельная мнимой оси и идущая из точки $-\omega'' + i\infty$ в точку $\omega' - \omega''$ на плоскости u . Верхнему краю

разреза от точки $\frac{1}{k}$ до ∞ на плоскости z

соответствует прямая, соединяющая точки

$\omega' - \omega''$ и ω' . Наконец, мнимой положительной полуоси отвечает отрезок от ω' до O .



Фиг. 65

Границы областей II, III и IV представляют собой отображения соответствующих отрезков верхних и нижних краев разрезов вещественной оси и мнимых полуосей плоскости z. Из сказанного относительно границ области I легко видеть, как соответствуют границы областей отрезкам разрезов и мнимой оси на плоскости z. Отметим, что область I частично налегает на область II и область III частично налегает на область IV.

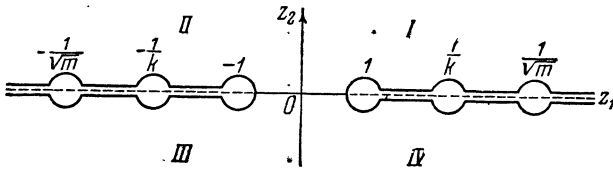
Величины ω , ω' и ω'' определяются равенствами

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - mx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \tag{76}$$

$$\omega' = i \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + mx^2) \sqrt{(1 + x^2)(1 + k^2x^2)}}, \tag{77}$$

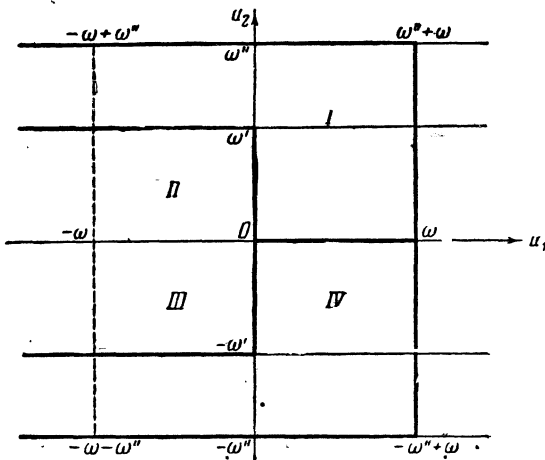
$$\omega'' = k^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(m - k^2x^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}. \tag{78}$$

д) Случай $n = -m$, $0 < m < k^2$. Плоскость z с разрезами вдоль вещественной оси от точки +1 до $+\infty$ и от точки -1 до точки $-\infty$ (фиг. 66) отображается на часть плоскости u, указанную на фиг. 67. Квадрантам I, II, III, IV плоскости z соответствуют части фиг. 67, отме-



Фиг. 66

ченные цифрами I, II, III, IV. Границы части I соответствуют границам квадранта I. Отрезку плоскости z от 0 до 1 соответствует отрезок вещественной оси от точки 0 до точки ω плоскости u.



Фиг. 67

Верхнему краю разреза от точки 1 до точки $\frac{1}{k}$ плоскости z отвечает отрезок, соединяющий точки ω и $\omega + \omega''$ на плоскости u. Верхнему краю разреза от точки $\frac{1}{k}$ до точки $\frac{1}{\sqrt{m}}$ отвечает полупрямая, идущая от точки $\omega + \omega''$ до $\omega + \omega'' - \infty$. Верхнему краю разреза от точки $\frac{1}{\sqrt{m}}$ до ∞ отвечает полупрямая, соединяющая ω' с $\omega' - \infty$. Наконец, отображением положительной мнимой полуоси служит отрезок с концами в точках 0

и ω' . Соответствие границ областей II, III, IV на плоскости u отрезкам верхнего и нижнего краев разрезов вещественной оси и положительной

и отрицательной мнимой полуоси плоскости z легко установить из сказанного. Области I и II отчасти налегают одна на другую. Также налегают одна на другую области III и IV .

Величины ω , ω' и ω'' определяются равенствами

$$\omega = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - mx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \quad (79)$$

$$\omega' = i \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + mx^2) \sqrt{(1 + x^2)(1 + k^2x^2)}}, \quad (80)$$

$$\omega'' = \frac{k^2i}{k^2 - m} \int_0^1 \frac{dx}{(1 + n'x^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2x^2)}}, \quad (81)$$

где

$$n' = \frac{mk'^2}{k^2 - m}. \quad (82)$$

Отметим в заключение, что правая полуплоскость z с разрезом от $+1$ до $+\infty$ отображается на многоугольную фигуру с вершинами

$$\omega + \omega'', \quad \left\{ \begin{array}{l} -\infty + \omega'' \\ -\infty + \omega' \end{array} \right\}, \quad \omega', \quad -\omega', \quad \left\{ \begin{array}{l} -\infty - \omega' \\ -\infty - \omega'' \end{array} \right\}, \quad -\omega'' + \omega.$$

Левая полуплоскость z с разрезом от ∞ до -1 отображается на многоугольную фигуру, симметричную указанной относительно оси Ou_2 . Эти фигуры частично налегают одна на другую. Совместно они дают отображения плоскости z с разрезами.

§ 9. Конформное отображение треугольника на полуплоскость при помощи эллиптических функций. Конформное отображение полуплоскости z на треугольник ABC с углами $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ при вершинах A, B, C , расположенный в плоскости u , дается формулой

$$u = l \int_{z_0}^z \frac{dx}{(x-a)^{1-\alpha} (x-b)^{1-\beta} (x-c)^{1-\gamma}} + m, \quad (83)$$

где a, b, c —вещественные числа, являющиеся абсциссами точек, которые отображаются вершинами треугольника A, B, C . Значение z_0 может быть задано произвольно. Значения постоянных l и m зависят от выбора z_0 и определяются размерами треугольника ABC и его положением на плоскости u . Примем во внимание, что конформное отображение полуплоскости z на треугольник ABC всегда может быть осуществлено таким образом, чтобы три выбранные точки действительной оси отобразились в вершинах треугольника ABC .

Выберем преобразование таким образом, чтобы точкам A, B, C соответствовали точки $0, 1$ и ∞ на плоскости z , и положим $z_0 = 0$. Равенство (83) представится в виде

$$u = l' \int_0^z \frac{dx}{x^{1-\alpha} (1-x)^{1-\beta}} + m'. \quad (84)$$

Заметим, что треугольник ABC можно расположить на плоскости u так, чтобы вершина A приходилась в начале координат, а точка B лежала на действительной оси. При таком положении треугольника ABC

на плоскости u величина m' равна нулю, а l' — вещественное число, зависящее от размеров стороны AB . Обозначим длину стороны AB треугольника ABC через L . Множитель l' , входящий в формулу (84), определяется равенством

$$l' = \frac{L}{B(\alpha, \beta)}, \quad (85)$$

где

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} dx.$$

Равенство (84) принимает вид

$$u = \frac{L}{B(\alpha, \beta)} \int_0^2 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \quad (86)$$

Обратная функция $z=f(u)$, осуществляющая конформное отображение треугольника ABC на полуплоскость, будет эллиптической в следующих случаях (глава IV, § 16).

Случай 1. $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. В этом случае треугольник ABC будет равнобедренным.

Отображающая функция имеет вид

$$z = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} \cdot \frac{L^3}{B^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \wp\left(u - Le^{\frac{\pi i}{3}}; 0, g_3\right), \quad (87)$$

где

$$g_3 = -\frac{B^6\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{729L^6}. \quad (88)$$

Случай 2. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$. В этом случае треугольник ABC будет прямоугольным и равнобедренным. Отображающая функция имеет вид

$$z = 1 + \frac{256}{B^4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} L^4 \wp^2\left(u - Le^{\frac{\pi i}{2}}; g_2, 0\right), \quad (89)$$

где

$$g_2 = -\frac{1}{64} \cdot \frac{B^4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}{L^4}. \quad (90)$$

Случай 3. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$. В этом случае треугольник ABC будет прямоугольным и один из катетов, именно AB , вдвое меньше гипотенузы AC . Отображающая функция имеет вид

$$z = 1 + \frac{6^2 L^6}{B^6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)} \wp^3\left(u - iL\sqrt{3}; 0, g_3\right), \quad (91)$$

где

$$g_3 = -\frac{B^6\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}{54L^6}. \quad (92)$$

ГЛАВА VI

МОДУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Инварианты g_2, g_3 как функции отношения периодов. Функция $\wp(u)$, если рассматривать ее как функцию аргумента u и периодов 2ω и $2\omega'$, является однородной функцией этих переменных величин:

$$\wp(\lambda u; \lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^2} \wp(u; \omega, \omega'). \quad (1)$$

Инварианты g_2 и g_3 суть однородные функции периодов 2ω и $2\omega'$:

$$g_2(\lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^4} g_2(\omega, \omega'), \quad (2)$$

$$g_3(\lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^6} g_3(\omega, \omega'). \quad (3)$$

Если положить

$$\lambda = \frac{1}{\omega}$$

и обозначить

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \tau_1 + i\tau_2, \quad (4)$$

то инварианты g_2 и g_3 представятся в виде

$$g_2(\omega, \omega') = \frac{1}{\omega^4} g_2(1, \tau) = \frac{15}{4\omega^4} \sum'_{m, n} \frac{1}{(m + n\tau)^4} \quad (5)$$

и

$$g_3(\omega, \omega') = \frac{1}{\omega^6} g_3(1, \tau) = \frac{35}{16\omega^6} \sum'_{m, n} \frac{1}{(m + n\tau)^6}, \quad (6)$$

где двойное суммирование распространяется на все целые значения m и n за исключением m и n , одновременно равных нулю. Ряды, стоящие в правых частях равенств (5) и (6), сходятся при всех значениях τ , для которых $\tau_2 > 0$.

Отметим, что

$$g_2 = 0 \quad \text{при } \tau = i \quad (7)$$

и

$$g_3 = 0 \quad \text{при } \tau = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}. \quad (8)$$

При замене основных периодов 2ω и $2\omega'$ периодами $2\tilde{\omega}$ и $2\tilde{\omega}'$ согласно равенствам

$$\tilde{\omega}' = a\omega' + b\omega, \quad \tilde{\omega} = c\omega' + d\omega, \quad (9)$$

где a, b, c, d — целые числа, связанные соотношением

$$ad - bc = 1, \quad (10)$$

Функция $\wp(u; \omega, \omega')$ и инварианты $g_2(\omega, \omega')$ и $g_3(\omega, \omega')$ остаются неизменными:

$$\wp(u; \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \wp(u; \omega, \omega'), \quad (11)$$

$$g_2(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = g_2(\omega, \omega'), \quad (12)$$

$$g_3(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = g_3(\omega, \omega'), \quad (13)$$

Величины $e_1 = \wp(\omega; \omega, \omega')$, $e_2 = \wp(\omega + \omega'; \omega, \omega')$ и $e_3 = \wp(\omega'; \omega, \omega')$ переходят одни в другие. Как происходит этот переход, зависит от значений, принимаемых числами a, b, c, d . Соответствующее правило для определения получаемых при этом значений

$$e_\alpha = \wp(\tilde{\omega}; \tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), e_\beta = \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'; \tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), e_\gamma = \wp(\tilde{\omega}'; \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$$

было дано в § 11.

Отношение периодов

$$\tau' = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \quad (14)$$

получается из отношения τ дробнолинейной подстановкой

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1, \quad (15)$$

называемой унимодулярной. Следует отметить, что в силу условия (10) мнимая часть τ' положительна, когда мнимая часть τ положительна.

§ 2. Абсолютный инвариант. Абсолютным инвариантом называется величина, определяемая равенством

$$I = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}. \quad (16)$$

Если рассматривать величину I как функцию периодов 2ω и $2\omega'$, то оказывается, что I зависит только от отношения периодов:

$$I(\tau) = \frac{g_2^3(1, \tau)}{g_2^3(1, \tau) - 27g_3^2(1, \tau)}. \quad (17)$$

Абсолютный инвариант как функция отношения периодов τ определяется равенством (17) для всех значений τ , для которых мнимая часть положительна.

Замечательное свойство абсолютного инварианта выражается равенством:

$$I\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = I(\tau), \quad (18)$$

где a, b, c, d — целые числа, удовлетворяющие соотношению $ad - bc = 1$. Это равенство показывает, что для двух значений τ и τ' , связанных соотношением (15), значение абсолютного инварианта одинаково.

Свойство абсолютного инварианта, выражаемое равенством (18), в известном смысле аналог двойкой периодичности функции $\wp(u)$. В то время как функция $\wp(u)$ принимает одинаковые значения в точках u и u' , связанных соотношением

$$u' = u + 2m\omega + 2n\omega'. \quad (19)$$

где m и n — целые числа, абсолютный инвариант получает одинаковые значения для значений τ и τ' , связанных соотношением (15).

Назовем точки τ и τ' плоскости переменного τ , связанные соотношением (15), конгруэнтными. Основной, или фундаментальной, областью абсолютного инварианта называется область плоскости переменного $\tau = \tau_1 + \tau_2 i$, обладающая следующими свойствами.

1. Каждая точка верхней полуплоскости τ имеет конгруэнтную точку τ_0 , принадлежащую фундаментальной области.

2. Среди точек фундаментальной области нет конгруэнтных.

Основную область можно выбирать различно. Обычно основную область выбирают так, как показано на фиг. 68. Основная область абсолютного инварианта является аналогом параллелограмма периодов эллиптической функции. На фиг. 68 отмечена основная область абсолютного инварианта. Границами области служат прямые $\tau_1 = \frac{1}{2}$

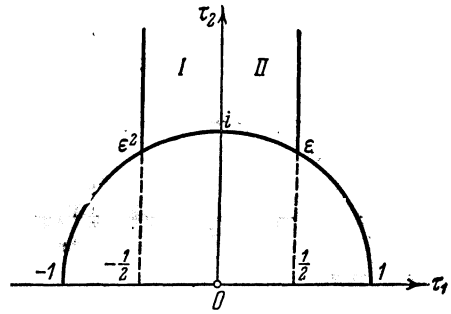
и $\tau_1 = -\frac{1}{2}$, параллельные мнимой

оси, и окружность радиуса единицы с центром в начале координат. На границах основной области абсолютный инвариант $I(\tau)$ принимает вещественные значения. Когда τ изменяется, принимая значения вдоль прямой, параллельной мнимой

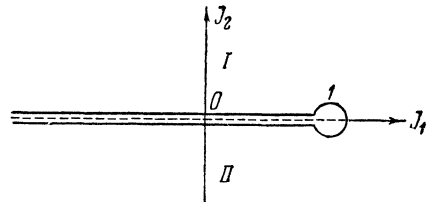
оси, от $-\frac{1}{2} + i\infty$ до ε^2 , абсолютный инвариант $I(\tau)$ возрастает от $-\infty$ до 0. При изменении τ по дуге окружности от ε^2 до i абсолютный инвариант возрастает от 0 до 1. Наконец, при изменении τ от i до $i\infty$ по мнимой оси абсолютный инвариант возрастает от 1 до ∞ . Область I служит конформным отображением верхней полуплоскости переменного I . Вся плоскость с разрезом вдоль вещественной оси от точки 1 до $-\infty$ отображается на всю основную область абсолютного инварианта (фиг. 69).

Нижняя полуплоскость отображается при этом областью II . Границы области II , симметричные границам области I относительно мнимой оси, отображают нижние края тех же частей разреза вещественной оси плоскости I .

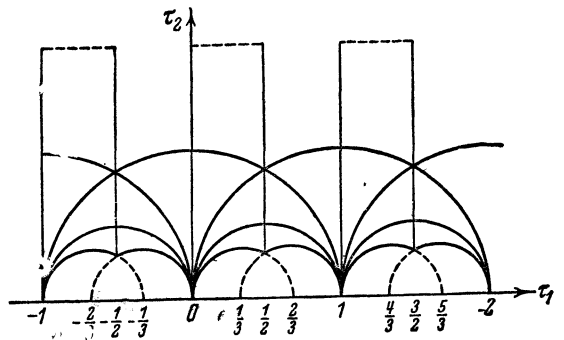
Отображение взаимно однозначно. Каждой точке плоскости I отвечает одна и только одна точка основной области на плоскости τ . Унимодулярные подстановки (15) переводят основную область в области, ограниченные прямыми линиями и дугами кругов, ортогональных к вещественной оси. На фиг. 70 дано изображение этих областей. Точки каждой из областей конгруэнтны соответствующим точкам основной области. В каждой из областей уравнение



Фиг. 68



Фиг. 69



Фиг. 70

$$I \doteq I(\tau) \tag{20}$$

при данном значении I имеет только один корень. На границах отдельных областей $I(\tau)$ принимает вещественные значения. Бесконечно далекой точке плоскости τ , где $I(\tau)$ обращается в бесконечность, конгруэнтны рациональные точки вещественной оси. При приближении к ним $|I(\tau)|$ возрастает беспредельно.

В смежности с бесконечно далекой точкой абсолютный инвариант представляется рядом

$$I(\tau) = \frac{1}{12^3 q^2} (1 + 744q^2 + 196844q^4 + \dots), \quad (21)$$

$$q = e^{\pi i \tau} \quad (\tau = i\rho).$$

Зная отношение периодов, легко найти величину q .

Отметим в заключение, что для значений τ , симметричных относительно мнимой оси, абсолютный инвариант принимает сопряженные значения.

Величина абсолютного инварианта связана со значением модуля

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

соотношением

$$I(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{(k^2 k'^2)^2} = \frac{4(1 - k^2 + k^4)^3}{27(k^2 - k^4)^2}. \quad (22)$$

§ 3. Модуль k^2 как функция отношения периодов. Величина модуля k^2 , если рассматривать ее как функцию $k^2(\tau)$ отношения периодов, обладает многими замечательными свойствами, аналогичными свойствам абсолютного инварианта.

Прежде всего величина $k^2(\tau)$ не изменяется при замене τ на τ' , когда

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1,$$

и числа a, d нечетные, в то время как числа b и c четные:

$$k^2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = k^2(\tau). \quad (23)$$

Основная область функции k^2 определяется тем ее свойством, что каждой точке τ верхней полуплоскости τ соответствует одна и только одна точка τ_0 основной области, ей конгруэнтная. Основная область функции $k^2(\tau)$ изображена на фиг. 71. Она ограничена прямыми $\tau_1 = -1$ и $\tau_1 = 1$, параллельными мнимой оси, и окружностями

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 \pm \tau_1 = 0.$$

В области I функция $k^2(\tau)$ принимает значения с положительной мнимой частью.

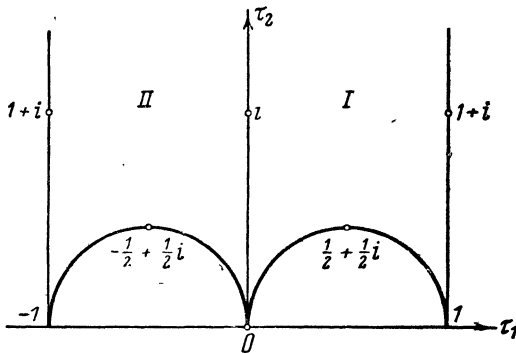
В области II значения, принимаемые функцией $k^2(\tau)$, имеют отрицательную мнимую часть. На границах областей I и II функция $k^2(\tau)$ принимает вещественные значения.

В точках, симметричных относительно мнимой оси, функция $k^2(\tau)$ получает комплексные сопряженные значения.

Изменение значений $k^2(\tau)$ на границе основной области происходит следующим образом.

При переходе вдоль прямой $\tau_1 = 1$ от точки $1 + i\infty$ в точку 1 функция $k^2(\tau)$ от 0 убывает до $-\infty$. В точке $1 + i$ имеем

$$k^2(1 + i) = -1. \quad (24)$$



Фиг. 71

При движении по окружности $(\tau_1 - \frac{1}{2})^2 + \tau_2^2 = 1$ от точки 1 к точке O функция $k^2(\tau)$ убывает от ∞ до 1. В точке $\frac{1}{2}(1+i)$ имеем

$$k^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2. \quad (25)$$

При переходе вдоль мнимой оси из точки O в точку $i\infty$ функция $k^2(\tau)$ уменьшается от 1 до 0. Отметим, что

$$k^2(i) = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

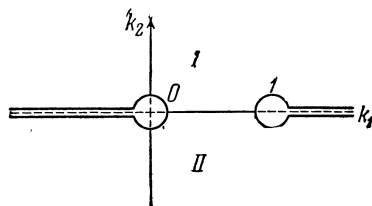
На участках границ областей I и II, симметричных относительно мнимой оси, функция $k^2(\tau)$ принимает одинаковые значения. Основная область функции $k^2(\tau)$ служит конформным отображением плоскости переменного

$$k^2(\tau) = k_1 + k_2 i,$$

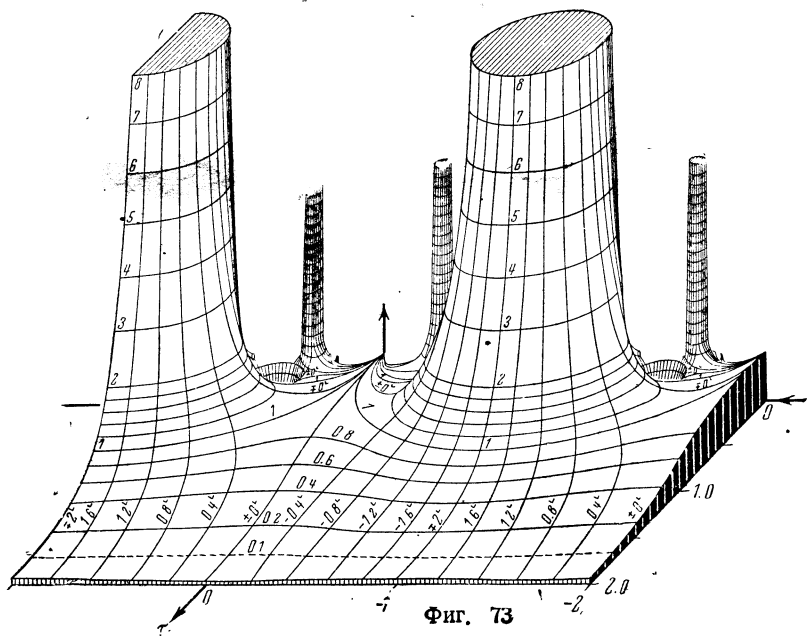
разрезанной по вещественной оси от точки 1 до точки ∞ и от точки ∞ до точки $-\infty$ (фиг. 72). Распределение значений функции $k^2(\tau)$ показано на фиг. 73 и 74. Модуль функции $|k^2(\tau)|$ представлен как ордината поверхности. На поверхности отмечены линии одинаковых высот и одинаковых значений аргумента. (Модель поверхности показана в двух видах.)

На фиг. 73 вещественная ось находится сзади и мнимая ось направлена вперед. На фиг. 74 мнимая ось обращена назад, а вещественная ось находится впереди.

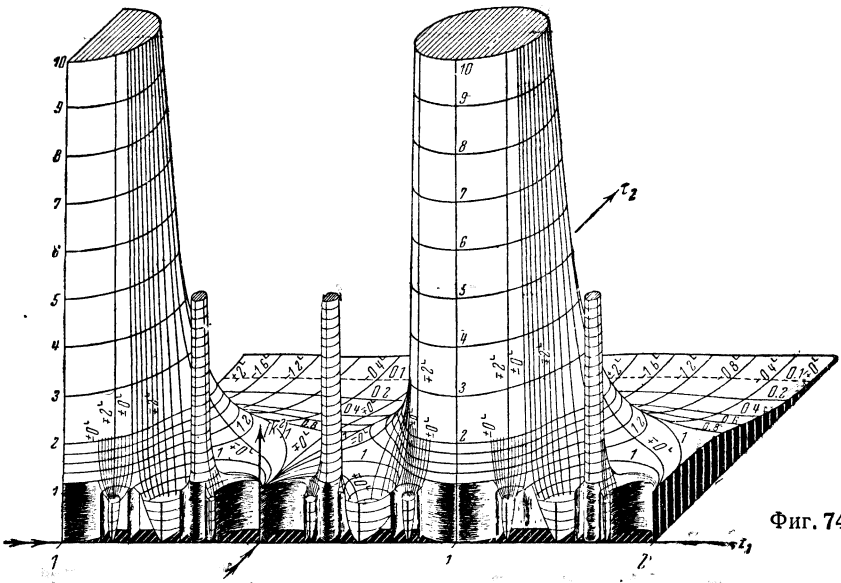
Фиг. 75 дает изображение поверхности $|k^2(\tau)|$ на плоскости. Одна система линий показывает высоты поверхности. Каждая из линий этой системы есть линия одинаковых значений модуля функции. Каждая из линий другой системы есть линия одинакового значения аргумента функции $k^2(\tau)$. Она является проекцией линии кратчайшего спуска поверхности.



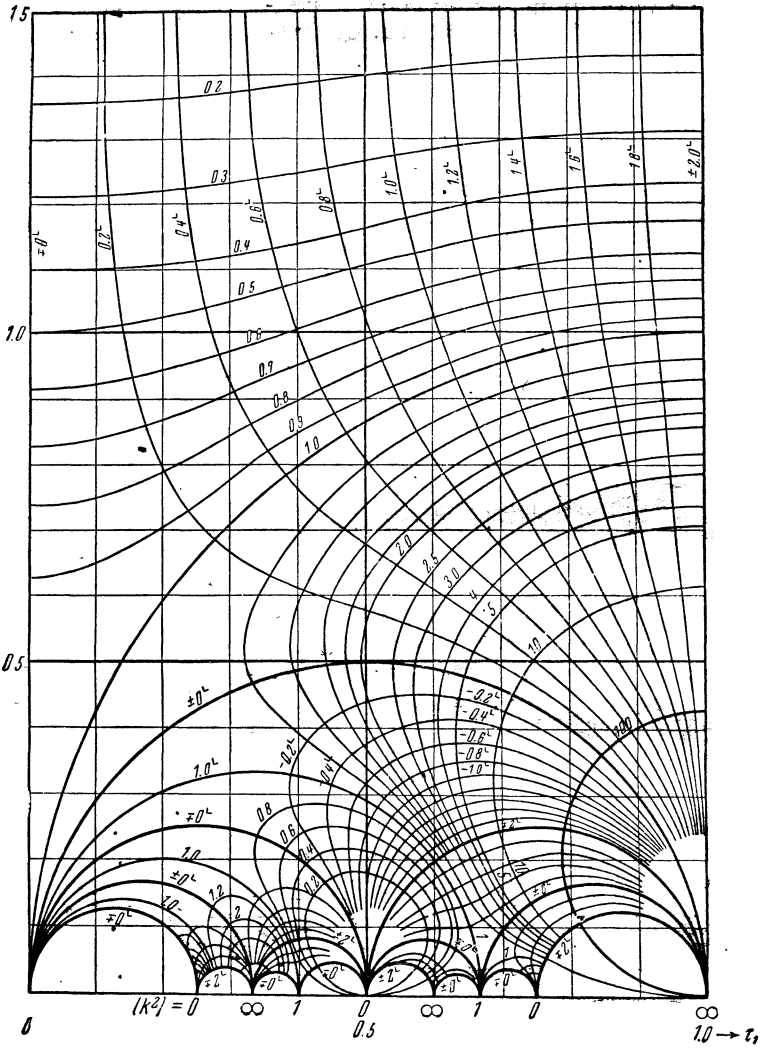
Фиг. 72



Фиг. 73



Фиг. 74



Фиг. 75

Величина $k^2(\tau)$ выражается через τ следующим образом:

$$k^2(\tau) = \frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} \approx 16q \frac{1 + 4q^2}{1 + 8q + 24q^2}, \quad (27)$$

где

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad (\tau = i \rho).$$

Эта формула вместе с другими, удобными для вычисления k^2 по данному отношению периодов, была указана в главе III.

Из равенства (27) легко получается формула, служащая для вычисления τ при заданном значении k^2 .

Если положить $k = \sin \alpha$ и

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}, \quad (28)$$

то

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1701\lambda^{17} + \dots \quad (29)$$

В частности при небольшом λ имеем

$$q \approx \lambda = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}. \quad (30)$$

и

$$\tau = -\frac{i}{\pi} \ln q. \quad (31)$$

Когда угол α больше 45° , выгоднее вычислить величину

$$q' = e^{-\pi e'} = e^{-\frac{\pi}{e}} = e^{-\frac{\pi}{\tau}},$$

пользуясь равенством

$$q' = \lambda' + 2\lambda'^5 + 15\lambda'^9 + 150\lambda'^{13} + 1701\lambda'^{17} + \dots, \quad (32)$$

где

$$\lambda' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\sin \alpha}}{1 + \sqrt{\sin \alpha}},$$

и затем уже определить τ по формуле

$$\tau = -\pi i : \ln q'. \quad (33)$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Вычисление значений функций Якоби. Вычисление значений функций Якоби может быть произведено по специальным таблицам этих функций. Однако такие таблицы нельзя считать распространенными. По этой причине в настоящей главе показывается, каким образом могут быть производимы вычисления значений эллиптических функций с помощью таблиц эллиптических интегралов Лежандра, сравнительно довольно распространенных.

Положим, что требуется определить значение эллиптических функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ при заданном вещественном значении аргумента u и модуля $k < 1$.

Вычисление начинаем с определения значения K по данному значению k из таблиц Лежандра. Определив значение K , производим приведение аргумента. Для этой цели отнимаем от аргумента u или прибавляем к нему целое кратное K с таким расчетом, чтобы получилось значение u_0 , удовлетворяющее соотношениям

$$0 \leq u_0 \leq K, \quad u = u_0 + mK, \quad (1)$$

где m — целое число.

По значениям аргумента u_0 и модуля k определяем значение амплитуды φ_0 из таблиц Лежандра.

Значения функций $\operatorname{sn}(u_0, k)$ и $\operatorname{cn}(u_0, k)$ находятся с помощью таблиц натуральных тригонометрических величин, так как

$$\operatorname{sn}(u_0, k) = \sin \varphi_0, \quad \operatorname{cn}(u_0, k) = \cos \varphi_0. \quad (2)$$

Значение функции $\operatorname{dn}(u_0, k)$ определяется равенством

$$\operatorname{dn}(u_0, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0}. \quad (3)$$

Значения $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ находятся с помощью таблицы, указанной в § 12 главы II, по вычисленным значениям $\operatorname{sn}(u_0, k)$, $\operatorname{cn}(u_0, k)$, $\operatorname{dn}(u_0, k)$.

Пример 1. Вычислить значения $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ при $u = 1$, $k = \frac{1}{2}$ с точностью до 0.001.

Значение модулярного угла α находится по данной величине k :

$$\alpha = 30^\circ.$$

Величина K получается из таблиц Лежандра по найденной величине α .

$$K = 1.6853.$$

Данное значение u удовлетворяет неравенству $0 \leq u \leq K$, поэтому приведения аргумента делать не приходится.

Из таблиц Лежандра определяем значение амплитуды.

Ближайшее значение φ , дающее аргумент, меньший единицы, есть $\varphi_1 = 55^\circ$. Аргумент равен 0.9933. Ближайшее большее значение амплитуды 56° соответствует значению аргумента, равному 1.0125.

С помощью простого интерполирования находим

$$\frac{1 - 0.9933}{1.0125 - 0.9933} = \frac{\varphi - 55^\circ}{56^\circ - 55^\circ}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi \approx 55^\circ 21',$$

Простое интерполирование при данной точности допустимо по той причине, что таблицы Лежандра, как это видно из приводимой табл. 25, дают постоянную первую разность, равную 0.191 или 0.092.

$$\alpha = 3.0^\circ$$

Таблица 25

φ	53°	54°	55°	56°	57°
$F(\varphi)$	0.9551	0.9742	0.9933	1.0125	1.0317

Величины $\operatorname{sn}(u, k)$ и $\operatorname{cn}(u, k)$ находим по таблицам тригонометрических величин:

$$\operatorname{sn}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \sin 55^\circ 21' = 0.8226, \quad \operatorname{cn}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \cos 55^\circ 21' = 0.5685.$$

Величина $\operatorname{dn}(u, k)$ находится из равенства

$$\operatorname{dn}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 55^\circ 21'} = 0.9114.$$

Пример 2. Вычислить значения $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ при $u = 6.3883$,

$$k^2 = \frac{1}{2}.$$

Для угла α находим значение 45° из условия

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение K определяется по таблицам Лежандра:

$$K = 1.8541.$$

Производим приведение аргумента

$$u_0 = 6.3883 - 3 \times 1.8541 = 0.8260.$$

По таблицам Лежандра находим для амплитуды значение

$$\varphi_0 = 45^\circ.$$

Значения $\operatorname{sn}(u_0, k)$ и $\operatorname{cn}(u_0, k)$ имеем непосредственно:

$$\operatorname{sn}(u_0, k) = \sin 45^\circ = 0.7071, \quad \operatorname{cn}(u_0, k) = \cos 45^\circ = 0.7071.$$

Значение $\operatorname{dn}(u_0, k)$ находится из равенства

$$\operatorname{dn}(u_0, k) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 45^\circ} = 0.8660.$$

Для определения значений $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ воспользуемся формулами приведения (глава II, § 12)

$$\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(u_0 + 3K, k) = \operatorname{sn}(u_0 - K, k)$$

и далее

$$\operatorname{sn}(u, k) = -\frac{\operatorname{cn}(u_0, k)}{\operatorname{dn}(u_0, k)} \approx -\frac{0.7071}{0.8660} = -0.8165.$$

Таким же образом

$$\operatorname{cn}(u, k) = \operatorname{cn}(u_0 + 3K, k) = \operatorname{cn}(u_0 - K, k) = -\frac{k' \operatorname{sn}(u_0, k)}{\operatorname{dn}(u_0, k)}$$

и, стало быть,

$$\operatorname{sn}(u, k) = -\frac{0.7071 \times 0.7071}{0.8660} \approx -0.5773.$$

Наконец

$$\operatorname{dn}(u, k) = \operatorname{dn}(u_0 + 3K, k) = \operatorname{dn}(u_0 + K, k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u_0, k)}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{0.7071}{0.8660} \approx 0.8165.$$

Вычисление значений функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ для чисто мнимых значений аргумента с помощью формул (91), (92), (93) главы II приводится к вычислению значений тех же функций при вещественном значении аргумента.

Пример. Вычислить значения функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ при $u = 7.3147i$, $k = 0.8191$.

Отмечаем прежде всего, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(7.3147i, 0.8191) &= i \frac{\operatorname{sn}(7.3147, k')}{\operatorname{cn}(7.3147, k')}, \\ \operatorname{cn}(7.3147i, 0.8191) &= \frac{1}{\operatorname{cn}(7.3147, k')}, \\ \operatorname{dn}(7.3147i, 0.8191) &= \frac{\operatorname{dn}(7.3147, k')}{\operatorname{cn}(7.3147, k')}. \end{aligned}$$

Для вычисления значений эллиптических функций, стоящих в правых частях написанных здесь равенств, нет нужды вычислять k' .

Находим угол α , соответствующий модулю k :

$$\sin \alpha = 0.8191, \quad \alpha \approx 55^\circ.$$

Угол α' , соответствующий модулю k' , дополняет α до 90° , а потому

$$\alpha' = 35^\circ.$$

Из таблицы Лежандра находим

$$K' = 1.7312.$$

Производим приведение аргумента.

$$\frac{u}{7.3147} = \frac{K'}{4 \times 1.7312} + \frac{u_0}{0.3899}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(7.3147, k') &= \operatorname{sn}(0.3899, k'), \\ \operatorname{cn}(7.3147, k') &= \operatorname{cn}(0.3899, k'), \\ \operatorname{dn}(7.3147, k') &= \operatorname{dn}(0.3899, k'). \end{aligned}$$

Обращаемся к разысканию амплитуды

$$\varphi = \operatorname{am} 0.3899$$

по таблицам Лежандра.

Выписка из этих таблиц (табл. 26) показывает, что при вычислении можно ограничиться

$$\alpha = 35^\circ$$

Таблица 26

φ	21°	22°	23°	24°	25°
$F(\varphi)$	0.3692	0.3870	0.4049	0.4229	0.4408

линейным интерполированием. Табличная разность равняется 0.0179.

Для определения φ получаем пропорцию

$$\frac{\varphi - 22^\circ}{23^\circ - 22^\circ} = \frac{0.3899 - 0.3870}{0.0179},$$

откуда

$$\varphi = 22^\circ 10'.$$

Значения эллиптических функций даются равенствами

$$\operatorname{sn}(0.3399, \sin 35^\circ) = \sin 22^\circ 10' = 0.3773, \quad \operatorname{cn}(0.3899, \sin 35^\circ) = \cos 22^\circ 10' = 0.9261.$$

$$\operatorname{dn}(0.3899, \sin 35^\circ) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 22^\circ 10'} \approx 0.9763.$$

Вычисление этих значений производится по таблицам Лежандра, как показано выше.

В силу отмеченных выше соотношений имеем:

$$\operatorname{sn}(7.3147, \sin 35^\circ) = 0.3773, \quad \operatorname{cn}(7.3147, \sin 35^\circ) = 0.9261, \quad \operatorname{dn}(7.3147, \sin 35^\circ) = 0.9763.$$

Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{sn}(7.3147 i, 0.8191) = i \frac{0.3773}{0.9261} \approx 0.4074,$$

$$\operatorname{cn}(7.3147 i, 0.8191) = \frac{1}{0.9261} \approx 1.0798,$$

$$\operatorname{dn}(7.3147 i, 0.8191) = \frac{0.9763}{0.9261} \approx 1.0542.$$

Вычисление значений функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ при комплексных значениях аргумента согласно формулам (94), (95), (96) главы II приводится к вычислению значений тех же функций при вещественных значениях аргумента.

Пример. Вычислить значения функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ при

$$u = 1.1424 + 0.5356 i \text{ и } k^2 = \frac{1}{2}.$$

Для этой цели следует подсчитать значения функций $\operatorname{sn}(1.1424; k)$, $\operatorname{cn}(1.1424; k)$, $\operatorname{dn}(1.1424; k)$ и функций $\operatorname{sn}(0.5356; k')$, $\operatorname{cn}(0.5356; k')$, $\operatorname{dn}(0.5356; k')$.

В рассматриваемом примере

$$k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ, \quad K = K' = 1.8541.$$

Приведение аргумента производить не приходится.

По таблицам Лежандра находим

$$\varphi = \operatorname{am}\left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 60^\circ.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sn}\left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \approx 0.8660,$$

$$\operatorname{cn}\left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$\operatorname{dn}\left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{10} \approx 0.7906.$$

Те же таблицы Лежандра дают

$$\varphi' = \operatorname{am}\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 30^\circ.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{sn}\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin 30^\circ = 0.5,$$

$$\operatorname{cn}\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cos 30^\circ = 0.8660,$$

$$\operatorname{dn}\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{14} = 0.9354.$$

Определяем значение знаменателя в правой части равенств (94), (95), (96) главы II:

$$\operatorname{cn}^2\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sn}^2\left(0.5356; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sn}^2\left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{32} = \frac{27}{32}.$$

Числитель дроби, представляющей $\operatorname{sn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, имеет вещественную часть, равную

$$\operatorname{sn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{1}{4} \sqrt{14} = \frac{1}{8} \sqrt{42}.$$

Коэффициент при мнимой его части равен

$$\operatorname{cn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\operatorname{cn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sqrt{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{30}}{32}.$$

Таким образом

$$\operatorname{sn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4}{27} \sqrt{42} + \frac{1}{27} \sqrt{30} i \approx 0.9601 + 0.2028 i.$$

Числитель дроби, выражающей $\operatorname{cn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, имеет вещественную часть, равную

$$\operatorname{cn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{cn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{3}.$$

Мнимая часть числителя равняется

$$\operatorname{sn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

или

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{1}{4} \sqrt{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sqrt{14} = \frac{1}{32} \sqrt{105}.$$

Получаем, что

$$\operatorname{cn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{8}{27} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{105}}{27} i = 0.5131 - 0.3794 i$$

Вещественная часть числителя дроби, выражающей

$$\operatorname{dn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

равняется

$$\operatorname{dn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{cn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{105}}{16}.$$

Мнимая часть числителя равна

$$\frac{1}{2} \operatorname{sn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{cn} \left(1.1424, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left(0.5356, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{dn} \left(1.1424 + 0.5356 i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2\sqrt{105}}{27} - \frac{2\sqrt{3}}{27} i \approx 0.7588 - 0.1283 i.$$

В заключение отметим, что при помощи таблицы 19 главы II можно свести вычисление функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ при любом вещественном значении модуля k к случаю, когда $k < 1$.

Наконец, формулы (79), (80), (81) главы II приводят вычисление значений функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ при мнимом значении модуля k к вычислению значений функций Якоби при модуле

$$0 < k_1 = \frac{|k|}{\sqrt{1+|k^2|}} < 1.$$

§ 2. Вычисление аргумента u , когда задано значение одной из эллиптических функций $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ и значение модуля k . Начнем с рассмотрения вопроса о вычислении значений аргумента функции $\operatorname{sn}(u, k)$.

Пусть

$$\operatorname{sn}(u, k) = a.$$

При этом будем различать следующие случаи, отмеченные в дальнейшем.

1. Заданное значение a вещественное и $0 < a < 1$. Представим модуль k , который мы считаем положительным и меньшим единицы, в тригонометрической форме

$$k = \sin \alpha.$$

Определяем угол

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

По углам α и β находим с помощью таблиц Лежандра значения K и K' . По данному значению a определяем значение амплитуды φ из равенства

$$\sin \varphi = a.$$

Определив значение амплитуды φ из таблиц Лежандра по данным α и φ , находим простейшее значение аргумента u_0 .

Общее решение дается равенством

$$u = (-1)^m u_0 + 2mK + 2nK'i,$$

где m и n — целые числа.

Пример. Найти аргумент эллиптической функции по условию

$$\operatorname{sn}(u, 0.4384) = 0.7894.$$

Находим угол α по условию

$$\operatorname{sn} \alpha = 0.4384.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = 26^\circ,$$

$$\beta = 64^\circ.$$

По данным углам α и β находим

$$K = 1.6557,$$

$$K' = 2.2754.$$

Амплитуду φ находим из условия

$$\sin \varphi = 0.7894,$$

откуда

$$\varphi = 52^\circ 8'.$$

Обращаясь к таблицам Лежандра, имеем при $\alpha = 26^\circ$ (табл. 27).

Таблица 27

φ	50°	51°	52°	53°	54°
$u = F(\varphi, \alpha)$	0.8919	0.9105	0.9291	0.9477	0.9663

Первая разность остается постоянной и равна 0.0186.

Произведя интерполирование, получаем

$$\frac{52^\circ 8' - 52^\circ}{53^\circ - 52^\circ} = \frac{u - 0.9291}{0.0186}.$$

откуда

$$u_0 = 0.9291 + 0.0025 = 0.9316.$$

2. Заданное значение a вещественное и $1 < a < \frac{1}{k}$.

Из сказанного в главе V о распределении значений $\operatorname{sn} u$ в параллелограмме периодов и на его контуре следует, что простейшие значения аргумента, при которых a остается вещественным и лежит в промежутке $\frac{1}{k} > a > 1$, имеют вид

$$u_0 = iv + K, \quad 0 \leq v \leq K',$$

где v — вещественное положительное число.

Пользуясь равенством $\operatorname{sn}(u_0, k) = a$, получаем

$$\operatorname{sn}(iv + K, k) = \frac{\operatorname{cn}(iv, k)}{\operatorname{dn}(iv, k)} = a.$$

В силу равенств (92) и (93) главы II получаем

$$\frac{\operatorname{cn}(vi, k)}{\operatorname{dn}(vi, k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(v, k')} = a.$$

Аргумент v находится из условия

$$\operatorname{sn}(v, k') = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{k'a},$$

где для корня следует брать положительное значение.

Пример. Вычислить значение аргумента u из условия

$$\operatorname{sn}(u, 0.6133) = 1.5312.$$

Заданное значение функции заключается в пределах между 1 и $\frac{1}{k}$, как это следует из неравенства

$$1 < 1.5312 < \frac{1}{0.6133} \approx 1.630.$$

Находим сначала угол α по условию

$$\sin \alpha = 0.6133,$$

откуда следует, что

$$\alpha = 37^\circ 50', \quad \beta = 52^\circ 10'.$$

Для определения значений K и K' обращаемся к таблицам Лежандра. Имеем табл. 28.

Таблица 28

α	35°	36°	37°	38°	39°
K	1.7312	1.7415	1.7522	1.7633	1.7748
ΔK		0.0103	0.0107	0.0111	0.0115

Первая разность, как это видно из таблицы, не остается постоянной. Постоянное значение сохраняет вторая разность. Для определения значения K воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона со вторыми разностями

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(a),$$

где через h обозначена величина интервала по аргументу. Пользуясь этой формулой, получаем, положив $a = 38^\circ$, $x = 37^\circ 50'$, $h = -1^\circ$:

$$K = 1.7633 - 0.0111 \times \frac{10'}{60'} + 0.0004 \times \frac{1}{2} \times \frac{10'}{60'} \times \left(-\frac{50'}{60'}\right) \approx 1.7614.$$

Последний член суммы столь мал, что можно было ограничиться при вычислении K линейным интерполированием.

Переходим к определению K' . Из таблицы Лежандра имеем табл. 29.

Таблица 29

β	50°	51°	52°	53°	54°
K'	1.9356	1.9539	1.9729	1.9927	2.0133
$\Delta K'$	0.0183	0.0190	0.0198	0.0206	

Вторая разность остается постоянной. Интерполируя со вторыми разностями, находим

$$K' = 1.9729 + 0.0198 \times \frac{10'}{60'} + 0.0008 \times \frac{1}{2} \times \frac{10'}{60'} \times \left(-\frac{50'}{60'}\right).$$

Величина третьего слагаемого оказывается незначительной.

$$K' = 1.9762$$

Обращаемся к определению аргумента v . Имеем

$$\lg \frac{1}{a} = 1.8150 = \lg \sin 49^\circ 46' 30'',$$

откуда следует, что

$$\lg \operatorname{sn}(v', k') = \lg \cos 40^\circ 46' 30'' - \lg \sin 52^\circ 10' = 1.98174$$

и

$$\operatorname{am}(v, k') = 73^\circ 30'.$$

Обратимся теперь к таблицам Лежандра. Имеем табл. 30.

Таблица 30

$\varphi \backslash \alpha$	51°	52°	53°	54°
72°	1.4662	1.4752	1.4844	1.4939
73°	1.4922	1.5017	1.5114	1.5213
74°	1.5184	1.5283	1.5385	1.5490
75°	1.5447	1.5551	1.5653	1.5769

Первые разности таблицы не остаются постоянными. Однако их изменение незначительно. Поэтому производим интерполирование, ограничиваясь первыми разностями:

$$v = 1.5017 + (1.5283 - 1.5017) \frac{30'}{30'} + (1.5114 - 1.5017) \frac{10'}{60'}$$

$$v = 1.5017 + 0.0266 \times \frac{1}{2} + 0.0097 \times \frac{1}{6} = 1.5166.$$

Искомое значение аргумента дается равенством

$$u_0 = 1.7614 + 1.5166 i.$$

Общее решение получаем в виде

$$v = 1.7614 \{(-1)^m + 2m\} + \{1.5166 (-1)^m + 2n \cdot 1.9762\} i.$$

3. Заданное значение a вещественное и $\frac{1}{k} < a$. Простейшее значение u_0 , удовлетворяющее уравнению

$$\operatorname{sn}(u_0, k) = a,$$

имеет вид

$$u_0 = v + iK',$$

где

$$0 \leq v \leq K.$$

Аргумент v определяется равенством

$$\operatorname{sn}(v + iK'; k) = \frac{1}{k \operatorname{sn}(v, k)} = \dot{a},$$

или

$$\operatorname{sn}(v, k) = \frac{1}{ak}.$$

Пример. Вычислить аргумент функции $\operatorname{sn}(u, 0.4067)$ из условия

$$\operatorname{sn}(u, 0.4067) = 3.1725.$$

Находим сначала угол α по условию

$$\sin \alpha = 0.4067,$$

откуда следует, что

$$\alpha = 24^\circ, \quad \beta = 66^\circ.$$

Из таблицы Лежандра находим

$$K = 1.6426, \quad K' = 2.3439.$$

Далее

$$\lg \operatorname{sn}(v, k) = \lg \sin \varphi = -\lg 0.4067 - \lg 3.1725 = \overline{1.8893},$$

откуда

$$\operatorname{am}(v, k) = \varphi = 50^\circ 48'.$$

Из таблиц Лежандра имеем табл. 31

$$\alpha = -24^\circ$$

Таблица 31

φ	49°	50°	51°	52°
$F(\varphi', k)$	0.8708	0.8892	0.9075	0.9260

Линейное интерполирование дает

$$v = 0.9075 - 0.0183 \times \frac{12'}{60'} = 0.9038.$$

Простейшее значение аргумента дается равенством

$$u_0 = 0.9038 + 2.3439 i.$$

Общее решение имеет вид

$$u_0 = 0.9038 (-1)^m + 3.2852 m + 2.3439 \{(-1)^m + 2n\} i.$$

Числа m и n —произвольные целые.

4. Значение a —вещественное и отрицательное. В силу нечетности функции $\operatorname{sn}(u, k)$ определение простейшего значения аргумента u_0 может быть произведено следующим образом. Находим простейшее решение v_0 уравнения

$$\operatorname{sn}(v, k) = |a|.$$

Простейшее значение аргумента u_0 дается равенством

$$u_0 = -v_0.$$

5. Значение a —чисто мнимое: $a = bi$; b —вещественное. Функция $\operatorname{sn}(u, k)$ принимает чисто мнимые значения при чисто мнимых значениях аргумента. Положив

$$u = vi,$$

определяем v из соотношения

$$\operatorname{sn}(vi, k) = i \frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')} = bi.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sn}(v, k') = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Решение вопроса приводится к одному из рассмотренных случаев. Определив v , находим простейшее значение аргумента и по нему строим общее решение.

Пример. Определить аргумент функции $\operatorname{sn}\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ из условия

$$\operatorname{sn}\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = i.$$

Определяем сначала угол α по условию

$$\operatorname{sn} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Имеем

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 45^\circ.$$

Из таблиц Лежандра, находим

$$K = K' = 1.8541.$$

Обращаемся к определению аргумента v

$$\sin \varphi = \operatorname{sn}(v, k') = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{am}(v, k') = \varphi = 45^\circ.$$

Из таблиц Лежандра находим

$$v = 0.8260.$$

Простейшее значение аргумента дается равенством

$$u_0 = 0.8260i.$$

Общее решение задачи имеет вид

$$u = 3.7082 m + \{0.8260 (-1)^m + 3.7082 n\} i.$$

Числа m и n —целые.

Вычисление значения аргумента u по условию

$$\operatorname{sn}(u, k) = a$$

приводится к определению простейшего значения аргумента из равенства

$$\operatorname{sn}(u_0, k) = \sqrt{1 - a^2}.$$

Общее решение дается равенством

$$u = \pm u_0 + 4mK + 2n(K + K'i),$$

где m и n —произвольные целые числа.

Вычисление значения u по условию

$$\operatorname{dn}(u, k) = a$$

приводится к определению простейшего значения аргумента из равенства

$$\operatorname{sn}(u_0, k) = \frac{1}{k} \sqrt{1 - a^2}.$$

Общее решение дается равенством

$$u = \pm u_0 + 2mK + 4nK',$$

где m и n —произвольные целые числа.

§ 3. Вычисление периодов функции $\wp(u; g_2, g_3)$. Вычисление периодов 2ω и $2\omega'$ эллиптической функции $\wp(u; g_2, g_3)$, когда заданы инварианты, может быть произведено по таблицам Лежандра.

Различаем два случая.

Случай 1. $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$. В этом случае числа e_1, e_2, e_3 — вещественные, $e_1 > e_2 > e_3$. Вычисляем их по уравнению

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0.$$

Найдя корни e_1, e_2, e_3 уравнения, определяем модули

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (4)$$

По таблицам Лежандра вычисляем соответствующие значения

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right).$$

Периоды эллиптической функции $\wp(u)$ находятся из равенств

$$2\omega = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad 2\omega' = \frac{2K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}}. \quad (5)$$

Пример. Вычислить периоды функции $\wp(u; 13, -6)$

Корни уравнения

$$4z^3 - 13z + 6 = 0$$

выражаются числами

$$e_1 = \frac{3}{2}, \quad e_2 = \frac{1}{2}, \quad e_3 = -2.$$

Значение модулей k и k' дается равенствами

$$k^2 = \frac{5}{7}, \quad k'^2 = \frac{2}{7}.$$

Находим модулярные углы α и β :

$$\lg \sin \alpha = \frac{1}{2} \lg k^2 = \frac{1}{2} (\lg 5 - \lg 7) = \bar{1}.9269,$$

$$\alpha = 57^\circ 41', \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 32^\circ 19'.$$

По таблицам Лежандра отыскиваем K и K' .

Из таблиц Лежандра имеем табл. 32.

Таблица 32

β	31°	32°	33°	34°
K'	1.6941	1.7028	1.7119	1.7214

Интерполируем со вторыми разностями, получаем

$$K(32^\circ 19') = 1.7028 + 0.0091 \times \frac{19}{60} - \frac{1}{2} 0.0004 \times \frac{19}{60} \times \frac{41}{60} \approx 1.7057.$$

По таблицам Лежандра имеем табл. 33.

Таблица 33

α	56°	57°	58°	59°
K	2.0571	2.0804	2.1047	2.1300

Интерполируем со вторыми разностями:

$$K(57^\circ 41') = 2.1047 - 0.0243 \times \frac{19}{60} - \frac{1}{2} \times 0.0010 \frac{19}{60} \times \frac{41}{60},$$

$$K(57^\circ 41') = 2.1131.$$

Для периодов 2ω и $2\omega'$ получаем значения

$$2\omega' = 3.4114 : \sqrt{\frac{7}{2}} \approx 1.8234i,$$

$$2\omega = \frac{4.2262}{\sqrt{3.5}} \approx 2.2590.$$

Случай 2. $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$. В этом случае один корень e_2 — вещественный, а два другие e_1 и e_3 — комплексные сопряженные: $e_1 = m + ni$, $e_3 = m - ni$. Период $2\omega''$ — вещественный, а периоды 2ω и $2\omega'$ — комплексные сопряженные.

Вычисление периодов 2ω и $2\omega'$ в этом случае тем же приемом, что и в случае $\Delta > 0$, затруднительно. Поэтому вместо периодов 2ω и $2\omega'$ вычислим период $2\omega''$ и величину $\tilde{\omega}$, определяемую равенством

$$2\tilde{\omega} = 2\omega' - 2\omega.$$

Периоды 2ω и $2\omega'$ выражаются через ω'' и $\tilde{\omega}$:

$$2\omega = \omega'' - \tilde{\omega}, \quad 2\omega' = \omega'' + \tilde{\omega}. \tag{6}$$

Величина ω'' представляется интегралом

$$\omega'' = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_2)[(z-m)^2 + n^2]}}.$$

Последний интеграл подстановкой

$$z = e_2 + H \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2},$$

где

$$H = \sqrt{9m^2 + n^2},$$

приводится к канонической форме Лежандра

$$\omega'' = \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{K}{\sqrt{H}}, \tag{7}$$

причем

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}.$$

Величина $\tilde{\omega}$ выражается интегралом

$$\tilde{\omega} = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{-4z^3 + g_2z + g_3}} = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4(e_2 - z)[(z-m)^2 + n^2]}}.$$

Подстановкой

$$z = e_2 - H \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

этот интеграл приводится к канонической форме Лежандра.

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{\sqrt{H}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{iK'}{\sqrt{H}}, \quad (9)$$

где

$$k'^2 = \frac{1}{2} + \frac{3e_3}{4H}.$$

Таким образом получаем окончательно,

$$2\omega = \frac{K - iK'}{\sqrt{H}}, \quad 2\omega' = \frac{K + iK'}{\sqrt{H}}. \quad (10)$$

Пример. Вычислить периоды эллиптической функции

$$\wp(u; -1, +5),$$

Находим сначала корни уравнения

$$4z^3 + z - 5 = 0.$$

Корни этого уравнения суть

$$e_1 = -\frac{1}{2} + i, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = -\frac{1}{2} - i.$$

Определяем величину H :

$$H = \sqrt{9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{13} \approx \frac{1}{2} \times 3.6056 \approx 1.8028.$$

Затем находим модуль k^2 :

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3 \times 1}{4 \times \frac{1}{2} \sqrt{13}} = 0.5 - \frac{3}{2\sqrt{13}} \approx 0.0840.$$

Модулярный угол α определяем по $\lg k$:

$$\lg \sin \alpha = \frac{1}{2} \lg 0.0840 = \frac{1}{2} \times \bar{2}.9243 = \bar{1}.4621;$$

откуда

$$\alpha = 16^\circ 51'.$$

Угол

$$\beta = 73^\circ 09'.$$

Из таблиц Лежандра, дающих логарифм полного эллиптического интеграла, имеем табл. 34

Таблица 34

α	16°42'	16°48'	16°54'	17°00'
$\lg K$	0.2054	0.2055	0.2056	0.2057

и, стало быть,

$$\lg K \approx 0.2056.$$

Таким же образом получаем табл. 35.

Таблица 35

β	73°	73°6'	73°12'	73°18'
$\lg K'$	0.4236	0.4245	0.4254	0.4263

Интерполируя, находим

$$\lg K' = 0.4245 + 0.0009 \times \frac{3'}{6'} = 0.4249.$$

Определив логарифм

$$\lg \sqrt{H} = \frac{1}{2} \times 0.2559 \approx 0.1280,$$

имеем

$$\lg \frac{K}{\sqrt{H}} = 0.0776, \quad \lg \frac{K'}{\sqrt{H}} = 0.2969,$$

откуда следует, что

$$2\omega = 1.196 - 1.981i, \quad 2\omega' = 1.196 + 1.981i.$$

§ 4. Вычисление значений функции $\wp(u)$. При вычислении значений функции $\wp(u)$ при заданном значении u будем различать отдельные случаи.

1. Дискриминант $\Delta > 0$. В этом случае воспользуемся формулой

$$\wp(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3}, k)}, \quad (11)$$

причем

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}. \quad (12)$$

Пример 1. Вычислить значение функции $\wp(u; 1, 0)$ при $u = 1$.
Определяем корни уравнения

$$4z^3 - z = 0.$$

Корни уравнения имеют значения

$$e_1 = 0.5, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -0.5,$$

откуда следует, что

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{0.5 + 0.5} = 1.$$

Модуль k определяется равенством

$$k^2 = \frac{0 - (-0.5)}{0.5 + 0.5} = \frac{1}{2}.$$

Модулярный угол имеет величину $\alpha = 45^\circ$.

Из таблицы Лежандра имеем табл. 36.

Таблица 36

φ	52°	53°	54°	55°
$F(\varphi, 45^\circ)$	0.9701	0.9912	1.0124	1.0337

Интерполируя с первыми разностями получаем

$$\varphi = 53^\circ + 60' \frac{1 - 0.9912}{1.0124 - 0.9912} \approx 53^\circ 25',$$

Отсюда заключаем, что

$$\wp(1; 1, 0) = -0.5 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 53^\circ 25'} = 1.0509.$$

Пример 2. Вычислить значение функции $\wp(u; 1.75, 0.375)$ при $u = 1 + i$.

Находим корни уравнения

$$4z^3 - 1.75z - 0.375 = 0.$$

Корни имеют значения

$$e_1 = 0.75, \quad e_2 = -0.25, \quad e_3 = -0.5,$$

откуда следует, что

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{1.25} \approx 1.1180.$$

Модуль k определяется равенством

$$k^2 = \frac{0.25}{1.25} = 0.2.$$

Модулярные углы

$$\alpha = 26^{\circ}31', \quad \beta = 63^{\circ}26'.$$

Теперь следует подсчитать

$$\operatorname{sn} [1.1180(1+i), \sqrt{0.2}].$$

Необходимые вычисления производятся, как указано в § 1 настоящей главы. Сначала определяем по таблицам Лежандра амплитуду

$$\varphi = \operatorname{am} (1.1180; \sqrt{0.2}).$$

Интерполируя с первыми разностями, находим по таблицам Лежандра

$$62^{\circ} = \operatorname{am} (1.1183, \sqrt{0.2}), \quad 61^{\circ} = \operatorname{am} (1.0993, \sqrt{0.2}).$$

Отсюда получаем

$$\varphi = 62^{\circ} - 60' \times \frac{3}{190} \approx 61^{\circ}59'$$

и

$$\lg \operatorname{sn} (1.1180, \sqrt{0.2}) = \lg \sin 61^{\circ}59' = \bar{1}.9459,$$

$$\lg \operatorname{cn} (1.1180; \sqrt{0.2}) = \lg \cos 61^{\circ}59' = \bar{1}.6718.$$

Далее имеем

$$\lg \operatorname{dn} (1.1180; \sqrt{0.2}) = \frac{1}{2} \lg (1 - 0.2 \times 0.7794) = \bar{1}.9632.$$

Пользуясь таблицами Лежандра, имеем

$$\varphi' = \operatorname{am} (1.1180; \sqrt{0.8}).$$

Интерполируя с первыми разностями, находим

$$55^{\circ} = \operatorname{am} (1.0968, \sqrt{0.8}), \quad 56^{\circ} = \operatorname{am} (1.1227; \sqrt{0.8}).$$

Отсюда получаем

$$\varphi' = 55^{\circ} + 60' \frac{1.1180 - 1.0968}{1.1227 - 1.0968} \approx 55^{\circ}49'$$

и

$$\lg \operatorname{sn} (1.1180; \sqrt{0.8}) = \lg \sin 55^{\circ}49' = \bar{1}.9176,$$

$$\lg \operatorname{cn} (1.1180; \sqrt{0.8}) = \lg \cos 55^{\circ}49' = \bar{1}.7493,$$

$$\lg \operatorname{dn} (1.1180; \sqrt{0.8}) = \frac{1}{2} \lg (1 - 0.8 \times 0.6843) = \bar{1}.8278.$$

Вычисляем сначала знаменатель дроби, дающий искомое значение

$$\operatorname{sn} [1.1180(1+i); \sqrt{0.2}].$$

$$\operatorname{cn}^2 (1.1180; \sqrt{0.8}) + 0.2 \operatorname{sn}^2 (1.1180; \sqrt{0.2}) \operatorname{sn}^2 (1.1180; \sqrt{0.8}) = 0.4223.$$

Пользуясь найденными значениями логарифмов множителей, входящих в слагаемые числителя, получаем

$$\operatorname{sn} [(1+i) 1.1180; \sqrt{0.2}] = 1.406 + 0.475i.$$

Искомое значение функций $\wp(u)$ определяется равенством

$$\wp(1+i, 1.75, 0.375) = -0.5 + \frac{1.25}{(1.406 + 0.475i)^2} \approx 0.494 - 0.758i.$$

В случае отрицательного дискриминанта Δ корни уравнения

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0$$

комплексные и модуль k^2 есть тоже комплексное число.

С целью привести вычисления к таблицам Лежандра, можно поступить следующим образом.

Функция $\wp(u)$ получается в результате обращения интеграла

$$u = \int_2^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \int_2^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_2)\{(z - m)^2 + n^2\}}},$$

где положено

$$e_1 = m + ni, \quad e_3 = m - ni.$$

Производим замену переменных по формуле

$$z = e_2 + H \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2},$$

где

$$H = \sqrt{9m^2 + n^2}.$$

Интеграл представляется в виде

$$u = \frac{1}{2\sqrt{H}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (13)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}.$$

Таким образом

$$\varphi = \operatorname{am} (2u\sqrt{H}; k),$$

и мы имеем, заменяя z на $\wp(u)$,

$$\wp(u; g_2, g_3) = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn} (2u\sqrt{H}; k)}{1 - \operatorname{cn} (2u\sqrt{H}; k)}. \quad (14)$$

Вычисление функции $\wp(u)$ приведено к вычислению значения функции $\operatorname{cn}(u\sqrt{H}; k)$ при вещественном значении модуля k . Легко при этом видеть, что $0 < k < 1$, так как

$$\left| \frac{3e_2}{4H} \right| = \left| \frac{3m}{2\sqrt{9m^2 + n^2}} \right| < \frac{1}{2}.$$

Пример. Вычислить значение функции $\wp(u; -13, 17)$ при $u = 0.1$.

Корни уравнения

$$4z^3 + 13z - 17 = 0$$

комплексные. Имеем

$$e_1 = -\frac{1}{2} + 2i, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = -\frac{1}{2} - 2i.$$

Величина H получает значение

$$H = \sqrt{9\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2.5.$$

Модуль k определяется равенством

$$k^2 = 0.5 - \frac{3 \times 1}{4 \times 2.5} = 0.2.$$

Модулярный угол

$$\alpha = 26^\circ 34'.$$

Величина аргумента $2u\sqrt{H}$ дается равенством

$$2u\sqrt{H} = 2 \times 0.1 \sqrt{2.5} = 0.3162.$$

По таблицам Лежандра имеем табл. 37.

Таблица 37

$\varphi \backslash \alpha$	25°	26°	27°	28°
18°	0.3151	0.3151	0.3152	0.3153
19°	0.3327	0.3328	0.3329	0.3329

Интерполируя с первыми разностями, находим

$$F(18^\circ; 26^\circ 34') = 0.3151 + \frac{34'}{60'} \cdot 0.0001 \approx 0.3152$$

$$F(19^\circ; 26^\circ 34') = 0.3328 + \frac{34'}{60'} \cdot 0.0001 \approx 0.3329.$$

Определяем амплитуду, соответствующую аргументу 0.3162 при модулярном угле $26^\circ 34'$:

$$\varphi = 18^\circ + 60' \frac{0.3162 - 0.3152}{0.3329 - 0.3152} \approx 18^\circ 34'.$$

Значение функции $\operatorname{cn}(2u \sqrt{H}; k)$ дается равенством

$$\operatorname{cn}(0.3162; \sqrt{0.2}) = \cos 18^\circ 34' \approx 0.9479.$$

Искомое значение функции определяется равенством

$$\wp(0.1; -13, 17) = 1 + 2.5 \frac{1 + 0.9479}{1 - 0.9479} = 94.47$$

В случае, когда величина u получает комплексное значение, пользуемся той же формулой (14).

§ 5. Вычисление значений аргумента функции $\wp(u)$ по заданному значению самой функции. Вычисляя значения аргумента функции $\wp(u)$ по заданному ее значению a , находим сначала простейшее решение уравнения

$$\wp(u; g_2, g_3) = a.$$

Назовем его u_0 . Общее решение задачи доставляется формулой

$$u = \pm u_0 + 2m\omega + 2n\omega',$$

где m и n — произвольные целые числа.

Отыскивая простейшее значение аргумента, будем различать случаи положительного и отрицательного значений дискриминанта Δ .

1. $\Delta > 0$. Заданное значение $a > e_1$. Из соотношения

$$\wp(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}.$$

получаем для вычисления u_0 формулу

$$\operatorname{sn}(u_0 \sqrt{e_1 - e_2}; k) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{a - e_3}}. \quad (15)$$

Вычисление располагаем, как показано в нижеследующем примере.

Пример. Вычислить аргумент функции Вейерштрасса по условию

$$\wp(u; 84, 80) = 14.$$

Находим сначала корни уравнения

$$4z^3 - 84z - 80 = 0.$$

Эти корни суть

$$e_1 = 5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -4.$$

Определяем модуль

$$k^2 = \frac{-1 - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{1}{3}.$$

Модулярный угол α определяется по условию

$$2 \lg \sin \alpha = -\lg 3 = \bar{1}.52283,$$

откуда

$$\alpha = 35^\circ 16', \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 54^\circ 44'.$$

Амплитуду φ находим из уравнения

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{5 - (-4)}{14 - (-4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

откуда следует, что

$$\varphi = 45^\circ.$$

Для определения аргумента u_0 из условия

$$\operatorname{am} \left(u_0 \sqrt{5 - (-4)}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 45^\circ$$

обращаемся к таблицам Лежандра.

Из таблиц имеем табл. 38.

Таблица 38

α	34°	35°	36°	37°	$\varphi = 45^\circ$
$F(\varphi, \alpha)$	0.8095	0.8109	0.8123	0.8137	

Интерполируя, получаем

$$3u_0 = F(45^\circ; 35^\circ 16') = 0.8109 + \frac{16}{60} \times 0.0014 \approx 0.8113, \quad u_0 = 0.2704.$$

Для получения всех значений аргумента остается вычислить периоды функции $\wp(u; 84, 80)$.

Для этой цели находим периоды функции $\operatorname{sn} \left(u; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Из таблиц Лежандра имеем

табл. 39.

Таблица 39

α	34°	35°	36°	37°	$\varphi = 90^\circ$
$F(\varphi, \alpha)$	1.7214	1.7312	1.7415	1.7522	

Интерполируя, получаем

$$K = F(90^\circ; 35^\circ 16') = 1.7312 + \frac{16}{60} \times 0.0103 + \frac{1}{2} \times \frac{16}{60} \times \frac{(-44)}{60} \times 0.0005 = 1.7339.$$

Точно так же из таблиц Лежандра имеем табл. 40.

Таблица 40

β	53°	54°	55°	56°	$\varphi = 90^\circ$
$F(\varphi, \beta)$	1.9927	2.0133	2.0347	2.0571	

Интерполируя, получаем

$$K' = F(90^\circ; 54^\circ 44') = 2.0347 - \frac{16}{60} \times 0.0214 + \frac{1}{2} \times \frac{16}{60} \times \frac{(-44)}{60} \times 0.0003 = 2.0290.$$

Периоды функции $\wp(u; 84, 80)$ равны

$$2\omega = \frac{2 \times 1.7339}{\sqrt{5 - (-4)}} = 1.1559, \quad 2\omega' = \frac{2 \times 2.0290}{\sqrt{5 - (-4)}} i = 1.3527i.$$

Общее решение задачи представляется в виде

$$u = \pm 0.2704 + 1.1559 m + 1.3527 ni,$$

где m и n — произвольные целые числа.

2. $\Delta > 0$ и $e_1 > a > e_2$. В этом случае простейшее значение аргумента имеет вид

$$u_0 = \omega + vi, \quad |\omega'| > v > 0.$$

Величина \wp определяется из условия

$$\wp(u_0) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(vi) - e_1} = a,$$

которое дает

$$\wp(vi) = e_1 - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{e_1 - a}.$$

Заменяя $\wp(vi)$ его выражением через эллиптические функции Якоби, получаем равенство, из которого удобно определять аргумент v с помощью таблиц Лежандра:

$$\operatorname{sn}\left(v \sqrt{e_1 - e_3}, k'\right) = \sqrt{\frac{e_1 - a}{e_1 - e_3}}. \quad (16)$$

Модуль k' дается равенством

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (17)$$

Пример. Вычислить значение аргумента u , отвечающее условию

$$\wp(u; 84, 80) = 0.$$

Значения, принимаемые величинами e_1, e_2, e_3 в данном примере, суть

$$e_1 = 5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -4.$$

Находим прежде всего величину k'^2 :

$$k'^2 = \frac{5 - (-1)}{5 - (-4)} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда определяем значение модулярного угла β . Самое вычисление производить не будем, так как значение угла β уже дано в предыдущем примере:

$$\beta = 54^\circ 44'.$$

Далее вычисляем значение амплитуды $\varphi = \operatorname{am}\left(v \sqrt{e_1 - e_3}, k'\right)$ согласно равенству (16)

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{5 - 0}{5 - (-1)}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Получаем

$$\varphi = 65^\circ 54'.$$

Для определения значения v из условия

$$\operatorname{am}\left(v \sqrt{5 - (-4)}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 65^\circ 54'$$

обращаемся к таблицам Лежандра (табл. 41).

Таблица 41

$\varphi \backslash \alpha$	53°	54°	55°	56°
64°	1.2767	1.2828	1.2890	1.2952
65°	1.3019	1.3084	1.3149	1.3215
66°	1.3273	1.3341	1.3411	1.3481
67°	1.3530	1.3602	1.3675	1.3750

Интерполируя с первыми разностями, находим

$$F(65^\circ; 54^\circ 44') = 1.3149 - \frac{16}{60} \times 0.0065 = 1.3132,$$

$$F(66^\circ; 54^\circ 44') = 1.3411 - \frac{16}{60} \times 0.0070 = 1.3392.$$

Просмотр таблицы показывает, что при нахождении значения v можно ограничиться первыми разностями, ибо вторые разности незначительны. Находим

$$3v = 1.3392 - \frac{6}{60} \times 0.0260 = 1.3366.$$

Искомое значение v дается равенством

$$v = 0.4455.$$

Пользуясь результатами предыдущего примера, находим

$$u_0 = \frac{1.7339}{3} + 0.4455 i = 0.5780 + 0.4455 i.$$

Общее решение имеет вид

$$u = 0.5780(2m + 1) \pm 0.4455 i + 1.3527 \pi i,$$

где m и n — целые числа.

3. $\Delta > 0$, $e_2 > a > e_3$. В этом случае простейшее значение аргумента имеет вид:

$$u_0 = v + \omega', \quad 0 < v < \omega'.$$

Из равенства

$$\wp(v + \omega') = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(v) - e_3} = a$$

следует, что

$$\wp(v) = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{a - e_3}.$$

Выражая $\wp(v)$ через функции Якоби, получаем формулу, удобную для определения v с помощью таблиц Лежандра:

$$\operatorname{sn}\left(v \sqrt{e_1 - e_3}; k\right) = \sqrt{\frac{a - e_3}{e_2 - e_3}}. \quad (18)$$

Модуль k находится по формуле

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}. \quad (19)$$

Пример. Вычислить значение аргумента u , удовлетворяющее условию

$$\wp(u; 84, 80) = -3.25.$$

Вычисление следует начинать с нахождения модуля k :

$$k^2 = \frac{-1 - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{1}{3}.$$

Значение модулярного угла α было определено ранее:

$$\alpha = 35^\circ 16'.$$

Определяем амплитуду $\varphi = \operatorname{am}\left(v \sqrt{e_1 - e_3}, k\right)$ согласно равенству (18):

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{-3.25 - (-4)}{-1 - (-4)}} = 0.5.$$

Соответствующее значение амплитуды будет

$$\varphi = 30^\circ.$$

Для определения аргумента v получаем уравнение

$$\operatorname{am}\left(3v; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ.$$

Обращаемся к таблицам Лезандра (табл. 42).

Таблица 42

α	34°	35°	36°	37°	$\varphi = 30^\circ$
$F(\varphi, \alpha)$	0.5309	0.5313	0.5317	0.5322	

Интерполируя, находим

$$3v = F(30^\circ; 35^\circ 16') = 0.5313 + \frac{16}{60} \times 0.0004 = 0.5314, \quad v = 0.1771.$$

Простейшее решение имеет вид

$$u_0 = 0.1771 + 0.6763 i.$$

Общее решение представляется равенством:

$$u = \pm 0.1771 + 1.1559 m + 0.6763 (2n + 1) i;$$

где m и n — произвольные целые числа.

4. $\Delta > 0$ и $a < e_3$. В этом случае простейшее значение аргумента имеет вид

$$u_0 = vi, \quad 0 < v < |\omega'|$$

и определяется из равенства

$$\wp(vi) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(vi \sqrt{e_1 - e_3}, k)}.$$

Выражая функцию $\operatorname{sn}(vi \sqrt{e_1 - e_3}, k)$ через значения функции Якоби от вещественного аргумента, получаем равенство

$$\operatorname{sn}(v \sqrt{e_1 - e_3}, k') = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{e_1 - a}}, \quad (20)$$

удобное для вычисления аргумента с помощью таблиц Лезандра.

Пример. Найти значение аргумента u по условию

$$\wp(u; 84, -80) = -14.$$

Корни уравнения

$$4z^3 - 84z + 80 = 0$$

суть

$$e_1 = 4, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = -5.$$

Находим модуль k из уравнения (19)

$$k^2 = \frac{1 - (-5)}{4 - (-5)} = \frac{2}{3}.$$

Модулярные углы α и β даются равенствами

$$\alpha = 54^\circ 44', \quad \beta = 35^\circ 16'.$$

Находим амплитуду $\varphi = \operatorname{am}(v \sqrt{e_1 - e_3}, k')$ из уравнения (20).

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{4 - (-5)}{4 - (-14)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значение амплитуды дается равенством

$$\varphi = 45^\circ.$$

Значение аргумента v находится из уравнения

$$\operatorname{am}\left(v \sqrt{4 - (-5)}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 45^\circ.$$

Для определения v следует обратиться к таблицам Лезандра. Мы этого делать не будем потому, что соответствующее значение было найдено нами в примере, относящемся к случаю 1. Пользуясь найденным результатом, имеем

$$v = 0.2704.$$

Простейшее значение аргумента имеет вид

$$u_0 = 0.2704 i.$$

Воспользуемся результатами того же примера и представим общее решение в виде

$$u = \pm 0.2704 i + 1.3527 m + 1.1559 ni.$$

5. $\Delta < 0$ и $a > e_2$ ($e_1 = m + ni$, $e_3 = m - ni$). Определяя простейшее значение аргумента, будем исходить из равенства:

$$\wp(u) = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn}(2u_0 \sqrt{H}; k)}{1 - \operatorname{cn}(2u_0 \sqrt{H}; k)} = a,$$

где

$$H = \sqrt{9m^2 + n^2}. \quad (21)$$

Это равенство может быть приведено к виду

$$\operatorname{cn}(2u_0 \sqrt{H}, k) = \frac{a - e_2 - H}{a - e_2 + H}, \quad (22)$$

откуда уже легко определить значение аргумента u_0 по таблицам Лежандра. Модуль k определяется из равенства

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}. \quad (23)$$

Пример. Вычислить значение аргумента u из условия

$$\wp(u; -52, 136) = 17.$$

Корни уравнения

$$4z^2 + 52z - 136 = 0.$$

суть

$$e_1 = -1 - 4i, \quad e_2 = 2, \quad e_3 = -1 + 4i.$$

Находим значение H по формуле (21):

$$H = \sqrt{9 \times 1^2 + 4^2} = 5$$

и определяем модуль k по формуле (23);

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = 0.2.$$

Из этого равенства имеем

$$\lg \sin \alpha = \lg k = \frac{1}{2} \times \bar{1}.30103 \approx \bar{1}.6505.$$

Таким образом для α и β получаем значения

$$\alpha = 26^\circ 34', \quad \beta = 63^\circ 26'.$$

Значение амплитуды $\varphi = \operatorname{am}(2u_0 \sqrt{H}, k)$ определяем из равенства (22)

$$\cos \varphi = \frac{17 - 2 - 5}{17 - 2 + 5} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Для определения значения аргумента u_0 из условия

$$\operatorname{am}(2u_0 \sqrt{5}, \sqrt{0.2}) = 60^\circ$$

обращаемся к таблицам Лежандра (табл. 43).

Таблица 43

α	25°	26°	27°	28°	$\varphi = 60^\circ$
$F(\varphi, \alpha)$	1.0766	1.0790	1.0815	1.0841	

Интерполируя, получаем

$$2u_0 \sqrt{5} \approx 1.0790 + \frac{34}{60} \times 0.0025 \approx 1.0804, \quad u_0 = \frac{1.0804}{2\sqrt{5}} \approx 0.2416.$$

С целью получить общее решение, вычисляем периоды.
Из таблиц Лежандра имеем табл. 44.

Таблица 44

α	25°	26°	27°	28°
$K=F(90^\circ, \alpha)$	1.6490	1.6557	1.6627	1.6701

Интерполируя, получаем

$$K = 1.6557 + \frac{34}{60} \times 0.0070 \approx 1.6597.$$

Из таблиц Лежандра имеем табл. 45.

Таблица 45

β	62°	63°	64°	65°
$K'=F(90^\circ, \beta)$	2.2132	2.2435	2.2754	2.3038

Интерполируя, получаем

$$K' = 2.2435 + \frac{26}{60} \times 0.0319 + \frac{1}{2} \times \frac{26}{60} \times \frac{(-34)}{60} \times 0.0015 \approx 2.2572.$$

Периоды функции $\wp(u; -52, 136)$ даются равенствами

$$2\omega = \frac{1.6597 - 2.2572i}{\sqrt{5}} \approx 0.7423 - 1.0095i; \quad 2\omega' = \frac{1.6597 + 2.2572i}{\sqrt{5}} \approx 0.7423 + 1.0095i.$$

Общее решение имеет вид

$$u = \pm 0.2416 + 0.7423(m+n) + 1.0095(n-m)i,$$

где m и n — произвольные целые числа.

6. $\Delta < 0$ и $a < e_2$ ($e_1 = m + ni$, $e_3 = m - ni$). В том случае, когда заданное значение a функции $\wp(u; g_2, g_3)$ оказывается меньше e_2 , простейшее значение аргумента имеет вид

$$u_0 = \omega'' + vi, \quad 0 < v < |\tilde{\omega}| \quad (\tilde{\omega} = \omega' - \omega).$$

Для определения v следует воспользоваться формулой

$$\wp(\omega'' + vi) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(vi) - e_2} = a,$$

которая дает

$$\wp(vi; g_2, g_3) = e_2 + \frac{H^2}{a - e_2}.$$

Выражая функцию $\wp(vi; g_2, g_3)$ через функции Якоби, получаем равенство

$$\operatorname{cn}(2v\sqrt{H}; k') = \frac{H + a - e_2}{H - a + e_2}, \quad (24)$$

удобное для определения v по таблицам Лежандра. Значение модуля k' дается равенством

$$k'^2 = \frac{1}{2} + \frac{3e_2}{4H}. \quad (25)$$

Пример. Вычислить величину аргумента u по условию

$$\wp(u; -52, 136) = \frac{1}{3}.$$

Значения модулярных углов были вычислены в предыдущем примере. Пользуясь значениями e_2 и H , найденными в предыдущем примере, определим значение амплитуды φ из уравнения (24):

$$\cos \varphi = \frac{5 + \frac{1}{3} - 2}{5 - \frac{1}{3} + 2} = \frac{1}{2}.$$

Для амплитуды получаем значение $\varphi = 60^\circ$. Значение аргумента v находится из условия

$$\operatorname{am}(2v\sqrt{5}; \sqrt{0.8}) = 60^\circ,$$

Из таблиц Лежандра имеем табл. 46.

Таблица 46

β	62°	63°	64°	65°
$F(\varphi, \beta)$	1.2226	1.2276	1.2326	1.2376

Интерполируя, находим

$$2v\sqrt{5} = 1.2276 + \frac{26}{60} \times 0.0050 = 1.2298, \quad v = \frac{1.2298}{2\sqrt{5}} \approx 0.2750,$$

Если воспользоваться результатами предыдущего примера, то можно представить общее решение в виде

$$u = \pm (0.7423 + 0.2750i) + 0.7423(m+n) + 1.0095(n-m)i.$$

§ 6. Вычисление значений функции $\operatorname{zn}(u)$. Вычисление значения функции $\operatorname{zn}(u, k)$ производится по формуле

$$\operatorname{zn}(u, k) = E(\operatorname{am}(u, k), k) - \frac{E}{K}u. \quad (26)$$

По данному значению аргумента u находим сначала амплитуду

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k),$$

пользуясь таблицей значений интеграла $F(\varphi, \alpha)$. Затем находим по таблицам значений $E(\varphi, \alpha)$ значение функции $E(\operatorname{am}(u, k))$. Значения E и k определяем по таблицам Лежандра. Расположение вычислений видно из примера.

Пример. Вычислить значение функции $\operatorname{zn}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значение модулярного угла определяется из условия

$$k^2 = \sin^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

откуда следует, что модулярный угол $\alpha = 45^\circ$.

Из таблиц Лежандра имеем табл. 47.

Таблица 47

φ	52°	53°	54°	55°
$F(\varphi; 45^\circ)$	0.9701	0.9912	1.0124	1.0337

Интерполируя, получаем

$$\varphi = 53^\circ + 60' \times \frac{0.0038}{0.0212} \approx 53^\circ 25'.$$

Из таблиц значений функции $E(\varphi, \alpha)$ имеем табл. 48.

Таблица 48

φ	52°	53°	54°	55°
$E(\varphi; 45^\circ)$	0.8518	0.8663	0.8806	0.8949

Интерполируя, получаем

$$E(53^\circ 25'; 45^\circ) = 0.8663 + \frac{25}{60} \times 0.0143 \approx 0.8723.$$

По таблицам Лежандра находим

$$\begin{aligned} \lg u &= 0.0000, & \lg \frac{E}{K} u &= \bar{1}.8624 \\ \lg E &= 0.1305, & \frac{E}{K} u &= 0.7285 \\ \lg K &= 0.2681, & & \end{aligned}$$

Искомое значение функции будет

$$\operatorname{zn}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.8723 - 0.7285 = 0.1433.$$

Вычисление значения функции $\operatorname{zn}(u)$ при чисто мнимом значении аргумента $u = vi$ требует предварительного преобразования равенства

$$\operatorname{zn}(iv, k) = \int_0^v \left(\operatorname{dn}^2(t, k) - \frac{E}{K} \right) dt,$$

которое может быть представлено в виде

$$\operatorname{zn}(iv, k) = -\frac{E}{K} v i + i \int_0^v \frac{\operatorname{dn}^2(\tau, k')}{\operatorname{cn}^2(\tau, k')} d\tau.$$

Производя интегрирование по частям в правой части, получаем равенство

$$\operatorname{zn}(iv, k) = -\frac{E}{K} v i + i \operatorname{tn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') + k'^2 i \int_0^v \operatorname{sn}^2(v, k') dv,$$

из которого легко получить формулу, пригодную для вычисления $\operatorname{zn}(iv, k)$:

$$\operatorname{zn}(iv, k) = i \left\{ \frac{K-E}{K} v + \frac{\operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')} - E \operatorname{am}(v, k'), k' \right\}. \quad (27)$$

Пример. Вычислить значение функции $\operatorname{zn}\left(i, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Величина модуля k' определяется равенством

$$k'^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad k' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и модулярный угол имеет значение

$$\beta = 45^\circ.$$

В рассматриваемом случае $v = 1$. Начинаем с определения значения амплитуды

$$\varphi = \operatorname{am}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

выполняя вычисления, как было показано в предыдущем примере. Амплитуда имеет значение

$$\varphi = 53^\circ 25'.$$

Найдя значение амплитуды, определяем

$$E(53^\circ 25'; 45^\circ) = 0.8723,$$

как показано в предыдущем примере.

Далее находим

$$\frac{K-E}{K} v = 1 - 0.7285 = 0.2715,$$

проводя вычисления, как было указано выше.

Обращаемся к вычислению значений $\operatorname{sn}(v, k')$, $\operatorname{cn}(v, k')$ и $\operatorname{dn}(v, k')$, входящих в равенство (27).

Величины $\operatorname{sn}(v, k')$, $\operatorname{cn}(v, k')$ определяются равенствами

$$\operatorname{sn}(v, k') = \sin \operatorname{am}(v, k') = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn}(v, k') = \cos \operatorname{am}(v, k') = \cos \varphi.$$

Величина $\operatorname{dn}(v, k')$ находится с помощью равенства

$$\operatorname{dn}^2(v, k') = 1 - k'^2 \sin^2 \varphi.$$

Проводим вычисления с помощью логарифмов:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 53^\circ 25' = \bar{1}.9047 \\ + \lg \sin^2 53^\circ 25' = \bar{1}.8094 \\ \quad \lg \frac{1}{2} = \bar{1}.6990 \\ \hline \lg \frac{1}{2} \sin^2 53^\circ 25' = \bar{1}.5084 \\ \lg \operatorname{sn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \bar{1}.9047 \\ + \lg \operatorname{dn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \bar{1}.9155 \\ - \lg \operatorname{cn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \bar{0}.2248 \\ \hline \lg \frac{\operatorname{sn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\operatorname{cn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = 0.0450 \end{array} \quad \begin{array}{r} \lg \cos 53^\circ 25' = \bar{1}.7752 \\ \operatorname{dn}^2 \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - 0.3224 \approx 0.6776 \\ \frac{\operatorname{sn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\operatorname{cn} \left(1; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \approx 1.109 \end{array}$$

Окончательно находим

$$\operatorname{sn} \left(i, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left\{ 0.2715 + 1.109 - 0.8723 \right\} i \approx 0.508.$$

Для вычисления значения функции $\operatorname{zn}(u, k)$ при комплексных значениях аргумента следует воспользоваться формулой сложения

$$\operatorname{zn}(u + vi, k) = \operatorname{zn}(u, k) + \operatorname{zn}(vi, k) - k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{sn}(vi, k) \operatorname{sn}(u + vi, k),$$

представив ее в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{zn}(u + vi, k) &= E(\operatorname{am}(u, k), k) - \frac{E}{K} u + \\ &+ i \left\{ \frac{K-E}{K} v + \frac{\operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')} - E(\operatorname{am}(v, k'); k') \right\} + \\ &+ k^2 \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{cn}(v, k') - i \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k') \{ \operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k') \}}. \end{aligned} \quad (28)$$

§. 7. Вычисление значений функции $\zeta(u; g_2, g_3)$. Вычисление значений функции $\zeta(u; g_2, g_3)$ может быть произведено с помощью таблиц Лежандра.

Различим два случая, сообразно знаку инварианта Δ .

Случай 1. $\Delta > 0$. В этом случае из равенства

$$\zeta(u + \omega_3) = \zeta(u) + \zeta(\omega_3) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_3}.$$

имеем

$$\zeta(u) = - \int_0^u \wp(u + \omega_3) du - \frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_3}.$$

Выразив функцию $\wp(u + \omega_3)$ через функции Якоби, получаем

$$\int_0^u \wp(u + \omega_3) du = e_1 u - \sqrt{e_1 - e_3} E(\operatorname{am}(u \sqrt{e_1 - e_3}))$$

и

$$-\frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) \operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3})}{\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3})}.$$

Отсюда следует

$$\zeta(u) = \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E(\operatorname{am}(u \sqrt{e_1 - e_3})) + \frac{\operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) \operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3})}{\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3})} \right\} - e_1 u. \quad (29)$$

Модуль k определяется равенством

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Пример. Вычислить значение функции $\zeta(0.2; 84, 80)$. Корни уравнения

$$4z^3 - 8iz - 80 = 0$$

суть

$$e_1 = 5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -4,$$

Из уравнения

$$k^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

находим

$$\alpha = 35^\circ 16'.$$

Величина $\sqrt{e_1 - e_3}$ дается равенством

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{5 - (-4)} = 3.$$

Определяем амплитуду

$$\operatorname{am}(0.2 \times 3; 35^\circ 16') = \varphi.$$

Из таблиц Лежандра имеем табл. 49.

Таблица 49

φ \ α	34°	35°	36°	37°
32°	0.5674	0.5679	0.5684	0.5689
33°	0.5857	0.5862	0.5868	0.5873
34°	0.6040	0.6046	0.6052	0.6058
35°	0.6224	0.6231	0.6237	0.6244

Интерполируя с первыми разностями, получаем

$$F(33^\circ, 35^\circ 16') = 0.5862 + \frac{16}{60} \times 0.0006 = 0.5864,$$

$$F(34^\circ, 35^\circ 16') = 0.6046 + \frac{16}{60} \times 0.0006 = 0.6048$$

и

$$\operatorname{am}(0.6; 35^\circ 16') = 34^\circ - 60' \times \frac{0.6048 - 0.6}{0.6048 - 0.5864} = 33^\circ 44'.$$

Переходим к определению значения $E(33^\circ 44', 35^\circ 16')$. Из таблиц Лежандра для интегралов 2-го рода имеем табл. 50.

Таблица 50

$\alpha \backslash \varphi$	34°	35°	36°	37°
32°	0.5499	0.5494	0.5489	0.5185
33°	0.5665	0.5660	0.5655	0.5650
34°	0.5831	0.5826	0.5820	0.5314
35°	0.5997	0.5991	0.5985	0.5979

Интерполируя с первыми разностями, находим

$$E(33^\circ 44', 35^\circ 16') = 0.5326 - \frac{16}{60} \cdot 0.0166 + \frac{16}{60} (-0.0006) = 0.5780.$$

Приводим вычисление значений $\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_3})$, $\operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3})$, $\operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_3})$, входящих в правую часть равенства (29), по найденной величине амплитуды

$$\varphi = \operatorname{am}(u\sqrt{e_1 - e_3}) = 35^\circ 44':$$

$$\lg \sin 33^\circ 44' = \bar{1}.7445$$

$$\lg \sin^2 33^\circ 44' = \bar{1}.4891$$

$$\lg \frac{2}{3} = \bar{1}.8239$$

$$\lg \cos 33^\circ 44' = \bar{1}.9199$$

$$\operatorname{dn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1 - 0.2056 = 0.7944$$

$$\lg \frac{2}{3} \sin^2 33^\circ 44' = \bar{1}.3130$$

$$\lg \operatorname{cn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \bar{1}.9199$$

$$\lg \operatorname{dn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \bar{1}.9000$$

$$-\lg \operatorname{sn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 0.2555$$

$$\frac{\operatorname{cn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \operatorname{dn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\operatorname{sn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \approx 1.1896.$$

$$\lg \frac{\operatorname{cn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \operatorname{dn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\operatorname{sn}\left(0.6; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = 0.0754$$

Окончательно получаем

$$\zeta(0.2; 84, 80) = 3(0.5780 + 1.1896) - 5 \times 0.2 \approx 4.3028.$$

При вычислении значения функции $\zeta(u; g_2, g_3)$, при чисто мнимом значении аргумента можно воспользоваться формулой

$$\zeta(iv; g_2, g_3) = -i\sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E(\operatorname{am}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k'); k') + \frac{\operatorname{dn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k') \operatorname{cn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k')}{\operatorname{sn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k')} \right\} - ie_3 v. \quad (30)$$

Вычисления по этой формуле проводятся совершенно так же, как по аналогичной формуле для действительного значения аргумента.

При вычислении значений функции $\zeta(u; g_2, g_3)$ для комплексного значения аргумента приходится обращаться к формуле сложения. Формула сложения может быть представлена в следующей форме, удобной для вычислений по таблицам Лежандра:

$$\begin{aligned} \zeta(u+vi; g_2, g_3) = & \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E(\operatorname{am}(u\sqrt{e_1 - e_3}; k); k) + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_3}; k) \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_3}; k) \operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_3}; k) \operatorname{cn}^2(v\sqrt{e_1 - e_3}; k)}{1 - \operatorname{cn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3}; k) \operatorname{cn}^2(v\sqrt{e_1 - e_3}; k)} \right\} - \\ & - e_1 u - i e_3 v - i \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E(\operatorname{am}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k'); k') + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{sn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k') \operatorname{cn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k') \operatorname{dn}(v\sqrt{e_1 - e_3}; k') \operatorname{cn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3}; k')}{1 - \operatorname{cn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3}; k) \operatorname{cn}^2(v\sqrt{e_1 - e_3}; k')} \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Вычисления проводятся совершенно так же, как в приведенном ранее примере. Отметим формулы, удобные для вычисления величин η , η' и η''

$$\eta = \frac{(e_1 - e_3) E - e_1 K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (32)$$

$$\eta' = \frac{(e_3 - e_1) E' - e_3 K'}{\sqrt{e_1 - e_3}} i, \quad (33)$$

$$\eta'' = \eta + \eta'. \quad (34)$$

Пример. Вычислить η и η' для функции $\zeta(u; 84, 80)$.

Вычисления начинаем с определения значений величин e_1, e_2, e_3 , модуля k^2 и k'^2 и модулярных углов α и β . В рассматриваемом случае имеем

$$e_1 = 5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -4, \quad \alpha = 35^\circ 16', \quad \beta = 54^\circ 44'.$$

Из таблиц Лежандра имеем табл. 51.

Таблица 51

α	34°	35°	36°	37°
$K = F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$	1.7214	1.7312	1.7415	1.7522
$E = E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$	1.4397	1.4323	1.4248	1.4171

Интерполируя, получаем

$$K = 1.7312 + \frac{16}{60} \times 0.0103 = 1.7340, \quad E = 1.4323 + \frac{16}{60} \times (-0.0075) = 1.4303.$$

Значение величины η дается равенством

$$\eta = \frac{9 \times 1.4303 - 5 \times 1.7340}{3} = 1.4009.$$

Совершенно таким же образом из таблиц Лежандра имеем табл. 52

Таблица 52

β	53°	54°	55°	56°
$K' = F\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right)$	1.9927	2.0133	2.0347	2.0571
$E' = E\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right)$	1.2776	1.2681	1.2587	1.2492

Интерполируя, получаем

$$K' = 2.0347 - \frac{16}{60} 0.0214 \approx 2.0290, \quad E' = 1.2587 - \frac{16}{60} (-0.0094) \approx 1.2612.$$

Значение величины η' дает равенство

$$\eta' = \frac{-9 \times 1.2612 + 4 \times 2.0290}{3} i = -1.0783 i.$$

Случай 2. $\Delta < 0$, $e_1 = m + ni$, $e_2 = -2m$, $e_3 = m - ni$. Вычисление значений функции $\zeta(u; g_2, g_3)$ в случае вещественного значения аргумента можно производить по формуле

$$\zeta(u) = -(H + e_2)u + \frac{\sqrt{H} \operatorname{dn}(2u\sqrt{H}; k)(1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H}; k))}{\operatorname{sn}(2u\sqrt{H}; k)} + \sqrt{H} E(\operatorname{am}(2u\sqrt{H}; k); k), \quad (35)$$

где

$$H = \sqrt{9m^2 + n^2}, \quad k^2 = \frac{1}{2} + \frac{3m}{2H}.$$

Для вычисления значений $\zeta(u; g_2, g_3)$ при чисто мнимых значениях аргумента можно указать формулу

$$\zeta(iv; g_2, g_3) = (H - e_2)vi - \sqrt{H} i \frac{\operatorname{dn}(2v\sqrt{H}; k')(1 + \operatorname{cn}(2v\sqrt{H}; k'))}{\operatorname{sn}(2v\sqrt{H}; k')} - i\sqrt{H} E(\operatorname{am}(2v\sqrt{H}; k'); k'). \quad (36)$$

Расположение вычислений такое же, как и в случае $\Delta > 0$.

Значения $\zeta(u + iv; g_2, g_3)$ при комплексных значениях аргумента лучше всего находить, пользуясь теоремой сложения.

§ 8. Вычисление значений функций тета. Вычисление значений функций тета можно производить по таблицам, выполняя интерполирование. Таблицы функций тета указаны в главе III, § 2. Так как операция интерполирования по таблицам не представляет никаких затруднений, мы здесь на этом останавливаться не будем.

Вычисление значений функций тета можно также производить, пользуясь их разложением в тригонометрические ряды. По причине быстрой сходимости рядов, представляющих функции тета, при этих вычислениях можно ограничиться небольшим числом членов.

Остановимся сначала на вычислении величин

$$q = e^{-\pi e} = e^{\pi i \tau},$$

где

$$e = \frac{K'}{K}.$$

Вычисление q при значениях модуля $k = \sin \alpha$, соответствующих модулярному углу, меньшему 45° , удобнее всего производить по формуле

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}}, \quad (37)$$

отмеченной в главе VI. В случае, когда $\alpha > 45^\circ$, выгоднее определить

$$q' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\sin \alpha}}{1 + \sqrt{\sin \alpha}} \quad (38)$$

и потом уже, в случае необходимости, q с помощью равенства

$$\lg q = \frac{\pi^2 \lg^2 e}{\lg q'}$$

или

$$\lg \lg \frac{1}{q} + \lg \lg \frac{1}{q'} = \lg(\pi^2 \lg^2 e) \approx 0.26987. \quad (39)$$

Пример 1. Вычислить значение q при $\alpha = 36^\circ$.

Введем вспомогательный угол, положив

$$\cos 36^\circ = \cos^2 \gamma.$$

Отсюда находим

$$\lg \cos \gamma = \frac{1}{2} \lg \cos 36^\circ = \frac{1}{2} \times \bar{1}.90796 = \bar{1}.95398, \quad \gamma = 25^\circ 54' 50''.$$

Величина q определяется по формуле

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \gamma}}{1 + \sqrt{\cos^2 \gamma}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \gamma. \quad (40)$$

Производим необходимые вычисления. Имеем

$$2 \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = 2 \lg \operatorname{tg} 12^\circ 57' 25'' = 2 \times \bar{1}.36187 = \bar{2}.72374,$$

откуда следует, что

$$q = \frac{1}{2} \times 0.052935 = 0.026467.$$

Пример 2. Вычислить q при $\alpha = 60^\circ$. Воспользуемся формулой

$$q' = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\sin 60^\circ}}{1 + \sqrt{\sin 60^\circ}}.$$

Вводя вспомогательный угол по формуле

$$\cos^2 \gamma' = \sin \alpha = \sin 60^\circ,$$

будем иметь

$$\lg \cos \gamma' = \frac{1}{2} \lg \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \bar{1}.937531 = \bar{1}.968765, \quad \gamma' = 21^\circ 28' 15''.$$

Величина q' находится по формуле

$$q' = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma'}{2}.$$

Производим необходимые вычисления. Имеем

$$2 \lg \operatorname{tg} \frac{\gamma'}{2} = 2 \lg \operatorname{tg} 10^\circ 44' 7'' = 2 \times \bar{1}.277815 = \bar{2}.55563,$$

Получаем

$$-\lg q' = 1.44437 + 0.30103 = 1.74540$$

и далее

$$\begin{aligned} \lg(\pi^2 \lg^2 e) &= 0.26937 \\ - \lg \lg \frac{1}{q'} &= 0.24189 \\ \hline \lg \lg \frac{1}{q} &= 0.02798 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lg \frac{1}{q} = 1.0665, \quad \lg q = \bar{2}.9335, \quad q = 0.08580.$$

Поясним на нескольких примерах, как производить вычисление значений функций тета с помощью рядов.

Пример 3. Вычислить значения функций $\vartheta_0(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ и $\vartheta_3(x)$ при условии, что $u = 0.3468$ и $\alpha = 36^\circ$.

Находим сначала величину q . В примере 1 настоящего параграфа вычислено значение q , соответствующее $\alpha = 36^\circ$:

$$q = 0.026467.$$

Определяем величину $2x$ из условия

$$2x = \frac{u}{K}.$$

Величина K находится по таблицам Лежандра для $\alpha = 36^\circ$:

$$K = 1.7415.$$

Подставляя вместо u и K их значения в равенство, определяющее x , получаем:

$$2x = \frac{0.3468}{1.7415} = 0.1992 \quad x = 0.0996.$$

Градусное выражение аргумента $2\pi x$ равно

$$180^\circ \times 0.1992 = 35^\circ 51'.$$

Вычисляем последовательно члены разложения

$$\vartheta_0(x) = 1 - 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x - 2q^9 \cos 6\pi x + \dots \quad (41)$$

Вычисления располагаем так:

$$\begin{array}{r} \lg \cos 35^\circ 51' = \bar{1}.90878 \qquad 2q \cos 2\pi x = 0.04290 \\ + \\ \lg 2q = \bar{2}.72374 \\ \hline \lg (2q \cos 2\pi x) = \bar{2}.63252 \end{array}$$

Следующие члены, как легко видеть, не оказывают влияния на пятую цифру после запятой. Получаем

$$\vartheta_0(0.0996) = 0.95710.$$

Для $\vartheta_3(x)$ из разложения

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2q \cos 2\pi x + 2q^4 \cos 4\pi x + 2q^9 \cos 6\pi x + \dots \quad (42)$$

получаем

$$\vartheta_3(0.0996) = 1.04290.$$

Для вычисления $\vartheta_1(x)$ и $\vartheta_2(x)$ воспользуемся разложениями:

$$\vartheta_1(x) = 2q^{1/4} \sin \pi x - 2q^{9/4} \sin 3\pi x + 2q^{25/4} \sin 5\pi x - \dots, \quad (43)$$

$$\vartheta_2(x) = 2q^{1/4} \cos \pi x + 2q^{9/4} \cos 3\pi x + 2q^{25/4} \cos 5\pi x + \dots \quad (44)$$

Вычисления располагаем в следующем порядке:

$\begin{array}{r} + \left \begin{array}{l} \lg \sin 17^\circ 55' = \bar{1}.48803 \\ \frac{1}{4} \lg q = \bar{1}.60568 \\ \hline \lg q^{1/4} \sin \pi x = \bar{1}.09371 \end{array} \right. \\ \\ + \left \begin{array}{l} \lg \sin 53^\circ 46' = \bar{1}.90667 \\ \frac{5}{4} \lg q = \bar{2}.02840 \\ \hline \lg q^{5/4} \sin 3\pi x = \bar{3}.93507 \end{array} \right. \\ \\ - \left \begin{array}{l} q^{1/4} \sin \pi x = 0.12408 \\ q^{5/4} \sin 3\pi x = 0.00861 \\ \hline \frac{1}{2} \vartheta_1(x) = 0.11547 \\ \vartheta_1(0.0991) = 0.23094 \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} + \left \begin{array}{l} \lg \cos 17^\circ 55' = \bar{1}.97841 \\ \frac{1}{4} \lg q = \bar{1}.60568 \\ \hline \lg q^{1/4} \cos \pi x = \bar{1}.58409 \end{array} \right. \\ \\ + \left \begin{array}{l} \lg \cos 53^\circ 46' = \bar{1}.77164 \\ \frac{5}{4} \lg q = \bar{2}.02840 \\ \hline \lg q^{5/4} \cos 3\pi x = \bar{3}.80004 \end{array} \right. \\ \\ + \left \begin{array}{l} q^{1/4} \cos \pi x = 0.38379 \\ q^{5/4} \cos 3\pi x = 0.00631 \\ \hline \frac{1}{2} \vartheta_2(x) = 0.39010 \\ \vartheta_2(0.0991) = 0.78020 \end{array} \right.$
---	---

Вычисление значений функций тета при чисто мнимых значениях аргумента приводится с помощью соотношений, указанных в главе III, к вычислению значений функций тета для вещественных значений аргумента.

Пример 4. Вычислить значение функции $\vartheta_3(\alpha)$ при $\alpha = i$, если $a = 54^\circ$. Согласно равенству

$$\vartheta_3(ix, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} e^{\frac{\pi x^2}{\varrho}} \vartheta_3\left(\frac{x}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right)$$

вычисление приводится к нахождению значения функции $\vartheta_3\left(\frac{x}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right)$ при вещественном значении аргумента $x = 1$.

Величина $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$ соответствует величина $q' = e^{-\pi\varrho'}$, которая определяется равенством

$$q' \approx \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\sin 54^\circ}}{1 + \sqrt{\sin 54^\circ}}.$$

Пользуясь результатом примера 1 настоящего параграфа, можно написать

$$q' \approx 0.026467 \quad \text{и} \quad \lg \frac{1}{q'} = 1.57729.$$

Величина ϱ' получает значение

$$\varrho' = \frac{1}{\varrho} = \lg \frac{1}{q'} : (\pi \lg e) = \frac{1.57729}{\pi \lg e} \approx 1.15606.$$

В градусной мере $\pi\varrho'$ равняется $208^\circ 5' 28''$.

Производим необходимые вычисления, приведя величину $2\pi\varrho'$ в ее градусном выражении к простейшему виду

$$2 \times 208^\circ 5' 28'' = 360^\circ + 56^\circ 10' 56''.$$

$$+ \left| \begin{array}{l} \lg q' = \overline{2}.42271 \\ \lg \cos 2\pi\varrho' = \overline{1}.74551 \\ \lg(q' \cos 2\pi\varrho) = \overline{1}.16822 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} q' \cos 2\pi\varrho' = 0.014731 \\ 1 + 2q' \cos 2\pi\varrho' = 1 + 0.029462 = 1.02946. \end{array}$$

Получаем

$$\vartheta_3\left(\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right) = 1.02946.$$

Далее имеем

$$e^{\frac{\pi}{\varrho}} = \frac{1}{q'}.$$

Произведя окончательные вычисления, получаем

$$+ \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \lg \varrho' = 0.03149 \\ \lg \frac{1}{q'} = 1.57729 \\ \lg \vartheta_3(\varrho') = 0.01261 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vartheta_3(i, \varrho) = 41.821, \\ \lg \vartheta_3(i, \varrho) = 1.62139, \end{array}$$

§ 9. Вычисление эллиптических функций с помощью функций тета. Вычисление значений эллиптических функций Якоби и Вейерштрасса может быть легко выполнено с помощью функций тета.

Функции Якоби, как было отмечено в главе II, § 2, выражаются через функции тета равенствами

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}, \quad (45)$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}, \quad (46)$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}. \quad (47)$$

Вычислив значения функций тета при заданном значении аргумента, определяем из этих равенств значения функций Якоби.

Пример на вычисление значений функций Якоби с помощью функций тета был указан в главе III. Поэтому мы здесь этих вычислений повторять не будем.

Если последнее вычисление производится с помощью логарифмов, то можно вычислять не самые функции тета, а их логарифмы с помощью разложений § 6 главы III.

При вычислении функции Вейерштрасса следует различать случаи положительного и отрицательного дискриминанта Δ .

В случае $\Delta > 0$ для вычисления значения $\wp(u)$ можно воспользоваться одной из формул:

$$\wp(u) = e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}, \quad (48)$$

$$\wp(u) = e_2 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)} \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}, \quad (49)$$

$$\wp(u) = e_3 + \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K}\right)}. \quad (50)$$

Пример 1. Вычислить значение функции $\wp(u, 39, 35)$ при $u = 1$.
Находим сначала корни уравнения

$$4z^3 - 39z - 35 = 0.$$

Получаем

$$e_1 = 3.5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -2.5; \quad \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} = 3.$$

Модуль k имеет значение

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \frac{1}{2};$$

модулярный угол $\alpha = 30^\circ$.

Для вычисления q обращаемся к формуле

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos 30^\circ}}{1 + \sqrt{\cos 30^\circ}}.$$

Произведя необходимые вычисления, получаем

$$\lg q = \bar{2}.25460.$$

Вычисляем значение аргумента

$$2x = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{K} = \frac{\sqrt{6}}{1.63575} \approx 1.45305.$$

Величина дуги $2\pi x$ в градусах равна $261^\circ 33' = 180^\circ + 81^\circ 33'$.

Вычисляем ϑ_0 (0.72652):

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} \lg q = \bar{2}.25460 \\ \lg \cos 2\pi x = \bar{1}.16716 \end{array} \right. \\ \hline \lg q \cos 2\pi x = \bar{3}.42176 \end{array} \quad \begin{array}{l} q \cos 2\pi x = -0.002641 \\ 2q \cos 2\pi x = -0.005282 \end{array}$$

Получаем

$$\vartheta_0(0.72652) \approx 1 - 2q \cos 2\pi x = 1.00528.$$

Вычисляем ϑ_1 (0.72652):

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} \lg 2 = 0.30103 \\ \frac{1}{4} \lg q = \bar{1}.56345 \\ \lg \sin \pi x = \bar{1}.87926 \end{array} \right. \\ \hline \lg 2q^{1/4} \sin \pi x = \bar{1}.74374 \\ 2q^{1/4} \sin \pi x = 0.55429 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} \lg 2 = 0.30103 \\ \frac{9}{4} \lg q = \bar{4}.07105 \\ \lg \sin 3\pi x = \bar{1}.72813 \end{array} \right. \\ \hline \lg 2q^{9/4} \sin 3\pi x = \bar{4}.10021 \\ 2q^{9/4} \sin 3\pi x = 0.00013 \end{array}$$

$$\vartheta_1(0.72652) \approx 2q^{1/4} \sin \pi x - 2q^{9/4} \sin 3\pi x \approx 0.55416.$$

Производим окончательное вычисление

$$\wp(1; 39, 35) = -2.5 + 3 \times \left(\frac{1.00528}{0.55416} \right)^2 \approx 7.3724.$$

В случае $\Delta < 0$ для вычисления значений $\wp(u)$ можно воспользоваться формулой

$$\wp(u) = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})},$$

представив ее в виде

$$\wp(u) = e_2 + H \frac{\sqrt{k} \vartheta_0 \left(\frac{u\sqrt{H}}{K} \right) + \sqrt{k'} \vartheta_2 \left(\frac{u\sqrt{H}}{K} \right)}{\sqrt{k} \vartheta_0 \left(\frac{u\sqrt{H}}{K} \right) - \sqrt{k'} \vartheta_2 \left(\frac{u\sqrt{H}}{K} \right)}. \quad (51)$$

§ 10. Вычисление значений функции $\sigma(u)$. Вычисление значений функции $\sigma(u)$ можно производить, пользуясь ее выражением через функцию $\vartheta_1(x)$:

$$\sigma(u; 2\omega, 2\omega') = 2\omega e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_1 \left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K} \right)}{\vartheta_1'(0)}. \quad (52)$$

Аналогичные выражения имеют место для функций $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$:

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_2 \left(\frac{u\sqrt{e_1 - e_3}}{2K} \right)}{\vartheta_2(0)}, \quad (53)$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_3 \left(\frac{u \sqrt{e_1 - e_3}}{2K} \right)}{\vartheta_3(0)}, \quad (54)$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_0 \left(\frac{u \sqrt{e_1 - e_3}}{2K} \right)}{\vartheta_0(0)}. \quad (55)$$

Этими выражениями удобно пользоваться для вычисления значений функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при данном значении аргумента.

Вычисление значения η можно производить либо как было указано в § 7 либо пользуясь разложением

$$\eta = \frac{1}{12\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\pi^2}{12\omega} \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - 7^3 q^{12} + \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots}. \quad (56)$$

Пример 1. Вычислить значение функции $\sigma(u; g_2, g_3)$ при $u=1$, если $g_2=39$, $g_3=35$. Находим корни уравнения

$$4z^3 - 39z - 35 = 0.$$

Эти корни суть

$$e_1 = 3.5, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = -2.5.$$

Значение модуля дается равенством

$$k = \sqrt{\frac{1.5}{6}} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

Для K по таблицам Лежандра имеем

$$K = 1.68575.$$

Величина периода ω получает значение

$$\omega = \frac{1.68575}{\sqrt{6}} = 0.688205.$$

Значение аргумента x определяется равенством

$$2x = \frac{\sqrt{6}}{K} = 1.45305 \quad \text{или} \quad x = 0.72652.$$

Градусное выражение для дуги $2\pi x$ равно $261^\circ 33'$.

Находим, как показано в § 8, значение q , соответствующее $k = \frac{1}{2}$. Получаем

$$\lg q = \bar{2}.25460 \quad \text{и} \quad q = 0.017972.$$

Определяем значения сумм бесконечных рядов

$$1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots = 0.99903, \quad 1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - 7^3 q^{12} + \dots = 0.99128.$$

Находим, пользуясь равенством (56), что

$$\begin{aligned} \ln e^{\frac{\eta}{2\omega}} &= \frac{1}{2\omega^2} \frac{\pi^2}{12} \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots} = \\ &= \frac{\pi^2 (e_1 - e_3)}{24K^2} \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots} = \frac{\pi^2}{4K^2} \cdot \frac{0.99128}{0.99903} = 0.86153. \end{aligned}$$

Приступая к вычислению отношения $\vartheta_1 \left(\frac{u \sqrt{e_1 - e_3}}{2K} \right) : \vartheta_1'(0)$, заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)} &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi x - q^2 \sin 3\pi x + q^6 \sin 5\pi x - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots} = \\ &= \frac{1}{\pi} [\sin \pi x + (3 \sin \pi x - \sin 3\pi x) q^2 - \dots] = \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} + \frac{4 \sin^3 \pi x}{\pi} q^2 + \dots \approx \frac{\sin \pi x}{\pi} (1 + 4 \sin^2 \pi x q^2). \end{aligned}$$

Пользуясь полученными значениями q и x , находим

$$\frac{\vartheta_1(0.72652)}{\vartheta_1'(0)} = 0.24106$$

и получаем, производя окончательные вычисления,

$$\sigma(u) = 2\omega_2^{0.86153} 0.24106 = 0.78528.$$

Указанные для вычисления значений $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ выражения (52), (53), (54), (55) могут быть представлены в несколько иной форме:

$$\sqrt[8]{\Delta} \sigma(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \quad (57)$$

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} \sigma_1(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \quad (58)$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sigma_2(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)}, \quad (59)$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2} \sigma_3(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}. \quad (60)$$

В случае отрицательного значения Δ для вычисления значений функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ и $\sigma_3(u)$ следует взять другие формулы:

$$\sqrt[8]{|\Delta|} \sigma(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega''} e^{\frac{\eta'' u^2}{2\omega''}} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right)}, \quad (61)$$

$$\sqrt[4]{i(e_3 - e_1)} \sigma_2(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega''} e^{\frac{\eta'' u^2}{2\omega''}} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right)}, \quad (62)$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} \sigma_1(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega''} e^{\frac{\eta'' u^2}{2\omega''}} \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right)}, \quad (63)$$

$$\sqrt[4]{e_2 - e_1} \sigma_3(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega''} e^{\frac{\eta'' u^2}{2\omega''}} \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right)}, \quad (64)$$

Величина $\bar{\varrho}$ определяется равенством

$$\bar{\varrho}i = \frac{\omega'}{\omega''}.$$

Вычисление значений функций тета удобно производить с помощью рядов

$$e^{-1/8\pi i} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) = 2q^{1/4} \sin \frac{\pi u}{2\omega''} + 2q^{9/4} \sin \frac{3\pi u}{2\omega''} - 2q^{25/4} \sin \frac{5\pi u}{2\omega''} - \dots, \quad (65)$$

$$e^{-1/8\pi i} \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) = 2q^{1/4} \cos \frac{\pi u}{2\omega''} - 2q^{9/4} \cos \frac{3\pi u}{2\omega''} - 2q^{25/4} \cos \frac{5\pi u}{2\omega''} + \dots, \quad (66)$$

$$\frac{1}{2} \left[\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) + \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) \right] = 1 + 2q^2 \cos \frac{2\pi u}{\omega''} + 2q^{16} \cos \frac{4\pi u}{\omega''} + \dots, \quad (67)$$

$$\frac{1}{2} \left[\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) - \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega''}, \bar{\varrho}\right) \right] = 2i \left(q \cos \frac{\pi u}{\omega''} + q^9 \cos \frac{3\pi u}{\omega''} + \dots \right). \quad (68)$$

Величина q дается равенством

$$q = \frac{1}{2} \lambda + 2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^5 + 15 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^9 + 150 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{13} + \dots, \quad (69)$$

где λ определяется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tg} \frac{\psi}{4} \quad (70)$$

причем

$$e_2 - e_3 = r (\cos \psi + i \sin \psi), \quad 0 < \psi < \pi. \quad (71)$$

Для вычисления величины η'' следует пользоваться формулой

$$\eta'' \omega'' = \frac{\pi^2}{12} \frac{1 + 3^3 q^2 - 5^3 q^6 - 7^3 q^{12} + \dots}{1 + 3q^2 - 5q^6 - 7q^{12} + \dots}. \quad (72)$$

Вычисления проводятся совершенно так же, как и в случае положительного Δ .

ГЛАВА VIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ

Приложения эллиптических функций к различным задачам общей механики, теории упругости, гидро- и аэродинамики, электротехники весьма разнообразны.

В настоящей главе рассмотрены в качестве примеров некоторые задачи прикладного характера. Их цель—иллюстрировать применение эллиптических функций к конкретным вопросам. По характеру использования аппарата эллиптических функций рассматриваемые примеры можно разделить на две категории.

Вопросы первой категории приводятся к интегрированию дифференциальных уравнений в эллиптических функциях или решаются с помощью эллиптических интегралов. Такова задача о коэффициенте магнитной индукции двух круговых токов, вопрос о постоянной гальванометра, задача о колебании маятника, вопрос о движении кривошипа, регуляторе Уатта, движении тяжелой точки в среде с сопротивлением.

Вопросы второй категории связаны по преимуществу с конформным отображением при помощи эллиптических функций. В качестве примеров задач второго рода рассмотрены некоторые вопросы плоского движения жидкости и разобранный случай расчета плоского электрического поля.

§ 1. Маятник. Классическим примером приложения эллиптических функций может служить задача о колебаниях маятника.

Положим, что тяжелое тело, масса которого равняется M , может вращаться около горизонтальной оси. Такое тело называют физическим маятником.

Пусть S обозначает положение центра тяжести маятника. Обозначим расстояние от центра тяжести S до оси O через l_0 . Пусть Ma^2 обозначает момент инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести S . Момент инерции маятника относительно оси вращения, проходящей через точку O , равен $M(a^2 + l_0^2)$.

Обозначим через θ угол отклонения маятника от вертикального направления в момент t . Время отсчитывается от момента начала колебаний. Величина угла отклонения θ меняется с течением времени. Ее зависимость от времени определяется дифференциальным уравнением

$$(a^2 + l_0^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -gl_0 \sin \theta, \quad (1)$$

выражающим равенство скорости изменения момента количества движения маятника около горизонтальной оси и момента относительно той же оси силы тяжести, действующей на маятник.

Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta, \quad (2)$$

где

$$l = l_0 + \frac{a^2}{l_0}.$$

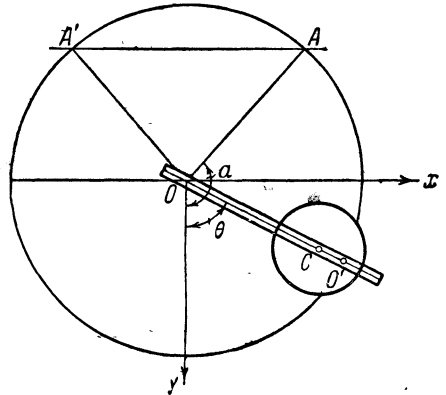
Уравнение (2) показывает, что колебания физического маятника происходят совершенно так же, как если бы вся его масса была сосредоточена в одной точке, закрепленной на невесомом стержне на расстоянии l от оси вращения. Назовем этот маятник „математическим маятником“. Отметим его конец, точку O' , на фиг. 76.

Расстояние l_0' точки O' от центра тяжести равно

$$l_0' = \frac{a^2}{l_0}.$$

Соотношение $l_0 l_0' = a^2$ показывает, что в том случае, когда рассматриваемый физический маятник будет колебаться около горизонтальной оси, проходящей через точку O' , его колебания будут синхронны с колебаниями математического маятника длины l' , равной l , а потому синхронным с колебаниями данного физического маятника около оси O . В самом деле,

$$l' = l_0' + \frac{a^2}{l_0'} = \frac{a^2}{l_0} + l_0 = l.$$



Фиг. 76

Обратимся к уравнению (2). Умножая обе части на $\frac{d\theta}{dt}$ и интегрируя, получаем

$$\frac{l}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \cos \theta + C. \quad (3)$$

Пусть θ_0' обозначает начальную угловую скорость, сообщенную маятнику, когда он находился в положении равновесия. Уравнение (3) представится в виде

$$\frac{l}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{l}{2} \theta_0'^2 - 2g \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Положив

$$k^2 = \frac{l \theta_0'^2}{4g},$$

перепишем его так

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим три случая согласно с возможной величиной k .

1. $k < 1$. В этом случае можно положить

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Когда угол θ достигнет значения α , угловая скорость обратится в нуль и направление движения изменится на обратное. Маятник будет совершать колебания между точками A и A' .

Из уравнения (4) следует, что

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = t. \quad (5)$$

Введя новое переменное φ , определяемое соотношением

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi = \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

получаем из уравнения (5)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\varphi, k). \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) видно, что

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Для $\cos \frac{\theta}{2}$ получаем

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

Прямоугольные координаты точки O' относительно осей OX и OY выражаются следующими функциями времени:

$$y = l \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \left(2 \operatorname{dn}^2 \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) - 1 \right) l, \quad (8)$$

$$x = 2l \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \operatorname{dn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right). \quad (9)$$

Период колебания T определяется равенством

$$T \sqrt{\frac{g}{l}} = 4K = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (10)$$

Если воспользоваться разложением полного эллиптического интеграла в ряд по степеням k , то для периода T получаем формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

При небольших значениях α имеем

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11)$$

или более точно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right). \quad (12)$$

2. $k > 1$. В этом случае уравнению (4) выгоднее дать вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{\theta_0'^2}{4} \left[1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (13)$$

положив

$$k_1^2 = \frac{4g}{l\theta_0'^2}.$$

Так как величина k_1 меньше единицы, то отсюда следует, что угловая скорость вращения никогда не обратится в нуль, и вращение будет происходить все время в одном и том же направлении.

Интегрируя уравнение (13), получаем

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \theta_0' t, \quad (14)$$

где

$$\varphi = \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

Таким образом

$$\theta = 2 \operatorname{am} \frac{\theta_0' t}{2}. \quad (16)$$

Координаты точки P суть

$$y = l \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = l \left(\operatorname{cn}^2 \left(\frac{\theta_0' t}{2} \right) - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\theta_0' t}{2} \right) \right), \quad (17)$$

$$x = 2l \operatorname{sn} \left(\frac{\theta_0' t}{2} \right) \operatorname{cn} \left(\frac{\theta_0' t}{2} \right). \quad (18)$$

Время полного оборота T точки O' по окружности определяется равенством

$$T = \frac{4}{\theta_0'} K = \frac{4}{\theta_0'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (19)$$

Отсюда имеем приближенную формулу

$$T \approx \frac{2\pi}{\theta_0'}$$

или более точную

$$T \approx \frac{2\pi}{\theta_0'} \left(1 + \frac{k_1^2}{4} \right)$$

для небольших значений k_1 , т. е. при большой начальной угловой скорости θ_0' .

3. $k = 1$. Уравнение (4) в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Этот случай можно рассматривать как предельный по отношению к предыдущим, когда $k \rightarrow 1$ и $k_1 \rightarrow 1$.

Непосредственным интегрированием или предельным переходом получаем

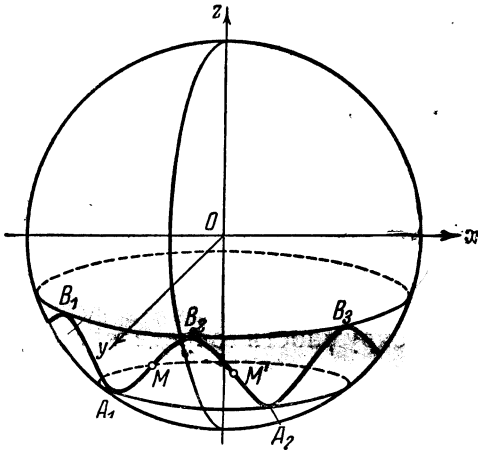
$$l \sqrt{\frac{g}{l}} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (20)$$

$$y = l \frac{1 - \operatorname{sh}^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t}, \quad (21)$$

$$x = 2l \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{g}{l}} t}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\frac{g}{l}} t}. \quad (22)$$

При беспредельном возрастании t угол θ стремится к π , y стремится к $-l$, а x приближается к 0, точка O' стремится к наивысшему вертикальному положению. Период T обращается в этом случае в бесконечность.

§ 2. Сферический маятник. При известных начальных условиях колебания математического маятника могут оказаться неплоскими. Это произойдет в том случае, когда маятнику, выведенному из положения равновесия в некоторой вертикальной плоскости, будет сообщена начальная скорость в направлении, выводящем его из этой плоскости. Конечная точка маятника длины l будет описывать некоторую кривую на сфере радиуса l . Вопрос приводится к изучению движения материальной точки на сфере радиуса l под действием силы тяжести.



Фиг. 77.

Примем центр сферы за начало координат (фиг. 77). Ось OZ направим вертикально вверх. На движущуюся точку M действуют сила тяжести и реакция связи. Эта реакция направлена по нормали к поверхности. Обозначим ее составляющие по координатным осям через R_x, R_y, R_z .

Дифференциальные уравнения движения точки M имеют вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = R_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + R_z. \quad (23)$$

Для этой системы уравнений имеет место интеграл живой силы

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + C, \quad (24)$$

ибо работа реакции связи равна нулю, так как направление ее перпендикулярно к перемещению.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть начальное положение точки, а v_0 —начальная скорость. Выразив C через начальные данные задачи получаем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z_0 - z) + v_0^2. \quad (25)$$

Кроме того, для системы (23) имеет место интеграл площадей в плоскости xy

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C', \quad (26)$$

ибо реакция связи имеет направление по линии OM . Величина C' определяется начальными условиями задачи.

Для большей простоты дальнейших преобразований заменим прямоугольные координаты точки M цилиндрическими, положив

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Уравнения (25) и (26) принимают вид

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z_0 - z) + v_0^2 \quad (27)$$

и

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C'. \quad (28)$$

Последнее уравнение показывает, что производная $\frac{d\theta}{dt}$ все время сохраняет знак. Вертикальная плоскость, проходящая через ось OZ и точку M , вращается все время в одном и том же направлении. При этом, когда r становится меньше, угловая скорость вращения плоскости увеличивается, а при увеличении r убывает. Учитывая зависимость

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

можно сказать, что при удалении точки M от плоскости XOY скорость вращения плоскости становится больше.

Из равенств (27) и (28) следует, что

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C'^2}{r^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z_0 - z) + v_0^2. \quad (29)$$

Из соотношения, связывающего величину r и z , получаем

$$r \frac{dr}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0.$$

Заменив в уравнении (29) $\frac{dr}{dt}$ его выражением через $\frac{dz}{dt}$, получаем

$$(z^2 + r^2) \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = [2g(z_0 - z) + v_0^2] r^2 - C'^2$$

или

$$l^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = [2g(z_0 - z) + v_0^2] (l^2 - z^2) - C'^2. \quad (30)$$

Обозначая для удобства письма правую часть последнего равенства через $f(z)$, можем написать

$$f(z) = 2gz^3 - (2gz_0 + v_0^2)z^2 - 2gl^2z + (2gz_0 + v_0^2)l^2 - C'^2. \quad (31)$$

Обозначим корни многочлена $f(z)$ через c_1, c_2, c_3 .

Тогда

$$f(z) = 2g(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3).$$

Корни этого полинома вещественные. В самом деле, в начальный момент движения оказывается, как это видно из уравнения (30), что

$$f(z_0) > 0.$$

Кроме того, непосредственной постановкой убеждаемся, что

$$f(-l) < 0, \quad f(l) < 0, \quad f(+\infty) > 0.$$

Принимая во внимание, что $-l < z_0 < l$, приходим к заключению о том, что функция $f(z)$ три раза изменяет свой знак: первый раз в промежутке $(-l, z_0)$, второй раз в промежутке (z_0, l) и третий раз в промежутке $(l, +\infty)$. Каждый из этих промежутков содержит корень функции. Все корни функции $f(z)$ вещественные и удовлетворяют неравенствам

$$c_1 > l > c_2 > z_0 > c_3 > -l.$$

Легко видеть, что $c_3 < 0$. Действительно, из соотношения

$$(c_1 + c_2)c_3 + c_1c_2 = -2gl^2$$

следует, что корни c_1, c_2, c_3 не могут быть все положительными. Значит, один из них, по крайней мере, т. е. корень c_3 , отрицателен.

Равенство

$$l^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)$$

показывает, что функция $f(z)$ положительна во все время движения. Функция $f(z)$ может иметь положительное значение либо при $z > c_1$, либо

при $c_2 > z > c_3$. Величина z не может принимать значений, больших l . Из этого следует, что во время движения z остается заключенной между c_2 и c_3 . Интегрируя, получаем

$$t = l \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{2g(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)}}. \quad (32)$$

Перепишем равенство (32) в виде

$$t + a = l \int_{c_3}^z \frac{dz}{\sqrt{2g(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)}}, \quad (33)$$

где

$$a = l \int_{c_3}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{2g(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)}}. \quad (34)$$

Произведем замену переменных, положив

$$z = w + \frac{1}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right). \quad (35)$$

Равенство (33) примет вид

$$\frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a) = \int_{l_2}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} g_2 &= 4l^2 + \frac{4}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^2, \\ g_3 &= \frac{4}{27} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^3 - \frac{4l^2}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) + \frac{-2C'^2}{g}, \\ l_k &= c_k - \frac{1}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right), \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Из равенства (36) следует, что

$$\int_w^\infty \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} = \omega' - \frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a), \quad (37)$$

где

$$\omega' = \int_{l_2}^\infty \frac{dw}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Равенство (37) показывает, что

$$w = \wp \left(\omega' - \frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a); g_2, g_3 \right) = \wp \left(-\omega' - \frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a); g_2, g_3 \right)$$

или, в силу четности функции $\wp(u)$, что

$$w = \wp \left(\frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a) + \omega'; g_2, g_3 \right).$$

Таким образом

$$z = \wp \left\{ \frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a) + \omega'; g_2, g_3 \right\} + \frac{1}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right). \quad (38)$$

Величина r определяется по величине z . Равенство (28) дает возможность выразить θ в функции времени. В самом деле

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C'}{l^2 - z^2} = \frac{C'}{2l} \left(\frac{1}{z-l} - \frac{1}{z+l} \right).$$

Положим для удобства письма

$$\tau = \frac{\sqrt{2g}}{2l} (t + a) + \omega' \quad (39)$$

и определим значения аргумента τ , удовлетворяющие уравнениям

$$\wp(\tau_1) + \frac{1}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) = l, \quad (40)$$

$$\wp(\tau_2) + \frac{1}{3} \left(z_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) = -l. \quad (41)$$

Таких значений аргумента, как мы знаем, имеется бесчисленное множество. При этих значениях аргумента τ величина z становится равною $\pm l$, и функция $f(z)$ принимает значение

$$f(\pm l) = -C'^2.$$

Производная

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{f(z)}}{l}$$

принимает значение $\pm \frac{1}{l} C'i$. Таким образом имеем

$$\wp'(\tau_1) = \frac{2}{\sqrt{2g}} \left(\pm \frac{C'i}{l} \right), \quad \wp'(\tau_2) = \frac{2l}{\sqrt{2g}} \left(\pm \frac{C'i}{l} \right).$$

Выберем из значений τ_1 и τ_2 , определяемых условиями (40) и (41), такие, чтобы оказалось

$$\wp'(\tau_1) = \frac{2}{\sqrt{2g}} C'i, \quad \wp'(\tau_2) = \frac{2}{\sqrt{2g}} C'i. \quad (42)$$

Внося в правую часть равенства, выражающего производную $\frac{d\theta}{dt}$, вместо $-l$, l , и z' их представления через функцию $\wp(u)$, получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{4li} \left\{ \frac{\wp'(\tau_1)}{\wp(\tau) - \wp(\tau_1)} - \frac{\wp'(\tau_2)}{\wp(\tau) - \wp(\tau_2)} \right\}.$$

Выражение для производной $\frac{d\theta}{d\tau}$ имеет вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{2l}{\sqrt{2g}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\wp'(\tau_1)}{\wp(\tau) - \wp(\tau_1)} - \frac{\wp'(\tau_2)}{\wp(\tau) - \wp(\tau_2)} \right\}.$$

Выражая правую часть последнего равенства через функцию дзета, получаем

$$2i \frac{d\theta}{d\tau} = -\zeta(\tau + \tau_1) + \zeta(\tau - \tau_1) + 2\zeta(\tau_1) + \zeta(\tau + \tau_2) - \zeta(\tau - \tau_2) - 2\zeta(\tau_2).$$

Интегрируя, имеем

$$e^{\theta_0 i} = A \frac{\sigma(\tau + \tau_2) \sigma(\tau - \tau_1)}{\sigma(\tau + \tau_1) \sigma(\tau - \tau_2)} e^{2\tau [\zeta(\tau_1) - \zeta(\tau_2)]}.$$

Значение A находится по начальным условиям.

Пусть θ_0 обозначает начальное значение θ и

$$a = \frac{\sqrt{2g}}{2l} a + \omega'.$$

В таком случае имеем

$$e^{2(\theta - \theta_0)i} = \frac{\sigma(a - \tau_2) \sigma(a + \tau_1) \sigma(\tau + \tau_2) \sigma(\tau - \tau_1)}{\sigma(a - \tau_1) \sigma(a + \tau_2) \sigma(\tau + \tau_1) \sigma(\tau - \tau_2)} e^{2(\tau - a)[\zeta(\tau_1) - \zeta(\tau_2)]} \quad (43)$$

и

$$z + yi = \sqrt{l^2 - z^2} e^{\theta_0 i}, \quad (44)$$

или

$$x + yi = \sqrt{\{\wp(\tau_1) - \wp(\tau)\} \{\wp(\tau) - \wp(\tau_2)\}} e^{\theta_0 i}. \quad (45)$$

Сделаем выводы из полученных равенств. Из равенства (38) видно, что с изменением времени аргумент функций $\wp(\tau; g_2, g_3)$ все время сохраняет вид $u + \omega'$, где u есть вещественное число. Отсюда следует, что значения функции

$$\wp\left(\frac{\sqrt{2g}}{2l}(t + a) + \omega'; g_2, g_3\right)$$

остаются заключенными между l_3 и l_2 .

Так как u возрастает вместе с t , то значения, принимаемые функцией $\wp(u + \omega'; g_2, g_3)$, периодически возрастают от l_3 до l_2 и затем убывают от l_2 до l_3 .

Величина z увеличивается от c_3 до c_2 и затем от c_2 уменьшается до c_3 .

Движущаяся точка описывает кривую, изображенную на фиг. 76, заключенную между двумя параллелями.

Время перехода от одной параллели, соответствующей значению $z = c_3$, до параллели, соответствующей $z = c_2$, равно

$$T_1 = l \int_{c_3}^{c_2} \frac{dz}{\sqrt{4g(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}} = \frac{2l}{\sqrt{2g}} \int_{l_3}^{l_2} \frac{dw}{\sqrt{4w^2 - g_2 w - g_3}},$$

иначе говоря,

$$T_1 = \frac{2l}{\sqrt{2g}} \omega. \quad (46)$$

В моменты времени, соответствующие значениям τ вида $2m\omega + \omega'$, точка M достигает нижней параллели. В моменты времени, соответствующие значениям $\tau = 2m\omega + \omega + \omega'$, движущаяся точка достигает верхней параллели.

Из уравнений (38), (43) и (44) следует, что в моменты времени, одинаково отстоящие от моментов прохождения через нижние или верхние точки траектории, движущаяся точка M занимает положение, симметричное относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и соответствующую нижнюю или верхнюю точку траектории.

Интересно отметить, что в том случае, когда начальная скорость направлена в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и начальное положение движущейся точки, постоянная площадей C' равна 0, угол θ остается постоянным, и колебания маятника происходят в одной плоскости.

В этом случае, как то видно из уравнения (31), корни c_1 и c_3 многочлена $f(z)$ становятся соответственно равными величинам $+lu - l$; $c_1 = l$, $c_3 = -l$. Нижняя окружность превращается в точку. Корень c_2 становится равным

$$c_2 = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Период ω становится равным

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{2l}}, \quad (47)$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

при

$$k^2 = \frac{v_0^2 + 2g(l + z_0)}{4gl}. \quad (48)$$

Если вертикальное положение равновесия принять за начальное, то $z_0 = -l$ и равенство (48) дает

$$k^2 = \frac{v_0^2}{4gl} = \frac{\theta_0'^2}{4gl}. \quad (49)$$

Время перехода T_1 из низшего положения в высшее, доставляемое формулой (46), дает четверть периода T , получаемого из равенства (10)

$$T_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} K. \quad (50)$$

Равенство (38) может быть представлено в виде

$$z = -l + \frac{2l \frac{v_0^2}{2g}}{\wp \left\{ \frac{\sqrt{2g}}{2l} t; g_2, g_3 \right\} + \frac{2}{3} l + \frac{v_0^2}{6g}}.$$

Выразив функцию Вейерштрасса через функции Якоби, получим

$$z = -l + \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t; k \right)$$

или

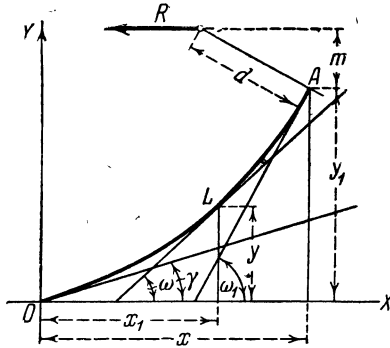
$$z = -l \left\{ 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t; k \right) \right\} = -l \left\{ 2 \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t; k \right) - 1 \right\}. \quad (51)$$

Величина k определяется из равенства (49). Равенство (51) обращается в равенство (8). Разница в знаке зависит от выбора направления осей.

§ 3. Изгиб и сжатие. Рассмотрим общий случай плоского изгиба балки, заделанной одним концом. Пусть изгибающая сила R приложена эксцентрично, т. е. не в точке нейтральной оси, и направлена под углом γ к нейтральной оси в ее первоначальном положении.

Под действием силы балка изогнется, и ее нейтральная ось примет форму кривой линии. Отнесем эту кривую к системе координатных осей, выбрав начало координат в точке нейтральной оси на том конце балки, который заделан.

Ось OX направим параллельно направлению силы R под углом γ к первоначальному направлению нейтральной оси (фиг. 78). Направление оси OX противоположно направлению силы R .



Фиг. 78

Возьмем на изогнутой оси точку $L(x, y)$. Обозначим радиус кривизны в точке L через ρ и угол наклона касательной через ω . Изгибающий момент обозначим через M . Момент инерции поперечного сечения назовем I и будем его считать величиной постоянной. Через E обозначим модуль Юнга.

В точках нейтральной оси имеет место равенство

$$\frac{EI}{\rho} = M. \quad (52)$$

Изгибающий момент M определяется равенством

$$M = R(m + y_1 - y), \quad (53)$$

где

$$m = d \cos \omega_1. \quad (54)$$

Через d обозначено расстояние точки приложения силы R от центра тяжести сечения.

Радиус кривизны ρ дается равенством

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds}, \quad (55)$$

где s обозначает длину дуги, отсчитываемую от точки O .

Уравнение (52) переписется в виде

$$\frac{d\omega}{ds} = a^2(m + y_1 - y), \quad (56)$$

где для краткости письма положено

$$\frac{R}{EI} = a^2.$$

Заметим, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \omega. \quad (57)$$

Уравнения (57) совместно с уравнением (56) дают систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой доставляет уравнение оси в конечной форме.

Из уравнений (56) и (57) получаем

$$\sin \omega d\omega = a^2(m + y_1 - y) dy$$

и, интегрируя, находим

$$C + 2 \cos \omega = a^2(m + y_1 - y)^2 \quad (58)$$

или

$$a(m + y_1 - y) = \sqrt{C + 2 \cos \omega}. \quad (59)$$

Из уравнения (56) и (59) следует, что

$$\frac{d\omega}{ds} = a \sqrt{C + 2 \cos \omega}, \quad (60)$$

откуда получаем

$$as + C' = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{C + 2 \cos \omega}}. \quad (61)$$

Наконец, первое из уравнений (57) совместно с уравнением (60) дает

$$dx = \frac{\cos \omega}{a \sqrt{C + 2 \cos \omega}} d\omega$$

и после интегрирования

$$x + C'' = \frac{1}{a} \int_0^{\omega} \frac{\cos \omega d\omega}{\sqrt{C + 2 \cos \omega}}. \quad (62)$$

Определим значения произвольных постоянных, входящих в уравнения (58), (61), (62). В точке O угол $\omega = \gamma$ и кроме того имеем $x = y = s = 0$. Равенства (58) и (62) дают возможность определить постоянные C , C' и C'' . Полагая $\omega = \gamma$, $x = y = s = 0$, получаем

$$C = a^2 (m + y_1)^2 - 2 \cos \gamma, \quad (63)$$

$$C' = \int_0^{\gamma} \frac{d\omega}{\sqrt{C + 2 \cos \omega}}, \quad (64)$$

$$C'' = \frac{1}{a} \int_0^{\gamma} \frac{\cos \omega d\omega}{\sqrt{C + 2 \cos \omega}}. \quad (65)$$

Уравнения (59) и (62) дают уравнение кривой в параметрической форме. Из них видно, что параметру ω можно придавать лишь такие значения, при которых $C + 2 \cos \omega$ остается положительной величиной.

Преобразуем сумму $C + 2 \cos \omega$. Получаем

$$\begin{aligned} C + 2 \cos \omega &= a^2 (m + y_1)^2 - 2 \cos \gamma + 2 \cos \omega \\ &= a^2 (m + y_1)^2 + 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\omega}{2}; \end{aligned}$$

положив для краткости письма

$$4k^2 = a^2 (m + y_1)^2 + 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (66)$$

получим

$$C + 2 \cos \omega = 4 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right),$$

и равенство (58) представится в виде

$$4 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) = a^2 (m + y_1 - y)^2. \quad (67)$$

Введем новое переменное φ , определяя его равенством

$$k \sin \varphi = \sin \frac{\omega}{2}.$$

Координаты точки L и длина дуги s представляются в виде

$$x = \frac{2}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (68)$$

$$y = \frac{2k}{a} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi), \quad (69)$$

$$s = \frac{1}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (70)$$

где угол φ_0 определяется из условия

$$k \sin \varphi_0 = \sin \frac{1}{2} \gamma. \quad (71)$$

Пусть

$$b = \frac{1}{a} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (72)$$

Из равенства (70) следует, что

$$\varphi = \operatorname{am} a (s + b), \quad (73)$$

и уравнения изогнутой оси представляются в виде

$$x = \frac{2}{a} \left\{ \operatorname{zn} a (s + b) - \operatorname{zn} ab + \frac{E}{K} as \right\} - s \quad (74)$$

или

$$x = \frac{2E - K}{K} s + \frac{2}{a} \operatorname{zn} a (s + b) - \frac{2}{a} \operatorname{zn} ab \quad (75)$$

и

$$y = \frac{2k}{a} \{ \operatorname{cn} ab - \operatorname{cn} a (s + b) \}. \quad (76)$$

Уравнение (75) можно написать несколько иначе:

$$x = \frac{2E - K}{K} s + \frac{1}{aK} \left\{ \frac{\vartheta_0'(\sigma + \beta)}{\vartheta_0(\sigma + \beta)} - \frac{\vartheta_0'(\beta)}{\vartheta_0(\beta)} \right\}, \quad (75')$$

где

$$\sigma = \frac{as}{2K}, \quad \beta = \frac{ab}{2K}.$$

Величина угла ω определяется равенствами

$$\sin \frac{\omega}{2} = k \operatorname{sn} a (s + b), \quad \cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{dn} a (s + b). \quad (77)$$

Постоянные величины, входящие в уравнения (75), (75'), (76), (77), определяются условиями задачи: величиной силы R , ее направлением γ и эксцентриситетом d , равно как упругими свойствами и формой изгибаемой балки, определяющими значение коэффициента a .

Для определения постоянных в уравнениях (75), (75'), (76) необходимо определить значение модуля k по условиям задачи. Для этой цели обратимся к равенству (67) и положим в нем $\omega = \omega_1$. Тогда будем иметь $y = y_1$ и $s = l$. Мы получаем

$$4 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \right) = a^2 m^2. \quad (78)$$

Заменим m его выражением через эксцентриситет d согласно равенству (54) и представим последнее равенство в виде

$$4 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \right) = a^2 d^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \right)^2.$$

С помощью равенств (77) получаем отсюда, что

$$4k^2 \operatorname{cn}^2 a(l+b) = a^2 d^2 [1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a(l+b)]^2;$$

после очевидных преобразований приходим к равенству

$$2adk^2 \operatorname{cn}^2 a(l+b) \pm 2k \operatorname{cn} a(l+b) + (k'^2 - k^2)ad = 0. \quad (79)$$

Уравнение (79) служит для определения k . В тех случаях, когда $d = 0$, уравнение для определения k принимает вид

$$\operatorname{cn} a(l+b) = 0.$$

Это равенство может быть заменено равносильным

$$a(l+b) = (2n+1)K = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (80)$$

где n — произвольное целое число.

Особенно простой вид равенство (80) получает в том случае, когда $d = 0$ и $\gamma = 0$, т. е. в случае продольного изгиба. В этом случае

$$al = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (81)$$

и отыскание значения k сводится к интерполированию по таблицам Лежандра. Различным значениям m отвечают различные формы изогнутой оси.

Отметим некоторые частные случаи.

1. Продольный изгиб: $d = 0$, $\gamma = 0$. В этом случае $b = 0$ и уравнения изогнутой оси (75) и (76) принимают вид

$$x = \frac{2}{a} \operatorname{zn}(as) + \frac{2E - K}{K} s, \quad (82)$$

$$y = \frac{2k}{a} (1 - \operatorname{cn} as). \quad (83)$$

Значение модуля находится из равенства (81). Угол наклона касательной к оси OX определяется равенствами

$$\cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{dn} as, \quad \sin \frac{\omega}{2} = k \operatorname{sn} as. \quad (84)$$

Стрела прогиба определяется равенством

$$y = \frac{2k}{a}.$$

2. Внецентренное сжатие: $\gamma = 0$. В этом случае $b = 0$. Уравнения изогнутой оси имеют вид:

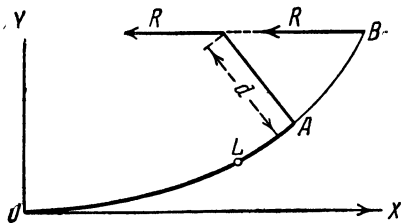
$$x = \frac{2E - K}{K} s + \frac{2}{a} \operatorname{zn}(as), \quad (85)$$

$$y = \frac{2k}{a} (1 - \operatorname{cn} as). \quad (86)$$

Значение модуля k определяется из уравнения (79). Наклон касательной к оси OX определяется равенствами

$$\cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{dn} as, \quad \sin \frac{\omega}{2} = k \operatorname{sn} as. \quad (87)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае уравнение изогнутой оси такое же, как и в случае плоского изгиба. Результат этот можно было предвидеть. Действительно, если продолжить ось до длины l' и приложить к ее концу ту же силу R , как показано на фиг. 79, то в точке L изогнутой оси OA значение изгибающего момента будет то же, что и в точке L изогнутой оси OB .



Фиг. 79

Стрела прогиба определяется равенством

$$y_1 = \frac{2k}{a} (1 - \operatorname{cn} al).$$

Изгибающий момент в точке O дается равенством

$$M_1 = R(y_1 + m) = \frac{2k}{a} R = 2k \sqrt{EIR}.$$

Отношение стрелы прогиба к начальному эксцентриситету характеризуется равенством

$$\frac{y_1}{d} = \frac{1 - \operatorname{cn} al}{\operatorname{cn} al} (2 \operatorname{dn}^2 al - 1).$$

Из последнего видно, что при $d \neq 0$ имеем $y_1 \neq 0$.

3. Изгиб и сжатие: $d = 0$. В этом случае уравнения изогнутой оси имеют вид

$$x = \frac{2E - K}{K} s + \frac{2}{a} \operatorname{zn} a (s + b) - \frac{2}{a} \operatorname{zn} ab, \quad (88)$$

$$y = \frac{2k}{a} \{ \operatorname{cn} ab - \operatorname{cn} a (s + b) \}. \quad (89)$$

Величина b выражается равенством (72). Модуль находится из уравнения (80), которое можно записать в виде

$$al = (2n + 1) \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (90)$$

где

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{k} \sin \frac{1}{2} \gamma.$$

Угол наклона касательной к оси Ox дается равенствами

$$\cos \frac{\omega}{2} = \operatorname{dn} a (s + b), \quad (91)$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = k \operatorname{sn} a (s + b).$$

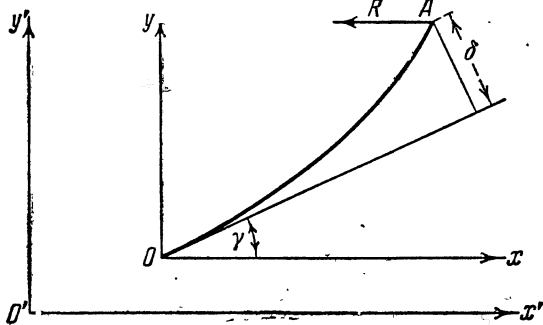
Если перенести начало координат в точку O' (фиг. 80), координаты которой в старой системе определяются равенствами

$$x_0 = -\frac{2E - K}{K} b - \frac{2}{a} \operatorname{zn} ab,$$

$$y_0 = -\frac{2k}{a} (1 - \operatorname{cn} ab),$$

и от этой точки производить отсчет длины дуги, положив

$$s' = s + b,$$



Фиг. 80

то уравнения изогнутой оси представляются в виде

$$x' = \frac{2E-K}{K} s' + \frac{2}{a} \operatorname{zn} as', \quad (92)$$

$$y' = \frac{2k}{a} \{1 - \operatorname{cn} as'\}. \quad (93)$$

Уравнения (92) и (93) показывают, что в рассматриваемом случае кривая изогнутой оси та же, что и в случае продольного изгиба балки длины $l' = l + b$. Координаты точки A в старой системе суть:

$$x_A = \frac{2E-K}{K} l - \frac{2}{a} \operatorname{zn} ab, \quad y_A = \frac{2k}{a} \operatorname{cn} ab.$$

При этом

$$ab = K - al.$$

Стрела прогиба определяется равенством

$$\delta = y_A \cos \gamma - x_A \sin \gamma,$$

или

$$\delta = \frac{2k}{a} \left\{ \operatorname{cn} ab (2 \operatorname{dn}^2 ab - 1) - \operatorname{sn} ab \operatorname{dn} ab \left[\frac{2E-K}{K} al - 2 \operatorname{zn} ab \right] \right\}. \quad (94)$$

Остановимся в заключение на вопросе об определении критической силы. В случае продольного изгиба модуль k определяется по уравнению (81), из которого видно, что

$$al = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \geq (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Чтобы уравнение (81) имело решение $0 < k < 1$, необходимо, чтобы значение силы R удовлетворяло условию

$$\frac{R}{EI} l^2 \geq (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

Сила

$$R_0 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (95)$$

носит название критической. Если $R < R_0$, то явление продольного изгиба не имеет места. Положим

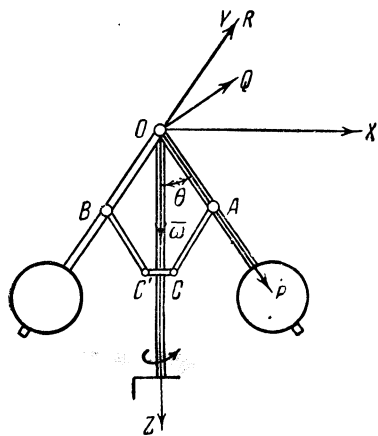
$$R_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{4l^2}. \quad (96)$$

Если $R_0 < R < R_1$, то имеет место простой изгиб. При условии $R_n < R < R_{n+1}$ на изогнутой оси будет n точек перегиба.

§ 4. Регулятор Уатта. Регулятор Уатта представляет собой насаженный на вертикальный вал шарнирный четырехугольник (фиг. 81). На концах стержней OA и OB этого четырехугольника насажены массивные шары. В точках O , A , B , C и C' имеются шарниры. Муфта CC' свободно скользит вдоль вала. Она регулирует впуск пара в паровой цилиндр.

При изменении угловой скорости вращения вертикального вала меняется величина центробежной силы. Изменяется угол отклонения θ . Стержни OA и OB приближаются к вертикальному валу или от него удаляются. Когда при дальнейшем движении установится вновь постоянная скорость вращения вертикального вала, стержни OA и OB будут испытывать некоторые колебания около горизонтальной оси.

Рассмотрим ближе это колебательное движение. Назовем постоянную угловую скорость вращения вертикального вала через ω . Рассмотрим отдельно стержень OA . Пусть M обозначает его массу, h — расстояние его центра тяжести от точки O .



Фиг. 81

Определим направление главных осей эллипсоида инерции стержня OA в точке O . Из соображений симметрии следует, что эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения вокруг оси стержня OA . Обозначим момент инерции стержня OA относительно этой оси через G . Моменты инерции относительно осей, перпендикулярных к направлению OA , обозначим через H .

Выберем систему координатных осей так, чтобы начало помещалось в точке O , ось OX лежала в вертикальной плоскости, проходящей через ось стержня AO , и ось OZ была направлена вертикально вниз. Эта система перемещается вместе со стержнем OA . В вертикальной плоскости ZOX отметим ось OQ , перпендикулярную к направлению OP , и проведем ось OR , перпендикулярную к осям OP и OQ . Ось OR совпадает с осью OY .

Движение стержня OA является результатом сложения двух вращений — вращения около неподвижной вертикальной оси OZ с угловой скоростью ω и вращения около подвижной горизонтальной оси OY с угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$.

Проекция мгновенной скорости вращения стержня OA на оси OP , OQ и OR равны соответственно $\omega \cos \theta$, $-\omega \sin \theta$, $\frac{d\theta}{dt}$. Главный момент количества движения изобразится вектором, составляющие которого по осям OP , OQ , OR равны соответственно $G \omega \cos \theta$, $-H \omega \sin \theta$, $H \frac{d\theta}{dt}$. Составляющие главного момента количества движения по осям OX , OY , OZ равняются соответственно

$$(G - H) \omega \sin \theta \cos \theta, \quad H \frac{d\theta}{dt}, \quad (G \cos^2 \theta + H \sin^2 \theta) \omega.$$

Составим выражение проекции на ось OY скорости перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения. Абсолютная скорость перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения, можно рассматривать как сумму относительной скорости по отношению к системе осей OX , OY , OZ и переносной скорости, связанной с перемещением системы осей OX , OY , OZ . Проекция на ось OY относительной скорости перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения, получается дифференцированием проекции этого вектора на ось OY . Она равняется

$$H \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Переносная скорость перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения, связана с угловой скоростью ω вращения вокруг оси OZ .

Проекция на ось OY переносной скорости перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения, определяется по проекциям этого вектора на оси OX , OY , OZ и проекциям вектора угловой скорости вращения на те же оси. Она равняется

$$\omega^2 (G - H) \sin \theta \cos \theta.$$

Проекция на ось OY абсолютной скорости перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения, равняется

$$H \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 (G - H) \sin \theta \cos \theta.$$

Абсолютная скорость перемещения конца вектора, представляющего главный момент количества движения стержня OA с насаженным на нем шаром P , равна главному моменту активных сил и реакций, действующих на стержень OA . На стержень OA действуют реакция в точке O , вес Mg стержня с насаженным шаром P , вес стержня AC и муфты, а также трение в шарнирах.

Так как вес стержня AC и муфты незначителен по сравнению с весом стержня OA и насаженным на нем грузом, то в дальнейшем мы будем пренебрегать весом стержня AC и муфты. Равным образом оставим без учета и трение в шарнирах. Момент реакции в точке O равен нулю. Величина проекции момента веса стержня OA с насаженным на нем шаром на ось OY равна $-Mg h \sin \theta$.

Пользуясь теоремой моментов количества движения, получаем уравнение

$$H \frac{d^2\theta}{dt^2} + (G - H) \omega^2 \sin \theta \cos \theta = -Mg h \sin \theta. \quad (97)$$

Проинтегрируем получившееся уравнение, предполагая, что величина угла θ колеблется в интервале (α, β) .

Интегрируя, получаем

$$H \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (G - H) \omega^2 \cos^2 \theta + 2Mg h \cos \theta + C. \quad (98)$$

Замечая, что при $\theta = \alpha$ угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$ обращается в нуль, получаем

$$C = -(G - H) \omega^2 \cos^2 \alpha - 2Mg h \cos \alpha.$$

Уравнение (98) представляется в виде

$$H \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (G - H) \omega^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha) + 2Mg h (\cos \theta - \cos \alpha). \quad (99)$$

При $\theta = \beta$ угловая скорость тоже обращается в нуль. Поэтому имеет место равенство

$$(G - H) \omega^2 (\cos \beta + \cos \alpha) + 2Mg h = 0. \quad (100)$$

Подставляя в равенство (99) выражение $2Mg h$ из равенства (100), получаем

$$H \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (G - H) \omega^2 (\cos \theta - \cos \alpha) (\cos \theta - \cos \beta). \quad (101)$$

Извлекая корень и производя интегрирование, находим

$$\lambda dt = \int_a^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \alpha - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \beta)}}, \quad (102)$$

где

$$\lambda = \omega \sqrt{1 - \frac{G}{H}}.$$

Подстановка

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \varphi$$

преобразует интеграл, стоящий в правой части равенства (102), и дает

$$\mu t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (103)$$

где

$$\mu = \lambda \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \quad (104)$$

и

$$k^2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (105)$$

Величина угла θ представляется в виде

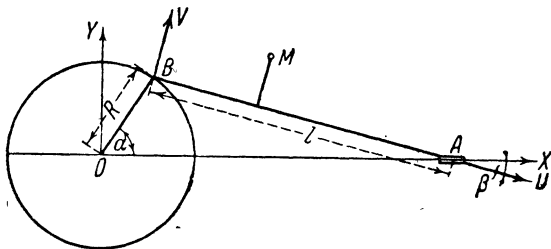
$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{dn}(\mu t, k). \quad (106)$$

Период одного колебания T равен

$$T = \frac{2}{\mu} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

§ 5. Движение шатуна кривошипа. С помощью эллиптических функций очень удобно представляются координаты кривой, описываемой точкой шатуна кривошипа.

Пусть x, y обозначают координаты точки M , жестко связанной с шатуном AB (фиг. 82), относительно неподвижных осей OX и OY . Положим, что u и v являются координатами точки M относительно осей BV и BV' , связанных с шатуном AB .



Фиг. 82

Между координатами x, y и u, v существует зависимость

$$x = R \cos \alpha + u \cos \beta + v \sin \beta, \quad (107)$$

$$y = R \sin \alpha - u \sin \beta + v \cos \beta. \quad (108)$$

Углы α и β меняются с течением времени, оставаясь связанными между собой зависимостью

$$\sin \beta = \frac{R}{l} \sin \alpha. \quad (109)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный параметр τ , полагая

$$\tau = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k = \frac{R}{l} < 1. \quad (110)$$

Тогда равенства (107), (108) представляются в виде

$$x = R \operatorname{cn} \tau + u \operatorname{dn} \tau + kv \operatorname{sn} \tau, \quad (111)$$

$$y = (R - ku) \operatorname{sn} \tau + v \operatorname{dn} \tau. \quad (112)$$

Из них очень просто находятся координаты мгновенного центра шагуна, характеризующиеся условиями

$$x'_0 = 0, \quad y'_0 = 0.$$

Дифференцируя почленно равенства (111), (112), получаем

$$-R \operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} \tau - u_e k^2 \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau + kv_e \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau = 0, \quad (113)$$

$$(R - ku_e) \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau - k^2 v_e \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau = 0, \quad (114)$$

Решив полученные уравнения относительно u_e и v_e , найдем

$$u = l \frac{\operatorname{dn} \tau}{\operatorname{cn} \tau} (\operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau - k \operatorname{sn}^2 \tau), \quad (115)$$

$$v_e = l \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} \tau}{\operatorname{cn} \tau} (\operatorname{dn} \tau + k \operatorname{sn} \tau). \quad (116)$$

Координаты мгновенного центра относительно неподвижных осей получаются непосредственно из равенств (113) и (114), если их преобразовать с помощью равенств (111) и (112), приведя к виду

$$-R \operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} \tau + k \operatorname{cn} \tau (y_e - R \operatorname{sn} \tau) = 0,$$

$$R \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau - k \operatorname{cn} \tau (x_e - R \operatorname{cn} \tau) = 0.$$

Последние равенства дают

$$x_e = (l \operatorname{dn} \tau + k \operatorname{cn} \tau), \quad (117)$$

$$y_e = l \frac{\operatorname{sn} \tau}{\operatorname{cn} \tau} (\operatorname{dn} \tau + k \operatorname{cn} \tau). \quad (118)$$

Пользуясь этими уравнениями, легко исследовать вид кривой центров и произвести ее построение.

6. Плоское движение жидкости. В плоскопараллельном движении частицы жидкости движутся параллельно неподвижной плоскости. При этом скорости частиц, расположенных на одной прямой, перпендикулярной к неподвижной плоскости, одинаковы. Картина распределения скоростей движущейся жидкости полностью определяется полем скоростей в плоскости, параллельной отмеченной неподвижной плоскости.

Обозначим через v вектор скорости движения точки $M(x, y)$ в момент времени t . Пусть $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ обозначают проекции скорости на координатные оси. Условие неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

показывает, что существует такая функция $\psi(x, y, t)$, для которой

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функция $\psi(x, y, t)$ называется функцией тока.

Если поле скоростей имеет потенциал $\phi(x, y, t)$, то

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

и движение жидкости носит название потенциального.

При изучении плоскопараллельного потенциального движения жидкости удобно пользоваться комплексным переменным

$$z = x + yi.$$

Рассмотрим функцию

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (119)$$

удовлетворяющую условиям Коши—Риманна:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функция $w(z)$ называется комплексным потенциалом. Она, как и функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, определяется с точностью до постоянного. Производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (120)$$

тесно связана с вектором скорости \vec{v} в точке $M(x, y)$.

Комплексная сопряженная величина

$$\overline{\frac{dw}{dz}} = u + iv$$

изображается вектором скорости \vec{v} . Производная $\frac{dw}{dz}$ дает зеркальное изображение вектора скорости относительно вещественной оси. Она называется комплексной скоростью.

Интеграл

$$\Gamma = \int_C u dx + v dy \quad (121)$$

называется циркуляцией по контуру C . В том случае, когда скорость имеет потенциал, справедливо соотношение

$$\Gamma = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0) = \varphi_{M_1} - \varphi_{M_0},$$

где точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_0(x_0, y_0)$ служат концами линии C . В случае замкнутой кривой C имеет место равенство $\Gamma = 0$, если функция $\varphi(x, y)$ однозначна.

Интеграл

$$Q = \int_C u dy - v dx = \psi(x_1, y_1) - \psi(x_0, y_0) = \psi_{M_1} - \psi_{M_0} \quad (122)$$

называется расходом жидкости через контур C . Он дает количество жидкости, протекающей через контур C , рассчитанное на единицу времени.

Когда контур C замкнутый, имеет место равенство $Q = 0$, если функция $\psi(x, y)$ однозначна.

Из равенств (121) и (122) и (120) следует, что

$$\Gamma + iQ = \int_C w'(z) dz. \quad (123)$$

Значение интеграла, взятого по замкнутому контуру, может оказаться отличным от нуля, когда область, ограниченная контуром C , многосвязна, либо в том случае, когда в односвязной области, ограниченной контуром C , содержатся особые точки функции $w'(z)$.

Полюсу функции $w'(z)$ соответствует источник, сток или вихрь.

Если замкнутый контур C есть линия тока, то $Q=0$ и

$$\Gamma = \int_C w'(z) dz.$$

Если движение жидкости представляет собой обтекание ряда контуров C_1, C_2, \dots, C_n при отсутствии вихрей, стоков и источников, то интеграл от $w'(z)$, взятый по контуру C , заключающему внутри себя контуры C_1, C_2, \dots, C_n , выражается через циркуляции $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ вдоль этих контуров:

$$\int_C w'(z) dz = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n.$$

Давление p внутри и на границе движущейся жидкости определяется по формуле Лагранжа

$$p = p_0(t) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{u^2 + v^2}{2},$$

где ρ обозначает плотность жидкости, а $p_0(t)$ — некоторая функция времени. В случае установившегося движения

$$p = p_0 - \rho \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Выделим в жидкости некоторый замкнутый контур C . Возьмем на контуре C элемент dz и обозначим проекции на оси координат давления жидкости на элемент dz через dX и dY . Давление направлено по нормали к контуру C и равно по абсолютной величине $p|dz|$.

Таким образом

$$dX + i dY = ip dz$$

или

$$\begin{aligned} dX + i dY &= i \left\{ p_0 - \frac{\rho}{2} (u + iv)(u - iv) \right\} dz = ip_0 dz - \frac{i\rho}{2} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} dz = \\ &= ip_0 dz + \frac{i\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz + \frac{i\rho}{2} \{ d\bar{w} - d\bar{w} \} \frac{d\bar{w}}{dz} dz = \\ &= ip_0 dz + \frac{i\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz + \rho (u + iv) d\varphi. \end{aligned}$$

Интегрируя по контуру C , получаем

$$X + iY = -\frac{1}{2} i\rho \int_C \overline{w'^2(z)} dz + \rho \int_C (u + iv) d\varphi. \quad (124)$$

Величины X и Y выражают проекции на оси $O\dot{X}$ и $O\dot{Y}$ равнодействующей давления жидкости на контур C . Величину $X + iY$ называют комплексным давлением. Если контур C является линией тока, то $d\varphi = 0$ вдоль контура C и равенство (124) упрощается:

$$X + iY = -\frac{1}{2} i\rho \int_C \overline{w'^2(z)} dz \quad (125)$$

или

$$Y + iX = -\frac{1}{2} \rho \int_C w'^2(z) dz. \quad (126')$$

Момент dT относительно точки O силы давления на элемент dz контура C дается равенством

$$dT = x dY - y dX = R \{ z\bar{i} (dX + i dY) \}, \quad (127)$$

где знаком Rm обозначается вещественная часть числа m .

Интегрируя вдоль контура C , получаем

$$T = R \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} z w'^2(z) dz + \rho \int_{\sigma} \bar{z} l (u + iv) d\psi \right\}. \quad (128)$$

В том случае, когда контур C является линией тока, имеем

$$T = -\frac{1}{2} \rho R \int_C z w'^2(z) dz. \quad (129')$$

Определение величины и момента давления сводится равенствами (125) и (128) к установлению комплексного потенциала или комплексной скорости.

§ 7. Течение жидкости в двухсвязных областях. Рассмотрим более подробно вопрос о движении жидкости, обтекающей замкнутые жесткие контуры C_1 и C_2 и занимающей внешнее по отношению к этим контурам пространство.

Произведем разрез плоскости, как показано на фиг. 83. Внешняя по отношению к контурам C_1 и C_2 часть плоскости z с разрезом может быть конформно отображена на кольцо в плоскости переменного ζ так, чтобы контур C_1 перешел во внешнюю окружность радиуса r_1 , контур C_2 перешел во внутреннюю окружность радиуса r_2 и стороны разреза отобразились на участке вещественной оси плоскости ζ , заключенном между окружностями (фиг. 84). Бесконечно удаленная точка плоскости z отобразится точкой вещественной оси плоскости ζ . Пусть функция $z = f(\zeta)$ выражает это преобразование. Кольцо в плоскости ζ может быть конформно отображено на прямоугольник в плоскости u (фиг. 85) с помощью подстановки вида

$$\zeta = r_1 e^{\frac{\pi i u}{\omega}},$$

где 2ω —длина одной из сторон прямоугольника. Длина другой его стороны определяется из условия

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{\pi \omega' i}{\omega}}.$$

Внешняя окружность переходит в сторону $A_1 A_2$ прямоугольника, внутренняя—в сторону $B_1 B_2$. Точка a соответствует бесконечно удаленной точке плоскости z . Прямоугольник $A_1 A_2 B_2 B_1$ отображает конформно область плоскости z , занятую движущейся жидкостью. Движение жидкости на плоскости z отображается движением жидкости внутри прямоугольника.

Функция

$$z = f\left(r_1 e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right) = F(u)$$

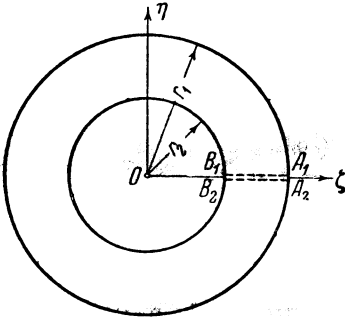
доставляет конформное отображение внешней части плоскости z с разрезами на прямоугольник.

Построим выражение для комплексного потенциала и комплексной скорости на плоскости u . Отметим прежде всего, что скорость $w'(u)$ определена только внутри и на границах прямоугольника. В точках сто-

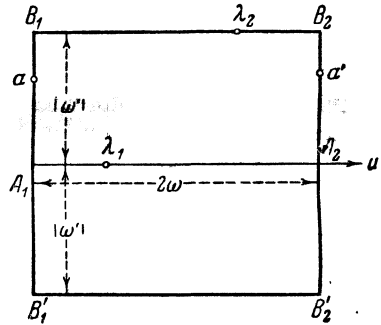
рон A_1B_1 и A_2B_2 , приходящихся на одной горизонтальной прямой и соответствующих противоположным краям разреза плоскости z , величина комплексной скорости удовлетворяет равенству

$$w'(u + 2\omega) = w'(u).$$

Это дает возможность продолжить $w'(u)$ за пределы прямоугольника как периодическую функцию u . Стороны A_1A_2 и B_1B_2 служат изображением контуров C_1 и C_2 , являющихся линиями тока. Они являются линиями тока на плоскости u , и скорость $w'(u)$ будет иметь вещественное значение на A_1A_2 и B_1B_2 .



Фиг. 84



Фиг. 85

Функция $w'(u)$ может быть продолжена по принципу симметрии на прямоугольник $A_1B_1'B_2'A_2$. В точках, симметричных относительно вещественной оси, функции $w'(u)$ придадим сопряженные значения. При таком продолжении функция $w'(u)$ будет иметь на стороне $B_1'B_2'$ вещественные значения, и для значений u , соответствующих точкам на стороне $B_1'B_2'$, имеет место равенство

$$w'(u + 2\omega') = w'(u).$$

Последнее соотношение дает возможность продолжить $w'(u)$ за пределы прямоугольника $B_1B_2B_2'B_1'$ как периодическую функцию с периодом $2\omega'$. Таким образом комплексная скорость $w'(u)$ является двояко периодической функцией от u , с периодами 2ω и $2\omega'$. Прямоугольник $B_1B_2B_1'B_2'$ служит для нее прямоугольником периодов.

В точках a и $-a$ функция $w'(u)$ имеет полюсы. В самом деле, окрестность точки a взаимно однозначно отображает область бесконечно удаленной точки плоскости z .

Отсюда следует, что в окрестности точки a имеет место разложение

$$z = \frac{a}{u-a} + a_0 + a_1(u-a) + a_2(u-a)^2 + \dots \quad (130)$$

и

$$\frac{dz}{du} = -\frac{a}{(u-a)^2} + a_1 + 2a_2(u-a) + \dots \quad (131)$$

На бесконечности в плоскости z комплексная скорость предполагается имеющей конечную величину. Она представляется рядом

$$w'(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (132)$$

где $c_0 = V$ — значение комплексной скорости в бесконечности.

Коэффициент c_1 определяется равенством

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C w'(z) dz = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i},$$

где C — контур, содержащий обтекаемые контуры C_1 и C_2 , а Γ_1 и Γ_2 — циркуляции по этим контурам.

Из равенств (131) и (132) следует, что

$$w'(u) = \frac{b_{-2}}{(u-a)^2} + \frac{b_{-1}}{u-a} + b_0 + b_1(u-a) + \dots, \quad (133)$$

причем

$$b_{-2} = -aV, \quad b_{-1} = -c_1 a. \quad (134)$$

Из принципа симметрии следует, что в смежности с точкой $a = -a$ разложение (133) имеет вид

$$w'(u) = \frac{\bar{b}_{-2}}{(u+a)^2} + \frac{\bar{b}_{-1}}{u+a} + \bar{b}_0 + \bar{b}_1(u+a) + \dots \quad (135)$$

Во всех прочих точках параллелограмма периодов $w'(u)$ остается регулярной.

В силу известных свойств эллиптических функций имеем выражение для комплексной скорости

$$w'(u) = b_{-2} \wp(u-a) + \bar{b}_{-2} \wp(u+a) + b_1 \zeta(u-a) + \bar{b}_1 \zeta(u+a) + C \quad (136)$$

и комплексного потенциала

$$w(u) = -b_{-2} \zeta(u-a) - \bar{b}_{-2} \zeta(u+a) + b_1 \ln \sigma(u-a) + \bar{b}_1 \ln \sigma(u+a) + Cu + C_1. \quad (137)$$

Равенства (136) и (137) могут быть представлены в виде

$$w'(u) = -aV \wp(u-a) - a\bar{V} \wp(u+a) - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \{ \zeta(u-a) - \zeta(u+a) \} + C, \quad (138)$$

$$w(u) = aV \zeta(u-a) + a\bar{V} \zeta(u+a) - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + Cu + C_1. \quad (139)$$

Так как комплексный потенциал определяется с точностью до постоянной, то величину C_1 можно положить равной нулю. Для определения C интегрируем равенство (136) вдоль прямой A_1A_2 . Имеем

$$\int_{A_1A_2} w'(u) du = -aV \int_0^{2\omega} \wp(u-a) du - a\bar{V} \int_0^{2\omega} \wp(u+a) du - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \int_0^{2\omega} [\zeta(u-a) - \zeta(u+a)] du + 2C\omega,$$

откуда следует, что

$$\int_{A_1A_2} w'(u) du = (aV + a\bar{V}) 2\eta - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi i} \{ -4\eta a + 2\pi i \} + 2C\omega.$$

Величина интеграла в левой части равенства определяется циркуляцией Γ_1

$$\int_{A_1 A_2} w'(u) du = - \int_0 w'(z) dz = -\Gamma_1$$

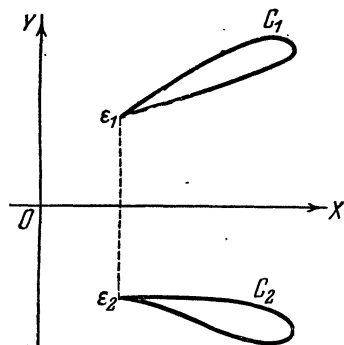
и для C получается выражение

$$C = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2} \Gamma_2 - \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi i} \eta \alpha - RaV \eta \right]. \quad (140)$$

Равенство (138) совместно с равенством, дающим конформное отображение внешности контуров C_1 и C_2 на прямоугольник, решают задачу об обтекании контуров. Эта задача весьма важна в теории биплана. В зависимости от формы контуров C_1 и C_2 получается решение большей или меньшей сложности.

Пусть контуры C_1 и C_2 изображают крылья биплана с заостренными задними кромками (фиг. 86). Точки ε_1 и ε_2 переходят в точки λ_1 и λ_2 на сторонах прямоугольника $A_1 A_2 B_2 B_1$. В этих точках производная $\frac{du}{dz}$ обращается в бесконечность. Для того чтобы комплексная скорость

$$w'(z) = w'(u) \frac{du}{dz}$$



Фиг. 86

у задней кромки оставалась конечной (условие Жуковского), необходимо, чтобы $w'(u)$ обращалось в нуль при $u = \lambda_1$ и $u = \lambda_2$. Это дает возможность определить величину циркуляции Γ_1 и Γ_2 из уравнений

$$\begin{aligned} \{ \omega \zeta(\lambda_1 - \alpha) - \omega \zeta(\lambda_1 + \alpha) + 2\eta \alpha \} \Gamma_1 + \{ \omega \zeta(\lambda_1 - \alpha) - \omega \zeta(\lambda_1 + \alpha) + 2\eta \alpha - \pi i \} \Gamma_2 + \\ + 4\pi \eta i RaV + 2\pi \omega i \{ aV \wp(\lambda_1 - \alpha) + a\bar{V} \wp(\lambda_1 + \alpha) \} = 0, \\ \{ \omega \zeta(\lambda_2 - \alpha) - \omega \zeta(\lambda_2 + \alpha) + 2\eta \alpha \} \Gamma_1 + \{ \omega \zeta(\lambda_2 - \alpha) - \omega \zeta(\lambda_2 + \alpha) + 2\eta \alpha - \pi i \} \Gamma_2 + \\ + 4\pi \eta i RaV + 2\pi \omega i \{ aV \wp(\lambda_2 - \alpha) + a\bar{V} \wp(\lambda_2 + \alpha) \} = 0. \end{aligned}$$

Отметим частный случай, когда контуры C_1 и C_2 являются окружностями с центрами в точках c_1 и c_2 и радиусами R_1 и R_2 .

Преобразование

$$\zeta = \frac{z - a_1}{z - a_2}, \quad (141)$$

где a_1 и a_2 суть корни квадратного уравнения

$$z^2 - \left\{ c_1 + c_2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{c_2 - c_1} \right\} z + \frac{(c_2 \bar{c}_2 - R_2^2) c_1 - (c_1 \bar{c}_1 - R_1^2) c_2}{c_2 - c_1} = 0, \quad (142)$$

переводит внешнюю по отношению к кругам область плоскости z в кольцо на плоскости ζ . Бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = 1$ на плоскости ζ .

Радиусы r_1 и r_2 кругов, ограничивающих кольцо, определяются равенствами

$$r_1^2 = \frac{c_1 - c_1}{c_1 - a_2}, \quad r_2^2 = \frac{c_2 - a_1}{c_2 - a_2}. \quad (143)$$

При решении уравнения (142) возникает вопрос, какой из корней уравнения следует принять за a_1 ? Будем за a_1 принимать тот из корней уравнения, для которого

$$|c_1 - a_1| > |c_1 - a_2|. \quad (144)$$

В таком случае

$$r_1 > 1 \text{ и } r_2 < 1.$$

Функция

$$\zeta = r_1 e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$$

преобразует кольцо в прямоугольник со сторонами 2ω и ω' .

Величина ω может быть взята произвольно. Величина ω' определяется равенством

$$\omega' = \frac{\omega i}{\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Преобразование внешности двух кругов на прямоугольник реализуется функцией

$$z = \frac{a_2 r_2 e^{\frac{\pi i u}{\omega}} - a_1}{r_1 e^{\frac{\pi i u}{\omega}} - 1}. \quad (145)$$

При этом бесконечно далекой точке плоскости z отвечает на плоскости u точка

$$\alpha = \frac{\omega i}{\pi} \ln r_1. \quad (146)$$

Решение задачи об обтекании двух кругов дают формулы (138) и (145).

В том случае, когда обтекаемые контуры симметричны относительно оси, параллельной направлению скорости в бесконечно далекой точке, решение задачи получается в более простой форме. Примем ось симметрии на ось OX . Комплексная скорость V на бесконечности имеет действительное значение, и легко видеть, что $\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Из соображений симметрии следует, что точка α , изображающая бесконечно далекую точку плоскости z , находится на середине стороны $A_1 B_1$. В этом случае

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega'.$$

Величина C_1 , как это следует из равенства (140), имеет вещественное значение.

Из тех же соображений симметрии следует, что ось OX изобразится средней линией прямоугольника $A_1 A_2 B_1 B_2$, и в точках, симметричных относительно средней линии, комплексная скорость $w'(u)$ имеет сопряженные значения. Функция $w'(u)$ есть эллиптическая функция с периодами 2ω и ω' и полюсом второго порядка в точке $\frac{\omega'}{2}$:

$$w'(u) = -aV \wp \left(u - \frac{\omega'}{2} \right) + C. \quad (147)$$

Интегрируя по стороне прямоугольника от точки A_1 до A_2 , получаем $\Gamma_1 = 2aV\eta + 2C\omega$, откуда следует, что

$$C = -\frac{1}{2\omega} \{ \Gamma_1 + 2aV\eta \}.$$

Комплексная скорость представляется в виде

$$w'(u) = -aV \left\{ \frac{\eta}{\omega} + \wp \left(u - \frac{\omega'}{2} \right) \right\} - \frac{1}{2\omega} \Gamma_1. \quad (148)$$

В точках $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = \lambda + \omega'$ комплексная скорость равняется нулю. Это дает возможность определить величину циркуляции

$$\Gamma_1 = -2aV \left\{ \omega \wp \left(\lambda_1 - \frac{\omega'}{2} \right) + \eta \right\}.$$

Если внесем выражение циркуляции в равенство (148), то получим

$$w'(u) = aV \left\{ \wp \left(\lambda - \frac{\omega'}{2} \right) - \wp \left(u - \frac{\omega'}{2} \right) \right\}.$$

К рассмотренному случаю приводится задача об обтекании крыла аэроплана вблизи земли.

§ 8. Обтекание пластинок. Решение вопроса об обтекании крыльев биплана распадается на две части. Первая дает конформное отображение внешности обтекаемых контуров на прямоугольник. Вторая решает вопрос о виде комплексного потенциала и комплексной скорости для прямоугольной области. Вторая часть подробно рассматривалась в предыдущем параграфе. Не входя в детали, укажем решение первой части для некоторых контуров специального вида. К этим контурам мы приходим, пренебрегая толщиной крыльев биплана.

1. Два параллельных отрезка. Выберем ось OX параллельно отрезкам AA' и BB' (фиг. 87). Отображение плоскости z с разрезами вдоль AA' и BB' на область прямоугольника плоскости u дается функцией

$$z = (a + bi)\zeta(u - ai) + (a - bi)\zeta(u - ai) - 2a\eta \frac{u}{\omega} + C. \quad (149)$$

Постоянные a , b , a и отношение периодов $\frac{\omega'}{\omega}$ находятся по данным, характеризующим размеры и взаимное положение отрезков AA' и BB' , равно как и их положение относительно системы осей OX и OY .

Так, например, имеем

$$a = -\frac{h\omega}{\pi}.$$

2. Для отрезка под углом. Примем за ось OX прямую, на которой находится один из отрезков. Начало координат O возьмем в точке пересечения прямых, на которых находятся отрезки (фиг. 88). Угол между прямыми обозначим через θ .

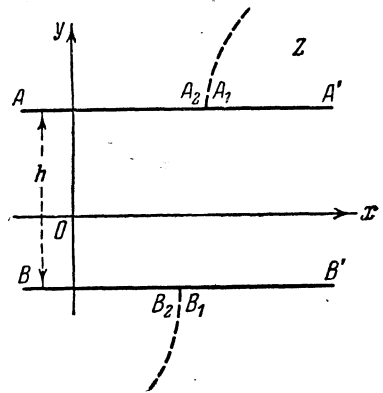
Бесконечно удаленная точка плоскости z отображается, как отмечено ранее, точкой ai плоскости u . Положим, что начало координат плоскости z отображается точкой

$$u = \beta_1 + \beta_2 i.$$

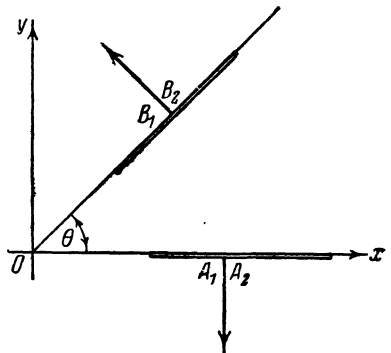
Конформное отображение плоскости z с разрезами на прямоугольник дается функцией

$$z = Ae^{\frac{2\theta\eta i}{\pi}} \frac{\sigma(u - \beta_1 - \beta_2 i) \sigma(\bar{u} - \beta_1 + \beta_2 i)}{\sigma(u - ai) \sigma(u + ai)}. \quad (150)$$

Постоянные A , α , β_1 , β_2 и отношение периодов $\frac{\omega'}{\omega}$ определяются размерами отрезков и их взаимным расположением.



Фиг. 87



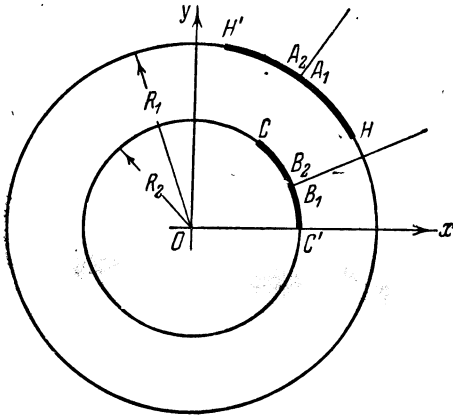
Фиг. 88

Так, например

$$\beta_1 = \frac{\theta\omega}{\pi}.$$

Если отрезки расположены симметрично относительно биссектриссы угла θ , т. е. $OA_1 = OB_1$, $OA_2 = OB_2$, то функция, реализующая конформное отображение, может быть представлена в виде

$$z = A_1 \frac{\vartheta_0 \left(\frac{u}{2\omega} - \frac{\theta}{2\pi} \right)}{\vartheta_0 \left(\frac{u}{2\omega} \right)}. \quad (151)$$



Фиг. 89

Величина A_1 и отношение периодов $\frac{\omega'}{\omega}$, определяющее величину q , определяются размерами отрезков и их расстоянием от начал.

3. Две дуги концентрических кругов. Начало координат возьмем в общем центре. Радиус внутреннего круга обозначим через R_2 , радиус внешнего круга через R_1 (фиг. 89). Сохраняя те же обозначения, что и в предыдущем случае,

можем представить функцию, осуществляющую конформное отображение плоскости z с разрезами на плоскость u , в виде

$$z = R_1 e^{\left(\varphi + \frac{2\eta}{\pi} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) i} \frac{\sigma(u - \beta_1 - \beta_2 i) \sigma(u + \alpha i)}{\sigma(u - \beta_1 + \beta_2 i) \sigma(u - \alpha i)}. \quad (152)$$

Постоянные φ , β_1 , β_2 , α и отношение периодов $\frac{\omega'}{\omega}$ определяются размерами и взаимным расположением дуг HH' и CC' и их положением относительно координатной системы.

§ 9. Коэффициент взаимной индукции двух круговых токов. Обозначим через M коэффициент взаимной индукции двух круговых токов. Пусть радиусы окружностей, по которым текут токи, равняются a и a' (фиг. 90). Окружности расположены в параллельных плоскостях и центры их лежат на одной вертикальной прямой. Расстояние между центрами окружностей равно b . Обозначим через A и A' две точки окружностей, лежащих в одной вертикальной полуплоскости, проходящей через центры окружностей. От них будем по каждой окружности производить отсчет дуг и соответствующих им углов ω и ω' в одинаковом направлении.

Коэффициент взаимной индукции определяется равенством

$$M = \iint_{C'C} \frac{\cos(PT, P'T')}{PP'} ds ds', \quad (153)$$

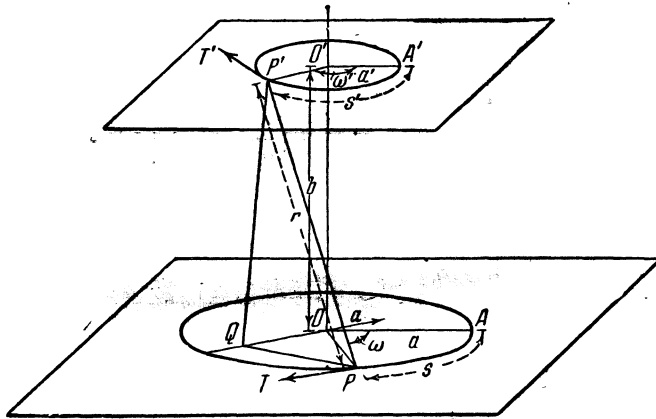
где интегрирование производится по контурам C и C' обеих окружностей. Это равенство может быть представлено в виде

$$M = \iint_0^{2\pi} \frac{aa' \cos(\omega' - \omega)}{r} d\omega d\omega', \quad (154)$$

где

$$r = \sqrt{P'Q^2 + QP^2} = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\omega' - \omega) + b^2}.$$

Произведем замену переменных, положив $\omega' = \omega + \theta - \pi$.



Фиг. 90

Тогда коэффициент взаимной индукции представится в более простом виде

$$M = 4\pi aa' \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - \theta) d\theta}{\sqrt{a^2 + a'^2 + b^2 + 2aa' \cos \theta}}, \quad (155)$$

откуда следует с помощью подстановки $\theta = 2\varphi$, что

$$M = 8\pi aa' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{[(a + a')^2 + b^2] \cos^2 \varphi + [(a - a')^2 + b^2] \sin^2 \varphi}}. \quad (156)$$

Если положить

$$k = \frac{2\sqrt{aa'}}{\sqrt{(a + a')^2 + b^2}}, \quad (157)$$

то окончательно получим

$$M = -4\pi \sqrt{(a + a')^2 + b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + 4\pi \frac{a^2 + a'^2 + b^2}{\sqrt{(a + a')^2 + b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (158)$$

или

$$M = 4\pi \sqrt{(a + a')^2 + b^2} \left(\frac{1+k'^2}{2} K - E \right). \quad (159)$$

Из выражения (159) очень легко получить величину ΔM изменения коэффициента взаимной индукции при небольших изменениях Δa и $\Delta a'$ радиусов окружностей и небольшом изменении Δb расстояния OO' .

В силу приближенного равенства

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial M}{\partial a'} \Delta a' + \frac{\partial M}{\partial b} \Delta b$$

определение изменения ΔM приводится к нахождению выражения производных $\frac{\partial M}{\partial a}$, $\frac{\partial M}{\partial a'}$ и $\frac{\partial M}{\partial b}$.

Находим производную

$$\frac{\partial M}{\partial b} = 4\pi a a' b \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(\sqrt{a^2 + a'^2 + b^2 + 2aa' \cos \theta})^3}. \quad (160)$$

Она может быть представлена в виде

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{8\pi a a' b}{(\sqrt{(a+a')^2 + b^2})^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi})^3} d\varphi.$$

Произведя замену переменных с помощью подстановки

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

получим

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{8\pi a a' b}{(\sqrt{(a+a')^2 + b^2})^3} \int_0^K \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} du. \quad (161)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^K \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} du &= \frac{(1+k'^2) \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{k'^2 \operatorname{dn} u} \Big|_0^K + \int_0^K \left(\operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{k'^2} \operatorname{cn}^2 u \right) du = \\ &= \frac{1+k'^2}{k'^2} \int_0^K \operatorname{sn}^2 u du - \frac{1}{k'^2} K = \frac{2}{k^2} K - \frac{1+k'^2}{k^2 k'^2} E. \end{aligned} \quad (162)$$

Подставляя полученное значение интеграла в правую часть равенства (161) и приняв во внимание выражение для k , получаем окончательно

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{2\pi b}{\sqrt{(a+a')^2 + b^2}} \left\{ 2K - \frac{1+k'^2}{k'^2} E \right\}. \quad (163)$$

Далее находим

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{M}{a} + 4\pi a a' \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta (a+a' \cos \theta)}{(a^2 + a'^2 + b^2 + 2aa' \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

или

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{M}{a} + \frac{a}{b} \frac{\partial M}{\partial b} + 4\pi \int_0^{\pi} \frac{aa'^2 \cos^2 \theta}{(a^2 + a'^2 + 2aa' \cos \theta)^{3/2}} d\theta. \quad (164)$$

Интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{aa'^2 \cos^2 \theta d\theta}{(a^2 + a'^2 + 2aa' \cos \theta)^{3/2}} = \frac{2aa'^2}{(\sqrt{(a+a')^2 + b^2})^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2}{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi})^3} d\varphi$$

легко находится с помощью подстановки

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2}{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi})^3} d\varphi &= \int_0^K \frac{(\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u)^2}{\operatorname{dn}^3 u} du = \\ &= \frac{2}{k^2} \int_0^K (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u) du - \frac{1 + k'^2}{k^2} \int_0^K \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} du \end{aligned}$$

и

$$\int_0^K (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u) du = \frac{2}{k^2} E - \frac{k'^2 + 1}{k^2} K.$$

Согласно формулы, (162), мы получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2}{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi})^3} d\varphi = \frac{1}{k^4} \left\{ 4E + \frac{(1 + k'^2)^2}{k'^2} E - 4(1 + k'^2)K \right\}.$$

Внося полученный результат в равенство (164) и принимая во внимание ранее полученное выражение для магнитной индукции, устанавливаем окончательно, что

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{a}{b} \frac{\partial M}{\partial b} + \frac{\pi k^4}{2ak'^2} \sqrt{(a + a')^2 + b^2} E. \quad (165)$$

Таким же образом получаем

$$\frac{\partial M}{\partial a'} = \frac{a'}{b} \frac{\partial M}{\partial b} + \frac{\pi k^4}{2a'k'^2} \sqrt{(a + a')^2 + b^2} E. \quad (166)$$

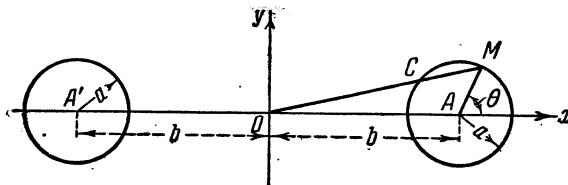
Отметим равенство

$$a \frac{\partial M}{\partial a} + a' \frac{\partial M}{\partial a'} + b \frac{\partial M}{\partial b} = M. \quad (167)$$

§ 10. Постоянная гальванометра. Величина постоянной G гальванометра ~~дается~~, как известно, интегралом

$$G = \frac{2\pi n}{S} \iint_S \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (168)$$

где S обозначает поперечное сечение обмотки гальванометра, n —число оборотов проволоки.



Фиг. 91

Положение координатных осей относительно поперечного сечения обмотки указано на фиг. 91.

В том случае, когда поперечное сечение кольца представляет **круг**, интеграл (168) может быть представлен в следующем виде:

$$G = \frac{2n}{a^2} \iint_S \frac{x^2 dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} = \frac{2n}{a^2} \int_C \frac{y dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (169)$$

В последнем интеграле интегрирование производится в направлении по часовой стрелке по окружности C .

Таким образом постоянная гальванометра G определяется равенством

$$G = \frac{2n}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}} = 4n \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}}, \quad (170)$$

или, положив $\theta = 2\varphi$,

$$G = 32n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2 \varphi + (a-b)^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Обозначим

$$k = \frac{2\sqrt{ab}}{b+a}.$$

Тогда последнее выражение постоянной гальванометра G может быть представлено в виде

$$G = \frac{32n}{a+b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (171)$$

Произведем замену переменных, положив

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^K \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u du.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^K \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u du &= -\frac{1}{k^2} \int_0^K \operatorname{dn}^2 u \{1 - 2\operatorname{cn}^2 u\} du = \\ &= -\frac{1}{k^2} \int_0^K \operatorname{dn}^2 u du + \frac{2}{k^2} \int_0^K \operatorname{cn}^2 u du - 2 \int_0^K \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u du. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^K \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u du = -\frac{1}{3k^2} E + \frac{2}{3k^4} (E - k'^2 K).$$

Таким образом окончательно имеем

$$G = \frac{32n}{3k^4 (b + a)} \{(1 + k'^2) E - 2k'^2 K\}. \quad (172)$$

§ 11. Стационарное электрическое поле. Рассмотрим стационарное электрическое поле, создаваемое зарядами, расположенными на электрических проводниках, которые представляют собой цилиндры с образующими, перпендикулярными к одной и той же плоскости. В точках электрического поля этих бесконечно простирающихся проводников, расположенных на прямой, перпендикулярной той же плоскости, напряжение поля одинаково. Его направление перпендикулярно к указанной прямой. В плоскостях, перпендикулярных к образующим цилиндрических проводников, создается одинаковое плоское электрическое поле. Это плоское поле и характеризует поле бесконечных электрических проводников.

Возьмем одну из плоскостей. Обозначим составляющие электрической силы плоского поля через X и Y . Пусть $U(x, y)$ обозначает потенциальную функцию электрического поля. Тогда

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Составляющие электрической силы удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0.$$

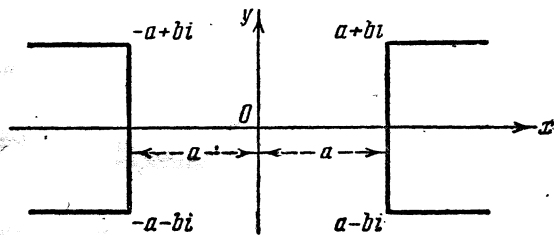
Из этого следует, что существует функция T такая, что

$$X = -\frac{\partial T}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Функция $T(x, y)$ называется функцией тока. Для изучения стационарного плоского поля удобно ввести функцию комплексного переменного

$$w(z) = U(x, y) + iT(x, y).$$

Эта функция называется комплексным потенциалом поля. Ее производная $w'(z) = -(X - iY)$, взятая с обратным знаком, дает количество, сопряженное с $X + iY$. Последнюю величину называют комплексным напряжением поля. Определение электрического поля сводится к нахождению функции комплексной переменной, вещественная часть которой принимает данные постоянные значения (потенциалы проводников) на заданной системе линий. В плоскости переменного w система проводников изобразится системой прямых, параллельных мнимой оси.



Фиг. 92

Таким образом задача о комплексном потенциале поля эквивалентна вопросу о конформном отображении, при котором заданные контуры отображаются прямыми, параллельными мнимой оси.

Рассмотрим в качестве примера поле между двумя прямоугольными полюсами (фиг. 92). Будем сначала искать отображение внешней области полюсов на плоскость с разрезами так, чтобы начало координат перешло в начало ζ , а оси координат перешли в оси новой системы.

Это преобразование доставляет эллиптический интеграл 2-го рода

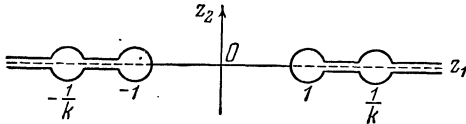
$$z = \lambda \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta. \quad (173)$$

Разрезы плоскости показаны на фиг. 93.

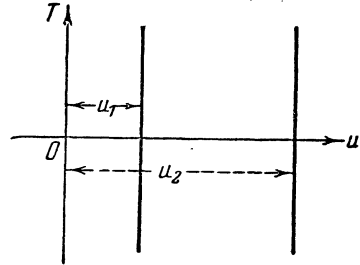
Преобразование

$$w = \frac{u_2 + u_1}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (174)$$

переводит плоскость ζ с разрезами в полосу, заключенную между двумя параллельными прямыми (фиг. 94).



Фиг. 93



Фиг. 94

Первая из них отвечает правому проводнику (фиг. 92), вторая — левому. Определим постоянные указанных преобразований. Из сравнения с данными п. 2 § 8 главы V следует, что величины k и λ определяются равенствами

$$a = \lambda \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta = \lambda E(k), \quad (175)$$

$$b = \lambda \left\{ - \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k'^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta + \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k'^2 \zeta^2)}} \right\}. \quad (176)$$

Для определения модуля k имеем уравнение

$$\frac{b}{a} = \frac{-E(k') + K(k')}{E(k)}. \quad (177)$$

После того как величина модуля k будет найдена, множитель λ определится из равенства (175) или (176). Уравнения (173) и (174) дают выражение комплексного потенциала поля в параметрической форме.

При $u_2 = 1$ и $u_1 = -1$

$$z = \lambda \int_0^w \sqrt{1 - k^2 \sin^2 w} dw.$$

ЛИТЕРАТУРА

Таблицы и справочники

- Ветчинкин В. П. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций.
Глазенап С. П. Математические и астрономические таблицы 1932.
Самойлова-Яхонтова Н. С. Таблицы эллиптических интегралов. 1935.
Шпильерейн Я. Н. Таблицы специальных функций. 1934.
Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. 1934.
Jahnke E. und Emde F. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 1933.
Hayashi K. Fünfstellige Funktionentafeln. Kreiszyklometrische, exponential-, hyperbel-, kugel-, besselsche, elliptische Funktionen, Theta-Werte, natürlicher Logarithmus, Gamma-Funktion. 1930.
Houël J. Recueil des formules et des tables numériques. 1901.
Laska W. Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. 1894.
Legendre. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. T. II. 1826.
Milln-Thomson. Die elliptischen Functionen. 1937.
Pötin. Formules et tables numériques relatives aux fonctions circulaires-, hyperboliques et elliptiques. 1925.
Smithsonian. Mathematical Formulae and Tables of Elliptic Functions. 1922.
Schwarz H. A. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen. 1893.

Руководства

- Бетти Г. Теория эллиптических функций и ее приложения. 1861.
Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. 1933.
Покровский П. Л. Теория эллиптических функций. 1886.
Сикорский Ю. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. 1936.
Сотов И. Основания теории эллиптических функций. 1850.
Тихомандрицкий М. Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций. 1895.
Уиттекер Е. Г. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. 1934.
Appel P. et Lacour E. Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. 1922.
Bianchi L. Lezioni sulla teoria della funzioni di variabile complessa e delle funzioni, ellittiche. 1930.
Bobek K. Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen. 1884.
Briot Ch. et Bouquet J. Théorie des fonctions doublement periodiques et en particulier des fonctions elliptiques. 1859.
Briot Ch. et Bouquet J. Théorie des fonctions elliptiques. 1875.
Burchardt H. Elliptische Funktionen. 1889.
Durège H. Theorie der elliptischen Funktionen. 1887.
Еппегер А. Elliptische Funktionen. 1890.
Fricke R. Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. 1916.
Greenhill, A. G. The applications of elliptic functions. 1892.
Halphen G. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. 1886—1891.
Lévy. Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications. 1898.
R. de Montessus de Ballore. Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications. 1917.
Tannery I. et Molk I. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. 1893—1902.
Weierstrass K. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen. 1915.
Weierstrass K. Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen. 1915.
Whittekер E. T. and Watson G. N. A Course of Modern Analysis. 1920.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава 1

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Эллиптический интеграл	5
2. Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Лежандра	5
3. Примеры вычисления интеграла 1-го рода по таблицам	7
4. Вычисление интеграла 1-го рода с помощью рядов	8
5. Преобразование Ландена	11
6. Вычисление интеграла 1-го рода при помощи номограмм	14
7. Некоторые случаи вычисления интеграла 1-го рода	15
8. Эллиптический интеграл 1-го рода как функция комплексного переменного	18
9. Эллиптический интеграл 2-го рода в канонической форме Лежандра	23
10. Вычисление интеграла 2-го рода с помощью рядов	25
11. Вычисление интеграла 2-го рода при помощи номограмм	27
12. Некоторые случаи вычисления интеграла 2-го рода	29
13. Эллиптический интеграл 2-го рода как функция комплексного переменного	31
14. Эллиптический интеграл 3-го рода	34
15. Некоторые частные эллиптические интегралы, выражающиеся через интегралы 1-го и 2-го рода	37
16. Формулы сложения эллиптических интегралов	33
17. Полный эллиптический интеграл 1-го рода	39
18. Полный эллиптический интеграл 2-го рода	41
19. Полный эллиптический интеграл 3-го рода	43
20. Разложение некоторых полных эллиптических интегралов в ряды	43
21. Некоторые интегралы от функций $K(k)$, $E(k)$, $D(k)$	44
22. Некоторые дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют полные эллиптические интегралы	45
23. Приведение эллиптического интеграла вида $\int_R(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)})dx$ к интегралам 1-го, 2-го и 3-го рода	46
24. Приведение эллиптического интеграла к канонической форме Лежандра в том случае, когда под знаком корня находится многочлен четвертой степени	50
25. Приведение к каноническому виду эллиптического интеграла в случае, когда под знаком корня стоит многочлен третьей степени	58
26. Частные случаи приведения эллиптического интеграла к каноническому виду Лежандра	62

Глава II

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

1. Амплитуда	67
2. Синус амплитуды	69
3. Косинус амплитуды	70
4. Дельта амплитуды	72
5. Номограммы функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$	73
6. Тангенс амплитуды	75
7. Формулы сложения для функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$	75
8. Формулы для функций $\operatorname{sn} 2u$, $\operatorname{cn} 2u$, $\operatorname{dn} 2u$, $\operatorname{tn} 2u$	77
9. Формулы для функций $\operatorname{sn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{cn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{dn} \frac{u}{2}$, $\operatorname{tn} \frac{u}{2}$	77

	<i>Стр.</i>
10. Соотношения между функциями $sn u$, $cn u$, $dn u$	77
11. Производные от функций $sn u$, $cn u$, $dn u$, $tn u$	77
12. Формулы приведения для функций $sn u$, $cn u$, $dn u$	78
13. Изменение функций $sn u$, $cn u$, $dn u$ при изменении модуля	78
14. Выражение функций $sn u$, $cn u$, $dn u$ от комплексных значений аргумента через функции аргумента вещественного	81
15. Разложение функций $sn u$, $cn u$, $dn u$ в степенные ряды	81
16. Представление функций $sn u$, $cn u$, $dn u$ в виде отношения целых трансцендентных функций	82
17. Разложение эллиптических функций в тригонометрические ряды	83
18. Разложение эллиптических функций в ряды по гиперболическим функциям	85
19. Приближенные формулы для $sn u$, $cn u$, $dn u$	85
20. Представление эллиптических функций в виде бесконечных произведений	86
21. Функции $zn u$	86
22. Простейшие интегралы от функции Якоби	87

Глава III

ФУНКЦИИ ТЕТА

1. Определение и основные свойства функций тета	89
2. Выражение эллиптических функций Якоби через функции тета	91
3. Изменение функций тета при изменении аргумента	93
4. Изменение функций тета при изменении величины ρ	93
5. Функции тета при значении аргумента, равном нулю	95
6. Логарифмы функций тета	95
7. Логарифмические производные от функций тета	96
8. Приложение функций тета к интегрированию эллиптических функций Якоби	97
9. Приложение функций тета к вычислению эллиптических интегралов 3-го рода	99

Глава IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

1. Эллиптический интеграл 1-го рода в канонической форме Вейерштрасса	101
2. Функции $\wp(u)$	102
3. Производная от функции $\wp(u)$	104
4. Формула сложения для функции $\wp(u)$	105
5. Функция $\zeta(u)$	106
6. Функция $\sigma(u)$	107
7. Частный случай $g_2 = 0$, $g_3 = 1$	108
8. Функция $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$	109
9. Соотношения между функциями $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ и функцией $\sigma(u)$	111
10. Дифференциальные уравнения для отношений функций сигма	112
11. Изменение функций $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при изменении аргумента на величину ω , ω' , ω''	114
12. Изменение функций $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ при изменении периодов	116
13. Выражение эллиптических функций через функцию $\sigma(u)$. Общие свойства,	117
14. Интегралы от эллиптических функций	119
15. Выражение функций Якоби через функции Вейерштрасса	120
16. Вырождение эллиптических функций	121
17. Дифференциальные уравнения, интегрируемые в функции $\sigma(u)$	123

Глава V

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Общие замечания	126
2. Функция $sn u$	127
3. Функция $cn u$	130
4. Функция $dn u$	133
5. Функция $tn u$	135
6. Функция $\wp(u)$	136
7. Отображение прямоугольника на круг радиуса 1	142
8. Конформное отображение, доставляемое эллиптическими интегралами	142
9. Конформное отображение треугольника на полуплоскость при помощи эллиптических функций	149

Глава VI

МОДУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Инварианты g_2, g_3 как функции отношения периодов	151
2. Абсолютный инвариант	152
3. Модуль k^2 как функция отношения периодов	154

Глава VII

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Вычисление значений функций Якоби	158
2. Вычисление аргумента u , когда задано значение одной из эллиптических функций $sn(u, k)$, $cn(u, k)$, $dn(u, k)$ и значение модуля k	163
3. Вычисление периодов функции $\wp(u; g_2, g_3)$	167
4. Вычисление значений функции $\wp(u)$	171
5. Вычисление значений аргумента функции $\wp(u)$ по заданному значению самой функции	174
6. Вычисление значений функции $zn u$	181
7. Вычисление значений функции $\zeta(u; g_2, g_3)$	183
8. Вычисление значений функций тета	187
9. Вычисление эллиптических функций с помощью функций тета	190
10. Вычисление значений функции $\sigma(u)$	192

Глава VIII

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ

1. Маятник	196
2. Сферический маятник	200
3. Изгиб и сжатие	205
4. Регулятор Уатта	211
5. Движение шатуна кривошипа	214
6. Плоское движение жидкости	215
7. Течение жидкости в двухсвязных областях	218
8. Обтекание пластинок	223
9. Коэффициент взаимной индукции двух круговых токов	224
10. Постоянная гальванометра	227
11. Стационарное электрическое поле	229
Литература	231

Редактор издательства *Н. А. Талицкий* Подписано к печати 12/III 1941 г. Ризо № 1414-328
А—№ 36469. Объем 14³/₄ печ. л., Уч-изд. л. 20.4. Тираж 1000 экз. Цена книги 18 р. 50 к.

б-я тип. Трансжелдориздата НКПС, Москва, Каланчевский тупик, дом 3/5, Заказ 231